

N° d'ordre : **03/2006-D/MT**
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI
BOUMEDIENE



FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT

EN : MATHEMATIQUES
Spécialité : ANALYSE (EDP)

Par :
Leila RAHMANI

Sujet

Modélisation asymptotique de l'effet dynamique de couches minces en mécanique des structures

Soutenue le 26 04 2006, devant le jury composé de :

Mr. Dj. TENIOU, Professeur, USTHB

Mr. K. LEMRABET, Professeur, USTHB

Mr. A. MOKRANE, Professeur, E.N.S \KOUBA

Mr. M. MORSLI, Professeur, Univ. TIZI-OUZOU

Mr. A. HEMINNA, Maitre de conférences, USTHB

Président

Directeur de thèse

Examineur

Examineur

Examineur

A la mémoire de ma mère
A mon père

Remerciements

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements et ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse Mr. K. Lemrabet de m'avoir orienté vers ce domaine de recherche et fait partager son goût de la science et des mathématiques. Sa disponibilité constante, sa patience mais surtout son soutien et ses encouragements m'ont toujours été d'une aide très précieuse et m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Mr. D. Teniou pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury et pour ses remarques et conseils très fructueux.

Je remercie également Mr. Hemina, Mr. Mokrane et Mr. Morsli pour leur participation au jury et pour l'effort qu'ils ont fourni et l'intérêt qu'ils ont porté à ce document.

Une grande partie de ce travail a été réalisée au sein du laboratoire d'analyse numérique de l'université de Rennes1 (IRMAR). Je remercie chaleureusement Mme Monique Dauge, directrice de recherche au CNRS, qui m'a toujours réservé un accueil chaleureux et m'a permis, grâce à sa compétence, sa gentillesse et sa disponibilité d'apprendre beaucoup de choses. Elle m'a fait découvrir ses techniques et m'a permis d'explorer un autre domaine de recherche que j'apprécie beaucoup. Qu'elle me sache très touchée de sa bienveillance. Je remercie aussi très profondément Grégory Vial pour sa collaboration fructueuse : la première partie de ce travail a été réalisée avec lui et d'autres projets communs sont en cours. Il a toujours été disponible et a toujours su répondre avec le sourire à toutes mes questions. Son amitié, son soutien, son enthousiasme et l'intérêt qu'il a porté à mes travaux m'ont été vitaux ; je lui en serai toujours redevable. J'exprime aussi ma profonde reconnaissance aux autres membres de l'équipe d'analyse numérique, en particulier Gabriel Caloz, Martin Costabel, Alain Mignot, pour leur gentillesse, leur accueil et les conditions de travail confortables qu'ils m'ont offertes.

J'exprime aussi mes remerciements les plus sincères à ma famille : à mon

cher père qui a toujours cru en moi et qui m'a soutenu en toute circonstance, tout au long de mes années d'études ; à mon mari ; à mes frères et soeurs ; à mes tantes et oncles ; à mes grand mères ; mes belles soeurs et beaux parents. Enfin, je ne saurai oublier de rendre un très grand hommage à ma defunte mère : elle m'a toujours soutenue et encouragée. Elle a tant attendu ce jour. Je regrette qu'elle ne soit pas là aujourd'hui pour partager ma joie.

Table des matières

1	Rappels	22
2	Conditions aux limites approchées pour une plaque mince en flexion	32
2.1	Introduction	32
2.2	Position du problème	33
2.3	Existence, unicité, estimations à priori	34
2.4	Changement d'échelle	36
2.4.1	Coordonnées locales	36
2.4.2	Développement des opérateurs en puissance de δ	37
2.5	Construction du développement asymptotique	40
2.5.1	Les premiers termes du développement	41
2.5.2	Le développement complet : estimation du reste	45
2.6	Conditions aux limites approchées	49
2.6.1	Condition d'ordre 0	50
2.6.2	Condition d'ordre 1	50
2.7	Cas où le module de Young dépend de l'épaisseur	54
3	Modélisation de l'effet dynamique d'un raidisseur sur le bord d'une plaque mince	57
3.1	Introduction	57
3.2	Position du problème	58
3.3	Formulation variationnelle	62
3.4	Changement d'échelle	64
3.4.1	Formulation du problème dans un domaine fixe	66
3.5	Le modèle de Ventcel	69
3.5.1	Estimations à priori.	69
3.5.2	Le problème limite	76

4	L'effet d'une couche mince sur une plaque mince non linéaire	84
4.1	Introduction	84
4.2	Position du problème	85
4.3	Formulation variationnelle	87
4.4	Changement d'échelle	87
4.5	Développement asymptotique et conditions aux limites appro- chées	91
4.5.1	Une hiérarchie d'équations	96
4.5.2	Détermination de w^0 et u^0 , conditions approchées d'ordre 0	101
4.5.3	Détermination de w^1 et u^1	105
4.5.4	Conditions aux limites approchées d'ordre 1, problème de Ventcel	107

Introduction

La prise en compte de l'effet de petites perturbations sur un modèle physique peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul, car elle nécessite le plus souvent une discrétisation assez fine (d'autant plus fine que la perturbation est petite) du modèle.

Le développement de modèles approchés moins gourmands en temps de calcul et assez riches pour pouvoir rendre compte de l'effet des petites perturbations est possible dans certains cas : milieux périodiques, milieux dont une ou plusieurs épaisseurs sont très petites relativement aux autres, contraste élevé entre deux milieux, etc....., et offre donc une alternative très intéressante (voir nécessaire) pour la simulation numérique.

Notre étude traite du cas de problèmes posés sur des domaines avec couches minces. La simulation numérique de ces problèmes nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche. Le maillage comporte alors un très grand nombre d'éléments, ce qui rend les calculs parfois longs et peu précis. Pour cette raison, on cherche à remplacer le problème initial par un autre problème, dont la solution est proche de celle qu'on cherche, et qui ne fait plus intervenir la couche mince. La méthode consiste à remplacer celle-ci par des conditions aux limites qui rendent compte de son effet.

De tels problèmes ont fait l'objet de nombreuses études, principalement en électromagnétisme où cette méthode a été appliquée pour approcher le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle conducteur revêtu d'une couche mince. Plusieurs approches pour la construction de ce type de conditions ont été introduites par de très nombreux auteurs parmi lesquels nous citons Engquist-Nédélec [14], Senior-Volakis [37], Bendali-Lemrabet [7], Ammari-Latiri-Grouz [2], Haddar-Joly [19] et plus récemment, Bendali-Bartoli [6] .

Dans ce travail, notre intérêt porte sur des problèmes similaires en mécanique des structures. Plus précisément, on s'intéresse à l'étude asymptotique

tique des structures élastiques constituées par des plaques minces revêtues de couches minces ou renforcées par des raidisseurs. L'intérêt pour une modélisation fine de ces structures est d'autant plus grand que le nombre des applications industrielles va croissant. Elles interviennent dans plusieurs domaines concrets, notamment l'aviation, l'automobile, le bâtiment,...etc. Parmi les travaux effectués sur le sujet et qui ont inspiré ce présent travail, on peut citer ceux de K. Lemrabet [28] et Lemrabet-Teniou [29] où l'on étudie le comportement d'une plaque en flexion avec un raidisseur posé sur une partie de son bord. Ces travaux constituent donc un premier point de référence pour notre étude. Par ailleurs, on peut aussi rapprocher l'étude faite ici avec la modélisation des "multi-structures" qui associent des éléments de dimensions différentes, puisqu'il s'agit de modéliser la jonction entre deux solides. De telles structures ont fait l'objet de nombreuses études, dont les travaux de Ciarlet [9], [10] et Ledret [27], où plusieurs modèles de jonctions de plaques élastiques sont identifiés et justifiés par des techniques asymptotiques. Citons aussi les contributions de Geymonat [16], Gruais [17], [18] et Aufranc[3], [4], [5], dans ce domaine et qui se sont attachées à la modélisation de différentes multi-structures (comportement d'un assemblage collé, jonction d'une plaque avec une poutre, plaque avec raidisseur, ...). D'une façon générale, on se reportera à Ciarlet [9], [10] pour des bibliographies beaucoup plus complètes sur le sujet, en ce qui concerne notamment l'analyse asymptotique dans le cas non linéaire et la technique des échelles multiples.

L'étude que nous proposons est divisée en trois parties principales : dans la première partie, on étudie la flexion d'une plaque mince entourée d'une fine couche élastique d'épaisseur δ . On traite deux cas : le cas où la rigidité de la couche mince est supposée rester finie et le cas où elle tend vers l'infini quand δ tend vers 0. La construction d'un développement asymptotique de la solution du modèle de Kirchhoff-Love quand δ tend vers zéro est décrite dans son intégralité, des estimations optimales du reste sont données. On identifie des conditions aux limites approchées d'ordre 0 et 1 qui rendent compte de l'effet de la couche mince, définissant ainsi des problèmes approchés. L'utilisation de l'analyse multi-échelle permet d'obtenir des estimations optimales de l'erreur commise.

Dans la seconde partie, on propose une extension des résultats de K. Lemrabet [28] au cas non linéaire. On considère alors le système complet dynamique de von Karman pour une plaque mince dans laquelle est inséré un corps mince élastique (raidisseur) d'épaisseur δ , δ étant un paramètre destiné à tendre vers zéro. On suppose que le module de Young et la densité de masse

du matériau constituant le corps mince varient en $\frac{1}{\delta}$, ce qui signifie d'un point de vue mécanique que celui-ci devient très lourd et infiniment rigide quand δ tend vers zéro.

Afin de surmonter les difficultés rencontrées lors de la simulation numérique de la solution de ce problème, on cherche à modéliser cette jonction et donner un problème équivalent ne faisant pas intervenir le raidisseur. Pour ce faire, on met en oeuvre une analyse asymptotique basée sur la technique des perturbations singulières développée par J. L. Lions dans [31] pour des problèmes variationnels "abstraites", puis appliquée dans de nombreux travaux pour justifier des modèles de corps élastiques minces. Après une mise à l'échelle adéquate, on établit des estimations a priori qui permettent d'extraire une sous suite faiblement convergente et passer à la limite dans le problème variationnel mis à l'échelle. Le problème limite obtenu est un problème posé sur la surface moyenne de la plaque mince avec de nouvelles conditions aux limites évolutives non linéaires sur l'interface de jonction. Notre problème étant non linéaire, on fait souvent appel aux techniques non linéaires dans les équations aux dérivées partielles, notamment les théorèmes de compacité.

Dans la troisième partie, On considère le système complet de von Karman pour une plaque mince recouverte d'une fine couche élastique. On s'intéresse au cas où la rigidité et la densité de la couche mince sont supposées rester finies et ne pas tendre vers l'infini pour compenser l'épaisseur de celle-ci. On utilise la méthode des développements asymptotiques formels pour identifier des conditions aux limites approchées qui permettent de modéliser l'effet de la couche mince. Pour dériver ces conditions aux limites, on effectue une approximation d'ordre 1, correspondant à un développement asymptotique tronqué à l'ordre 1. Les conditions ainsi identifiées sont celles obtenues par passage à la limite dans la deuxième partie, mais qui dépendent cette fois-ci de l'épaisseur de la couche mince.

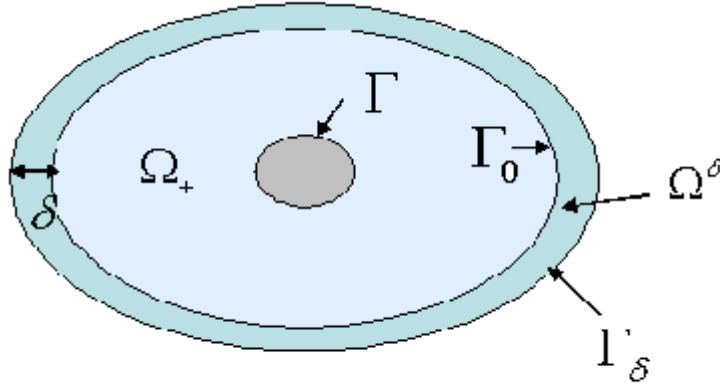
Finalement, il convient de signaler que les conditions aux limites dérivées dans tout ce travail ne sont pas classiques car elles font intervenir des dérivées tangentielles du même ordre que celui de l'opérateur intérieur. Ces conditions aux limites sont appelées dans la littérature russe conditions de Ventcel et le problème associé est nommé problème de Ventcel.

Résultats de la première partie

Soit Ω_+ un ouvert borné de R^2 , représentant la surface moyenne de la plaque mince. Le bord de Ω_+ est composée de deux parties : Γ_0 et Γ , supposées régulières. Pour $\delta > 0$ assez petit, la couche mince Ω_-^δ provient d'une dilatation uniforme de Γ_0 dans la direction normale d'épaisseur δ :

$$\Omega_-^\delta = \{x + r\nu(x) ; x \in \Gamma_0 \text{ et } 0 < r < \delta\},$$

où $\nu(x)$ est la normale au point x de Γ_0 , extérieure à Ω_+ ; le bord extérieur du domaine Ω_-^δ est noté Γ_δ et le domaine complet $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_-^\delta$.



La plaque et la couche mince

La plaque est encastrée sur le bord intérieur Γ et est libre d'effort sur son bord extérieur Γ_δ . Les équations données par le modèle de Kirchhoff-Love, qui décrit la flexion de la plaque, s'écrivent (voir[22])

$$\left\{ \begin{array}{ll} D^+ \Delta^2 w_+^\delta = f & \text{dans } \Omega_+ \\ D^- \Delta^2 w_-^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_-^\delta, \\ [w^\delta] = 0 ; [\partial_\nu w^\delta] = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ M^+(w_+^\delta) = M^-(w_-^\delta) ; & \text{sur } \Gamma_0, \\ T^+(w_+^\delta) = T^-(w_-^\delta) & \text{sur } \Gamma_0, \\ M(w^\delta) = 0 ; T(w^\delta) = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ w^\delta = 0 ; \partial_\nu w^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où les opérateurs M et T sont définis par :

$$M = D [\Delta + (1 - \mu) (2\nu_1\nu_2\partial_{12} - \nu_1^2\partial_2^2 - \nu_2^2\partial_1^2)]$$

$$T = D [\partial_\nu\Delta + (1 - \mu)\partial_\tau ((\nu_1^2 - \nu_2^2)\partial_{12} + \nu_1\nu_2(\partial_2^2 - \partial_1^2))]$$

et où on a posé $D = \frac{E}{(1-\mu^2)}$, E étant le module de Young et $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ le coefficient de Poisson.

On souhaite trouver un problème proche de celui ci dans lequel la couche mince n'apparaît plus. Plus précisément, on recherche des conditions aux limites $CL_\delta(w)$ telle que la solution w de

$$\left\{ \begin{array}{l} D^+\Delta^2 w = f \quad \text{dans } \Omega_+ \\ w = 0 ; \partial_\nu w = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ CL_\delta(w) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

soit proche de w^δ quand δ est voisin de 0. Ces conditions seront établies par une méthode basée sur un changement d'échelle et un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la couche mince.

La première difficulté que l'on rencontre lorsque l'on veut étudier le comportement asymptotique et si possible la convergence de la famille w^δ quand δ tend vers zéro, est que les w^δ appartiennent à des espaces fonctionnels qui varient avec δ . On ne peut donc pas les comparer entre eux directement. Une idée naturelle pour contourner cette difficulté est d'effectuer une dilatation de rapport δ^{-1} de la couche mince dans la direction normale et de transporter w^δ sur l'ouvert ainsi défini. On transforme ainsi le domaine Ω^δ en un domaine fixe et le petit paramètre δ n'apparaît plus dans la géométrie, mais dans les équations. L'idée consiste ensuite à approcher la solution par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation sur Γ_0 fournissant les conditions aux limites approchées recherchées.

Cette partie s'attache à traiter deux cas : le cas où les rigidités des matériaux constituant la plaque mince et la couche mince sont du même ordre de grandeur (ce qui correspond à des modules de Young indépendants de δ) et le cas où la couche mince est bien plus rigide que la plaque mince (module de Young variant en $\frac{1}{\delta}$ dans Ω_-^δ). Dans les deux cas, on donne des problèmes approchés d'ordre 0 et 1.

Cas où $E = E_-$ dans Ω_-^δ (indépendant de δ)

• A l'ordre 0

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_0^\delta = f_+ \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_0^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_0^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_0^\delta = \partial_\nu w_0^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

• A l'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_1^\delta = f \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_1^\delta) + \delta Q_0(w_1^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_1^\delta) + \delta P_0(w_1^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_1^\delta = 0 ; \partial_\nu w_1^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

où

$$Q_0 = -D_- [2(1 - \mu_-) \partial_s (\partial_s \partial_\nu + R(s) \partial_s) + (1 - \mu_-^2) R(s) (\partial_s^2 - R(s) \partial_\nu)],$$

$$P_0 = -D_- [(1 - \mu_-^2) \partial_s^2 (\partial_s^2 - R(s) \partial_\nu) + 2(1 - \mu_-) \partial_s [-R(s) (\partial_s \partial_\nu + R(s) \partial_s)]],$$

s étant l'abscisse curviligne et $R(s)$ la courbure de Γ_0 en s . On montre les estimations d'erreur suivantes :

$$\|w_+^\delta - w_0^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} \leq C\delta$$

$$\|w_+^\delta - w_1^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} \leq C\delta^2$$

Remarque 1 *Le problème approché d'ordre 0 correspond au modèle de plaque en flexion, posé sur le domaine Ω_+ . Cette approximation revient à négliger*

totallement la couche mince et ne présente, par conséquent, que très peu d'intérêt. Il a donc fallu aller plus loin dans le développement asymptotique pour aboutir à des conditions d'ordre supérieur plus utiles qui font intervenir la couche mince.

Remarque 2 *L'approximation d'ordre 1 rend compte de l'effet de la couche mince par les nouvelles conditions aux limites définies sur Γ_0 . Ces conditions ont déjà été établies par K. Lemrabet dans [28], par un théorème de convergence.*

Cas où $E = E_- \delta^{-1}$ dans Ω_-^δ (dépendant de δ)

- Ordre 0

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_0^\delta = f \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_0^\delta) + Q_0(w_0^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_0^\delta) + P_0(w_0^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_0^\delta = 0 ; \partial_\nu w_0^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

- Ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_1^\delta = f \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_1^\delta) + Q_0(w_1^\delta) + \delta Q_1(w_1^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_1^\delta) + P_0(w_1^\delta) + \delta P_1(w_1^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_1^\delta = 0 ; \partial_\nu w_1^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où les opérateurs différentiels P_1 et Q_1 sont définis par

$$\begin{aligned} Q_1 = & -D_- \left[\frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) \partial_s^2 [\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu] \right. \\ & + 3(1 - \mu_-) \partial_s [-R(s) (\partial_s \partial_\nu + R(s)\partial_s)] \\ & - \frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) R(s) \partial_s [\partial_s \partial_\nu + R(s)\partial_s] \\ & \left. - \frac{1}{2} (2\mu_- + 1) (\mu_-^2 - 1) R^2(s) (\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 = & -D_- \left[\frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) \partial_s [-R(s)\partial_s (\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu)] \right. \\
& - 3(1 - \mu_-)\partial_s [R^2(s) (\partial_s\partial_\nu + R(s)\partial_s)] \\
& - \frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) \partial_s^3 [\partial_s\partial_\nu + R(s)\partial_s] \\
& \left. - \frac{1}{2} (2\mu_- + 1) (\mu_-^2 - 1) \partial_s^2 [R(s) (\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu)] \right]
\end{aligned}$$

et on obtient les estimations optimales suivantes :

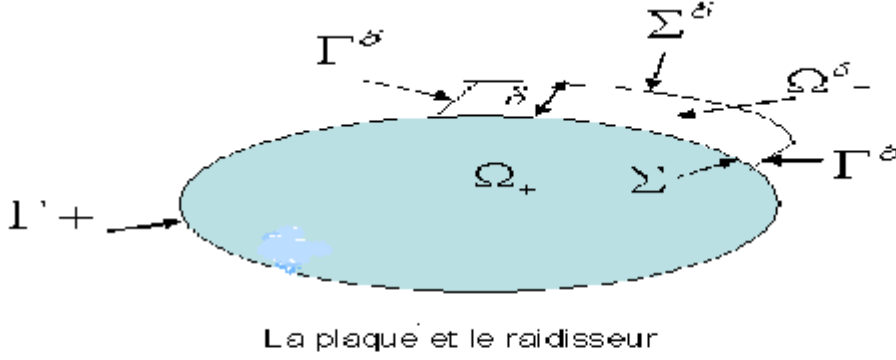
$$\begin{aligned}
\|w_+^\delta - w_0^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} & \leq C\delta \\
\|w_+^\delta - w_1^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} & \leq C\delta^2
\end{aligned}$$

Remarque 3 *Les opérateurs P_0 et Q_0 apparaissent ici dès la condition aux limites approchée d'ordre 0 alors qu'elle n'apparaissait qu'à l'ordre 1 dans le cas d'un module de Young indépendant de δ . Cela peut s'interpréter comme suit : la plus grande rigidité de la couche amplifie son effet sur le déplacement.*

Remarque 4 *Le problème approché d'ordre 1 obtenu ici correspond au problème qu'on obtiendrait en poussant l'approximation à l'ordre 2 dans le cas précédent.*

Résultats de la deuxième partie

On considère une plaque mince de surface moyenne Ω_+ , Ω_+ étant un ouvert de R^2 régulier, de frontière $\partial\Omega_+ = \Sigma \cup \Gamma_+$. On suppose que sur la partie latérale est fixée un raidisseur mince d'épaisseur δ . Le raidisseur est représenté par Ω^δ , où Ω^δ est un ouvert de R^2 . On pose $\partial\Omega^\delta = \Sigma \cup \Sigma_-^\delta \cup \Gamma_-^\delta$ et $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \bar{\Sigma} \cup \Omega_-^\delta$, Σ étant l'interface entre Ω_+ et Ω_-^δ . On note $u = (u_1, u_2)$ le déplacement plan et w le déplacement transversal (flexion).



On considère le modèle de transmission suivant pour cette structure (voir[22]) :

$$\begin{aligned} \rho u'' - \operatorname{div}\{C[\epsilon(u) + f(\nabla w)]\} &= 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T), \\ \rho[I - \Delta]w'' + D\Delta^2 w - \operatorname{div}\{C[\epsilon(u) + f(\nabla w)]\nabla w\} &= 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T), \end{aligned}$$

avec des conditions d'encastrement sur la partie du bord $\Gamma_+ \cup \Gamma_-^\delta$

$$u = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_-^\delta \times (0, T),$$

et des conditions du bord libre sur Σ_-^δ

$$C[\epsilon(u) + f(\nabla w)]\nu = 0; \quad D[\Delta w + (1 - \mu)B_1 w] = 0,$$

$$D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 w}{\partial s} \right] - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\epsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \cdot \nabla w = 0$$

sur $\Sigma_-^\delta \times (0, T)$. On définit les conditions de transmission sur $\Sigma \times (0, T)$ par

$$[[u]] = 0; \quad [[w]] = \left[\left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right] = 0,$$

$$[[C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu]] = 0 ; [[D[\Delta w + (1 - \mu)B_1 w]]] = 0,$$

$$\left[\left[D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 w}{\partial s} \right] - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \cdot \nabla w \right] \right] = 0.$$

On associe à ce problème les conditions initiales

$$u(0) = u_0 , u'(0) = u_1 , w(0) = w_0 , w'(0) = w_1 \quad \text{dans } \Omega^\delta.$$

Le crochet $[[\]]$ désigne le saut de la trace d'une fonction définie sur Ω^δ à travers la frontière Σ . On désigne par $\varepsilon(u) = 1/2 (\nabla u + \nabla^T u)$ le tenseur des déformations linéarisé et C une application linéaire de l'ensemble S des tenseurs symétriques d'ordre 4 dans lui même définie par : $C(\zeta) = D [\mu(\text{tr}\zeta)I_S + (1 - \mu)\zeta] \forall \zeta \in S$, I_S étant l'identité dans S . La fonction f est définie par $f(s) = (1/2)s \otimes s$, $s \in \mathcal{R}^2$. On note $D = \frac{E}{(1-\mu^2)}$ le module de rigidité de la plaque à la flexion ; E désigne le module de young, μ le coefficient de Poisson et ρ la densité de masse du matériau. On suppose que E et ρ varient en $\frac{1}{\delta}$ dans Ω^δ . On note s l'abscisse curviligne et $\nu(s) = (\nu_1(s), \nu_2(s))$ la normale extérieure à Σ en s . Les opérateurs de traces B_1 et B_2 sont définis par :

$$B_1 w \equiv 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$B_2 w \equiv (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1\nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Notre but est d'établir un problème approché ne faisant pas intervenir le raidisseur, mais de nouvelles conditions aux limites qui rendent compte de son effet. La méthode utilisée ici est celle de l'analyse asymptotique qui consiste à étudier le comportement limite de la solution quand δ tend vers zéro. A cet effet, nous effectuons une dilatation de l'ordre de δ^{-1} , dans le sens de l'épaisseur, de sorte que le domaine d'étude soit indépendant de δ . En se basant sur des estimations a priori, on établit des résultats de convergence faible d'une sous suite de la solution vers une solution d'un problème de Cauchy-Ventcel. Le problème limite ainsi obtenu est un problème posé sur la surface moyenne de la plaque mince avec de nouvelles conditions aux limites non linéaires sur l'interface de jonction. La difficulté spécifique que notre problème pose demeure dans la manipulation des termes non linéaires. Nous

la surmontons en faisant appel aux injections compactes dans les espaces de Sobolev.

La formulation forte du problème limite est la suivante :

$$\begin{aligned}\rho_+(\tilde{u}_+)'' - \operatorname{div}\{C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]\} &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T), \\ \rho_+[I - \Delta](\tilde{w}_+)'' + D_+\Delta^2\tilde{w}_+ - \operatorname{div}\{C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]\nabla\tilde{w}_+\} &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T),\end{aligned}$$

avec les conditions d'encastrement sur Γ_+

$$\tilde{u}_+ = 0, \tilde{w}_+ = \frac{\partial\tilde{w}_+}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \times (0, T),$$

et les conditions de Ventcel sur $\Sigma \times (0, T)$

$$\begin{aligned}{}^t\boldsymbol{\tau}(C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)])\boldsymbol{\nu} &= \rho_-(\tilde{u}_{+\tau})'' - E_- \frac{\partial}{\partial s} [N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)], \\ {}^t\boldsymbol{\nu}(C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)])\boldsymbol{\nu} &= \rho_-(\tilde{u}_{+\nu})'' + E_- R(s) [N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)], \\ D_+[\Delta\tilde{w}_+ + (1 - \mu)B_1\tilde{w}_+] &= -Q(\tilde{w}_+) - \rho_- \frac{\partial\tilde{w}_+''}{\partial\nu}, \\ D_+ \left[\frac{\partial\Delta\tilde{w}_+}{\partial\nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2\tilde{w}_+}{\partial s} \right] - \rho_+ \frac{\partial\tilde{w}_+''}{\partial\nu} - C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla\tilde{w}_+ &= \\ \rho_- \left[\tilde{w}_+ - \frac{\partial^2\tilde{w}_+}{\partial s^2} \right]'' + P(\tilde{w}_+) - E_- \frac{\partial}{\partial s} \left[N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial\tilde{w}_+}{\partial s} \right],\end{aligned}$$

où ${}^t\boldsymbol{\nu}$ (resp. ${}^t\boldsymbol{\tau}$) est le vecteur transposé (resp. matrice) de $\boldsymbol{\nu}$ (resp. $\boldsymbol{\tau}$). On associe avec ce problème les conditions initiales

$$\tilde{u}_+(0) = u_+^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_+^{**}, \tilde{w}_+(0) = w_+^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_+^{**} \text{ dans } \Omega_+$$

$$\tilde{w}_+(0) = w_{+|\Sigma}^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_{+|\Sigma}^{**}, \left(\frac{\partial\tilde{w}_+}{\partial\nu}\right)'(0) = w_{+|\Sigma}^{***}, (\tilde{u}_+)(0) = u_{+|\Sigma}^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_{+|\Sigma}^{***} \text{ sur } \Sigma$$

où les opérateurs P et Q sont définis par :

$$P(\tilde{w}) = E_- \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \boldsymbol{\gamma}_T(\tilde{w}) + \frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} (R(s)\boldsymbol{\gamma}_S(\tilde{w})) \right]$$

$$Q(\tilde{w}) = E_- \left[\frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} \gamma_S(\tilde{w}) - R(s) \gamma_T(\tilde{w}) \right]$$

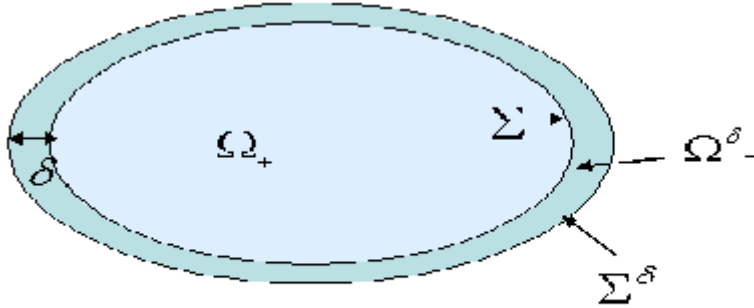
et où

$$\begin{aligned} \gamma_T(\tilde{w}_+) &= \frac{\partial^2 \tilde{w}_+}{\partial s^2} - R(s) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} ; \quad \gamma_S(\tilde{w}_+) = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} - R(s) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s}, \\ N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) &= \frac{\partial \tilde{u}_{+\tau}}{\partial s} - R(s) \tilde{u}_{+\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \right)^2. \end{aligned}$$

Résultats de la troisième partie

On considère le système de von Karman pour une plaque mince recouverte d'une fine couche élastique. On s'intéresse au cas où la rigidité et la densité de la couche mince sont supposées rester finies et ne pas tendre vers l'infini pour compenser l'épaisseur de celle-ci. Nous tentons de retrouver les conditions aux limites approchées de Ventcel obtenues dans la deuxième partie en utilisant cette fois-ci la méthode des développements asymptotiques formels.

Soit donc Ω^δ un ouvert borné de R^2 divisé en deux sous domaines Ω_+ et Ω_-^δ par une interface Σ . Ω_+ représente la plaque mince et Ω_-^δ désigne la couche mince. Le problème de transmission étudié est celui donné dans la partie 2, sans les conditions d'encastrement : la plaque Ω^δ est supposée libre d'effort sur Σ_-^δ , où cette fois-ci $\Sigma_-^\delta = \partial\Omega^\delta$. (en fait, $\partial\Omega_+ = \Sigma$; $\partial\Omega_-^\delta = \Sigma \cup \Sigma_-^\delta$ et du fait $\partial\Omega^\delta = \Sigma_-^\delta$).



La plaque et la couche mince

On transforme d'abord le domaine Ω^δ en un domaine fixe par une mise à échelle adéquate. L'idée consiste ensuite à approcher la solution par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation sur Σ fournissant les conditions aux limites approchées recherchées. En notant (u_+^0, w_+^0) la solution du problème approché d'ordre 0 et $(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)$ celle du problème approché d'ordre 1, on obtient :

•A l'ordre 0

$$\rho_+ (u_+^0)'' - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u_+^0) + f(\nabla w_+^0)]\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T)$$

$$\rho_+[I - \Delta] (w_+^0)'' + D_+\Delta^2 w_+^0 - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u_+^0) + f(\nabla w_+^0)]\nabla w_+^0\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T)$$

avec les conditions du bord libre sur $\Sigma \times (0, T)$

$$C[\varepsilon(u_+^0) + f(\nabla w_+^0)]\nu = 0 ;$$

$$D [\Delta w_+^0 + (1 - \mu)B_1 w_+^0] = 0 ;$$

$$D_+ \left[\frac{\partial \Delta w_+^0}{\partial \nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2 w_+^0}{\partial s} \right] - \rho_+ \left(\frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \right)'' - C[\varepsilon(u_+^0) + f(\nabla w_+^0)]\nu \cdot \nabla w_+^0 = 0$$

et les conditions initiales

$$u_+^0(0) = u_+^*, (u_+^0)'(0) = u_+^{**}, w_+^0(0) = w_+^*, (w_+^0)'(0) = w_+^{**} \quad \text{dans } \Omega_+$$

•A l'ordre 1

$$\begin{aligned} \rho_+(\tilde{u}_+)'' - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)]\} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T), \\ \rho_+[I - \Delta \tilde{w}_+]'' + D_+\Delta^2 \tilde{w}_+ - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)]\nabla \tilde{w}_+\} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T), \end{aligned}$$

avec les conditions de Ventcel sur $\Sigma \times (0, T)$

$${}^t\boldsymbol{\tau} (C[\varepsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)])\boldsymbol{\nu} = \delta \left(-\rho_- (\tilde{u}_\tau)_+'' + E_- \frac{\partial}{\partial s} [N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)] \right),$$

$$\begin{aligned}
{}^t\nu (C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)])\nu &= \delta \left(-\rho_-(\tilde{u}_+)_+'' + E_-R(s)N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \right), \\
D_+ [\Delta\tilde{w}_+ + (1 - \mu)B_1\tilde{w}_+] &= -\delta \left(Q(\tilde{w}_+) + \rho_- \frac{\partial\tilde{w}_+''}{\partial\nu} \right), \\
D_+ \left[\frac{\partial\Delta\tilde{w}_+}{\partial\nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2\tilde{w}_+}{\partial s} \right] - \rho_+ \frac{\partial\tilde{w}_+''}{\partial\nu} - C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]\nu \cdot \nabla\tilde{w}_+ &= \\
\delta \left(\rho_- \left[\tilde{w}_+ - \frac{\partial^2\tilde{w}_+}{\partial s^2} \right]'' + P(\tilde{w}_+) - E_- \frac{\partial}{\partial s} \left[N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial\tilde{w}_+}{\partial s} \right] \right),
\end{aligned}$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_+(0) &= u_+^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_+^{**}, \tilde{w}_+(0) = w_+^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_+^{**} \quad \text{dans } \Omega_+ \\
\tilde{w}_+(0) &= w_{+|\Sigma}^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_{+|\Sigma}^{**}, \left(\frac{\partial\tilde{w}_+}{\partial\nu} \right)'(0) = w_+^{***}, (\tilde{u}_+)(0) = u_{+|\Sigma}^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_{+|\Sigma}^{***} \quad \text{sur } \Sigma
\end{aligned}$$

Remarque 5 *A l'ordre 0, on reconnaît le problème de von Karman posé sur l'ouvert Ω_+ . Les conditions aux limites approchées obtenues sont en fait naturelles, elles consistent à enlever tout simplement la couche mince. Elles sont toutefois inintéressantes puisqu'elles ne prennent pas en compte l'effet de la couche. Elles ne sont satisfaisantes que lorsque l'épaisseur de la couche devient presque nulle. Cependant, elles devraient être retrouvées à tous les ordres supérieurs en faisant tendre δ vers 0.*

Remarque 6 *En poussant le développement plus loin et en faisant une approximation d'ordre 1, on retrouve les conditions aux limites approchées obtenues dans la partie 2. Néanmoins, elles sont ici multipliées par δ . Ceci provient du fait que les coefficients d'élasticité des deux matériaux sont du même ordre de grandeur quand δ est petit, contrairement au cas traité dans la partie 2 où les coefficients sont en δ^{-1} dans le raidisseur. Autrement dit, quand δ tend vers 0, la couche mince doit disparaître, ce qui est en accord avec l'intuition physique.*

Remarque 7 *Notre approche est ici formelle et par conséquent ne comporte pas de justifications par une étude de convergence. L'obtention d'estimations d'erreur entre la solution du problème de départ et celle du problème approché ne parait pas évidente dans notre cas, vu la complexité du problème de von Karman.*

Remarque 8 *Dans la première partie de ce travail, nous avons effectué un développement asymptotique à partir des équations et des conditions aux limites du problème. Dans cette partie, nous avons exposé une méthode qui consiste à faire un développement à partir de la formulation variationnelle du problème. Cette méthode est, bien entendu, équivalente à la première. Elle est moins explicite mais plus rapide, donnant directement les formulations variationnelles des problèmes. Vu la complexité du modèle de von Karman, nous avons choisi d'utiliser cette technique.*

Chapitre 1

Rappels

L'objet de ce chapitre est de rappeler rapidement les notions d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle dont nous aurons besoin par la suite.

Rappels d'analyse fonctionnelle

L'espace $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$)

Définition 1.1 Soit Ω un ouvert borné de R^n .

a) On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions définies et mesurables sur Ω (pour la mesure de Lebesgue dx) telles que :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$$

On munit $L^p(\Omega)$ de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

b) $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des classes de fonctions f définies, mesurables et bornées presque partout sur Ω . On note :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)|$$

Théorème 1.1 $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, séparable si $1 \leq p < +\infty$ et réflexif si $1 < p < +\infty$.

proposition 1.1 (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

La mise en oeuvre et l'exploitation rigoureuse des problèmes de la mécanique des milieux déformables sous forme variationnelle s'effectue dans le cadre de la théorie des espaces de Sobolev. Nous rappellerons ici les définitions et les résultats qui seront utilisés par la suite. Pour les démonstrations et une étude plus détaillée, nous renvoyons aux ouvrages spécialisés, par exemple [1], [8], [12].

Définition 1.2 Soit Ω un ouvert borné de R^n . Pour $m \in N$ et $p \geq 1$, on pose

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) ; \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$((f, g))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$$

proposition 1.2 *On suppose Ω borné de classe C^1 . On a :*

$$\begin{aligned} \text{si } p < n, \quad W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[\quad \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ \text{si } p = n, \quad W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[\\ \text{si } p > n, \quad W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

avec injections compactes.

En particulier, si $n = 2$, l'injection

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

est compacte $\forall p, 1 \leq p < +\infty$.

Théorème 1.2 *On suppose $n = 2$. Soient $s_1 \geq 0$ et $s_2 \geq 0$. Alors si*

$$r = \min \{s_1, s_2, s_1 + s_2 - 2\} \geq 0,$$

l'application :

$$\begin{aligned} H^{s_1}(\Omega) \times H^{s_2}(\Omega) &\longrightarrow H^r(\Omega) \\ (f, g) &\longrightarrow fg \end{aligned}$$

est continue.

Théorème 1.3 (cf. [30]).

Soit Ω un ouvert borné de R^n , de frontière assez régulière. Soit $s \in R$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'injection

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$$

est compacte.

Théorème 1.4 (cf. [38]).

Si $n = 2$, on a l'injection

$$H^{1-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2}{\varepsilon}}(\Omega), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Inégalités de Poincaré et de Korn

Soit Ω un ouvert borné de R^n et Γ une partie de sa frontière telle que $mes(\Gamma) > 0$.

Inégalité de Poincaré

Il existe une constante positive c (dépendant seulement du diamètre de Ω) telle que :

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

pour tout w dans $H^1(\Omega)$ tel que $w = 0$ sur Γ .

Inégalité de Korn

Il existe une constante positive c (dépendant seulement du diamètre de Ω) telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left(\sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Pour tout $v \in (H^1(\Omega))^n$. (cf. [13]).

L'espace $L^p(a, b; X)$

Soient X un espace de Banach et $]a, b[$ un ouvert de R . On désigne par $\| \cdot \|_X$ la norme dans X .

Définition 1.3 On désigne par $L^p(a, b; X)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) l'espace des classes des fonctions mesurables de $]a, b[$ dans X telles que

$$\|f\|_{L^p(a,b; X)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \text{ pour } p < +\infty$$
$$\|f\|_{L^\infty(a,b; X)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \in]a,b[} \text{ess } \|f(t)\|_X < +\infty \text{ pour } p = +\infty$$

proposition 1.3 Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(a, b; X)$ est un espace de Banach.

Distributions vectorielles

Définition 1.4 On appelle espace des distributions vectorielles de $]a, b[$ à valeurs dans un espace de Banach X et on note $D'(a, b; X)$ l'espace des applications linéaires continues de $D(]a, b[)$ à valeurs dans X et on note

$$D'(]a, b[; X) = \mathcal{L}(D(]a, b[); X)$$

Définition 1.5 Soit $f \in D'(]a, b[; X)$ et soit m un entier naturel. Alors, l'application

$$\varphi \longrightarrow (-1)^m f \left(\frac{d^m \varphi}{dt^m} \right), \quad \varphi \in D(]a, b[)$$

est une distribution que l'on note $\frac{d^m f}{dt^m}$.

L'espace $W(a, b; V, V')$

On considère deux espaces de Hilbert réels V et H séparables. On note $((,))$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme dans V et $(,)$, $\| \cdot \|$ les notions correspondantes dans H .

En outre, on suppose que V est dense dans H si bien qu'en identifiant H et son dual H' , on a

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

chaque espace étant dense dans le suivant.

Définition 1.6 Soient $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$. On désigne par $W(a, b; V, V')$ l'espace

$$W(a, b; V, V') = \{u, u \in L^2(a, b; V), u' \in L^2(a, b; V')\}$$

proposition 1.4 L'espace $W(a, b; V, V')$ muni de la norme

$$\|u\|_W = \left(\|u\|_{L^2(a, b; V)}^2 + \|u'\|_{L^2(a, b; V')}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.5 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, tout $u \in W(a, b; V, V')$ est presque partout égal à une fonction continue de $[a, b]$ dans H . De plus, on a :

$$W(a, b; V, V') \hookrightarrow C^0([a, b]; H),$$

l'espace $C^0([a, b]; H)$ étant muni de la norme de la convergence uniforme.

Théorème 1.6 (Formule de Green)

On suppose $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $u, v \in W(a, b; V, V')$ alors

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} dt + \int_a^b \langle v'(t), u(t) \rangle_{V' \times V} dt = (u(b), v(b)) - (u(a), v(a)).$$

proposition 1.5 Pour $u \in W(a, b; V, V')$, $v \in V$, on a :

$$\langle u'(\cdot), v \rangle_{V' \times V} = \frac{d}{dt} (u(\cdot), v) \quad \text{dans } D'([a, b]).$$

Convergence faible et convergence faible*

Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in X$, tend vers $x \in X$ faiblement lorsque $n \rightarrow +\infty$ si

$$\langle x', x_n \rangle \rightarrow \langle x', x \rangle, \quad \forall x' \in X'.$$

proposition 1.6 Soit X un espace de Banach réflexif, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans X . Alors, il est possible d'extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une sous suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement dans X .

Définition 1.7 (convergence faible*)

Soit X un espace normé et X' son dual. On dit que $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x'_n \in X'$, converge vers $x' \in X'$ faiblement* lorsque $n \rightarrow +\infty$ si

$$\langle x'_n, x \rangle \rightarrow \langle x', x \rangle, \quad \forall x \in X.$$

proposition 1.7 Soit X un espace vectoriel normé séparable. Soit $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x'_n \in X'$, une suite bornée dans X' . Alors, il est possible d'extraire de (x'_n) une sous suite (x'_m) telle que $x'_m \rightarrow x'$ faiblement* dans X' .

proposition 1.8 Soit X un espace de Banach réflexif.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de X ; on suppose

$$\cdot \|x_n\| \leq C < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

· l'ensemble des points d'accumulation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour la topologie faible est réduit à $\{x\}$.

Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x dans X faible.

proposition 1.9 Soit X un espace de Banach (non nécessairement réflexif) séparable.

Soit $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de X' ; on suppose

$$\cdot \|x'_n\| \leq C < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

• l'ensemble des points d'accumulation de $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour la topologie faible* est réduit à $\{x'\}$.

Alors la suite $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x' dans X' faible*.

Remarque 1.1 On sera amené au chapitre 3 à parler de la convergence faible* dans $L^\infty(0, T ; V')$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $L^\infty(0, T ; V')$. Dire que $f_n \rightarrow f$ dans $L^\infty(0, T ; V')$ faible* signifie que

$$\int_0^T \langle f_n(t), g(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt, \forall g \in L^1(0, T ; V).$$

Remarque 1.2 Soit X un espace de Hilbert. Si $u_n \rightarrow u$ dans X faible et $v_n \rightarrow v$ dans X faible, on n'est pas assuré d'avoir $\lim (u_n, v_n) = (u, v)$. Par contre, si $u_n \rightarrow u$ dans X fort et $v_n \rightarrow v$ dans X faible, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, v_n) = (u, v)$.

Approximation de Galerkin d'un espace de Hilbert

Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_m\}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes :

$$\cdot V_m \subset V \text{ (dim } V_m < +\infty \text{)}$$

$$\cdot V_m \rightarrow V \text{ quand } m \rightarrow +\infty \text{ au sens suivant :}$$

il existe \mathcal{V} sous espace dense de V , tel que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, on peut trouver une suite $\{v_m\}$ vérifiant :

$$\text{pour tout } m, v_m \in V_m \text{ et } v_m \rightarrow v \text{ dans } V \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m ($m \neq \dim V_m$) de V .

Pour plus de détails sur ces résultats d'analyse fonctionnelle, on se reportera à [12] et [30].

Eléments de géométrie différentielle dans \mathbb{R}^2

Le but de cette section est de rappeler quelques éléments de géométrie différentielle dont les développements figurent dans [20]

Abscisse curviligne

Définition 1.8 Soit Σ une courbe de \mathbb{R}^2 de classe C^2 et (I, M) une représentation paramétrique de Σ ($I \subset \mathbb{R}$). Pour tout $t \in I$, le nombre réel

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|M(\zeta)\| d\zeta$$

est appelé abscisse curviligne du point $m = M(t)$ avec $m_0 = M(t_0)$ pour origine.

Remarque 1.3 1) L'application $s : I \longrightarrow s(I)$ est un homéomorphisme de classe C^1

2) L'abscisse curviligne s mesure la longueur de la courbe Σ du point m_0 au point m et elle est indépendante de la paramétrisation choisie.

3) L'application P définie de $s(I)$ dans Σ par $P = M \circ s^{-1}$ est un reparamétrage de Σ par l'abscisse curviligne s .

Théorème 1.7 Soit Σ une courbe paramétrée de classe C^2 . Le reparamétrage $P = M \circ s^{-1}$ est un C^2 paramétrage et on a :

$$\left\| \frac{dP}{ds} \right\| = 1$$

Etude géométrique locale d'une courbe paramétrée

Courbure et rayon de courbure

Soit (Σ, M) une courbe paramétrée de classe C^2 et P un reparamétrage de Σ par une abscisse curviligne s .

Définition 1.9 La courbe Σ est dite birégulière au point $m = M(t)$ si $M'(t)$ et $M''(t)$ sont linéairement indépendants.

Définition 1.10 On appelle courbure au point m le nombre réel, noté $R(s) = \left\| \frac{d^2 P}{ds^2} \right\|$. Si Σ est birégulière au point m , on appelle rayon de courbure en m l'inverse de la courbure en m . Le rayon de courbure se note :

$$r(s) = \frac{1}{R(s)}$$

Remarque 1.4 La courbure ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Formules de Frénet

Soit (Σ, M) une courbe paramétrée de classe C^2 et birégulière en tout point $P(s)$ (P désignant toujours le reparamétrage de Σ par une abscisse curviligne s).

On pose :

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{dP}{ds}$$

$\boldsymbol{\tau}(s)$ est donc un vecteur unitaire tangent à Σ au point $P(s) = M \circ s^{-1}(s)$.

On désigne par $\boldsymbol{\nu}(s)$ le vecteur se déduisant de $\boldsymbol{\tau}(s)$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

En dérivant le produit scalaire $\|\boldsymbol{\tau}(s)\|^2 = 1$ on obtient :

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0 \tag{1.1}$$

Il existe alors une fonction $R_1(s) : s(I) \longrightarrow R$ telle que :

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = R_1(s)\boldsymbol{\nu}(s) \tag{1.2}$$

Par comparaison avec la définition de la courbure on déduit que :

$$R(s) = |R_1(s)|$$

Définition 1.11 La fonction R_1 est appelée courbure algébrique de Σ .

En dérivant la relation $\tau(s)\nu(s) = 0$ on obtient :

$$\frac{d\tau}{ds}\nu(s) + \tau(s)\frac{d\nu}{ds}(s) = 0$$

on tire alors :

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s) = R(s)\boldsymbol{\nu}(s)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}(s) = -R(s)\boldsymbol{\tau}(s)$$

Ces formules sont appelées formules de Frénet.

Chapitre 2

Conditions aux limites approchées pour une plaque mince en flexion

2.1 Introduction

On étudie la flexion d'une plaque mince raidie par une fine couche élastique d'épaisseur δ . La construction d'un développement asymptotique de la solution du modèle de Kirchhoff-Love quand δ tend vers zéro est décrite dans son intégralité, des estimations optimales du reste sont données. Nous identifions des conditions aux limites approchées qui rendent compte de l'effet du raidisseur, définissant des problèmes approchés. L'utilisation de l'analyse multi-échelle permet d'obtenir des estimations optimales de l'erreur commise. Nous traitons le cas d'une couche de raideur constante et celui d'une raideur en δ^{-1} .

Cette partie est organisée en trois paragraphes : On précise d'abord le cadre variationnel pour résoudre notre problème et l'estimation à priori qui l'en découle, ainsi que l'écriture des opérateurs dans un système de coordonnées locales au bord Γ_0 . On construit ensuite le développement asymptotique de w^δ et donne des estimations optimales du reste basées sur des estimations a priori. Enfin, on montre comment l'étude des premiers termes du développement permet d'obtenir des conditions aux limites approchées pour le problème.

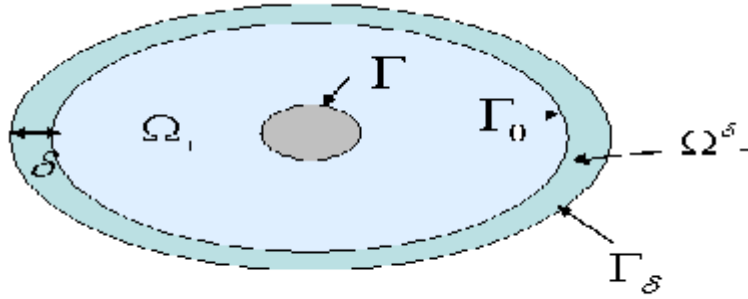
2.2 Position du problème

Soit Ω_+ un ouvert borné de R^2 , représentant la surface moyenne de la plaque mince. Le bord de Ω_+ est composée de deux parties : Γ_0 et Γ , supposées régulières.

Pour $\delta > 0$ assez petit, la couche mince Ω_-^δ provient d'une dilatation uniforme de Γ_0 dans la direction normale d'épaisseur δ :

$$\Omega_-^\delta = \{x + r\nu(x) ; x \in \Gamma_0 \text{ et } 0 < r < \delta\},$$

où $\nu(x)$ est la normale au point x de Γ_0 , extérieure à Ω_+ ; le bord extérieur du domaine Ω_-^δ est noté Γ_δ et le domaine complet $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_-^\delta$.



La plaque et la couche mince

La plaque est encastée sur le bord intérieur Γ et est libre d'effort sur son bord extérieur Γ_δ . Les équations données par le modèle de Kirchhoff-Love pour le déplacement w^δ s'écrivent (voir[22])

$$\left\{ \begin{array}{ll} D^+ \Delta^2 w_+^\delta = f & \text{dans } \Omega_+ \\ D^- \Delta^2 w_-^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_-^\delta, \\ [w^\delta] = 0 ; [\partial_\nu w^\delta] = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ M^+(w_+^\delta) = M^-(w_-^\delta) & \text{sur } \Gamma_0, \\ T^+(w_+^\delta) = T^-(w_-^\delta) & \text{sur } \Gamma_0, \\ M(w^\delta) = 0 ; T(w^\delta) = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ w^\delta = 0 ; \partial_\nu w^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où ∂_ν désigne la dérivée normale selon $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ et $[]$ le saut à travers Γ_0 ; la fonction f appartient à $L^2(\Omega_+)$ (on verra par la suite qu'une régularité

supplémentaire est requise pour l'étude asymptotique.

Les opérateurs de trace M et T désignent respectivement le moment de flexion et l'effort tranchant effectif et sont définis par :

$$M = D [\Delta + (1 - \mu) (2\nu_1\nu_2\partial_{12} - \nu_1^2\partial_2^2 - \nu_2^2\partial_1^2)]$$

$$T = D [\partial_\nu\Delta + (1 - \mu)\partial_\tau ((\nu_1^2 - \nu_2^2)\partial_{12} + \nu_1\nu_2(\partial_2^2 - \partial_1^2))]$$

où on a posé $D = \frac{E}{(1-\mu^2)}$, E étant le module de Young et $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ le coefficient de Poisson; ∂_τ désigne la dérivée selon la direction tangentielle. On fait l'hypothèse que les coefficients d'élasticité E et μ sont constants par morceaux :

$$\begin{cases} E = E_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ E = E_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases} ; \quad \begin{cases} \mu = \mu_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \mu = \mu_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases}$$

Le coefficient de Poisson est indépendant δ et on considérera les deux cas suivants pour le module Young :

- les coefficients E^+ et E^- ne dépendent pas de δ ;
- le coefficient E^+ ne dépend pas de δ et $E^- = \mathcal{O}(\delta^{-1})$.

Le deuxième cas est plus intéressant car il correspond à une couche à la fois très mince et très raide. Par conséquent, D qui représente le module de rigidité de la plaque à la flexion est une fonction constante par morceaux, on note

$$D_+ = \frac{E_+}{(1 - \mu_+^2)} \quad \text{et} \quad D_- = \frac{E_-}{(1 - \mu_-^2)}.$$

2.3 Existence, unicité, estimations à priori

Pour obtenir les estimations du reste du développement asymptotique, on sera amené à considérer d'autres seconds membres que dans le problème précédent :

$$\begin{cases} D^+\Delta^2 w_+^\delta = f_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ D^-\Delta^2 w_-^\delta = f_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \\ [w^\delta] = 0 ; [\partial_\nu w^\delta] = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ M^+(w_+^\delta) = M^-(w_-^\delta) + g_1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ T^+(w_+^\delta) = T^-(w_-^\delta) + g_2 & \text{sur } \Gamma_0 \\ M(w^\delta) = h_1 ; T(w^\delta) = h_2 & \text{sur } \Gamma_\delta \\ w^\delta = 0 ; \partial_\nu w^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.2)$$

On définit l'espace fonctionnel suivant :

$$W = \{ \psi \in H^2(\Omega^\delta) ; \psi = \partial_\nu \psi = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

Soit $w \in W$ une solution du problème (2.2). Une intégration par parties permet d'obtenir, pour $\psi \in W$,

$$\int_{\Omega^\delta} D(\Delta^2 w) \psi \, dx = a(w, \psi) + \int_{\partial\Omega^\delta} [T(w)\psi - M(w)\partial_\nu \psi] \, d\sigma,$$

où la forme bilinéaire a est donnée par

$$a(w, \psi) = \int_{\Omega^\delta} [D(\partial_1^2 w + \mu \partial_2^2 w) \partial_1^2 \psi + 2(1 - \mu) \partial_{12} w \partial_{12} \psi + (\partial_2^2 w + \mu \partial_1^2 w) \partial_2^2 \psi] \, dx. \quad (2.3)$$

La formulation variationnelle du problème (2.2) s'écrit alors

$$\forall \psi \in W, a(w, \psi) = \langle F, \psi \rangle \quad (2.4)$$

où la forme linéaire F est définie par

$$\langle F, \psi \rangle = \int_{\Omega_+} f_+ \psi \, dx + \int_{\Omega_-} f_- \psi \, dx + \int_{\Gamma_0} (g_2 \psi + g_1 \partial_\nu \psi) \, d\sigma + \int_{\Gamma_\delta} (h_2 \psi + h_1 \partial_\nu \psi) \, d\sigma$$

Le théorème suivant fournit une estimation à priori pour le problème (2.4) :

Théorème 2.1 *Soient $f_+ \in L^2(\Omega_+)$, $f_- \in L^2(\Omega_-)$, $g_1, g_2 \in L^2(\Gamma_0)$ et $h_1, h_2 \in L^2(\Gamma_\delta)$. Le problème (2.2) admet une unique solution $w^\delta \in W$. De plus, il existe une constante C , indépendante de $\delta \in (0, 1)$ telle que*

$$\|w^\delta\|_{H^2(\Omega^\delta)} \leq C \left\{ \|f_+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|f_-\|_{L^2(\Omega_-)} + \|g_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|g_2\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|h_1\|_{L^2(\Gamma_\delta)} + \|h_2\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \right\} \quad (2.5)$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe du lemme de Lax-Milgram : la forme F est clairement continue sur W et sa norme dans W' est majorée par le membre de droite de l'inégalité (2.5). D'autre part, la forme bilinéaire a est continue et coercive sur W : grâce aux conditions de Dirichlet sur Γ , on peut écrire une inégalité de Poincaré dans Ω^δ , indépendante de δ (car la mesure de Ω^δ est majorée uniformément pour $0 < \delta < 1$). \square

Ainsi, pour $\delta > 0$ fixé (assez petit), les équations de notre problème constituent un problème elliptique coercif bien posé dans $H^2(\Omega^\delta)$. Nous allons maintenant nous intéresser à l'analyse asymptotique de la solution w^δ quand l'épaisseur de la couche mince tend vers zéro.

2.4 Changement d'échelle

Afin de construire le développement asymptotique de la solution du problème, nous effectuons une dilatation normale de la couche Ω_-^δ de rapport δ^{-1} afin de se ramener à une géométrie fixe. Pour cela, on écrit la couche mince sous forme tensorielle grâce aux coordonnées du repère de Frénet sur Γ_0 . Les opérateurs intervenant dans le problème pourront alors être développés en puissance de δ , ce qui constituera la première étape pour la construction d'un développement asymptotique de w^δ .

2.4.1 Coordonnées locales

On note τ et ν les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal sur Γ . Ils sont directement orthogonaux :

$$\tau = \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

On rappelle les formules de Frénet qui définissent la courbure $R(s)$ au point de Γ_0 d'abscisse curviligne s .

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = +R(s)\nu \quad \text{et} \quad \frac{\partial \nu}{\partial s} = -R(s)\tau$$

On notera $R(s, r)$ la courbure de $\Gamma_r = \{x + rn(x) ; x \in \Gamma_0\}$ en le point (s, r) ; elle est donnée par

$$R(s, r) = \frac{R(s)}{1 - rR(s)}$$

Afin d'exprimer les opérateurs intervenant dans les équations de notre problème, nous avons besoin de l'écriture des dérivées selon les variables cartésiennes en fonction des dérivées dans le repère de Frénet. Les formules de Frénet entraînent

$$\begin{pmatrix} \partial_s \\ \partial_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - rR(s))\nu_2 & -(1 - rR(s))\nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$$

L'inversion de ce système linéaire donne :

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\nu_2}{1-rR(s)} & \nu_1 \\ \frac{-\nu_1}{1-rR(s)} & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s \\ \partial_r \end{pmatrix}$$

On peut alors en déduire l'expression du bilaplacien

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{1-rR(s)} \partial_s \left[\frac{1}{1-rR(s)} \partial_s \left(\frac{1}{(1-rR(s))^2} \partial_s^2 + \frac{rR'(s)}{(1-rR(s))^3} \partial_s \right) + R(s,r) \partial_r + \partial_r^2 \right] \\ &+ R(s,r) \partial_r \left[\frac{1}{(1-rR(s))^2} \partial_s^2 - \frac{rR'(s)}{(1-rR(s))^3} \partial_s + R(s,r) \partial_r + \partial_r^2 \right] \\ &+ \partial_r^2 \left[\frac{1}{(1-rR(s))^2} \partial_s^2 + \frac{rR'(s)}{(1-rR(s))^3} \partial_s + R(s,r) \partial_r + \partial_r^2 \right] \end{aligned}$$

ainsi que celle des opérateurs de trace M et T

$$M = D [\mu \Delta + (1 - \mu) \partial_r^2]$$

$$T = D \left[\partial_\nu \Delta + (1 - \mu) \frac{1}{1-rR(s)} \partial_s \left(\frac{R(s)}{(1-rR(s))^2} \partial_s + \frac{1}{(1-rR(s))} \partial_{rs} \right) \right]$$

2.4.2 Développement des opérateurs en puissance de δ

A l'aide des coordonnées de Frénet, la couche mince s'écrit de manière tensorielle

$$\Omega_-^\delta \simeq \Gamma_0 \times (0, \delta).$$

En introduisant la variable dilatée - ou encore scalée - $z = \frac{r}{\delta}$, on peut se ramener au domaine fixe $\Gamma_0 \times (0, 1)$. Soit alors W^δ la fonction définie sur $\Gamma_0 \times (0, 1)$ par

$$W^\delta(s, z) = w^\delta(s, r)$$

La dilatation $r \mapsto z$ transforme la couche extérieure Ω_-^δ en un domaine fixe ; le petit paramètre δ apparaît maintenant dans les équations. Le bilaplacien

s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{1}{(1-z\delta R(s))^2} \partial_s^2 \left[\frac{1}{(1-z\delta R(s))^2} \partial_s^2 + \frac{\delta z R'(s)}{(1-z\delta R(s))^3} \partial_s + \frac{1}{\delta} R(s, \delta z) \partial_z + \frac{1}{\delta^2} \partial_z^2 \right] \\ &+ \frac{\delta z R'(s)}{(1-z\delta R(s))^3} \partial_s \left[\frac{1}{(1-z\delta R(s))^2} \partial_s^2 + \frac{\delta z R'(s)}{(1-z\delta R(s))^3} \partial_s + \frac{1}{\delta} R(s, \delta z) \partial_z + \frac{1}{\delta^2} \partial_z^2 \right] \\ &+ \frac{1}{\delta} R(s, \delta z) \partial_z \left[\frac{1}{(1-z\delta R(s))^2} \partial_s^2 + \frac{\delta z R'(s)}{(1-z\delta R(s))^3} \partial_s + \frac{1}{\delta} R(s, \delta z) \partial_z + \frac{1}{\delta^2} \partial_z^2 \right] \\ &\frac{1}{\delta^2} \partial_z^2 \left[\frac{1}{(1-z\delta R(s))^2} \partial_s^2 + \frac{\delta z R'(s)}{(1-z\delta R(s))^3} \partial_s + \frac{1}{\delta} R(s, \delta z) \partial_z + \frac{1}{\delta^2} \partial_z^2 \right]\end{aligned}$$

On peut développer cette expression en puissances de δ

$$\Delta^2 = \frac{1}{\delta^4} A^{-4} + \frac{1}{\delta^3} A^{-3} + \frac{1}{\delta^2} A^{-2} + \frac{1}{\delta} A^{-1} + A^0 + \delta A^1 + \dots$$

Les premiers opérateurs sont donnés par – on a noté R pour $R(s)$ –

$$\begin{aligned}A^{-4} &= \partial_z^4 ; \\ A^{-3} &= -2R \partial_z^3 ; \\ A^{-2} &= 2\partial_s^2 (\partial_z^2) + R^2 \partial_z^2 + zR \partial_z^3 - R^2 \partial_z^2 (z\partial_z) ; \\ A^{-1} &= \partial_s^2 (R \partial_z) + 2zR \partial_s^2 (\partial_z^2) + zR' \partial_s (\partial_z^2) - R \partial_z (\partial_s^2) + zR^3 \partial_z^2 \\ &\quad + R^3 \partial_z (z\partial_z) - z^2 R^3 \partial_z^3 + 2R \partial_z^2 (z\partial_s^2) + R' \partial_z^2 (z\partial_s) - R^3 \partial_z^2 (z^2 \partial_z) ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^0 &= \partial_s^4 - 2zR \partial_s^2 (R \partial_z) - z\partial_s^2 (R^2 \partial_z) + 3z^2 R^2 \partial_s^2 (\partial_z^2) - zR' \partial_s (R \partial_z) \\ &\quad + 3z^2 RR' \partial_s (\partial_z^2) - 2R^2 \partial_z (z\partial_s^2) - zR^2 \partial_z (\partial_s^2) - RR' \partial_z (z\partial_s) + R^4 \partial_z (z^2 \partial_z) \\ &\quad + zR^4 \partial_z (z\partial_z) + z^2 R^4 \partial_z^2 - z^3 R^4 \partial_z^3 + 3R^2 \partial_z^2 (z^2 \partial_s^2) + 3RR' \partial_z^2 (z^2 \partial_s) \\ &\quad - R^4 \partial_z^2 (z^3 \partial_z) ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^1 &= 2z\partial_s^2 (R \partial_s^2) - 2zR \partial_s^4 + z\partial_s^2 (R' \partial_s) - z^2 \partial_s^2 (R^3 \partial_z) - 2z^2 R \partial_s^2 (R^2 \partial_z) \\ &\quad - 3z^2 R^2 \partial_s^2 (R \partial_z) + 4z^3 R^3 \partial_s^2 (\partial_z^2) + zR' \partial_s^3 - z^2 R' \partial_s (R^2 \partial_z) \\ &\quad - 3z^2 RR' \partial_s (R \partial_z) + 6z^3 R^2 R' \partial_s (\partial_z^2) - 3R^3 \partial_z (z^2 \partial_s^2) - 2zR^3 \partial_z (z\partial_s^2) \\ &\quad + z^2 R^3 \partial_z (\partial_s^2) - 3R^2 R' \partial_z (z^2 \partial_s) - zR^2 R' \partial_z (z\partial_s) + R^5 \partial_z (z^3 \partial_z) \\ &\quad + zR^5 \partial_z (z^2 \partial_z) + z^2 R^5 \partial_z (z\partial_z) + z^3 R^5 \partial_z^2 - z^4 R^5 \partial_z^3 \\ &\quad + 4R^3 \partial_z^2 (z^3 \partial_s^2) + 6R^2 R' \partial_z^2 (z^3 \partial_s) - R^5 \partial_z^2 (z^4 \partial_z) .\end{aligned}$$

Les opérateurs de trace se développent aussi

$$M = \frac{1}{\delta^2} M^{-2} + \frac{1}{\delta} M^{-1} + M^0 + \delta M^1 + \delta^2 M^2 + \dots$$

$$T = \frac{1}{\delta^3} T^{-3} + \frac{1}{\delta^2} T^{-2} + \frac{1}{\delta} T^{-1} + T^0 + \delta T^1 + \delta^2 T^2 + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} M^{-2} &= D_{-z}^2 ; \\ M^{-1} &= -D_- \mu_- R \partial_z ; \\ M^0 &= D_- \mu_- (\partial_s^2 - z R^2 \partial_z) ; \\ M^1 &= -D_- \mu_- (-2z R \partial_s^2 - z R' \partial_s + \mu_- z^2 R^3 \partial_z) ; \\ M^2 &= D_- \mu_- (3z^2 R^2 \partial_s^2 + 3z^2 R R' \partial_s - z^3 R^4 \partial_z) ; \\ T^{-3} &= D_- \partial_z^3 ; \\ T^{-2} &= -D_- R \partial_z^2 ; \\ T^{-1} &= D_- [\partial_z (\partial_s^2) - \partial_z (z R^2 \partial_z) + (1 - \mu_-) \partial_z (\partial_s^2)] ; \\ T^0 &= -D_- [\partial_z (-2z R \partial_s^2 - z R' \partial_s + z^2 R^3 \partial_z) + (1 - \mu_-) \partial_s (R \partial_s) \\ &\quad + (1 - \mu_-) (2z R \partial_z \partial_s^2 + z R' \partial_{zs})] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^1 &= D_- [\partial_z (3z^2 R^2 \partial_s^2 + 3z^2 R R' \partial_s - z^3 R^4 \partial_z) + \\ &\quad (1 - \mu_-) \partial_s (-2z R^2 \partial_s + z^2 R^2 \partial_{zs}) + (1 - \mu_-) z R \partial_s (R \partial_s) \\ &\quad + (1 - \mu_-) z^2 R^2 \partial_s (\partial_{zs}) + (1 - \mu_-) z^2 R \partial_s (R \partial_{zs})] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^2 &= -D_- [\partial_z (-4z^3 R^3 \partial_s^2 + 6z^2 R R' \partial_s + z^4 R^5 \partial_z) + \\ &\quad (1 - \mu_-) \partial_s (-3z^2 R^3 \partial_s - z^3 R^3 \partial_{zs}) - (1 - \mu_-) z R \partial_s (2z R^2 \partial_s) \\ &\quad - (1 - \mu_-) z^2 R^2 \partial_s (R \partial_s) - (1 - \mu_-) z R \partial_s (z^2 R^2 \partial_{zs}) \\ &\quad - (1 - \mu_-) z^2 R^2 \partial_s (z R \partial_{zs}) - (1 - \mu_-) z^3 R^3 \partial_s (\partial_{zs})] \end{aligned}$$

Les développements en puissance de δ donnés dans ce paragraphe sont formels, on ne cherche pas à donner un sens à la convergence des séries. Ce point de vue est celui généralement adopté en analyse asymptotique multi-échelle, il permet la construction et la validation du développement (voir paragraphes suivants).

2.5 Construction du développement asymptotique

Dans un premier temps, on se place dans le cas où le module de Young est indépendant du paramètre δ .

On a introduit au paragraphe précédent la variable rapide $z = \frac{r}{\delta}$, appliquant une dilatation dans la direction normale de la couche. Cette transformation a pour effet de ramener la géométrie à un domaine fixe ; le petit paramètre δ apparaît désormais dans les équations via les développements des opérateurs donnés au paragraphe précédent.

L'objet de cette section est la description du procédé algorithmique de construction des termes du développement asymptotique de la solution du problème. Les développements en puissance entières de δ pour les opérateurs Δ^2 , M et T nous incitent à rechercher un développement sous la forme

$$w_+^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n w_+^n \quad \text{et} \quad W_-^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n W_-^n \quad (2.6)$$

on rappelle que la fonction W_-^δ désigne la transformée de w_-^n en variables semi-dilatées : $w_-^\delta(s, r) = W_-^\delta(s, \delta^{-1}r)$ (les variables s et r sont respectivement tangentielle et normale).

En injectant l'ansatz (2.6) dans les équations et en identifiant les termes de même puissance de δ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lll}
D_+ \Delta^2 w_+^n & = f_+ & \text{si } n = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad \text{dans } \Omega_+ \\
A^{-4} W_-^n & = - \sum_{k+l=n-4, k \geq -3} A^k W_-^l & \text{pour } 0 \leq z \leq 1 \\
W_-^n & = w_+^n & \text{sur } \Gamma_0 \\
\partial_\nu W_-^n & = \partial_\nu w_+^{n-1} & \text{sur } \Gamma_0 \\
M_+(w_+^n) & = \sum_{k+l=n} M^k W_-^l & \text{sur } \Gamma_0 \\
T_+(w_+^n) & = \sum_{k+l=n} T^k W_-^l & \text{sur } \Gamma_0 \\
M^{-2} W_-^n & = - \sum_{k+l=n-2} M^k W_-^l & \text{sur } \Gamma_- \\
T^{-3} W_-^n & = - \sum_{k+l=n-3} T^k W_-^l & \text{sur } \Gamma_- \\
w_+^n & = \partial_\nu w_+^n = 0 & \text{sur } \Gamma
\end{array} \right. \quad (2.7)$$

2.5.1 Les premiers termes du développement

Détaillons la construction des premiers termes du développement. Dans les équations (2.7), les conditions de transmission des dérivées normales, ainsi que des opérateurs M et T , sont découplées en raison du décalage dans les puissances de δ . Ceci va nous permettre une résolution alternative dans chacun des domaines Ω_-^δ et Ω_+ . L'opérateur T étant d'ordre 3, la connaissance de W_-^l pour $l = 0, 1, 2, 3$ est requise pour définir le terme $T_+(w_+^0)$. C'est pourquoi on recherche d'abord les quatre premiers termes extérieurs.

Pour $n = 0$, les équations (2.7) fournissent pour la partie extérieure W_-^0

$$\left\{ \begin{array}{l} D_- \partial_z^4 W_-^0(s, z) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq 1, \\ D_- \partial_z^3 W_-^0(s, 1) = 0 \\ D_- \partial_z^2 W_-^0(s, 1) = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

qui donne $W_-^0(s, z) = \alpha^0(s)z + \beta^0(s)$, où α^0 et β^0 sont des fonctions de l'abscisse curviligne s . Tenant compte de la condition de transmission des dérivées normales sur Γ_0 , on déduit que $\partial_z W_-^0(s, 0) = 0$, d'où

$$W_-^0(s, z) = \beta^0(s).$$

Au rang 1, les équations vérifiées par le terme W_-^1 sont les mêmes que pour W_-^0 , voir (2.8). Celui-là est donc de la forme

$$W_-^1(s, z) = \alpha^1(s)z + \beta^1(s).$$

A l'ordre 2, apparaît un second membre non nul du aux termes $M^0 W_-^0$ et $M^{-1} W_-^1$: ainsi W_-^2 est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} D_- \partial_z^4 W_-^2(s, z) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq 1, \\ D_- \partial_z^3 W_-^2(s, 1) = 0 \\ D_- \partial_z^2 W_-^2(s, 1) = -D_- \theta_-^0(s, 1), \end{array} \right.$$

avec $D_- \theta_-^0(s, z) = M^0 W^0 + M^{-1} W^1 = D_- [\mu_- \partial_s^2 \beta^0(s) - \mu_- R(s) \alpha^1(s)]$ (qui, en l'occurrence, ne dépend pas de la variable transverse z). Aussi peut-on trouver deux fonctions α^2 et β^2 de l'abscisse curviligne telles que

$$W_-^2(s, z) = -\frac{1}{2} \theta_-^0(s, 1) z^2 + \alpha^2(s) z + \beta^2(s).$$

Résolvons maintenant la partie d'ordre 3 : on pose

$$\begin{aligned} \zeta_-^1(s, z) &= T^0 W_-^0 + T^{-1} W_-^1 + T^{-2} W_-^2, \\ \theta_-^1(s, z) &= M^1 W_-^0 + M_0 W_-^1 + M^{-1} W_-^2. \end{aligned}$$

Alors W_-^3 résout les équations

$$\begin{cases} D_- \partial_z^4 W_-^3(s, z) & = 0 \text{ pour } 0 \leq z \leq 1, \\ D_- \partial_z^3 W_-^3(s, 1) & = -\zeta_-^1(s, 1), \\ D_- \partial_z^2 W_-^3(s, 1) & = -\theta_-^1(s, 1), \end{cases}$$

si bien qu'il est de la forme

$$W_-^3(s, z) = -\zeta_-^1(s, 1) \left(\frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right) - \frac{1}{2} \theta_-^1(s, 1) z^2 + \alpha^3(s) z + \beta^3(s),$$

où les fonctions α^3 et β^3 restent à déterminer.

On peut maintenant écrire le problème que satisfait le premier terme intérieur :

$$\begin{cases} D_+ \Delta^2 w_+^0 & = f_+ \text{ dans } \Omega_+, \\ M_+(w_+^0) & = \theta_+^0(s) \text{ sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_+^0) & = \zeta_+^0(s) \text{ sur } \Gamma_0, \\ w_+^0 = \partial_\nu w_+^0 & = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.9)$$

où les données θ_+^0 et ζ_+^0 sont définis par

$$\begin{aligned} \theta_+^0(s) &= (M^{-2} W_-^2 + M^{-1} W_-^1 + M^0 W^0)(s, 0) \\ &= D_- [-\theta_-^0(s, 1) + \theta_-^0(s, 0)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_+^0(s) &= (T^{-3} W_-^3 + T^{-2} W_-^2 + T^{-1} W^1 + T^0 W^0)(s, 0) \\ &= D_- [-\zeta_-^1(s, 1) + \zeta_-^1(s, 0)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

par définition de θ^0 et ζ^1 , car ces fonctions ne dépendent pas de z .

En conséquence, le problème (2.9) n'est autre que le problème bi-harmonique dans Ω_+ avec conditions homogènes de Dirichlet sur Γ et conditions de Neumann sur Γ_0 ; il définit w_+^0 de façon unique. Les conditions de transmission

sur Γ_0 permettent de déterminer les fonctions β^0 et α^1 :

$$\beta^0(s) = w_+^0|_{\Gamma_0} \text{ et } \alpha^1(s) = \partial_\nu w_+^0|_{\Gamma_0}.$$

On revient alors à la partie extérieure : on pose

$$\begin{aligned} \phi_-^2(s, z) &= (A^{-3}W_-^3 + A^{-2}W_-^2 + A^{-1}W_-^1 + A^0W_-^0)(s, z), \\ \zeta_-^2(s, z) &= (T^1W_-^0 + T^0W_-^1 + T^{-1}W_-^2 + T^{-2}W_-^3)(s, z), \\ \theta_-^2(s, z) &= (M^2W_-^0 + M^1W_-^1 + M^0W_-^2 + M^{-1}W_-^3)(s, z), \end{aligned}$$

de telle sorte que W_-^4 résolve le problème

$$\begin{cases} D_- \partial_z^4 W_-^4(s, z) = -\phi_-^2(s, z) \text{ pour } 0 \leq z \leq 1, \\ D_- \partial_z^3 W_-^4(s, 1) = -\zeta_-^2(s, 1), \\ D_- \partial_z^2 W_-^4(s, 1) = -\theta_-^2(s, 1). \end{cases}$$

Donc W_-^4 s'écrit

$$W_-^4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} z^4 - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 \right) \phi_-^2(s, z) - \zeta_-^2(s, 1) \left(\frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{2} z^2 \right) - \frac{1}{2} \theta_-^2(s, 1) z^2 + \alpha^4(s) z + \beta^4(s).$$

Connaissant le terme W_-^4 , on peut alors définir w_+^1 comme la solution du problème intérieur

$$\begin{cases} D_+ \Delta^2 w_+^1 = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_+^1) = \zeta_-^1(s, 1) - \theta_-^1(s, 1) + \theta_-^1(s, 0) & \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_+^0) = \phi_-^1(s, 1) - \zeta_-^2(s, 1) + \zeta_-^2(s, 0) & \text{sur } \Gamma_0, \\ w_+^1 = \partial_\nu w_+^1 = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour déterminer W_-^1 complètement, il nous faut préciser la fonction β^1 . Cela est rendu possible grâce à la condition de transmission d'ordre 0 à travers l'interface Γ_0 : pour $z = 0$, $W_-^1 = w_+^1$. Finalement

$$\beta^1(s) = w_+^1|_{\Gamma_0} \text{ et } \alpha^1(s) = \partial_\nu w_+^0|_{\Gamma_0}.$$

On a vu dans ce paragraphe comment s'effectuait la construction des premiers termes du développement asymptotique : on détermine d'abord les quatre premiers termes extérieurs $(W_-^\ell)_{0 \leq \ell \leq 3}$ (à une fonction affine de z près), ce qui nous permet de définir le problème résolu par le premier terme intérieur w_+^0 dont la connaissance permet de fixer complètement les premiers termes extérieurs.

2.5.2 Le développement complet : estimation du reste

Le procédé de construction décrit au paragraphe précédent se généralise à tout ordre ; il permet l'obtention du développement asymptotique de la solution w^δ du problème. L'utilisation des estimations à priori conduit au résultat suivant.

Théorème 2.2 *On suppose que la courbe Γ_0 – définissant le bord du domaine Ω_+ – et le second membre f sont de classe C^∞ . Alors la solution w^δ du problème (2.1) admet le développement asymptotique*

$$w^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n w^n, \quad (2.10)$$

où $w^n|_{\Omega_+}(x) = w_+^n(x)$ et $w^n|_{\Omega_-^\delta}(s, r) = W_-^n(s, \delta^{-1}r)$. Les termes w_+^n et W_-^n ne dépendent pas de δ et sont construits à l'aide des équations (2.12) et (2.13) plus bas.

Le développement (2.10) est valide au sens des développements asymptotiques, i.e. pour tout entier N , il existe une constante C_N telle que le reste d'ordre N défini par

$$r^N(\delta) = w^\delta - \sum_{n=0}^N w^n$$

satisfasse l'estimation (optimale)

$$\|r_+^N(\delta)\|_{2, \Omega_+} + \delta^{\frac{3}{2}} \|r_-^N(\delta)\|_{2, \Omega_-^\delta} \leq C_N \delta^{N+1}. \quad (2.11)$$

DEMONSTRATION. Supposons les termes du développement construits jusqu'au rang $N - 1$. On peut alors écrire le problème satisfait par W_-^N :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_- \partial_z^4 W_-^N(s, z) = -\phi_-^{N-2}(s, z) \text{ for } 0 \leq z \leq 1, \\ D_- \partial_z^3 W_-^N(s, 1) = -\zeta_-^{N-2}(s, 1), \\ D_- \partial_z^2 W_-^N(s, 1) = -\theta_-^{N-2}(s, 1), \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où les seconds membres ϕ_-^{N-2} , ζ_-^{N-2} et θ_-^{N-2} sont donnés par

$$\begin{aligned} \phi_-^{N-2}(s, z) &= D_- \sum_{k+\ell=N-4} A^k W_-^\ell, \\ \zeta_-^{N-2}(s, z) &= \sum_{k+\ell=N-3} T^k W_-^\ell, \\ \theta_-^{N-2}(s, z) &= \sum_{k+\ell=N-2} M^k W_-^\ell. \end{aligned}$$

(ces quantités sont définies à partir de W_-^ℓ pour $\ell \leq N - 1$). Le problème (2.12) détermine alors le terme W_-^N , à une fonction affine en z près, notée $\alpha^N(s)z + \beta^N(s)$.

De la même façon, on peut définir, à une fonction affine en z près, les termes W_-^ℓ pour $\ell = N + 1$, $N + 2$ et $N + 3$. Il est alors possible d'écrire le problème intérieur pour w_+^N :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_+^N = 0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_+^N) = \sum_{k+\ell=N} M^k W_-^\ell \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_+^N) = \sum_{k+\ell=N} T^k W_-^\ell \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_+^N = \partial_n w_+^N = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Il s'agit d'un problème biharmonique avec conditions de Dirichlet homogène sur Γ et Neumann non homogène sur Γ_0 , qui détermine de façon unique w_+^N .

Les conditions de transmission $W_-^N = w_+^N$ et $\partial_z W_-^N = \partial_n w_+^{N-1}$ permettent de préciser les fonctions α^N et β^N :

$$\alpha^N(s) = \partial_n w_+^{N-1} |_{\Gamma_0} \quad \text{et} \quad \beta^N(s) = w_+^N |_{\Gamma_0}$$

Ainsi, à partir de la donnée de (w_+^n, W_-^n) pour $n \leq N-1$, on a construit les termes w_+^N et W_-^N .

Prouvons maintenant l'estimation (2.11) : par définition des termes du développement, le reste d'ordre N vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_+ \Delta^2 r_+^N(\delta) = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ D_- \Delta^2 r_-^N(\delta) = \mathcal{O}(\delta^{N-3}) & \text{dans } \Omega_-^\delta \\ [r^N(\delta)] = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ [\partial_n r^N(\delta)] = \mathcal{O}(\delta^N) & \text{sur } \Gamma_0, \\ M_+(r_+^N(\delta)) = M_-(r_-^N(\delta)) + \mathcal{O}(\delta^{N-1}) & \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(r_+^N(\delta)) = T_-(r_-^N(\delta)) + \mathcal{O}(\delta^{N-2}) & \text{sur } \Gamma_0, \\ M_-(r_-^N(\delta)) = \mathcal{O}(\delta^{N-1}) & \text{sur } \Gamma_\delta \\ T_-(r_-^N(\delta)) = \mathcal{O}(\delta^{N-2}) & \text{sur } \Gamma_\delta \\ r_+^N(\delta) = \partial_\nu r_+^N(\delta) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Afin d'utiliser l'estimation à priori du théorème 1, il faut d'abord relever le saut de dérivée normale à travers l'interface Γ_0 ; on note η_N ce saut, on a $\eta_N = \mathcal{O}(\delta^N)$.

Soit alors z_+^N la solution dans $H^2(\Omega_+)$ du problème biharmonique avec condi-

tion de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_+ \Delta^2 z_+^N = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ z_+^N = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu z_+^N = \eta_N & \text{sur } \Gamma_0 \\ z_+^N = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_\nu z_+^N = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Alors, z_+^N vérifie l'estimation suivante

$$\|z_+^N\|_{H^2(\Omega_+)} = \mathcal{O}(\delta^N)$$

De même, soit z_-^N la solution du problème extérieur

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_- \Delta^2 z_-^N = 0 & \text{dans } \Omega_-^\delta \\ z_-^N = z_+^N & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu z_-^N = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ M_-(z_-^N) = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta \\ T_-(z_-^N) = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta \end{array} \right.$$

On peut aussi estimer la norme de z_-^N :

$$\|z_-^N\|_{H^2(\Omega_-^\delta)} = \mathcal{O}(\delta^{N-\frac{3}{2}}),$$

le facteur $\delta^{-\frac{3}{2}}$ provient de ce que le domaine Ω_-^δ dépend de δ .

Revenons au problème (2.14), on peut alors appliquer l'estimation à priori du théorème 1 à la fonction

$$\tilde{r}^N(\delta) = r^N(\delta) - z^N,$$

qui appartient à $H^2(\Omega^\delta)$: on obtient

$$\|\tilde{r}^N(\delta)\|_{H^2(\Omega^\delta)} \leq C\delta^{N-\frac{5}{2}},$$

car la norme L^2 du second membre extérieur est le terme limitant ; il est de l'ordre de δ^{N-2} (une demi puissance de δ est gagnée due à la mesure du domaine Ω_-^δ). D'où l'estimation pour le reste d'ordre N du développement

$$\|r_+^N(\delta)\|_{H^2(\Omega_+)} + \|r_-^N(\delta)\|_{H^2(\Omega_-^\delta)} \leq C\delta^{N-\frac{5}{2}}. \quad (2.15)$$

On peut améliorer l'inégalité précédente en écrivant

$$r^N(\delta) = r^{N+4}(\delta) + \sum_{n=N+1}^{N+4} \delta^n w^n.$$

L'estimation (2.15) appliquée au reste d'ordre $N + 4$ fournit

$$\|r_+^{N+4}(\delta)\|_{H^2(\Omega_+)} + \|r_-^{N+4}(\delta)\|_{H^2(\Omega_-^\delta)} \leq C\delta^{N+\frac{3}{2}},$$

et en estimant les normes de w^n à la fois dans Ω_+ (elle est de l'ordre δ^n) et dans Ω_-^δ (en $\delta^{n-\frac{3}{2}}$), on obtient finalement pour $r^N(\delta)$

$$\|r_+^N(\delta)\|_{H^2(\Omega_+)} + \delta^{\frac{3}{2}} \|r_-^N(\delta)\|_{H^2(\Omega_-^\delta)} \leq C\delta^{N+1},$$

qui est bien l'estimation annoncée dans le théorème. \square

Remarque 2.1 *L'utilisation de l'analyse multi-échelle permet l'obtention d'estimations optimales, comme l'illustre la preuve du théorème 2 : l'erreur est de l'ordre du premier terme négligé en tronquant la série. Comme ce dernier est génériquement non nul, l'estimation (2.11) est optimale.*

2.6 Conditions aux limites approchées

Même s'il est possible d'approcher numériquement w^δ , les calculs deviennent délicats quand δ est très petit. On préfère remplacer l'effet de la couche mince par une condition aux limites sur le bord Γ_0 , dite condition aux limites approchée.

On va voir dans ce paragraphe comment le développement asymptotique obtenu précédemment permet l'identification d'une telle condition et, surtout sa validation.

L'idée consiste à approcher w^δ par la série donnant son développement asymptotique tronquée à un ordre donné, la condition vérifiée par cette approximation sur Γ_0 fournissant la condition aux limites approchée recherchée.

2.6.1 Condition d'ordre 0

On ne conserve ici qu'un seul terme dans le développement asymptotique de w^δ . Rappelons que le terme w_+^0 est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_+^0 = f_+ \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_+^0 = \partial_n w_+^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

La première condition aux limites approchée apparaît immédiatement : il s'agit tout simplement des conditions de Neumann homogènes sur Γ_0 . Cela n'est en rien étonnant, puisque correspond au cas limite $\delta = 0$: la condition de Neumann imposée sur Γ_δ se transmet directement à Γ_0 .

L'estimation du reste prouvée au théorème 2 permet d'évaluer la différence entre la solution du problème initial w^δ et w_0 , dite solution du problème avec condition aux limites approchée d'ordre 0 :

$$\|w_+ - w_+^0\|_{H^2(\Omega_+)} = \mathcal{O}(\delta).$$

2.6.2 Condition d'ordre 1

Plus intéressant est le cas où on conserve deux termes dans le développement : définissons $w^{[1]}$ comme

$$w^{[1]} = w^0 + \delta w^1.$$

Utilisant toujours les résultats précédents, on pose

$$Q_0 = -D_- [2(1 - \mu_-) \partial_s (\partial_s \partial_n + R(s) \partial_s) + (1 - \mu_-^2) R(s) (\partial_s^2 - R(s) \partial_n)],$$

$$P_0 = -D_- [(1 - \mu_-^2) \partial_s^2 (\partial_s^2 - R(s) \partial_n) - 2(1 - \mu_-) \partial_s [R(s) (\partial_s \partial_n + R(s) \partial_s)]],$$

si bien que w_+^1 est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_+^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_+^1) + Q_0(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_+^1) + P_0(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_+^1 = 0 ; \partial_\nu w_+^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que $w_+^{[1]}$ vérifie les conditions suivantes sur Γ_0 :

$$M_+(w_+^{[1]}) + \delta Q_0(w_+^{[1]}) = \mathcal{O}(\delta^2) \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

$$T_+(w_+^{[1]}) + \delta P_0(w_+^{[1]}) = \mathcal{O}(\delta^2) \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

On voit ainsi apparaitre deux nouvelles conditions sur le bord Γ_0 , et un nouveau problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w = f \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w) + \delta Q_0(w) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w) + \delta P_0(w) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w = 0 ; \partial_n w = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Théorème 2.3 *Soit X l'espace défini par*

$$X = \{w \in H^2(\Omega_+) ; w \in H^2(\Gamma_0) \text{ et } w = \partial_\nu w = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Le problème (2.16) est bien posé dans X , il est associé à la formulation variationnelle

$$\forall \psi \in X, \quad a(w, \psi) + \delta b(w, \psi) = \int_{\Omega_+} f \psi \, dx, \quad (2.17)$$

où les formes a et b sont respectivement données par (2.3) et

$$b(u, v) = 2D_-(1 - \mu_-) \int_{\Gamma_0} \gamma_\tau(w)\gamma_\tau(\psi) d\sigma + D_-(1 - \mu_-^2) \int_{\Gamma_0} \gamma_S(w)\gamma_S(\psi) d\sigma, \quad (2.18)$$

avec

$$\gamma_\tau = \partial_s^2 - R(s)\partial_\nu \quad \text{et} \quad \gamma_S = \partial_s\partial_\nu + R(s)\partial_s. \quad (2.19)$$

Soit donc w_1^δ la solution de (2.16). Il s'agit d'estimer la différence entre w_+^δ , partie intérieure de la solution du problème initial, et w_1^δ . On pourrait procéder en utilisant une estimation à priori pour le problème (2.16), que l'on appliquerait à $w_1^\delta - w_+^{[1]}$, obtenant alors (en combinant cette estimation avec celle du reste $w_+^\delta - w_+^{[1]}$) une estimation du type

$$\|w_+^\delta - w_1^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} \leq C\delta^{\frac{3}{2}}$$

La perte d'une demi puissance de δ est due à l'estimation à priori du problème (2.16).

Une meilleure méthode consiste à déterminer le développement de la fonction w_1^δ et de le comparer avec celui obtenu au théorème 2.2 pour w_+^δ . Le problème (2.16) ne faisant pas intervenir de couche mince, il est aisé de construire le développement asymptotique de sa solution.

Théorème 2.4 *On suppose que la courbe Γ_0 -définissant le bord du domaine Ω_+ - et le second membre f sont de classe C^∞ . Alors la solution w_1^δ du problème (2.16) admet le développement asymptotique*

$$w_1^\delta = \sum_{n \geq 0} \delta^n w_1^n, \quad (2.20)$$

Les termes $(w_1^n)_n$ ne dépendent pas du paramètre δ et sont construits à l'aide des équations (2.22) plus bas.

Le développement (2.20) est valide au sens des développements asymptotiques, i.e. pour tout entier N , il existe une constante C_N telle que le reste d'ordre N défini par

$$r^N(\delta) = w_1^\delta - \sum_{n=0}^N \delta^n w_1^n$$

satisfasse l'estimation optimale

$$\|r_+^N(\delta)\|_{2,\Omega_+} \leq C_N \delta^{N+1} \quad (2.21)$$

DEMONSTRATION. En injectant l'ansatz polynomial (2.20) dans les équations (2.16), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_+ \Delta^2 w_1^N & = f \text{ ou } 0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_1^N) & = -Q_0(w_1^{N-1}) \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_1^N) & = -P_0(w_1^{N-1}) \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_1^N = 0 ; \partial_\nu w_1^N & = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (2.22)$$

équations qui permettent de définir w_1^N à partir de la donnée w_1^{N-1} (avec la convention $w_1^{-1} = 0$). L'estimation du reste se traite de la même manière que dans la preuve du théorème 2.2. \square

Il est facile de voir que les premiers termes des développements (2.10) et (2.20) coïncident :

$$w_+^0 = w_1^0 \quad \text{et} \quad w_+^1 = w_1^1.$$

Les termes suivants w_+^2 et w_1^2 sont génériquement différents si bien qu'on obtient une estimation optimale de la différence $w_+^\delta - w_1^\delta$.

Théorème 2.5 *La différence entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (2.1) et celle du problème avec condition aux limites généralisée d'ordre 1 -cf. problème (2.16)-est donnée par*

$$\|w_+^\delta - w_1^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} \leq C\delta^2$$

DEMONSTRATION. Il suffit d'utiliser les restes d'ordre 2 et les estimations (2.11) et (2.21). \square

Ce dernier résultat illustre l'efficacité de l'analyse multi-échelle pour l'étude

de problèmes avec petit paramètre. Il montre que le problème (2.16) est une approximation du problème de transmission initial à la précision $\mathcal{O}(\delta^2)$. L'intérêt de considérer le problème approché plutôt que le problème initial se situe pour les petites valeurs de l'épaisseur δ . En effet, comme on l'a déjà signalé, l'approximation numérique du problème avec couche mince est délicat car le nombre de degrés de liberté de la méthode numérique augmente rapidement quand δ décroît. En revanche, le problème avec conditions aux limites approchées ne fait intervenir que le domaine Ω_+ , qui ne dépend pas de δ . On peut alors utiliser une discrétisation moins fine, indépendante de l'épaisseur.

2.7 Cas où le module de Young dépend de l'épaisseur

Jusqu'à présent, on a supposé le module de Young E constant dans chacun des domaines Ω_+ et Ω_-^δ , mais indépendant de l'épaisseur δ . Il est plus intéressant de considérer un module de Young E_- de l'ordre de δ^{-1} (E_+ restant indépendant de δ), rendant compte en cela de la rigidité de la couche mince par rapport à la plaque.

Précisément, on suppose que le module de Young E vaut $\delta^{-1}E_-$ dans la couche mince, et E_+ dans le domaine intérieur Ω_+ , avec E_- et E_+ indépendants de δ .

La technique développée dans les paragraphes précédents s'applique encore dans cette situation. La seule différence réside dans le décalage d'une puissance de δ pour les opérateurs dans la couche. Ce décalage n'a de conséquence que dans les conditions de transmission pour M et T à travers l'interface Γ_0 - voir problème (2.7) -. Pour définir le premier terme intérieur w_+^0 , il faut ici déterminer non plus les 4 premiers termes dans la couche, mais les 5 premiers. Aucune difficulté supplémentaire n'apparaît.

Il est facile de vérifier que w_+^0 résout le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_+^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_+^0) + Q_0(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_+^0) + P_0(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_+^0 = 0 ; \partial_\nu w_+^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

et le terme suivant est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_+^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_+^1) + Q_0(w_+^1) + Q_1(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_+^1) + P_0(w_+^1) + P_1(w_+^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_+^1 = 0 ; \partial_\nu w_+^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

où les opérateurs différentiels P_1 et Q_1 sont définis par

$$\begin{aligned} Q_1 = & -D_- \left[\frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) \partial_s^2 [\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu] \right. \\ & - 3(1 - \mu_-) \partial_s [R(s) (\partial_s \partial_\nu + R(s)\partial_s)] \\ & - \frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) R(s) \partial_s [\partial_s \partial_\nu + R(s)\partial_s] \\ & \left. - \frac{1}{2} (2\mu_- + 1) (\mu_-^2 - 1) R^2(s) (\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 = & -D_- \left[\frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) \partial_s [-R(s)\partial_s (\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu)] \right. \\ & - 3(1 - \mu_-) \partial_s [R^2(s) (\partial_s \partial_\nu + R(s)\partial_s)] \\ & - \frac{1}{2} (3\mu_- + 1) (\mu_- - 1) \partial_s^3 [\partial_s \partial_\nu + R(s)\partial_s] \\ & \left. + \frac{1}{2} (2\mu_- + 1) (\mu_-^2 - 1) \partial_s^2 [R(s) (\partial_s^2 - R(s)\partial_\nu)] \right] \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les problèmes avec conditions aux limites approchées

- Ordre 0

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_0^\delta = f \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_0^\delta) + Q_0(w_0^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_0^\delta) + P_0(w_0^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_0^\delta = 0 ; \partial_\nu w_0^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

- Ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_+ \Delta^2 w_1^\delta = f \quad \text{dans } \Omega_+, \\ M_+(w_1^\delta) + Q_0(w_1^\delta) + \delta Q_1(w_1^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ T_+(w_1^\delta) + P_0(w_1^\delta) + \delta P_1(w_1^\delta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ w_1^\delta = 0 ; \partial_\nu w_1^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

La même analyse que précédemment permet d'obtenir les estimations optimales suivantes :

$$\begin{aligned} \|w_+^\delta - w_0^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} &\leq C\delta \\ \|w_+^\delta - w_1^\delta\|_{H^2(\Omega_+)} &\leq C\delta^2 \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Les opérateurs P_0 et Q_0 apparaissent ici dès la condition aux limites approchée d'ordre 0 alors qu'elle n'apparaissait qu'à l'ordre 1 dans le cas d'un module de Young indépendant de δ . Cela peut s'interpréter comme suit : la plus grande rigidité de la couche amplifie son effet sur le déplacement.*

Chapitre 3

Modélisation de l'effet dynamique d'un raidisseur sur le bord d'une plaque mince

3.1 Introduction

On considère le système complet dynamique de von Karman pour une plaque mince dans laquelle est inséré un corps mince élastique (raidisseur) d'épaisseur δ , δ étant un paramètre destiné à tendre vers zéro. On suppose que le module de Young et la densité de masse du matériau constituant le corps mince varient en $\frac{1}{\delta}$, ce qui signifie d'un point de vue mécanique que celui-ci devient infiniment rigide quand δ tend vers zéro.

Afin de surmonter les difficultés rencontrées lors de la simulation numérique de la solution de ce problème, on cherche à modéliser cette jonction et donner un problème équivalent ne faisant pas intervenir le raidisseur, mais de nouvelles conditions aux limites qui rendent compte de son effet. Pour ce faire, on met en oeuvre une analyse asymptotique basée sur la technique des perturbations singulières développée par J. L. Lions dans [31]. Après une mise à l'échelle adéquate, on établit des estimations à priori qui permettent d'extraire une sous suite faiblement convergente et passer à la limite dans le problème variationnel mis à l'échelle. Le problème limite obtenu est un problème posé sur la surface moyenne de la plaque mince avec de nouvelles conditions aux limites non linéaires sur l'interface de jonction. Ces conditions, appelées conditions de Ventcel, ne sont pas classiques, car elles font

intervenir des dérivées tangentielles du même ordre que celui de l'opérateur intérieur.

On s'inspire beaucoup des travaux de K. Lemrabet concernant le cas linéaire statique [28] (plaque avec raidisseur en flexion) et aussi le cas linéaire dynamique [29]. Notre problème étant non linéaire, on fait souvent appel aux techniques non linéaires dans les équations aux dérivées partielles, notamment les théorèmes de compacité.

3.2 Position du problème

Soit Ω_+ un ouvert borné de R^2 , de frontière régulière $\partial\Omega_+ = \Gamma_+ \cup \Sigma$, où Σ est une partie ouverte connexe de mesure non nulle et $\Gamma_+ \cap \Sigma = \emptyset$. On note $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale extérieure et τ le vecteur unitaire tangent à Σ de telle sorte que la base (τ, ν) soit directe en tout point de Σ . On désigne par s une abscisse curviligne sur Σ et on considère le domaine

$$\Omega_-^\delta = \{s + y\nu ; s \in \Sigma ; 0 < y < \delta\}$$

On pose $\Sigma_-^\delta = \{s + \delta\nu ; s \in \Sigma\}$; $\partial\Omega_-^\delta = \Gamma_-^\delta \cup \Sigma \cup \Sigma_-^\delta$ avec $\Gamma_-^\delta \cap \Sigma = \emptyset$ et on note $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-^\delta$. Le domaine Ω^δ est donc divisé en deux sous domaines Ω_+ et Ω_-^δ par une interface Σ .

Le domaine complet Ω^δ représente la surface moyenne d'une plaque constituée par l'assemblage de deux structures : une plaque mince de surface moyenne Ω_+ et un raidisseur Ω_-^δ parfaitement collé sur une partie de son bord. Dans ce qui suit, les variables w et $u = (u_1, u_2)$ représentent respectivement, le déplacement transversal (ou flexion) et le déplacement plan de la plaque.

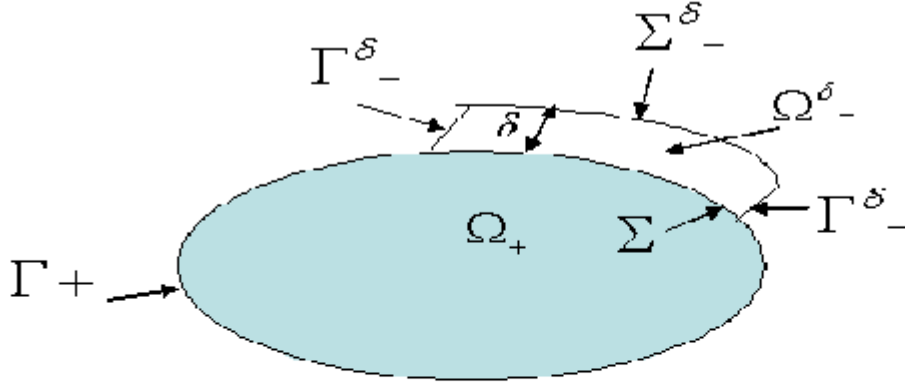


Figure 3.1 : La plaque et le raidisseur

Le système complet de von Karman pour cette structure s'écrit :

$$\rho u'' - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$\rho[I - \Delta]w'' + D\Delta^2 w - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nabla w\} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T) \quad (3.2)$$

avec des conditions d'encastrement sur la partie du bord $\Gamma_+ \cup \Gamma_-^\delta$

$$u = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_-^\delta \times (0, T) \quad (3.3)$$

et des conditions du bord libre sur Σ_-^δ

$$C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu = 0$$

$$D[\Delta w + (1 - \mu)B_1 w] = 0$$

$$D\left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu)\frac{\partial B_2 w}{\partial s}\right] - \rho\frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \cdot \nabla w = 0 \quad (3.4)$$

sur $\Sigma_-^\delta \times (0, T)$. On définit les conditions de transmission par

$$[[u]] = 0,$$

$$\begin{aligned}
[[w]] &= \left[\left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right] = 0, \\
[[C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu]] &= 0, \\
[[D[\Delta w + (1 - \mu)B_1 w]]] &= 0, \\
\left[\left[D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 w}{\partial s} \right] - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu \cdot \nabla w \right] \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

sur $\Sigma \times (0, T)$. On associe au problème (3.1) - (3.2) les conditions initiales

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1 \quad \text{dans } \Omega^\delta \tag{3.6}$$

Le crochet $[[\]]$ désigne le saut de la trace d'une fonction définie sur Ω^δ à travers la frontière Σ . Cette quantité est donnée par

$$[[\varphi]] = \varphi_{+|\Sigma} - \varphi_{-|\Sigma}$$

où la notation φ_+ (respectivement φ_-) désigne la restriction de la fonction φ au domaine Ω_+ (respectivement Ω_-). C est une application linéaire de l'ensemble S des tenseurs symétriques d'ordre 4 dans lui même définie par :

$$C(\zeta) = \frac{E}{(1 - \mu^2)} [\mu(\text{tr}\zeta)I_S + (1 - \mu)\zeta]$$

pour tout ζ dans S , où I_S est la matrice identité et $(\text{tr}\zeta)$ est la trace de ζ . Le tenseur des déformations linéarisé est donné par

$$\varepsilon(u) = 1/2 (\nabla u + \nabla^T u)$$

et la fonction f est définie par

$$f(s) = (1/2)s \otimes s, \quad s \in \mathcal{R}^2.$$

Les opérateurs de traces B_1 et B_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned}
B_1 w &\equiv 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
B_2 w &\equiv (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1\nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)
\end{aligned}$$

$D = \frac{E}{(1-\mu^2)}$ désigne le module de rigidité de la plaque à la flexion ; E est le module de Young, μ est le coefficient de Poisson et ρ est la densité de masse du matériau. On suppose que $E > 0$, $0 < \mu < 1/2$ et que l'on a :

$$E = \begin{cases} E_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{E_-}{\delta} & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases} ; \mu = \begin{cases} \mu_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \mu_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases} ; \rho = \begin{cases} \rho_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{\rho_-}{\delta} & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases}$$

Par conséquent, D sera noté D_+ ou D_- selon que l'on se réfère à Ω_+ ou Ω_-^δ . On note aussi par g' , g'' les dérivées par rapport au temps d'une fonction g .

Le système complet de von Karman décrit les oscillations planes et transversales d'une plaque mince en grandes déformations. Il s'agit d'un modèle bidimensionnel non linéaire qui constitue en lui même un modèle approché d'un problème de plaques tridimensionnel (voir[9]). Les conditions (3.3) sont de type Dirichlet. Elles signifient que la plaque est encastree sur la partie du bord $\Gamma_+ \cup \Gamma_-^\delta$, ce qui correspond à l'idée que cette partie est d'une façon ou d'une autre fixée à un support rigide. Les conditions (3.4) qui sont de type Neumann expriment le fait que la partie Σ_-^δ est libre d'effort. Enfin, les conditions de transmission (3.5) traduisent la continuité ou le raccord à l'interface Σ .

Remarque 3.1 *La plaque considérée ici est en fait une multi-structure composée d'une plaque mince et d'un corps élastique collé sur une partie de son bord. Les matériaux constituant ces deux structures sont différents dans le sens où les coefficients d'élasticité ne sont pas du même ordre de grandeur. En effet, le module de Young et la densité de masse sont indépendants de δ dans Ω_+ et varient en $\frac{1}{\delta}$ dans Ω_-^δ . Ceci signifie que le corps élastique est bien plus rigide et beaucoup plus lourd que la plaque mince, d'où le terme "raidisseur". Cette hypothèse est nécessaire pour obtenir l'effet asymptotique du raidisseur quand δ tend vers 0 car la rigidité et la densité de ce dernier tendent vers $+\infty$, ce qui permet de compenser sa faible épaisseur.*

Remarque 3.2 *Le problème étudié ici peut être considéré comme exemple de problèmes "raides". D'une manière générale, on appelle problèmes raides des problèmes de transmission où le domaine Ω est constitué de deux (ou plus) sous domaines, les coefficients prenant des valeurs d'ordres différents dans chacun d'eux. Leur rapport est alors caractérisé par un petit paramètre δ . Dans le cas des problèmes d'élasticité, il s'agit du couplage de deux corps dont*

le rapport des coefficients d'élasticité est caractérisé par δ . Autrement dit, l'un des deux corps est plus rigide que l'autre. En tant qu'exemples physiques, on peut penser à deux pièces, l'une métallique et l'autre en caoutchouc.

3.3 Formulation variationnelle

On écrit le problème sous la forme d'un problème variationnel dont les inconnues u et w et les fonctions test sont prises dans des espaces fonctionnels où l'on tient compte de l'encastrement de la plaque sur la partie $\Gamma_+ \cup \Gamma_-^\delta$ et l'on s'assure d'un minimum de régularité pour que les expressions auxquelles on sera conduit aient un sens.

Dans ce qui suit, on désigne par le symbole $\|\cdot\|_{L^p(D)}$ la norme dans $[L^2(\Omega)]^k$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$, le produit scalaire dans $[L^2(\Omega)]^k$, $k \in N$.

Soit $\{u, w\}$ une solution classique du problème (3.1)-(3.2). L'énergie totale de la plaque est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \rho \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \|w'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \|\nabla w'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(w(t), w(t)) + \langle C[\epsilon(u(t)) + f(\nabla w(t))], \epsilon(u(t)) + f(\nabla w(t)) \rangle_{\Omega^\delta} \right\}$$

où

$$a(w, \psi) = D \int_{\Omega^\delta} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} d\Omega^\delta$$

Un simple calcul basé sur une intégration par parties montre que

$$D \int_{\Omega^\epsilon} (\Delta^2 w) \psi d\Omega^\delta = a(w, \psi) - D \int_{\partial\Omega^\delta} \left\{ [\Delta w + (1 - \mu)B_1 w] \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu)B_2 w \right] \psi \right\} d(\partial\Omega^\delta) \quad (3.7)$$

En effet,

$$\int_{\Omega^\delta} (\Delta^2 w) \psi d\Omega^\delta = \int_{\partial\Omega^\delta} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} \right) \psi d(\partial\Omega^\delta) - \int_{\partial\Omega^\delta} \Delta w \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d(\partial\Omega^\delta) + \int_{\Omega^\delta} \Delta w \Delta \psi d\Omega^\delta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega^\delta} \left(\frac{\partial\Delta w}{\partial\nu} \right) \psi d(\partial\Omega^\delta) - \int_{\partial\Omega^\delta} \Delta w \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d(\partial\Omega^\delta) + a(w, \psi) \\
&\quad + (1 - \mu) \int_{\Omega^\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} d\Omega^\delta - 2(1 - \mu) \int_{\Omega^\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} d\Omega^\delta
\end{aligned}$$

Compte-tenu de la définition de B_1 et B_2 et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} d\Omega^\delta - 2 \int_{\Omega^\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} d\Omega^\delta = \\
&\quad \int_{\partial\Omega^\delta} \left\{ \left(\frac{\partial B_2 w}{\partial\nu} \right) \psi - (B_1 w) \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \right\} d(\partial\Omega^\delta)
\end{aligned}$$

on obtient (3.7).

Dans le but d'écrire notre problème sous forme variationnelle, on introduit les espaces fonctionnels suivants

$$\begin{aligned}
W(\Omega^\delta) &= \left\{ w \in H^2(\Omega^\delta) ; w|_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} = \frac{\partial w}{\partial\nu} |_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} = 0 \right\} \\
V(\Omega^\delta) &= \left\{ w \in H^1(\Omega^\delta) ; w|_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} = 0 \right\} \\
U(\Omega^\delta) &= \left\{ u \in (H^1(\Omega^\delta))^2 ; u|_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} = 0 \right\}
\end{aligned}$$

que l'on munit respectivement des normes standards de $H^2(\Omega^\delta)$, $H^1(\Omega^\delta)$ et $(H^1(\Omega^\delta))^2$. Si maintenant l'on prend φ dans $U(\Omega^\delta)$ et ψ dans $W(\Omega^\delta)$ et que l'on multiplie (3.1) par φ et (3.2) par ψ ; en utilisant (3.1)-(3.5) on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
&\rho [\langle u', \varphi \rangle_{\Omega^\delta}]' + \langle C[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \epsilon(\varphi) \rangle_{\Omega^\delta} = 0 \quad \forall \varphi \in U(\Omega^\delta) \\
&\rho [\langle w', \psi \rangle_{\Omega^\delta} + \langle \nabla w', \nabla \psi \rangle_{\Omega^\delta}]' + a(w, \psi) + \langle C[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w, \nabla \psi \rangle_{\Omega^\delta} = 0 \quad \forall \psi \in W(\Omega^\delta)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Définition 3.1 *On dit que $\{u, w\}$ est une solution faible de (3.1)-(3.6) si $u \in C(0, T; U(\Omega^\delta)) \cap C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$, $w \in C(0, T; W(\Omega^\delta)) \cap C^1(0, T; V(\Omega^\delta))$ et vérifie (3.6) et (3.8).*

Théorème 3.1 *Le problème (3.6) - (3.8) admet une solution unique.*

Preuve. voir [25].

Remarque 3.3 *L'existence d'une solution faible du problème de von Karman est bien connue et peut être établie en utilisant la méthode de Galerkin. Cependant, l'unicité est bien moins évidente. Cette question a été considérée pendant longtemps comme étant ouverte et a été abordée par plusieurs auteurs. On peut citer le travail de D. Tataru et M. Tucsnack [39] où l'on démontre un résultat d'unicité pour une plaque infinie (i.e. définie sur \mathbb{R}^2). Ce résultat a été étendu dans le même papier à certaines géométries (plaques rectangulaires). Finalement, c'est à I. Lasiecka [25] qu'on doit la publication d'un papier en 1998, où elle démontre rigoureusement l'unicité de la solution faible du système de von Karman. La méthode utilisée pour établir ce résultat est celle proposée par Sedenko dans [35] pour l'étude des équations de Marguerre- Vlasov.*

Remarque 3.4 *Nous avons vu que dans le cas du problème (3.1)-(3.6), la solution satisfait aux conditions aux limites (3.4) alors que les fonctions des espaces $V(\Omega^\delta)$ et $W(\Omega^\delta)$ ne sont pas tenues de les satisfaire. Ceci tient au fait que ces conditions apparaissent normalement comme conséquence de l'intégration par parties à partir des coefficients des équations du problème. Pour cette raison, ces conditions qui sont de type "Neumann" portent aussi le nom de conditions naturelles. Quand aux conditions aux limites (3.3), qui sont implicitement contenues dans : $\langle\langle w \in W(\Omega^\delta) \text{ et } u \in U(\Omega^\delta) \rangle\rangle$, elles sont dites principales.*

3.4 Changement d'échelle

Jusqu'à présent, les équations ont été écrites dans un domaine Ω^δ dépendant de δ , le petit paramètre appelé à tendre vers zéro. Afin de réaliser une

analyse asymptotique, il convient donc de faire un changement d'échelle qui permet d'enlever la dépendance de la géométrie du problème vis à vis de δ . Ce changement d'échelle va porter le petit paramètre sur les opérateurs et non plus sur le domaine, ce qui permet d'obtenir des résultats de convergence dans des domaines indépendants de δ .

Soit ν la normale extérieure à Σ et τ le vecteur unitaire tangent à Σ de telle sorte que la base (τ, ν) soit directe en tout point de Σ . On désigne par s une abscisse curviligne le long de Σ orienté selon τ . On définit le changement d'échelle suivant qui associe au domaine Ω_-^δ le domaine fixe $\Omega_- = \Sigma \times (0, 1)$

$$\begin{cases} \Omega_- \longrightarrow \Omega^\delta \\ (s, z) \longrightarrow X = s + \delta z \nu(s). \end{cases} \quad (3.9)$$

On identifie Σ avec $\Sigma \times \{0\}$ et on note $\Sigma_- = \Sigma \times \{1\}$, $\Gamma_- = \partial\Omega_- \setminus (\Sigma \cup \Sigma_-)$. L'ouvert Ω^δ se transforme alors en un ouvert fixe $\Omega = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-$.

A toute fonction ψ définie sur Ω_-^δ on associe la fonction $\widehat{\psi}$ définie sur Ω_-

$$\widehat{\psi}(s, z) := \psi(X)$$

En notant $R = R(s)$ la courbure de Σ en s , on rappelle les formules de Frénet

$$\frac{\partial \nu}{\partial s} = -R\tau \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau}{\partial s} = R\nu$$

d'où, en utilisant la relation $X = s + \delta z \nu(s)$, on obtient

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial z} = \nu_1 \frac{\partial}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} = (1 - \delta Rz) \left(\nu_2 \frac{\partial}{\partial x} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

On a évidemment $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \nu}$.

Dans Ω_-^δ , tout champs de vecteurs φ sera décomposé en composantes normale et tangentielle : $\varphi = \varphi_\tau \tau + \varphi_\nu \nu$. Par le changement d'échelle (3.9), φ se transforme en

$$\widehat{\varphi}(s, z) = \varphi_\tau(s, \delta z) \tau + \delta \varphi_\nu(s, \delta z) \nu$$

De plus, on définit les parties tangentielle, transverse et normale du tenseur des déformations linéarisé par

$$\begin{aligned}\epsilon_T(\varphi_-) &= (1 - Rz)^{-1} \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial s} - R(1 - Rz)^{-1} \varphi_{-\nu} \\ \epsilon_S(\varphi_-) &= \frac{1}{2} \left(R(1 - Rz)^{-1} \varphi_{-\tau} + (1 - Rz)^{-1} \frac{\partial \varphi_{-\nu}}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial z} \right) \\ \epsilon_N(\varphi_-) &= \frac{\partial \varphi_{-\nu}}{\partial z}\end{aligned}$$

qui, une fois mises à l'échelle donnent

$$\begin{aligned}\epsilon_T^\delta(\varphi_-) &= (1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial s} - \delta^{-1} R(1 - R\delta z)^{-1} \varphi_{-\nu} \\ \epsilon_S^\delta(\varphi_-) &= \frac{1}{2} \delta \left(R(1 - R\delta z)^{-1} \varphi_{-\tau} + \delta^{-1} (1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \varphi_{-\nu}}{\partial s} + \delta^{-1} \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial z} \right) \\ \epsilon_N^\delta(\varphi_-) &= \frac{\partial \varphi_{-\nu}}{\partial z}\end{aligned}$$

Enfin, les intégrales du problème (3.8) se transforment aussi comme suit :

$$\int_{\Omega_-^\delta} \psi d\Omega_-^\delta = \delta \int_{\Sigma} \int_0^1 \widehat{\psi} (1 - R\delta z) ds dz$$

3.4.1 Formulation du problème dans un domaine fixe

Après le changement d'échelle (3.9), le problème (3.8) se transforme en un nouveau problème posé sur l'ouvert fixe Ω , où maintenant les opérateurs dépendent du paramètre δ . On désigne par $u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-$ et ψ_- les images associées, respectivement à u, w, φ et ψ . Plus précisément

$$u_-^\delta := \widehat{u}_{|\Omega_-^\delta}, \quad w_-^\delta := \widehat{w}_{|\Omega_-^\delta}, \quad \varphi_- := \widehat{\varphi}, \quad \psi_- := \widehat{\psi},$$

On considère les espaces fonctionnels

$$W^\delta(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} (\psi_+, \psi_-) \in H^2(\Omega_+) \times H^2(\Omega_-); \psi_{+|\Sigma} = \psi_{-|\Sigma}; \\ \frac{\partial \psi_+}{\partial z} |_{\Sigma} = \delta^{-1} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} |_{\Sigma}; \\ \psi_{+|\Gamma_+} = \frac{\partial \psi_+}{\partial \nu} |_{\Gamma_+} = 0; \psi_{-|\Gamma_-} = \frac{\partial \psi_-}{\partial \nu} |_{\Gamma_-} = 0 \end{array} \right\}$$

$$V^\delta(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} (\psi_+, \psi_-) \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-) ; \psi_-|_\Sigma = \psi_+|_\Sigma, \\ \psi_+|_{\Gamma_+} = 0 ; \psi_-|_{\Gamma_-} = 0 \end{array} \right\}$$

$$U^\delta(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_+, \varphi_-) \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-) ; \varphi_-|_\Sigma = \varphi_+|_\Sigma, \\ \varphi_-|_\Sigma = \delta\varphi_+|_\Sigma ; \varphi_+|_{\Gamma_+} = 0 ; \varphi_-|_{\Gamma_-} = 0 \end{array} \right\}.$$

Soit $\psi \in W^\delta(\Omega)$, on définit

$$\begin{aligned} \gamma_T^\delta(\psi) &= (1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \left((1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - R(1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \gamma_S^\delta(\psi) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left((1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \\ \gamma_N^\delta(\psi) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

et afin d'alléger l'écriture, on pose

$$\begin{aligned} N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \epsilon_T^\delta(u_-^\delta) + \frac{1}{2(1 - R\delta z)^2} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \right)^2 \\ N_S^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= 2\epsilon_S^\delta(u_-^\delta) - (1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \\ N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \epsilon_N^\delta(u_-^\delta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant ces notations et en notant $u^\delta := (u_+^\delta, u_-^\delta)$ et $w^\delta := (w_+^\delta, w_-^\delta)$; où $u_+^\delta = u|_{\Omega_+}$ et $w_+^\delta = w|_{\Omega_+}$, on déduit que (u^δ, w^δ) est solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} u^\delta \in C(0, T; U^\delta(\Omega)) \cap C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^2), \quad w^\delta \in C(0, T; W^\delta(\Omega)) \cap C^1(0, T; V^\delta(\Omega)) \\ \rho_+ \left[\langle (u_+^\delta)', \varphi_+ \rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_- \left[\langle (u_-^\delta)', \varphi_- \rangle_{\Omega_-} \right]' + \rho_+ \left[\langle (w_+^\delta)', \psi_+ \rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_- \left[\langle (w_-^\delta)', \psi_- \rangle_{\Omega_-} \right]' \\ + \rho_+ [b_+ \langle (w_+^\delta)', \psi_+ \rangle]' + \rho_- [b_- \langle (w_-^\delta)', \psi_- \rangle]' + a_+ (w_+^\delta, \psi_+) + a_- (w_-^\delta, \psi_-) \\ + N_+ (u_+^\delta, w_+^\delta, \varphi_+, \psi_+) + N_- (u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\forall (\varphi, \psi) \in U^\delta(\Omega) \times W^\delta(\Omega)$, avec les conditions initiales

$$u^\delta(0) = u_0^\delta, (u^\delta)'(0) = u_1^\delta, w^\delta(0) = w_0^\delta, (w^\delta)'(0) = w_1^\delta \text{ dans } \Omega$$

où

$$((u_-^\delta, \varphi_-))_{\Omega_-} = \int_{\Omega_-} \left(u_{-\tau}^\delta \varphi_{-\tau} + \frac{1}{\delta^2} u_{-\nu}^\delta \varphi_{-\nu} \right) (1 - R\delta z) ds dz,$$

$$(w_-^\delta, \psi_-)_{\Omega_-} = \int_{\Omega_-} w_-^\delta \psi_- (1 - R\delta z) ds dz,$$

$$a_+(w_+^\delta, \psi_+) = D_+ \int_{\Omega_+} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial x^2} + \mu_+ \frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial x^2} + 2(1 - \mu_+) \frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial y^2} + \mu_+ \frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial y^2} \right\} d\Omega_+,$$

$$a_-^\delta(w_-^\delta, \psi_-) = D_- \int_{\Omega_-} \left\{ \left(\gamma_T^\delta(w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} \gamma_N^\delta(w_-^\delta) \right) \gamma_T^\delta(\psi_-) + 2(1 - \mu_-) \frac{\gamma_S^\delta(w_-^\delta)}{\delta} \frac{\gamma_S^\delta(\psi_-)}{\delta} + \left(\frac{\gamma_N^\delta(w_-^\delta)}{\delta^2} + \mu_- \gamma_T^\delta(w_-^\delta) \right) \frac{\gamma_N^\delta(\psi_-)}{\delta^2} \right\} (1 - R\delta z) ds dz,$$

$$b_+(w_+^\delta, \psi_+) = \int_{\Omega_+} \nabla w_+^\delta \nabla \psi_+ d\Omega_+,$$

$$b_-^\delta(w_-^\delta, \psi_-) = \int_0^1 \int_{\Sigma} \left\{ (1 - R\delta z)^{-2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} \right\} (1 - R\delta z) ds dz,$$

$$N_+(u_+^\delta, w_+^\delta, \varphi_+, \psi_+) = \langle C[\epsilon(u_+^\delta) + f(\nabla w_+^\delta)], \epsilon(\varphi_+) \rangle + \langle C[\epsilon(u_+^\delta) + f(\nabla w_+^\delta)] \nabla w_+^\delta, \nabla \psi_+ \rangle_{\Omega_+}$$

$$\begin{aligned} N_-^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) = & \frac{E_-}{1 - \mu_-^2} \int_{\Omega_-} \left\{ \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] \left[\epsilon_T^\delta(\varphi_-) + \frac{1}{(1 - R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \right] \right. \\ & + \frac{(1 - \mu_-)}{2\delta^2} N_S^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \left[2\epsilon_S^\delta(\varphi_-) - (1 - R\delta z)^{-1} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} + \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \right) \right] \\ & \left. + \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{1}{\delta^2} (N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \mu_- N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)) \right] \left[\epsilon_N^\delta(\varphi_-) + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} \right] \right\} (1 - R\delta z) ds dz. \end{aligned}$$

Remarque 3.5 Les formes a_-^δ , b_-^δ et N_-^δ sont définies sur un ouvert fixe mais leurs coefficients sont raides en puissances de $\frac{1}{\delta}$.

3.5 Le modèle de Ventcel

On va maintenant mettre en oeuvre une analyse asymptotique basée sur la technique des perturbations singulières développée par J. L. Lions dans [31]. On établit d'abord des estimations a priori qui permettent d'extraire une sous suite faiblement convergente et passer à la limite dans le problème variationnel (3.10). On identifie ensuite le problème résolu par la limite faible.

3.5.1 Estimations a priori.

Soit (u^δ, w^δ) la solution du problème (3.10). On note

$$\begin{aligned} E^\delta(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \rho_+ \|(u_+^\delta)'(t)\|_{(L^2(\Omega_+))}^2 + \rho_+ \|(w_+^\delta)'(t)\|_{L^2(\Omega_+)}^2 + \right. \\ & \rho_+ b_+ ((w_+^\delta)'(t), (w_+^\delta)'(t)) + a_+ (w_+^\delta(t), w_+^\delta(t)) \\ & + N_+ (u_+^\delta(t), w_+^\delta(t), u_+^\delta(t), 1/2w_+^\delta(t)) + \rho_- (((u_-^\delta)'(t), (u_-^\delta)'(t)))_{\Omega_-} \\ & + \rho_- ((w_-^\delta)'(t), (w_-^\delta)'(t)) + \rho_- b_-^\delta ((w_-^\delta)'(t), (w_-^\delta)'(t)) \\ & \left. + a_-^\delta (w_-^\delta(t), w_-^\delta(t)) + N_-^\delta (u_-^\delta(t), w_-^\delta(t), u_-^\delta(t), 1/2w_-^\delta(t)) \right\}. \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante

proposition 3.1 *On suppose que les données initiales sont telles que $E^\delta(0)$ est bornée par rapport à δ . On a alors les estimations a priori suivantes*

- w^δ est bornée indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T; W^\delta(\Omega))$
- $(w^\delta)'$ est bornée indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T; V^\delta(\Omega))$
- u^δ est bornée indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T; U^\delta(\Omega))$
- $(u^\delta)'$ est bornée indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2)$
- $\frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \right)'$ est bornée indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_-)))$
- $\gamma_T^\delta(w_-^\delta)$, $\frac{1}{\delta} \gamma_S^\delta(w_-^\delta)$ et $\frac{1}{\delta^2} \gamma_N^\delta(w_-^\delta)$ sont bornées indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_-)))$
- $N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)$, $\frac{1}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)$ et $\frac{1}{\delta} N_S^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)$ sont bornées indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_-))$

Preuve.

En prenant $\varphi = (u^\delta)'$ et $\psi = (w^\delta)'$ dans le problème variationnel (3.10) et en intégrant de 0 à t , on obtient

$$E^\delta(t) = E^\delta(0)$$

d'abord pour des solutions régulières qui se généralise par la suite par densité à toutes les solutions faibles. De plus, il est clair qu'il existe deux constantes positives δ_0 et c telles que

$$c^{-1} \leq \|(1 - R\delta z)^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|1 - R\delta z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \quad \forall \delta, \quad 0 < \delta \leq \delta_0$$

En utilisant les inégalités de Poincaré et de Korn, on déduit les estimations à priori énoncées. \square

Sachant que toute suite bornée d'un espace de Banach admet une sous suite convergente pour la topologie faible $*$, les estimations à priori énoncées dans la proposition 1 assurent la convergence de sous suites (u^δ) et (w^δ) lorsque δ tend vers zéro (On conviendra d'indexer encore ces sous suites par δ). On a donc

$$\begin{aligned} w^\delta &\longrightarrow \tilde{w} && \text{faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \\ (w^\delta)' &\longrightarrow \tilde{w}' && \text{faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^\delta &\longrightarrow \tilde{u} && \text{faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T; (H^1(\Omega))^2) \\ (u^\delta)' &\longrightarrow \tilde{u}' && \text{faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2). \end{aligned}$$

Introduisons les espaces

$$W(\Omega_+) = \left\{ w \in H^2(\Omega_+); \quad w|_{\Gamma_+} = \frac{\partial w}{\partial \nu} |_{\Gamma_+} = 0, \quad w|_\Sigma \in H_0^2(\Sigma), \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} \in H_0^1(\Sigma) \right\}$$

$$V(\Omega_+) = \{ w \in H^1(\Omega_+); \quad w|_{\Gamma_+} = 0, \quad w|_\Sigma \in H_0^1(\Sigma) \}$$

$$U(\Omega_+) = \left\{ u \in (H^1(\Omega_+))^2; \quad u|_{\Gamma_+} = 0, \quad u_\tau \in H_0^1(\Sigma) \right\}$$

En notant $\tilde{u} := (\tilde{u}_+, \tilde{u}_-)$ et $\tilde{w} := (\tilde{w}_+, \tilde{w}_-)$; où $\tilde{w}_\pm = \tilde{w} |_{\Omega_\pm}$ et $\tilde{u}_\pm = \tilde{u} |_{\Omega_\pm}$, on énonce le résultat suivant :

proposition 3.2 *Les limites faibles \tilde{u} et \tilde{w} vérifient :*

- $\tilde{w}_+ \in L^\infty(0, T ; W(\Omega_+))$; $(\tilde{w}_+)' \in L^\infty(0, T ; V(\Omega_+))$, $\left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu}\right)' \in L^\infty(0, T ; (L^2(\Sigma)))$,
- $\tilde{u}_+ \in L^\infty(0, T ; U(\Omega_+))$; $(\tilde{u}_+)' \in L^\infty(0, T ; (L^2(\Omega_+))^2)$, $(\tilde{u}_{+\tau})'|_{\Sigma} \in L^\infty(0, T ; (L^2(\Sigma)))$,
- $\tilde{w}_- = \tilde{w}_{+|\Sigma}$; $\tilde{u}_{-\tau} = \tilde{u}_{+\tau}|_{\Sigma}$ et $\tilde{u}_{-\nu} = 0$.

Preuve

Les estimations à priori établies dans la proposition précédente montrent que

$$\gamma_N^\delta(w_-^\delta) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^\infty(0, T ; (L^2(\Omega_-)))$$

quand $\delta \rightarrow 0$. Compte tenu du fait que $\gamma_N^\delta(w_-^\delta)$ converge vers $\frac{\partial^2 \tilde{w}_-}{\partial z^2}$ au sens des distributions, quand δ tend vers zéro, on déduit que

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_-}{\partial z^2} = 0$$

ce qui donne

$$\tilde{w}_-(s, z, t) = \tilde{w}_-(s, 0, t) + z \frac{\partial \tilde{w}_-}{\partial z}(s, 0, t)$$

pour tout $(s, z, t) \in \Sigma \times [0, 1] \times (0, T)$. Par ailleurs, en utilisant les conditions de transmission contenues dans la définition de l'espace $W^\delta(\Omega)$, on obtient

$$\tilde{w}_+ = \tilde{w}_- \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{w}_-}{\partial z} = 0$$

sur $\Sigma \times (0, T)$, d'où

$$\tilde{w}_{+|\Sigma} \in L^\infty(0, T ; H_0^2(\Sigma)) \text{ et } \tilde{w}_- = \tilde{w}_{+|\Sigma}.$$

Finalement, la condition de transmission $\frac{\partial w_+^\delta}{\partial z}|_{\Sigma} = \delta^{-1} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z}|_{\Sigma}$ sur $\Sigma \times (0, T)$ combinée avec les estimations à priori montrent que

$$\frac{1}{\delta} \int_0^1 \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} dz \longrightarrow \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T ; H_0^1(\Sigma))$$

et

$$\frac{1}{\delta} \int_0^1 \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial z}\right)' dz \longrightarrow \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu}\right)' \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma))$$

D'une façon similaire, on montre grâce aux estimations à priori que $\frac{\partial \tilde{u}_{-\nu}}{\partial z} = 0$. Par conséquent, $\tilde{u}_{-\nu} = \tilde{u}_{-\nu} |_{\Sigma}$, ce qui donne en combinant avec les conditions de transmission

$$\tilde{u}_{-\nu} = 0.$$

Par ailleurs, des arguments similaires permettent de faire un lien entre $\tilde{u}_{-\tau}$ et la trace de $\tilde{u}_{+\tau}$ sur Σ . Ainsi,

$$\tilde{u}_{-\tau} = \tilde{u}_{+\tau} |_{\Sigma}$$

comme $\tilde{u}_{-\tau} \in H^1(\Omega_-)$ et $\tilde{u}_{+\tau} = 0$ sur Γ_- , alors $\tilde{u}_{+\tau} \in H_0^1(\Sigma)$. \square

Remarque 3.6 *Dans ce qui suit, pour simplifier les formules, on omettra souvent d'écrire "explicitement" la trace sur Σ d'une fonction définie sur Ω_+ . Cependant, le contexte rend clair l'usage des notations et ne prête pas à confusion. Par exemple, si une fonction définie sur Ω_- s'exprime en fonction d'une autre fonction définie sur Ω_+ , il s'agira alors de la trace de celle-ci sur Σ .*

Les estimations à priori établies dans la proposition précédente nous permettent d'obtenir les convergences faibles * suivantes qui sont nécessaires pour la suite de l'analyse. Dans ce qui suit, on considère les notations

$$\begin{aligned} \gamma_T(\tilde{w}_+) &= \frac{\partial^2 \tilde{w}_+}{\partial s^2} - R(s) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu}, \\ \gamma_S(\tilde{w}_+) &= -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} - R(s) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s}, \\ N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) &= \frac{\partial \tilde{u}_{+\tau}}{\partial s} - R(s) \tilde{u}_{+\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \right)^2. \end{aligned}$$

proposition 3.3 *Les convergences faible * suivantes sont satisfaites dans l'espace $L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma))$*

$$\int_0^1 \gamma_T^\delta(w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \xrightarrow{*} \gamma_T(\tilde{w}_+) \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (3.11)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\delta} \gamma_S^\delta(w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \xrightarrow{*} \gamma_S(\tilde{w}_+) \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (3.12)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\delta^2} \gamma_N^\delta(w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \xrightarrow{*} -\mu_- \gamma_T(\tilde{w}_+) \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (3.13)$$

$$\int_0^1 N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \xrightarrow{*} N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (3.14)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \xrightarrow{*} -\mu_- N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (3.15)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\delta} N_S^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \xrightarrow{*} 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)) \quad (3.16)$$

Preuve

Les estimations à priori énoncées dans la proposition 3.1, montrent que $\int_0^1 \gamma_T^\delta(w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz$ est borné indépendamment de δ dans $L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma))$. Il en résulte qu'on peut extraire une sous suite convergeant faiblement * dans cet espace. D'autre part, les conditions de transmission permettent d'écrire

$$w_-^\delta(s, z, t) = w_+^\delta(s, 0, t) + \delta z \frac{\partial w_+^\delta}{\partial \nu}(s, t) + \delta^2 \int_0^z \int_0^\xi \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 w_-^\delta}{\partial z^2}(s, \zeta) d\zeta d\xi$$

Pour tout $(s, z, t) \in \Sigma \times [0, 1] \times (0, T)$. Par conséquent, le passage à la limite au sens des distributions donne

$$\int_0^1 \gamma_T^\delta(w_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \rightarrow \gamma_T(\tilde{w}_+)$$

ce qui implique aussi que

$$\gamma_T(\tilde{w}_+) \in L^\infty(0, T ; L^2(\Sigma)).$$

La deuxième convergence peut être démontrée en adoptant une démarche analogue. Pour montrer la troisième convergence, on pose dans le problème variationnel mis à l'échelle (3.10) $\psi_+ = 0$, $\varphi_+ = \varphi_- = 0$, $\psi_-(s, z) = \delta^2 \theta(s) \frac{z^2}{2}$, où θ est une fonction régulière indépendante de z . Il en résulte que $b_+((w_+^\delta)', \psi_+) = 0$; $a_+(w_+^\delta, \psi_+) = 0$ et $N_+(u_+^\delta, w_+^\delta, \varphi_+, \psi_+) = 0$. On multiplie alors (3.10) par une fonction $\zeta \in D(0, T)$ et on intègre de 0 à T . Les estimations à priori, l'inégalité de Holder et les injections compactes dans les espaces de Sobolev montrent que

$$\begin{aligned} b_-^\delta((w_-^\delta)', \psi_-) &\rightarrow 0 \\ N_-^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand δ tend vers zéro dans $D'(0, T)$. En passant à la limite dans (3.10), on obtient

$$\int_0^T \int_\Sigma \theta(s) \zeta(t) \int_0^1 \left(\frac{\gamma_N^\delta(w_-^\delta)}{\delta^2} + \mu_- \gamma_T^\delta(w_-^\delta) \right) (1 - R\delta z) dz \, ds dt \rightarrow 0$$

quand $\delta \rightarrow 0$. Comme $\theta(s)\zeta(t) \in L^1(0, T; L^2(\Sigma))$, on obtient le résultat (3.13).

On va maintenant montrer (3.14). En tirant profit du fait que $N_T^\delta(u^\delta, w^\delta)$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_-))$, on déduit que

$$\int_0^1 \epsilon_T^\delta(u_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; L^2(\Sigma))$$

d'où, pour une sous suite, on a la convergence faible * dans $L^\infty(0, T; L^2(\Sigma))$. En exploitant les conditions de transmission, on écrit au sens des distributions

$$\int_0^1 \epsilon_T^\delta(u_-^\delta)(1 - R\delta z) dz \longrightarrow \frac{\partial \tilde{u}_{+\tau}}{\partial s} - R(s) \tilde{u}_{+\nu}$$

quand $\delta \rightarrow 0$. Par conséquent, cette convergence est satisfaite dans $L^\infty(0, T; L^2(\Sigma))$.

Par ailleurs, en utilisant un résultat de compacité, on déduit que

$$w_-^\delta \rightarrow \tilde{w}_- \text{ fortement dans } L^\infty(0, T; H^{2-\varepsilon}(\Omega_-))$$

quand $\delta \rightarrow 0$, pour tout $0 < T < \infty$ et tout $\varepsilon > 0$. En particulier, il s'ensuit que

$$\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \tilde{w}_-}{\partial s} \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; H^{1-\varepsilon}(\Omega_-))$$

quand $\delta \rightarrow 0$. En utilisant les injections compactes dans les espaces de Sobolev, on déduit

$$\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \tilde{w}_-}{\partial s} \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^p(\Omega_-))$$

quand $\delta \rightarrow 0$, pour tout $2 \leq p < +\infty$. Il en résulte

$$\left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{\partial \tilde{w}_-}{\partial s} \right)^2 \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^p(\Omega_-))$$

quand $\delta \rightarrow 0$. Ainsi, comme $\tilde{w}_- = \tilde{w}_+ |_\Sigma$, on conclut

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \right)^2 (1 - R\delta z) dz \rightarrow \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \right)^2 \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Sigma)).$$

En combinant ces résultats, on déduit (3.14).

Nous allons maintenant montrer la convergence (3.15). On considère le problème variationnel (3.10) avec le choix particulier des fonctions test suivant : $\psi_+ = 0$, $\psi_- = 0$, $\varphi_+ = 0$, $\varphi_{-\tau} = 0$ et $\varphi_{-\nu}(s, z) = \delta^2 \theta(s)z$, où θ est une fonction régulière indépendante de z . Ainsi, en multipliant par $\zeta \in D(0, T)$ et en intégrant de 0 à T , on obtient quand δ tend vers zéro

$$\int_0^T \int_\Sigma \theta(s) \zeta(t) \int_0^1 \left(\frac{1}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \mu_- N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right) (1 - R\delta z) dz ds dt \rightarrow 0$$

d'où

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\delta^2} N_N^\delta(u^\delta, w^\delta) + \mu_- N_T^\delta(u^\delta, w^\delta) \right) (1 - R\delta z) dz \rightarrow 0 \text{ faiblement}^* \text{ } L^\infty(0, T; L^2(\Sigma)).$$

Finalement, en adoptant une démarche analogue, on obtient la dernière convergence. En effet, si l'on choisit dans le problème variationnel (3.10) les fonctions test $\psi_+ = 0$, $\psi_- = 0$, $\varphi_+ = 0$, $\varphi_{-\nu} = 0$ et $\varphi_{-\tau}(s, z) = \delta^2 \theta(s)z$, où θ est une fonction régulière indépendante de z , on obtient (3.15). \square

On peut maintenant passer à la limite dans le problème (3.10). On va montrer que (\tilde{u}, \tilde{w}) satisfait un problème de Cauchy-Ventcel.

3.5.2 Le problème limite

Sous des hypothèses de convergence faible sur les données, nous allons, en choisissant des fonctions adéquates dans les équations écrites sous forme variationnelle, obtenir le problème de Cauchy- Ventcel vérifié par (\tilde{u}, \tilde{w}) .

proposition 3.4 *On suppose que les conditions initiales vérifient les convergences faibles suivantes*

$$\begin{aligned} (w_+^{0\delta}, \int_0^1 w_-^{0\delta} dz) &\rightharpoonup (w_+^*, w_+^* |_\Sigma) \text{ dans } H^2(\Omega_+) \times H^2(\Sigma) \\ (w_+^{1\delta}, \int_0^1 w_-^{1\delta} dz) &\rightharpoonup (w_+^{**}, w_+^{**} |_\Sigma) \text{ dans } H^1(\Omega_+) \times H^1(\Sigma) \\ \frac{1}{\delta} \int_0^1 \frac{\partial w_-^{1\delta}}{\partial z} dz &\rightharpoonup w^{***} \text{ dans } L^2(\Sigma). \\ \left(u_+^{0\delta}, \int_0^1 u_{-\tau}^{0\delta} dz, \int_0^1 u_{-\nu}^{0\delta} dz \right) &\rightharpoonup (u_+^*, u_{+\tau}^* |_\Sigma, 0) \text{ dans } [H^1(\Omega_+)]^2 \times [H^1(\Sigma)]^2 \\ \left(u_+^{1\delta}, \int_0^1 u_{-\tau}^{1\delta} dz, \int_0^1 \frac{1}{\delta} u_{-\nu}^{1\delta} dz \right) &\rightharpoonup (u_+^{**}, u^{***}) \text{ dans } [L^2(\Omega_+)]^2 \times [L^2(\Sigma)]^2 \end{aligned}$$

alors, la sous suite u_+^δ (respectivement w_+^δ) converge faiblement * dans $L^\infty(0, T; U^\delta(\Omega))$ (respectivement dans $L^\infty(0, T; W^\delta(\Omega_+))$) vers \tilde{u}_+ (respectivement \tilde{w}_+) qui satisfait le problème de Cauchy-Ventcel

$$\begin{aligned} \tilde{w}_+ \in L^\infty(0, T; W(\Omega_+)), (\tilde{w}_+)' \in L^\infty(0, T; V(\Omega_+)), \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} \right)' \in L^\infty(0, T; L^2(\Sigma)), \\ \tilde{u}_+ \in L^\infty(0, T; U(\Omega_+)), (\tilde{u}_+)' \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega_+)]^2), (\tilde{u}_{+\tau})' \in L^\infty(0, T; L^2(\Sigma)) \\ \rho_+ [\langle \tilde{u}_+', \varphi \rangle_{\Omega_+}]' + \rho_- [\langle \tilde{u}_+', \varphi \rangle_\Sigma]' + \rho_+ [\langle \tilde{w}_+', \psi \rangle_{\Omega_+}]' + \rho_- [\langle \tilde{w}_+', \psi \rangle_\Sigma]' \\ + \rho_+ [b_+((\tilde{w}_+)', \psi)]' + \rho_- [b_\Sigma((\tilde{w}_+)', \psi)]' + a_+(\tilde{w}_+, \psi) + a_\Sigma(\tilde{w}_+, \psi) \\ + N_+(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi_+, \psi_+) + N_\Sigma(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi, \psi) = 0, \end{aligned}$$

$\forall (\varphi, \psi) \in U(\Omega_+) \times W(\Omega_+)$, avec les conditions initiales :

$$\tilde{u}_+(0) = u_+^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_+^{**}, \tilde{w}_+(0) = w_+^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_+^{**} \quad \text{dans } \Omega_+$$

$$\tilde{w}_+(0) = w_{+|\Sigma}^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_{+|\Sigma}^{**}, \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu}\right)'(0) = w_{+|\Sigma}^{***}, (\tilde{u}_+)(0) = u_{+|\Sigma}^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_{+|\Sigma}^{***} \text{ sur } \Sigma$$

où

$$a_\Sigma(\tilde{w}_+, \psi) = \int_\Sigma \left\{ E_- \left(\gamma_T(\tilde{w}_+) \gamma_T(\psi) + \frac{1}{(1 + \mu_-)} \gamma_S(\tilde{w}_+) \gamma_S(\psi) \right) \right\} \mathbf{d}\mathbf{s}$$

$$b_\Sigma(\tilde{w}_+, \psi) = \int_\Sigma \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) ds$$

$$N_\Sigma(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi, \psi) = E_- \int_\Sigma N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \left(\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial s} - R(s) \varphi_\nu + \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ds$$

Preuve

Soit $\psi_+ \in W(\Omega_+)$ et $\varphi_+ \in U(\Omega_+)$. On suppose que $\frac{\partial \psi_+}{\partial s}$ est bornée indépendamment de δ dans $H^1(\Sigma)$. On écrit le problème variationnel (3.10) en faisant ce choix de fonctions test :

$$\psi = \begin{cases} \psi_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \psi_{+|\Sigma} + \delta z \frac{\partial \psi_+}{\partial \nu} & \text{dans } \Omega_- \end{cases} ; \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ (\varphi_{+\tau}, \delta \varphi_{+\nu}) & \text{dans } \Omega_- \end{cases}$$

Pour obtenir le problème limite, on fait tendre δ vers zéro dans le problème variationnel ainsi obtenu. Le passage à la limite s'effectue sans aucune difficulté dans $a_+(w_+^\delta, \psi)$ et $b_+((w_+^\delta)', \psi)$ et l'on obtient

$$\begin{aligned} a_+(w_+^\delta, \psi_+) &\longrightarrow a_+(\tilde{w}_+, \psi_+) \\ (b_+((w_+^\delta)', \psi_+))' &\longrightarrow (b_+((\tilde{w}_+)', \psi_+))' \end{aligned}$$

au sens des distributions, quand $\delta \rightarrow 0$. On passe ensuite à la limite dans $N_+(u_+^\delta, w_+^\delta, \varphi_+, \psi_+)$ en ayant à surmonter une difficulté liée à la présence des termes non linéaires. Les outils utilisés sont l'inégalité de Hölder et l'injection compacte de $H^1(\Omega_+)$ dans $L^p(\Omega_+)$, $p \geq 2$ qui nous permettent d'obtenir

$$\left(\frac{\partial w_+^\delta}{\partial x} \right)^2 \longrightarrow \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial x} \right)^2 \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_+))$$

$$\left(\frac{\partial w_+^\delta}{\partial y} \right)^2 \longrightarrow \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial y} \right)^2 \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_+))$$

$$\frac{\partial w_+^\delta}{\partial x} \frac{\partial w_+^\delta}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial x} \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial y} \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_+))$$

Il en résulte la convergence de $N_-^\delta (u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-)$ vers $N_+ (\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi_+, \psi_+)$ dans $D'(0, T)$.

D'autre part, grâce aux résultats de convergence faible (3.11)-(3.13) établis dans la proposition précédente, on montre que

$$\begin{aligned} (b_-^\delta ((w_-^\delta)', \psi_-^\delta))' &\longrightarrow (b_\Sigma ((\tilde{w}_+)', \psi_+))' \\ a_-^\delta (w_-^\delta, \psi_-^\delta) &\longrightarrow a_\Sigma (\tilde{w}_+, \psi_+) \end{aligned}$$

dans $D'(0, T)$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Il reste maintenant à démontrer que $N_-^\delta (u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-)$ converge vers $N_\Sigma(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi_+, \psi_+)$. Cette étape de la démonstration est assez délicate vu la présence des termes non linéaires d'une part, et le fait de se heurter à des produits de limites faibles d'autre part. Pour établir ce résultat, on commence par analyser le premier terme de $N_-^\delta (u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-)$. On montre alors que

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \int_0^1 \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] \left[\epsilon_T^\delta(\varphi_-) + \frac{1}{(1-R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \right] (1-R\delta z) ds dz \\ &\quad \rightarrow (1-\mu_-^2) \int_\Sigma N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \left(\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial s} - R(s)\varphi_\nu + \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial s} \right) ds \end{aligned}$$

En effet, d'après les convergences (3.14),(3.15), il est clair que

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \int_0^1 \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] \epsilon_T^\delta(\varphi_-) (1-R\delta z) ds dz \rightarrow \\ &\quad (1-\mu_-^2) \int_\Sigma N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \left(\frac{\partial \varphi_{+\tau}}{\partial s} - R(s)\varphi_{+\nu} \right) ds \end{aligned}$$

au sens des distributions quand $\delta \rightarrow 0$. Il reste à démontrer que l'intégrale

$$\int_\Sigma \int_0^1 \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] \left[\frac{1}{(1-R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \right] (1-R\delta z) ds dz$$

converge vers $(1-\mu_-^2) \int_\Sigma N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial s} ds$. D'abord, observons que

$$\int_\Sigma N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial s} ds = \int_0^1 \int_\Sigma N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial s} ds dz$$

Il suffit alors de montrer que

$$\int_{\Sigma} \int_0^1 \left\{ \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] \left[\frac{1}{(1-R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \right] (1-R\delta z) \right. \\ \left. - (1-\mu_-^2) N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\} ds dz \rightarrow 0.$$

Pour ce faire, on écrit cette dernière expression sous cette forme

$$\int_{\Sigma} \int_0^1 \left\{ \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] \left[\frac{1}{(1-R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \right] (1-R\delta z) \right. \\ \left. - (1-\mu_-^2) N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial s} \right\} ds dz = \\ \int_{\Sigma} \int_0^1 \left[\left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] (1-R\delta z) - (1-\mu_-^2) N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \right] \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial s} ds dz \\ + \int_{\Sigma} \int_0^1 \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] (1-R\delta z) \\ \times \left[\frac{1}{(1-R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} - \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial z} \right] ds dz$$

En multipliant par une fonction $\zeta(t) \in D(0, T)$ et en intégrant de 0 à T ; en utilisant l'inégalité de Holder et les injections compactes dans les espaces de Sobolev, on obtient

$$\left| \int_0^T \int_{\Sigma} \int_0^1 \left\{ \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] \left[\frac{1}{(1-R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \right] (1-R\delta z) \right. \right. \\ \left. \left. - (1-\mu_-^2) N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\} \zeta(t) ds dz dt \right| \leq \\ \left| \int_0^T \int_{\Sigma} \int_0^1 \left[\left(N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right) (1-R\delta z) \right. \right. \\ \left. \left. - (1-\mu_-^2) N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \right] \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial z} \zeta(t) ds dz dt \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \left\| \left(N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right) (1 - R\delta z) \right\|_{L^2(\Omega_-)} \left\| \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \right\|_{L^3(\Omega_-)} \\
& \quad \times \left\| (1 - R\delta z)^{-2} \frac{\partial \psi_-^\delta}{\partial s} - \frac{\partial \psi_+}{\partial s} \right\|_{L^6(\Omega_-)} |\zeta(t)| dt \\
& + \int_0^T \left\| \left(N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right) (1 - R\delta z) \right\|_{L^2(\Omega_-)} \left\| \frac{\partial \psi_+}{\partial s} \right\|_{L^3(\Omega_-)} \\
& \quad \times \left\| \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} - \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \right\|_{L^6(\Omega_-)} |\zeta(t)| dt.
\end{aligned}$$

Examinons maintenant le comportement de la première intégrale se trouvant dans le membre de droite de l'inégalité ci dessus quand $\delta \rightarrow 0$. Compte tenu du fait que $\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial z} \zeta(t)$ est dans $L^1(0, T ; L^2(\Sigma))$ et utilisant les convergences faible * établies dans la proposition 3.3, on montre que cette dernière converge vers zéro, par définition de la convergence faible *. Le passage à la limite dans les autres intégrales se fait en se basant sur les injections compactes dans les espaces de Sobolev et les estimations à priori établies dans la proposition 3.1. En effet, comme $w_-^\delta \rightarrow \tilde{w}_- = \tilde{w}_+ | \Sigma$ dans $L^\infty(0, T ; H^2(\Omega_-))$, on déduit que

$$\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \longrightarrow \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0, T ; H^1(\Omega_-))$$

En utilisant un résultat de compacité, on obtient

$$\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \longrightarrow \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T ; H^{1-\varepsilon}(\Omega_-)), \quad \forall \varepsilon > 0$$

comme en dimension 2, on a l'injection

$$H^{1-\varepsilon}(\Omega_-) \hookrightarrow L^{\frac{2}{\varepsilon}}(\Omega_-)$$

la relation ci-dessus implique, pour ε petit

$$\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \longrightarrow \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T ; L^6(\Omega_-)).$$

De plus, $(1 - R\delta z)^{-2} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \psi_+}{\partial s}$ fortement dans $L^6(\Omega_-)$ et compte tenu du fait que $H^1(\Omega_-) \hookrightarrow L^3(\Omega_-)$, on déduit que $\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s}$ est borné par rapport à δ dans $L^\infty(0, T ; L^3(\Omega_-))$. De plus, sachant que $\left\| \frac{\partial \psi_\pm}{\partial s} \right\|_{L^3(\Omega_-)} = \left\| \frac{\partial \psi_\pm}{\partial s} \right\|_{L^3(\Sigma)}$, la fonction $\frac{\partial \psi_\pm}{\partial s}$ est alors bornée indépendamment de δ dans $L^3(\Sigma)$. (Ceci provient de l'injection compacte $H^1(\Sigma) \hookrightarrow L^3(\Sigma)$ et du fait que $\frac{\partial \psi_\pm}{\partial s}$ est bornée dans $H^1(\Sigma)$).

Par conséquent, tenant compte du fait que $N_T^\delta(u^\delta, w^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u^\delta, w^\delta)$ est borné dans $L^\infty(0, T ; L^2(\Omega_-))$, on conclut que la deuxième et la troisième intégrales du membre de droite de l'inégalité ci-dessus convergent vers zéro quand δ tend vers zéro. Il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \int_0^1 \left[N_T^\delta(u^\delta, w^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u^\delta, w^\delta) \right] (1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-^\delta}{\partial z} \\ \rightarrow (1 - \mu_-^2) \int_{\Sigma} N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \frac{\partial \psi_+}{\partial z} ds dz \end{aligned}$$

au sens des distributions quand $\delta \rightarrow 0$.

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \int_0^1 \frac{1}{\delta^2} [N_S^\delta(u^\delta, w^\delta)] \left[2\epsilon_S^\delta(\varphi_-) - (1 - R\delta z)^{-1} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \right) \right] (1 - R\delta z) ds dz \\ \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\int_{\Sigma} \int_0^1 \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{1}{\delta^2} (N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \mu_- N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)) \right] \left[\epsilon_N^\delta(\varphi_-) + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} \right] (1 - R\delta z) ds dz \rightarrow 0,$$

ce qui permet alors d'avoir

$$N_-^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) \longrightarrow N_\Sigma(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi_+, \psi_+)$$

quand $\delta \rightarrow 0$. Finalement, un passage à la limite dans les conditions initiales montre que

$$\begin{aligned}
& (\tilde{u}_+, \varphi_+)_{\Omega_+} (0) + (\tilde{u}_{+\tau}, \varphi_{+\tau})_{\Sigma} (0) = (u_+^*, \varphi_+)_{\Omega_+} + (u_{+\tau}^*, \varphi_{+\tau})_{\Sigma} \\
& (\tilde{u}_+, \varphi_+)_{\Omega_+}' (0) + (\tilde{u}_+, \varphi_+)_{\Sigma}' (0) + (\tilde{w}_+, \psi_+)_{\Omega_+}' (0) + (\tilde{w}_+, \psi_+)_{\Sigma}' (0) \\
& + b_+ (\tilde{w}_+, \psi_+)_{\Omega_+}' (0) + b_{\Sigma} (\tilde{w}_+, \psi_+)_{\Sigma}' (0) = (u_+^{**}, \varphi_+)_{\Omega_+} + (u_+^{***}, \varphi_+)_{\Sigma} + \\
& (w_+^{**}, \psi_+)_{\Omega_+} + (w_+^{**}, \psi_+)_{\Sigma} + (\nabla w_+^{**}, \nabla \psi_+)_{\Omega_+} + \left(w_+^{***}, \frac{\partial \psi_+}{\partial \nu} \right)_{\Sigma} + \left(\frac{\partial w_+^{**}}{\partial s}, \frac{\partial \psi_+}{\partial s} \right)_{\Sigma}
\end{aligned}$$

Remarque 3.7 Lorsque $\delta \rightarrow 0$, toutes les formes écrites sur Ω_- se comportent comme des formes sur Σ . Celles-ci représentent l'effet asymptotique du raidisseur sur le bord de la plaque et traduisent l'énergie de déformation de celui-ci.

Remarque 3.8 Une question particulièrement importante serait de démontrer l'unicité de la solution du problème limite obtenu ci-dessus. En effet, l'unicité de la solution entraîne la convergence de la suite (u^δ, w^δ) toute entière et pas seulement celle d'une sous suite. Il serait intéressant de reprendre l'analyse effectuée par I. Lasićka dans [25] et l'adapter à notre cas, bien que les nouvelles conditions aux limites non linéaires de Ventcel induisent des difficultés techniques supplémentaires.

Remarque 3.9 Le problème limite obtenu est équivalent au problème aux limites

$$\begin{aligned}
\rho_+ (\tilde{u}_+)^{''} - \operatorname{div}\{C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)]\} &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T) \\
\rho_+ [I - \Delta](\tilde{w}_+)^{''} + D\Delta^2 \tilde{w}_+ - \operatorname{div}\{C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)]\nabla \tilde{w}_+\} &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

avec les conditions de Dirichlet sur le bord Γ_+

$$\tilde{u}_+ = 0, \quad \tilde{w}_+ = \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+ \times (0, T) \quad (3.18)$$

et les conditions de Ventcel sur $\Sigma \times (0, T)$

$${}^t \boldsymbol{\tau} (C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla \tilde{w}_+)]) \boldsymbol{\nu} = \rho_- (\tilde{u}_{+\tau})^{''} - E_- \frac{\partial}{\partial s} [N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)] \quad (3.19)$$

$${}^t\boldsymbol{\nu} (C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]) \boldsymbol{\nu} = \rho_-(\tilde{u}_{+\nu})'' + E_- R(s) [N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)] \quad (3.20)$$

$$D [\Delta\tilde{w}_+ + (1 - \mu)B_1\tilde{w}_+] = -Q(\tilde{w}_+) - \rho_- \frac{\partial\tilde{w}_+''}{\partial\nu} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\partial\Delta\tilde{w}_+}{\partial\nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2\tilde{w}_+}{\partial s} \right] - \rho_+ \frac{\partial\tilde{w}_+''}{\partial\nu} - C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)] \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla\tilde{w}_+ = \\ \rho_- \left[\tilde{w}_+ - \frac{\partial^2\tilde{w}_+}{\partial s^2} \right]'' + P(\tilde{w}_+) - E_- \frac{\partial}{\partial s} \left[N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial\tilde{w}_+}{\partial s} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

où ${}^t\boldsymbol{\nu}$ (resp. ${}^t\boldsymbol{\tau}$) est le vecteur transposé (resp. matrice) de $\boldsymbol{\nu}$ (resp. $\boldsymbol{\tau}$).
Avec (3.17) on associe les conditions initiales

$$\tilde{u}_+(0) = u_+^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_+^{**}, \tilde{w}_+(0) = w_+^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_+^{**} \quad \text{dans } \Omega_+$$

$$\tilde{w}_+(0) = w_{+|\Sigma}^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_{+|\Sigma}^{**}, \left(\frac{\partial\tilde{w}_+}{\partial\nu} \right)'(0) = w_{+|\Sigma}^{***}, (\tilde{u}_+)(0) = u_{+|\Sigma}^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_{+|\Sigma}^{**} \quad \text{sur } \Sigma$$

où les opérateurs P et Q sont définis par :

$$P(\tilde{w}) = E_- \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \gamma_T(\tilde{w}) + \frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} (R(s)\gamma_S(\tilde{w})) \right]$$

$$Q(\tilde{w}) = E_- \left[\frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} \gamma_S(\tilde{w}) - R(s)\gamma_T(\tilde{w}) \right].$$

Chapitre 4

L'effet d'une couche mince sur une plaque mince non linéaire

4.1 Introduction

On considère le système complet de von Karman pour une plaque mince recouverte d'une fine couche élastique. On s'intéresse au cas réaliste où la rigidité et la densité de la couche mince sont supposées rester finies et ne pas tendre vers l'infini pour compenser l'épaisseur de celle-ci. Pour des raisons numériques, on cherche à approcher ce problème par un autre problème ne faisant pas intervenir la couche mince, mais de nouvelles conditions aux limites qui rendent compte de son effet. On utilise la méthode des développements asymptotiques formels pour identifier des conditions aux limites approchées, dites de Ventcel, qui permettent de modéliser l'effet de la couche mince. L'idée consiste à approcher la solution par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation sur l'interface fournissant les conditions aux limites approchées recherchées.

Pour dériver ces conditions aux limites, on effectue une approximation d'ordre 1, correspondant à un développement asymptotique tronqué à l'ordre 1. Les conditions ainsi identifiées sont celles obtenues par passage à la limite dans le chapitre 3, mais qui dépendent cette fois-ci de l'épaisseur de la couche mince. Notons enfin que l'approximation d'ordre 0 ne présente que peu d'intérêt, car elle revient à négliger totalement l'effet de la couche mince.

4.2 Position du problème

Soit Ω_+ un ouvert borné régulier de R^2 de frontière régulière Σ et soit $\delta > 0$ un paramètre. On définit dans R^2 l'ouvert

$$\Omega_-^\delta = \{x \in R^2, d(x, \Sigma) < \delta\}$$

de frontière $\partial\Omega_-^\delta = \Sigma \cup \Sigma_-^\delta$ où $\Sigma_-^\delta = \{x \in R^2, d(x, \Sigma) = \delta\}$ et où d désigne la distance du point x au bord Σ . On note $\Omega^\delta = \Omega_+ \cup \Sigma \cup \Omega_-^\delta$ la surface moyenne de la plaque constituée par l'assemblage de la plaque Ω_+ et la couche mince Ω_-^δ .

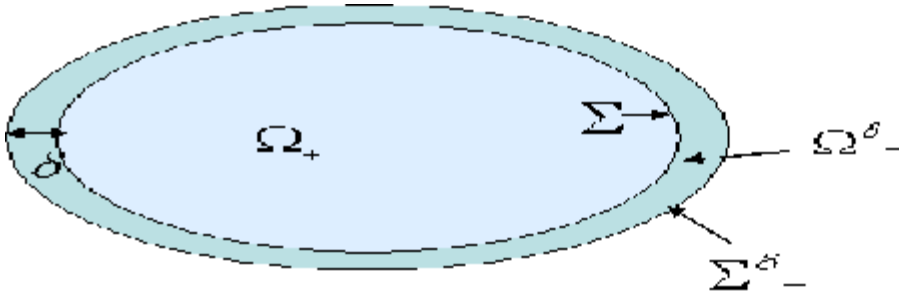


Figure 4.1 : La plaque et la couche mince

En désignant par $u = (u_1, u_2)$ le déplacement plan et w le déplacement transversal de la plaque, le système complet de von Karman pour cette structure s'écrit :

$$\rho u'' - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$\rho[I - \Delta]w'' + D\Delta^2 w - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nabla w\} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \times (0, T), \quad (4.2)$$

avec les conditions du bord libre sur $\Sigma_-^\delta \times (0, T)$

$$C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)]\nu = 0,$$

$$D[\Delta w + (1 - \mu)B_1 w] = 0,$$

$$D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 w}{\partial s} \right] - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w = 0. \quad (4.3)$$

On définit aussi les conditions de transmission sur $\Sigma \times (0, T)$ par

$$\begin{aligned} [[u]] &= 0, \quad [[w]] = \left[\left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right] = 0, \\ [[C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)] \nu]] &= 0, \\ [[D[\Delta w + (1 - \mu) B_1 w]]] &= 0, \\ \left[\left[D \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 w}{\partial s} \right] - \rho \frac{\partial w''}{\partial \nu} - C[\varepsilon(u) + f(\nabla w)] \nu \cdot \nabla w \right] \right] &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $[[\]]$ désigne le saut à travers Σ . On associe avec (4.1) et (4.2) les conditions initiales

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1 \text{ dans } \Omega^\delta. \quad (4.5)$$

On désigne par $\varepsilon(u) = 1/2 (\nabla u + \nabla^T u)$ le tenseur des déformations linéarisé et C une application linéaire de l'ensemble S des tenseurs symétriques d'ordre 4 dans lui même définie par :

$$C(\zeta) = D [\mu(\text{tr}\zeta)I_S + (1 - \mu)\zeta]$$

$\forall \zeta \in S$, I_S étant l'identité dans S . La fonction f est définie par

$$f(s) = (1/2)s \otimes s, \quad s \in \mathcal{R}^2$$

On note $D = \frac{E}{(1-\mu^2)}$ le module de rigidité de la plaque à la flexion ; E désigne le module de young, μ le coefficient de Poisson et ρ la densité de masse du matériau. On suppose que E , μ et ρ ne dépendent pas de δ et qu'ils valent respectivement

$$E = \begin{cases} E_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ E_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases} ; \quad \mu = \begin{cases} \mu_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \mu_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases} ; \quad \rho = \begin{cases} \rho_+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \rho_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \end{cases}$$

Par conséquent, D sera noté D_+ ou D_- selon que l'on se refere à Ω_+ ou Ω_-^δ . On note s l'abscisse curviligne et $\nu(s) = (\nu_1(s), \nu_2(s))$ la normale extérieure à Σ en s . Les opérateurs de traces B_1 et B_2 sont définis par :

$$\begin{aligned}
B_1 w &\equiv 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
B_2 w &\equiv (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu_1\nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).
\end{aligned}$$

4.3 Formulation variationnelle

Comme au chapitre précédent, on écrit notre problème sous forme variationnelle. Le problème considéré ici étant le même, si ce n'est que l'on a supprimé les conditions d'encastrement, la formulation faible s'écrit de la même manière. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
u &\in C\left(0, T; (H^1(\Omega^\delta))^2\right) \cap C^1\left(0, T; [L^2(\Omega)]^2\right), \\
w &\in C\left(0, T; H^2(\Omega^\delta)\right) \cap C^1\left(0, T; H^1(\Omega^\delta)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho [\langle u', \varphi \rangle_{\Omega^\delta}]' + \langle C[\epsilon(u) + f(\nabla w)], \epsilon(\varphi) \rangle_{\Omega^\delta} &= 0, \quad \forall \varphi \in (H^1(\Omega^\delta))^2 \\
\rho [\langle w', \psi \rangle_{\Omega^\delta} + \langle \nabla w', \nabla \psi \rangle_{\Omega^\delta}]' + a(w, \psi) + \langle C[\epsilon(u) + f(\nabla w)] \nabla w, \nabla \psi \rangle_{\Omega^\delta} &= 0, \quad \forall \psi \in H^2(\Omega^\delta)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

avec les conditions initiales (4.5) et où :

$$\begin{aligned}
a(w, \psi) &= D \int_{\Omega^\delta} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} d\Omega^\delta
\end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ désigne le produit scalaire dans $[L^2(D)]^k$, $k \in N$.

4.4 Changement d'échelle

La dérivation des conditions aux limites approchées repose d'abord sur un changement d'échelle à l'intérieur de la couche mince qui permet d'enlever la dépendance de la géométrie du problème vis à vis du petit paramètre δ . On introduit donc une paramétrisation en coordonnées locales et on dilate

Ω_-^δ d'un facteur $\frac{1}{\delta}$ dans la direction de la normale, dans le but de se ramener à un ouvert fixe.

Soit τ le vecteur unitaire tangent à Σ en s (s étant l'abscisse curviligne) de sorte que la base (τ, ν) soit directe. On désigne par $R(s)$ la courbure de Σ en s . On effectue le même changement d'échelle que celui du chapitre précédent, c'est à dire :

$$\begin{cases} \Omega_- \longrightarrow \Omega^\delta \\ (s, z) \longrightarrow X = s + \delta z \nu(s) \end{cases} \quad (4.7)$$

où $\Omega_- = \Sigma \times]0, 1[$. On identifie Σ avec $\Sigma \times \{0\}$ et on note $\Sigma_- = \Sigma \times \{1\}$ l'image de Σ_-^δ .

On désigne par $u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-$ et ψ_- les images associées, respectivement à u, w, φ et ψ par le changement d'échelle précédent. Plus précisément

$$u_-^\delta := \widehat{u|_{\Omega_-^\delta}}, \quad w_-^\delta := \widehat{w|_{\Omega_-^\delta}}, \quad \varphi_- := \widehat{\varphi}, \quad \psi_- := \widehat{\psi},$$

On considère les espaces fonctionnels

$$\begin{aligned} W^\delta(\Omega) &= \left\{ \begin{array}{l} (\psi_+, \psi_-) \in H^2(\Omega_+) \times H^2(\Omega_-); \psi_{+|\Sigma} = \psi_{-|\Sigma} \\ \frac{\partial \psi_+}{\partial z} | \Sigma = \delta^{-1} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} | \Sigma \end{array} \right\} \\ V^\delta(\Omega) &= \left\{ \begin{array}{l} (\psi_+, \psi_-) \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-); \psi_{-|\Sigma} = \psi_{+|\Sigma}, \\ \psi_{+|\Gamma_+} = 0; \psi_{-|\Gamma_-} = 0 \end{array} \right\} \\ U^\delta(\Omega) &= \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_+, \varphi_-) \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-); \varphi_{-T|\Sigma} = \varphi_{+T|\Sigma}, \\ \varphi_{-\nu|\Sigma} = \delta \varphi_{+\nu|\Sigma} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Soit $\psi \in W^\delta(\Omega)$, on définit

$$\begin{aligned} \gamma_T^\delta(\psi) &= (1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \left((1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - R(1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \gamma_S^\delta(\psi) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left((1 - R\delta z)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \\ \gamma_N^\delta(\psi) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

et afin d'écrire commodément le problème variationnel mis à l'échelle, on pose

$$\begin{aligned} N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \epsilon_T^\delta(u_-^\delta) + \frac{1}{2(1-R\delta z)^2} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s}\right)^2 \\ N_S^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= 2\epsilon_S^\delta(u_-^\delta) - (1-R\delta z)^{-1} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \\ N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \epsilon_N^\delta(u_-^\delta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial z}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_T^\delta(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= \epsilon_T^\delta(\varphi_-) + \frac{1}{(1-R\delta z)^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \\ N_S^\delta(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= 2\epsilon_S^\delta(\varphi_-) - (1-R\delta z)^{-1} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} + \frac{\partial \psi_-}{\partial s} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z}\right) \\ N_N^\delta(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= \epsilon_N^\delta(\varphi_-) + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} \end{aligned}$$

En notant par $u^\delta := (u_+^\delta, u_-^\delta)$ et $w^\delta := (w_+^\delta, w_-^\delta)$; où $u_+^\delta = u|_{\Omega_+}$; $w_+^\delta = w|_{\Omega_+}$, on déduit que (u^δ, w^δ) est solution du problème variationnel :

$$u^\delta \in C(0, T; U^\delta(\Omega)) \cap C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^2), \quad w^\delta \in C(0, T; W^\delta(\Omega)) \cap C^1(0, T; V^\delta(\Omega))$$

$$\begin{aligned} &\rho_+ \left[\langle (u_+^\delta)', \varphi_+ \rangle_{\Omega_+} \right]' + \delta \rho_- \left[\langle ((u_-^\delta)', \varphi_-) \rangle_{\Omega_-} \right]' + \rho_+ \left[\langle (w_+^\delta)', \psi_+ \rangle_{\Omega_+} \right]' + \delta \rho_- \left[\langle ((w_-^\delta)', \psi_-) \rangle_{\Omega_-} \right]' \\ &+ \rho_+ (b_+ ((w_+^\delta)', \psi_+))' + \delta \rho_- (b_-^\delta ((w_-^\delta)', \psi_-))' + a_+ (w_+^\delta, \psi_+) + a_-^\delta (w_-^\delta, \psi_-) \\ &+ N_+ (u_+^\delta, w_+^\delta, \varphi_+, \psi_+) + N_-^\delta (u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) = 0 \\ &\forall (\varphi, \psi) \in U^\delta(\Omega) \times W^\delta(\Omega) \end{aligned} \tag{4.8}$$

avec les conditions initiales

$$u^\delta(0) = u_0^\delta, (u^\delta)'(0) = u_1^\delta, w^\delta(0) = w_0^\delta, (w^\delta)'(0) = w_1^\delta \quad \text{dans } \Omega$$

et où

$$\langle ((u_-^\delta)', \varphi_-) \rangle_{\Omega_-} = \int_{\Omega_-} \left(u_{-\tau}^\delta \varphi_{-\tau} + \frac{1}{\delta^2} u_{-\nu}^\delta \varphi_{-\nu} \right) (1 - R\delta z) ds dz,$$

$$(w_-^\delta, \psi_-)_{\Omega_-} = \int_{\Omega_-} w_-^\delta \psi_- (1 - R\delta z) dsdz,$$

$$\begin{aligned} a_+(w_+^\delta, \psi_+) &= D_+ \int_{\Omega_+} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial x^2} + \mu_+ \frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial x^2} + 2(1 - \mu_+) \frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial y^2} + \mu_+ \frac{\partial^2 w_+^\delta}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial y^2} \right\} d\Omega_+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_-^\delta(w_-^\delta, \psi_-) &= \delta D_- \int_{\Omega_-} \left\{ \left(\gamma_T^\delta(w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} \gamma_N^\delta(w_-^\delta) \right) \gamma_T^\delta(\psi_-) + 2(1 - \mu_-) \frac{\gamma_S^\delta(w_-^\delta)}{\delta} \frac{\gamma_S^\delta(\psi_-)}{\delta} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\gamma_N^\delta(w_-^\delta)}{\delta^2} + \mu_- \gamma_T^\delta(w_-^\delta) \right) \frac{\gamma_N^\delta(\psi_-)}{\delta^2} \right\} (1 - R\delta z) dsdz, \end{aligned}$$

$$b_+(w_+^\delta, \psi_+) = \int_{\Omega_+} \nabla w_+^\delta \nabla \psi_+ d\Omega_+,$$

$$b_-^\delta(w_-^\delta, \psi_-) = \int_0^1 \int_{\Sigma} \left\{ (1 - R\delta z)^{-2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial z} \right\} (1 - R\delta z) dsdz,$$

$$N_+(u_+^\delta, w_+^\delta, \varphi_+, \psi_+) = \langle C[\epsilon(u_+^\delta) + f(\nabla w_+^\delta)], \epsilon(\varphi_+) \rangle_{\Omega_+} + \langle C[\epsilon(u_+^\delta) + f(\nabla w_+^\delta)] \nabla w_+^\delta, \nabla \psi_+ \rangle_{\Omega_+},$$

$$\begin{aligned} N_-^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) &= \\ &= \frac{\delta E_-}{1 - \mu_-^2} \int_{\Omega_-} \left\{ \left[N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \frac{\mu_-}{\delta^2} N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) \right] N_T^\delta(\varphi_-, \psi_-, w_-^\delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \mu_-)}{2\delta^2} N_S^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) N_S^\delta(\varphi_-, \psi_-, w_-^\delta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{1}{\delta^2} (N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) + \mu_- N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta)) N_N^\delta(\varphi_-, \psi_-, w_-^\delta) \right] \right\} (1 - R\delta z) dsdz. \end{aligned}$$

4.5 Développement asymptotique et conditions aux limites approchées

On utilise la technique des développements asymptotiques multi-échelle pour identifier des conditions aux limites approchées sur Σ qui rendent compte de l'effet de la couche mince. L'idée consiste à approcher la solution par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation sur Σ fournissant les conditions aux limites approchées recherchées.

Contrairement au chapitre 2 où l'on a effectué un développement asymptotique à partir des équations et des conditions aux limites du problème, nous allons ici exposer une méthode qui consiste à faire un développement asymptotique à partir de la formulation variationnelle. Ces deux méthodes sont bien entendu équivalentes. Seulement, la dernière en question est bien plus rapide quoique elle est moins explicite. Nous avons choisi de l'utiliser ici vu la complexité du problème de von Karman.

Pour mettre en oeuvre notre processus asymptotique, on développe d'abord les formes a_-^δ , b_-^δ et N_-^δ en puissance positive de δ . Les opérateurs γ_T^δ , γ_S^δ et γ_N^δ se développent de la façon suivante :

$$\gamma_T^\delta(\psi) = \frac{1}{\delta}\gamma_T^{-1}(\psi) + \gamma_T^0(\psi) + \delta\gamma_T^1(\psi) + \delta^2\gamma_T^2(\psi) + \delta^3\gamma_T^3 + \dots$$

$$\gamma_S^\delta(\psi) = \gamma_S^0(\psi) + \delta\gamma_S^1(\psi) + \delta^2\gamma_S^2(\psi) + \dots$$

$$\gamma_N^\delta(\psi) = \gamma_N^0(\psi)$$

avec :

$$\gamma_T^{-1}(\psi) = -R(s)\frac{\partial\psi}{\partial z} ; \gamma_T^0(\psi) = \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} - zR^2(s)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\gamma_T^1(\psi) = z\frac{\partial}{\partial s}\left(R(s)\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) + zR(s)\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} - z^2R^3(s)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\gamma_T^2(\psi) = \frac{\partial}{\partial s}\left(z^2R^2(s)\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) + z^2R(s)\frac{\partial}{\partial s}\left(R(s)\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) + z^2R^4(s)\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} - z^3R^4(s)\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\gamma_S^0(\psi) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial s} ; \gamma_S^1(\psi) = -R(s) \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ; \gamma_S^2(\psi) = -R^2(s) \frac{\partial}{\partial z} \left(z^2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)$$

si bien que la forme bilinéaire a_-^δ s'écrit :

$$a_-^\delta(w_-, \psi_-) = D_- \int_{\Omega_-} \delta^{-3} A^{-3}(w_-, \psi_-) + \delta^{-2} A^{-2}(w_-, \psi_-) + \delta^{-1} A^{-1}(w_-, \psi_-) \\ + A^0(w_-, \psi_-) + \delta A^1(w_-, \psi_-) ds dz$$

où :

$$A^{-3}(w_-, \psi_-) = \gamma_N^0(w_-) \gamma_N^0(\psi_-),$$

$$A_-^{-2}(w_-, \psi_-) = \mu_- (\gamma_N^0(w_-) \gamma_T^{-1}(\psi_-) + \gamma_T^{-1}(w_-) \gamma_N^0(\psi_-)) - z R(s) \gamma_N^0(w_-) \gamma_N^0(\psi_-),$$

$$A_-^{-1}(w_-, \psi_-) = \gamma_T^{-1}(w_-) \gamma_T^{-1}(\psi_-) + \mu_- (\gamma_N^0(w_-) \gamma_T^0(\psi_-) + \gamma_T^0(w_-) \gamma_N^0(\psi_-)) \\ + 2(1 - \mu_-) \gamma_S^0(w_-) \gamma_S^0(\psi_-) - z R(s) \mu_- (\gamma_N^0(w_-) \gamma_T^{-1}(\psi_-) + \gamma_T^{-1}(w_-) \gamma_N^0(\psi_-)),$$

$$A_-^0(w_-, \psi_-) = \gamma_T^{-1}(w_-) \gamma_T^0(\psi_-) + \gamma_T^0(w_-) \gamma_T^{-1}(\psi_-) + \mu_- (\gamma_N^0(w_-) \gamma_T^1(\psi_-) + \\ \gamma_T^1(w_-) \gamma_N^0(\psi_-)) + 2(1 - \mu_-) (\gamma_S^0(w_-) \gamma_S^1(\psi_-) + \gamma_S^1(w_-) \gamma_S^0(\psi_-)) - z R(s) (\gamma_T^{-1}(w_-) \gamma_T^{-1}(\psi_-) \\ + \mu_- (\gamma_N^0(w_-) \gamma_T^0(\psi_-) + \gamma_T^0(w_-) \gamma_N^0(\psi_-)) + 2(1 - \mu_-) \gamma_S^0(w_-) \gamma_S^0(\psi_-),$$

$$A_-^1(w_-, \psi_-) = \gamma_T^{-1}(w_-) \gamma_T^1(\psi_-) + \gamma_T^1(w_-) \gamma_T^{-1}(\psi_-) + \mu_- (\gamma_N^0(w_-) \gamma_T^2(\psi_-) + \gamma_T^2(w_-) \gamma_N^0(\psi_-)) + 2(1 - \mu_-) \gamma_S^1(w_-) \gamma_S^1(\psi_-) - z R(s) (\gamma_T^{-1}(w_-) \gamma_T^0(\psi_-) + \\ \gamma_T^0(w_-) \gamma_T^{-1}(\psi_-) + \mu_- (\gamma_N^0(w_-) \gamma_T^1(\psi_-) + \gamma_T^1(w_-) \gamma_N^0(\psi_-)) + 2(1 - \mu_-) \\ (\gamma_S^0(w_-) \gamma_S^1(\psi_-) + \gamma_S^1(w_-) \gamma_S^0(\psi_-))).$$

Par ailleurs, la forme bilinéaire b_-^δ admet le développement suivant en puissances de δ :

$$b_-^\delta(w_-, \psi_-) = D_- \int_{\Omega_-} \delta^{-2} \mathcal{B}^{-2}(w_-, \psi_-) + \delta^{-1} \mathcal{B}^{-1}(w_-, \psi_-) \\ + \mathcal{B}^0(w_-, \psi_-) + \delta \mathcal{B}^1(w_-, \psi_-) + \dots ds dz$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{-2}(w_-, \psi_-) &= \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial z}, \\
\mathcal{B}^{-1}(w_-, \psi_-) &= -R(s)z \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_-}{\partial z}, \\
\mathcal{B}^0(w_-, \psi_-) &= \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s}, \\
\mathcal{B}^1(w_-, \psi_-) &= R(s)z \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-}{\partial s}.
\end{aligned}$$

On va maintenant écrire le développement de N_-^δ . Les composantes du tenseur des déformations mis à l'échelle s'écrivent

$$\begin{aligned}
\epsilon_T^\delta(\varphi) &= \frac{1}{\delta} \epsilon_T^{-1}(\varphi) + \epsilon_T^0(\varphi) + \delta \epsilon_T^1(\varphi) + \delta^2 \epsilon_T^2(\varphi) + \dots \\
\epsilon_S^\delta(\varphi) &= \mathbf{e}_S^0(\varphi) + \delta \epsilon_S^1(\varphi) + \delta^2 \epsilon_S^2(\varphi) + \dots \\
\epsilon_N^\delta(\varphi) &= \epsilon_N^0(\varphi)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\epsilon_T^{-1}(\varphi) &= -\varphi_{-\nu} R(s); \quad \mathbf{e}_T^0(\varphi) = \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial s} - z R^2(s) \varphi_{-\nu}; \\
\epsilon_T^1(\varphi) &= \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial s} \frac{z}{R(s)} - z^2 R^3(s) \varphi_{-\nu}; \\
\epsilon_T^2(\varphi) &= z^2 R^2(s) \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial s} - R^4 z^3 \varphi_{-\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_S^0(\varphi) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi_{-\nu}}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_{-\tau}}{\partial z} \right]; \\
\epsilon_S^1(\varphi) &= \frac{1}{2} \left[R(s) \varphi_{-\tau} + R(s) z \frac{\partial \varphi_{-\nu}}{\partial s} \right] \\
\epsilon_S^2(\varphi) &= \frac{1}{2} \left[R^2 z \varphi_{-\tau} + R^2 z^2 \frac{\partial \varphi_{-\nu}}{\partial s} \right]
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire le développement en puissance de δ des termes constituant la forme $N_-^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-)$:

$$\begin{aligned} N_T^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \delta^{-1} N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta) + N_T^0(u_-^\delta, w_-^\delta) + \delta N_T^1(u_-^\delta, w_-^\delta) + \delta^2 N_T^2(u_-^\delta, w_-^\delta) + \dots \\ N_S^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= N_S^0(u_-^\delta, w_-^\delta) + \delta N_S^1(u_-^\delta, w_-^\delta) + \delta^2 N_S^2(u_-^\delta, w_-^\delta) + \dots \\ N_N^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta) &= N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_T^\delta(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= \delta^{-1} N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \delta N_T^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \delta^2 N_T^2(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \dots \\ N_S^\delta(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= N_S^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \delta N_S^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \delta^2 N_S^2(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \dots \\ N_N^\delta(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^{-1}(u_-^\delta), \\ N_T^0(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^0(u_-^\delta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \right)^2, \\ N_T^1(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^1(u_-^\delta) + z R(s) \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \right)^2 \\ N_T^2(u_-^\delta, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^2(u_-^\delta) + \frac{3}{2} z^2 R^2(s) \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^{-1}(\varphi), \\ N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^0(\varphi) + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-^\delta}{\partial s}, \\ N_T^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^1(\varphi) + 2z R(s) \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-^\delta}{\partial s}, \\ N_T^2(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= \varepsilon_T^2(\varphi) + 3z^2 R^2(s) \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi_-^\delta}{\partial s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_S^0(u_-^\delta, w_-^\delta) &= 2\varepsilon_S^0(u_-^\delta) - \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z}, \\ N_S^1(u_-^\delta, w_-^\delta) &= 2\varepsilon_S^1(u_-^\delta) - z R(s) \frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z}, \\ N_S^2(u_-^\delta, w_-^\delta) &= 2\varepsilon_S^2(u_-^\delta) - z^2 R^2(s) \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_S^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= 2\epsilon_S^0(\varphi) - \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right), \\
N_S^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= 2\epsilon_S^1(\varphi) - zR(s) \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right), \\
N_S^2(\varphi, \psi, w_-^\delta) &= 2\epsilon_S^2(\varphi) - z^2 R^2(s) \left(\frac{\partial w_-^\delta}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial w_-^\delta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right),
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
N_-^\delta(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) &= D_- \int_{\Omega_-} \delta^{-3} \mathcal{N}^{-3}(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) + \delta^{-2} \mathcal{N}^{-2}(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) + \\
&\quad \delta \mathcal{N}^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) + \mathcal{N}^0(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) + \delta^2 \mathcal{N}^1(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-)
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{N}^{-3}(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) = N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^{-2}(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) &= \mu_- N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \\
\mu_- N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta) N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) &- zR(s) N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) &= N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \\
\mu_- (N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) &+ N_T^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) + \\
\frac{1-\mu_-}{2} N_S^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_S^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) &- \\
zR(s) \mu_- (N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) &+ N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta) N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^0(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) &= N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_T^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) \\
&+ \mu_- (N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_T^1(u_-^\delta, w_-^\delta) N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) \\
&\frac{1-\mu_-}{2} (N_S^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_S^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_S^1(u_-^\delta, w_-^\delta) N_S^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) \\
&- zR(s) (N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \mu_- (N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \\
&N_T^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) + \frac{1-\mu_-}{2} N_S^0(u_-^\delta, w_-^\delta) N_S^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_-^1(u_-^\delta, w_-^\delta, \varphi_-, \psi_-) &= N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \\
&N_T^0(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_T^1(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \\
\mu_- (N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^2(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_N^2(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) &+ \\
\frac{1-\mu_-}{2} (N_S^1(u_-^\delta, w_-^\delta)N_S^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_S^0(u_-^\delta, w_-^\delta)N_S^2(\varphi, \psi, w_-^\delta) + \\
&N_S^2(u_-^\delta, w_-^\delta)N_S^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) \\
-zR(s) (N_T^{-1}(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^0(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_T^0(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^{-1}(\varphi, \psi, w_-^\delta) \\
&+\mu_- (N_N^0(u_-^\delta, w_-^\delta)N_T^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_T^1(u_-^\delta, w_-^\delta)N_N^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) \\
\frac{1-\mu_-}{2} (N_S^0(u_-^\delta, w_-^\delta)N_S^1(\varphi, \psi, w_-^\delta) + N_S^1(u_-^\delta, w_-^\delta)N_S^0(\varphi, \psi, w_-^\delta)) &).
\end{aligned}$$

4.5.1 Une hiérarchie d'équations

On suppose que la solution (u, w) et les fonctions test (φ, ψ) admettent des développements asymptotiques formels en puissance positive de δ , de la forme

$$\begin{aligned}
w^\delta &= w^0 + \delta w^1 + \delta^2 w^2 + \dots \\
u^\delta &= u^0 + \delta u^1 + \delta^2 u^2 + \dots \\
\varphi^\delta &= \varphi^0 + \delta \varphi^1 + \delta^2 \varphi^2 + \dots \\
\psi^\delta &= \psi^0 + \delta \psi^1 + \delta^2 \psi^2 + \dots
\end{aligned}$$

On conviendra d'indicer par + ou - les différents termes de ces développements ou des données initiales suivant que l'on considère leur restriction à Ω_+ ou Ω_- . Pour simplifier, on suppose que $\varphi_-^k = \psi_-^k = 0, \forall k \geq 2$ et que $\varphi_+^k = \psi_+^k = 0, \forall k \geq 1$. On suppose aussi qu'il existe des fonctions $w_+^*, w_+^{**}, w_+^{***}, u_+^*, u_+^{**}$ et u_+^{***} indépendantes de δ et vérifiant

$$w_+^* \in H^2(\Omega_+), w_+^* |_{\Sigma} \in H^2(\Sigma), w_+^{**} \in H^1(\Omega_+), w_+^{**} |_{\Sigma} \in H^1(\Sigma), w_+^{***} \in L^2(\Sigma),$$

$$u_+^* \in [H^1(\Omega_+)]^2, (u_+^*) |_{\Sigma} \in H^1(\Sigma), u_+^{**} \in [L^2(\Omega_+)]^2, u_+^{***} \in [L^2(\Sigma)]^2$$

et telles que :

$$\begin{aligned}
w_{0+}^\delta &= w_+^*, \int_0^1 w_{0-}^\delta dz = w_+^* |_\Sigma, \\
w_{1+}^\delta &= w_+^{**}, \int_0^1 w_{1-}^\delta dz = w_+^{**} |_\Sigma, \int_0^1 \frac{\partial w_{1-}^\delta}{\partial z} dz = \delta w_+^{***}, \\
u_{0+}^\delta &= u_+^*, \int_0^1 (u_{0\tau}^\delta)_- dz = (u_\tau^*)_+ |_\Sigma, \int_0^1 (u_{0\nu}^\delta)_- dz = 0, \\
u_{1+}^\delta &= u_+^{**}, \left(\int_0^1 (u_{1\tau}^\delta)_- dz, \int_0^1 \frac{1}{\delta} (u_{1\nu}^\delta)_- dz \right) = u_+^{***}.
\end{aligned}$$

En injectant toutes ces expressions dans le problème variationnel mis à l'échelle et en identifiant formellement les mêmes puissances en δ , on aboutit à une hiérarchie d'équations qui permet de déterminer de façon itérative les termes du développement asymptotique. Afin d'écrire ces équations, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_N^k(u, w) &= \varepsilon_N^0(u^k) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^k \frac{\partial w^l}{\partial z} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial z} \\
\bar{N}_N^k(\varphi, w, \psi) &= \varepsilon_N^0(\varphi^k) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^k \left(\frac{\partial w^l}{\partial z} \frac{\partial \psi^{k-l}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^l}{\partial z} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial z} \right) \\
\tilde{N}_T^k(u, w) &= \sum_{l=-1}^k \varepsilon_T^0(u^{k-l}) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^k \sum_{l=n}^k \frac{(n+1)!}{n} (Rz)^n \frac{\partial w^{l-n}}{\partial s} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial s} \\
\bar{N}_T^k(\varphi, w, \psi) &= \sum_{l=-1}^k \varepsilon_T^0(\varphi^{k-l}) + \sum_{n=0}^k \sum_{l=n}^k \frac{(n+1)!}{n} (Rz)^n \left(\frac{\partial w^{l-n}}{\partial s} \frac{\partial \psi^{k-l}}{\partial s} + \frac{\partial \psi^{l-n}}{\partial s} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial s} \right) \\
\tilde{N}_S^k(u, w) &= 2 \sum_{l=0}^k \varepsilon_S^0(u^{k-l}) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^k \sum_{l=n}^k (Rz)^n \left(\frac{\partial w^{l-n}}{\partial s} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial z} + \frac{\partial w^{l-n}}{\partial z} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial s} \right) \\
\bar{N}_S^k(\varphi, w, \psi) &= 2 \sum_{l=0}^k \varepsilon_S^0(\varphi^{k-l}) + \sum_{n=0}^k \sum_{l=n}^k \frac{(n+1)!}{n} (Rz)^n \times \\
&\quad \left(\frac{\partial w^{l-n}}{\partial s} \frac{\partial \psi^{k-l}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{l-n}}{\partial z} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial s} + \frac{\partial w^{l-n}}{\partial z} \frac{\partial \psi^{k-l}}{\partial s} + \frac{\partial \psi^{l-n}}{\partial s} \frac{\partial w^{k-l}}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

La hiérarchie d'équations obtenue est alors la suivante :

$$\int_{\Omega_-} \left\{ A^{-3}(w_-^0, \psi_-^0) + \tilde{N}_N^0(u, w) \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) \right\} ds dz = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_-} \left\{ A^{-3}(w_-^0, \psi_-^1) + A^{-3}(w_-^1, \psi_-^0) + A^{-2}(w_-^0, \psi_-^0) + \right. \\
&\tilde{N}_N^0(u, w) \left[\bar{N}_N^1(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^{-1}(\varphi, w, \psi) \right] + \left[\tilde{N}_N^1(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^{-1}(u, w) \right] \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) \\
&\quad \left. - z R \tilde{N}_N^0(u, w) \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) \right\} ds dz = 0, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_-} \{A^{-3}(w_-^1, \psi_-^1) + A^{-3}(w_-^2, \psi_-^0) + A^{-2}(w_-^0, \psi_-^1) + A^{-2}(w_-^1, \psi_-^0) + A^{-1}(w_-^0, \psi_-^0) \\
& (u_{-\nu}^0)' \varphi_{-\nu}^0 + \rho_- (\mathcal{B}^{-2}(w_-^0, \psi_-^0))' + [\tilde{N}_N^2(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^0(u, w)] \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) + \\
& \quad \left[\mu_- \tilde{N}_N^1(u, w) + \tilde{N}_T^{-1}(u, w) \right] \bar{N}_T^{-1}(\varphi, w, \psi) + \\
& \left[\tilde{N}_N^1(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^{-1}(u, w) \right] \bar{N}_N^1(\varphi, w, \psi) + \tilde{N}_N^0(u, w) [\bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi)] \\
& \frac{1-\mu_-}{2} \tilde{N}_S^0(u, w) \bar{N}_S^0(\varphi, w, \psi) - zR \left(\tilde{N}_N^0(u, w) [\bar{N}_N^1(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^{-1}(\varphi, w, \psi)] + \right. \\
& \quad \left. \left[\tilde{N}_N^1(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^{-1}(u, w) \right] \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) \right\} dsdz = 0, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_+ \left[((u_+^0)', \varphi_+)_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[((w_+^0)', \psi_+)_{\Omega_+} \right]' + a_+(w_+, \psi_+) + N_+(u_+, w_+, \varphi_+, \psi_+) \\
& + \rho_+ (b_+(w_+, \psi_+))' + \int_{\Omega_-} \{A^{-3}(w_-^2, \psi_-^1) + A^{-3}(w_-^3, \psi_-^0) + A^{-2}(w_-^0, \psi_-^1) + \\
& \quad A^{-2}(w_-^2, \psi_-^0) + A^{-1}(w_-^0, \psi_-^1) + A^{-1}(w_-^1, \psi_-^0) + A^0(w_-^0, \psi_-^0) \\
& (u_{-\nu}^0)' \varphi_{-\nu}^1 + (u_{-\nu}^1)' \varphi_{-\nu}^0 + \rho_- (\mathcal{B}^{-2}(w_-^0, \psi_-^1) + \mathcal{B}^{-2}(w_-^1, \psi_-^0) + \mathcal{B}^{-1}(w_-^0, \psi_-^0))' + \\
& \quad \left[\tilde{N}_N^3(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^1(u, w) \right] \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) + \\
& \left[\tilde{N}_N^2(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^0(u, w) \right] \bar{N}_N^1(\varphi, w, \psi) + \left[\mu_- \tilde{N}_N^2(u, w) + \tilde{N}_T^0(u, w) \right] \bar{N}_T^{-1}(\varphi, w, \psi) + \\
& \tilde{N}_N^1(u, w) [\bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi)] + \tilde{N}_N^0(u, w) [\bar{N}_N^3(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^1(\varphi, w, \psi)] \\
& \quad + \tilde{N}_T^{-1}(u, w) [\bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi)] \\
& \quad + \frac{1-\mu_-}{2} \left(\tilde{N}_S^0(u, w) \bar{N}_S^1(\varphi, w, \psi) + \tilde{N}_S^1(u, w) \bar{N}_S^0(\varphi, w, \psi) \right) \\
& - zR \left(\left[\tilde{N}_N^2(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^0(u, w) \right] \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) + \left[\mu_- \tilde{N}_N^1(u, w) + \tilde{N}_T^{-1}(u, w) \right] \bar{N}_T^{-1}(\varphi, w, \psi) + \right. \\
& \left[\tilde{N}_N^1(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^{-1}(u, w) \right] \bar{N}_N^1(\varphi, w, \psi) + \tilde{N}_N^0(u, w) [\bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi)] + \\
& \quad \left. \frac{1-\mu_-}{2} \tilde{N}_S^0(u, w) \bar{N}_S^0(\varphi, w, \psi) \right\} dsdz = 0, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_+ \left[((u_+^1)', \varphi_+)_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[((w_+^1)', \psi_+)_{\Omega_+} \right]' + a_+(w_+^1, \psi_+) + N_+^1(u_+^0, u_+^1, w_+^0, w_+^1, \varphi_+, \psi_+) \\
& + \rho_+ (b_+(w_+^1, \psi_+))' + \int_{\Omega_-} \{ A^{-3}(w_-^3, \psi_-^1) + A^{-3}(w_-^4, \psi_-^0) + A^{-2}(w_-^2, \psi_-^1) + \\
& A^{-2}(w_-^3, \psi_-^0) + A^{-1}(w_-^2, \psi_-^0) + A^{-1}(w_-^1, \psi_-^1) + A^0(w_-^1, \psi_-^0) + A^1(w_-^0, \psi_-^0) + \\
& \int_{\Omega_-} \{ (u_{-\tau}^0)' \varphi_{-\tau}^0 + (u_{-\nu}^0)' \varphi_{-\nu}^2 + (u_{-\nu}^2)' \varphi_{-\nu}^0 + (u_{-\nu}^1)' \varphi_{-\nu}^1 + (w_-^0)' \psi_-^0 \\
& \rho_- (\mathcal{B}^{-2}(w_-^1, \psi_-^1) + \mathcal{B}^{-2}(w_-^2, \psi_-^0) + \mathcal{B}^{-2}(w_-^0, \psi_-^2) + \mathcal{B}^{-1}(w_-^0, \psi_-^1))' + \\
& \rho_- (\mathcal{B}^{-1}(w_-^1, \psi_-^0) + \mathcal{B}^0(w_-^0, \psi_-^0))' + \left[\tilde{N}_N^4(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^2(u, w) \right] \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) + \\
& \left[\tilde{N}_N^3(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^1(u, w) \right] \bar{N}_N^1(\varphi, w, \psi) + \left[\mu_- \tilde{N}_N^3(u, w) + \tilde{N}_T^1(u, w) \right] \bar{N}_T^{-1}(\varphi, w, \psi) \\
& + \tilde{N}_N^2(u, w) \left[\bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi) \right] + \tilde{N}_N^1(u, w) \left[\bar{N}_N^3(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^1(\varphi, w, \psi) \right] + \\
& + \tilde{N}_T^0(u, w) \left[\bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi) \right] + \frac{1 - \mu_-}{2} \left(\tilde{N}_S^0(u, w) \bar{N}_S^2(\varphi, w, \psi) + \right. \\
& \left. \tilde{N}_S^2(u, w) \bar{N}_S^0(\varphi, w, \psi) + \tilde{N}_S^1(u, w) \bar{N}_S^1(\varphi, w, \psi) \right) - zR \left(\left[\tilde{N}_N^3(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^1(u, w) \right] \bar{N}_N^0(\varphi, w, \psi) \right. \\
& + \left[\tilde{N}_N^2(u, w) + \mu_- \tilde{N}_T^0(u, w) \right] \bar{N}_N^1(\varphi, w, \psi) + \left[\mu_- \tilde{N}_N^2(u, w) + \tilde{N}_T^0(u, w) \right] \bar{N}_T^{-1}(\varphi, w, \psi) + \\
& \left. \tilde{N}_N^1(u, w) \left[\bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi) \right] + \tilde{N}_N^0(u, w) \left[\bar{N}_N^3(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_T^1(\varphi, w, \psi) \right] \right. \\
& \left. + \tilde{N}_T^{-1}(u, w) \left[\bar{N}_T^0(\varphi, w, \psi) + \mu_- \bar{N}_N^2(\varphi, w, \psi) \right] \right) \\
& + \frac{1 - \mu_-}{2} \left(\tilde{N}_S^0(u, w) \bar{N}_S^1(\varphi, w, \psi) + \tilde{N}_S^1(u, w) \bar{N}_S^0(\varphi, w, \psi) \right) dsdz = 0, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

où la forme $N_+^1(u_+^0, u_+^1, w_+^0, w_+^1, \varphi_+, \psi_+)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
N_+^1(u_+^0, u_+^1, w_+^0, w_+^1, \varphi_+, \psi_+) &= \left\langle C[\varepsilon(u_+^1) + \frac{1}{2}(\nabla w_+^0 \otimes \nabla w_+^1 + \nabla w_+^1 \otimes \nabla w_+^0)], \varepsilon(\varphi_+) \right\rangle_{\Omega_+} \\
&+ \left\langle C[\varepsilon(u_+^1) + \frac{1}{2}(\nabla w_+^0 \otimes \nabla w_+^1 + \nabla w_+^1 \otimes \nabla w_+^0)] \nabla w_+^0, \nabla \psi_+ \right\rangle_{\Omega_+} + \\
&\left\langle C[\varepsilon(u_+^0) + \frac{1}{2}(\nabla w_+^0 \otimes \nabla w_+^0)] \nabla w_+^1, \nabla \psi_+ \right\rangle_{\Omega_+}
\end{aligned}$$

Dans la suite, on désignera par $u_+^{\delta, j}$ (resp. $w_+^{\delta, j}$) le développement asymptotique tronqué à l'ordre j de celui de u_+^δ (resp. w_+^δ).

4.5.2 Détermination de w_-^0 et u_-^0 , conditions approchées d'ordre 0

Nous allons maintenant calculer les premiers termes des développements asymptotiques. Pour ce faire, on étudie les équations (4.9)-(4.12) et on tire profit des conditions de transmission.

La première équation (4.9) permet d'exprimer w_-^0 en fonction de la trace de w_+^0 sur Σ et de déterminer la composante normale de u_-^0 . En effet, en choisissant $\psi_-^0 = w_-^0$ et $\varphi_-^0 = u_-^0$, on obtient :

$$\frac{\partial u_-^0}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_-^0}{\partial z} \right)^2 = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 w_-^0}{\partial z^2} = 0 \quad (4.15)$$

or, les conditions de transmission sur Σ impliquent :

$$\frac{\partial w_-^0}{\partial z} \Big|_{\Sigma} = 0$$

et comme $\frac{\partial w_-^0}{\partial z}(s, z, t) = \frac{\partial w_-^0}{\partial z}(s, 0, t) + \int_0^z \frac{\partial^2 w_-^0}{\partial z^2}(s, \zeta, t) d\zeta$, alors (4.15) donne

$$\frac{\partial w_-^0}{\partial z} = 0. \quad (4.16)$$

Par conséquent, w_-^0 n'est autre que la trace de w_+^0 sur Σ :

$$w_-^0(s, z, t) = w_+^0(s, 0, t) \quad \forall s \in \Sigma \quad \forall z \in]0, 1[, \forall t \in]0, T[. \quad (4.17)$$

D'autre part, compte tenu de (4.16), (4.14) devient :

$$\frac{\partial u_{-\nu}^0}{\partial z} = 0$$

en utilisant encore les conditions de transmission, on obtient :

$$u_{-\nu}^0 = 0.$$

La deuxième équation (4.10) permet quand à elle, d'exprimer w_-^0 en fonction de w_+^0 et w_+^1 et la composante normale de u_-^1 en fonction de celle de u_+^0 . Compte tenu des résultats précédents, celle -ci devient :

$$D_- \int_{\Omega_-} A_-^{-3}(w_-^1, \psi_-^0) + A_-^{-2}(w_-^0, \psi_-^0) + \varepsilon_N^0(u_-^1) \varepsilon_N^0(\varphi_-^0) ds dz = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 w_-^1}{\partial z^2} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial u_{-\nu}^1}{\partial z} = 0. \quad (4.19)$$

Grâce aux conditions de transmission, on a :

$$\frac{\partial w_-^1}{\partial z} = \frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma}$$

on obtient alors

$$w_-^1(s, z) = \frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} z + w_+^1 \Big|_{\Sigma}.$$

D'autre part, l'équation (4.19) donne :

$$u_{-\nu}^1(s, z, t) = u_{-\nu}^1(s, 0, t) = u_{+\nu}^0(s, t) \quad \forall s \in \Sigma \quad \forall z \in]0, 1[, \forall t \in]0, T[.$$

Considérons maintenant la troisième équation (4.11). Elle permet d'exprimer la composante tangentielle de u_-^0 en fonction de de la trace de la

composante tangentielle de u_+^0 sur Σ . Elle implique :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_-} (u_{-\nu}^0)' \varphi_{-\nu}^0 ds dz \right)' + \rho_- \left(\int_{\Omega_-} \left(\frac{\partial w_-^0}{\partial z} \right)' \frac{\partial \psi_-^0}{\partial z} ds dz \right)' + \\ & \int_{\Omega_-} \left\{ \frac{\partial^2 w_-^2}{\partial z^2} + \mu_- \left(\frac{\partial^2 w_+^0}{\partial s^2} - R(s) \frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \right) \frac{\partial^2 \psi_-^0}{\partial z^2} + \right. \\ & \left. \left[\frac{\partial u_{-\nu}^2}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \right)^2 + \mu_- \left(-R(s) u_{+\nu}^0 + \frac{\partial u_{-\tau}^0}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_+^0}{\partial s} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial \varphi_{-\nu}^0}{\partial z} + \right. \\ & \left. (1 - \mu_-) \frac{\partial u_{-\tau}^0}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi_{-\nu}^0}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_{-\tau}^0}{\partial z} - \frac{\partial w_+^0(s)}{\partial s} \frac{\partial \psi_-^0(s)}{\partial z} \right] \right\} ds dz = 0 \quad (4.20) \end{aligned}$$

en choisissant : $\psi_- = 0$, $\varphi_{-\nu}^0 = 0$ et $\varphi_{-\tau}^0 = u_{-\tau}^0$, l'équation (4.20) devient :

$$\int_{\Omega_-} \left(\frac{\partial u_{-\tau}^0}{\partial z} \right)^2 ds dz = 0 \quad (4.21)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial u_{-\tau}^0}{\partial z} = 0 \quad (4.22)$$

d'où l'on tire grâce aux conditions de transmission :

$$u_{-\tau}^0 = u_{+\tau}^0 |_{\Sigma}.$$

Prenons maintenant $\varphi_-^0 = 0$ dans l'équation (4.20). On obtient :

$$\int_{\Omega_-} \left[\frac{\partial^2 w_-^2}{\partial z^2} + \mu_- \left(\frac{\partial^2 w_+^0}{\partial s^2} - R(s) \frac{\partial w_+^0}{\partial \nu}(s) \right) \right] \frac{\partial^2 \psi_-^0}{\partial z^2} ds dz = 0$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 w_-^2}{\partial z^2} = -\mu_- \left(\frac{\partial^2 w_+^0}{\partial s^2} - R(s) \frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \right)$$

et on déduit aussi que :

$$\frac{\partial u_{-\nu}^2}{\partial z} = - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \right)^2 + \mu_- \left(-R(s) u_{+\nu}^0(s) + \frac{\partial u_{+\tau}^0}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_+^0}{\partial s} \right)^2 \right) \right]$$

On va maintenant étudier l'équation (4.12). Celle -ci, combinée avec les résultats obtenus précédemment, va permettre d'écrire le problème variationnel résolu par (u_+^0, w_+^0) .

Soit ψ_+ une fonction de $H^2(\Omega_+)$ et $\varphi_+ \in (H^1(\Omega_+))^2$. On suppose que ψ_+ et φ_+ sont régulières sur Σ .

On choisit les fonctions test $\psi_-^0, \psi_-^1, \varphi_-^0$ et φ_-^1 de la façon suivante : $\psi_-^0(s, z) = \psi_+(s)$, $\psi_-^1(s, z) = z \frac{\partial \psi_+}{\partial \nu}(s)$, $\varphi_{-\tau}^0(s, z) = \varphi_{+\tau}(s)$, $\varphi_{-\nu}^0(s, z) = 0$, $\varphi_{-\tau}^1(s, z) = 0$ et $\varphi_{-\nu}^1(s, z) = \varphi_{+\nu}^0(s)$. L'équation (4.12) devient alors :

$$\begin{aligned} & \rho_+ \left[\left((u_+^0)' , \varphi_+ \right)_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[\left((w_+^0)' , \psi_+ \right)_{\Omega_+} \right]' + a_+(w_+^0, \psi_+) \\ & + \rho_+ \left(b_+ \left((w_+^0)' , \psi_+ \right) \right)' + N_+(u_+^0, w_+^0, \varphi_+, \psi_+) = 0. \end{aligned}$$

Ceci permet d'énoncer le résultat suivant (noter que $u_+^{\delta, 0} = u_+^0$ et $w_+^{\delta, 0} = w_+^0$) :

proposition 4.1 *Le terme $(u_+^{\delta, 0}, w_+^{\delta, 0})$ résout le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} w_+^{\delta, 0} \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega_+)), \quad (w_+^{\delta, 0})' \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_+)) \\ u_+^{\delta, 0} \in L^\infty(0, T; [H^1(\Omega_+)]^2), \quad (u_+^{\delta, 0})' \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega_+)]^2) \\ \rho_+ \left[\left\langle (u_+^{\delta, 0})', \varphi \right\rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[\left\langle (w_+^{\delta, 0})', \psi \right\rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[b_+ \left((w_+^{\delta, 0})', \psi \right) \right]' + a_+(w_+^{\delta, 0}, \psi) \\ \quad + N_+(u_+^{\delta, 0}, w_+^{\delta, 0}, \varphi, \psi) = 0 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$\forall (\varphi, \psi) \in [H^1(\Omega_+)]^2 \times H^2(\Omega_+)$, avec les conditions initiales :

$$u_+^{\delta, 0}(0) = u_+^*, \quad (u_+^{\delta, 0})'(0) = u_+^{**}, \quad w_+^{\delta, 0}(0) = w_+^*, \quad (w_+^{\delta, 0})'(0) = w_+^{**} \text{ dans } \Omega_+$$

Formulation forte

La formulation forte du problème (4.23) s'écrit

$$\rho_+ \left(u_+^{\delta, 0} \right)'' - \text{div} \{ C[\varepsilon(u_+^{\delta, 0}) + f(\nabla w_+^{\delta, 0})] \} = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T)$$

$$\rho_+ [I - \Delta] (w_+^0)'' + D_+ \Delta^2 w_+^{\delta, 0} - \text{div} \{ C[\varepsilon(u_+^{\delta, 0}) + f(\nabla w_+^{\delta, 0})] \nabla w_+^{\delta, 0} \} = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \times (0, T)$$

avec les conditions du bord libre sur $\Sigma \times (0, T)$

$$C[\varepsilon(u_+^{\delta,0}) + f(\nabla w_+^{\delta,0})]\nu = 0 ;$$

$$D \left[\Delta w_+^{\delta,0} + (1 - \mu)B_1 w_+^{\delta,0} \right] = 0 ;$$

$$D_+ \left[\frac{\partial \Delta w_+^{\delta,0}}{\partial \nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2 w_+^{\delta,0}}{\partial s} \right] - \rho_+ \left(\frac{\partial w_+^{\delta,0}}{\partial \nu} \right)'' - C[\varepsilon(u_+^{\delta,0}) + f(\nabla w_+^{\delta,0})]\nu \cdot \nabla w_+^{\delta,0} = 0$$

et les conditions initiales

$$u_+^{\delta,0}(0) = u_+^* , (u_+^{\delta,0})'(0) = u_+^{**} , w_+^{\delta,0}(0) = w_+^* , (w_+^{\delta,0})'(0) = w_+^{**} \text{ dans } \Omega_+ .$$

Le problème vérifié par le premier terme du développement asymptotique correspond au problème de von Kármán posé sur le domaine Ω_+ . Les conditions obtenues ici sont en fait naturelles, elles consistent à enlever tout simplement la couche mince. Elles sont toutefois inintéressantes puisqu'elles ne prennent pas en compte l'effet de la couche. Elles ne sont satisfaisantes que lorsque l'épaisseur de la couche devient presque nulle. Il nous faut donc aller plus loin dans notre développement pour aboutir à des conditions d'ordres supérieurs et approximer ainsi l'effet de la couche mince.

4.5.3 Détermination de w^1 et u^1

L'équation (4.13), combinée avec les résultats obtenus précédemment, va permettre d'écrire le problème variationnel résolu par (u_+^1, w_+^1) .

Soient $\psi_+ \in H^2(\Omega_+)$ et $\varphi_+ \in (H^1(\Omega_+))^2$. On suppose que $w_+^0, u_+^1, u_+^0, \psi_+$ et φ_+ sont régulières sur Σ et on prend : $\psi_-^0(s, z) = \psi_+(s)$; $\psi_-^1(s, z) = z \frac{\partial \psi_+}{\partial \nu}(s)$, $\varphi_{-\tau}^0(s, z) = \varphi_{+\tau}(s)$, $\varphi_{-\nu}^0(s, z) = 0$, $\varphi_{-\tau}^1(s, z) = 0$ et $\varphi_{-\nu}^1(s, z) = \varphi_{+\nu}^0(s)$.

Avec ce choix de fonctions test et en remplaçant w_-^1, w_-^0, u_-^1 et u_-^0 par leurs expressions en fonction de w_+^1, w_+^0, u_+^1 et u_+^0 , l'équation (4.13) donne alors :

$$\begin{aligned}
& \rho_+ \left[((u_+^1)', \varphi_+)_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[((w_+^1)', \psi_+)_{\Omega_+} \right]' + a_+(w_+^1, \psi_+) + N_+^1(u_+^0, u_+^1, w_+^0, w_+^1, \varphi_+, \psi_+) \\
& + \rho_+ (b_+(w_+^1, \psi_+))' + \rho_- \left[((u_+^0)', \varphi_+)_{\Sigma} \right]' + \rho_- \left[((w_+^0)', \psi_+)_{\Sigma} \right]' + \rho_- \left(b_{\Sigma}((w_+^0)', \psi) \right)' \\
& + A_{\Sigma}(w_+^0, \psi_+) + N_{\Sigma}(u_+^0, w_+^0, \varphi_+, \psi_+) = 0
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
b_{\Sigma}(w_+^0, \psi) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial w_+^0}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) ds, \\
a_{\Sigma}(w_+^0, \psi) &= \int_{\Sigma} E_- \left(\gamma_T(w_+^0) \gamma_T(\psi) + \frac{1}{(1 + \mu_-)} \gamma_S(w_+^0) \gamma_S(\psi) \right) ds, \\
N_{\Sigma}(u_+^0, w_+^0, \varphi, \psi) &= E_- \int_{\Sigma} N_T(u_+^0, w_+^0) \left(\frac{\partial \varphi_T}{\partial s} - R(s) \varphi_{\nu} + \frac{\partial w_+^0}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) ds.
\end{aligned}$$

et où on a posé

$$\begin{aligned}
\gamma_T(\psi) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - R(s) \frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \\
\gamma_S(\psi) &= -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - R(s) \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\
N_T(\varphi, \psi) &= \frac{\partial \varphi_T}{\partial s} - R(s) \varphi_{\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2.
\end{aligned}$$

Le terme (w^1, u^1) résout alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_+ \left[((u_+^1)', \varphi_+)_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[((w_+^1)', \psi_+)_{\Omega_+} \right]' + a_+(w_+^1, \psi_+) + N_+^1(u_+^0, u_+^1, w_+^0, w_+^1, \varphi_+, \psi_+) + \\ \rho_+ (b_+(w_+^1, \psi_+))' + \rho_- \left[((u_+^0)', \varphi_+)_{\Sigma} \right]' + \rho_- \left[((w_+^0)', \psi_+)_{\Sigma} \right]' + \rho_- (b_{\Sigma}(w_+^0, \psi))' \\ + A_{\Sigma}(w_+^0, \psi_+) + N_{\Sigma}(u_+^0, w_+^0, \varphi_+, \psi_+) = 0 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$\forall (\varphi, \psi) \in [H^1(\Omega_+)]^2 \times H^2(\Omega_+)$, avec les conditions initiales :

$$u_+^1(0) = 0, (u_+^1)'(0) = 0, w_+^1(0) = 0, (w_+^1)'(0) = 0 \text{ dans } \Omega_+.$$

La formulation forte du problème précédent s'écrit :

$$\rho_+ (u_+^1)'' - \text{div} \{ C[\varepsilon(u_+^1) + \frac{1}{2}(\nabla w_+^0 \otimes \nabla w_+^1 + \nabla w_+^1 \otimes \nabla w_+^0)] \} = 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T)$$

$$\rho_+[I - \Delta] (w_+^1)'' + D_+\Delta^2 w_+^1 - \operatorname{div}\{C[\varepsilon(u_+^1) + g(\nabla w_+^0, \nabla w_+^1)]\nabla w_+^0 + C[\varepsilon(u_+^0) + f(\nabla w_+^0)]\nabla w_+^1\} = 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T)$$

avec les conditions aux limites sur $\Sigma \times (0, T)$

$${}^t\boldsymbol{\tau} (C[\varepsilon(u_+^1) + g(\nabla w_+^0, \nabla w_+^1)]) \boldsymbol{\nu} = \left(-\rho_-(u_{+\tau}^0)'' + E_- \frac{\partial}{\partial s} [N_T(u_+^0, w_+^0)] \right)$$

$${}^t\boldsymbol{\nu} (C[\varepsilon(u_+^1) + g(\nabla w_+^0, \nabla w_+^1)]) \boldsymbol{\nu} = \left(-\rho_-(u_{+\nu}^0)'' + E_- R(s) N_T(u_+^0, w_+^0) \right)$$

$$D_+ [\Delta w_+^1 + (1 - \mu) B_1 w_+^1] = - \left(Q(w_+^0) + \rho_- \left(\frac{\partial w_+^0}{\partial \nu} \right)'' \right)$$

$$\begin{aligned} & D_+ \left[\frac{\partial \Delta w_+^1}{\partial \nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2 w_+^1}{\partial s} \right] - \rho_+ \left(\frac{\partial w_+^1}{\partial \nu} \right)'' - \\ & C[\varepsilon(u_+^1) + g(\nabla w_+^0, \nabla w_+^1)] \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla w_+^0 - C[\varepsilon(u_+^0) + f(\nabla w_+^0)] \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla w_+^1 \\ & = \left(\rho_- \left[w_+^0 - \frac{\partial^2 w_+^0}{\partial s^2} \right]'' + P(w_+^0) - E_- \frac{\partial}{\partial s} \left[N_T(u_+^0, w_+^0) \frac{\partial w_+^0}{\partial s} \right] \right) \end{aligned}$$

où la fonction g est définie par

$$g(s_1, s_2) = \frac{1}{2} (s_1 \otimes s_2 + s_2 \otimes s_1), \quad s \in \mathcal{R}^2$$

Remarque 4.1 *On note l'apparition des termes supplémentaires aux seconds membres des conditions aux limites sur Σ . Ces termes, qui dépendent des caractéristiques physiques du matériau constituant la couche mince, vont permettre d'écrire un modèle qui rend compte de l'effet de celle-ci.*

4.5.4 Conditions aux limites approchées d'ordre 1, problème de Ventcel

Nous allons établir le problème approché d'ordre 1 qui permettra de rendre compte de l'effet de la couche mince. Celui-ci s'obtient en approchant la solution du problème par son développement asymptotique tronqué à l'ordre 1.

On considère les espaces variationnels

$$\begin{aligned} W(\Omega_+) &= \left\{ w \in H^2(\Omega_+) ; w|_\Sigma \in H^2(\Sigma), \frac{\partial w}{\partial \nu} \in H^1(\Sigma) \right\} \\ V(\Omega_+) &= \{ w \in H^1(\Omega_+) ; w|_\Sigma \in H^1(\Sigma) \}, \\ U(\Omega_+) &= \left\{ u \in (H^1(\Omega_+))^2 ; u_\tau \in H^1(\Sigma) \right\} \end{aligned}$$

on note $u_+^{\delta,1} = u_+^0 + \delta u_+^1$ et $w_+^{\delta,1} = w_+^0 + \delta w_+^1$ les développements tronqués à l'ordre 1 de u_+^δ et w_+^δ . En exploitant les problèmes variationnels satisfaits par (u_+^0, w_+^0) et (u_+^1, w_+^1) , on montre que $(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1})$ vérifie :

$$\begin{aligned} & \rho_+ \left[\left\langle (u_+^{\delta,1})', \varphi \right\rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[\left\langle (w_+^{\delta,1})', \psi \right\rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[b_+ \left((w_+^{\delta,1})', \psi \right) \right]' + \\ & a_+ \left(w_+^{\delta,1}, \psi \right) + N_+ \left(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1}, \varphi, \psi \right) + \delta \left\{ \rho_- \left[\left\langle (u_+^{\delta,1})', \varphi \right\rangle_\Sigma \right]' + \rho_- \left[\left\langle (w_+^{\delta,1})', \psi \right\rangle_\Sigma \right]' \right. \\ & \left. + \rho_- \left[b_\Sigma \left((w_+^{\delta,1})', \psi \right) \right]' + a_\Sigma \left(w_+^{\delta,1}, \psi \right) + N_\Sigma \left(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1}, \varphi, \psi \right) \right\} = O(\delta^2). \end{aligned}$$

Le problème résolu par $(u_+^{\delta,1}, w_+^{\delta,1})$ suggère l'idée de négliger les termes en $O(\delta^2)$ et de définir ainsi un problème approché en annulant le second membre de l'équation (4.25). Ce problème (qui correspond donc au problème ci-dessus en remplaçant $O(\delta^2)$ par 0) rend compte cette fois-ci de la couche mince à travers toutes ces formes qui sont écrites sur Σ . Celles ci représentent l'énergie de déformation de la couche mince. En notant $(\tilde{w}_+, \tilde{u}_+)$ la solution du problème ainsi défini, on écrit le problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}_+ \in L^\infty(0, T; W(\Omega_+)), (\tilde{w}_+)' \in L^\infty(0, T; V(\Omega_+)), \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} \right)' \in L^\infty(0, T; L^2(\Sigma)) \\ \tilde{u}_+ \in L^\infty(0, T; U(\Omega_+)), (\tilde{u}_+)' \in L^\infty\left(0, T; [L^2(\Omega_+)]^2\right), (\tilde{u}_+)' \in L^\infty\left(0, T; [L^2(\Omega_+)]^2\right) \\ \rho_+ \left[\left\langle (\tilde{u}_+)', \varphi \right\rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[\left\langle (\tilde{w}_+)', \psi \right\rangle_{\Omega_+} \right]' + \rho_+ \left[b_+ \left((\tilde{w}_+)', \psi \right) \right]' + \\ a_+ \left(\tilde{w}_+, \psi \right) + N_+ \left(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi, \psi \right) + \delta \left\{ \rho_- \left[\left\langle (\tilde{u}_+)', \varphi \right\rangle_\Sigma \right]' + \rho_- \left[\left\langle (\tilde{w}_+)', \psi \right\rangle_\Sigma \right]' \right. \\ \left. + \rho_- \left[b_\Sigma \left((\tilde{w}_+)', \psi \right) \right]' + a_\Sigma \left(\tilde{w}_+, \psi \right) + N_\Sigma \left(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+, \varphi, \psi \right) \right\} = 0 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

$\forall (\varphi, \psi) \in U(\Omega_+) \times W(\Omega_+)$, avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_+(0) &= u_+^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_+^{**}, \tilde{w}_+(0) = w_+^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_+^{**} \quad \text{dans } \Omega_+ \\ \tilde{w}_+(0) &= w_{+|\Sigma}^*, (\tilde{w}_+)'(0) = w_{+|\Sigma}^{**}, \left(\frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial \nu} \right)'(0) = w_+^{***}, (\tilde{u}_+)(0) = u_{+|\Sigma}^*, (\tilde{u}_+)'(0) = u_{+|\Sigma}^{***} \quad \text{sur } \Sigma \end{aligned} \quad (4.26)$$

La formulation forte du problème approché s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_+(\tilde{u}_+)'' - \operatorname{div}\{C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]\} &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T) \\ \rho_+[I - \Delta\tilde{w}_+]'' + D_+\Delta^2\tilde{w}_+ - \operatorname{div}\{C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]\nabla\tilde{w}_+\} &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \times (0, T) \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec les conditions de Ventcel sur $\Sigma \times (0, T)$

$${}^t\boldsymbol{\tau}(C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)])\boldsymbol{\nu} = \delta \left(-\rho_-(\tilde{u}_\tau)_+'' + E_- \frac{\partial}{\partial s} [N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+)] \right) \quad (4.28)$$

$${}^t\boldsymbol{\nu}(C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)])\boldsymbol{\nu} = \delta \left(-\rho_-(\tilde{u}_\nu)_+'' + E_- R(s)N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \right) \quad (4.29)$$

$$D_+[\Delta\tilde{w}_+ + (1 - \mu)B_1\tilde{w}_+] = -\delta \left(Q(\tilde{w}_+) + \rho_- \frac{\partial \tilde{w}_+''}{\partial \nu} \right) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} D_+ \left[\frac{\partial \Delta\tilde{w}_+}{\partial \nu} + (1 - \mu_+) \frac{\partial B_2\tilde{w}_+}{\partial s} \right] - \rho_+ \frac{\partial \tilde{w}_+''}{\partial \nu} - C[\epsilon(\tilde{u}_+) + f(\nabla\tilde{w}_+)]\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla\tilde{w}_+ = \\ \delta \left(\rho_- \left[\tilde{w}_+ - \frac{\partial^2 \tilde{w}_+}{\partial s^2} \right]'' + P(\tilde{w}_+) - E_- \frac{\partial}{\partial s} \left[N_T(\tilde{u}_+, \tilde{w}_+) \frac{\partial \tilde{w}_+}{\partial s} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

où ${}^t\boldsymbol{\nu}$ (resp. ${}^t\boldsymbol{\tau}$) est le vecteur transposé (resp. matrice) de $\boldsymbol{\nu}$ (resp. $\boldsymbol{\tau}$).
Les opérateurs de trace P et Q sont définis par :

$$P(\tilde{w}) = E_- \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \gamma_T(\tilde{w}) + \frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} (R(s)\gamma_S(\tilde{w})) \right]$$

$$Q(\tilde{w}) = E_- \left[\frac{2}{1 + \mu_-} \frac{\partial}{\partial s} \gamma_S(\tilde{w}) - R(s)\gamma_T(\tilde{w}) \right]$$

On associe avec (3.17) les conditions initiales (4.26).

Les conditions aux limites approchées de Ventcel (4.28)-(4.31) ne sont pas classiques car elles font intervenir des dérivées tangentielles du même ordre que celui de l'opérateur intérieur. Ces conditions ont déjà été obtenues dans le chapitre 3. Cependant, dans notre cas elles sont dépendantes de δ . Ceci provient du fait que les coefficients de l'élasticité du matériau constituant la couche mince sont du même ordre de grandeur que celui de la plaque,

contrairement au cas traité dans le chapitre 3 où les coefficients sont en δ^{-1} dans le raidisseur. Donc, du moins formellement, quand δ tend vers zéro, la couche mince doit disparaître. Par ailleurs, si on remplace E_- par $\frac{E_-}{\delta}$ et ρ_- par $\frac{\rho_-}{\delta}$ dans les conditions ci-dessus, on obtiendra exactement celles identifiées dans le chapitre 3.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié des structures élastiques constituées par des plaques minces entourées de couches minces ou renforcées par des raidisseurs. Nous avons établi, grâce aux méthodes asymptotiques et à l'analyse multi-échelle, des modèles approchés qui rendent compte de l'effet de la couche mince ou du raidisseur par de nouvelles conditions aux limites non classiques, appelées conditions de Ventcel. Nous avons considéré deux modèles : celui de Kirchhoff- Love (modèle linéaire de plaque en flexion) et le système dynamique de von Karman qui est un modèle non linéaire de plaque en grandes déformations. Les techniques développées dans cette étude peuvent être appliquées à d'autres modèles de plaques et à d'autres configurations. On peut ainsi généraliser ce travail et s'intéresser aux modèles qui rentrent dans le cadre de la thermoélasticité non linéaire, la visco-élasticité, la piézoélectricité...etc.

Une autre idée encore plus intéressante consiste à considérer des plaques avec coins entourées de couches minces. La méthode des développements asymptotiques telle qu'elle a été présentée dans le chapitre 2 ou 4 ne s'applique pas directement à cause des singularités qui apparaissent aux coins et qui compromettent la construction des termes du développements asymptotiques. On peut néanmoins faire face à ce problème et corriger ce comportement singulier en s'inspirant des travaux récents de Caloz, Costabel, Dauge et Vial (voir [11]), où l'on a étudié un problème de transmission dans un domaine à coin. (voir aussi [40], [41])

Annexe : Quelques éléments d'élasticité

Elasticité

Définition 1 *Un milieu continu est dit élastique si, soumis à un état de contraintes, l'état des déformations dans ce milieu ne dépend que de la configuration qu'il avait dans un certain état antérieur. En d'autres termes, on parle d'une déformation élastique si l'objet revient à sa position initiale en éliminant la force appliquée. En revanche, si l'objet reste déformé même après avoir ôté la force, la déformation est dite plastique.*

Définition 2 *Contrainte : lors de l'application d'une force sur un élément, un ensemble de forces intérieures naissent pour équilibrer la force extérieure. L'intensité de ces forces est appelée contrainte.*

Définition 3 *Homogénéité : le matériau est dit homogène, si on découpe ce dernier en morceaux très petits, on devrait retrouver les mêmes constituants.*

Définition 4 *Isotropie : si on prend un point défini dans un matériau, pour qu'il soit isotrope, il faut qu'autour du point et dans toutes les directions, on ait les mêmes propriétés.*

Définition 5 *Masses volumiques : résultat du rapport Masse / volume du matériau. En mécanique des milieux continus, la masse est habituellement introduite à partir de la masse volumique ρ (ou bien densité de masse volumique) qui est une fonction définie à chaque instant t et en chaque point M .*

Lois de comportement

Sous l'effet de forces de volume ou de surfaces, un point m de l'objet considéré se déplace d'un vecteur $u(m) = (u_i)_{1 \leq i \leq 3}$ qu'on appelle champ des déplacements. On désigne par $\sigma = (\sigma_{ij})$ le tenseur des contraintes. Il s'agit d'un tenseur symétrique 3×3 qui mesure les contraintes ou les efforts internes s'exerçant dans le corps du fait de sa déformation.

Dans ce qui suit, on utilise la convention de sommation sur les indices répétés. On désigne par $E(u)$ le tenseur des déformations de Green-saint-venant :

$$E_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

La partie linéaire de E_{ij} , qu'on note :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

est appelée tenseur des déformations linéarisé et intervient dans la théorie linéaire de l'élasticité.

Dans le cas où le matériau considéré est isotrope et homogène, le champ des contraintes est relié au champ des déformations par la loi de comportement :

$$\sigma_{ij}(u) = \frac{E}{1 + \mu} \left(E_{ij}(u) + \frac{\mu}{1 - \mu} E_{kk}(u) \delta_{ij} \right)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, $E > 0$ est le module de Young et μ ($0 < \mu < \frac{1}{2}$) est le coefficient de Poisson.

Théorie des plaques

On appelle plaques des corps élastiques tridimensionnels "aplatis". De façon plus précise, il s'agit de pièces cylindriques dont la hauteur est très petite par rapport aux autres dimensions. Cette petitesse est caractérisée à l'aide d'un petit paramètre h , l'ordre de grandeur de ce petit paramètre permettant d'étudier le comportement asymptotique du problème considéré lorsque h tend vers zéro, ce qui équivaut à ne retenir que les termes dominants (lorsque $h \rightarrow 0$) dans les équations.

Grâce à certaines hypothèses, il est alors possible de ramener le modèle tridimensionnel de la plaque à un modèle bidimensionnel (surfaccique), formulé sur la surface moyenne de cette plaque; (un modèle est dit bidimensionnel si les fonctions inconnues ne dépendent que de deux coordonnées de l'espace). Les modèles qu'on a considéré dans cette thèse font partie des modèles de plaques bidimensionnels dérivés à partir des équations tridimensionnelles de plaques. Le modèle linéaire de Kirchoff-Love qui décrit le déplacement transversal d'une plaque mince et le système dynamique de von Karman qui est non linéaire et traduit le déplacement plan et transversal d'une plaque en grandes déformations ont été justifiés par plusieurs auteurs et par plusieurs méthodes à partir de l'élasticité tridimensionnelle. Nous renvoyons le lecteur au livre de J. L. Lagnèse [22] où une étude détaillée sur la dérivation de ces deux modèles est exhibée.

Bibliographie

- [1] R. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] H.Ammari ; C. Latiri-Grouz, Approximate boundary conditions for thin periodic coatings. In Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Golden, CO, 1998), 297-301. SIAM, Philadelphia, PA 1998.
- [3] M. Aufranc, Sur quelques problèmes de jonction dans les multi-Structures élastiques, Doctorat Dissertation, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
- [4] M. Aufranc, Plaques raidies par des poutres, C. R. Acad. Sci., Sér. I, 311, 835-838, 1990.
- [5] M. Aufranc, Junction between three- dimensional and two-dimensional nonlinearly elastic structures. Asymptotic Analysis 4, 319-338, 1991.
- [6] N. Bartoli ; A. Bendali, Robust and high order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer. IMA Journal of applied Mathematics.
- [7] A. Bendali ; K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. SIAM J. Appl. Math.56 (6) (1996), 1664-1693
- [8] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.
- [9] P.G. Ciarlet, Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures : an Asymptotic Analysis. Masson, Springer Verlag, Paris, 1990.
- [10] P.G. Ciarlet, Mathematical Elasticity. Vol. II :Theory of plates, North-Holland, 1997.
- [11] G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge, and G. Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. A paraitre.

- [12] R. Dautray ; J. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 8. Masson, Paris, 1988..
- [13] G. Duvaut ; J. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1973.
- [14] B. Engquist ; J-C. Nédélec, Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Rapport interne 278, CMAP, école polytechnique, Palaiseau, France, 1993.
- [15] A. Favini, I. Lasiecka, M. A. Horn and D. Tataru, Global existence, uniqueness and regularity of solutions to a Von Karman system with nonlinear boundary dissipation, Differential and Integral Equations 9 no2, pp. 267-294, 1996.
- [16] G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. Math. Mech. Solids 4(2) (1999) 201-225.
- [17] I. Gruais, Modélisation de la jonction entre une plaque et une poutre en élasticité linéarisée, Modélisation mathématique et Analyse numérique, 27, 77-105, 1993.
- [18] I. Gruais, Modelling of the junction between a plate and a rod in non linear elasticity, Asymptotic Analysis, 7, 179-194, 1993.
- [19] H. Haddar ; P. Joly, Effective boundary conditions for thin ferromagnetic coatings. Asymptotic analysis of the 1D model. Asymptotic Analysis 27(2)(2001) 127-160.
- [20] Y. Kerbrat ; J.M. Braemer, Géométrie des courbes et des surfaces. Hermann, Paris, 1976.
- [21] H. Koch and A. Stachel, Global existence of classical solutions to the dynamical von Karman system, Math. Methods in the applied sciences, 16, pp 581-586, 1993.
- [22] J.E. Lagnese ; J.L. Lions, Modelling, Analysis and Control of Thin Plates. Masson, Paris, 1988.
- [23] J.E. Lagnese ; Boundary stabilization of thin plates, SIAM, 1989.
- [24] L. Landau, E. Lifchitz. Théorie de l'élasticité. Editions Mir, Moscow 1967.
- [25] I. Lasiesca ; Uniform stabilisability of a full von Karman System with nonlinear boundary feedback ., SIAM J. on Control, 36, 1998.
- [26] I. Lasiesca , Intermediate solution to full Von Karman system of dynamic nonlinear Elasticity, Applicable Analysis 68, 1998.

- [27] H. Ledret, Problèmes variationnels dans les multi-domaines ; modélisations et applications. Masson, Paris, 1991.
- [28] K. Lemrabet, Etude de divers problèmes aux limites de ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse de Doctorat d'Etat, U.S.T.H.B, 1987.
- [29] K. Lemrabet et D.E. Teniou, Vibration d'une plaque mince avec raidisseur sur le bord. Maghreb.Math. Rev., vol 2, n°1, Juin 1992.
- [30] J.L. Lions ; E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunond, Paris, 1968.
- [31] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- [32] J.L. Lions, Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites en Contrôle Optimal, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [33] J. Puel and M. Tucsnak, Global existence for the full von Karman system, Appl.Math. Optim., 34, pp. 139-161, 1996
- [34] J. Puel and M. Tucsnak, Boundary stabilization for the Von Karman Equations, SIAM J. on Control 33, pp . 255-273, 1996
- [35] V. I. Sedenko, On uniqueness of the generalized solutions of initial boundary value problem for Marguerre- Vlasov nonlinear oscillations of the shallow shells, Russian Izv., North-Caucasus Region, Ser. Natural Sciences, 1-2 , 1994.
- [36] L.Rahmani, Ventcel's boundary conditions for a dynamic nonlinear plate, Asymptotic Analysis, IOS press, 38 (2004), 319-337
- [37] T.B.A. Senior ; J.L. Volakis. Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics. IEE Press, New York and London, 1995.
- [38] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T, B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, IV, CXLVI, pp65-96, 1987.
- [39] D. Tataru and M. Tucsnak, On the Cauchy problem for the full Von Karman system, Nonlinear Differential Equations and Appl. 4(3), pp. 325-340, 1997.
- [40] G. Vial. Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème de couche mince dans un domaine à coin. Thèse de doctorat 2840, Université de Rennes I, IRMAR 2003.

- [41] G. VIAL. Efficiency of approximate boundary conditions for corner domains coated with thin layers. CR. Acad.Sci. (2005).
- [42] Th. von Karman, Festigkeitprobleme in Maschinenbau, in : Encyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. IV, pp.314-385, 1910.