

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



Thèse présentée pour l'obtention
du grade de docteur en science
En : Mathématique
Spécialité : Recherche Opérationnelle : Mathématique discrète,
Optimisation et Cryptologie

Par : RAHMOUNI Abdelkader

Thème

Etude de quelques fonctions de domination dans les graphes

Soutenue publiquement, le 13/10/2018, devant le jury composé de :

Mme. I. BOUCHMAKH	Prof USTHB/FMT	Présidente
M. M. CHELLALI	Prof U. Blida 1	Directeur de Thèse
M. A .BERRACHEDI	Prof USTHB/FMT	Examineur
M. M. BLIDIA	Prof U. Blida 1	Examineur
M. S. BOUROUBI	Prof USTHB/FMT	Examineur
M. N. IKHLEF - ESCHOUF	Maître de Conférences/A U. Médéa	Examineur

A la mémoire de mon père Mohamed et de mon frère Abdelhamid.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à mon directeur de thèse, le professeur Mustapha Chellali pour tout ce qu'il m'a appris mais aussi pour sa patience, sa générosité, sa disponibilité et ses encouragements.

Je remercie le professeur Isma Bouchemakh qui me fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également les professeurs Abdelhafid Berrachedi, Mostafa Blidia, Sadek Bouroubi et le Dr. Noureddine Ikhlef Eschouf qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail.

Je remercie également de tout cœur mon père (qu'Allah lui accorde Sa miséricorde), ma mère, mes frères Aymen et Abdelhamid (qu'Allah lui accorde Sa miséricorde), mes tantes et mes oncles, mes cousins(es) et tous mes amis pour leurs soutiens et tous les bons moments.

Résumé

En 2004, Cockayne, Dreyer, S.M Hedetniemi, et S.T Hedetniemi ont introduit une nouvelle variante de la domination, appelée fonction de domination Romaine. Depuis, plusieurs variantes ont vu le jour. Nous aborderons dans cette thèse six de ces fonctions, à savoir la domination Romaine et sa version indépendante, la domination 2-rainbow et sa version indépendante, la $\{2\}$ -domination Romaine et la domination romaine double. De plus, nous introduisons les versions indépendantes des deux dernières fonctions de domination dans un graphe G , dont les paramètres correspondants seront notés par $i_{\{R2\}}(G)$ et $i_{dR}(G)$ respectivement. Nous présentons d'abord une synthèse sur les résultats existants dans la littérature concernant les six fonctions de dominations, incluant des résultats sur la complexité, bornes et résultats de type Nordhaus-Gaddum. Nous montrons alors que le problème de décision associé à la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante est NP-Complet même restreint aux graphes bipartis, nous prouvons que pour tout graphe G d'ordre n , on a $0 \leq i_{r2}(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/5$, $0 \leq i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/4$, et que l'égalité $i_{r2}(G) = i_{\{R2\}}(G)$ est vérifiée pour les arbres. Nous montrons aussi que le problème de décision associé à la domination Romaine double indépendante est NP-Complet. De plus, nous prouvons que pour tout graphe G , $2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$ et nous caractériserons les arbres T tels que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$ ou $i_{dR}(T) = 3i(T)$.

Table des matières

INTRODUCTION	1
I CONCEPTS DE BASE	5
1.1 Notions de base	5
1.2 Quelques classes de graphes	7
1.3 Domination dans les graphes	9
II APERÇU SUR LES FONCTIONS DE DOMINATION	13
2.1 La domination Romaine	13
2.1.1 Propriétés	15
2.1.2 Bornes	16
2.1.3 Relations avec $\gamma(G)$	20
2.1.4 Résultats de type Nordhaus.Gaddum	25
2.2 La domination Romaine indépendante	25
2.2.1 Bornes	26
2.2.2 Relations avec $i(G)$	27
2.2.3 Résultats de type Nordhaus Gaddum	28
2.3 La domination 2-rainbow	29
2.3.1 Bornes	30
2.4 La domination 2-rainbow indépendante.	32
2.5 La $\{2\}$ -domination Romaine	33
2.5.1 Relations avec $\gamma(G)$	34
2.6 La domination Romaine Double	36
2.7 Conclusion	41
III LA $\{2\}$ -DOMINATION ROMAINE INDÉPENDANTE ...	42
3.1 Introduction	42

3.2 Complexité algorithmique	44
3.3 Borne supérieure sur $i_{r_2}(G) - i_{\{R_2\}}(G)$	47
3.4 Borne supérieure sur $i_R(G) - i_{\{R_2\}}(G)$	55
IV LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE INDÉPENDANTE	60
4.1 Introduction	60
4.2 Complexité algorithmique	61
4.3 Comparaison avec le nombre de domination indépendant .	63
4.4 Caractérisation des arbres T tels que $i_{dR}(T) = 3i(T)$. . .	67
4.5 Comparaison avec d'autres paramètres	77
CONCLUSION GÉNÉRALE	79
RÉFÉRENCES	81

LISTE DES FIGURES

1. Le graphe complet K_5 Page 08.
2. L'empire Romain sous le règne de Constantin 1^{er} Page 14.
3. Liste des graphes G avec $\delta(G) \geq 2$ et $\gamma_R(G) > 8n/11$
 Page 17.
4. Le graphe F utilisé pour la construction des graphes G tels que $\gamma_R(G) =$
 $8n/11$ Page 17.
5. Exemple de graphe cubique G tel que $\gamma_R(G) = 2n/3$
 Page 18.
6. Super griffe et super net Page 18.
7. 8. 9. Les opérations pour la construction des arbres T tels que
 $\gamma_R(T) = 2\gamma(T)$ Pages 21-22.
10. L'arbre $F_{3,3}$ obtenu en subdivisant l'étoile double $S_{3,3}$
 Page 35.
11. L'arbre $T_{8,2}$ avec le pivot v Page 35.
12. L'arbre F utilisé pour la caractérisation des arbres T tels que $\gamma_{dR}(T) =$
 $3\gamma(T)$ Page 39.
13. Le graphe G' tel que $i_{\{R2\}}(G') < i_{r2}(G') < i_R(G')$ Page 43.

14. Exemple d'un graphe pour la réduction du problème X3C à PD{2}RI Page 45.

15. Le graphe G'' avec $\gamma_{\{R2\}}(G'') = 4$ Page 48.

16. Le graphe H_f associé à la $i_{\{R2\}}(G'')$ -fonction Page 49.

17 Exemple d'un graphe pour la réduction du problème X3C à (FDRDI) Page 61.

Introduction

Les graphes sont l'un des outils les plus importants en recherche opérationnelle, ils sont utilisés pour modéliser des relations liant des éléments donnés, ils permettent ainsi de représenter une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes ou d'arcs (réseaux de communications, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques). La théorie des graphes est une discipline mathématique et informatique qui étudie ces structures.

L'histoire de la théorie des graphes a débuté avec les travaux d'Euler au 18^e siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg ou la marche du cavalier sur l'échiquier (appelé aussi cavalier d'Euler). Dans le 19^e siècle, deux problèmes importants furent également proposés et partiellement résolus. Le premier est la conjecture des quatre couleurs posée en 1852 par Francis Guthrie, qui affirme que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte plane telle que les pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Le second problème est dû à Sir Hamilton qui en 1859 a inventé un jeu qu'il a nommé icosian game. Le jeu consiste à trouver un cycle Hamiltonien (qui passe par tous les sommets une seule fois) dans le graphe des arêtes du dodécaèdre (un polyèdre à 12 faces et 20 sommets). En 1931 König montra son fameux théorème de König et publia cinq ans plus tard le premier ouvrage consacré entièrement à la théorie des graphes "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen" (Théorie des graphes finis et infinis). Il est sans doute à l'origine de l'utilisation du terme "graphe".

A partir de 1946, la théorie des graphes a connu un développement intense sous l'impulsion de chercheurs motivés par la résolution de problèmes concrets. On peut notamment citer Ford et Fulkerson avec leur algorithme pour le problème du flot maximum publié en 1956, Roy avec un algorithme pour déterminer les distances des

plus courts chemins entre toutes les paires de sommets dans un graphe orienté et pondéré publié en 1959 et Claude Berge avec son ouvrage "Théorie des graphes et ses applications" publié en 1958.

L'un des problèmes les plus fertiles de la théorie des graphes est celui de la domination dans les graphes. Un ensemble dominant D dans un graphe est un sous-ensemble de sommets tel que chaque sommet du graphe appartient à D ou est adjacent à au moins un sommet de D . Le nombre de domination est le cardinal minimum d'un dominant dans G . On retrouve les premières traces de l'étude de la domination dans les travaux de Jaenisch, en 1862 qui se demandait alors quel est le nombre minimum de reines pour couvrir entièrement un échiquier de $n \times n$ cases. De là, il posa alors trois types de problèmes :

- Recouvrement : Quel est le nombre minimum nécessaire de pièces d'échec d'un type donné, de sorte que chaque case soit occupée en au plus un coup dans un échiquier à $n \times n$ cases.
- Indépendance : Quel est le nombre maximum de pièces d'échec d'un type donné, qu'on peut placer dans un échiquier à $n \times n$ cases sans que celles-ci ne s'attaquent l'une l'autre.
- Recouvrement indépendant : Quel est le nombre minimum de pièces d'échec d'un type donné, de sorte que chaque case soit occupée en au plus un coup dans un échiquier à $n \times n$ cases sans que celles-ci ne s'attaquent l'une l'autre.

On retrouve la première formulation du problème de domination dans le livre "Théorie des graphes et ses applications" paru en 1958. Claude Berge introduisit, entre autre, le nombre de domination d'un graphe qu'il appela "Coefficient de stabilité externe". En 1962 Oystein Ore utilise pour la première fois le terme "domination" dans son livre "Theory of graphs", et c'est qu'en 1977 que Cockayne et Hedetniemi utilisent pour la première fois la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination

d'un graphe G .

Depuis l'introduction du concept de la domination, plusieurs types de domination sont définis sur la base de la définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, comme la domination double, la domination totale etc. En 1998, un important effort de synthèse a été fait par Haynes, Hedetniemi et Slater dans leurs livres "fundamentals of domination in graphs" [38] qui comporte plus de 1200 références et dans "Domination in graphs : advanced topics" [37] paru la même année.

En 2004, Cockayne et al. [26] ont introduit une nouvelle variante de la domination, à savoir, la domination Romaine, qui ne ressemblait à rien à ce qui avait déjà été étudié sur les fonctions de domination. Depuis, plusieurs variantes ont vu le jour, on peut citer la domination Romaine faible [40], la domination 2-rainbow [14], la $\{2\}$ -domination Romaine [22], la domination romaine double [9], etc. Dans cette thèse nous étudierons quelques-unes de ces fonctions.

On trouve dans le premier chapitre les principales notions et définitions de la théorie des graphes utilisées dans cette thèse. Nous donnerons aussi dans ce chapitre un aperçu sur la domination dans les graphes.

Dans le chapitre 2, nous présentons une synthèse sur six fonctions de domination, toutes introduites entre 2003 et 2016. Nous définirons les six fonctions en donnant le contexte de leur introduction et les résultats principaux obtenus.

Dans le chapitre 3, nous introduirons la fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante où nous présenterons les résultats obtenus après investigation sur le paramètre correspondant, à savoir $i_{\{R2\}}(G)$. Nous montrerons que le problème de décision associé à la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante est NP-Complet même restreint aux graphes bipartis. Par ailleurs, nous verrons aussi que pour tout graphe G d'ordre n , $0 \leq i_{r2}(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/5$ et $0 \leq i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/4$. De plus,

nous prouverons que l'égalité $i_{r_2}(G) = i_{\{R_2\}}(G)$ est vérifiée pour les arbres.

Dans le chapitre 4, nous introduirons la domination Romaine double indépendante, où nous montrerons que le problème de décision associé à la domination Romaine double indépendante est NP-complet. Aussi, nous montrerons que pour tout graphe G , $2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$. De plus si G est un arbre alors $2i(G) + 1 \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$, enfin, nous caractériserons les arbres atteignant chaque borne.

Nous terminerons par une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé ainsi que sur les perspectives futures dans le domaine.

Chapitre I

CONCEPTS DE BASE

1.1 *Notions de base*

Nous donnons dans cette partie les terminologies et définitions usuelles utilisées le long de cette thèse. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux livres de Berge [11] et celui de Haynes, Hedetniemi et Slater [37] [36].

Un graphe : *Un graphe* $G = (V(G), E(G))$ (ou $G = (V, E)$ s'il n'y a pas de confusion) est défini par deux ensembles, un ensemble V d'éléments appelés *sommets* et un ensemble E de paires de sommets u et v appelées *arêtes*. On note par uv (ou vu) une arête d'extrémités u et v . Dans ce cas, les sommets u et v sont adjacents. Un graphe G est dit *simple* s'il est sans *boucle* (i.e. pour tout sommet $v \in V$, $vv \notin E$) et sans *arête multiple* (i.e. pour toute paire de sommets $u, v \in V$, il existe au plus une arête reliant u à v). Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples.

Le voisinage ouvert (ou voisinage) d'un sommet u dans G , noté $N_G(u)$, est l'ensemble des sommets adjacents à u , c'est-à-dire, $N_G(u) = \{v \in V : uv \in E\}$. *Le voisinage fermé* de u dans G , noté $N_G[u]$ est l'ensemble $\{u\} \cup N_G(u)$. S'il n'y a pas de confusion, on écrira $N(u)$ et $N[u]$ au lieu de $N_G(u)$ et $N_G[u]$, respectivement. *Le degré* d'un sommet u , noté $\deg_G(u)$, (ou $\deg(u)$ s'il n'y a pas de confusion), est le nombre de voisins de u dans G (i.e. $\deg_G(u) = |N(u)|$). Les nombres $\delta(G) = \min_{u \in V(G)} \{\deg_G(u)\}$ et $\Delta(G) = \max_{u \in V(G)} \{\deg_G(u)\}$ désignent le *degré minimum* et *maximum* dans G , respectivement. S'il n'y a pas de confusion, on écrira Δ et δ au lieu de $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement. Un sommet de degré 0 est dit *isolé* et un sommet de degré 1 est dit *pendant (ou feuille)*.

Si $S \subseteq V$, alors on note par $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$, le voisinage ouvert de S et $N[S] = S \cup N(S)$ le voisinage fermé de S . Le *voisinage privé* d'un sommet $u \in S$ par rapport à S , noté $pn_G(u, S)$ (ou $pn(u, S)$ s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble des sommets dans $N(S)$ ayant uniquement u pour voisin dans S , i.e. $pn(u, S) = N(S) - N(S \setminus \{u\})$. Si $v \in pn(u, S)$, alors on dit que v est *un voisin privé* de u par rapport à S .

Sous-graphe induit et graphe partiel : Soient les graphes $H = (V(H), E(H))$ et $G = (V(G), E(G))$. Le graphe H est *un sous-graphe induit* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et pour tout $u, v \in V(H)$, si $uv \in E(G)$, alors $uv \in E(H)$. Dans ce cas, le graphe H est noté $G[V(H)]$. On notera par $G - v$ le sous-graphe $V(G) \setminus \{v\}$. Le graphe H est *un graphe partiel* de G , si et seulement si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Chaînes, cycles et connexité : Une *chaîne* est une liste ordonnée $\lambda = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ de sommets de V tels que chaque sommet u_i de la liste est adjacent à u_{i+1} . On dira que le sommet u_i est *relié* au sommet u_j par la chaîne P_k pour tout $i, j \in \{0, \dots, k\}$. Une chaîne $P_k = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ est dite *élémentaire*, si tous ses sommets sont distincts. L'entier k représente *la longueur* de P_k . Un *cycle* C_k est une chaîne élémentaire de longueur $k - 1$, dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée se confondent. L'entier k représente *la longueur du cycle* C_k .

Un graphe G est dit *connexe* si, et seulement si pour toute paire de sommet u et v de G , il existe dans G une chaîne reliant u à v . Un graphe non connexe est constitué de l'union disjointe de graphes connexes appelés composantes connexes de G .

Distance et excentricité : La *distance* entre deux sommets u et v dans G , noté $d(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne reliant u à v . L'*excentricité* d'un sommet $u \in V$ est $ecc(u) = \max_{v \in V} \{d(u, v)\}$. Le *diamètre* de G est $diam(G) =$

$\max_{u \in V} \{ecc(u)\}$ et le rayon de G est $rad(G) = \min_{u \in V} \{ecc(u)\}$. Une chaîne P dans G de longueur $diam(G)$ est dite *diamétrale*. Le centre de G est $Ce(G) = \{u \in V(G) : ecc(u) = rad(G)\}$. La maille $g(G)$ d'un graphe G est la longueur du plus court cycle induit dans G .

Complémentarité : Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est le graphe $\bar{G} = (V(\bar{G}), E(\bar{G}))$ avec $V(\bar{G}) = V(G)$ et $uv \in E(\bar{G})$ si et seulement si $uv \notin E(G)$ pour $u \neq v$.

Subdivision : Si $e = uv$ est une arête de G , alors on appelle *subdivision de e* , l'opération qui consiste à ajouter dans G un sommet z et remplacer l'arête e par les arêtes uz et vz . On appelle *graphe subdivisé* de G , noté $Su(G)$, le graphe obtenu en subdivisant toutes les arêtes de G .

Produit Cartésien : Soient G et H deux graphes simples. Le produit Cartésien de G et H , noté $G \square H$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G) \times V(H)$ et deux sommets (g_1, h_1) et (g_2, h_2) sont adjacents dans $G \square H$ si, et seulement si $g_1 = g_2$ et $h_1 h_2 \in E(H)$, ou $h_1 = h_2$ et $g_1 g_2 \in E(G)$.

1.2 Quelques classes de graphes

Nous citons dans cette partie quelques classes de graphes utilisées dans le reste de la thèse.

Arbres : Un arbre est un graphe connexe et sans cycle. Le sommet v adjacent à une feuille u est appelé *un sommet support*, on dit que v est un sommet *support fort* s'il est adjacent à au moins deux feuilles. L'ensemble des sommets supports d'un arbre T est noté $S(T)$. Une forêt F est un graphe dont chaque composante connexe est un

arbre. Une étoile, notée $K_{1,n-1}$, est un arbre d'ordre $n \geq 2$ qui possède $n - 1$ feuilles. Une double étoile, notée $S_{p,q}$, est un arbre d'ordre $n = p + q + 2$, possédant exactement deux sommets supports, l'un est adjacent à p feuilles et l'autre à q feuilles.

Un arbre T enraciné en un sommet r est un arbre dans lequel on a choisi un sommet r qu'on appelle *racine*, et une orientation de ses arêtes, c'est-à-dire, orienter toutes les arêtes de sorte qu'il existe un chemin de r à tous les autres sommets. On obtient alors un arbre enraciné et orienté, noté $R(T, r)$. Pour un sommet u d'un arbre T enraciné en r , les sommets appartenant à $N_{R(T,r)}^+(u)$ sont appelés *filles* de u , le sommet appartenant à $N_{R(T,r)}^-(u)$ est appelé *parent*. Pour un graphe simple et connexe G , on appelle un arbre couvrant de G , un graphe partiel de G qui est un arbre.

Graphe complet : Un graphe complet d'ordre n , noté K_n , est un graphe simple dont tous les sommets sont de degré $n - 1$.

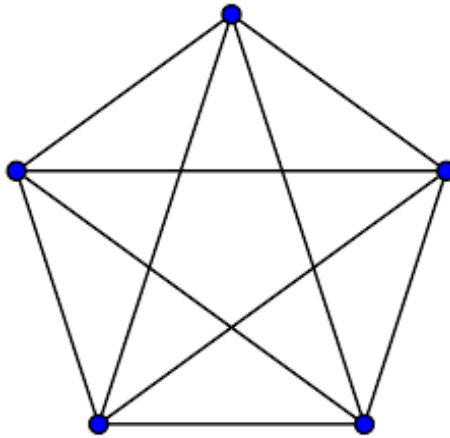


Figure 1. Le graphe complet K_5 .

Graphes bipartis : Un graphe G est dit *biparti* si, et seulement si, il existe une partition en deux sous-ensembles X et Y de ses sommets tels que chaque arête de G a une extrémité dans X et une autre dans Y . Un graphe biparti G est dit *complet* si, et seulement si tout sommet de X est voisin de tous les sommets de Y , un tel graphe

est noté $K_{|X|,|Y|}$.

Graphe régulier : Un graphe G est *régulier* si tous ses sommets sont de même degré. Si le degré des sommets d'un graphe régulier G est k , alors G est dit k -régulier. Un *graphe cubique* est un graphe 3-régulier.

Cactus et graphes 2-connexes : Un graphe G est *un cactus* si toute arête de G appartient à au plus un seul cycle. Un graphe G est un *graphe 2-connexe* si pour tout sommet u de V , $G - u$ est connexe.

Le graphe de Petersen généralisé : Un graphe G est *un graphe de Petersen généralisé* noté $GP(n, k)$ pour $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n/2$ avec

$$V(GP(n, k)) = \{x_i, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i, 0 \leq i \leq n-1\}.$$
$$E(GP(n, k)) = \{x_i x_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+k}, 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i, 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Les indices des sommets étant pris modulo n .

1.3 Domination dans les graphes

Dans son livre "Théorie des graphes et ses applications" paru en 1958, Claude Berge introduit le nombre de domination d'un graphe qu'il a appelé "Coefficient de stabilité externe" et c'est en 1968 qu'Oystein Ore utilisa pour la première fois le terme domination dans son livre "Theory of graph". En 1977, Cockayne et Hedetniemi utilisent pour la première fois la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination d'un graphe G .

Ensemble dominant : Soient D et S deux sous-ensembles de $V(G)$. On dit que

D domine S (ou S est dominé par D) dans G , et on note $D \succ S$, si tout sommet de S a au moins un voisin dans D . L'ensemble D est un *dominant* du graphe G si $D \succ V(G) - D$. Un dominant D est *minimal* si pour tout $u \in D$, $D \setminus \{u\}$ n'est plus un dominant de G . Le *nombre de domination* d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, est le cardinal du plus petit dominant de G . Un sous-ensemble D de $V(G)$ est un $\gamma(G)$ -ensemble si $D \succ V(G) - D$ et $|D| = \gamma(G)$.

Ensemble dominant indépendant : Un sous-ensemble S de V est dit *indépendant* (ou *stable*) si $G[S]$ est sans arêtes. Un ensemble indépendant S est dit *maximal* dans G si pour tout $u \notin S$, $S \cup \{u\}$ n'est pas indépendant. Le *nombre de domination indépendant* de G , noté $i(G)$, est le cardinal du plus petit ensemble indépendant maximal de G . Un sous-ensemble S de $V(G)$ est un $i(G)$ -ensemble si S est un ensemble indépendant maximal et $|S| = i(G)$.

L'intérêt pour la domination est né avec l'enthousiasme pour les échecs durant la seconde moitié du 19^{ème} siècle, avec les premières compétitions internationales et l'apparition des premiers théoriciens. Le joueur Max Bezzel proposa son fameux problème des huit reines dans le "Scachzeitung", premier magazine allemand consacré aux échecs. Le problème consiste à placer huit reines sur un échiquier de 8×8 cases de telle sorte qu'aucune reine n'attaque les autres. Franz Nauck publia la première solution des huit reines en 1850 dans Leipzig Illustriert Zeitung, proposant en tout douze solutions (en excluant les rotations). Il proposa le problème à n reines dans un échiquier à $n \times n$ cases, qu'il appela problème des n -reines. Plusieurs mathématiciens ont étudié ce problème, dont Ahrens qui montra qu'il avait une solution pour tout $n \geq 4$. Gunther proposa une méthode pour trouver des solutions, méthode qui fut amélioré par Glaisher en 1874 dans "Philosophical magazine" où il montra aussi que les douze configurations trouvées par Franz Nauck, pour le problème des huit

reines, étaient les seules possibles. En 1862, le joueur russe C.F Jaenisch dans son livre "Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs", proposa le problème suivant : déterminer le nombre minimum de reines à placer sur un échiquier $n \times n$ de telle sorte que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul coup par une des reines dans un échiquier à $n \times n$ cases. On peut retrouver une version similaire de ce problème, où les reines ne s'attaquent pas entre elles.

Pour une pièce d'échiquier X , on peut considérer le graphe $G = (V, E)$ d'ordre $n \times n$, avec V l'ensemble des cases de l'échiquier et pour $u, v \in V$, $uv \in E$ si et seulement si un déplacement de la case u vers la case v est possible avec la pièce X . La résolution des deux problèmes cités précédemment revient à trouver $\gamma(G)$ et $i(G)$.

On retrouve dans la littérature plusieurs autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes, dont :

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$.
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V(G) - D$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$.
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.
- Soit $f : V \longrightarrow \{0, 1\}$ une fonction. On dit que f est un fonction dominante si pour tout sommet $v \in V$, $f(N[v]) = \sum_{x \in N[v]} f(x) \geq 1$. L'ensemble $D = \{u \in V : f(u) = 1\}$ est un ensemble dominant de G . Le poids de f est $w(f) = \sum_{u \in V} f(u)$.

Intéressons-nous à la dernière définition. Plusieurs chercheurs avaient proposé d'étudier le cas où l'ensemble d'arrivée de la fonction f diffère de $\{0, 1\}$. C'est dans [8], que Bange et al. avaient introduit une généralisation de la P -domination pour un sous-ensemble P de l'ensemble des réels, faisant de la domination classique un cas

particulier. On dit alors que $f : V \longrightarrow P$ est une fonction P -dominante si pour tout sommet $v \in V$, $f(N[v]) \geq 1$. Les chercheurs ont étudié trois fonctions dominantes, quand $\mathcal{P} = [0, 1]$ on parle de domination fractionnelle, quand $\mathcal{P} = \{-1, 0, 1\}$ on parle de domination signée et quand $\mathcal{P} = \{-1, 1\}$ on parle de domination minus.

En 2004, Cockayne et al. [26] avaient introduit une nouvelle fonction de domination, appelée fonction de domination Romaine. Les auteurs ont d'ailleurs fait remarquer que cette nouvelle fonction ne ressemblait à rien à ce qui avait déjà été étudié. Depuis, plusieurs variantes ont vu le jour, on peut citer la fonction de domination Romaine faible [40], la fonction de domination 2-rainbow [14], la fonction de $\{2\}$ -domination Romaine [22], la fonction de domination romaine double [9], etc.

Dans cette thèse nous étudierons quelques-unes de ces fonctions.

Chapitre II

APERÇU SUR LES FONCTIONS DE DOMINATION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à six fonctions de domination, à savoir, la fonction de domination Romaine et sa version indépendante, la fonction de domination 2-rainbow et sa version indépendante, la fonction de $\{2\}$ -domination Romaine (domination italienne) et la fonction de domination Romaine double. Nous commencerons par donner la définition de chaque fonction et le contexte de son introduction. Nous présenterons par la suite les différents résultats existants dans la littérature, complexité, bornes simples et faciles à vérifier, relations existantes entre les paramètres associés à ces fonctions. Nous aborderons aussi les résultats de type Nordhaus–Gaddum pour quelques invariants associés à ces fonctions.

2.1 *La domination Romaine*

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une fonction f définie de V dans $\{0, 1, 2\}$ est dite une *fonction de domination Romaine* (FDR) si pour tout $u \in V$ tel que $f(u) = 0$ il existe $v \in N(u)$ avec $f(v) = 2$. Le poids d'une FDR f est $w(f) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$ et le nombre de domination Romaine $\gamma_R(G)$, est le poids minimum d'une FDR de G . Une FDR f peut être représentée par une partition de V comme suit : $f = (V_0, V_1, V_2)$ (ou (V_0^f, V_1^f, V_2^f) s'il y a un risque de confusion) où $V_i = \{u \in V : f(u) = i\}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. On dira que f est une $\gamma_R(G)$ -fonction si f est une FDR de G et $w(f) = \gamma_R(G)$.

La domination Romaine a été introduite en 2004 par Cockayne et al. dans [26]. Inspirés par un article de Stewart “Defend the Roman Empire!” [56] et un autre

de Revelle et Rosing "Defends Imperim Romanum : A classical problem in military strategy" [53], ces derniers ont présenté le problème suivant :

A l'apogée de l'empire Romain, Rome dominait l'Europe, le nord de l'Afrique et une partie du Proche Orient. A cette époque, Rome pouvait déployer cinquante légions qui étaient stationnées dans les différentes régions sous contrôle de l'empire. Cette abondance en soldats permettait de sécuriser toutes les régions de Rome en y stationnant le nombre nécessaire de légions. Au 4^{ème} siècle après J.C, l'empire Romain commençait à perdre de sa force et ne comptait plus que vingt-cinq légions et il était devenu impossible de sécuriser efficacement toutes les régions. L'empereur Constantin 1^{er} adopta alors une nouvelle stratégie de défense en utilisant des troupes locales pour gêner et ralentir les envahisseurs et des armées pour les repousser. Rome disposait alors de quatre armées (formées des vingt-cinq légions restantes) et les régions sont connectées entre elles comme le montre la Figure 2 (figure tirée de [53]).

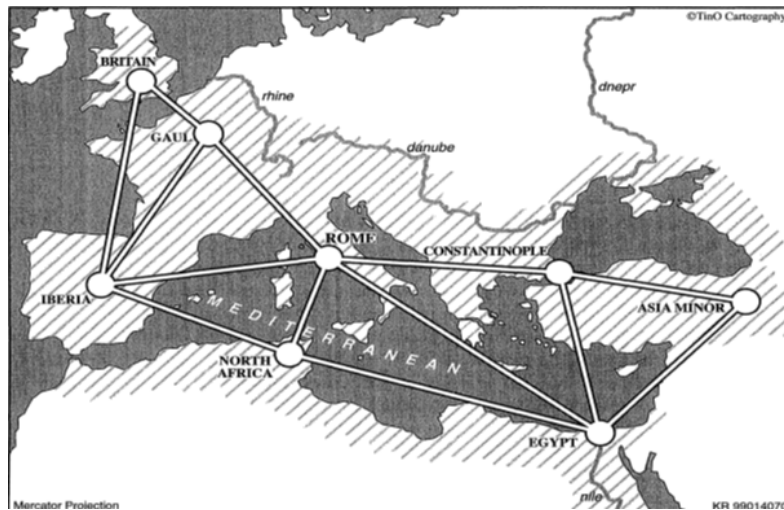


Figure 2. L'Empire Romain au 4^{ème} siècle après J.C.

Chaque sommet du graphe représente une région à défendre. Une région u est non sécurisée si aucune armée n'y est stationnée ($f(u) = 0$), une région u est sécurisée si une armée ou deux y sont stationnés ($f(u) \in \{1, 2\}$). Une région u non sécurisée peut être défendue en envoyant une armée d'une région adjacente à cette dernière. L'empereur Constantin 1^{er} décréta qu'une armée ne pouvait pas quitter sa position au

risque de rendre la région où elle est stationnée non sécurisée. Donc pour qu'on puisse venir au secours d'une région u non sécurisée, une région voisine v devait abriter deux armées (si $f(u) = 0$, alors il existe $v \in N(u)$ tel que $f(v) = 2$).

Depuis son introduction, plus de 160 papiers ont été publiés sur la domination Romaine et ses variantes.

Dans [46], Lieu et Chang ont montré que le problème de décision associé au problème de la domination Romaine est NP-Complet pour les graphes bipartis et les graphes triangulés. Les mêmes auteurs ont donné aussi un algorithme polynomial pour le calcul du nombre de domination Romaine dans les graphes fortement triangulés. D'autres algorithmes polynomiaux sont établis pour d'autres classes de graphes dans [45].

2.1.1 Propriétés

Dans le papier introductif de la domination Romaine [26], les auteurs ont établi quelques propriétés sur les ensembles V_0, V_1 et V_2 pour une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ que nous résumons par la proposition suivante :

Proposition 1 (Cockayne et al. [26])

I) Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(G)$ -fonction. Alors

(i) $G[V_1]$ a un degré maximum 1,

(ii) un sommet de V_1 n'est adjacent à aucun sommet de V_2 ,

(iii) chaque sommet de V_0 a au plus deux voisins dans V_1 ,

(iv) V_2 est un $\gamma(G)$ -ensemble de $G[V_0 \cup V_2]$,

II) Si de plus G est sans sommet isolé et f est choisie telle que $|V_1|$ est minimum.

Alors :

(i) V_1 est indépendant et V_0 domine V_1 ,

(ii) chaque sommet de V_0 est adjacent à au plus un sommet de V_1 ,

(iii) $|V_0| \geq 3n/7$ et cette borne est atteinte même pour les arbres.

Favaron et al. [29] ont borné les cardinaux des ensembles V_0, V_1 et V_2 pour une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ en montrant que $1 \leq |V_2| \leq \frac{2n}{5}$, $0 \leq |V_1| \leq \frac{4n}{5} - 2$ et $\frac{n}{5} + 1 \leq |V_0| \leq n - 1$. Par ailleurs, ils ont caractérisé les graphes tels que ces bornes sont atteintes.

Des valeurs exactes du nombre de domination Romaine pour les chaînes, les cycles, les graphes multiparties complets et les grilles ont été établies dans [26].

Proposition 2 (Cockayne et al. [26]) *Pour tout $n \geq 1$*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil. \\
 (ii) \quad & \gamma_R(K_{m_1, \dots, m_k} (m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k)) = \begin{cases} 2 & \text{si } m_1 \equiv 1 \\ 3 & \text{si } m_1 = 2 \\ 4 & \text{si } m_1 = 4 \end{cases} \\
 (iii) \quad & \gamma_R(G_{2,n}) = n + 1.
 \end{aligned}$$

2.1.2 Bornes

Vu la NP-complétude du problème de décision associé à la domination Romaine, nombre de travaux ont été motivés par la recherche de bornes supérieures et inférieures qui sont simples à vérifier, c'est-à-dire, des bornes exprimées en fonction de l'ordre et/ou de la taille du graphe, de son degré maximum ou minimum, etc.

Proposition 3 (Cockayne et al. [26]) *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum Δ , $\gamma_R(G) \geq \frac{2n}{\Delta+1}$.*

Chambers et al. [15] ont montré que pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum Δ , $\gamma_R(G) \leq n + 1 - \Delta$. Dans un récent papier, Bouchou et al. [12] ont donné une caractérisation de quelques classes de graphes atteignant cette borne supérieure, incluant entre autres, les arbres, les graphes réguliers et semi-réguliers (un graphe G est semi-régulier si $\Delta(G) - \delta(G) = 1$). Par ailleurs, les auteurs [12] ont montré que le problème de décision selon un graphe G vérifie $\gamma_R(G) = n + 1 - \Delta$ est Co-NP-complet.

Une autre technique consiste à borner supérieurement le nombre de domination Romaine pour les arbres, et qui sera valable pour tout graphe connexe (vu qu'il possède un arbre comme graphe partiel). Ainsi, en 2009 Chambers et al. [15] ont démontré que pour tout arbre T d'ordre n , $\gamma_R(T) \leq 4n/5$, avec l'égalité atteinte si, et seulement si T est obtenu par k copies de P_5 distinctes en ajoutant $(k - 1)$ arêtes reliant les k centres des P_5 .

Théorème 4 (Chambers et al. [15]) *Si G est un graphe connexe d'ordre n , alors $\gamma_R(G) \leq 4n/5$. L'égalité est atteinte si, et seulement si, G est un C_5 ou G est obtenu à partir de $n/5$ copies de P_5 en ajoutant des arêtes entre les centres des P_5 de façon qu'il induisent un sous-graphe connexe.*

En se restreignant aux graphes de degré minimum δ au moins deux, Chambers et al. [15] ont amélioré la borne du Théorème 4 en montrant que si G est un graphe connexe d'ordre n , avec $\delta \geq 2$ et G différent des graphes de la Figure 3, alors $\gamma_R(G) \leq 8n/11$.

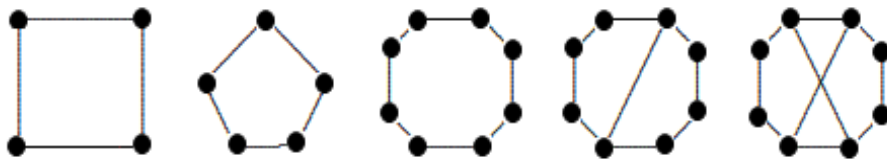


Figure 3. Ensemble des graphes interdits.

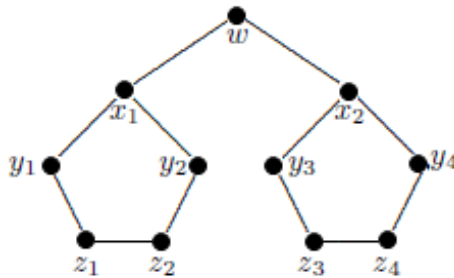


Figure 4. Le graphe F .

Par ailleurs, Chambers et al. [15] ont donné une caractérisation des graphes extrémaux pour la borne précédente.

Théorème 5 (Chambers et al. [15]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 2$. Si $n \geq 9$, alors $\gamma_R(G) = 8n/11$ si, et seulement si :*

(1) $n = 11$ et G est isomorphe au graphe F illustré dans la figure 4, avec un sous-ensemble d'arêtes de l'un des ensembles $\{y_1y_3, y_1y_4, y_2y_3, y_2y_4\}$, $\{wz_1, y_1y_3, y_1y_4\}$ ou $\{wz_1, wz_3, y_1y_3\}$, ou

(2) $n > 11$ et G est constitué de copies distinctes de F , $F + wz_1$ et $F + wz_1 + wz_3$ en ajoutant des arêtes joignant les sommets w .

En 2012, Liu et Chang [47] ont majoré le nombre de domination Romaine pour un graphe G d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 3$ en montrant que $\gamma_R(G) \leq 2n/3$. D'autre part, les auteurs ont donné une classe de graphes cubiques où cette borne est atteinte (voir Figure 5).

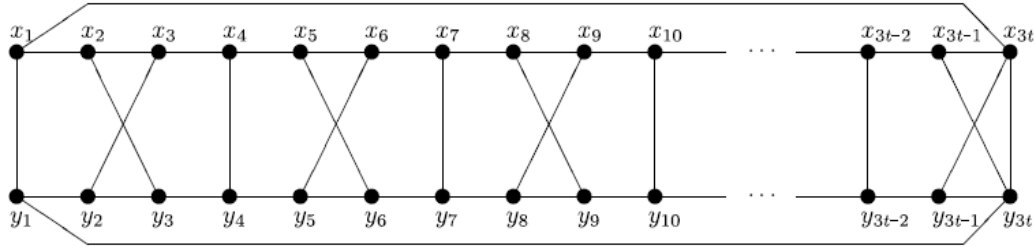


Figure 5. Graphe cubique G tel que $\gamma_R(G) = 2n/3$.

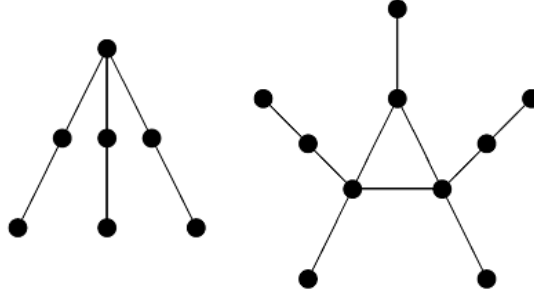


Figure 6. Super griffe et super net.

Par ailleurs, Chang et Liu ont montré dans [47] que si G est un graphe connexe sans super griffe et super net, alors $\gamma_R(G) \leq \lceil 2n/3 \rceil$.

Dans la première version de l'article de Chambers et al. [15], les auteurs avaient conjecturé que $\gamma_R(G) \leq \lceil 2n/3 \rceil$ pour les graphes 2-connexes. La conjecture a été faussée par Liu et Chang dans [16] en montrant de plus que $\gamma_R(G) \leq \max \{ \lceil 2n/3 \rceil, 23n/34 \}$ pour tout graphe 2-connexe. Les auteurs ont aussi caractérisé les graphes 2-connexes tels que $\gamma_R(G) = 23n/34$, quand $23n/34 > \lceil 2n/3 \rceil$.

En utilisant la méthode probabiliste (voir Alon et Spencer [4]), Cockayne et al. [26] ont établi la borne suivante :

Proposition 6 (Cockayne et al. [26]) *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré minimum δ , on a*

$$\gamma_R(G) \leq \frac{2 + (\ln((1 + \delta)/2))}{1 + \delta} n.$$

Les deux résultats suivants dûs à Mobaraky et Sheikholeslami résument quelques bornes établies sur le nombre de domination Romaine d'un graphe G en fonction du diamètre et de la maille de G .

Théorème 7 (Mobaraky et Sheikholeslami [50]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n et de degré minimum δ , alors :*

- (i) $\left\lceil \frac{\text{diam}(G)+2}{2} \right\rceil \leq \gamma_R(G) \leq n - \left\lfloor \frac{1+\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor$
- (ii) si $\delta \geq 3$, alors $\gamma_R(G) \leq n - \left\lfloor \frac{1+\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor - (\delta - 2) \left\lfloor \frac{2+\text{diam}(G)}{3} \right\rfloor$.
- (iii) si $\text{diam}(G) \geq 3$, alors $\gamma_R(\overline{G}) \leq 4$.

Théorème 8 (Mobaraky et Sheikholeslami [50]) Soit G un graphe connexe d'ordre n de degré minimum δ et de degré maximum Δ , alors :

- (i) si $g(G) \geq 3$, alors $\gamma_R(G) \geq \left\lceil \frac{2g(G)}{3} \right\rceil$.
- (ii) si $g(G) = 4$, alors $\gamma_R(G) \leq 3$. L'égalité est atteinte si, et seulement si G est un graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$ tel que $|X| = 2$, avec l'un des sommets de X est adjacent à tout sommet de Y et l'autre sommet est de degré au moins deux.
- (iii) si $\delta \geq 2$ et $g(G) \geq 5$, alors $\gamma_R(G) \leq n - \left\lfloor \frac{g(G)}{3} \right\rfloor$.
- (iv) si $g(G) \geq 5$, alors $\gamma_R(G) \geq 2\delta$.
- (v) si $\delta \geq 2$ et $g(G) \geq 6$, alors $\gamma_R(G) \geq 4(\delta - 1)$.
- (vi) si $\delta \geq 2$ et $g(G) \geq 7$, alors $\gamma_R(G) \geq 2\Delta$.

2.1.3 Relations avec $\gamma(G)$

Il a été montré dans le papier introductif de la domination Romaine que pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$, où $\gamma(G) = \gamma_R(G)$ si, et seulement si G est isomorphe à $\overline{K_n}$. Notons que Chellali et al [21] ont amélioré le résultat précédent en montrant que pour tout graphe connexe G , $\gamma_R(G) \geq \frac{\Delta+1}{\Delta}\gamma(G)$ et en caractérisant les graphes atteignant cette borne.

Pour les graphes G tels que $\gamma_R(G) \in \{\gamma(G) + 1, \gamma(G) + 2\}$, Cockayne et al. [26] ont établi les résultats suivants

Proposition 9 (Cockayne et al. [26]) Soit G un graphe connexe d'ordre n . Alors :

- (i) $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$ si, et seulement s'il existe un sommet $v \in V$ de degré $n - \gamma(G)$,
- (ii) $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 2$ si, et seulement si :
 - (a) G n'a pas de sommet de degré $n - \gamma(G)$.

(b) ou bien G a un sommet de degré $n - \gamma(G) - 1$, ou bien G a deux sommets v et w tels que $|N[v] \cup N[w]| = n - \gamma(G) + 2$.

Pour le cas des arbres, les auteurs [26] ont établi ce qui suit :

Définition 10 (Cockayne et al. [26]) *Pour un entier positif t , une araignée blessée est une étoile $K_{1,t}$ ayant au plus $t - 1$ arêtes subdivisées. Pour $t \geq 2$, une araignée saine est une étoile $K_{1,t}$ ayant toutes ses arêtes subdivisées. Pour une araignée blessée, un sommet de degré t sera appelé la tête et les sommets à distance deux de la tête sont les pattes. Si $T = P_2$, alors les deux sommets sont considérés comme des têtes et si $T = P_4$, les deux feuilles sont considérées des pattes et les deux sommets supports des têtes.*

Proposition 11 (Cockayne et al. [26]) *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors*

- (i) $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 1$ si, et seulement si T est une araignée blessée.
- (ii) $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 2$ si, et seulement si T est une araignée saine ou bien T est une paire d'araignées blessées T_1 et T_2 connectée par une seule arête joignant $v \in V(T_1)$ et $w \in V(T_2)$ sous les conditions suivantes : (1) $T \neq P_4$. (2) v et w ne sont pas tous les deux des sommets pattes.

Concernant la borne supérieure $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$, les graphes G atteignant cette borne ont été appelés les graphes Romains.

Proposition 12 (Cockayne et al. [26]) *Un graphe G est Romain si, et seulement si G admet une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ telle que $|V_1| = 0$.*

Cockayne et al. [26] ont identifié plusieurs graphes Romains, dont P_{3k} , C_{3k} , P_{3k+2} , C_{3k+2} ainsi que les graphes G dont le degré maximum $\Delta = n - 1$. Dans [42], Henning a donné une caractérisation constructive des arbres Romains comme suit :

Définition 13 (Henning [42]) Soit \mathcal{F}_1^* la famille des arbres enracinés tel que toute feuille différente de la racine est à distance 2 de la racine et tous les fils de la racine, sauf éventuellement un, sont des sommets supports forts. Soit \mathcal{F}_2^* la famille des arbres enracinés tel que toute feuille est à distance 2 de la racine et tous les fils de la racine, sauf deux, sont des sommets supports forts.

Henning a défini aussi l'ensemble $V_S(T) = \{v \in V(T)/v \in S(T) \text{ et } \gamma_R(T - v) \geq \gamma_R(T)\}$ et la famille \mathcal{T}^1 des arbres T , obtenus par une séquence T_1, \dots, T_j ($j \geq 1$) des arbres tels que $T_1 = K_{1,r}$ ($r \geq 1$), et si $j \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement de T_i par l'une des trois opérations suivantes :

- **Opération O_1** : supposons que $w \in V_S(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant une étoile $K_{1,s}$ ($s \geq 2$) de centre v et en joignant v à w .

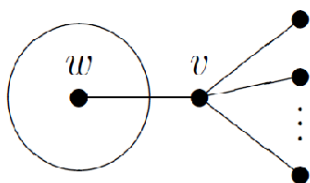


Figure 7. Opération O_1 .

- **Opération O_2** : supposons que $x \in V(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F}_1^* et l'arête xw , où w est une feuille de T si $T = P_3$ ou bien w est le centre de T si $T \neq P_3$.

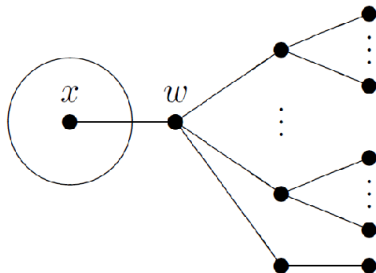


Figure 8. Opération O_2 .

- **Opération O_3** : supposons que $x \in V_S(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en

ajoutant un arbre de la famille \mathcal{F}_2^* et l'arête xw , où w est le centre de T .

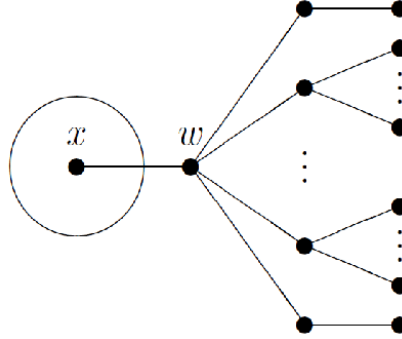


Figure 9. Opération \mathcal{O}_3 .

Théorème 14 (Henning [42]) *Un arbre T est Romain si, et seulement si $T \in \mathcal{T}^1$.*

Dans [39], Hedetniemi et al. ont établi une borne reliant le nombres de domination Romaine et le nombre de domination totale. Rappelons qu'un dominant D dans G est dit *dominant total* si pour tout sommet $u \in D$, il existe $v \in D$ avec $u \neq v$ tel que $uv \in E$ (i.e $N(D) = V$). Le *nombre de domination totale* de G , noté $\gamma_t(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total dans G .

Théorème 15 (Hedetniemi et al. [39]) *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\gamma_R(G) \geq \gamma_t(G)$.*

Dans le même papier, les auteurs ont posé le problème de la caractérisation des graphes G tels que $\gamma_R(G) = \gamma_t(G)$.

Il est à noter que du théorème précédent et les résultats de [26], découle la chaîne d'inégalités suivante valable pour tout graphe G sans sommets isolés.

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G) \leq 2\gamma_t(G).$$

Dans [20], Chellali et al. ont étudié les graphes extrémaux G pour la borne $\gamma_t(G) \leq \gamma_R(G)$ en montrant que ce sont précisément les graphes extrémaux pour la borne $\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$. Comme conséquence, tout graphe G vérifiant $\gamma_t(G) = \gamma_R(G)$ est un

graphe Romain. Cependant la réciproque n'est pas vraie, il suffit de considérer une double étoile où chaque sommet support a au moins trois feuilles.

Xueliang et al. avaient identifié d'autres graphes Romains dans [63]. Rappelons qu'un graphe circulant $C(n, S_c)$ est un graphe dont l'ensemble des sommets $V(C(n, S_c)) = \{v_i : 0 \leq i \leq n - 1\}$ et l'ensemble des arêtes $E(C(n, S_c)) = \{v_i v_j : 0 \leq i, j \leq n - 1, (i - j) \bmod n \in S_c\}$ avec $S_c \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, où les indices sont pris modulo n .

Théorème 16 (Xueliang et al. [63])

(a) *Le graphe circulant $C(n, \{1, 2, \dots, k\})$ est un graphe Romain pour $n \geq 7$ et $n \equiv t \pmod{5}$, $t \neq 4$.*

(b) *Le graphe de Petersen généralisé $GP(n, 1)$ est Romain pour $n \geq 3$ et $n \equiv t \pmod{4}$, $t \neq 2$.*

(c) *Le graphe de Petersen généralisé $GP(n, 3)$ est Romain pour $n = 11$ ou $n \geq 7$ et $n \equiv t \pmod{4}$, $t \neq 3$.*

(d) *Pour $n \geq 1$, $m \geq 1$, Le produit Cartésien $C_{5m} \square C_{5n}$ est un graphe Romain.*

Dans [62], Xing et al. ont donné une condition nécessaire et suffisante pour le cas général, c'est à dire, pour que $\gamma_R(G) = \gamma(G) + k$ pour tout $k \in \{2, \dots, \gamma(G)\}$.

Théorème 17 (Xing et al. [62]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n , avec $\gamma(G) \geq 2$. Si k est un entier tel que $2 \leq k \leq \gamma(G)$, alors $\gamma_R(G) = \gamma(G) + k$ si, et seulement si :*

(i) *Pour tout entier s avec $1 \leq s \leq k - 1$, G n'a pas de sous-ensemble de sommet U_t ($1 \leq t \leq s$), contenant t sommets, tel que $\left| \bigcup_{v \in U_t} N[v] \right| = n - \gamma(G) - s + 2t$.*

(ii) *Il existe un entier l avec $1 \leq l \leq k$, et G a un ensemble W_l contenant l sommets tel que $\left| \bigcup_{v \in W_l} N[v] \right| = n - \gamma(G) - k + 2l$.*

Yero et al. [64] ont étudié la domination Romaine dans les produits Cartésiens de deux graphes.

Théorème 18 (Yero et al. [64]) *Pour tous graphes G et H*

- (i) $\gamma_R(G \square H) \geq \frac{2\gamma(G)\gamma_R(H)}{3}$.
- (ii) $\gamma_R(G \square H) \geq \frac{\gamma(G)\gamma_R(H) + \gamma(G \square H)}{2}$.

Il est à rappeler que Clark et Suen [25] ont montré que pour tous graphes G et H , $\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2}\gamma(G)\gamma(H)$, en réponse à la célèbre conjecture de Vizing qui reste encore ouverte depuis 1962, et stipuant que $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ pour tous les graphes G et H . Du Théorème 18, il en découle que pour tout graphe G et pour tout graphe Romain H , $\gamma(G \square H) \geq \frac{3}{2}\gamma(G)\gamma(H)$, ce qui constitue dans ce cas une amélioration du résultat de Clark et Suen.

Il est à noter que Wu a aussi amélioré le résultat de Clark et Suen.

Théorème 19 (Wu [61]) *Pour tous les graphes G et H , $\gamma_R(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$.*

Dans [29] Favaron et al. ont donné le résultat suivant, en caractérisant aussi les graphes extrémaux.

Théorème 20 (Favaron et al. [29]) *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$,*

$$\gamma_R(G) + \frac{\gamma(G)}{2} \leq n.$$

On clôture cette partie par la conjecture suivante due à Bermudo.

Conjecture 21 (Bermudo [10]) *Si G est un graphe de degré minimum au moins 3, alors $\gamma_R(G) + \gamma(G) \leq n$.*

2.1.4 Résultats de type Nordhaus–Gaddum

Nordhaus–Gaddum ont établi en 1956 des bornes inférieures et supérieures pour la somme et le produit du nombre chromatique d'un graphe et son complémentaire. Jaeger et Payan étaient les premiers à publier en 1972 des résultats du type Nordhaus–Gaddum sur le nombre de domination. Depuis, des relations de ce type sont établis

pour les différents paramètres de graphes, en particulier, ceux liés à la domination dans les graphes.

Dans ce sens, Chambers et al. ont établi ce qui suit :

Théorème 22 (Chambers et al. [15]) *Soit G un graphe d'ordre n , alors :*

(i) $5 \leq \gamma_R(G) + \gamma_R(\overline{G}) \leq n + 3$. *La borne supérieure est atteinte si, et seulement si G ou \overline{G} est un C_5 ou un $\frac{n}{2}K_2$.*

(ii) *Si $n \geq 160$, alors $\gamma_R(G)\gamma_R(\overline{G}) \leq 16n/5$ où l'égalité est atteinte si, et seulement si G ou \overline{G} est un $\frac{n}{5}C_5$.*

Il est à mentionner que Bouchou et al. [12] ont donné une amélioration de Théorème 22-(i) par le résultat suivant :

Théorème 23 (Bouchou et al. [12]) *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 160$ telle que toute composante connexe de G ou \overline{G} est d'ordre au moins trois, alors $\gamma_R(G) + \gamma_R(\overline{G}) \leq \frac{4n}{5} + 4$.*

2.2 La domination Romaine indépendante

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une FDR $f = (V_0, V_1, V_2)$ de G est dite une *fonction de domination Romaine indépendante* (FDRI) si $V_2 \cup V_1$ est un ensemble indépendant. *Le nombre de domination Romaine indépendant $i_R(G)$, est le poids minimum d'une FDRI de G . On dira que f est une $i_R(G)$ -fonction si f est une FDRI de G et $w(f) = i_R(G)$. La domination Romaine indépendante a été définie comme une perspective future pour l'étude des fonctions de domination Romaine. Cependant elle reste très peu étudiée. On présente dans cette partie les quelques résultats importants qui existent.*

2.2.1 Bornes

Par définition, tout graphe G vérifie $\gamma_R(G) \leq i_R(G)$. Adabi et al. ont remarqué dans [2] que pour tout graphe G d'ordre n , $i_R(G) \leq n$ avec l'égalité atteinte si, et

seulement si $G \simeq mK_2 \cup \overline{K_l}$ pour m et l deux entiers naturels tels que $n = 2m + l$. Ebrahimi et al. ont proposé d'autres bornes sur le nombre de domination Romaine indépendant d'un graphe G .

Théorème 24 (Ebrahimi et al. [28]) *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum Δ ,*

$$(i) \ i_R(G) \leq n - \Delta + 1.$$

$$(ii) \ i_R(G) \leq n - \chi(G) + 2 \text{ avec l'égalité est atteinte si, et seulement si } G \simeq K_n.$$

Les mêmes auteurs [28] ont établi une borne supérieure dans les arbres.

Théorème 25 (Ebrahimi et al. [28]) *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, $i_R(T) \leq 4n/5$. L'égalité est atteinte si, et seulement si $V(T)$ peut être partitionné en k parties distinctes X_1, \dots, X_k , tel que $G[X_i] \simeq P_5$ et le sous-graphe induit par les centres des X_i est connexe.*

Ils ont ensuite borné le nombre de domination Romaine indépendant d'un graphe G en fonction de son diamètre et de sa maille.

Théorème 26 (Ebrahimi et al. [28]) *Pour tout graphe G d'ordre n ,*

$$(i) \ i_R(G) \leq n - \left\lceil \frac{\text{diam}(G)-1}{3} \right\rceil.$$

$$(ii) \ \left\lfloor \frac{2(g(G)+1)}{3} \right\rfloor \leq i_R(G) \leq n - \left\lceil \frac{g(G)-2}{3} \right\rceil.$$

2.2.2 Relations avec $i(G)$

Il est montré dans [28] que pour tout graphe G , $i(G) \leq i_R(G) \leq 2i(G)$. Notons que Chellali et al [21] ont amélioré le résultat précédent en montrant que pour tout graphe connexe G , $i_R(G) \geq i(G) + \frac{\gamma(G)}{\Delta}$ et en caractérisant les graphes atteignant cette borne.

Les auteurs dans [28] ont posé le problème de la caractérisation des graphes G tels que $i_R(G) = 2i(G)$. Dans [18], Chellali et Jafari Rad ont étudié ce problème pour la classe des arbres.

Définition 27 (Chellali et al. [18]) Soit \mathcal{F}^2 la famille des arbres enracinés en un sommet de degré au moins deux, tel que chaque feuille est à distance deux de la racine, et le nombre de feuilles est au moins égale au nombre de sommets supports moins un. Soit \mathcal{F}_0^2 la famille des arbres enracinés en un sommet de degré au moins trois, tel que chaque feuille est à distance deux de la racine, et le nombre de feuilles est égale au nombre de sommets supports moins deux. Soit \mathcal{F}_1^2 la famille des arbres enracinés en un sommet de degré au moins deux, tel que chaque feuille est à distance deux de la racine, et le nombre de feuilles est au plus égale au nombre de sommets supports moins deux.

Un sommet w de G est dit Romain indépendant fort si $f(w) = 2$ pour toute $i_R(G)$ -fonction f .

Chellali et Jafari Rad ont ensuite défini la famille \mathcal{T}^2 des arbres T qui peuvent être obtenus de la séquence T_1, T_2, \dots, T_j tels que T_1 est une étoile $K_{1,r}$ pour $r \geq 1$ et si $j \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement de T_i par l'une des opérations suivantes :

- **Opération O_1** : Supposons que $w \in V(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $K_{1,s}$ pour $s \geq 2$ de centre v en reliant les sommets v et w .
- **Opération O_2** : Supposons que $w \in V(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F}^2 en reliant les sommets v et w , où v est le centre de T .
- **Opération O_3** : Supposons que $w \in V(T_i)$ tel que $i_R(T_i - w) \geq i_R(T_i)$, et il existe une $i_R(T_i)$ -fonction qui assigne 0 à w . Alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F}_0^2 en reliant les sommets v et w , où v est le centre de T .
- **Opération O_4** : Supposons que w est un sommet Romain indépendant fort de T_i . Alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F}_1^2 en reliant les sommets v et w , où v est le centre de T avec la condition que

$$i_R(T_i - w) \geq i_R(T_i) + 2|S(T)| - |L(T)| - 2.$$

Théorème 28 (Chellali et al. [18]) *Pour tout arbre T , $i_R(T) = 2i(T)$ si, et seulement si $T \in \mathcal{T}^2$.*

Adabi et al. [2] ont borné $i_R(G)$ en fonction de $\gamma_R(G)$, par le résultat suivant.

Théorème 29 (Adabi et al. [2]) *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta \geq 3$,*

$$i_R(G) \leq \gamma_R(G) + \frac{\gamma_R(G) - 2}{2}(\Delta - 3).$$

Les mêmes auteurs ont montré que la borne est atteinte pour les graphe de degré maximum au moins quatre si, et seulement si $(\gamma_R(G), i_R(G)) = (2, 2)$ ou $(\gamma_R(G), i_R(G)) = (4, 1 + \Delta)$.

Il est clair que si G est un graphe de degré maximum $\Delta = 3$, alors par le Théorème 29, on a $i_R(G) = \gamma_R(G)$. Aussi dans [43], Jafari Rad et Volkman ont montré que si G est sans griffe, alors $i_R(G) = \gamma_R(G)$. Par ailleurs, le Théorème 29 a été amélioré par Jafari Rad [44].

Définition 30 (Jafari Rad [44]) *Pour $k \geq 4$, soit $H = (A, B, E)$ un graphe biparti où $|A| = |B| = k - 1$ tel que $i_R(H) \geq k$ et si $i_R(H) = k$, alors pour toute $i_R(H)$ -fonction f , ou bien $f(A) = 0$ ou $f(B) = 0$. Soit G_k le graphe obtenu de H en ajoutant 2 sommets x, y et les arêtes xy, xu pour tout $u \in A$ et yv pour tout $v \in B$.*

Théorème 31 (Jafari Rad [44]) *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta \in \{4, 5, 6\}$, $i_R(G) \leq \frac{\Delta+1}{4}\gamma_R(G)$, où l'égalité est atteinte si, et seulement si $G = S_{\Delta, \Delta}$ ou $G = G_{\Delta}$.*

Théorème 32 (Jafari Rad [44]) *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta \geq 7$,*

$$i_R(G) \leq \left\lceil \left(\Delta - \frac{18}{5} \right) \gamma_R(G) \right\rceil - 1.$$

2.2.3 Résultats de type Nordhaus–Gaddum

Des résultats de type Nordhaus–Gaddum ont été établis par Targhi et al. dans [28].

Théorème 33 (Targhi et al. [28]) *Pour tout graphe G d'ordre n*

(i) $5 \leq i_R(G) + i_R(\overline{G}) \leq n + 3$. *La borne inférieure est atteinte si, et seulement si G ou \overline{G} est un K_3 ou bien $(\delta(G), \Delta(G)) = (1, n - 1)$ ou $(\delta(\overline{G}), \Delta(\overline{G})) = (1, n - 1)$. La borne supérieure est atteinte si, et seulement si G ou \overline{G} est un C_5 ou un $\frac{n}{2}K_2$.*

(ii) *Si $\text{diam}(G) \geq 3$, alors $6 \leq i_R(G) + i_R(\overline{G}) \leq n - \delta(G) + 4$.*

2.3 La domination 2-rainbow

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une fonction $f : V \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2\})$ est une *fonction de domination 2-rainbow* (FD2-r) de G si pour tout sommet $v \in V$ tel que $f(v) = \emptyset$, on a, $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1, 2\}$. Le poids d'une FD2-r f est $w(f) = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$ et le *nombre de domination 2-rainbow* $\gamma_{r2}(G)$ est le poids minimum d'une FD2-r de G . Par souci de simplicité, une FD2-r sera représentée par $(V_\emptyset^f, V_{\{1\}}^f, V_{\{2\}}^f, V_{\{1,2\}}^f)$ (ou $(V_\emptyset, V_{\{1\}}, V_{\{2\}}, V_{\{1,2\}})$ s'il n'y pas de risque de confusion) où $V_\emptyset^f = \{u \in V \mid f(u) = \emptyset\}$, $V_{\{1\}}^f = \{u \in V \mid f(u) = \{1\}\}$, $V_{\{2\}}^f = \{u \in V \mid f(u) = \{2\}\}$ et $V_{\{1,2\}}^f = \{u \in V \mid f(u) = \{1, 2\}\}$. On dit que f est une $\gamma_{r2}(G)$ -*fonction* si f est une FD2-r de G et $w(f) = \gamma_{r2}(G)$.

La domination 2-rainbow a été mentionnée pour la première fois dans [13] comme un cas particulier de la domination k-rainbow pour étudier la domination couplée. Pour rappel, un ensemble $D \subseteq V$ est un *dominant couplé* si, et seulement si $D \succ V$ et $G[D]$ contient un couplage parfait. La fonction de domination 2-rainbow fut traitée pour la première fois comme il se doit en 2007 par Brešar et al. dans [14] où ils ont montré que le problème de décision associé au problème de la domination 2-rainbow est NP-complet. A noter que dans [13], les auteurs ont donné un algorithme polynomial pour le calcul du nombre de domination 2-rainbow pour la classe des

arbres. Des valeurs exactes de $\gamma_{r_2}(G)$ pour quelques classes de graphes sont résumées par le résultat suivant.

Proposition 34 (Brešar et al. [14])

- (i) $\gamma_{r_2}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1.$
- (ii) $\gamma_{r_2}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor.$
- (iii) $\gamma_{r_2}(GP(5, 2)) = 4.$

2.3.1 Bornes

Nous commençons par remarquer que pour toute FDR $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ d'un graphe G , il existe une FD2-r g tel que $w(g) = w(f)$. En effet, il suffit d'attribuer aux sommets de V_0^f l'ensemble \emptyset , aux sommets de V_2^f l'ensemble $\{1, 2\}$ et aux sommets de V_1^f l'ensemble $\{1\}$ ou $\{2\}$. D'où la chaîne d'inégalité suivante mentionnée par Wu et al. dans [60].

Théorème 35 (Wu et al. [60]) *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma(G) \leq \gamma_{r_2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

Pour la classe des arbres, Wu et al. [60], ont donné la borne supérieure suivante :

Théorème 36 (Wu et al. [60]) *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, $\gamma_{r_2}(T) \leq 3n/4$ avec l'égalité atteinte si, et seulement si $V(T)$ peut être partitionné en k copies de P_4 tel que le sous-graphe induit par les centres de ces P_4 est connexe.*

Ils ont ainsi montré que pour tout graphe G , $\gamma_{r_2}(G) \leq 3n/4$, avec l'égalité atteinte si, et seulement si G est un P_4 ou $C_4 \circ K_1$ ou $V(G)$ peut être partitionné en k copies de P_4 qui ne sont connecté que par leur centres.

En se restreignant aux graphes de degré minimum au moins deux, Fujita et al. [31] ont amélioré la borne précédente en montrant ce qui suit :

Théorème 37 (Fujita et al. [31]) *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq 2$,*

$$\gamma_{r_2}(G) \leq \frac{2n}{3}.$$

La relation entre $\gamma_{r_2}(G)$ et $\gamma_R(G)$ a été aussi étudiée dans [31] et [19], où il a été montré indépendamment le résultat suivant.

Proposition 38 (Chellali et al.[19], Fujita et al. [31]) *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_R(G) \leq \frac{3}{2}\gamma_{r_2}(G).$$

De plus, Chellali et al. [19] ont amélioré la borne du ratio $\gamma_R(T)/\gamma_{r_2}(T)$ dans les arbres.

Théorème 39 (Chellali et al. [19]) *Pour tout arbre T , $\gamma_R(T)/\gamma_{r_2}(T) \leq 4/3$.*

Fujita et al. [31] ont borné $\gamma_{r_2}(T) + \gamma_R(T)$ dans les arbres.

Théorème 40 (Fujita et al. [31]) *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$,*

$$\gamma_{r_2}(T) + \gamma_R(T) \leq \frac{6n}{4}.$$

Le théorème précédent, énoncé pour les arbres reste valide pour tout graphe G connexe d'ordre $n \geq 3$.

Le résultat suivant, montré en 2015 par Alvarado et al. [5] était posé comme un problème ouvert dans [31].

Théorème 41 (Alvarado et al. [5]) *Pour tout graphe $G \neq C_5$ et de degré minimum $\delta \geq 2$,*

$$\gamma_{r_2}(G) + \gamma_R(G) \leq \frac{4n}{3}.$$

La relation entre $\gamma(G)$ et $\gamma_{r_2}(G)$ a été étudiée par Wu et al. dans [59] pour les arbres.

Théorème 42 (Wu et al. [60]) *Pour tout arbre T , $\gamma_{r_2}(T) \geq \gamma(T) + \left\lceil \frac{l(T)-p(T)}{\Delta(T)} \right\rceil$, où $l(T)$ est le nombre de feuilles de T et $p(T)$ est le nombre des sommets supports.*

Dans [60], Wu et Xing ont fourni un résultat de type Nordhaus-Gaddum pour la domination 2-rainbow en montrant que pour tout graphe G d'ordre n , $5 \leq \gamma_{r_2}(G) + \gamma_{r_2}(\overline{G}) \leq n + 2$. Il est à noter que la borne inférieure est atteinte pour C_3 , et la borne supérieure est atteinte pour K_n .

2.4 La domination 2-rainbow indépendante

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une FD2-r $f = (V_\emptyset, V_{\{1\}}, V_{\{2\}}, V_{\{1,2\}})$ est dite *une fonction de domination 2-rainbow indépendante* (FD2-rI) de G , si $V_{\{1\}} \cup V_{\{2\}} \cup V_{\{1,2\}}$ est un ensemble indépendant dans G . *Le nombre de domination 2-rainbow indépendant* $i_{r_2}(G)$ est le poids minimum d'une FD2-rI de G . On dit qu'une fonction f est une $i_{r_2}(G)$ -fonction si f est une FD2-rI de G et $w(f) = i_{r_2}(G)$.

Nous notons que cette fonction a été aussi très peu étudiée. Le premier papier publié étant "Independent 2-rainbow domination in graphs" de Chellali et Jafari Rad [17], où ils ont borné le nombre de domination 2-rainbow indépendant d'un graphe G en fonction de son ordre et de son degré maximum.

Proposition 43 (Chellali et al. [17]) *Pour tout graphe G , $i_{r_2}(G) \leq n - \Delta + 1$.*

Amjadi et al. [7] ont, quant à eux, borné ce nombre pour les arbres par le résultat qui suit :

Théorème 44 (Amjadi et al. [7]) *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$,*

$$i_{r_2}(T) \leq 3n/4.$$

Chellali et Jafari [17] ont montré que pour tout arbre T , $i_{r_2}(T) \geq i(T) + 1$ et ont entrepris la caractérisation des arbres atteignant cette borne. Pour ce faire, ils ont donné la définition suivante :

Définition 45 (Chellali et al. [17]) Soit \mathcal{T}^3 la classe des arbres T tels que T est une étoile, une double étoile, $Su(S_{p,q})$ pour $p, q \geq 1$, $Su(K_{1,n})$ pour $n \geq 2$ ou T est obtenu de $Su(K_{1,n})$ pour $n \geq 2$ en ajoutant au moins une feuille au sommet central de $Su(K_{1,n})$ et possiblement quelques feuilles aux sommets supports de $Su(K_{1,n})$ tel que le nombre de feuilles à distance deux du centre de $Su(K_{1,n})$ est au plus le degré du centre de $Su(K_{1,n})$ moins un.

Théorème 46 (Chellali et al. [17]) Pour tout arbre T , $i_{r_2}(T) = i(T) + 1$ si, et seulement si $T \in \mathcal{T}^3$.

2.5 La $\{2\}$ -domination Romaine

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une fonction f définie de V dans $\{0, 1, 2\}$, f est une fonction de $\{2\}$ -domination Romaine (F $\{2\}$ DR) si pour tout sommet $v \in V$ avec $f(v) = 0$, on a $f(N(v)) \geq 2$, c'est-à-dire, soit il existe $u \in N(v)$ tel que $f(u) = 2$ ou il existe $u_1, u_2 \in N(v)$ tel que $f(u_1) = f(u_2) = 1$. Le poids d'une F $\{2\}$ DR est $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ et le poids minimum d'une F $\{2\}$ DR est le nombre de $\{2\}$ -domination Romaine, noté $\gamma_{\{R2\}}(G)$. Une F $\{2\}$ DR f peut être représentée par : $f = (V_0, V_1, V_2)$ (ou (V_0^f, V_1^f, V_2^f) s'il y a risque de confusion) avec $V_i = \{u \in V \text{ tel que } f(u) = i\}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. On dit que f est une $\gamma_{\{R2\}}(G)$ -fonction si f est une F $\{2\}$ DR de G et $w(f) = \gamma_{\{R2\}}(G)$.

Introduite en 2016 par Chellali et al. dans [22], la $\{2\}$ -domination Romaine est liée aux fonctions $\{2\}$ -dominantes introduites par Domke et al. dans [27] et définies comme suit : pour un graphe $G = (V, E)$, une fonction g définie de V dans $\{0, 1, 2\}$ est une fonction $\{2\}$ -dominante si pour tout sommet $u \in V$, on a $g(N[u]) \geq 2$. Le poids d'une fonction $\{2\}$ dominante est $w(g) = \sum_{v \in V} f(v)$ et le poids minimum d'une fonction $\{2\}$ -dominante est noté $\gamma_{\{2\}}(G)$.

Alors que la fonction $\{2\}$ -dominante g requiert que pour tout sommet $u \in V$, $g(N[u]) \geq 2$, une F $\{2\}$ DR f ne l'exige que pour les sommets $u \in V$, tels que $f(u) = 0$.

On peut observer par exemple que $\gamma_{\{R2\}}(P_5) = 3$ alors que $\gamma_{\{2\}}(P_5) = 4$.

Dans le papier introductif [22], Chellali et al. ont montré que le problème de décision associé à la $\{2\}$ -domination Romaine est NP-Complet pour les graphes bipartis. Par ailleurs les auteurs ont montré ce qui suit :

Théorème 47 (Chellali et al. [22]) *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

Théorème 48 (Chellali et al. [22]) *Pour tout graphe simple G d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 2$,*

$$\gamma_{\{R2\}}(G) \geq 2n/(\Delta + 2).$$

Le reste du travail proposé dans [22], s'est axé essentiellement autour de l'étude de la relation entre le nombre de domination 2-rainbow et le nombre de $\{2\}$ -domination Romaine. Les auteurs [22] ont montré l'égalité entre ces deux paramètres dans les arbres. Un autre résultat pour les cactus a été montré par le théorème suivant :

Théorème 49 (Chellali et al. [22]) *Si G est un cactus ayant $k(G)$ cycles pairs, alors $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq \gamma_{r2}(G) - k(G)$.*

Il en découle naturellement que pour tout cactus sans cycle pair G , $\gamma_{\{R2\}}(G) = \gamma_{r2}(G)$.

Exploitant le Théorème 38 montré par Chellali et al. dans [31], les auteurs ont déduit que pour tout arbre T , $\gamma_R(T)/\gamma_{\{R2\}}(T) \leq 4/3$.

2.5.1 Relations avec $\gamma(G)$

Henning et Klostermeyer [41] ont montré que pour tout arbre T , $\gamma(T) + 1 \leq \gamma_{\{R2\}}(T) \leq 2\gamma(T)$. Afin de caractériser les arbres tels que $\gamma_{\{R2\}}(T) = \gamma(T) + 1$, les auteurs ont défini ce qui suit :

Définition 50 (Henning et Klostermeyer [41]) Pour des entiers positifs r et s , soit $F_{r,s}$ l'arbre obtenu d'une double étoile $S_{r,s}$ en subdivisant toutes les arêtes exactement une fois. Soient \mathcal{F}^5 la famille de tous les arbres $F_{r,s}$, $\mathcal{F}^5 = \{F_{r,s}/r, s \geq 1\}$ et \mathcal{T}^5 la famille des arbres $T_{k,j}$ où $k \geq 2$, $j \geq 0$ et $k \geq 2j + 1$ obtenus en subdivisant exactement j arêtes d'une étoile S_{j+k} . Le pivot de $T_{k,j}$ est le sommet centre de l'étoile S_{j+k} transformée en $T_{k,j}$.

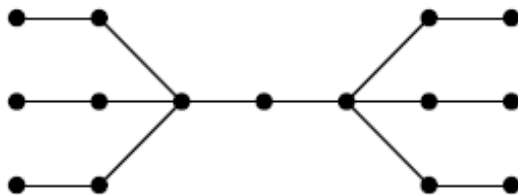


Figure 10. L'arbre $F_{3,3}$.

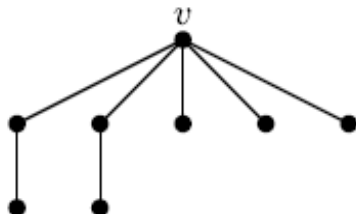


Figure 11. L'arbre $T_{8,2}$ avec le pivot v .

Théorème 51 (Henning et Klostermeyer [41]) Pour tout arbre T , $\gamma_{\{R2\}}(T) = \gamma(T) + 1$ si, et seulement si $T \in \mathcal{T}^5 \cup \mathcal{F}^5$.

Les mêmes auteurs ont donné une caractérisation constructive des arbres tels que $\gamma_{\{R2\}}(T) = 2\gamma(T)$. Pour ce faire, ils ont défini ce qui suit :

Définition 52 (Henning et Klostermeyer [41]) Une Quasi fonction de $\{2\}$ -domination Romaine (QF $\{2\}$ DR) d'un graphe G relative à un sommet v est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

Pour tout sommet u de V tel que $f(u) = 0$, si $u = v$, alors $\sum_{w \in N(u)} f(w) \geq 1$, sinon $\sum_{w \in N(u)} f(w) \geq 2$. Le poids d'une QF{2}DR est la quantité $\sum_{u \in V} f(u)$ et le poids minimum d'une QF{2}DR de G relative à v est noté $\gamma_{\{R2\}}(G, v)$.

Puisque toute F{2}DR de G est une QF{2}DR de G relative à un sommet $v \in V$, on a alors $\gamma_{\{R2\}}(G, u) \leq \gamma_{\{R2\}}(G)$.

Henning et Klostermeyer [41] ont défini aussi les notions de stabilité et de quasi-stabilité d'un sommet v , où v est *stable* dans G si $\gamma_{\{R2\}}(G - v) \geq \gamma_{\{R2\}}(G)$, tandis qu'il est *quasi-stable* si $\gamma_{\{R2\}}(G, v) = \gamma_{\{R2\}}(G)$.

Soit \mathcal{H} la famille des arbres T pouvant être obtenus de la séquence T_0, T_1, \dots, T_k , où $k \geq 0$, $T_0 = P_3$ et $T = T_k$. De plus, si $k \geq 1$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, l'arbre T_i peut être obtenu de l'arbre $T' = T_{i-1}$ par l'une des quatre opérations $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ définies comme suit :

- **Opération \mathcal{O}_1** : Ajouter un nouveau sommet u à T' et joindre u à un sommet v de T' qui est à la fois un sommet support et stable dans T' .
- **Opération \mathcal{O}_2** : Ajouter une chaîne P_3 de centre u et joindre u à un sommet stable de T' .
- **Opération \mathcal{O}_3** : Ajouter une chaîne P_3 et joindre une feuille u de P_3 à un sommet quasi-stable v de T' .
- **Opération \mathcal{O}_4** : Ajouter une étoile $K_{1,3}$ et joindre une feuille u de l'étoile à un sommet quelconque v de T' .

Théorème 53 (Henning et Klostermeyer [41]) *Pour tout arbre T , $\gamma_{\{R2\}}(T) = 2\gamma(T)$ si, et seulement si $T \in \mathcal{H}$.*

2.6 La domination Romaine Double

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une fonction f définie de V dans $\{0, 1, 2, 3\}$ est une *fonction Romaine double* (FDRD) si pour tout sommet $u \in V$ tel que :

(i) si $f(u) = 0$, alors il existe un sommet $v \in N(u)$ tel que $f(v) = 3$ ou deux sommets $v_1, v_2 \in N(u)$ tels que $f(v_1) = f(v_2) = 2$.

(ii) si $f(u) = 1$, alors il existe un sommet $v \in N(u)$ tel que $f(v) \geq 2$.

Une FDRD peut être représentée par $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ où $V_i = \{u \in V : f(u) = i\}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Le poids d'une FDRD est $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ et le poids minimum d'une FDRD est le nombre de domination Romaine double noté $\gamma_{dR}(G)$. On dit que f est une $\gamma_{dR}(G)$ -fonction si f est une FDRD de G et $w(f) = \gamma_{dR}(G)$.

Introduite en 2016 par Beeler et al. dans [9], les auteurs ont proposé une autre stratégie de défense plus forte que celle proposée par Cockayne et al. dans [26] et qui permet de doubler la protection des régions de l'empire en s'assurant que chaque région attaquée puisse être défendue par deux armées. En effet, pour chaque région u qui n'est pas sécurisée ($f(u) = 0$), il est possible d'y envoyer deux armées de son voisinage (soit il existe un sommet $v \in N(u)$ tel que $f(v) = 3$ ou deux sommets $v_1, v_2 \in N(u)$ tels que $f(v_1) = f(v_2) = 2$) tout, en respectant la contrainte imposée par l'empereur Constantin 1^{er}, qu'une armée ne pouvait pas quitter sa position si ce faisant, elle rendait la région où elle était stationnée non sécurisée.

Abdollahzadeh Ahangar et al. [3] ont montré que le problème de décision associé à la fonction de domination Romaine double est NP-Complet pour les graphes bipartis et les graphes triangulés.

Il a été montré dans [9] que pour tout graphe G , il existe une $\gamma_{dR}(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$, telle que $V_1 = \emptyset$. Les auteurs [9] ont borné le nombre de domination Romaine double, en fonction de son ordre et de $\gamma(G)$ en montrant que pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, $\gamma_{dR}(G) \leq 5n/4$, et que $2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G)$.

Abdollahzadeh Ahangar et al. [3] ont amélioré la borne inférieure donnée dans [9].

Proposition 54 (Ahangar et al. [3]) *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_{dR}(G) \geq \gamma_{\{R2\}}(G) + \gamma(G).$$

Exploitant la Proposition 54 et les travaux de Henning et Klostermeyer dans [41], Abdollahzadeh Ahangar et al. ont caractérisé les arbres tels que $\gamma_{dR}(T) = 2\gamma(T) + 1$. En effet, il est facile de voir que si T est un arbre tel que $\gamma_{dR}(T) = 2\gamma(T) + 1$, alors $\gamma_{\{R2\}}(T) = \gamma(T) + 1$. De là ils ont en déduit que les graphes qui les intéressent sont dans $\mathcal{T}^5 \cup \mathcal{F}^5$ (par le Théorème 51).

Théorème 55 (Abdollahzadeh Ahangar et al. [3]) *Pour tout arbre T , $\gamma_{dR}(T) = 2\gamma(T) + 1$ si, et seulement si $T \in \mathcal{T}^5$.*

Des valeurs exactes du nombre de domination Romaine double pour les chaînes et les cycles ont été établies, ainsi qu'une caractérisation des graphes G tels que $\gamma_{dR}(G) \in \{3, 4, 5\}$. Pour rappel, le graphe joint $G \vee H$ est le graphe formé d'une copie de G et d'une copie de H en reliant chaque sommet de G à chaque sommet de H .

Proposition 56 (Ahangar et al. [3]) *Pour tout $n \geq 1$*

$$(i) \gamma_{dR}(P_n) = \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}. \\ n + 1 & \text{si } n \equiv 1, 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$(ii) \gamma_{dR}(C_n) = \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{6}. \\ n + 1 & \text{si } n \equiv 1, 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Proposition 57 (Ahangar et al. [3]) *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors :*

$$(i) \gamma_{dR}(G) = 3 \text{ si, et seulement si } \Delta(G) = n - 1.$$

$$(ii) \gamma_{dR}(G) = 4 \text{ si, et seulement si } G = \overline{K_2} \vee H, \text{ où } \Delta(H) \leq V(H) - 2.$$

(iii) $\gamma_{dR}(G) = 5$ si, et seulement si $\Delta(G) = n - 2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$, où H est un graphe quelconque d'ordre $n - 2$.

Abdollahzadeh Ahangar et al. [1] ont donné une caractérisation constructive des arbres tels que $\gamma_{dR}(T) = 3\gamma(T)$, appelés arbres Romains doubles. Pour ce faire, ils ont défini ce qui suit :

Définition 58 (Ahangar et al. [1]) *Etant donné un graphe G et v un sommet de G , une quasi fonction de domination Romaine double (QFDRD) d'un graphe $G = (V, E)$ relative à v est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ telle que f restreinte à $G - \{v\}$ est une fonction de domination Romaine double et ou bien $f(v) > 0$, ou bien v a un voisin w tel que $f(w) > 1$. Le poids d'une QFDRD est la quantité $\sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum d'une QFDRD de G relative à u est $\gamma_{dR}(G, u)$.*

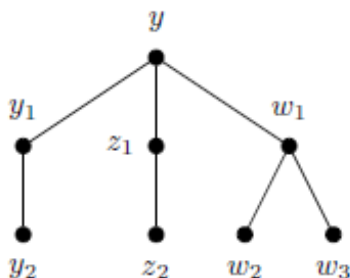


Figure 12. L'arbre F .

Les auteurs [1] ont observé que toute FDRD de G est aussi une QFDRD de G relative à n'importe quel sommet de G , et donc $\gamma_{dR}(G, u) \leq \gamma_{dR}(G)$. Ils ont ensuite défini l'ensemble $W_G = \{v \in V : \gamma_{dR}(G, v) = \gamma_{dR}(G)\}$ et la famille \mathcal{T}_6 des arbres T pouvant être obtenus par une séquence T_1, \dots, T_m , où $m \geq 1$, T_1 est la chaîne P_2 ou P_3 et si $m \geq 2$, alors T_{i+1} peut être obtenu récursivement par T_i par l'une des huit opérations $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_8$ ci-dessous :

- **Opération \mathcal{O}_1** : si $x \in V(T_i)$ et x est un sommet support fort, alors l'opération \mathcal{O}_1 ajoute un sommet y et l'arête xy pour obtenir T_{i+1} .
- **Opération \mathcal{O}_2** : si $x \in V(T_i)$, x est un sommet support fort de W_{T_i} , alors l'opération \mathcal{O}_2 ajoute une chaîne P_3 en joignant x au centre de P_3 pour obtenir T_{i+1} .
- **Opération \mathcal{O}_3** : si $x \in V(T_i)$, alors l'opération \mathcal{O}_3 ajoute une étoile $K_{1,3}$ en joignant x à une feuille de $K_{1,3}$ pour obtenir T_{i+1} .

- **Opération O_4** : si $x \in V(T_i)$ et x est adjacent à sommet support fort, alors l'opération \mathcal{O}_4 ajoute une chaîne P_3 en joignant x au centre de P_3 pour obtenir T_{i+1}
- **Opération O_5** : si $x \in V(T_i)$ et x appartient à une chaîne pendante (xx_2x_1) dans T_i , alors l'opération \mathcal{O}_5 ajoute une chaîne P_3 en joignant x au centre de P_3 pour obtenir T_{i+1}
- **Opération O_6** : si $x \in V(T_i)$ et $x \in W_{T_i}$, alors l'opération \mathcal{O}_6 ajoute le graphe F illustré dans la Figure 12 en joignant x au centre de F pour obtenir T_{i+1} .
- **Opération O_7** : si $x \in V(T_i)$ et $x \in W_{T_i}$, alors l'opération \mathcal{O}_7 ajoute une chaîne P_5 en joignant x au centre de P_5 pour obtenir T_{i+1} .
- **Opération O_8** : si $x \in V(T_i)$, alors l'opération \mathcal{O}_8 ajoute une chaîne P_3 en joignant x à une feuille de P_3 pour obtenir T_{i+1} .

Théorème 59 (Ahangar et al. [1]) *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{dR}(T) = 3\gamma(T)$ si, et seulement si $T \in \mathcal{T}_6$.*

Hajibaba et al. [34] ont borné le nombre de domination Romaine double en fonction du nombre de $\{2\}$ -domination Romaine.

Théorème 60 (Hajibaba et al. [34]) *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_{dR}(G)/2 \leq \gamma_{\{R2\}}(G) \leq 2\gamma_{dR}(G)/3.$$

Par ailleurs, les mêmes auteurs [34] ont caractérisé les arbres T tels que $\gamma_{\{R2\}}(T) = 2\gamma_{dR}(T)/3$. Pour ce faire, ils ont défini la famille \mathcal{F}_6 des arbres T pouvant être obtenus par une séquence T_1, \dots, T_j (où $j \geq 1$), tel que T_1 est une étoile $K_{1,r}$ pour $r \geq 2$, et si $j \geq 2$, alors T_{i+1} peut être obtenu récursivement de T_i par l'une des opérations \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 .

- **Opération O_1** : supposons que u est un sommet vérifiant que $\gamma_{\{R2\}}(T_i - u) \geq \gamma_{\{R2\}}(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en joignant u au centre de l'étoile $K_{1,s}$ pour $s \geq 2$.
- **Opération O_2** : pour $u \in V(T_i)$, T_{i+1} est obtenu de T_i en joignant u au centre y d'une étoile $K_{1,s}$ pour $s \geq 1$, puis en subdivisant l'arête yu .

Théorème 61 (Hajibaba et al. [34]) *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{\{R2\}}(T) = 2\gamma_{dR}(T)/3$ si, et seulement si $T \in \mathcal{F}_6$.*

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé six fonctions de domination introduites toutes entre 2004 et 2016, en exposant les principaux résultats liés à notre angle d'étude et qui sont nombreux et variés. On note cependant que l'on trouve moins de travaux consacrés à l'étude des variantes indépendantes des fonctions de domination dans la littérature. Convaincus qu'il y a encore beaucoup à faire sur l'étude des fonctions de domination, nous nous sommes orientés vers les versions indépendantes de ces fonctions.

Dans les deux chapitres suivants, nous introduirons la $\{2\}$ -domination Romaine indépendantes et la domination Romaine double indépendantes où nous présenterons les résultats que nous avons obtenus.

Chapitre III

LA $\{2\}$ -DOMINATION ROMAINE INDÉPENDANTE

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante. Commençons d'abord par la définition suivante.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une F $\{2\}$ DR $f = (V_0, V_1, V_2)$ est une *fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante* (F $\{2\}$ DRI) de G , si $V_1 \cup V_2$ est un ensemble indépendant.

La première question qui peut se poser concerne l'existence d'une F $\{2\}$ DRI pour tout graphe G . Le résultat suivant en donne une réponse.

Proposition 62 (Rahmouni et Chellali [51]) *Tout graphe G possède une F $\{2\}$ DRI.*

Preuve. Soit S un ensemble indépendant maximal de G . Soient A l'ensemble des sommets de S ayant des voisins privés dans $V - S$ et $B = S - A$. On observe que chaque sommet de $V - S$ est ou bien un voisin privé d'un sommet dans A ou bien il a deux voisins dans $A \cup B$. On définit la fonction f dans G telle que $f(u) = 2$ pour tout $u \in A$, $f(u) = 1$ pour tout $u \in B$ et $f(u) = 0$ pour tout $u \in V - S$. Il est clair que f est une F $\{2\}$ DRI de G . \square

Par la Proposition 62, on peut définir *le nombre de la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante*, noté $i_{\{R2\}}(G)$, comme étant le poids minimum d'une F $\{2\}$ DRI de G . On dit qu'une fonction f est une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction si f est une F $\{2\}$ DRI de G et $w(f(G)) = i_{\{R2\}}(G)$.

Dans ce chapitre, nous montrerons que le problème de décision associé à $i_{\{R2\}}(G)$ est NP-Complet même restreint aux graphes bipartis. Nous montrerons aussi que pour tout graphe G d'ordre n , $0 \leq i_{r2}(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/5$ et $0 \leq i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/4$. De plus, on prouvera que l'égalité $i_{r2}(G) = i_{\{R2\}}(G)$ est vérifiée pour les arbres. Avant de passer à ces résultats, nous donnons l'observation suivante :

Observation 63 (Rahmouni et Chellali [51]) *Pour tout graphe G ,*

$$i_{\{R2\}}(G) \leq i_{r2}(G) \leq i_R(G).$$

Preuve. L'inégalité $i_{r2}(G) \leq i_R(G)$ a été démontrée dans [17]. Montrons donc l'autre inégalité. Soit $f = (V_\emptyset^f, V_{\{1\}}^f, V_{\{2\}}^f, V_{\{1,2\}}^f)$ une $i_{r2}(G)$ -fonction. On définit une fonction g dans G par $g(u) = 2$ si $u \in V_{\{1,2\}}^f$, $g(u) = 1$ si $u \in V_{\{1\}}^f \cup V_{\{2\}}^f$ et $g(u) = 0$ si $u \in V_\emptyset^f$. Il est clair que g est une F{2}DRI de G de poids $i_{r2}(G)$ et donc $i_{\{R2\}}(G) \leq i_{r2}(G)$. \square

Le graphe complet K_n est un exemple simple de graphe pour lequel l'égalité est vérifiée pour les trois paramètres. De plus, ces paramètres peuvent aussi avoir des valeurs distinctes, pour voir cela, il suffit de considérer le graphe de la Figure 13, où $i_{\{R2\}}(G') = 6$, $i_{r2}(G') = 7$ et $i_R(G') = 8$.

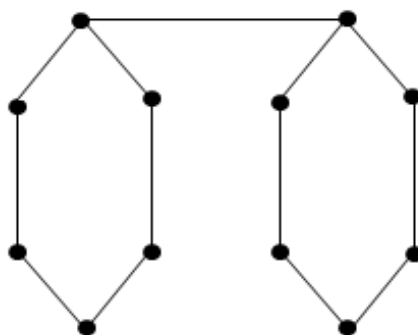


Figure 13. Le graphe G' .

3.2 Complexité algorithmique

Dans cette partie, nous considérons le problème de décision associé à la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante.

Problème de la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante (P $\{2\}$ DRI)

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif $k \leq |V|$.

Question : G possède-t-il une fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante de poids au plus k ?

Nous montrons que ce problème est NP-complet en réduisant le problème NP-complet 3-Couverture-Exacte (X3C) au P $\{2\}$ DRI.

3-Couverture-Exacte (X3C).

Instance : Un ensemble fini X avec $|X| = 3q$ et une collection C de sous-ensembles de X de 3 éléments

Question : Y a-t-il une sous collection C' de C telle que chaque élément de X apparaît exactement une seule fois dans C' ?

Théorème 64 (Rahmouni et Chellali [51]) *P $\{2\}$ DRI est NP-complet pour les graphes bipartis.*

Preuve. P $\{2\}$ DRI est dans \mathcal{NP} , puisqu'on peut vérifier en un temps polynomial si une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ a un poids au plus k et est une fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante. Montrons maintenant comment transformer toute instance de X3C en une instance G de P $\{2\}$ DRI de sorte que l'une d'elle a une solution si, et seulement si l'autre a une solution. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ et $C = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ une instance quelconque de X3C.

Pour chaque $x_i \in X$, on crée une chaîne $P_2 : w_i - z_i$. Soit $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{3q}\}$ et $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{3q}\}$. Pour chaque $C_j \in C$, on construit le graphe H_j obtenu de deux cycles C_4 en ajoutant un nouveau sommet c_j relié à un sommet de chaque cycle disjoints C_4 . On note les sommets des deux cycles par $u_{i1}^j - u_{i2}^j - u_{i3}^j - u_{i4}^j - u_{i1}^j$, où

$i \in \{1, 2\}$. Nous supposons, sans perte de généralité, que c_j est adjacent à u_{11}^j et u_{21}^j et soit $Y = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$. Pour obtenir le graphe G , on ajoute les arêtes $c_j w_i$ si $x_i \in C_j$. Il est évident que G est biparti. Posons $k = 4t + 4q$ (voir Figure 14 pour un exemple).

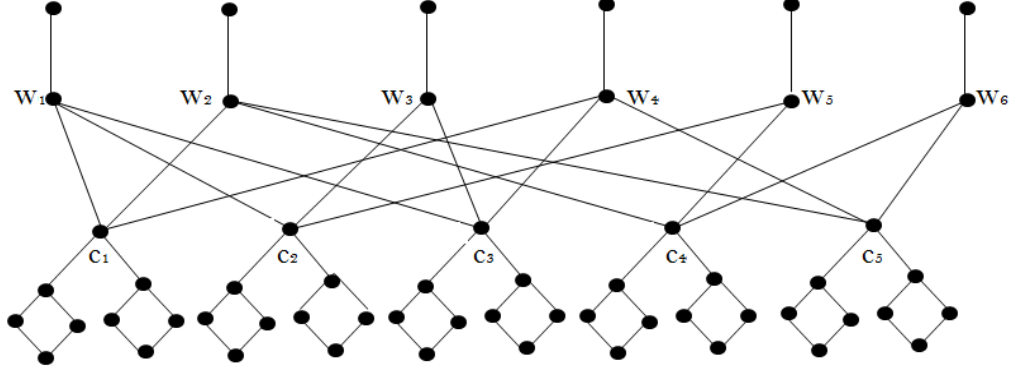


Figure 14. Exemple de construction du graphe G .

Soit H le sous-graphe de G induit par tous les $V(H_j)$ et R le sous-graphe de G induit par tous les w_i et z_i . On note que pour toute fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante f de G , si $f(c_j) = l$, avec $l \in \{0, 1, 2\}$, alors $f(V(H_j)) = 4 + l$, et donc $f(V(H)) \geq 4t$.

Supposons que l'instance X, C de X3C a une solution C' . On construit une F $\{2\}$ DRI f dans G de poids k . On affecte les valeurs 0 et 1 pour chaque w_i et z_i , respectivement. Pour tout $C_j \in C'$, on affecte la valeur 1 à $c_j, u_{12}^j, u_{14}^j, u_{22}^j$ et u_{24}^j , la valeur 0 aux sommets restants de H_j . Pour tout $C_j \notin C'$, on affecte la valeur 1 à $u_{11}^j, u_{13}^j, u_{21}^j$ et u_{23}^j et 0 aux autres sommets de H_j . Notons que puisque C' existe et que $|C'| = q$, alors le nombre de c_j dont la valeur est 1 est q , ayant des voisinages disjoints dans $\{w_1, w_2, \dots, w_{3q}\}$. Puisque C' est une solution de X3C, chaque sommet dans W est adjacent à deux sommets ayant une valeur 1. Il est facile de voir que f est une fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante de G de poids $f(V) = 4t + q + 3q = k$.

Inversement, supposons que G a une fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante de poids au plus k . Parmi toutes ces fonctions, soit $g = (V_0, V_1, V_2)$ telle que :

(C1) $|W \cap V_0|$ est maximisé.

(C2) Sous la condition (C1) : $|Y \cap V_2|$ est minimisé.

(C3) Sous les conditions (C1) et (C2) : $|Z \cap V_2|$ est minimisé.

Donnons les remarques suivantes :

- i) Aucun sommet w_i n'appartient à V_1 , à cause de z_i .
- ii) Aucun sommet c_j n'a besoin d'être défendu par n'importe quel sommet w_i .
- iii) Aucun sommet w_i n'est de poids 2. En effet, supposons que $g(w_i) = 2$ pour un certain i . Alors, d'après (ii), on affecte à w_i un 0 au lieu de 2 et à z_i un 2 au lieu de 0, on obtient alors une fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante de G de poids au plus k mais avec plus de sommets de W ayant la valeur 0, ce qui contredit notre choix de g .
- iv) Aucun sommet c_j n'a de valeur 2. En effet, supposons que $g(c_j) = 2$ pour un certain j . Donc nous avons $g(V(H_j)) = 6$. Puisque $N(c_j) \cap W \subset V_0$ (d'après (i) et (iii)), $g(z_i) > 0$ pour tout i . En affectant à c_j un 1 au lieu de 2 et en réaffectant les sommets de H_j pour que $g(V(H_j)) = 5$ au lieu de 6 on obtient alors une fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante de G de poids au plus k , mais ayant moins de sommet de Y avec une valeur 2, contradiction.
- v) Aucun sommet z_i n'est de poids 2. Supposons que $g(z_i) = 2$ pour un i quelconque. Alors $g(w_i) = 0$ (d'après (i) et (iii)). Si $g(c_j) = 1$ pour $c_j \in N(w_i)$, alors il est clair qu'on peut affecter à z_i un 1 au lieu de 2 et obtenir une F $\{2\}$ DRI de G de poids au plus k mais ayant moins de sommet de Z dans V_2 , contradiction. Nous pouvons donc supposer que $N(w_i) \cap Y \subset V_0$. Soit $c_l \in N(w_i)$. Il est clair que $g(V(H_l)) = 4$ puisque $g(c_l) = 0$. En réaffectant à z_i et c_l un 1 au lieu de 2 et 0, respectivement, et en réaffectant les sommets de H_l pour que $g(V(H_l)) = 5$

au lieu de 4, on obtient une $F\{2\}$ DRI de G de poids au plus k ayant moins de sommets de Z de valeur 2, ce qui contredit notre choix de g .

Par conséquent, d'après ce qui précède, on en déduit que $W \subset V_0$, $Y \cap V_2 = \emptyset$, et $Z \cap V_2 = \emptyset$. D'où $Z \subset V_1$. Il est clair que $Y \cap V_1 \neq \emptyset$ pour défendre tous les sommets de W . Soit $b = |Y \cap V_1|$. Alors $b \geq q$, puisque chaque sommet de Y a exactement trois voisins dans W . De plus, puisque $g(V(H)) + g(V(R)) = b + 4t + 3q \leq 4t + 4q$ on en déduit que $b \leq q$, et donc $b = q$. Par conséquent, $C' = \{C_j : g(c_j) = 1\}$ est une 3-couverture exacte pour C . \square

A noter que dans [24], Chen et Lu ont répondu à une question ouverte que nous avons posé dans [51] en donnant un algorithme polynomial pour calculer le nombre de la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante pour les arbres.

3.3 Borne supérieure pour $i_{r2}(G) - i_{\{R2\}}(G)$

Dans cette partie, nous présentons quelques relations entre le nombre de $\{2\}$ -domination Romaine indépendant et le nombre de domination 2-rainbow indépendant. Sachant que $i_{\{R2\}}(G) \leq i_{r2}(G)$, pour tout graphe simple G , nous montrerons que l'égalité entre ces deux paramètres est vérifiée pour la classe des arbres et que la différence entre eux n'excède pas $n/5$ pour tout graphe G d'ordre n . Pour cela nous introduisons quelques notations et définitions.

Etant donné une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ d'un graphe G , soit $V_0'^f$ l'ensemble des sommets de V_0^f ayant un voisin dans V_2^f et $V_0''^f = V_0^f - V_0'^f$. Il est clair que tout sommet de $V_0''^f$ a au moins deux voisins dans V_1^f . Soit R le graphe partiel du sous-graphe induit par $V_0''^f \cup V_1^f$ obtenu en laissant que deux arêtes reliant chaque sommet de $V_0''^f$ à V_1^f . On définit ensuite le graphe H_f d'ordre $|V_1^f|$, où $V(H_f) = V(V_1^f)$ et deux sommets x et y de $V(H_f)$ sont adjacents dans H_f s'il existe un sommet $v \in V_0''^f$ adjacent à x et à y dans R . Il est clair que, si $V_0''^f \neq \emptyset$, alors $|V(H_f)| \geq 2$. On appellera H_f , le graphe associé à f .

Pour tout H_f associé à f , soit $\pi(H_f) = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ une partition de $V(H_f)$ telle que S_i est un ensemble indépendant maximum du sous-graphe induit par $S_i \cup S_{i+1} \cup \dots \cup S_k$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Selon la définition de $\pi(H_f)$, on a $|S_i| \geq |S_j|$ et tout sommet de S_j a au moins un voisin dans S_i pour tout $i < j$. A noter que cette partition a été introduite la première fois par Fradkin dans [30]. On définit aussi les ensembles A , B et C comme suit : A est l'ensemble des sommets de $V_0''^f$ ayant un voisin dans S_1 et l'autre dans S_2 dans le graphe R , C est l'ensemble des sommets de $V_0''^f$ n'ayant aucun voisin dans $S_1 \cup S_2$ dans le graphe R et $B = V_0''^f - (A \cup C)$. Soit $X = \bigcup_{i=3}^k S_i = V(H_f) - (S_1 \cup S_2)$.

Comme exemple, prenons le graphe G'' de degré maximum Δ de la Figure 15. Il est clair que $f = (\{a, f, g, h, i, j\}, \{b, c, e, d\}, \emptyset)$ est une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction, puisque d'après le Théorème 48, $i_{\{R2\}}(G'') \geq \gamma_{\{R2\}}(G'') \geq \frac{2n}{\Delta+2} = 4$.

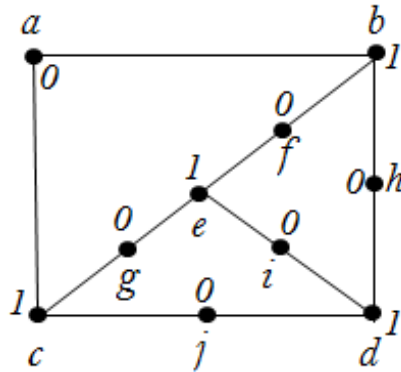


Figure 15. Le graphe G'' avec

$$i_{\{R2\}}(G'') = 4.$$

Le graphe H_f associé à f dans G'' est représenté dans la Figure 16.

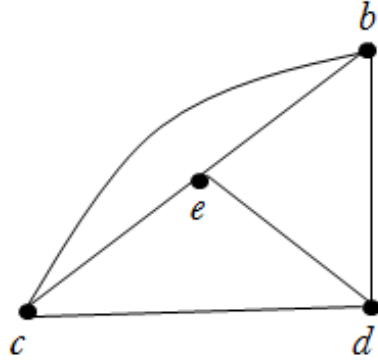


Figure 16. Le graphe H_f .

Le graphe H_f de notre exemple possède une unique partition en stables $\pi(H_f) = \{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$ avec $S_1 = \{b\}$, $S_2 = \{c\}$, $S_3 = \{d\}$ et $S_4 = \{e\}$. L'ensemble $A = \{a\}$, l'ensemble $C = \{i\}$ et l'ensemble $B = \{f, h, j\}$.

Proposition 65 (Rahmouni et Chellali [51]) Soit $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction et H_f le graphe associé à f ayant $\pi(H_f) = \{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ comme partition de $V(H_f)$. Alors :

(i) $i_{r2}(G) \leq i_{\{R2\}}(G) + |X|$.

(ii) tout sommet de X a au moins deux voisins dans B et $|B| \geq 2|X|$.

(iii) $|A| \geq |S_2|$.

(iv) $|C| = 0$ si $t \leq 3$.

(v) $|C| \geq |X| - |S_2|$ si $t = 4$.

(vi) $|C| \geq 2|X| - 3|S_2|$ si $t \geq 5$.

Preuve. (i)- Supposons d'abord que H_f est biparti et soient U et W les parties de H_f (Notons qu'il est possible que $E(H_f) = \emptyset$ si $V_0''^f = \emptyset$). D'après la construction de H_f , tout sommet de $V_0''^f$ a un voisin dans U et un autre dans W . Soit g une fonction définie dans G par $g(x) = \emptyset$ si $x \in V_0^f$, $g(x) = \{1, 2\}$ si $x \in V_2^f$, $g(x) = \{1\}$

si $x \in U$ et $g(x) = \{2\}$ si $x \in W$. Il est clair que g est une FD2rI de G , avec $i_{r_2}(G) \leq g(V(G)) = i_{\{R_2\}}(G)$, et donc (i) est vérifié. Supposons maintenant que H n'est pas biparti, alors $t \geq 3$. Définissons la fonction $g = (V_\emptyset, V_{\{1\}}, V_{\{2\}}, V_{\{1,2\}})$ dans G , où $V_{\{1\}} = S_1$, $V_{\{2\}} = S_2$, $V_\emptyset = V_0$ et $V_{\{1,2\}} = V_2 \cup X$. Alors g est une FD2rI de poids $i_{\{R_2\}}(G) + |X|$, et donc (i) est dans ce cas aussi vérifié.

(ii)- On rappelle que la construction de H_f exige que le voisinage de tout sommet $x \in V_0''f$ possède exactement deux voisins dans H_f . Soit u un sommet de X . D'après la définition de $\pi(H_f)$, le sommet u a un voisin v dans S_1 et un autre w dans S_2 . Soit a et a' les sommets de $V_0''f$ qui correspondent aux arêtes uv et uw dans H_f , respectivement. Sachant que a et a' n'appartiennent pas à A et $v, w \in S_1 \cup S_2$, on en déduit que $a, a' \in B$. D'où $|B| \geq 2|X|$.

(iii)- Rappelons que pour toute arête $xy \in E(H_f)$ avec $x \in S_1$ et $y \in S_2$, il existe alors au moins un sommet $z \in A$ tel que xz et $zy \in E(G)$, et donc $|A| \geq |S_2|$.

(iv)- Si $t \leq 3$, alors X est un ensemble indépendant dans H_f , d'où $C = \emptyset$.

(v)- Soit $t = 4$. Il est clair que S_3 domine S_4 dans H_f et pour toute arête uv de $E(H_f)$ ayant une extrémité dans S_3 et l'autre dans S_4 , il existe un sommet $x \in C$ tel que $u, v \in N_G(x)$. D'où $|C| \geq |S_4|$. Sachant que $X = S_3 \cup S_4$ et $|S_3| \leq |S_2|$, on obtient $|C| \geq |X| - |S_2|$.

(vi)- Soit $t \geq 5$. Comme vu dans (v), le cardinal de C est au moins égal au nombre d'arêtes du sous-graphe de H_f induit par $S = S_3 \cup S_4 \cup \dots \cup S_t$. Sachant que S_i est un ensemble indépendant maximum du sous-graphe induit par $\bigcup_{j=i}^t S_j$, on peut voir alors que $|C|$ peut être minoré par le nombre d'arêtes de $H_f[S_3 \cup S_4]$ dans $H_f[S]$, d'où :

$$\begin{aligned} |C| &\geq (|X| - |S_3|) + (|X| - |S_3| - |S_4|) \\ &= 2|X| - 2|S_3| - |S_4| \\ &\geq 2|X| - 3|S_2|, \end{aligned}$$

puisque que $|S_2| \geq |S_3| \geq |S_4|$, il s'ensuit que (vi) est vérifiée. \square

Par le prochain résultat, nous montrerons que l'égalité entre $i_{\{R2\}}(G)$ et $i_{r2}(G)$ est vérifiée pour les graphes ne contenant pas de sous-graphe partiel isomorphe à C_{4k+2} .

Théorème 66 (Rahmouni et Chellali [51]) *Si G est un graphe sans sous-graphe partiel isomorphe à C_{4k+2} pour tout entier $k \geq 1$, alors $i_{\{R2\}}(G) = i_{r2}(G)$.*

Preuve. Puisque $i_{\{R2\}}(G) \leq i_{r2}(G)$ pour tout graphe G , on a seulement besoin de montrer que $i_{r2}(G) \leq i_{\{R2\}}(G)$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que G est connexe, puisque la preuve est valide pour toute composante connexe de G . Soit $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction. Si $V_0''^f = \emptyset$, alors on peut construire une FD2-rI dans G de poids $i_{\{R2\}}(G)$, d'où $i_{r2}(G) \leq i_{\{R2\}}(G)$. Supposons maintenant que $V_0''^f \neq \emptyset$. Soit H_f le graphe associé à f . Supposons d'abord que H_f est biparti et ses parties sont U et W . Notons que chaque sommet de $V_0''^f$ a un voisin dans U et un autre dans W . On définit alors la fonction g par $g(x) = \emptyset$ si $x \in V_0^f$, $g(x) = \{1, 2\}$ si $x \in V_2^f$, $g(x) = \{1\}$ si $x \in U$ et $g(x) = \{2\}$ si $x \in W$. Alors g est une FD2-rI dans G , d'où $i_{r2}(G) \leq g(V(G)) = i_{\{R2\}}(G)$. Supposons maintenant que H_f n'est pas biparti. Donc H_f contient un cycle impair $C_{2t+1} = (u_1, u_2, \dots, u_{2t+1}, u_1)$ pour $t \geq 1$. D'après la construction de H_f , pour toute paire de sommets u_i, u_{i+1} de notre cycle, il existe un sommet $w_i \in V_0''^f$ tel que $w_i u_i$ et $w_i u_{i+1} \in E(G)$. Donc le graphe G contient un sous-graphe partiel isomorphe à un cycle $C_{4k+2} = (u_1, w_1, u_2, w_2, u_3, \dots, u_{2t+1}, w_{2t+1}, u_1)$ d'où la contradiction. \square

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 66.

Corollaire 67 (Rahmouni et Chellali [51]) *Pour tout arbre T , $i_{r2}(T) = i_{\{R2\}}(T)$.*

Nous rappelons que la caractérisation des arbres tels que $i_{r2}(T) = i(T) + 1$ a été traitée par Chellali et Jafari Rad dans [17], comme vu dans le Théorème 46 et

puisque selon le Corollaire 67, l'égalité entre le nombre de $\{2\}$ -domination Romaine indépendant et le nombre de domination 2-rainbow indépendant est vérifiée pour tous les arbres, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 68 *Pour tout arbre T , $i_{\{R2\}}(T) \geq i(T) + 1$ avec l'égalité atteinte si, et seulement si $T \in \mathcal{T}^3$.*

Nous présentons maintenant un résultat qui borne la différence $i_{r2}(G) - i_{\{R2\}}(G)$ en fonction de l'ordre de G .

Théorème 69 (Rahmouni et Chellali [51]) *Pour tout graphe connexe d'ordre n , $i_{r2}(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq \frac{n}{5}$, et cette borne est atteinte.*

Preuve. Soit $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction et H_f son graphe associé. Si H_f est biparti, alors en utilisant les mêmes arguments que ceux de la démonstration du Théorème 66, on obtient $i_{\{R2\}}(G) = i_{r2}(G)$. Nous supposons donc que H_f n'est pas biparti. Soit $\pi(H_f) = \{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ une partition de $V(H_f)$ comme vu précédemment, où $t \geq 3$. Par la Proposition 65.(i), $i_{r2}(G) \leq i_{\{R2\}}(G) + |X|$. Il nous suffit donc de prouver que $|X| \leq n/5$. Rappelons que $|V_1^f| = |X| + |S_1| + |S_2|$. Considérons les cas suivants :

Cas 1. $t = 3$. Alors $X = S_3$ et $|X| = |S_3| \leq |S_2|$ (d'après la définition de $\pi(H_f)$). D'où $|S_1| + |S_2| \geq 2|X|$. En utilisant les propriétés (ii)-(iv) de la Proposition 65, on aura :

$$\begin{aligned} n &= |V_2^f| + |V_1^f| + |V_0^f| \\ &\geq |V_1^f| + |V_0^{''f}| = (|X| + |S_1| + |S_2|) + (|A| + |B| + |C|) \\ &\geq 3|X| + (|A| + |B|) \\ &\geq 3|X| + |S_2| + 2|X| \geq 6|X|, \end{aligned}$$

d'où $|X| \leq n/6 < n/5$.

Cas 2. $t = 4$. On a, $|X| = |S_3| + |S_4| \leq |S_1| + |S_2|$. En utilisant les propriétés (ii), (iii) et (v) de la Proposition **65**, on aura :

$$\begin{aligned} n &= |V_2^f| + |V_1^f| + |V_0^f| \\ &\geq |V_1^f| + |V_0''^f| = (|X| + |S_1| + |S_2|) + (|A| + |B| + |C|) \\ &\geq 2|X| + |S_2| + 2|X| + |X| - |S_2| = 5|X|, \end{aligned}$$

d'où $|X| \leq n/5$.

Cas 3. $t \geq 5$. En utilisant les propriétés (ii), (iii) et (v) de la Proposition **65**, on aura :

$$\begin{aligned} n &= |V_2^f| + |V_1^f| + |V_0^f| \\ &\geq |V_1^f| + |V_0''^f| = (|X| + |S_1| + |S_2|) + (|A| + |B| + |C|) \\ &\geq (|X| + 2|S_2|) + (|S_2| + 2|X| + 2|X| - 3|S_2|) = 5|X|, \end{aligned}$$

d'où $|X| \leq n/5$.

Par ailleurs, cette borne est atteinte par le graphe de la Figure 15. On peut voir que $i_{\{R2\}}(G) = 4$ alors que $i_{r2}(G) = 6$. \square

Nous clôturons cette partie en proposant une borne supérieure du rapport $i_{r2}(G)/i_{\{R2\}}(G)$ en fonction du degré maximum de G . A noter que 2 est une borne supérieure triviale pour $i_{r2}(G)/i_{\{R2\}}(G)$.

Théorème 70 (Rahmouni et Chellali [51]) *Si G est un graphe de degré maximum $\Delta(G) = \Delta \geq 1$, alors $i_{r2}(G)/i_{\{R2\}}(G) \leq 2\Delta/(\Delta + 1)$, et cette borne est atteinte.*

Preuve. Soit $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction et H_f le graphe associé à f avec la partition $\pi(H_f) = \{S_1, S_2, \dots, S_t\}$. Si H_f est biparti, alors $i_{r2}(G) = i_{\{R2\}}(G)$ et le résultat est vrai. Supposons que H_f n'est pas biparti. Donc $|V_1^f| \neq 0$. Sachant que

$i_{r_2}(G) \leq i_{\{R_2\}}(G) + |X|$, on a donc $i_{r_2}(G)/i_{\{R_2\}}(G) \leq 1 + |X|/i_{\{R_2\}}(G)$, et puisque $i_{\{R_2\}}(G) = |V_1^f| + 2|V_2^f|$ et $|X| = |V_1^f| - (|S_1| + |S_2|)$, on obtient :

$$\begin{aligned} i_{r_2}(G)/i_{\{R_2\}}(G) &\leq 1 + |X|/i_{\{R_2\}}(G) \\ &= 1 + \frac{|V_1^f| - (|S_1| + |S_2|)}{|V_1^f| + 2|V_2^f|} \\ &\leq 1 + \frac{|V_1^f| - (|S_1| + |S_2|)}{|V_1^f|} = 2 - \frac{|S_1| + |S_2|}{|V_1^f|}. \end{aligned}$$

D'autre part, $|V_1^f| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_t|$ et $|S_i| \leq |S_j|$ pour tout $i \geq j$, on a donc :

$$\begin{aligned} 2|V_1^f| &= (|S_1| + |S_t|) + (|S_2| + |S_{t-1}|) + \dots + (|S_t| + |S_1|) \\ &\leq (|S_1| + |S_2|) + (|S_1| + |S_2|) + \dots + (|S_1| + |S_2|) \\ &= t(|S_1| + |S_2|). \end{aligned}$$

Sachant que $(|S_1| + |S_2|)/|V_1^f| \geq 2/t$ et $t \leq \Delta(H_f) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ on en déduit que :

$$\begin{aligned} i_{r_2}(G)/i_{\{R_2\}}(G) &\leq 2 - \frac{|S_1| + |S_2|}{|V_1^f|} \\ &\leq 2 - 2/t \leq 2 - 2/(\Delta(G) + 1) = 2\Delta(G)/(\Delta(G) + 1). \end{aligned}$$

Cette borne est atteinte pour le graphe de la Figure 15. \square

En utilisant le même raisonnement que celui utilisé dans les preuves des Théorèmes 67, 69 et 70, on peut avoir les résultats suivants :

Corollaire 71 *Pour tout graphe G sans sous-graphe partiel isomorphe à C_{4k+2} avec $k \geq 1$, $\gamma_{\{R_2\}}(G) = \gamma_{r_2}(G)$.*

Corollaire 72 *Pour tout graphe connexe d'ordre n , $\gamma_{r_2}(G) - \gamma_{\{R_2\}}(G) \leq \frac{n}{5}$, et cette borne est atteinte.*

Corollaire 73 *Si G est un graphe de degré maximum $\Delta(G) = \Delta \geq 1$, alors*

$$\gamma_{r_2}(G)/\gamma_{\{R_2\}}(G) \leq 2\Delta/(\Delta + 1) \text{ et cette borne est atteinte.}$$

Cela nous permet de réduire la classe des cactus proposée par Chellali et al. dans [22], pour laquelle l'égalité est atteinte entre $\gamma_{\{R_2\}}(G)$ et $\gamma_{r_2}(G)$.

Proposition 74 *Si G est un cactus sans C_{4k+2} pour $k \geq 1$, alors $\gamma_{\{R_2\}}(G) = \gamma_{r_2}(G)$.*

3.4 Borne supérieure pour $i_R(G) - i_{\{R_2\}}(G)$

Dans cette partie, nous nous intéressons à la différence $i_R(G) - i_{\{R_2\}}(G)$ qui peut être plus grande que $n/5$, comme on peut le voir pour les cycles C_4 et C_8 . Nous montrerons alors que cette différence n'excède pas $n/4$ pour tout graphe G d'ordre n . Pour cela nous introduisons quelques notations et définitions.

Etant donné une $i_{\{R_2\}}(G)$ -fonction $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ d'un graphe G , soit $V_0''^f$ et $V_0'''^f$ les sous-ensembles de V_0^f comme défini dans la Section 3.3. Soit $K \subseteq V_1^f$ un ensemble de sommet maximal avec la propriété suivante : chaque sommet de K a au moins deux voisins privés dans $V_0''^f$ par rapport à K . Soit $P = V_1^f - K$. De plus, on définit les sous-ensembles A, B et C de $V_0''^f$ comme suit : A est l'ensemble des sommets de $V_0''^f$ n'ayant aucun voisin dans K , C est l'ensemble des sommets de $V_0''^f$ n'ayant aucun voisin dans P et $B = V_0''^f - (A \cup C)$. Prenons pour exemple le cycle $C_8 = (a, b, c, d, e, f, g, h, a)$.

D'après le Théorème 66, on a $i_{\{R_2\}}(C_8) = i_{r_2}(C_8) = 4$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2) = (\{b, d, f, h\}, \{a, c, e, g\}, \emptyset)$. Il est clair que f est une $i_{\{R_2\}}(C_8)$ -fonction avec $V_0''^f = \emptyset$. Alors $K = \{a, e\}$, $P = V_1 - K = \{c, g\}$, $A = C = \emptyset$ et $B = \{b, d, f, h\}$.

Théorème 75 (Rahmouni et Chellali [51]) *Pour tout graphe connexe G d'ordre n , $i_R(G) - i_{\{R_2\}}(G) \leq \frac{n}{4}$, et cette borne est atteinte.*

Preuve. Soit $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ une $i_{\{R_2\}}(G)$ -fonction. Si $V_0''^f = \emptyset$, alors f est une FDRI de G et le résultat est vrai puisque $i_R(G) = i_{\{R_2\}}(G)$. Supposons que $V_0''^f \neq \emptyset$,

et donc $V_1^f \neq \emptyset$. Soient K, P, A, B et C les ensembles définis précédemment. Nous remarquons que :

- i) Tout sommet de P a au plus un voisin privé dans A par rapport à K . En effet, s'il existe un sommet $x \in P$ ayant deux voisins dans A , alors x devrait appartenir à K ce qui contredit la maximalité de K .
- ii) Tout sommet de A a au moins deux voisins dans P et tout sommet de C a au moins deux voisins dans K .
- iii) Les voisins privés de K par rapport à K sont dans B , d'où $|B| \geq 2|K|$.

Soit I_A un ensemble indépendant maximal de cardinal minimum dans $G[A]$ (i.e. un $i(G[A])$ -ensemble). Des remarques (i) et (ii) combinées, on a $2|I_A| \leq |N(I_A) \cap P|$ et donc $2|I_A| + |P - N(I_A)| \leq |P|$. Pour la suite on distinguera deux cas.

Cas 1. $|K| \leq |P|$. En utilisant la remarque (iii) et le fait que $|K| \leq |P|$, on a $|K| \leq n/4$. Effectivement,

$$\begin{aligned} n &= |V_2^f| + |V_1^f| + |V_0^f| \\ &\geq |V_1^f| + |V_0^{ff}| = (|K| + |P|) + (|A| + |B|) \\ &\geq 4|K| + |A| \geq 4|K|. \end{aligned}$$

On définit maintenant la fonction g dans G comme suit : $g(x) = 2$ si $x \in K \cup I_A$, $g(x) = 0$ si $x \in N(I_A) \cap P$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \notin V_1^f \cup I_A$. Il est clair que g est une FDRI de G de poids $w(g) = 2|V_2^f| + 2|K| + 2|I_A| + |P - N(I_A)| \leq 2|V_2^f| + 2|K| + |P|$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) &\leq g(V) - i_{\{R2\}}(G) \\ &\leq 2|V_2^f| + 2|K| + |P| - 2|V_2^f| - |V_1^f| \\ &\leq 2|K| + |P| - (|K| + |P|) = |K| \leq n/4. \end{aligned}$$

Cas 2. $|K| > |P|$. Supposons d'abord que $|C| = 0$. Dans ce cas, on a $|P| \leq n/4$.

En effet,

$$\begin{aligned}
n &\geq \left|V_1^f\right| + \left|V_0''^f\right| = (|K| + |P|) + (|A| + |B|) \\
&\geq 2|P| + 2|K| + |A| \\
&\geq 4|P| + |A| \geq 4|P|.
\end{aligned}$$

On définit maintenant la fonction g dans G comme suit : $g(x) = 2$ si $x \in P$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \notin P$. Il est clair que g est une FDRI de G de poids $g(V) = 2\left|V_2^f\right| + |K| + 2|P|$. Par Conséquent, $i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq g(V) - i_{\{R2\}}(G) = 2|P| + |K| - |K| - |P| = |P| \leq n/4$.

Nous supposons maintenant que $|C| \geq 1$. Nous construisons alors une nouvelle partition de V_1^f et $V_0''^f$ en appliquant l'algorithme suivant :

Algorithme

Soit $K^* = K, P^* = P, A^* = A$ et $C^* = C$.

Tant que il existe un sommet $v \in K^*$ ayant au moins deux voisins dans C^* ,

Faire transférer v de K^* à P^* et $N(v) \cap C^*$ à A^* .

Fait.

Fin tant que.

Comme conséquence, on aura :

- (a) tout sommet de K^* a au plus un voisin dans C^* .
- (b) Tout sommet de A^* a au moins un voisin dans P^* .
- (c) tout sommet de C^* n'a aucun voisin dans P^* .

Soit T l'ensemble des sommets transférés de K à P et R l'ensemble des sommets transférés de C à A . Il est clair que $|C| \geq |R| \geq 2|T|$ et $|K^*| + |P^*| = |K| + |P|$. On a aussi $P^* = P \cup T, A^* = A \cup R, K^* = K - T$ et $C^* = C - R$. Considérons les deux sous-cas suivants.

Sous-cas 2.1. $|K^*| \geq |P^*|$. Rappelons que $|B| \geq 2|K|$ (d'après la remarque

(iii). Alors $|P| \leq |P^*| \leq n/4$. En effet,

$$\begin{aligned}
n &\geq |V_1^f| + |V_0''^f| \geq |K^*| + |P^*| + |A^*| + |B| \\
&\geq 2|P^*| + |B| + |A^*| \\
&\geq 2|P^*| + 2|K| + |R| + |A| \\
&\geq 2|P^*| + 2|K| + 2|T| \geq 2|P^*| + 2|P| + 2|T| \\
&= 2|P^*| + 2|P^*| = 4|P^*|.
\end{aligned}$$

Soit I_{c^*} un ensemble indépendant maximal de cardinal minimum dans $G[C^*]$. Rappelons que tout sommet de C^* a au moins deux voisins dans K^* et tout sommet de K^* a au plus un voisin dans C^* . Il s'ensuit que $2|I_{c^*}| \leq |N(I_{c^*}) \cap K^*|$. Définissons la fonction g de G comme suit : $g(x) = 2$, si $x \in P^* \cup I_{c^*}$, $g(x) = 0$ si $x \in N(I_{c^*}) \cap K^*$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \notin P^* \cup I_{c^*} \cup (N(I_{c^*}) \cap K^*)$. Il est clair que g est une FDRI dans G de poids $g(V) = 2|V_2^f| + 2|P^*| + 2|I_{c^*}| + |K^* - N(I_{c^*})|$. Sachant que $2|I_{c^*}| \leq |N(I_{c^*}) \cap K^*|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
g(V) &\leq 2|V_2^f| + 2|P^*| + |N(I_{c^*}) \cap K^*| + |K^* - N(I_{c^*})| \\
&= 2|V_2^f| + 2|P^*| + |K^*|,
\end{aligned}$$

d'où,

$$i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq 2|P^*| + |K^*| - |K^*| - |P^*| = |P^*| \leq n/4.$$

Sous-cas 2.2. $|K^*| < |P^*|$. Alors $|K| - |T| < |P| + |T|$ d'où $|K| < |P| + 2|T| \leq |P| + |R| \leq |P| + |C|$. Ainsi, on a $|K| \leq n/4$. En effet,

$$\begin{aligned}
n &\geq |V_1^f| + |V_0''^f| \\
&= |K| + |P| + |A| + |B| + |C| \\
&\geq |K| + |K| + 2|K| + |A| \geq 4|K|.
\end{aligned}$$

Nous définissons la fonction g dans G comme suit : $g(x) = 2$ si $x \in K \cup I_A$, $g(x) = 0$ si $x \in N(I_A) \cap P$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \notin K \cup I_A$. Il est clair que g est une FDRI de G de poids $g(V) = 2|V_2^f| + 2|K| + 2|I_A| + |P - N(I_A)| \leq 2|V_2^f| + 2|K| + |P|$. D'où,

$$i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq 2|K| + |P| - |K| - |P| = |K| \leq n/4.$$

Cette borne est atteinte pour les cycles C_4 et C_8 . \square

Similairement aux Théorèmes 67, 69 et 70, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 76 *Pour tout graphe connexe G d'ordre n , $\gamma_R(G) - \gamma_{\{R2\}}(G) \leq \frac{n}{4}$, et cette borne est atteinte.*

Chapitre IV

LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE INDÉPENDANTE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la domination Romaine double indépendante. Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une FDRD $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ est une *fonction de domination Romaine double indépendante* (FDRDI) de G , si $V \setminus V_0$ est un ensemble indépendant. Pour des raisons de concision on notera toute FDRDI $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ par $f = (V_0, V_2, V_3)$ puisqu'il est clair qu'aucun FDRDI f n'attribuera à un sommet la valeur 1 car un tel sommet devra avoir un voisin v tel que $f(v) \geq 2$, ce qui viole l'indépendance de $V_1 \cup V_2 \cup V_3$.

On commence par voir que tout graphe admet une FDRDI

Proposition 77 *Tout graphe G possède une FDRDI.*

Preuve. Par la Proposition 62, tout graphe G possède une F{2}DRI $f = (V_0, V_1, V_2)$. Considérons la fonction g défini comme suit : $g(u) = 3$ si $u \in V_2$, $g(u) = 2$ si $u \in V_1$ et $g(u) = 0$ si $u \in V_0$. Il est clair que g est une FDRDI de G . \square

Par la Proposition 77, on peut définir *le nombre de la domination Romaine double indépendante*, noté $i_{dR}(G)$, comme étant le poids minimum d'une FDRDI de G . On dit qu'une fonction f est une $i_{dR}(G)$ -fonction si, et seulement si f est une FDRDI de G et $w(f(G)) = i_{dR}(G)$.

Dans ce chapitre, nous montrerons que le problème de décision associé à $i_{dR}(G)$ est NP-Complet. Aussi, nous montrerons que pour tout graphe G , $2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq$

$3i(G)$. De plus si G est un arbre alors $2i(G) + 1 \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$, enfin, nous caractériserons les arbres atteignant ces bornes.

4.2 Complexité algorithmique

Dans cette partie, nous considérons le problème de décision associé à la fonction de domination Romaine double indépendante

FONCTION DOUBLE ROMAINE INDEPENDANTE (FDRI)

Instance : Un graphe G , un entier positif k .

Question : Le graphe G admet-il une fonction double Romaine indépendante de poids au plus k ?

Nous montrons que ce problème est NP-complet en réduisant le problème 3-Couverture-Exacte (X3C) (voir page 44) à notre problème.

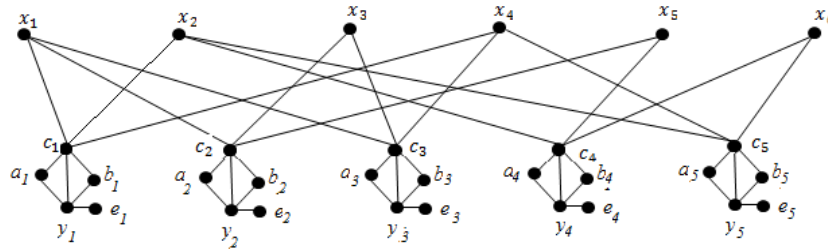


Figure 17. Exemple de construction du graphe G .

Théorème 78 *Le problème FONCTION DOUBLE ROMAINE INDEPENDANTE est NP-complet.*

Preuve. Il est clair que FDRI est un problème de \mathcal{NP} puisque on peut vérifier en temps polynomial qu'une fonction $f : V \rightarrow \{0, 2, 3\}$ a un poids au plus k et qu'elle est Romaine double indépendante. Voyons maintenant comment transformer toute instance X, C du problème 3-Couverture-Exacte en une instance G du problème FONCTION DOUBLE ROMAINE INDEPENDANTE telle que l'un a une solution

si et seulement si l'autre possède une solution. Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ et $C = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ une instance quelconque de X3C.

Pour tout $x_i \in X$, on crée un sommet x_i et pour tout $C_j \in C$, on construit un graphe H_j à 5 sommets obtenu par une étoile $K_{1,4}$ de centre y_j et de feuilles a_j, b_j, c_j, e_j en ajoutant les arêtes $c_j a_j$ et $c_j b_j$. Pour obtenir le graphe G , on ajoute les arêtes $c_j x_i$ si $x_i \in C_j$ (voir Figure 17 pour un exemple). Posons $k = 3t + 2q$.

Supposons que l'instance X, C de X3C possède une solution C' . Construisons une fonction Romaine double indépendante f de G comme suit : pour tout $C_j \in C'$, poser $f(c_j) = 3$, $f(e_j) = 2$, $f(y_j) = f(a_j) = f(b_j) = 0$; pour tout $C_j \in C - C'$, poser $f(y_j) = 3$, $f(c_j) = f(y_j) = f(a_j) = f(b_j) = 0$. Par ailleurs, poser $f(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 3q\}$. Puisque C' est une solution de X3C, alors $|C'| = q$ et donc le nombre de c_j avec $f(c_j) = 3$ est q , ayant des voisinages disjoints dans $\{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$. Ainsi, il est facile de voir que f est une fonction Romaine double indépendante f de G de poids $f(V(G)) = 5q + 3(t - q) = k$.

Inversement, soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une fonction Romaine double indépendante de G de poids au plus k . Il est clair que $f(V(H_j)) \in \{3, 5\}$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Par conséquent, $X \cap V_0 \neq \emptyset$. Soit $X_1 = \{x_i \in X : f(x_i) \neq 0\}$ et soit $Y = \{c_j : f(c_j) \neq 0\}$. Il est à noter que tout $c_j \in Y$ satisfait $f(c_j) = 3$ à cause des sommets a_j et b_j , et par conséquent $f(y_j) = 0$, $f(e_j) = 2$. Dans ce cas, tout sommet $x_i \in X_1$ doit satisfaire $f(x_i) = 2$. Maintenant, puisque $f(V(H_j)) \in \{3, 5\}$, nous aurons $5|Y| + 3(t - |Y|) + 2|X_1| = 3t + 2q$ et donc $|Y| + |X_1| = q$. Aussi, puisque tout sommet de $X - X_1$ doit avoir un voisin dans Y et que tout sommet de Y a exactement trois voisins dans $X - X_1$, on aura $3|Y| \geq 3q - |X_1|$. En combinant ces deux égalités, on obtient $|Y| = q$ et $|X_1| = 0$. Par conséquent, $C' = \{C_j : f(c_j) = 3\}$ est une 3-Couverture-Exacte pour C . \square

4.3 Comparaison avec le nombre de domination indépendant

Dans cette partie nous verrons que pour tout graphe G , $2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$. De plus, si G est un arbre alors $2i(G) + 1 \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$, où une caractérisation des arbres atteignant les deux bornes est donnée.

Proposition 79 *Pour tout graphe G on a $2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$.*

Preuve. Soit D un $i(G)$ -ensemble. Il est clair que $g = (V - D, \emptyset, D)$ est une FDRDI dans G , d'où $i_{dR}(G) \leq 3i(G)$.

Maintenant, soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G)$ -fonction, puisque $V_2 \cup V_3$ est un ensemble indépendant maximal dans G , alors $i(G) \leq |V_3| + |V_2|$. D'où $i_{dR}(G) = 3|V_3| + 2|V_2| \geq 2(|V_3| + |V_2|) \geq 2i(G)$. \square

A noter que la borne supérieure est atteinte pour K_n et la borne inférieure est atteinte pour C_4 .

Proposition 80 *Si G est un graphe tel que $i_{dR}(G) = 2i(G)$, alors pour toute $i_{dR}(G)$ -fonction $f = (V_0, V_2, V_3)$, on a $V_3 = \emptyset$.*

Preuve. Soient G un graphe tel que $i_{dR}(G) = 2i(G)$ et $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G)$ -fonction. Alors

$$2i(G) \leq 2|V_3^f| + 2|V_2^f| \leq 3|V_3^f| + 2|V_2^f| = i_{dR}(G) = 2i(G).$$

On a donc $2|V_3^f| + 2|V_2^f| = 3|V_3^f| + 2|V_2^f|$, d'où $|V_3^f| = 0$. \square

Proposition 81 *Pour tout graphe G , $i_{dR}(G) \geq i_{\{R2\}}(G) + i(G)$.*

Preuve. Soient G un graphe et $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G)$ -fonction. Rappelons que $i(G) \leq |V_3| + |V_2|$. On définit la fonction g comme suit : $g(u) = f(u) - 1$ pour tout $u \in V_2 \cup V_3$ et $g(u) = f(u)$ pour tout $u \in V_0$. Il est clair que g est F{2}DRI

dans G de poids $w(g(G)) = 2|V_3| + |V_2|$ et donc $i_{\{R2\}}(G) \leq 2|V_3| + |V_2|$. D'où $i_{dR}(G) = 3|V_3| + 2|V_2| = 2|V_3| + |V_2| + |V_3| + |V_2| \geq i_{\{R2\}}(G) + i(G)$. \square

Chellali et Jafari Rad ont montré dans [17] que pour tout arbre T , on a $i_{r2}(T) \geq i(T) + 1$, donc :

$$\begin{aligned} i_{dR}(T) &\geq i_{\{R2\}}(T) + i(T) \\ &= i_{r2}(T) + i(T) \\ &\geq 2i(T) + 1 \end{aligned}$$

d'où le corollaire suivant :

Corollaire 82 *Pour tout arbre T , $i_{dR}(T) \geq 2i(T) + 1$.*

Nous entreprenons maintenant la caractérisation des arbres T tels que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$. Nous rappelons la définition de la classe des arbres \mathcal{T}^3 défini par Chellali et Jafari Rad dans [17].

\mathcal{T}^3 est la classe des arbres T tel que T est une étoile, une double étoile, $Su(S_{p,q})$ pour $p, q \geq 1$, $Su(K_{1,n})$ pour $n \geq 2$ ou T est obtenu de $Su(K_{1,n})$ pour $n \geq 2$ en ajoutant au moins une feuille au sommet central de $Su(K_{1,n})$ et possiblement quelques feuilles aux sommets support de $Su(K_{1,n})$ tel que le nombre de feuilles à distance deux du centre de $Su(K_{1,n})$ est au plus le degré du centre de $Su(K_{1,n})$ moins un. Pour des raison de concision, nous notons par $\mathcal{C}_{i_{dR}}$ tous les arbres obtenu de la dernière manière décrite par les mêmes auteurs.

Proposition 83 *Si T est un arbre tel que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$, alors $i_{r2}(T) = i(T) + 1$.*

Preuve. Soit T un arbre tel que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$. D'après la Proposition 81, on a $i_{\{R2\}}(T) + i(T) \leq i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$ et donc $i_{\{R2\}}(T) = i_{r2}(T) \leq i(T) + 1$. Sachant que $i_{r2}(T) \geq i(T) + 1$, on en déduit que $i_{r2}(T) = i(T) + 1$. \square

La Proposition 83 montre que si T est un arbre tel que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$, alors $T \in \mathcal{T}^3$, cependant, tout arbre $T \in \mathcal{T}^3$ ne vérifie pas forcément que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$, citons l'exemple de $Su(K_{1,3})$ où $i_{dR}(Su(K_{1,3})) = 8 > 2i(Su(K_{1,3})) + 1 = 7$. D'où l'objectif d'identifier les arbres $T \in \mathcal{T}^3$ vérifiant $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$. Pour cela, étant donné un graphe G , on définit pour une $i_{dR}(G)$ -fonction $f = (V_0, V_2, V_3)$, les ensembles $V_0'' = \{u \in V_0 : N(u) \cap V_3 = \emptyset\}$ et $N^*(u) = N(u) \cap (V_2 \cup V_3)$ pour tout $u \in V_0$.

Lemme 84 *Si T est un arbre tel que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$, alors pour toute $i_{dR}(T)$ -fonction $f = (V_0, V_2, V_3)$, on a $i(T) = |V_3| + |V_2|$, $|V_3| = 1$ et $|V_0''| = 0$.*

Preuve. Soit T un arbre tel que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$. Soit une $i_{dR}(T)$ -fonction $f = (V_0, V_2, V_3)$. Alors $i_{dR}(T) = 3|V_3| + 2|V_2| = 2i(T) + 1$. Sachant que $2i(T) \leq 2|V_3 \cup V_2| = 2|V_3| + 2|V_2|$, on en déduit que $|V_3| \leq 1$. De plus si $|V_3| = 0$, alors $2|V_2| = 2i(T) + 1$, ce qui est impossible. D'où $|V_3| = 1$ et $i(T) = |V_3| + |V_2|$.

Supposons maintenant que $V_0'' \neq \emptyset$ et soit $u \in V_0''$. Alors $S = \{x : f(x) \neq 0, x \notin N^*(u)\} \cup \{u\}$ est un ensemble indépendant de T avec

$$2|S| = i_{dR}(T) - 2|N^*(u)| + 2 = 2i(T) + 3 - 2|N^*(u)|.$$

Puisque $|N^*(u)| \geq 2$, alors $2|S| \leq 2i(T) - 1$, contradiction. Donc pour toute $i_{dR}(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, on a $|V_0''| = 0$. \square

Proposition 85 *Si T est un arbre tel que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$, alors $\text{diam}(T) \leq 4$.*

Preuve. Soient T un arbre tel que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$ et $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $i_{dR}(T)$ -fonction. D'après le Lemme 84, $|V_3^f| = 1$ et $|V_0''| = 0$. Soit $V_3 = \{u\}$. Il est clair que tout sommet de T est à distance au plus 2 de u et donc $\text{Diam}(T) \leq 4$. \square

Pour un graphe G et un sommet $u \in V(G)$, on note par $N_2(u)$ l'ensemble des sommets à exactement distance 2 de u .

Soit $\mathcal{T}_{i_{dR}} = \{T : i_{dR}(T) = 2i(T) + 1\}$. Nous avons déjà vu que $\mathcal{T}_{i_{dR}} \subset \mathcal{T}^3$. Il est clair que l'étoile et la double étoile appartiennent à $\mathcal{T}_{i_{dR}}$. En effet, on a $i_{\{R2\}}(K_{1,n}) = 3 = 2i(K_{1,n}) + 1$ et pour la double étoile $S_{p,q}$ avec $p \leq q$, on a $i_{\{R2\}}(S_{p,q}) = 3 + 2p = 2i(S_{p,q}) + 1$. On a vu aussi par la Proposition 85 que si $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$, alors $\text{diam}(T) \leq 4$. On peut donc exclure $S(S_{p,q})$. Par ailleurs, si $T \simeq S(K_{1,n})$ avec $n \geq 2$ de centre x , alors toute $i_{dR}(S(K_{1,n}))$ -fonction $f = (V_0, V_2, V_3)$, ou bien $x \in V_0$ et donc $|V_3| = \text{deg}(x) \geq 2$, ou bien $x \in V_2$ et donc $|V_3| = 0$. Les deux situations contredisent le Lemme 84. Donc on peut exclure $S(K_{1,n})$. Si maintenant $T \in \mathcal{C}_{i_{dR}}$, alors il est clair que $i_{dR}(T) = 3 + 2N_2(x) = 2i(T) + 1$. et donc $\mathcal{C}_{i_{dR}} \subset \mathcal{T}_{i_{dR}}$.

Ainsi pour résumer, $\mathcal{T}_{i_{dR}} = \mathcal{T}^3 - \mathcal{K}$ où \mathcal{K} est la classe des arbres T obtenus en subdivisant une étoile ou une double étoile.

Corollaire 86 *Un arbre T vérifie $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$, si et seulement si $T \in \mathcal{T}_{i_{dR}}$.*

4.4 Caractérisation des arbres T tels que $i_{dR}(T) = 3i(T)$

Commençons par donner une condition nécessaire et suffisante pour les graphes G avec $i_{dR}(G) = 3i(G)$.

Proposition 87 *Pour tout graphe G , $i_{dR}(G) = 3i(G)$ si et seulement s'il existe f une $i_{dR}(G)$ -fonction avec $V_2 = \emptyset$.*

Preuve. Supposons que $i_{dR}(G) = 3i(G)$, et soit S un $i(G)$ -ensemble. Alors $f = (V(G) - S, \emptyset, S)$ est une $i_{dR}(G)$ -fonction avec $V_2 = \emptyset$.

Inversement, soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $i_{dR}(G)$ -fonction telle que $V_2 = \emptyset$. Alors, $i_{dR}(G) = 3|V_3| \leq 3i(G)$. Il est clair que $i(G) \leq |V_3|$ puisque V_3 est un dominant indépendant dans G , d'où $i(G) = |V_3|$. Par conséquent $i_{dR}(G) = 3i(G)$. \square

Les observations suivantes découlent directement de la proposition précédente.

Observation 88 Si $i_{dR}(G) = 3i(G)$, alors pour toute $i_{dR}(G)$ -fonction $f = (V_0, \emptyset, V_3)$, on a $pn(v, V_3) \neq \emptyset$ pour tout sommet $v \in V_3$.

Observation 89 Si G est un graphe tel que $i_{dR}(G) = 3i(G)$, alors l'ensemble des sommets supports de G est un ensemble indépendant.

Observation 90 Si G est un graphe tel que $i_{dR}(G) = 3i(G)$, alors il existe une $i_{dR}(G)$ -fonction $f = (V_0, \emptyset, V_3)$ telle que tout sommet support de G est dans V_3 et toute feuille est dans V_0 .

Le résultat suivant sera utile pour la suite.

Lemme 91 Soit w un sommet d'un arbre T_w tel que toute feuille de T_w , à l'exception peut être pour w est à distance deux de w . Soit u un sommet d'un arbre non trivial T_u et soit T l'arbre obtenu par T_w et T_u en ajoutant l'arête uw . Alors $i(T) = i(T_u) + d_{T_w}(w)$.

Preuve. Notons par S_w l'ensemble des sommets supports dans T_w et soit L_w l'ensemble des feuilles voisines des sommets de S_w . Il est clair que $|L_w| \geq |S_w| = d_{T_w}(w)$. Si R est un $i(T_u)$ -ensemble, alors $R \cup S_w$ est un ensemble indépendant maximal de T , et donc $i(T) \leq i(T_u) + |S_w|$.

Maintenant, parmi tous les $i(T)$ -ensembles, soit D un contenant le maximum de sommets de S_w . Il est clair que $|D \cap V(T_w)| \geq |S_w|$. Supposons d'abord, que $w \notin D$. S'il existe un sommet $x \in S_w$ tel que $x \notin D$, alors D contient toutes les feuilles adjacentes à x mais dans ce cas, en les remplaçant par x dans D , on obtient un $i(T)$ -ensemble contenant plus de sommets de S_w , ce qui contredit le choix de D . Donc $S_w \subset D$. Par conséquent $D - S_w$ est un ensemble indépendant maximal de T_u , ce qui donne $i(T_u) \leq i(T) - |S_w|$. D'où $i(T) = i(T_u) + d_{T_w}(w)$. Supposons maintenant que $w \in D$. Alors $L_w \subset D$. Si $|N(u) \cap D| \geq 2$, alors $S_w \cup D - (L_w \cup \{w\})$ est un ensemble indépendant maximal de T de cardinal inférieur à celui de D , ce qui est impossible.

D'où $|N(u) \cap D| = 1$, en d'autres termes w est l'unique voisin de u dans D . Mais dans ce cas, $S_w \cup \{u\} \cup D - (L_w \cup \{w\})$ est un $i(T)$ -ensemble contenant plus de sommets de S_w , contradiction avec le choix de D . \square

Pour des besoins ulterieurs, nous introduisons quelques notions et notations.

Définition 92 *Pour un sommet x de G , une semi-fonction de domination Romaine double indépendante (SFDRDI) relative à x est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 2, 3\}$ telle que :*

- i) $V_2 \cup V_3$ est un ensemble indépendant,
- ii) $f(x) = 0$ et x possède un voisin w tel que $f(w) > 0$,
- iii) tout sommet de $V(G) - \{x\}$ est Romain double dominé.

Par la définition précédente, soit $i_{dR}(G : x) = \min\{f(V(G)) : f \text{ est une SFDRDI}\}$.

On dira que f est une $i_{dR}(G : x)$ -fonction si f est une SFDRDI de G et $w(f) = i_{dR}(G : x)$. Il est à signaler que si f une $i_{dR}(G : x)$ -fonction, alors f est une FDRDI pour $G - x$ et donc $i_{dR}(G - x) \leq i_{dR}(G : x)$. Ainsi, définissons pour la suite les ensembles suivants :

$$W_G = \{v \in V : i_{dR}(G - v) = i_{dR}(G : v)\}.$$

$$W_G^1 = \{v \in V : i_{dR}(G : v) \geq i_{dR}(G)\}.$$

$$W_G^2 = \{v \in V : f(v) \neq 0 \text{ pour toute } i_{dR}(G)\text{-fonction } f\}.$$

Par ailleurs, il est à noter que pour un sommet x donné, les quantités $i_{dR}(G : x)$ et $i_{dR}(G)$ sont incomparables. En effet, prenons l'exemple d'un arbre T obtenu par une étoile $K_{1,4}$ de centre y en subdivisant trois de ses arêtes une seule fois. Soit x l'unique feuille adjacente à y dans T . Il est simple de voir que $i_{dR}(T) = 9$, $i_{dR}(T : y) = 11$ et $i_{dR}(T : x) = 8$.

Afin de donner une caractérisation des arbres T tels que $i_{dR}(T) = 3i(T)$, on définit les familles des arbres suivantes :

\mathcal{F} la famille des arbres T enracinés tels que toute feuille est à distance deux de la racine et $2|L(T)| + 2 > 3|S(T)|$.

\mathcal{F}_0 la famille des arbres T enracinés tels que toute feuille est à distance deux de la racine et $2|L(T)| + 2 = 3|S(T)|$.

\mathcal{F}_1 la famille des arbres T enracinés tels que toute feuille est à distance deux de la racine et $2|L(T)| + 2 < 3|S(T)|$.

Soit \mathcal{T} la famille des arbres T pouvant être obtenus de la séquence T_1, T_2, \dots, T_j tel que T_1 est une étoile $K_{1,r}$, pour $r \geq 1$ et pour tout $i \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu de T_i en exécutant l'une des opérations suivantes :

- **Opération O_1** : Soit $w \in V(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant l'étoile $K_{1,s}$ pour $s \geq 2$ et en reliant une feuille u de $K_{1,s}$ au sommet w
- **Opération O_2** : Soit $w \in V(T_i)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F} en reliant w au centre de T .
- **Opération O_3** : Soit $w \in W_{T_i}^1$ vérifiant $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_i - w) + 1$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F}_0 en reliant w au centre de T .
- **Opération O_4** : Soit T un arbre de \mathcal{F}_1 . Soit $w \in W_{T_i}^2 \cap W_{T_i}$ vérifiant $i_{dR}(T_i) + 3|S(T)| - 2 - 2|L(T)| \leq i_{dR}(T_i - w)$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F}_1 en reliant w au centre de T .
- **Opération O_5** : Soit T un arbre de \mathcal{F}_1 . Soit $w \in W_{T_i}^2 - W_{T_i}$ vérifiant $i_{dR}(T_i) + 3|S(T)| - 2 - 2|L(T)| \leq i_{dR}(T_i - w) + 1$, alors T_{i+1} est obtenu de T_i en ajoutant un arbre T de la famille \mathcal{F}_1 en reliant w au centre de T .

Dans les démonstrations des lemmes suivants, soit f_{i+1} une $i_{dR}(T_{i+1})$ -fonction et f_i la fonction f_{i+1} réduite à T_i .

Lemme 93 *Si $i_{dR}(T_i) = 3i(T_i)$ et T_{i+1} est obtenu de T_i par l'opération \mathcal{O}_1 , alors $i_{dR}(T_{i+1}) = 3i(T_{i+1})$.*

Preuve. Soit y le centre de l'étoile ajoutée $K_{1,s}$. D'après le Lemme 91, $i(T_{i+1}) = i(T_i) + 1$. Aussi, $i_{dR}(T_{i+1}) \leq i_{dR}(T_i) + 3$ puisque toute $i_{dR}(T_i)$ -fonction peut être étendue en une FDRDI en affectant un 3 à y et un 0 à tout voisin de y . Par ailleurs, il est clair que $\sum_{x \in N[y]} f_{i+1}(x) \geq 3$. Maintenant si $f_{i+1}(u) = 0$, alors f_i est une FDRDI de T_i de poids $i_{dR}(T_{i+1}) - 3$, et donc $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3$. Si $f_{i+1}(u) = 2$, alors $\sum_{x \in N[y]} f_{i+1}(x) \geq 4$ et $f_{i+1}(w) = 0$. Dans ce cas, il existe un voisin de w dans T_i , disons w' , tel que $f_{i+1}(w') > 0$ et la minimalité de f_{i+1} entraîne que $f_{i+1}(w') = 2$. Ainsi, la fonction g définie sur $V(T_i)$ par $g(w') = 3$, $g(x) = f_{i+1}(x)$ pour toute $x \in V(T_i) - \{w'\}$ est une FDRDI de T_i de poids $i_{dR}(T_{i+1}) - 3$ ce qui donne $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3$. Enfin, supposons que $f_{i+1}(u) = 3$. Alors $\sum_{x \in N[y]} f_{i+1}(x) \geq 5$ et $f_{i+1}(w) = 0$. De plus, la minimalité de f_{i+1} entraîne que $f_{i+1}(x) = 0$ pour tout voisin x de w dans T_i . Ainsi, la fonction g définie sur $V(T_i)$ par $g(w) = 2$, $g(x) = f_{i+1}(x)$ pour tout $x \in V(T_i) - \{w\}$ est une FDRDI de T_i de poids $i_{dR}(T_{i+1}) - 3$ et donc $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3$. Par conséquent $i_{dR}(T_{i+1}) = i_{dR}(T_i) + 3$. En utilisant les faits que $i_{dR}(T_i) = 3i(T_i)$ et $i(T_{i+1}) = i(T_i) + 1$, on obtient alors $i_{dR}(T_{i+1}) = 3i(T_{i+1})$. \square

Lemme 94 *Si $i_{dR}(T_i) = 3i(T_i)$ et T_{i+1} est obtenu de T_i par l'opération \mathcal{O}_2 , alors $i_{dR}(T_{i+1}) = 3i(T_{i+1})$.*

Preuve. Soit x la racine de l'arbre $H \in \mathcal{F}$. D'après le Lemme 91, $i(T_{i+1}) = i(T_i) + |S(H)|$. Aussi, il est facile de voir que $i_{dR}(T_{i+1}) \leq i_{dR}(T_i) + 3|S(H)|$. Montrons que $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(H)|$. Il est à noter que puisque $H \in \mathcal{F}$, alors $\sum_{u \in V(H)} f_{i+1}(u) \geq 3|S(H)|$. Maintenant si $f_{i+1}(x) = 0$, alors f_i est une FDRDI de T_i de poids $i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(H)|$ et par conséquent $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(H)|$. Supposons donc que $f_{i+1}(x) \in \{2, 3\}$. Si $f_{i+1}(x) = 2$, alors $f_{i+1}(w) = 0$. De plus toute feuille de H est affectée la valeur 2. Notons dans ce cas que $f_{i+1}(V(H)) = 2 + 2|L(H)| > 3|S(H)|$ puisque $H \in \mathcal{F}$. Par ailleurs la minimalité de f_{i+1} entraîne que $f_{i+1}(u) \in \{0, 2\}$ pour tout $u \in N_{T_i}(w)$. Aussi, puisque $f_{i+1}(x) = 2$, il

existe $w' \in N_{T_i}(w)$ tel que $f_{i+1}(w') = 2$. Ainsi, la fonction g définie sur $V(T_i)$ par $g(w') = 3$, $g(u) = f_{i+1}(u)$ pour tout $u \in V(T_i) - \{w'\}$ est une FDRDI de T_i de poids $i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(H)|$, et l'inégalité désirée est obtenue. Enfin, si $f_{i+1}(x) = 3$, alors $f_{i+1}(w) = 0$ et la minimalité de f_{i+1} entraîne que $f_{i+1}(u) = 0$ pour tout $u \in N_{T_i}(w)$. Puisque $f_{i+1}(V(H)) = 3 + 2|L(H)| \geq 3|S(H)| + 2$, alors la fonction g définie sur $V(T_i)$ par $g(w) = 2$, $g(u) = f_{i+1}(u)$ pour tout $u \in V(T_i) - \{w\}$ est une FDRDI de T_i de poids au plus $i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(H)|$, et l'inégalité désirée est obtenue. Par conséquent $i_{dR}(T_{i+1}) = i_{dR}(T_i) + 3|S(H)|$. En utilisant les faits que $i_{dR}(T_i) = 3i(T_i)$ et $i(T_{i+1}) = i(T_i) + |S(H)|$, il est clair que $i_{dR}(T_{i+1}) = 3i(T_{i+1})$. \square

Lemme 95 *Si $i_{dR}(T_i) = 3i(T_i)$ et T_{i+1} est obtenu de T_i par l'opération \mathcal{O}_3 , alors $i_{dR}(T_{i+1}) = 3i(T_{i+1})$.*

Preuve. Soit $w \in W_{T_i}^1$ vérifiant $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_i - w) + 1$ et soit $F \in \mathcal{F}_0$ un arbre enraciné vers x attaché à w par l'arête xw . D'après le Lemme 91, on a $i(T_{i+1}) = i(T_i) + |S(F)|$. D'autre part, $i_{dR}(T_{i+1}) \leq i_{dR}(T_i) + 3|S(F)|$ puisque toute $i_{dR}(T_i)$ -fonction peut être étendue à une IDRDF de T_{i+1} en assignant un 3 à tout support de F et un 0 aux reste des sommets de F . Montrons maintenant que $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)|$. Si $f_{i+1}(w) > 0$, alors il est clair que f_i est une IDRDF de T_i de poids $i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)| \geq i_{dR}(T_i)$. Donc on peut supposer pour la suite que $f_{i+1}(w) = 0$. Si $f_{i+1}(x) = 2$, alors f_i est une SFDRDI de T_i de poids $w(f_i) = i_{dR}(T_{i+1}) - f_{i+1}(F) = i_{dR}(T_{i+1}) - 2 - 2|L(F)| = i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)|$, sachant que $w \in W_{T_i}^1$, on aura

$$i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_i : w) \leq w(f) = i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)|.$$

Enfin, si $f_{i+1}(x) = 3$, alors f_i est une FDRDI de $T_i - w$ de poids

$$\begin{aligned}
w(f) &= i_{dR}(T_{i+1}) - f_{i+1}(F) \\
&= i_{dR}(T_{i+1}) - 3 - 2|L(F)| = i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)| - 1.
\end{aligned}$$

Sachant maintenant que $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_i - w) + 1$, on aura donc

$$i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_i - w) + 1 \leq w(f_i) + 1 = i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)|.$$

Dans tous les cas, $i_{dR}(T_{i+1}) = i_{dR}(T_i) + 3|S(F)| = 3i(T_i) + 3|S(F)| = 3i(T_{i+1})$. \square

Lemme 96 *Si $i_{dR}(T_i) = 3i(T_i)$ et T_{i+1} est obtenu de T_i par l'opération \mathcal{O}_4 ou \mathcal{O}_5 , alors $i_{dR}(T_{i+1}) = 3i(T_{i+1})$.*

Preuve. Soit $w \in W_{T_i}^2$ tel que $i_{dR}(T_i) + 3|S(F)| - 2 - 2|L(F)| \leq \min\{i_{dR}(T_i - w) + 1, i_{dR}(T_i : w)\}$. Soit $F \in \mathcal{F}_1$ un arbre enraciné vers x attaché à w par l'arête xw . D'après le Lemme 91, on a $i(T_{i+1}) = i(T_i) + |S(F)|$. Aussi, $i_{dR}(T_{i+1}) \leq i_{dR}(T_i) + 3|S(F)|$. Pour avoir l'égalité, il suffit de montrer que $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)|$. Si $f_{i+1}(w) > 0$, alors il est clair que f_i est une IDRDF de T_i de poids $i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)| \geq i_{dR}(T_i)$. Donc, supposons que $f_{i+1}(w) = 0$. Si $f_{i+1}(x) = 3$, alors f_i est une FDRDI de $T_i - w$ de poids

$$\begin{aligned}
w(f_i) &= i_{dR}(T_{i+1}) - f_{i+1}(F) \\
&= i_{dR}(T_{i+1}) - 3 - 2|L(F)|.
\end{aligned}$$

Donc $i_{dR}(T_i - w) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3 - 2|L(F)|$. Sachant que $i_{dR}(T_i) + 3|S(F)| - 2 - 2|L(F)| \leq i_{dR}(T_i - w) + 1$, on aura

$$\begin{aligned}
i_{dR}(T_i) + 3|S(F)| - 2 - 2|L(F)| &\leq i_{dR}(T_i - w) + 1 \\
&\leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3 - 2|L(F)| + 1 \\
&= i_{dR}(T_{i+1}) - 2 - 2|L(F)|.
\end{aligned}$$

D'où $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)|$.

Enfin, si $f_{i+1}(x) = 2$, alors f_i est une SFDRDI de T_i de poids $w(f_i) = i_{dR}(T_{i+1}) - 2 - 2|L(F)|$. Sachant que $i_{dR}(T_i) + 3|S(F)| - 2 - 2|L(F)| \leq i_{dR}(T_i : w)$, on aura

$$\begin{aligned} i_{dR}(T_i) + 3|S(F)| - 2 - 2|L(F)| &\leq i_{dR}(T_i : w) \\ &\leq i_{dR}(T_{i+1}) - 2 - 2|L(F)|. \end{aligned}$$

D'où $i_{dR}(T_i) \leq i_{dR}(T_{i+1}) - 3|S(F)|$.

Dans tous les cas, on obtient $i_{dR}(T_{i+1}) = i_{dR}(T_i) + 3|S(F)| = 3i(T_{i+1})$. \square

Théorème 97 *Soit T un arbre. Alors $i_{dR}(T) = 3i(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. Supposons que $T \in \mathcal{T}$. Alors il existe une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) tel que $T_1 = K_{1,r}$ ($r \geq 1$), et si $k \geq 2$, alors T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_5$ pour $i = 1, 2, \dots, k-1$. On utilise une induction sur le nombre d'opérations utilisées pour construire T . Il est clair que si $k = 1$, alors le résultat est vrai. Supposons que le résultat est vrai pour tout arbre $T \in \mathcal{T}$ pouvant être obtenu par une séquence d'opérations de longueur $k-1$ et soit $T' = T_{k-1}$. Par induction, on a $i_{dR}(T') = 3i(T')$. Puisque $T = T_k$ est obtenu à partir de T' par l'une des opérations $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_5$, il s'ensuit des Lemmes 93, 94, 95 et 96 que $i_{dR}(T) = 3i(T)$.

Maintenant pour montrer que si $i_{dR}(T) = 3i(T)$ alors $T \in \mathcal{T}$, on utilise une induction sur $i(T)$. Si $i(T) = 1$, alors T est une étoile d'ordre au moins deux (puisque $i_{dR}(K_1) = 2 < 3i(K_1)$) et donc $T \in \mathcal{T}$. Soit $i(T) \geq 2$ et supposons que le résultat est vrai pour tout arbre T' tel que $i_{dR}(T') = 3i(T')$ et $i(T') < i(T)$. Notons que puisque $i(T) > 1$, alors $\text{diam}(T) \geq 3$. Par ailleurs, si $\text{diam}(T) = 3$, alors T est une étoile double ce qui contredit l'observation 89. Donc on peut supposer que $\text{diam}(T) \geq 4$.

Soit $xx_1x_2\dots x_d$ une chaîne diamétrale de T , avec $d \geq 4$. Soit T_1 la composante de $T - x_2x_3$ contenant x_2 et soit $T_2 = T - T_1$. Il est à noter que T_2 est non trivial puisque $\text{diam}(T) \geq 4$.

Supposons d'abord que $d_T(x_2) = 2$. Par le Lemme 91, $i_{dR}(T) = i(T_2) + 1$. Aussi, il est clair que $i_{dR}(T) \leq i_{dR}(T_2) + 3$. Il s'ensuit que

$$i_{dR}(T) \leq i_{dR}(T_2) + 3 \leq 3i(T_2) + 3 = 3i(T) = i_{dR}(T),$$

et donc $i_{dR}(T_2) = 3i(T_2)$. Puisque $i(T_2) < i(T)$, alors par induction sur T_2 , on a $T_2 \in \mathcal{T}$. Par conséquent, $T \in \mathcal{T}$ car il est obtenu à partir de T_2 en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 .

Supposons maintenant que $d_T(x_2) \geq 3$. D'après la Proposition 89, x_2 n'est pas un sommet support et donc toute feuille dans T_1 est à distance 2 de x_2 . D'où, $T_1 \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$. Posons $d_T(x_2) = k$. D'après le Lemme 91, $i(T) = i_{dR}(T_2) + (k - 1)$. Montrons maintenant que $i_{dR}(T) = i_{dR}(T_2) + 3(k - 1)$. Puisque toute $i_{dR}(T_2)$ -fonction peut être étendue à une FDRDI de T en affectant un 3 à tout sommet support de T_1 et un 0 aux reste des sommets de T_1 , on a $i_{dR}(T) \leq i_{dR}(T_2) + 3(k - 1)$. Par ailleurs, si $i_{dR}(T) < i_{dR}(T_2) + 3(k - 1)$, alors

$$3i(T) = i_{dR}(T) < i_{dR}(T_2) + 3(k - 1) \leq 3i(T_2) + 3(k - 1) = 3i(T),$$

d'où la contradiction. Ainsi on a $i_{dR}(T) = i_{dR}(T_2) + 3(k - 1)$, ce qui donne $i_{dR}(T_2) = 3i(T_2)$. Puisque $i(T_2) < i(T)$, alors par induction sur T_2 on a $T_2 \in \mathcal{T}$. Examinons maintenant les situations suivantes.

Cas 1. $2|L(T_1)| + 2 > 3|S(T_1)|$. Alors $T_1 \in \mathcal{F}$ et par suite $T \in \mathcal{T}$ puisque il est obtenu à partir de T_2 en utilisant l'Opération \mathcal{O}_2 .

Cas 2. $2|L(T_1)| + 2 = 3|S(T_1)|$. Alors $T_1 \in \mathcal{F}_0$. Montrons d'abord que $x_3 \in W_{T_2}^1$. Supposons le contraire, que $x_3 \notin W_{T_2}^1$ et soit h_1 une $i_{dR}(T_2 : x_3)$ -fonction. Alors $i_{dR}(T_2 : x_3) < i_{dR}(T_2)$. Définissons la fonction g_1 à partir de h_1 comme suit : $g_1(u) = h_1(u)$ pour tout $u \in T_2$, $g_1(u) = 2$ pour tout $u \in \{x_2\} \cup L(T_1)$ et $g_1(u) = 0$ pour tout $u \in S(T_1)$. Il est clair que g_1 est une FDRDI T de poids $w(g_1) = i_{dR}(T_2 : w) + 2 + 2|L(T_1)| < i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)|$, d'où la contradiction. Donc $x_3 \in W_{T_2}^1$.

Montrons maintenant que x_3 vérifie aussi $i_{dR}(T_2) \leq i_{dR}(T_2 - x_3) + 1$. Supposons le contraire et soit h_2 une $i_{dR}(T - x_3)$ -fonction. Alors $i_{dR}(T_2) > i_{dR}(T_2 - x_3) + 1$. Définissons la fonction g_2 à partir de h_2 comme suit : $g_2(x_3) = 0$, $g_2(u) = h_2(u)$ pour tout $u \in V(T_2) - x_3$, $g_2(x_2) = 3$, $g_2(u) = 2$ pour tout $u \in L(T_1)$ et $g_2(u) = 0$ pour tout $u \in S(T_1)$. Il est simple de voir que g_2 est une FDRDI de poids $i_{dR}(T_2 - x_3) + 3 + 2|L(T_1)|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} i_{dR}(T) &\leq i_{dR}(T_2 - x_3) + 3 + 2|L(T_1)| \\ &< i_{dR}(T_2) + 2 + 2|L(T_1)| \\ &= i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| = i_{dR}(T), \end{aligned}$$

d'où la contradiction. Ainsi, x_3 vérifie bien $i_{dR}(T_2) \leq i_{dR}(T_2 - x_3) + 1$. De là, on en déduit que $T \in \mathcal{T}$ puisque il est obtenu à partir de T_2 en utilisant l'Opération \mathcal{O}_3 .

Cas 3. $2|L(T_1)| + 2 < 3|S(T_1)|$. Donc $T_1 \in \mathcal{F}_1$. Montrons que $x_3 \in W_{T_2}^2$. Supposons le contraire et soit h_3 une $i_{dR}(T_2)$ -fonction telle que $h_3(x_3) = 0$. Alors h_3 peut être étendue en une FDRDI de T en affectant un 2 à x_2 et à toute feuille de T_1 et un 0 à tout sommet support de T_1 . Il s'ensuit que $i_{dR}(T) \leq i_{dR}(T_2) + 2|L(T_1)| + 2 < i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)|$, d'où la contradiction. Donc $x_3 \in W_{T_2}^2$.

Montrons maintenant que x_3 vérifie $i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| - 2 - 2|L(T_1)| \leq \min\{i_{dR}(T_2 : x_3), i_{dR}(T_2 - x_3) + 1\}$. Pour cela, supposons le contraire et considérons alors les deux sous-cas suivants :

Cas 3.1. $i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| - 2 - 2|L(T_1)| > i_{dR}(T_2 : x_3)$. Soit h_4 une $i_{dR}(T_2 : x_3)$ -fonction. Alors la fonction g_4 définie par $g_4(u) = h_4(u)$ pour tout $u \in V(T_2)$, $g_4(u) = 2$ pour tout $u \in \{x_2\} \cup L(T_1)$ et $g_4(u) = 0$ pour tout $u \in S(T_1)$ est une FDRDI de T de poids $w(g_4) = i_{dR}(T_2 : x_3) + 2 + 2|L(T_1)|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
i_{dR}(T) &\leq i_{dR}(T_2 : x_3) + 2 + 2|L(T_1)| \\
&< (i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| - 2 - 2|L(T_1)|) + 2 + 2|L(T_1)| \\
&= i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| = i_{dR}(T),
\end{aligned}$$

d'où la contradiction.

Cas 3.2. $i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| - 2 - 2|L(T_1)| > i_{dR}(T_1 - x_3) + 1$. Soit h_5 une $i_{dR}(T - x_3)$ -fonction et définissons la fonction g_5 comme suit : $g_5(u) = h_5(u)$ pour tout $u \in V(T_2) - x_3$, $g_5(x_3) = 0$, $g_5(x_2) = 3$, $g_5(u) = 2$ pour tout $u \in L(T_1)$ et $g_5(u) = 0$ pour tout $u \in S(T_1)$. Il est clair que g_5 est une FDRDI de T de poids $i_{dR}(T_1 - x_3) + 1 + 2 + 2|L(T_1)|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
i_{dR}(T) &\leq i_{dR}(T_1 - x_3) + 1 + 2 + 2|L(T_1)| \\
&< (i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| - 2 - 2|L(T_1)|) + 2 + 2|L(T_1)| \\
&= i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| = i_{dR}(T),
\end{aligned}$$

d'où la contradiction.

Ainsi, on a bien $i_{dR}(T_2) + 3|S(T_1)| - 2 - 2|L(T_1)| \leq \min\{i_{dR}(T_2 : x_3), i_{dR}(T_2 - x_3) + 1\}$. On en déduit que $T \in \mathcal{T}$ puisque il est obtenu à partir de T_2 en utilisant ou bien l'opération \mathcal{O}_4 (si $x_3 \in W_{T_2}$) ou bien l'opération \mathcal{O}_5 (si $x_3 \notin W_{T_2}$). \square

4.5 Comparaison avec d'autres paramètres

Dans cette partie, nous donnerons un encadrement du nombre de domination Romaine double indépendante en fonction du nombre de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante dans un graphe quelconque.

Proposition 98 *Pour tout graphe G , $\frac{3}{2}i_{\{R2\}}(G) \leq i_{dR}(G) \leq 2i_{\{R2\}}(G)$.*

Preuve. Soient $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ une $i_{\{R2\}}(G)$ -fonction et $g = (V_0^g, V_2^g, V_3^g)$ une $i_{dR}(G)$ -fonction. On a :

$$\frac{i_{dR}(G)}{i_{\{R2\}}(G)} = \frac{3|V_3^g| + 2|V_2^g|}{2|V_2^f| + |V_1^f|}$$

On définit une F{2}DRI $h = (V_0^h, V_1^h, V_2^h)$ comme suit : $V_0^h = V_0^g, V_1^h = V_2^g, V_2^h = V_3^g$.

Ainsi $i_{\{R2\}}(G) = |V_1^f| + 2|V_2^f| \leq w(h(G)) = |V_1^h| + 2|V_2^h| = |V_2^g| + 2|V_3^g|$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{i_{dR}(G)}{i_{\{R2\}}(G)} &= \frac{w(g)}{w(f)} \geq \frac{w(g)}{w(h)} \\ &\geq \frac{3|V_3^g| + 2|V_2^g|}{2|V_3^g| + |V_2^g|} \\ &= \frac{|V_3^g| + |V_2^g|}{2|V_3^g| + |V_2^g|} + \frac{2|V_3^g| + |V_2^g|}{2|V_3^g| + |V_2^g|} \\ &= \frac{|V_3^g| + |V_2^g|}{2|V_3^g| + |V_2^g|} + 1 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{|V_3^g| + |V_2^g|}{2|V_3^g| + |V_2^g|} \geq 1/2$, on obtient alors $\frac{i_{dR}(G)}{i_{\{R2\}}(G)} \geq \frac{1}{2} + 1 = 3/2$.

Pour la borne supérieure, on définit une FDRDI $l = (V_0^l, V_2^l, V_3^l)$ comme suit : $V_0^l = V_0^f, V_2^l = V_1^f$ et $V_3^l = V_2^f$. Ainsi $i_{dR}(G) = 2|V_2^g| + 3|V_3^g| \leq w(l(G)) = 2|V_2^l| + 3|V_3^l| = 2|V_1^f| + 3|V_2^f|$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{i_{dR}(G)}{i_{\{R2\}}(G)} &= \frac{w(g)}{w(f)} \leq \frac{w(l)}{w(f)} \\ &\leq \frac{3|V_2^f| + 2|V_1^f|}{2|V_2^f| + |V_1^f|} \\ &= \frac{|V_2^f| + |V_1^f|}{2|V_2^f| + |V_1^f|} + \frac{2|V_2^f| + |V_1^f|}{2|V_2^f| + |V_1^f|} \\ &= \frac{|V_2^f| + |V_1^f|}{2|V_2^f| + |V_1^f|} + 1 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{|V_2^f| + |V_1^f|}{2|V_2^f| + |V_1^f|} \leq 1$, on a donc $\frac{i_{dR}(G)}{i_{\{R2\}}(G)} \leq 2$. \square

Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous avons abordé six fonctions de domination, à savoir la domination Romaine et sa version indépendante, la domination 2-rainbow et sa version indépendante, la $\{2\}$ -domination Romaine et la domination Romaine double. Nous avons présenté une synthèse sur ces six fonctions de domination en donnant les principaux résultats qui existaient (complexité liée à ces problèmes, bornes en fonction d'autres invariants de graphes ainsi que des résultats de type Nordhaus–Gaddum pour quelques-unes de ces fonctions).

Nous avons par la suite introduit les versions indépendantes de deux nouvelles fonctions de domination. D'abord la fonction de $\{2\}$ -domination Romaine indépendante, où nous avons montré que le problème de décision qui lui est associé est NP-Complet même restreint aux graphes bipartis. Nous avons montré aussi que pour tout graphe G d'ordre n , on a $0 \leq i_{r2}(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/5$, $0 \leq i_R(G) - i_{\{R2\}}(G) \leq n/4$, et que l'égalité $i_{r2}(G) = i_{\{R2\}}(G)$ est vérifiée si G ne contient pas de sous-graphe partiel isomorphe à C_{4k+2} pour $k \geq 1$. Par ailleurs, nous avons montré que pour tout graphe G , $i_{r2}(G)/i_{\{R2\}}(G) \leq 2\Delta/(\Delta + 1)$. Des résultats similaires pour la $\{2\}$ -domination Romaine ont été obtenus en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés pour la démonstration des théorèmes sur la $\{2\}$ -domination Romaine indépendante. Ainsi nous avons pu déduire que pour tout graphe G , on a $0 \leq \gamma_{r2}(G) - \gamma_{\{R2\}}(G) \leq n/5$, $0 \leq \gamma_R(G) - \gamma_{\{R2\}}(G) \leq n/4$, $\gamma_{r2}(G)/\gamma_{\{R2\}}(G) \leq 2\Delta/(\Delta + 1)$ et que l'égalité $\gamma_{r2}(G) = \gamma_{\{R2\}}(G)$ est aussi vérifiée pour les graphes ne contenant pas de sous-graphe partiel isomorphe à C_{4k+2} pour $k \geq 1$.

Concernant la domination Romaine double indépendante, nous avons montré que le problème de décision qui lui est associé est NP-Complet. Aussi, nous avons borné le paramètre $i_{dR}(G)$ en montrant que pour tout graphe G , $2i(G) \leq i_{dR}(G) \leq 3i(G)$, $\frac{3}{2}i_{\{R2\}}(G) \leq i_{dR}(G) \leq 2i_{\{R2\}}(G)$ et $i_{dR}(G) \geq i_{\{R2\}}(G) + i(G)$. Par ailleurs, nous avons

montré que pour tout arbre T , $2i(T) + 1 \leq i_{dR}(T) \leq 3i(T)$. De plus nous avons caractérisé les arbres T tels que $i_{dR}(T) = 2i(T) + 1$ et $i_{dR}(T) = 3i(T)$.

Dans la continuité de notre travail, il nous semble intéressant d'approfondir la recherche sur les points suivants :

- Donner un algorithme polynomial pour le calcul de $i_{dR}(T)$ dans la classe des arbres T .
- Caractériser les graphes (ou au moins les arbres) G tels que $\gamma_{\{R2\}}(G) = i_{\{R2\}}(G)$.
- Caractériser les graphes G tels que $i_{\{R2\}}(G) = i_R(G)$.
- Caractériser les graphes G tels que $i_{\{R2\}}(G) = i_{r2}(G)$.
- Nous avons vu dans le Théorème 49 que pour tout graphe cactus G ayant $k(G)$ cycles pairs, alors $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq \gamma_{r2}(G) - k(G)$. En comptant que les cycles C_{4k+2} dont le nombre est $k'(G)$, peut on avoir $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq \gamma_{r2}(G) - k'(G)$?

RÉFÉRENCES

- [1] H. Abdollahzadeh Ahangar, J. Amjadi, M. Atapour, M. Chellali et S.M. Sheikholeslami. Double Roman trees. *Ars Combinatoria*, accepté.
- [2] M. Adabi, E. Ebrahimi Targhi, N. Jafari Rad et M. Saied Moradi. Properties of independent Roman domination in graphs. *Australas.J.Combin.* 52 (2012) 11–18.
- [3] H.A. Ahangar, M. Chellali et S.M. Sheikholeslami. On the double Roman domination in graphs. *Discrete Appl. Math.* 232 (2017) 1–7.
- [4] N. Alon et J.H. Spencer. The probabilistic method. Wiley, New York. (1992).
- [5] J.D. Alvarado, S. Dantas et D. Rautenbach. Averaging 2-rainbow domination and Roman domination. *Discrete Appl. Math.* 205 (2016) 202–207.
- [6] J.D. Alvarado, S. Dantas et D. Rautenbach. Relating 2-rainbow domination to Roman domination. *Discuss. Math. Graph Theory.* 37(4) (2017) 953–961.
- [7] J. Amjadi, N. Dehgardi, N. Mohammadi, S.M. Sheikholeslami et L. Volkmann. Independent 2-rainbow domination in trees. *Asian-European Journal of Mathematics* 8(2) (2015) 1550035.
- [8] D.W. Bange, A.E. Barkauskas, L.H. Host et P.J. Slater. Generalized domination and efficient domination in graphs. *Discrete Math.* 159(1-3) (1996) 1–11.
- [9] R.A. Beeler, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi, Double Roman Domination. *Discrete Appl. Math.* 211 (2016) 23–29.
- [10] S. Bermudo. On the differential and Roman domination number of a graph with minimum degree two. *Discrete Appl. Math.* 232 (2017) 64–72.
- [11] C. Berge. Théorie des graphes et ses applications. (1958).

- [12] A. Bouchou, M. Blidia and M. Chellali, Extremal graphs for a bound on the Roman domination number. *Discuss. Math. Graph Theory*, accepté.
- [13] B. Brešar, M.A. Henning et D.F. Rall. Rainbow domination in graphs. *Taiwanese J. Math.* 12(01) (2008) 213–225.
- [14] B. Brešar et T.K. Šumenjak. On the 2-rainbow domination in graphs. *Discrete Appl. Math.* 155 (2007) 2394–2400.
- [15] E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince et D.B. West. Extremal problems for Roman domination. *SIAM J. Discrete Math.* 23 (2009) 1575–1586.
- [16] G.J. Chang et C-H. Liu. Roman domination on 2-connected graphs. *SIAM J. Discrete Math.* 26(1) (2012) 193–205.
- [17] M. Chellali et N. Jafari Rad. Independent 2-rainbow domination in graphs. *J. of Combin. Math. and Combinatorial Computing* 94(2015) 133–148.
- [18] M. Chellali et N. Jafari Rad. Trees with independent Roman domination number twice the independent domination number. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 7(04) (2015) 1550048.
- [19] M. Chellali et N. Jafari Rad. On 2-rainbow domination and Roman domination in graphs. *Australas. J. Combin.* 56 (2013) 85–93.
- [20] M. Chellali, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi. Roman and total domination. *Quaestiones Mathematicae* 38(6) (2015) 749–757.
- [21] M. Chellali, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi. Lower bounds on the Roman and independent Roman domination numbers. *Appl. Anal. Discret Math* 10 (2016) 65–72.
- [22] M. Chellali, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et A. MacRae. Roman $\{2\}$ -domination. *Discrete Appl. Math.* 204 (2016) 22–28.
- [23] M. Chellali, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi. Bounds on weak roman and 2-rainbow domination numbers. *Discrete Appl. Math.* 178 (2014) 27–32.

- [24] H. Chen et C. Lu. A Note on Roman $\{2\}$ -domination problem in graphs. arXiv preprint arXiv :1804.09338 (2018).
- [25] W.E. Clark et S. Suen. An inequality related to Vizing's conjecture. *Elec. J. of Comb.*7(4) (2000) 1–3.
- [26] E.J. Cockayne, P.M. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi, et S.T. Hedetniemi. On Roman domination in graphs. *Discrete Math.* 278 (2004) 11–22.
- [27] G.S. Domke, S.T. Hedetniemi, R.C. Laskar et G. Fricke. Relationships between integer and fractional parameters of graphs. *Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Proceedings of the Sixth Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs.* 1 (1991) 371–387.
- [28] E. Ebrahimi Targhi, N. Jafari Rad, C.M. Mynhardt et Y. Wu. Bounds for independent Roman domination in graphs. *J. of Combin. Math. and Combinatorial Computing* 80 (2012) 351–365.
- [29] O. Favaron, H. Karami, R. Khoeilar et S.M. Sheikholeslami. On the Roman domination number of a graph. *Discrete Math.* 309(10) (2009) 3447–3451.
- [30] A.O. Fradkin. On the well-coveredness of Cartesian products of graphs. *Discrete Math.* 309 (2009) 238–246.
- [31] S. Fujita et M. Furuya. Difference between 2-rainbow domination and Roman domination in graphs. *Discrete Appl. Math.* 161(6) (2013) 806–812.
- [32] G. Gunther, B.L. Hartnell, L. Markus et D.F. Rall. Graphs with unique minimum dominating sets. *Congr. Numer.* (1994) 55–64.
- [33] M.R. Garey et D.S. Johnson. Computer and Intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness. W.H. Freeman, 1979.
- [34] M. Hajibaba et N. Jafari Rad. Some notes on the Roman domination number and Italian domination number in graphs. *Journal of Physics : Conference Series.* 890 (2017) 012123.

- [35] B. Hartnell et D.F. Rall. On dominating the Cartesian product of a graph and K_2 . *Discuss. Math. Graph Theory*. 24(3) (2004) 389–402.
- [36] B. Hartnell et D.F. Rall. Domination in Cartesian products : Vizing’s Conjecture. Dans : T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater. Domination in Graphs : Advanced Topics. *Marcel Dekker, Inc., New York* (1998) 163–189.
- [37] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater. Domination in Graphs : Advanced Topics. *Marcel Dekker, Inc., New York*. (1998).
- [38] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater. Fundamentals of Domination in Graphs. *Marcel Dekker, Inc., New York* (1998).
- [39] S.T. Hedetniemi, R.R. Rubalcaba, P.J. Stater et M. Watch. Few compare to the great Roman empire. *Cong.Numer.* 217 (2013) 129–136.
- [40] M.A. Henning et S.T. Hedetniemi. Defending the Roman empire - A new strategy. *Discrete Math.* 266 (2003) 239–251.
- [41] M.A. Henning et W.F. Klostermeyer. Italian domination in tree. *Discrete Appl. Math.* 217 (2017) 557–564.
- [42] M.A. Henning. A characterization of Roman trees. *Discuss. Math. Graph Theory* 22(2) (2002) 325–334.
- [43] N. Jafari Rad et L. Volkman. Roman domination perfect graphs. *Annalele St. Univ. Ovid. Const.* 19(2011)167–174.
- [44] N. Jafari Rad. Note on the independent Roman domination number of a graph. *J. of Combin. Math. and Combinatorial Computing* 95 (2011) 119–125.
- [45] M. Liedloff, T. Kloks, J.P. Liu et S.L. Peng. Roman domination over some graph classes. *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (2005) 103–114.
- [46] C-H. Liu et G.J. Chang. Roman domination on strongly chordal graphs. *Journal of Combinatorial Optimization* 26(3) (2013) 608–619.

- [47] C.H. Liu et G.J. Chang. Upper bound on Roman domination number of graph. *Discrete Math.* 312(7) (2012) 1386–1391.
- [48] C-S. Liu, S-L. Peng et C. Yi Tang. Weak Roman domination on block graphs. *The 27th Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory* (2010).
- [49] D. Maquin. *Eléments de Théorie des graphes. Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique.* (2003)
- [50] B.P. Mobaraky et S.M. Sheikholeslami. Bounds on Roman domination numbers of graphs. *Matematički vesnik.* 60(4) (2008) 247–253.
- [51] A. Rahmouni et M. Chellali. Independent Roman $\{2\}$ domination function. *Discrete Appl. Math.* 236 (2018) 408–414.
- [52] A. Rahmouni. Sur la fonction de domination $\{2\}$ Roman. *Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information* (2017) Bouira.
- [53] C.S ReVelle et K.E Rosing. Defendens imperium romanum : a classical problem in military strategy. *The American Mathematical Monthly* 107(7) (2000) 585–594.
- [54] P. Roushini Leely Pushpam.et T.N.M. Malini Mai. Weak Roman domination in graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 31(1) (2011) 161–170.
- [55] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes. *Académie Metz-Nancy* (2002)
- [56] I. Stewart. Defend the Roman Empire!. *Scientific American* 281(6) (1999) 136–138.
- [57] Z. Stępień et M. Zwierzchowski. 2-Rainbow domination number of Cartesian products : $C_n \square C_3$ and $C_n \square C_5$. *Journal of Combinatorial Optimization* 28(4) (2014) 748–755.
- [58] V.G. Vizing. Some unsolved problems in graph theory. *Russian Mathematical Surveys* 23(6) (1968) 125–141.

- [59] Y. Wu et N. Jafari Rad. Bounds on the 2-rainbow domination number of graphs. *Graphs and Combinatorics* 29(4) (2013) 1125–1133.
- [60] Y. Wu et H. Xing. Note on 2-rainbow domination and Roman domination in graphs. *Applied Mathematics Letters* 23(6) (2010) 706–709.
- [61] Y. Wu. An improvement on Vizing’s conjecture. *Information Processing Letters* 113 (2013) 87–88.
- [62] H-M. Xing, X. Chen et X-G. Chen. A note on Roman domination in graphs. *Discrete Math.* 306(24) (2006) 3338–3340.
- [63] F. Xueliang, Y. Yuansheng et J. Baoqi. Roman domination in regular graphs. *Discrete Math.* 309(6) (2009) 1528–1537.
- [64] I.G. Yero et J.A. Rodríguez-Velázquez. Roman domination in Cartesian product graphs and strong product graphs. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 7(02) (2013) 262–274.