



Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté de Mathématiques

Résumé du Mémoire de Magister en Mathématiques

Spécialité : Systèmes Dynamiques et Géométrie
présenté par⁽¹⁾

BEDROUNI Samir

THÈME

Sur les feuilletages de Painlevé

Résumé

Dans ce mémoire, nous précisons les notions de feuilletage de Painlevé et de feuilletages uniforme et P-uniforme pour une fibration, et nous établissons à partir des seuls résultats de Gérard-Sec concernant les feuilletages de Painlevé, deux théorèmes qui nous permettront de résoudre, dans une approche purement géométrique, les problèmes de Briot et Bouquet d'une part, de Fuchs d'autre part dans un cas particulier, et cela, sans faire usage du théorème de Ehresmann comme le fait Antoinette Sec.

Mots-clés : Feuilletage uniforme, feuilletage P-uniforme, feuilletage de Painlevé, théorème d'Ehresmann, problème de Briot et Bouquet, problème de Fuchs

⁽¹⁾Sous la direction de : Djilali BEHLOUL, Maître de conférences à l'USTHB.

Introduction

Le sujet de ce mémoire se rattache aux deux problèmes classiques suivants.

Problème de Briot et Bouquet : Soit $f(y', y) = 0$ une équation différentielle dans le champ complexe, où f est un polynôme en y' et y . Une telle équation sera appelée équation de Briot et Bouquet.

Le problème de Briot et Bouquet consiste à choisir f pour que les solutions de l'équation $f(y', y) = 0$ soient méromorphes sur \mathbb{C} .

Problème de Fuchs : Soit $f(x, y, y') = 0$ une équation différentielle dans le champ complexe où f est un polynôme en y, y' , et holomorphe en x .

Le problème de Fuchs consiste à choisir f pour que les solutions de $f(x, y, y') = 0$ n'aient pas de points critiques mobiles, c'est-à-dire pas de points critiques variant avec la solution considérée.

Les mathématiciens Briot et Bouquet ont résolu autrefois, en 1856, ([BB56]), le problème qui porte leurs noms. Le problème de Fuchs, qui généralise ce dernier, a été résolu partiellement par Fuchs lui-même ([Fuc84]) et Poincaré ([Poi85]) puis complètement par Painlevé [Pai95]. L'étude géométrique de ces deux problèmes à été réalisée complètement par ANTOINETTE SEC dans son exposé [Sec72]. Elle est essentiellement fondée sur l'utilisation *du théorème de Ehresmann* [Ehr50].

Notre contribution est de résoudre, *géométriquement*, les deux problèmes particuliers suivant :

Le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y' ;

Le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'

et ceci, *sans faire appel au théorème d'Ehresmann* ([Ehr50]), *en se basant uniquement sur les résultats de Gérard-Sec concernant les feuilletages de Painlevé* [GS72].

1 Feuilletages analytiques complexes

Sur une variété complexe V_n de dimension n et à base dénombrable, une structure feuilletée (ou feuilletage) \mathcal{F} de codimension p , ou de dimension $n - p$, est un atlas maximal $\mathcal{A} = (U_i, f_i)_{i \in I}$ tel que pour tout (i, j) , h_{ij} est un automorphisme local pour la structure feuilletée triviale de codimension p sur \mathbb{C}^n .

Une "plaque" dans U_i pour cette structure feuilletée est, par définition, l'image inverse par f_i d'une "plaque" dans $f_i(U_i)$ pour la structure feuilletée triviale de codimension p sur \mathbb{C}^n .

Un ouvert U de V_n est dit *distingué* s'il est isomorphe à un produit de deux disques $P_p \subset \mathbb{C}^p$, $P_{n-p} \subset \mathbb{C}^{n-p}$ tels que les images inverses des "plaques" dans $P_p \times P_{n-p}$ sont des "plaques" dans U .

La dernière propriété permet de définir une nouvelle structure analytique complexe sur V_n ; les ouverts de cette nouvelle structure sont les "plaques". Il est clair que cette nouvelle structure est plus fine que la structure "initiale" ; V_n munie de cette structure est une variété analytique complexe de dimension $n - p$.

Une *feuille* de la structure feuilletée de codimension p sur V_n est, par définition, une composante connexe de V_n pour la structure fine et avec cette structure une feuille est une sous-variété analytique de dimension $n - p$ de V_n .

Une feuille est dite *propre* si la topologie définie sur la feuille par les "plaques" est la même que la topologie induite sur la feuille par la topologie naturelle de V_n .

2 Feuilletages uniformes

2.1 Feuilletages transverses

Soient E et B deux variétés connexes analytiques réelles ou complexes de dimension finie, π une submersion analytique surjective de E sur B , \mathcal{F} un feuilletage analytique défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Définition 2.1 *On dira que le feuilletage \mathcal{F} est transverse à la submersion π si, en tout point m de E , la feuille et la fibre passant par m sont transverses.*

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira aussi bien que le feuilletage est transverse à π , ou qu'il est transverse à la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Le théorème suivant, connu sous le nom de théorème de EHRESMANN (voir [Ehr50, page 37]), est très utile pour l'étude globale des solutions d'équations différentielles.

Théorème 2.1 (*Théorème de Ehresmann*) *Soient (E, π, B) une fibration analytique à fibre compacte, \mathcal{F} un feuilletage transverse à cette fibration avec $\dim \mathcal{F} = \dim B$. Alors, la restriction de π à toute feuille de \mathcal{F} est un revêtement.*

2.2 Feuilletages uniformes

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B (application continue surjective), \mathcal{F} un feuilletage défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Définition 2.2 *On dira que le feuilletage \mathcal{F} est uniforme pour π si toute feuille de \mathcal{F} est homéomorphe à B par π .*

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira indifféremment que \mathcal{F} est un feuilletage uniforme pour π , ou un feuilletage uniforme pour la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

2.3 Feuilletages transverses et feuilletages uniformes : Théorème A

Théorème A *Si la fibration (E, π, B) est à fibre compacte et à base simplement connexe et si \mathcal{F} est un feuilletage analytique défini dans E ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), alors \mathcal{F} est un feuilletage uniforme pour (E, π, B) si et seulement s'il est transverse à cette fibration.*

Remarque Le théorème A est encore vrai si on remplace la fibration analytique complexe (E, π, B) , à fibre compacte, par une submersion propre.

Démonstration : Il est immédiat que si le feuilletage \mathcal{F} est uniforme pour π , alors \mathcal{F} est transverse à π .

Réciproquement, supposons que \mathcal{F} est transverse à π , et soit Γ une feuille quelconque de \mathcal{F} . Puisque la fibration (E, π, B) est à fibre compacte, la restriction de π à Γ est un revêtement d'après le théorème de Ehresmann. Puisque B est simplement connexe, π restreinte à Γ est un isomorphisme analytique. Le feuilletage \mathcal{F} est donc uniforme. ■

2.4 Le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y'

Pour aborder ce problème, on va donner une solution particulièrement importante, à savoir l'équation de Riccati.

2.4.1 L'équation de Riccati

Soit

$$y' = ay^2 + by + c \quad (a, b, c \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

une équation de Riccati.

Théorème 2.1 *Les solutions de l'équation (1) sont méromorphes sur \mathbb{C} .*

On met en évidence un feuilletage \mathcal{F}_1 et une fibration π_1 à fibre compacte tels que le théorème 2.1 ci-dessus soit équivalent à la proposition 2.1 suivante.

Proposition 2.1 *Le feuilletage \mathcal{F}_1 est uniforme pour π_1 .*

2.4.2 Le problème de Briot et Bouquet : cas où f est du premier degré en y'

Soit

$$f(y', y) = a_0(y)y' + a_1(y) = 0 \quad (2)$$

une équation de Briot et Bouquet, où a_0 et a_1 sont des polynômes premiers entre eux.

Dans ce cas, la réponse au problème de Briot et Bouquet s'exprime classiquement de la façon suivante :

Théorème 2.2 *L'équation de Riccati est la seule solution au problème de Briot et Bouquet lorsque le degré de f est égal à 1.*

3 Feuilletages de Painlevé

3.1 Feuilletages simples

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie. On se donne une projection π de E sur B (application continue surjective).

Définition 3.1 ([GS72]) *On dira qu'un feuilletage défini dans E est simple pour la projection π de E sur B si, en tout point m de E , il existe un voisinage distingué de m dans lequel la plaque de m rencontre $\pi^{-1}(\pi(m))$ au point isolé m .*

3.2 Feuilletages de Painlevé de 1^{re} espèce

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B , \mathcal{F} un feuilletage défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Un chemin dans B (resp. dans E) est un couple (l, I) constitué par un segment I de \mathbb{R} (fermé ou semi-ouvert) et une application continue de I dans B (resp. dans E).

Définition 3.2 ([GS72]) *Soient $(l, [0, 1])$ un chemin dans B , et m un point de $\pi^{-1}(l(0))$.*

On dira que $(l, [0, 1])$ est relevable en m dans la feuille de \mathcal{F} passant par m s'il existe dans E un chemin $(\hat{l}, [0, 1])$ d'origine m , tel que $\pi \circ \hat{l} = l$ et tel que $\hat{l}([0, 1])$ soit contenu dans la feuille de m .

Le chemin $(\hat{l}, [0, 1])$ est appelé un relèvement en m de $(l, [0, 1])$ dans la feuille de m .

Définition 3.3 ([GS72]) *On dira que le feuilletage \mathcal{F} est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π si tout chemin $(l, [0, 1])$ dans B est relevable en tout point m de $\pi^{-1}(l(0))$ dans la feuille de m .*

3.3 Feuilletages de Painlevé de 2^e espèce

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B , S un sous-ensemble non vide de E tel que, pour tout x de B , l'ensemble S rencontre $\pi^{-1}(x)$ en des points isolés.

Soit \mathcal{F} un feuilletage défini dans $E - S$, dont la dimension est celle de B .

Définition 3.4 ([GS72]) *On dira que \mathcal{F} est un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour π si, pour tout chemin $(l, [0, 1])$ de B relevable en un point m de $\pi^{-1}(l(0)) - S$ dans la feuille de m , le chemin $(l, [0, 1])$ est relevable en m dans l'adhérence de la feuille de m relativement à E .*

3.4 Feuilletages simples et feuilletages de Painlevé de 1^{re} espèce

3.4.1 Relèvements de chemins dans une feuille donnée

Théorème 3.1 ([GS72]) *Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si \mathcal{F} est un feuilletage analytique simple pour cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$) ; si, de plus, la fibre de (E, π, B) est compacte, \mathcal{F} est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour (E, π, B) .*

3.4.2 Relèvements de chemins dans les feuilles voisines d'une feuille donnée

Proposition 3.1 ([GS72]) *Pour tout relèvement $(\hat{l}, [0, 1])$ de $(l, [0, 1])$ dans une feuille de \mathcal{F} , il existe un entier naturel k non nul et un voisinage V de $\hat{l}(0)$ dans $\pi^{-1}(l(0))$ tels que, pour tout point m de V , les relèvements de $(l, [0, 1])$ au point m dans la feuille de m sont en nombre inférieur ou égal à k et ont leurs extrémités dans un voisinage de $\hat{l}(1)$ dans $\pi^{-1}(l(1))$.*

3.5 Feuilletages simples et feuilletages de Painlevé de 2^e espèce

Théorème 3.2 ([GS72]) *Si la fibration (E, π, B) est à fibre compacte et si \mathcal{F} est un feuilletage analytique dans $E - S$, simple pour $\pi|_{E-S}$, le feuilletage \mathcal{F} est un feuilletage de Painlevé de 2^e espèce pour (E, π, B) .*

4 Feuilletages P -uniformes

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B (application continue surjective), \mathcal{F} un feuilletage défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B .

Définition 4.1 *On dira que le feuilletage \mathcal{F} est P -uniforme pour π si tout chemin $(l, [0, 1])$ dans B a un relèvement unique en tout point m de $\pi^{-1}(l(0))$ dans la feuille de m .*

4.1 Feuilletages transverses et feuilletages P -uniformes

4.1.1 Existence et unicité de relèvements de chemins dans une feuille donnée. Théorème B

Théorème B *Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si \mathcal{F} est un feuilletage analytique transverse à cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$) ; si, de plus, la fibre de (E, π, B) est compacte, \mathcal{F} est un feuilletage P -uniforme pour (E, π, B) .*

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin d'établir le lemme suivant.

Lemme 4.1 *Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si \mathcal{F} est un feuilletage analytique transverse à cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1) *Le feuilletage \mathcal{F} est P -uniforme pour π .*
- 2) *La restriction de π à toute feuille de \mathcal{F} est un revêtement.*

Démonstration du lemme Supposons que \mathcal{F} est P -uniforme pour π et soit Γ la feuille de \mathcal{F} passant par a . Puisque, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une submersion, Γ est transverse aux fibres et $\dim(\Gamma) = \dim(B)$, il s'ensuit que $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow B$ est un isomorphisme local, et comme \mathcal{F} est P -uniforme pour π , alors π restreinte à Γ est un revêtement.

La réciproque est évidente car les revêtements ont la propriété de relèvement unique des chemins.

Démonstration du théorème B. Puisque \mathcal{F} est transverse à π , donc simple pour π , et puisque la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$ est à fibre compacte, on peut appliquer *le théorème 3.1 de Gérard-Sec* et dire que \mathcal{F} est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π .

Soit Γ la feuille de \mathcal{F} passant par a . Comme dans la démonstration du lemme 4.1, $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow B$ est un isomorphisme local, et comme \mathcal{F} est un feuilletage de Painlevé de 1^{re} espèce pour π , alors π restreinte à Γ est un revêtement. D'après le lemme 4.1, le feuilletage \mathcal{F} est P -uniforme pour π .

4.2 Le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'

Pour aborder ce problème, on va donner une solution particulièrement importante, à savoir l'équation de Riccati généralisée.

4.2.1 L'équation de Riccati généralisée

Soit

$$q(x)y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{3}$$

une équation de Riccati généralisée, où q, a, b, c sont holomorphes sur \mathbb{C} et q n'est pas la fonction nulle.

Théorème 4.1 *L'équation (3) est à points critiques fixes.*

On met en évidence un feuilletage \mathcal{F}_3 et une fibration π_3 à fibre compacte tels que le théorème 4.1 soit équivalent à la proposition 4.1 suivante.

Proposition 4.1 *Le feuilletage \mathcal{F}_3 est P -uniforme pour π_3 .*

4.2.2 Le problème de Fuchs : cas où f est du premier degré en y'

Soit

$$f(x, y', y) = a_0(x, y)y' + a_1(x, y) = 0 \tag{4}$$

une équation de Fuchs, où a_0 et a_1 sont deux polynômes en y , premiers entre eux, à coefficients holomorphes en x .

Dans ce cas, la réponse au problème de Fuchs s'exprime classiquement de la façon suivante :

Théorème 4.2 *Les seules solutions du problème de Fuchs sont les équations de Riccati généralisées*

$$q(x)y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où q, a, b, c sont holomorphes sur \mathbb{C} et q n'est pas la fonction nulle.

Conclusion

Nous pourrions assurer qu'il est possible de résoudre géométriquement, dans le cas général, les deux problèmes cités plus haut et ceci, sans utiliser le théorème de Ehresmann, en se basant sur les théorèmes A et B, les résultats de Gérard-Sec [GS72] et en suivant le même calcul fait par Antoinette Sec dans sa résolution complète de ces problèmes [Sec72].

Bibliographie

- [BB56] C. Briot et J. C. Bouquet : *Mémoire sur l'intégration au moyen des fonctions elliptiques*. J. Ec. Poly. 21 (1856) 199-253. Théorie des fonctions elliptiques - (1875).
- [CN85] C. Camacho et A. L. Neto : *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.
- [Ehr50] C. Ehresmann : *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de topologie : Bruxelles, 1950, p. 29-55.
- [Fuc84] L. Fuchs : *Über differentialgleichungen deren integral festen verzweigungspunkte besitzen*. Sitzungsberichte der akad. Berlin (1884) 741-747.
- [GS72] R. Gérard et A. Sec : *Feuilletages de Painlevé*. Bull. Soc. Math. France 100 (1972) p. 47-72.
- [Pai95] P. Painlevé : *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à stockholm*. Paris, A. Hermann, 1895.
- [Pai97] P. Painlevé : *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à stockholm*. Paris, A. Hermann, 1897.
- [Poi85] H. Poincaré : *Sur un théorème de M. Fuchs*. Acta Mat. t. VII (1885).
- [Sec71] A. Sec : *Sur les feuilletages définis par certaines équations de PFAFF dans $\mathbb{C}^n \times \mathbf{P}_1$* . Thèse ronéotypée. Strasbourg. IRMA. (1971)
- [Sec72] A. Sec : *Le problème de Briot et Bouquet*. Journées complexes de Metz, exposé (V) (1972).