

N° d'ORDRE : 34/2011-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
« HOUARI BOUMEDIENE »  
FACULTE DE PHYSIQUE



**MEMOIRE**

*Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER  
EN : Physique*

*Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides*

*Par : ABDELLAHOUM Chahrazed*

**Sujet**

**Approche d'un écoulement par la Théorie Constructale :  
Application du Principe Volume-Point**

Soutenu le 28/04/2011, devant le jury composé de :

Mr- S. MOULAY	Professeur, USTHB/ Alger	Président
Mr- A. BOUABDALLAH	Professeur, USTHB/ Alger	Directeur de thèse
Mr- S.HANCHI	Professeur, EMP/ Alger	Examineur
Mr- A.BENZAOU	Professeur, USTHB/ Alger	Examineur
Mm- F.MOKHTARI	Maître de conférences, UMMTO/Tizi ousou	Invitée

# Remerciements

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire de Thermodynamique et des Systèmes Énergétiques de l'USTHB.*

*Au terme d'un travail infiniment passionnant, je tiens à remercier Monsieur **Ahcene BOUABDALLAH**, Professeur à l'USTHB, directeur de cette thèse, à l'initiative de ma recherche et de m'avoir fait confiance et encouragée, ainsi que pour ses commentaires constructifs qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce travail.*

*J'adresse toute ma gratitude au Professeur **Mohamed Saïd MOULAY** pour m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider mon jury.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements envers les Professeurs **Samir HANCHI**, Professeur à l'EMP et **Ahmed BENZAOUI**, Professeur à l'USTHB de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de cette thèse.*

*Je tiens également à remercier Madame **Faiza MOKHTARI-MERRAH**, Maître de Conférences à l'UMMTO en tant qu'invitée pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail.*

*J'adresse ma vive reconnaissance à Monsieur **Mahmoud ZIZI**, pour son soutien précieux et pour tous les enrichissements qu'il a apportés à mon travail.*

*J'adresse mes remerciements également à Monsieur **Mansour BENTOURI** pour son soutien moral et pour son aide.*

*Enfin, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance, en particulier, à ma collègue et amie **Malika FEKIH** que je ne pourrais jamais assez remercier pour m'avoir soutenue et encouragée.*

# TABLE DES MATIERES

Sommaire	
Nomenclature	
INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>Chapitre I. ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA THEORIE CONSTRUCTALE</b>	
INTRODUCTION .....	5
I. FONDEMENTS.....	5
I.1. Présentation de la théorie .....	5
I.1.2.Étapes opérationnelles de la théorie constructale ... ..	7
I.2. Principe de la théorie : recherche d'optimisation.....	9
I. 2.1.Description du mécanisme .....	10
I.2.2.Principe de Fermat .....	11
I.3.Comparaison avec les théories existantes .....	14
I.3.1.Théorie fractale .....	14
I.3.2.L'auto-similarité .....	15
I.3.3.Théorie constructale.....	17
II. CHAMPS D'ETUDES ET D'APPLICATIONS : quelques exemples .....	18
III. TRAVAUX ANTERIEURS .....	21
III.1.APPROCHE THEORIQUE .....	21
III.1.1.Loi constructale .....	21
III.1.1.1.Formulation analytique de la loi constructale .....	22
III.1.1.2.Approche thermodynamique de la loi constructale.....	31
III.1.2.Principe d'optimisation : concept volume-point .....	28
III.1.3.Application au transfert de chaleur .....	32
III.2.Approche dynamique .....	36
III.2.1.Application en physique atmosphérique .....	50
III.2. 2.Application aux milieux poreux .....	52
III.2.3. Application et approche des algorithmes .....	54
IV. APPROCHE EXPERIMENTALE.....	56
CONCLUSION .....	61

## Chapitre II. APPROCHE ANALYTIQUE

Introduction.....	64
I. Principe d'optimisation dans l'approche de chemin optique.....	64
I.1. Evaluation du temps de parcours .....	65
II. Principe d'optimisation dans l'approche de la thermodynamique constructale .....	67
II.1. Mise en œuvre de la méthode constructale .....	68
II.2. Condition d'Optimisation de l'écoulement .....	70
II.3. Evaluation du chemin optimale par un élément de l'assemblage .....	70
III. Généralisation à N élément .....	72
III.1. Evaluation du chemin optimale par un N éléments de l'assemblage avec injection verticale du fluide .....	73
III.2. Généralisation dans le cas l'injection angulaire quelconque du fluide .....	75
IV. Résultats et discussion .....	76
IV.1. Etude de l'effet de nombre d'écoulement de Poiseuille sur le facteur d'aspect .....	76
IV.1.1. Cas d'une injection perpendiculaire au plan d'écoulement ( $\alpha = 0$ ).....	76
IV.1.2. Cas d'une injection inclinée ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ).....	78
IV.2. Etude de l'effet de rapport de vitesse sur le facteur d'aspect.....	81
V. Conclusion .....	84

## Chapitre III. ETUDE ET REALISATION D'UN DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Introduction .....	86
I. description du dispositif expérimental .....	86
I.1 .Description de la boucle d'essai .....	86
I.2. Bac de tranquillisation .....	91
I.3. Systèmes de pompage et accessoires .....	92
I.3.1 .Pompe centrifuge .....	92
I.3.2. Vannes .....	93
II. CELLULE DE MESURE.....	93
III. Instruments de mesure.....	96
III.1. Débitmètre .....	96

III.1.1.Etalonnage .....	97
III.2.1. Mesure de pression.....	98
III.2. Déterminations des caractéristiques du fluide.....	99
III.2.1. Mesure de la température .....	99
III.2.2. Mesure de la densité.....	99
III.2.3. Mesure de la viscosité .....	99
IV. CONDITION D'ESSAIS .....	101
V. DEFINITION DES PROCEDURE EXPERIMENTALES .....	102
VI. CONCLUSION .....	103

## CHAPITRE IV. APPROCHE NUMERIQUE

INTRODUCTION .....	105
I. DESCRIPTION DU CODE DE CALCUL FLUENT .....	106
I.1. Méthode des volumes finis .....	106
I.2. Implémentation sous Fluent Définition des taches expérimentales .....	108
I.3. Procédure sous Fluent .....	110
I.3.1 Précision des calculs .....	110
I.3.2. Choix du solveur .....	110
I.3.3 Schéma de discrétisation .....	111
I.3.4 Interpolation de la pression.....	112
I.3.5. Choix de la méthode de couplage Vitesse-pression .....	113
I.3.6. Facteur de relaxation .....	102
II. Mise en équation du mouvement .....	102
II. 1.Equation de continuité .....	113
II.2. Equations de transfert de la quantité de mouvement.....	113
II.3. Hypothèses simplificatrices.....	114
II.4.Analyse des équations adimensionnelles .....	115
II.4.1.Grandeurs adimensionnelles .....	115
II.4.2 Equations adimensionnelles du champ de vitesse.....	116
III. GENERATION DE MAILLAGE .....	117
III.1. Configuration géométrie .....	117
III.2. Paramètre de l'étude .....	118

III.3. Maillage sous Gambit.....	118
III.3.1. Maillage du domaine de calcul.....	118
III.3.2. Description des grilles .....	120
III.3.3. Conditions aux limites.....	122
III.3.4. Mise en œuvre de la méthode numérique .....	122
IV. Résultats et discussions .....	122
IV.1. Influence du nombre de Reynolds .....	122
IV.1.1 Lignes de courants .....	123
III.3.4. Mise en œuvre de la méthode numérique .....	112
IV.1.2 Champ de vitesse .....	124
IV.1.3. Temps de déplacement .....	129
IV.1.4. Etude de facteur de forme .....	131
Conclusion.....	133
CONCLUSION GENERALE.....	135
REFERENCES BIBLIOGRAPHYQUES.....	138

## LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES	Page
<b>CHAPITRE I</b>	
Figure I.1 : Illustration schématique du concept volume –point	6
Figure I.2 : Détermination de la forme optimale élémentaire	7
Figure I.3 : Assemblage de deux éléments	8
Figure I.4 : Etape de construction de la Forme globale du système d'échangeur	8
Figure I.5 : Réflexion de la lumière	10
Figure I.6 : Réfraction de la lumière	11
Figure I.7 : Minimisation du temps de séjours d'un point de vue optique	12
Figure I.8 : Schématisation d'écoulement entre un volume et un point	13
Figure I.9 : Reconstitution d'un flocon de neige par des fractales	16
Figure I.10: Reconstitution de la cote Algérienne par des fractales	16
Figure I.11: Forme en treillis	18
Figure. I.12 : Delta de la Léna en Russie	19
Figure I.13 : Théorie constructale en pédologie	20
Figure I.14 : Structure générale d'un jet d'écoulement d'un point à un autre point	23
Figure I.15 : Structure d'écoulement arborescente	24
Figure I.16 : Résistance globale minimisée des structures d'écoulement arborescentes	24
Figure I.17 : Arbres optimisés ayant une haute conductivité	25
Figure I.18 : Espace occupé par toutes les structures d'écoulement (L) est fixée	26
Figure I.19 : Espace occupé par toutes les structures d'écoulement (V) est fixé	28
Figure I. 20 : Distribution d'énergie pendant le vol	31
Figure I. 21 : Illustration du principe de Fermat pour la conduction de chaleur	33
Figure I. 22 : Génération de la forme géométrique selon la minimisation du temps de déplacement	34
Figure I.23 : Forme optimale de volume pour la densité maximale de transfert de chaleur	35
Figure I.24 : Principe de conception simple - la minimisation géométrique du temps de déplacement	38
Figure I.25 : Réseaux d'arbre déterministes	40
Figure I.26 : Ordre d'optimisation constructal	41

<b>LISTE DES FIGURES</b>		<b>Page</b>
Figure I.27 : Méthode constructale		32
Figure I.28 : Première construction avec une distribution uniforme de volumes élémentaires		43
Figure I.29 : Volume élémentaire		44
Figure I.30 : Première construction (modèles radiaux)		45
Figure I.31 : Système de transfert de chaleur par le refroidissement		46
Figure I.32 : Longueurs optimales d'aileron		46
Figure I.33 : Résistances thermiques minimales		47
Figure I.34 : Système cylindrique des ailerons radiaux d'une goupille		48
Figure I.35 : L'allongement H/L externe optimisé en fonction du nombre de Reynolds		49
Figure I.36 : Cellules Thermoconvectives de Hadley		50
Figure I.37 : Boucles de convection naturelle dans une couche liquide		51
Figure I.38 : Cellules Thermoconvectives de Hadley et circulation des vents alizés		52
Figure I.39 : Forme optimale des différents systèmes		53
Figure I.40 : Principe du Volume-point avec des sources de chaleur uniformes		55
Figure I.41 : Ecoulement " Point-Surface " dans un milieu poreux		55
Figure I.42 : Distributeur avec des arborescences binaires		57
Figure I.43 : Forme dendritique d'un échangeur de chaleur		58
Figure I.44 : Topologie de l'Effet Kink		56
Figure I.45 : Instabilité Hydrodynamique de type onde instationnaire hélicodale		56
Figure I.46 : Mécanisme de formation d'une onde stationnaire		61
Figure I.47 : Mécanisme explicatif de la formation des ondes ou instabilités		60
<b>CHAPITRE II</b>		
Figure II.1 : Trajet de la lumière réfractée		65
Figure II.2 : Configuration du système d'échangeur avec injection verticale ( $\alpha=0$ )		68
Figure II.3 : Assemblages des éléments constructal (injection verticale ( $\alpha=0$ ))		72
Figure II.4 : Configuration du système d'écoulement avec injection incliné $\alpha$		73
Figure II.5 : Assemblages des éléments constructal en structure parallèle		75
Figure II.6 : Evolution du facteur de forme en fonction de nombre de cellule ( $\alpha=0$ )		77
Figure II.7a : Variation de facteur de forme optimal Cas $\alpha=30^\circ$		79
Figure II.7b : Variation de facteur de forme optimal Cas $\alpha=45^\circ$		79
Figure II.7c : Variation de facteur de forme optimal Cas $\alpha=60^\circ$		80
Figure II.7d : Variation de facteur de forme optimal Cas $\alpha=70^\circ$		80

Figure. II.7e : Variation de facteur de forme optimal Cas $\alpha=30^\circ$	81
Figure II.8 : Evolution du facteur de forme $\phi$ en fonction de rapport de vitesse $\lambda$ pour $N=2$	82
Figure II.9 : Variation du facteur d'aspect optimal pour un nombre de cellules N donné	83

## LISTE DES FIGURES

Page

### CHAPITRE III

Figure III.1 : Vue d'ensemble du dispositif expérimental	88
Figure III.2 : Description des éléments du dispositif expérimental	89
Figure. III.3. Bac de tranquillisation équipé d'un réseau de nid d'abeilles	91
Figure III.4 : Pompe centrifuge	92
Figure III.5 : Vannes de réglage	93
Figure III.6 : Cellule de mesure	94
Figure III.7 : Joint d'étanchéité	94
Figure III.8 : Paramètres de cellule de mesure	95
Figure III.9 : Rotamètre de type Brooks	96
Figure III.10 : Courbe d'étalonnage	98
Figure III.11. Prises de pression	98
Figure III. 12 : Appareillage de mesure de viscosité	99
Figure III. 13 : Evolution des viscosités dynamique de l'eau	100
Figure III. 14 : Evolution des viscosités cinématique de l'eau	101

### CHAPITRE IV

Figure IV.1 : Volume de contrôle	107
Figure IV.2 : Etapes utilisées dans la méthode des volumes finis	108
Figure IV.3 : Schéma des étapes utilisées dans la simulation par Fluent	109
Figure IV.4. Profile de vitesse de poiseuille	114
Figure IV.5. Configuration géométrique du système d'écoulement	117
Figure. IV.6.Géométrie de la cellule rectangulaire	119
Figure IV.7. Grille grossière	120
Figure IV.7. Grille raffinée	120
Figure IV.8. Grille raffinée -Remaillage près des orifices	121
Figure IV.10. Dépendance des résultats au maillage	121
Figure IV.11. Figure IV.11. Lignes de courant pour $\phi=0.03$	123
Figure IV.12. Champs des vitesses pour $\phi=0.03$	125
Figure IV.13. Profil de vitesse entre les deux plaques	126

---

Figure IV.14. Evolution du profil des vitesses à $x=0.15m$	127
Figure IV.15. Profil théorique de Poiseuille	127
Figure IV.16. Allure des profils de vitesse à la sortie de l'écoulement	128
Figure IV.17. Profil des vitesses moyennes	129
Figure IV.18. Configuration géométrique d'écoulement avec le temps de déplacement	130
Figure IV.19. Profil de facteur de forme numérique	131
Figure IV.20. Présentation comparative du facteur de forme optimal par les voirs analytique et numérique	132

# Liste des Tableaux

<b>LISTE DES TABLEAUX</b>		<b>Page</b>
<b>Tableau I.1 :</b> Ensemble de notions et paramètres relatifs à la théorie fractale et la théorie constructale		17
<b>Tableau I.2 :</b> Analogie entre la Thermodynamique classique et la Théorie Constructale		29
<b>Tableau III.1 :</b> Différents systèmes de mesure		90
<b>Tableau IV.1 :</b> Paramètres de l'étude		118

## NOMENCLATURE

Symboles	Dénominations
$\alpha$	Angle d'injection du fluide
$\beta$	Rapport des vitesses
$\gamma$	Diffusivité thermique
$\zeta$	Coefficient de dilatation
$\mu$	Potentiel chimique du sol
$\chi$	Profondeur de la faille
$\xi$	rapport des conductivités thermiques air-terre
$\rho$	Densités de l'animal
$\rho_a$	Densités de l'air
$\sigma$	Coefficient de conductivité thermique.
A	Surface élémentaire
D	Epaisseur de l'aileron
e	épaisseur de la cellule
f	Rapport adimensionnel
g	Constante de gravitation
H	Hauteur de la cellule
$\hat{i}$	Angle d'incidence
$\hat{i}'$	Angle de réflexion
J	Densité du flux thermique
k	Coefficient de conductivité thermique
$K_p$	Quantité de matière
N	Nombre de cellules

Symboles	Dénominations
$n_1, n_2$	indices des milieux transparents
P	plan d'incidence
Pr	Nombre de Prandtl
$q'''$	Courant de chaleur
$r$	Rayon réfracté
$\hat{r}'$	Rayon réfléchi
R	Distance entre deux failles
Re	Nombre de Reynolds
S	Surface de la cellule
$t, t_1, t_2, t_3, t_i$	Temps de séjours
Ta	Nombre de Tylor
$\nabla T$	Gradient de température
U	Vitesse du vent
V	Volume de la cellule
$V_s$	Vitesse a la sortie
$V_E$	Vitesse a l'entrée
$\nabla V$	Gradient de potentiel électrique

# ***INTRODUCTION GENERALE***

L'observation de la Nature fournit à tous les niveaux envisagés micro, macro et mégascopique des systèmes d'organisation dont la forme semble jouer un rôle majeur et unificateur aussi bien dans les systèmes vivants que dans les systèmes inanimés.

Par conséquent, le concept de forme dans la Nature a toujours été un domaine d'études très vaste qui a inspiré l'humanité en créant les bases d'une science telles que la Géométrie. Puis ce concept s'est étendu avec un intérêt croissant au cours des siècles à tous les autres domaines scientifique et technique. Ainsi, Cela va de la Biologie à l'Ingénierie et jusqu'au cœur de la recherche scientifique que constituent les Mathématiques et la Physique. Dans ce mouvement d'idées qui gagne actuellement en ampleur, la génération et l'évolution des formes dans la Nature est reconnue comme un processus physique qui est élevé au niveau d'une loi constitutive fondamentale: la loi Constructale. Cette théorie qui s'appuie sur l'observation des systèmes utilisant les transferts de grandeur physique (masse, chaleur, quantité de mouvement) est le principe fondamental à partir duquel peut être déduit éventuellement le processus d'auto-organisation. Cette dernière suggère qu'elle résulte, elle-même, d'une régulation par auto-optimisation.

L'idée constructale consiste en l'élaboration d'une architecture des flux de transfert qui découlent à partir d'un principe d'optimisation en fonction d'un espace donné et soumis aux contraintes imposées par l'environnement dans lequel baigne le système. En fait, la Théorie **Constructale** résulte de toute une série d'observations, d'essais et d'ajustements depuis l'Antiquité. Déjà, Aristote préconisait la voie empirique ou phénoménologique, c'est-à-dire en donnant la priorité à l'observation : « d'abord exercer l'œil avant le cerveau » Ce point de vue permet de développer une approche qui laisse entrevoir que c'est le milieu naturel qui détermine la forme pour expliquer le fonctionnement de l'être vivant.

## *Introduction générale*

---

En 1995, en partant de l'étude d'un circuit de refroidissement destiné aux boîtiers électroniques à l'échelon de la microélectronique **A.Bejan** a été conduit à créer une «**Théorie Constructale**» visant à l'optimisation énergétique et géométrique des systèmes envisagés. Un très grand nombre de travaux essentiellement à caractère théorique a été effectué, à ce jour, en vue d'apporter une justification ou une explication au Principe constructal à partir du concept «Volume –Point».

Cependant, on note qu'il y a un réel déséquilibre entre le nombre consacré aux travaux théoriques et l'observation, d'une part, et les investigations nombreuses dédiées au transfert thermique comparées à la masse d'études sur les transferts de quantité de mouvement et de masse dans les fluides, d'autre part.

Pour illustrer cette théorie, on donnera un aperçu des résultats acquis tant sur le plan fondamental que pratique.

En particulier, les retombées de cette théorie dans différents secteurs industriels sont telles que les applications sont trop nombreuses pour être évoquées même brièvement. On se limitera essentiellement à citer les domaines du transfert thermique (refroidissement) afin de réduire au minimum la résistance d'écoulement en électronique et en informatique, ainsi les processus aérodynamique et hydrodynamique. Egalement dans les sciences de la nature, à savoir, la circulation atmosphérique, l'hydrologie, la biologie et la médecine, etc.....

C'est dans ce contexte que s'inscrit notre travail qui a pour but l'optimisation du mouvement d'un fluide visqueux incompressible à propriétés physiques constantes, confiné dans un système d'écoulement de type poiseuille : Canal parallélépipédique à section rectangulaire. En se basant sur la théorie constructale de **A.Bejan**, on étudie l'évolution du facteur d'aspect du système d'écoulement en fonction du rapport des vitesses d'entrée et de sortie du fluide. La plupart des travaux consacrés à cette géométrie ont été menés dans le cas d'une étude thermique conçue dans le cadre d'un système de refroidissement. Cependant, l'étude hydrodynamique d'un système d'échangeurs conditionné par l'angle d'injection du fluide, l'influence du nombre de cellules et la variation du rapport des vitesses sur l'écoulement n'ont pas, à notre connaissance, encore été abordées. C'est dans cette perspective que l'on aborde notre recherche qui est essentiellement à caractère théorique en se proposant de formuler et de résoudre le problème.

## *Introduction générale*

---

On s'intéresse notamment aux effets combinés de l'inclinaison du fluide injecté et du rapport des vitesses d'écoulement sur l'évolution du facteur d'aspect dans la configuration parallélépipédique d'un écoulement de type Poiseuille. En outre, on cherche à déterminer le nombre optimal de cellules de Poiseuille pour s'assurer d'un transfert de quantité de mouvement satisfaisant, par exemple, pour les besoins de transfert de chaleur.

Ce mémoire s'articule selon les quatre chapitres principaux suivants:

Le premier chapitre qui est composé de deux parties que l'on consacre à une revue et synthèse bibliographique. Dans la première partie, on décrit les différentes notions de base de la théorie constructale que l'on compare à la théorie des fractales afin de mettre en évidence les analogies et les limites de cette dernière. Ensuite, on examine les avancées de la théorie constructale aux plans théorique, expérimentale et numérique dans le but de mieux situer le sujet abordé.

Le deuxième chapitre a pour but à la présentation du formalisme général lié aux lois qui régissent l'écoulement. Ce formalisme est basé sur une approche du principe constructal de type "Volume-Point". En particulier, on cherche à illustrer ce principe à travers une solution analytique qui détermine le facteur de forme optimale vérifiant les hypothèses de travail dans le système parallélépipédique adopté.

Le troisième chapitre donne une description générale du dispositif expérimental. On donne des indications sur l'élaboration et la mesure des caractéristiques du fluide utilisé ainsi que les conditions d'essais de mises en œuvre.

Le quatrième chapitre rassemble les résultats numériques obtenus par utilisation du code de calcul Fluent. A cet effet, on analyse et l'on interprète les résultats trouvés par la résolution directe des équations de l'écoulement et que l'on compare avec la théorie constructal.

Enfin, ce mémoire se termine par une conclusion générale, où l'on fera le bilan de notre étude, notamment en insistant sur les principaux résultats obtenus. On donnera une perspective à ce travail tout en fournissant des indications intéressantes destinées à améliorer davantage le dispositif expérimental dans le but de vérifier les études théoriques.

# CHAPITRE I

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

## **INTRODUCTION**

La **Théorie Constructale** ou Thermodynamique Constructale est une nouvelle théorie permettant d'expliquer la forme et le comportement thermomécanique de nombreux objets et structures présents dans la nature. C'est un nouveau principe déterministe de structuration géométrique des systèmes vivants qui suppose que les contraintes et objectifs de l'ingénierie d'un système inanimé sont aussi ceux qui gouvernent la géométrie des flux qui s'écoulent dans la nature.

L'approche constructale a pour ambition de livrer une nouvelle clé pour concevoir idéalement des objets : habitations, machines, réseaux et structures ceux-ci promettent déjà de changer notre regard sur le monde. En fait, c'est un vrai virage théorique qui est proposé. Il signifie que ce n'est pas par fragmentation que les formes s'engendrent mais par construction et optimisation. En organisant les échelles dans l'espace, de la plus petite vers la plus grande, la théorie constructale apparaît comme prédictive selon un seul et unique principe d'optimisation. Elle part d'une taille finie prédite de la plus petite brindille, selon une organisation spécifique à chaque échelle obéissant à des lois physiques on parvient ainsi à une forme «naturelle ». Elle se base sur un motif descriptif ou un algorithme postulé dès le départ de nature immatérielle avec des branches infiniment petites et particulières et se réalisant selon le même dessin ou figure qui se répète à chaque échelle.

En raison de ses divers résultats et nombreuses applications, la théorie constructale a suscité beaucoup d'intérêt aux plans scientifique et philosophique. Au cours des dernières années, plusieurs chercheurs se sont penchés sur le rôle que la théorie constructale pourrait jouer en terme d'universalité étant donné les champs d'investigation abordés notamment en Mathématiques, Physique, Chimie, Biologie, Electronique, Energétique, Hydrologie, Physique atmosphérique, Océanographie, etc.. .

## **I. FONDEMENTS**

### **I.1.Présentation de la théorie**

En général, l'ingénieur chargé de la conception d'une machine n'a pas de méthode, connue à l'avance, pour élaborer ses plans. Son objectif principal consiste à déterminer la forme optimale permettant d'atteindre le meilleur rendement avec la puissance maximale.

L'expérience montre que le rendement machine varie avec la forme du système dans la plupart des cas étudiés. Dans toute la suite, on cherche à effectuer la mise en évidence du principe constructal dans les deux domaines importants suivants:

- Transfert de chaleur** : détermination de l'arbre du flux de chaleur
- Transfert de quantité de mouvement**: détermination de l'arbre du flux de vitesse.

Pour illustrer la théorie constructale, on s'appuie sur l'exemple du processus de transfert de chaleur. Ainsi, l'optimisation du flux de chaleur compatible avec la forme optimale est fournie par le principe constructal, basé sur le concept "Volume-Point" et tel qu'il est schématisé ci-dessous (Figure I.1) :

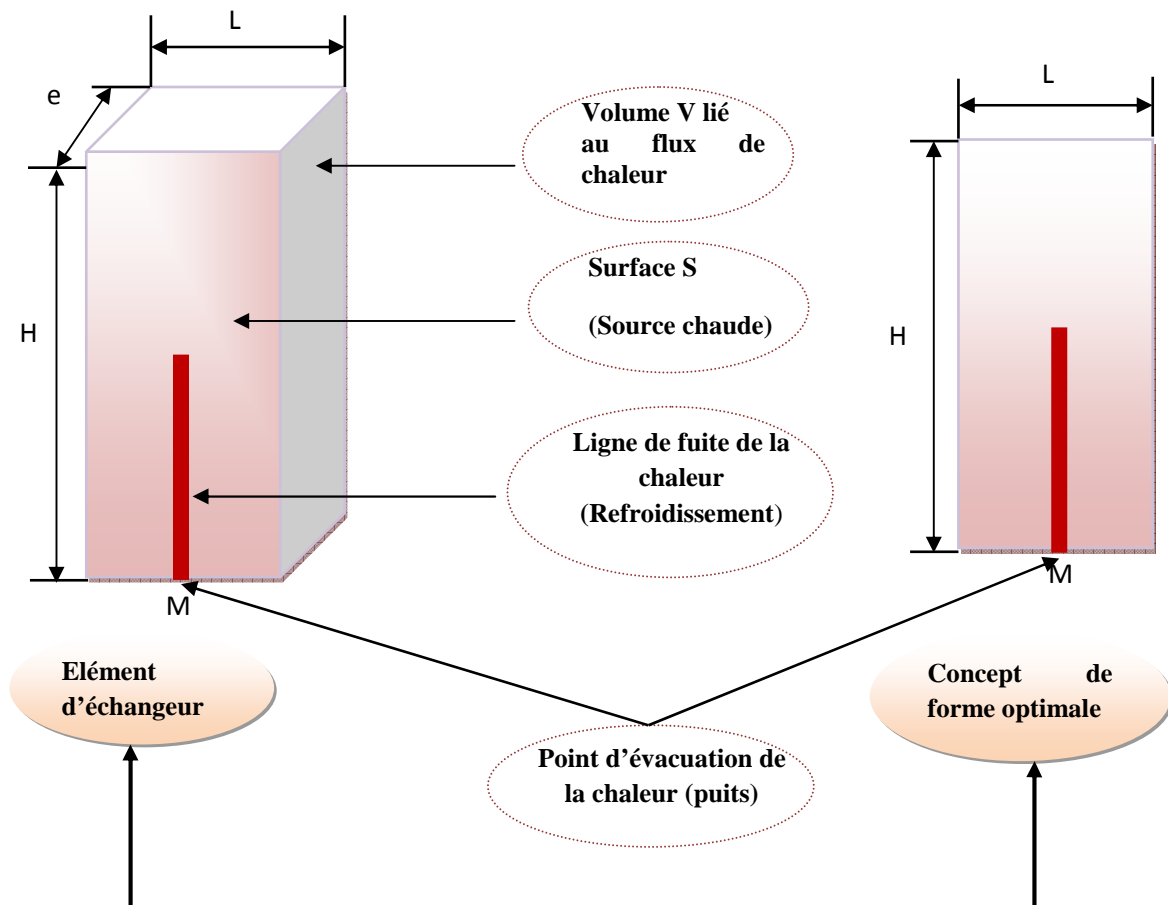


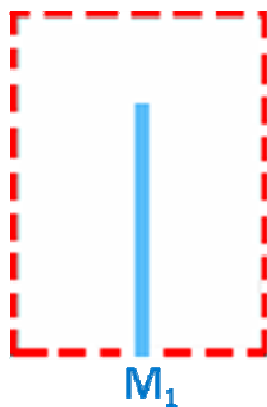
Fig. I.1. Illustration schématique du concept Volume –Point.

### I.1.2.Étapes opérationnelles de la théorie constructale

Si l'on veut réaliser l'optimisation d'un système complexe en utilisant la méthode constructale de A.Bejan [1], on doit découper ce système en unités aussi petites que possible pour lesquelles il devient alors relativement facile de définir les conditions de son fonctionnement. En pratique, l'utilisation de cette théorie nécessite une construction selon trois étapes :

#### ❖ 1<sup>ère</sup> étape: Détermination et optimisation du système élémentaire.

La distribution de la température varie considérablement en tout point de la surface (S). On admet que toute la chaleur s'écoule selon la ligne de fuite passant par le point  $M_1$  (Figure I.2).



(S) : Surface ou source de chaleur

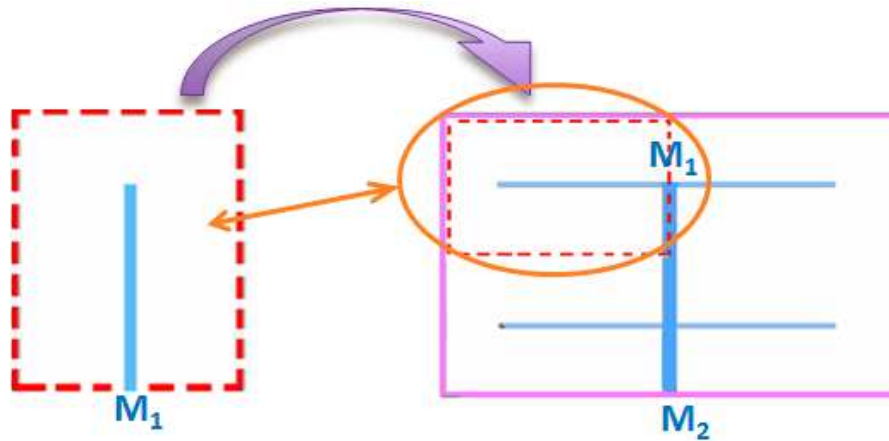
(M1) : Point ou puits de chaleur

Surface élémentaire optimisée : 1<sup>er</sup> élément constructal

Fig. I.2.Détermination de la forme optimale élémentaire : évacuation de la chaleur vers le seul point  $M_1$

#### ❖ 2<sup>ème</sup> étape: Assemblage des systèmes élémentaires

La forme élémentaire optimale étant trouvée, on reliera ces unités sous forme d'assemblage en réseaux dont les lois physiques, à définir, permettent de définir la forme optimale.



Surface élémentaire optimisée

Assemblage en mini réseaux optimisés

Fig. I.3. Assemblage de deux éléments : évacuation de la chaleur vers le seul point  $M_2$ .

### ❖ 3<sup>ème</sup> étape: Émergence de la forme globale

De proche en proche, en remontant par ce procédé les échelles une à une, on arrive à une forme globale optimale par rapport aux jeux des contraintes et objectifs désirés. Cette forme optimisée est donc construite de façon ascendante, compte tenu des caractères propres aux unités qui la composent, elles-mêmes optimisées à chaque niveau de la construction (Figure I.4).

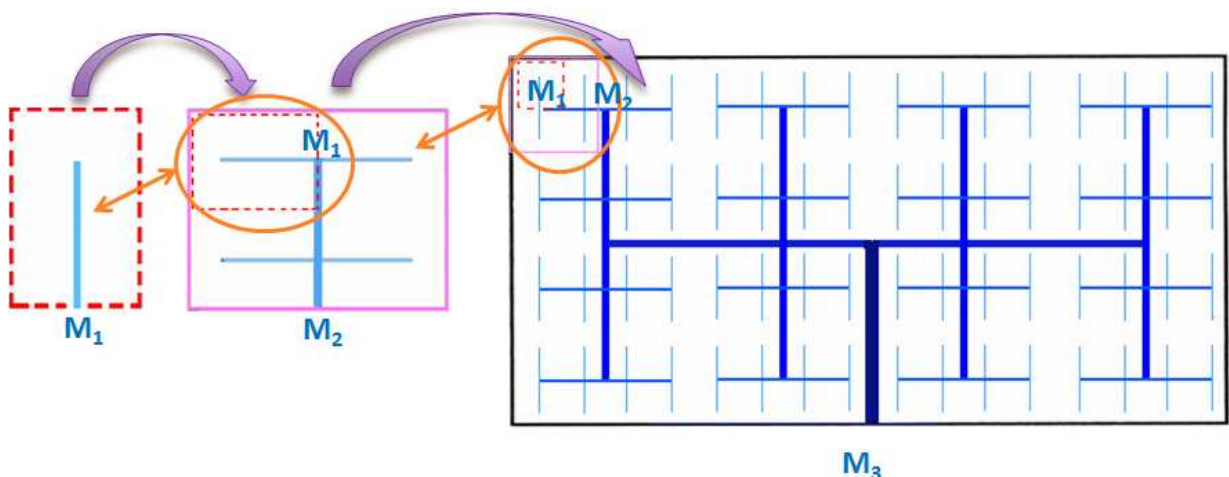


Fig. I.4. Etapes de construction de la forme globale du système d'échangeurs recherché.

En remontant une à une les échelles, le réseau macroscopique de refroidissement émerge progressivement : on aboutit alors à une forme optimale géométrique qui obéit aux lois de la physique (lois de flux ou de diffusion) matérialisant l'arbre de flux constructal (dernier schéma en Fig. I.4).

Les caractères du « design » sont rigoureusement déterminés grâce à la loi de Fourier donnée par la formule suivante :

$$J = -k \nabla T \dots\dots\dots I.1$$

J : indique la densité du flux de chaleur

$\nabla T$  : désigne le gradient de température

k : Coefficient de conductivité thermique qui dépend du matériau (nature, structure, etc.) ; il est toujours positif car la chaleur se transmet des zones chaudes vers les zones froides.

Ceci est analogue aux phénomènes électriques qui s'expriment selon la loi d'Ohm :

$$J = -\sigma \nabla V \dots\dots\dots I.2$$

J : flux de densité électrique

$\nabla V$  : gradient de potentiel électrique

$\sigma$  : Coefficient de conductivité thermique qui dépend du matériau.

## I.2. Principe de la théorie : Recherche d'optimisation

La vie doit obéir à la loi la plus essentielle, la seule peut-être que le vivant partage avec la matière inanimée : c'est le principe de moindre action (Maupertuis). La seule loi universelle, c'est d'aller au minimum de dépense d'énergie ou de suivre la pente respectant le "principe d'économie naturelle" de Fermat ou de Leibniz, qui précède historiquement celui de conservation de l'énergie (Robert Mayer : 1er Principe de la Thermodynamique, 1648).

C'est ce qu'on appelle, aussi, «principe d'action extrémale" qui traduit en fait le "principe du minimum", qui se trouve à la base de la "théorie constructale" permettant d'expliquer l'inévitable finalité dans la Biologie [2].

La théorie constructale permet d'unifier les phénomènes optiques avec d'autres qui relèvent des écoulements de fluide (Hydrodynamique). L'étude de ces lois conduit au principe de la minimisation du temps de séjour.

La raison qui est à la base du chemin minimal est connue depuis l'antiquité. Ainsi Héron d'Alexandrie pose comme principe que la lumière suit le chemin le plus court et prouve, par cela, que les lois de la réflexion et de la réfraction obéissent au principe de propagation rectiligne de la lumière.

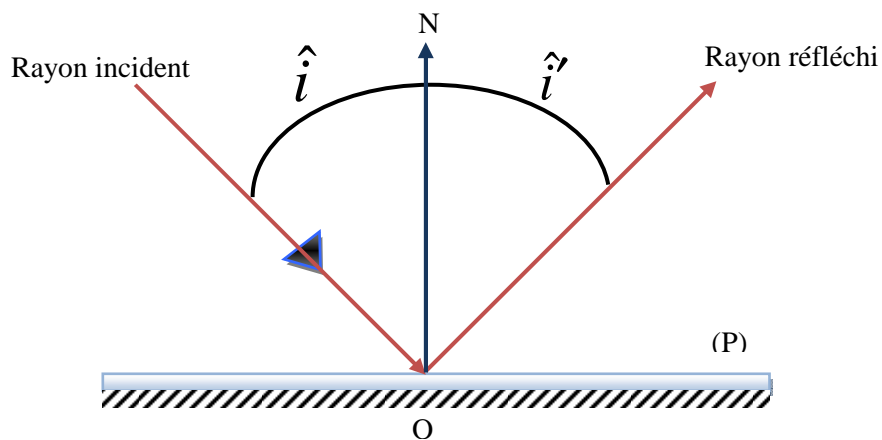
### I.2.1. Description du mécanisme

Le premier volet concerne le mécanisme de propagation au-dessus du plan d'incidence (P) :

\* Dans un milieu transparent homogène et isotrope, on admet que la lumière se propage en ligne droite (Figure I.5).

La réflexion est le renvoi de la lumière par la surface (P) qui la reçoit :

- L'angle de réflexion  $\hat{i}'$  est égal à l'angle d'incidence  $\hat{i}$ .
- Le rayon réfléchi  $\hat{r}$  est dans le plan d'incidence (P).



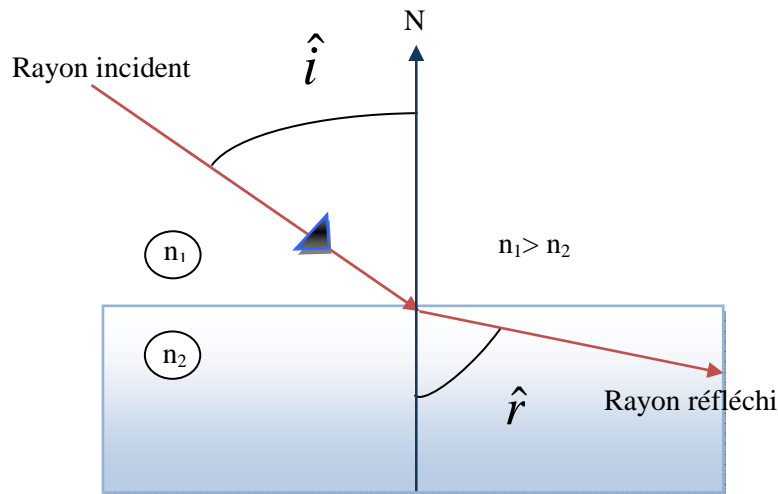
**Fig. I.5. Réflexion de la lumière.**

Le second volet concerne le phénomène de réfraction au-dessous du plan d'incidence (P).

La réfraction est la déviation subie par les rayons lumineux à la traversée de la surface séparant deux milieux transparents d'indice  $n_1$  et  $n_2$  (Figure I.6).

- Le rayon réfracté  $\hat{r}$  se trouve dans le plan d'incidence
- L'angle de réfraction suit la loi :

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r} \dots\dots\dots I.3$$



**Fig. I.6. Réfraction de la lumière.**

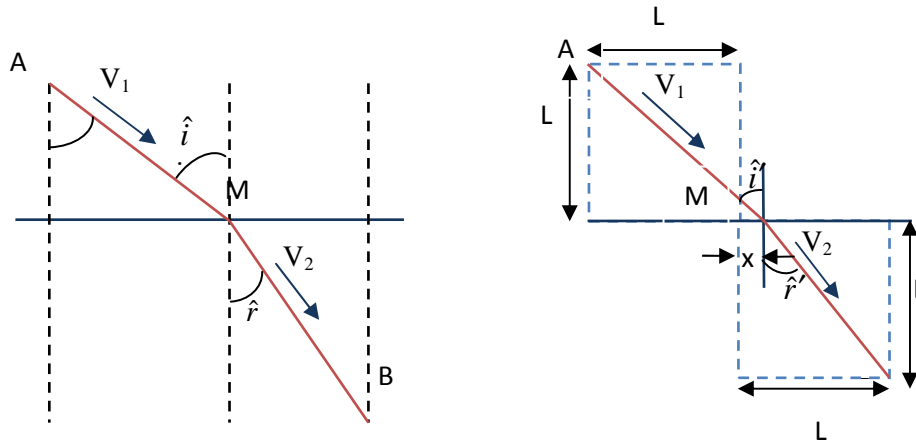
**Remarque :** Pour la réflexion, ce n'est pas le chemin qui est minimum mais le temps que met la lumière pour aller d'un point à un autre (autrement dit le chemin optique).

**I .2.2.Principe de Fermat**

Selon le principe de Fermat, ce n'est pas le chemin qui doit être le plus court, mais le temps mis à le parcourir (durée de séjour).

Par analogie, on estime que le processus de minimisation du temps de déplacement est équivalent à minimiser la résistance mécanique, ce qui revient à maximaliser le flux d'écoulement. Cette importante propriété a été établie graphiquement sur une base analogique entre les domaines de l'Optique et l'Hydrodynamique (Figure. I.7).

Par conséquent, la minimisation du temps de séjour d'un point de vue optique (Principe de Fermat) se traduit par un processus d'optimisation des durées de parcours du chemin optique.



**Fig. I.7. Minimisation du temps de séjours d’un point de vue optique  
(Principe de Fermat).**

On cherche à évaluer les durées de parcours  $t_1$  et  $t_2$  respectivement par rapport aux chemins partiels suivants:

$$\overline{AM} \quad \text{et} \quad \overline{MB} .$$

De sorte que la durée totale correspondante soit :

$$t = t_1 + t_2 \dots\dots\dots \text{I.4}$$

Mathématiquement le principe de Fermat signifie que le trajet suivi AMB est tel que le temps du parcours entre A et B s’exprime à l’aide de la condition d’extrema:

$$dt = 0 \dots\dots\dots \text{I.5}$$

En pratique, en faisant les calculs correspondant (voir le chapitre II), on établit la loi bien connu :

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r} \dots\dots\dots \text{I.6}$$

Connu sous le nom  $\longrightarrow$  Loi de Snell-Descartes

**❖ Justification par analogie du Principe Volume-Point**

Il s’agit maintenant de retrouver une loi équivalente dans le modèle hydrodynamique. Pour cela, on considère le mouvement d’un fluide évoluant dans un récipient parallélépipède (Figure .I.8) [1].

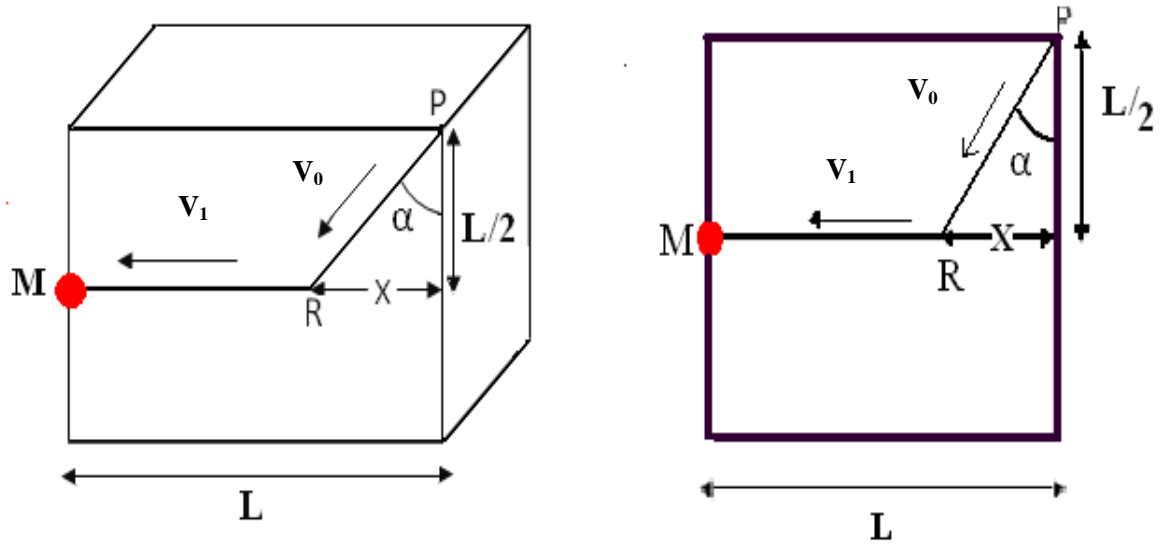


Fig. I.8.Schématisation d'écoulement entre un volume et un point [1].

La surface carrée fixée à  $L^2$  peut avoir une forme optimisée de sorte que le temps de déplacement du point variable R au point M fixe soit réduit au minimum.

Minimisations du temps de séjour:

$$V = \frac{dx}{dt} \dots\dots\dots I.7$$

$$dt = \frac{dx}{V} \dots\dots\dots I.8$$

Les durées de parcours partielles sont les suivantes :

$$\Delta t = \frac{PR}{V_0} + \frac{RM}{V_1} \dots\dots\dots I.9$$

Et la durée totale de parcours devient :

$$t = \frac{L}{V_1} + \frac{x}{V_0} \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{V_0}{V_1} \right) \dots\dots\dots I.10$$

La condition d'optimisation impose alors:  $\frac{dt}{dx} = 0$

Ce qui permet d'établir le résultat suivant :

$$L_{1,opt} = \left( \frac{2AV_0}{fV_1} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots I.11$$

$L_{1, opt}$  : longueur optimale d'un élément constructal qui est contrôlé par le paramètre  $f$  suivant :

$$f = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{V_0}{V_1} \tan \alpha \dots\dots\dots I.12$$

Où  $f$  joue le rôle d'un paramètre caractéristique de l'écoulement qui dépend du rapport des débits  $\frac{V_0}{V_1}$  et de l'angle d'injection  $\alpha$  du fluide.

**Conclusion** : Le volume d'écoulement est construit comme un ordre de blocs constitutifs qui commence à partir du plus petit élément de volume ainsi défini et l'on procède progressivement pour atteindre le plus grand assemblage envisagé.

### I.3.Comparaison avec les théories existantes

#### I.3.1. Théorie fractale

Au niveau de l'observation, on peut se demander quels sont les points communs lorsqu'ils existent entre un arbre, des nuages, une côte rocheuse, nos poumons, et encore bien d'autres objets de la nature ?

Ainsi, jusque dans les années 1970, personne à l'époque ne soupçonnait qu'une universalité puisse exister entre toutes ces formes de la nature. Les scientifiques se limitaient à la géométrie euclidienne pour les étudier. Cependant, grâce à la découverte par **B. Mandelbrot** de la théorie fractale qui a étudié les objets complexes, une nouvelle description de ces formes naturelles a pu être établie, description parfois plus pertinente que celle donnée par la géométrie traditionnelle. La géométrie fractale a donc montré les limites de la géométrie euclidienne pour décrire des objets complexes : elle a offert de nouvelles perspectives à divers sciences en fournissant de nombreuses applications.

Le mot fractal découle du verbe latin *frangere* qui signifie « briser » pour décrire les nouvelles formes géométriques, dont le motif, de plus en plus petites, se répète à l'infini. C'est B. Mandelbrot qui a introduit ce terme pour désigner ces objets mathématiques [3].

Dans le domaine géographique, **Richardson**, au début du 20<sup>e</sup> siècle, avait remarqué que la longueur d'une côte dépendait curieusement de l'échelle de la carte sur laquelle on peut la mesurer.

Dans le domaine de la Physique, **Jean Perrin (1870-1942)** avait déjà attiré l'attention sur la turbulence « catastrophique » du mouvement brownien : mouvement désordonné de petites particules, comme celui des pollens dans un liquide, etc.

Enfin dans le domaine des Mathématiques, c'est au 19<sup>e</sup> siècle que Cauchy, a mis en relief l'importance des propriétés liées aux notions de continuité et de dérivabilité qui furent suffisamment éclaircies et avec rigueur. Ces propriétés ont permis de faire la distinction entre être mathématique, à caractère régulier et irrégulier, tels que les objets insolites qui viennent côtoyer les courbes traditionnelles que l'on savait construire sans peine à main levée.

### I.3.2.L'auto-similarité

Contrairement à une figure géométrique euclidienne, le fractal n'a pas d'échelle ou de grandeur caractéristique. Chaque portion d'un fractal reproduit la forme générale, quelle que soit l'échelle : c'est la propriété d'auto-similarité.

L'auto-similarité peut être exacte. Dans ce cas, en changeant d'échelle, on a un objet agrandi qui est identique à l'original. La courbe de Von Koch (Figure I.12) est un exemple typique de fractale auto-similaire. Mais pour beaucoup d'objets naturels, l'auto-similarité n'est pas exacte : l'objet agrandi ressemble à son image initiale mais ce n'est pas exactement la même. C'est le cas, par exemple, d'une côte rocheuse ou d'un profil topographique. Dans ces cas, l'auto-similarité tend à être statistique.

Un objet fractal est donc une entité ou un être dont la géométrie peut être décrite par une dimension non entière, donc n'ayant pas d'échelle et qui est auto-similaire.

L'exemple du flocon de neige dont la géométrie est très complexe peut être reproduite à l'aide d'une forme triangulaire structurée de sorte qu'au bout de la 6<sup>ème</sup> étape on est assez proche du flocon réel (voir Fig. I.12).

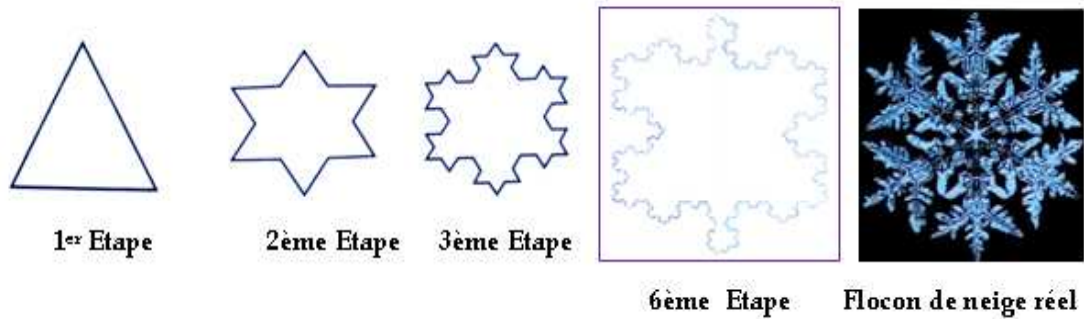


Fig. I .12.Reconstitution d'un flocon de neige par des fractals [3]

En simulant la frontière géographique de la carte de l'Algérie par des triangles de différentes tailles selon l'irrégularité structurelle de la forme extérieure de la frontière maritime.



Fig. I .13.Reconstitution de la côte algérienne par des fractales.

On voit bien que la côte déchiquetée de Jijel est formée à partir de petits triangles régulier qui forment sa frontière avec la mer. Par contre, la côte de Mostaganem est constituée par une frontière relativement régulière qui peut être représenté par un triangle plus grand ou relativement massif.

### I.3.3. Théorie constructale

La théorie constructale ainsi que la théorie fractale génèrent, toutes les deux, des géométries multi-échelles. Au niveau de la théorie constructale, il y a une « covariance » d'échelle tandis qu'on observe une « invariance » d'échelle au niveau de la théorie fractale. Autrement dit, les lois d'échelle sont variées pour différentes grandeurs dans la théorie constructale alors que la théorie fractale conserve la même loi d'échelle pour différentes grandeurs.

En théorie constructale, la géométrie est optimisée ainsi que les changements d'échelle. La théorie fractale donne la possibilité d'optimiser la géométrie à partir d'une relation de similitude. D'après **A. Bejan [4]**, la théorie constructale est déterministe, elle peut donc prévoir l'évolution des systèmes dans le temps et dans l'espace tandis que la théorie fractale ne fait que décrire le système : elle n'est donc pas prédictive puisque elle est indépendante du temps.

Le tableau I.1 synthétise les différentes notions et les paramètres relatifs à la théorie constructale et la théorie fractale selon respectivement les points de vue comparés de **A.Bejan et B. Mandelbrot**.

<p style="text-align: center;"><b>THEORIE FRACTALE</b> <b>(B. MANDELBROT 1974)</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>THEORIE CONSTRUCTALE</b> <b>(A. BEJAN 1995,2000)</b></p>
<p>Tout système peut être décrit à l'aide d'une forme géométrique simple (triangle, carré, losange,...) dont le motif, de plus en plus petit, se répète à l'infini.</p>	<p>Construction du système macroscopique à partir du microscopique en déterminant le rapport d'échelle et la forme élémentaire optimale.</p>
<p>Structuration par branches infiniment petites sans masse.</p>	<p>Les éléments s'agrègent et se construisent du petit vers le grand selon une loi spatio- temporelle à déterminer.</p>
<p>Théorie statique : un seul motif de dessin qui se répète sans cesse à chaque échelle.</p>	<p>Théorie dynamique : un seul et unique principe d'optimisation d'où tout découle.</p>

**Tableau .I.1. Ensemble de notions et paramètres relatifs à la théorie fractale et la théorie constructale.**

D'après A. Bejan, les choses ne se fragmentent pas, elles se construisent par assemblage du micro vers le macro selon une loi spatio –temporelle à déterminer.

## II. CHAMPS D'ETUDE ET D'APPLICATION : Quelques exemples

Les différents mouvements associés à un organisme vivant tels que le vol et la nage du monde animal sont caractérisés par des lois explicables à partir du principe physique d'optimisation.

Sur cette base, on peut s'inspirer à partir de nombreux cas de structures naturelles qui se reproduisent sur une vaste gamme d'échelle d'une telle optimisation sont la forme quasi-cylindrique des tuyaux pour construire un arbre, la structure arborescente des cours d'eau ou d'un bassin fluvial, la structure arborescente des poumons ou celle de la circulation sanguine, et enfin celle des surfaces boueuses qui craquent en séchant. Toutes ces architectures optimisent le débit des fluides qui s'écoulent, en minimisant la résistance rencontrée en fonction des contraintes imposées par l'environnement dans laquelle baigne la structure.

Dans toutes les formes constructales que l'on observe la bifurcation est la caractéristique fondamentale du processus d'arborescence et de hiérarchisation dans l'ingénierie et les sciences de la nature. La forme et la structure constituent le mécanisme, le chemin pour réaliser tous les processus de transferts d'énergie, de chaleur, de masse et de quantité de mouvement ainsi que la diffusion électrique dans le domaine de l'électrocinétique.

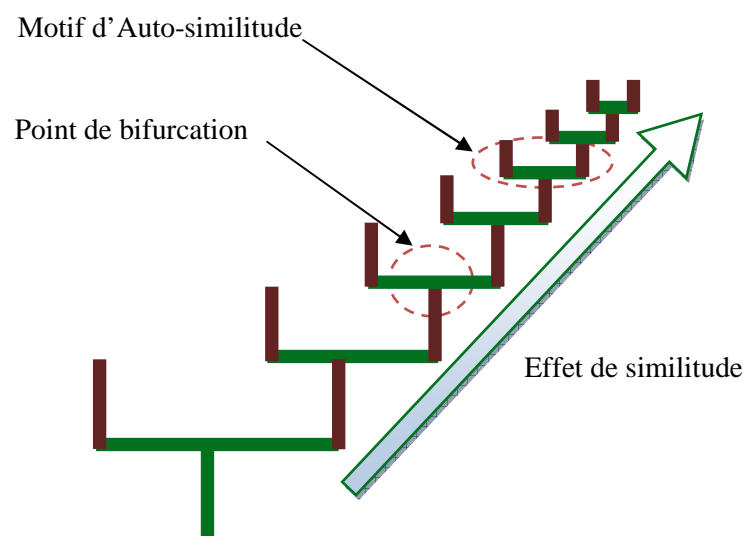


Fig. I. 9. Forme en treillis.

1°) **Hydrographie** : l'étude du delta du Nil ou du delta de la Léna (fig. I.10) à partir du principe constructal montre que c'est la forme qui contribue à minimiser les résistances. Ainsi les simulations numériques effectuées avec un terrain régulier(a), en haut, ou irrégulier(b), en bas, font émerger cette forme caractéristique. Elles montrent aussi que le demi-cercle est la forme du lit des fleuves qui offre le moins de résistances, cette déduction est en adéquation avec les lois de l'hydrographie.

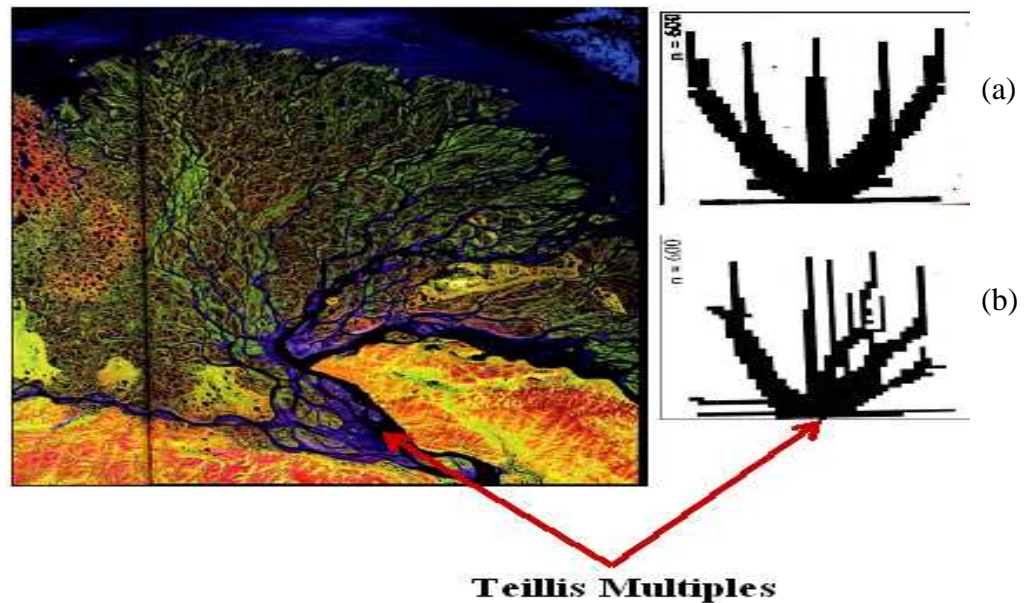


Fig. I.10. Delta de la Léna en Russie [3].

L'observation montre que le bassin hydrographique d'un fleuve se modifie au cours du temps de façon que l'eau atteigne l'embouchure en rencontrant de moins en moins de résistance.

2°) **Physique du sol** : Les craquelures d'un sol mouillé qui sèche sous le vent forment des boucles entre lesquelles l'humidité s'évapore. La théorie constructale détermine la configuration optimale d'un tel assèchement [5] et, en particulier, la distance entre deux failles. Dans ces conditions, la résistance optimisée  $R_{opt}$  du sol est donnée par la relation suivante :

$$R_{opt} \approx \left( \frac{K\gamma\mu L^2}{U^2(\zeta \Delta T)^3} \right)^{\frac{1}{4}} \dots\dots\dots I.13$$

K : le rapport des conductivités thermiques air-terre

$\gamma$  : diffusivité thermique du sol

$\zeta$  : coefficient de dilatation du sol

$\mu$  : potentiel chimique du sol

L : la profondeur de la faille, U la vitesse du vent et  $\Delta T$  la différence de température air-terre).

Conformément aux observations effectuées, les craquelures deviennent plus nombreuses ou fréquentes (la résistance du sol optimisée diminue) si la vitesse du vent ou la température du sol augmentent.

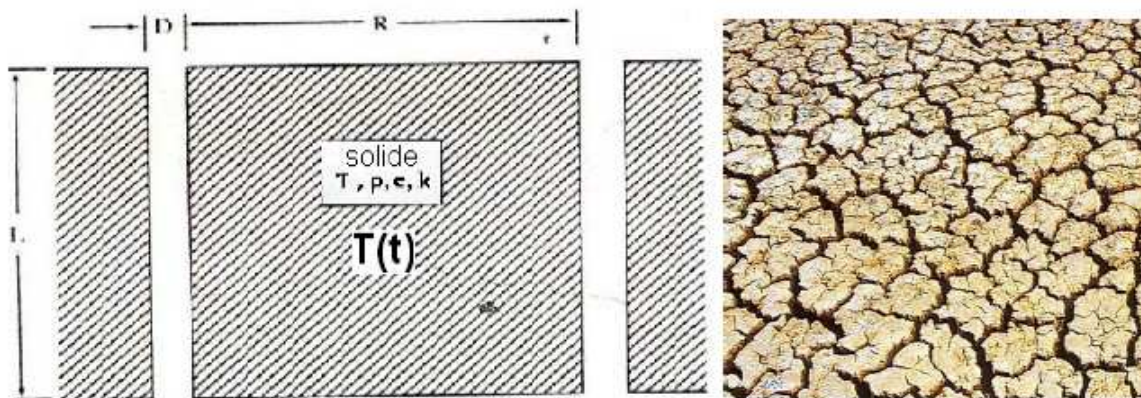


Fig. I.11. Théorie constructale en Pédologie [5].

3°) **Aérodynamique:** en Avionique comme pour la vitesse de vol des animaux, celle-ci est à peu près identique au sein d'une espèce. La théorie constructale permet de calculer la vitesse optimale permettant de minimiser les pertes d'énergie :

$$V_{opt} \approx \rho^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{6}} / \rho_a^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots I.14$$

Où  $\rho$  et  $\rho_a$  sont les densités correspondantes à l'animal et à l'air, g la constante de gravitation et M la masse de l'animal.

Si l'animal vole plus vite, il dépense trop d'énergie à lutter contre les frottements et aussi pour maintenir son altitude. Cette propriété constitue un résultat important qui est en accord avec la vitesse de vol des insectes, des oiseaux et, même des avions. On comprend alors pourquoi les oiseaux volent en groupe serré: ils contribuent ainsi à diminuer le frottement en construisant une forme aérodynamique optimale en V de façon à pouvoir voler plus rapidement.

### III. TRAVAUX ANTERIEURS

La théorie Constructale a été analysée en détail depuis les travaux fondamentaux de **A. Bejan** proposés en 1995 [1]. On rappelle que tout est partie des recherches sur le système de refroidissement du boîtier électronique des ordinateurs. Dès lors, A.Bejan a constaté que plus il optimise ce système, plus la forme des réseaux de courants internes ressemblait à celle d'un arbre, selon des ramifications de plus en plus fines et complexes.

En effet, en 1995 à Nancy, lors d'une conférence donnée par le prix Nobel de chimie **I.Prigogine** celui-ci a affirmé que les structures en forme d'arbres ne sont pas des structures déterministes mais sont caractéristiques d'un processus aléatoire. Cependant, [3].

#### III.1. APPROCHE THEORIQUE

##### III.1. 1. Loi constructale

**A.Bejan** et ses collaborateurs [6] ont fourni des efforts remarquables au développement de cette théorie. Pour cela, ils ont tenté de faire une généralisation à travers un inventaire de configurations géométriques de processus thermofluides, à la fois physique, chimique et biologique, afin d'expliquer le design optimal qui est inhérent dans les lois de la Nature et de l'Ingénierie.

Il apparaît que la loi constructale qui résume l'observation commune, telles que les structures d'écoulement pouvant exister sont celles qui se forment dans une direction donnée en fonction du temps. Elles correspondent également à des configurations qui facilitent l'écoulement des courants [7,8]. Finalement cette théorie tente d'expliquer, par un seul et simple principe, la génération des formes naturelles de tout ce qui nous entoure et de prédire leur évolution.

D'après **A.Bejan**, l'énoncé se réfère strictement aux changements structuraux sous la restriction par des contraintes à dimension finie.

**« Pour qu'un système de dimension finie persiste dans le temps (ou pour qu'il puisse vivre), il doit évoluer de façon à procurer un accès facile aux flux imposés qui s'écoulent à travers ce système ».**

La loi constructale ainsi proposée s'applique à tous les processus de « flux d'écoulement » fluide, chaleur, masse ou charge électrique visant l'optimisation et l'équilibre. Cette loi a nécessairement deux fondements :

- Géométrique : elle s'intéresse à la forme, c'est à dire à la configuration du design.
- Physique : en mettant en évidence le mécanisme gouvernant l'évolution.

### **III.1.1.1. Formulation analytique de la loi constructale**

La formulation analytique de la loi constructale est fondée sur un processus universel : l'évolution orientée vers la configuration d'équilibre dans un système d'écoulement à objectif global et avec des contraintes globales conduisant à une liberté de formation.

La formulation analytique et géométrique du principe constructal a été présentée par **A. Bejan et Al [9]** en se basant sur la génération d'architecture d'écoulement. Le système d'écoulement réalise la performance globale : minimisation de la résistance globale de l'écoulement et ses propriétés ou de ses contraintes (taille globale, volume total de la conduite). Ils ont pu classer des exemples de structures d'écoulement en trois catégories : écoulement entre deux points, écoulement entre un cercle et son centre, puis l'écoulement entre un point et une surface ou volume.

#### **❖ Écoulement entre deux points**

L'écoulement entre deux points est un exemple parmi les plus simples concernant la manière dont la configuration entre l'objectif global et les contraintes globales génère l'architecture complète du système d'écoulement.

Il y a une infinité d'architectures d'écoulement qui peuvent être choisies pour guider un courant de fluide d'un point vers un autre point. Dans la figure I.14, l'objectif est de forcer le courant du fluide de la phase unique à s'écouler d'un point à un autre en utilisant une puissance de pompage minimale [10,11]. Il existe deux contraintes globales, l'une externe et l'autre interne.

La contrainte externe définit la dimension du système qui est représentée par la distance entre les deux points  $L$ , et la contrainte interne détermine le volume total  $V$  de tous les conduits de la structure d'écoulement.

Si dans l'écoulement entre deux points le régime est turbulent (entièrement développé et rugueux) dans toute la conduite, le coefficient de frottement tend alors à devenir indépendant du nombre de Reynolds  $Re$ .

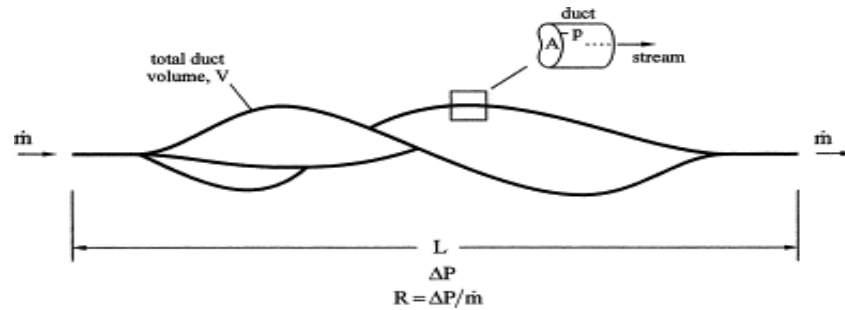


Fig.I.14. Structure générale d'un jet d'écoulement d'un point à un autre [9].

❖ **Écoulement entre un cercle et son centre**

Parmi les architectures les plus complexes qui ont été récemment optimisées sont les structures d'écoulement qui connectent ou relient un point avec une infinité de points, un exemple intéressant est l'écoulement qui baigne avec une résistance globale selon une aire en forme de disque [12].

La géométrie d'écoulement présentée dans la figure. I.15 est décrite par les longueurs et les diamètres de tous les conduits, le nombre radial des conduits qui sont en contact avec le centre du disque, la distance entre les tuyaux de sortie, ou le nombre de tuyaux de sortie sur le bord  $N=2\pi L/d$ , et le nombre de bifurcations qui sont indiquées dans la figure. I.15 avec les cercles associés. La configuration ainsi obtenue et la structure d'écoulement optimale correspondent à deux niveaux de couplage :  $N_0=3$  et  $N=12$ . Ils ont trouvé que la résistance globale minimisée s'écrit comme suit :

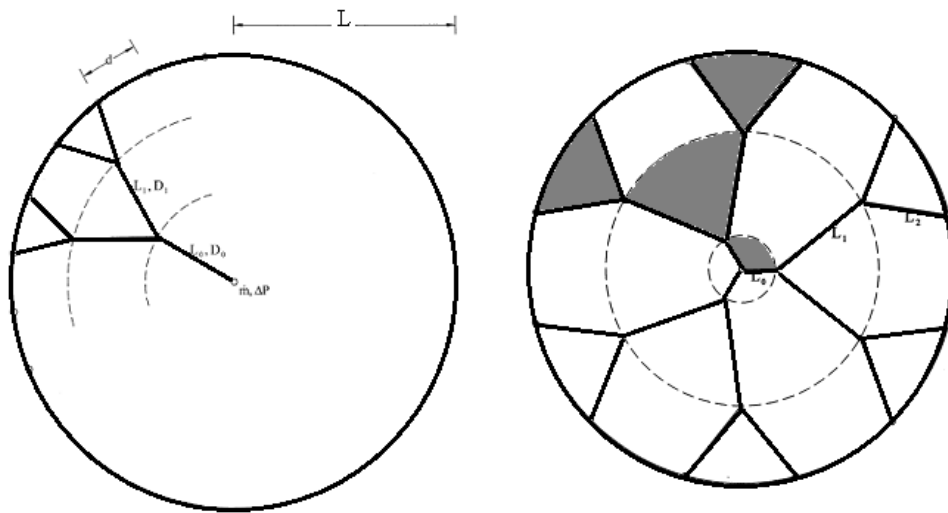
$$\frac{\Delta P}{\dot{m}} = 8\pi\nu \frac{L^3}{V^2} \hat{f} \dots\dots\dots \text{I.15}$$

$\Delta P$  : gradient de pression

$\dot{m}$  : flux massique

$L$  : longueur de la conduite

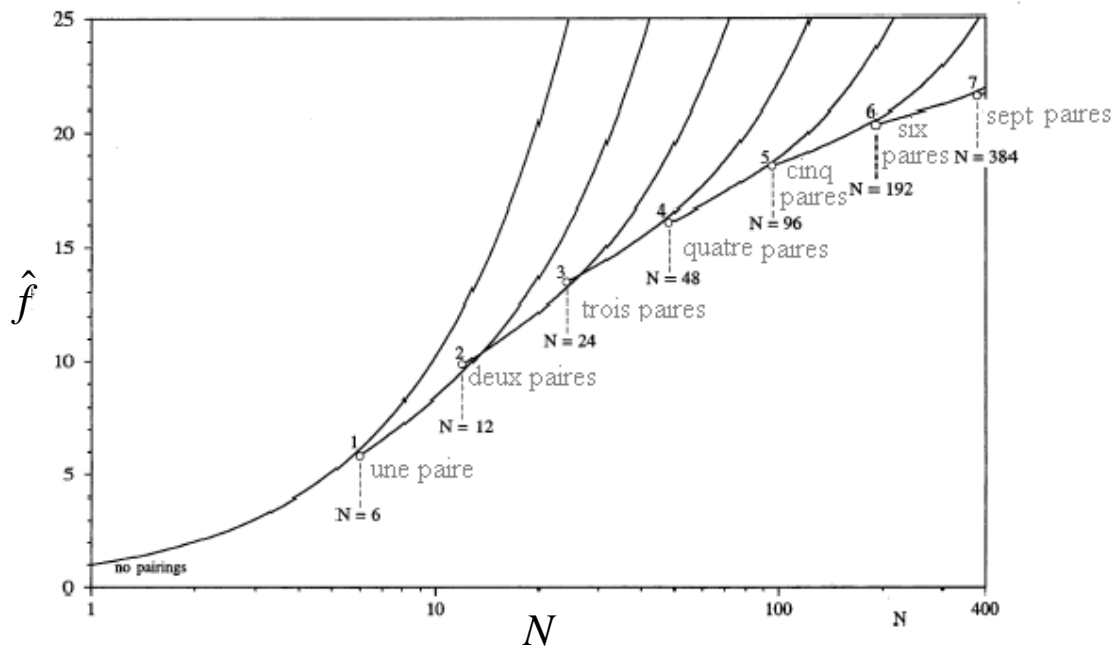
$V$  : volume de la conduite



**Fig. I.15. Structure d'écoulement arborescente connectant le centre et le bord d'une aire circulaire [12].**

Où  $\hat{f}$  désigne un facteur sans dimension qui représente une fonction du nombre de niveaux de couplage.

Les courbes  $\hat{f}$  représentent les valeurs correspondantes minimisées en rapport avec toutes les proportions de longueur et de diamètre. (Figure I.16)

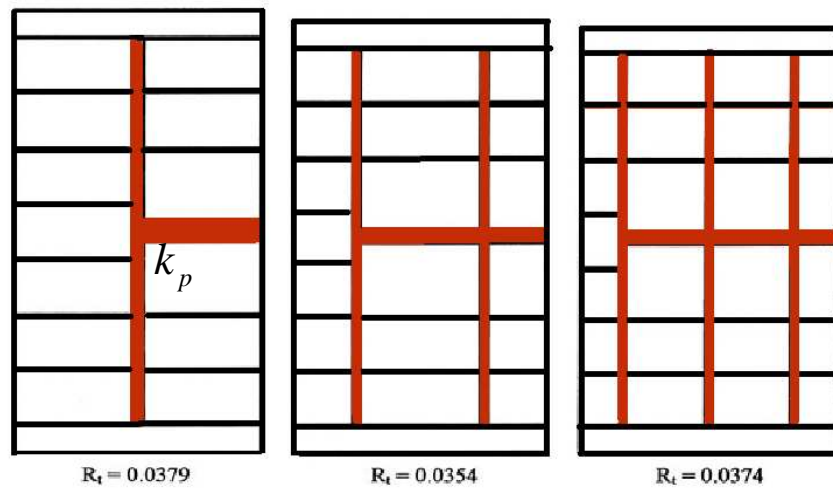


**Fig. I.16 .Résistance globale minimisée des structures d'écoulement arborescentes qui connectent le centre vers le bord autour d'une aire circulaire [12].**

### ❖ Écoulement entre un point et un nombre infini de points

A la limite lorsque le nombre de cellules augmente considérablement ( $N \rightarrow \infty$ ), la structure d'équilibre sera un arbre fractal parce que dans cette étape ultime, elle a un nombre infini de niveaux de couplage [13, 14].

Le domaine étudié (A) est rectangulaire, et ses frontières sont isolées, excepté le milieu de l'un des côtés qui sert de bac à chaleur [13]. Le point chaud se produit dans un des coins opposés du rectangle. L'écoulement du courant chaud global  $q''A$  se fait à l'aide des conduits matériel (Kp) qui sont distribués à travers la surface A (figure I.17).



**Fig. I.17. Arbres optimisés ayant une haute conductivité [13].**

Les résistances globales des trois structures considérées dans la figure I.17 sont :

$$\left( \frac{T_{\max} - T_{\min}}{q' A / K_0} \right) = R_t$$

avec

$$R_t = 0.0379, 0.0354 \text{ et } 0.0374$$

$R_t$  : résistance globale

Toutes les configurations d'écoulement à L constant qui sont possibles réalisent le corps visualisé par des coupes à volume V et à résistance R constants.

La courbe R(V) représentée en figure. I.18 est le bord du nuage des architectures d'écoulement possibles avec la même dimension globale L. La courbe a une pente négative à cause de la nature de l'écoulement : la résistance au frottement décroît si les canaux d'écoulement vérifient la condition :

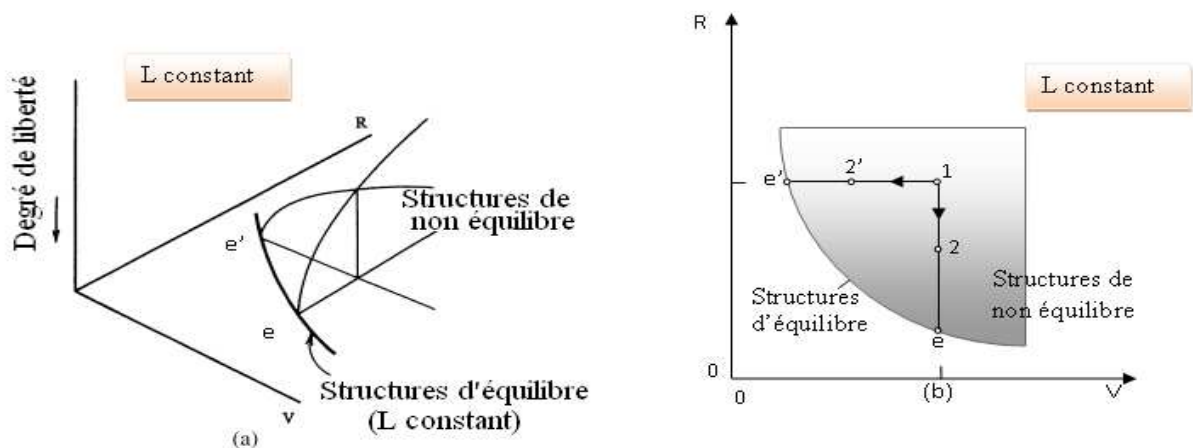
$$\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)_L < 0$$

La coupure avec R constant, à travers l'espace des configurations, montre une autre façon d'exprimer la loi constructale. S'il est libre de se former, le système d'écoulement évoluera du point 1 au point 2' à L et R constants. Dans la limite d'une liberté totale, la géométrie atteindra un nouvel équilibre qui est alors représenté par le point é, L'énoncé analytique alternatif à la loi constructale devient :

$$dV \leq 0 \text{ à } R \text{ et } L \text{ constants}$$

Paraphrasant l'énoncé original de la loi constructale, il a été proposé le critère suivant :

**« Pour qu'un système à résistance d'écoulement et dimension globale fixées persiste dans le temps (vive), il doit évoluer de façon telle que sa structure d'écoulement occupe une fraction plus petite par rapport à l'espace disponible »**



**Fig. I.18. Espace occupé par toutes les structures d'écoulement lorsque la dimension globale externe (L) est fixée [15].**

La figure. I.18 correspond à l'espace des architectures d'écoulement possibles projeté sur le plan de base R-L. La ligne continue est le lieu des structures d'écoulement en équilibre avec V constant, correspondant à la courbe  $L = R(V)$  tel que :

$$\left( \frac{\partial R}{\partial L} \right)_V > 0$$

Le fait que la pente soit positive révèle le mécanisme d'évolution : la résistance de l'écoulement augmente tandis que la distance qui peut être lue à partir de la figure. I.19 de deux manières. À V et L constants, l'évolution est celle d'une structure sub-optimale (point « 0 ») vers une autre qui a une résistance globale inférieure (point « 2 »). Si la géométrie d'écoulement continue à se former librement, la structure approche la configuration d'équilibre (point e). Au voisinage du point e, si des changements structuraux s'effectuent de telle sorte que R demeure constant tandis que V est fixé, alors l'évolution dans la figure. I.19 va du point 1 au point 2''. De tels changements signifient alors la condition suivante :

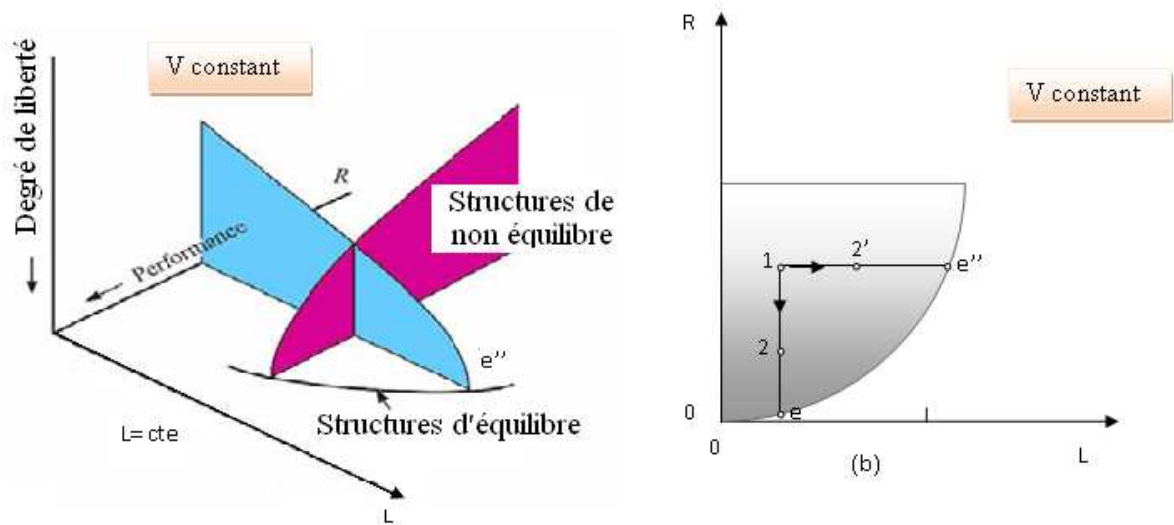
$$dL \geq 0 \text{ à } R, V \text{ constants}$$

Dans ces conditions, l'énoncé de la loi constructale devient :

**« Pour qu'un système d'écoulement avec résistance globale (R) et dimension interne (V) fixée persiste dans le temps, l'architecture doit évoluer de façon telle qu'elle couvre un domaine progressivement plus grand. »**

L'équilibre est alors atteint au point e''. Les changements dans les structures d'écoulement au voisinage immédiat de la structure d'équilibre sont tels que la dimension externe globale à l'équilibre est maximale. Ceci se traduit par :

$$dL = 0 \text{ et } d^2L < 0 \text{ à } R, V \text{ constants}$$



**Fig. I.19. Espace occupé par toutes les structures d'écoulement lorsque la dimension interne globale (V) est fixée [15].**

L'énoncé original de la loi constructale concerne la maximalisation de l'accès d'écoulement sous des contraintes globales de dimensions (L externe, V interne), qui signifie la minimisation de la résistance globale à l'écoulement. Ce comportement est illustré par les changements structuraux 1 – 2 – e dans les figures I.18 et I.19.

### III.1.1.2. Approche thermodynamique de la théorie constructale

Le fondement de la théorie constructale a été approché en faisant l'analogie entre les caractéristiques, les propriétés et les lois de la Thermodynamique classique.

Le tableau I.2 présente les différentes lois de la Thermodynamique Classique et la Théorie Constructale.

Thermodynamique	Théorie constructale
Etat du système (P, V, T)	Architecture d'écoulement : géométrie et structure de configuration (R,L,V).
Processus entraînant la suppression des contraintes internes	Formation et changement de la configuration
Fonctions d'état énergétique : $U=U(S,V)$ ; $H(P, S)$ ; $F(T, V)$ ; $G=G(T, P)$	Objectif global et contraintes globales $(R, L, V, \dots)$ ; $R=R(L,V)$
Etat d'équilibre $T_1=T_2, P_1=P_2, \mu_1=\mu_2$	Forme d'écoulement en équilibre
Relation fondamentale $U=U(S,V)$	Relation fondamentale $R=R(L, V, \dots)$
Etats d'équilibre contraints	Architecture d'écoulement sans équilibre
Suppression des contraintes	Liberté de formation accrue
Propriété d'énergie minimum :  U minimum à S et V constants  V minimum à F et T constants  S maximum à U et V constants	Loi constructale :  R minimum à L et V constants  V minimum à R et L constants  L maximum à V et R constants

**Tableau. I .2. Analogie entre les concepts et Principes de la Thermodynamique classique avec la Théorie Constructale [16].**

D'après **A.Bejan [16]** l'accroissement de la performance peut être atteint à partir des trois caractéristiques suivantes :

- La configuration de l'écoulement.
- La dimension externe globale, ou le domaine couvert, L.
- La dimension interne globale, ou le volume du conduit V.

La résistance globale d'une structure d'écoulement, en équilibre, peut être diminuée ( $dR < 0$ ) par ces changements en faisant que la structure occupe un domaine plus petit ( $dL < 0$ ) ou en dotant la structure d'un volume interne d'écoulement plus grand ( $dV > 0$ ). En général, les trois formulations analytiques de la loi constructale sont équivalentes à la Thermodynamique comme suit [16] :

$$R=R(V, L) \quad \left\{ \begin{array}{ll} R \text{ minimum à } L \text{ et } V \text{ constants} & \longleftrightarrow U=U(V, S) \\ V \text{ minimum à } R \text{ et } L \text{ constants} & \longleftrightarrow V=V(U, S) \\ L \text{ maximum à } V \text{ et } R \text{ constants} & \longleftrightarrow S=S(V, U) \end{array} \right.$$

Partant d'une approche de la thermodynamique équivalente à celle de l'ingénierie, **Bejan** a pu montrer que dans tous les systèmes soumis à un flux donné (masse, chaleur, quantité de mouvement, etc....) on pourrait créer une macrostructure globale à partir de structures élémentaires thermo-énergétiquement optimisées.

**Exemple** : Optimisation consommation masse-énergie Avionique.

Une classe de systèmes d'écoulement très complexe qui a été examinée est celle d'un avion : l'exergie qui est l'énergie utilisable embarquée à bord en tant que combustible est entièrement détruite par tous les courants qui peuvent surmonter les résistances internes et externes [17].

Dans cette perspective, le système énergétique d'un avion, par exemple, serait l'équivalent de tout système en vol naturel, en général. En effet, Bejan généralise le premier cas à tous les exemples qu'on peut trouver dans la nature et qui ont la même forme ou la même structure. Cette équivalence entre la nature et l'ingénierie, entre l'écoulement naturel et le processus constructal est schématisée en figure I.20.

La figure I.20 présente un résumé de la distribution des pertes énergétiques ou d'exergie d'un avion. Allant dans la direction de l'écoulement du combustible, la première perte d'exergie est due à la combustion. Ensuite, vient la perte due au fonctionnement du moteur. La fraction d'exergie restante est produite par le moteur qui gouverne tous les sous-systèmes satisfaisant à toutes les fonctions de l'avion.

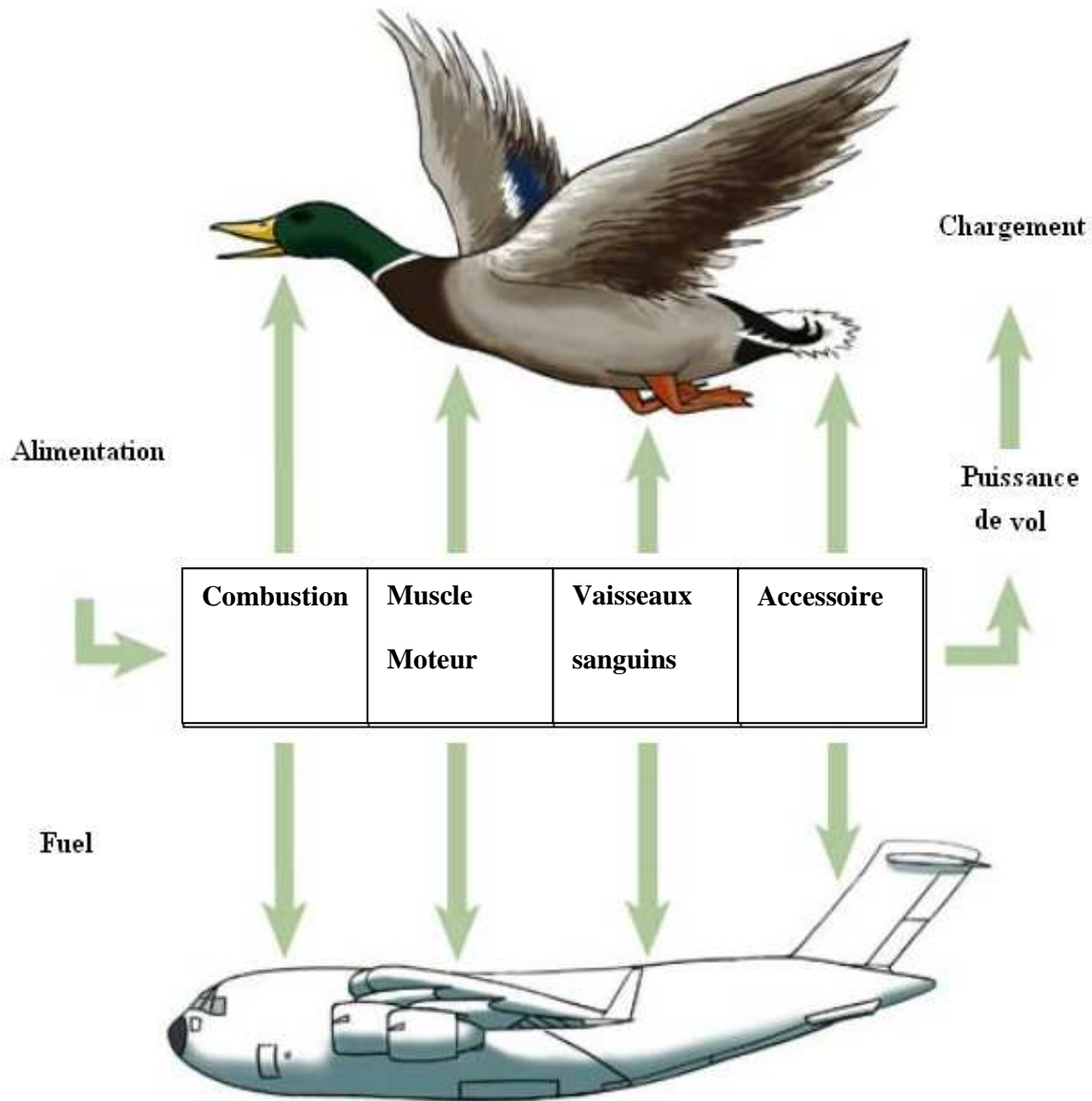


Fig. I.20. Distribution d'énergie comparée pendant le vol d'un avion et d'un oiseau (Bejan 2005).

### III.1.2.PRINCIPE D'OPTIMISATION : CONCEPT VOLUME – POINT

La théorie constructale qui s'appuie sur le concept du Volume-Point est appliquée pour optimiser les flux de quantité de mouvement, de chaleur et de masse, etc. Cette théorie se propose de résoudre le problème en recherchant la forme optimale à partir du plus petit volume élémentaire possible. Actuellement, cette théorie a beaucoup d'applications réussies dans le processus de transfert de chaleur et dans d'autres domaines notamment en technologie et science de la nature.

Généralement, le principe de Volume-Point conduit à établir une optimisation géométrique pour réduire au minimum la résistance d'écoulement au sein d'un volume donné.

### **III. 1.3.APPLICATION DANS LE TRANSFERT DE CHALEUR**

Dans le domaine du transfert de chaleur, il y a une multiplication des recherches qui illustrent la méthode constructale. Des travaux récents ont été effectués pour étudier de nombreux exemples de structures d'écoulements internes et externes optimisées pour transférer la chaleur soit par conduction soit par convection.

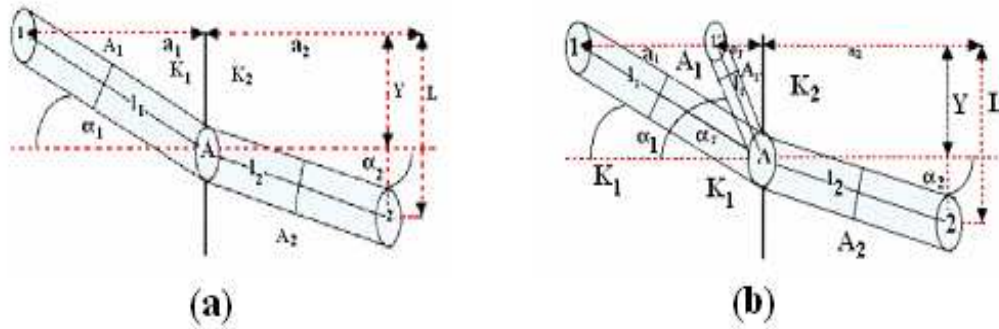
L'objectif global consiste à réaliser la maximalisation de la densité de flux de chaleur, ou la minimisation des températures des points chauds quand la totalité du flux de chaleur généré, du volume et des autres contraintes est spécifiées.

Le problème de la conduction de la chaleur du Volume-Point (VP) ou de la Surface-Point (SP) a été à l'origine abordé par **A.Bejan [18,19]**. Il a considéré un volume fini avec une source de chaleur uniforme à l'intérieur qui est refroidie par un point de radiateur situé sur sa frontière. Il a déterminé la répartition optimale de la conductivité pour un volume donné telle que le flux de température est réduit au minimum.

**S.Sieniutycz [20]** a également examiné la conduction de chaleur non- linéaire satisfaisant à un principe de variation de type de Fermat dans le cas d'un transfert stationnaire de la chaleur.

Lorsqu'un champ thermique est imposé en fixant le gradient thermique, le transfert thermique peut être décrit de manière équivalente en termes de rayons, les chemins de l'écoulement de la chaleur sont déterminés par la direction du gradient de température et les propriétés non linéaires du milieu (Fig.I.21)

Ainsi le flux thermique est considéré en tant que rayon, pour lesquels une loi analogue à la loi de réfraction de la lumière peut être formulée dans un milieu non homogène dans lequel la conductivité thermique change en fonction de la position considérée.



**Fig. I.21. Illustration du principe de Fermat pour la conduction de la chaleur.[20].**

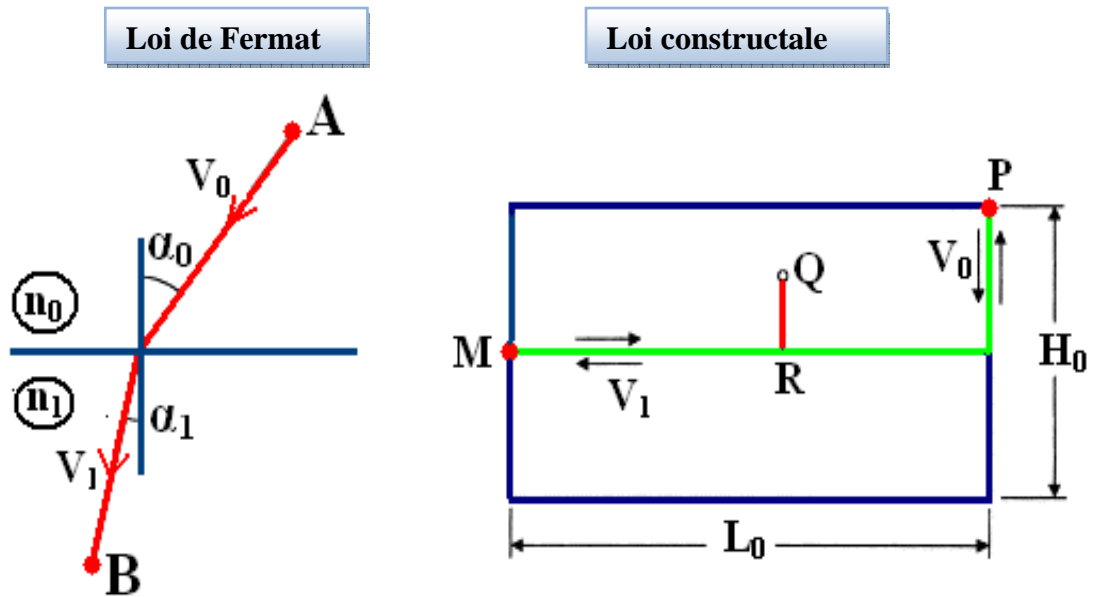
Les rayons de chaleur voyagent le long de la direction du gradient négatif de la température qui est perpendiculaire aux surfaces isothermes.

Plus tard, **A. Bejan [21]** a fait un rapprochement entre le travail de **Sieniutycz [20]** sur le « principe de Fermat » et le principe constructal. Ce rapprochement généralise et renforce la théorie constructale **[22,23]** à travers la forme géométrique adaptée (complexité et organisation optimisées) que l'on observe dans les systèmes d'écoulement macroscopiques.

Cette liaison est récapitulée graphiquement en figure I.22, laquelle est basée sur l'analogie entre la minimisation du temps de séjour **[3]** qui est équivalent à la minimisation de la résistance thermique **[20]** ou maximalisation de l'évolution de l'écoulement en général **[23,24]** au sein d'une cavité parallélépipédique.

La théorie constructale s'applique à tous les dispositifs d'écoulement présent dans les systèmes animé, inanimé et les machines. Le principe qui produit la forme géométrique optimale est représenté au niveau de la figure I.22. L'accès d'écoulement a été maximalisé entre un point (source, ou puits) et un ensemble d'infinités de points (volume, ou surface). Comme on peut le voir le principe est valable dans des systèmes considérablement plus complexes tels que la production d'électricité, le vol d'oiseau, etc....

La figure I.22 montre le chemin suivi entre deux points (Principe de Fermat), comme un exemple simple illustratif du principe constructal : voyage entre un point et une infinité de points (volume).



**Fig.I.22. Génération de la forme géométrique selon la minimisation du temps de séjour [1].**

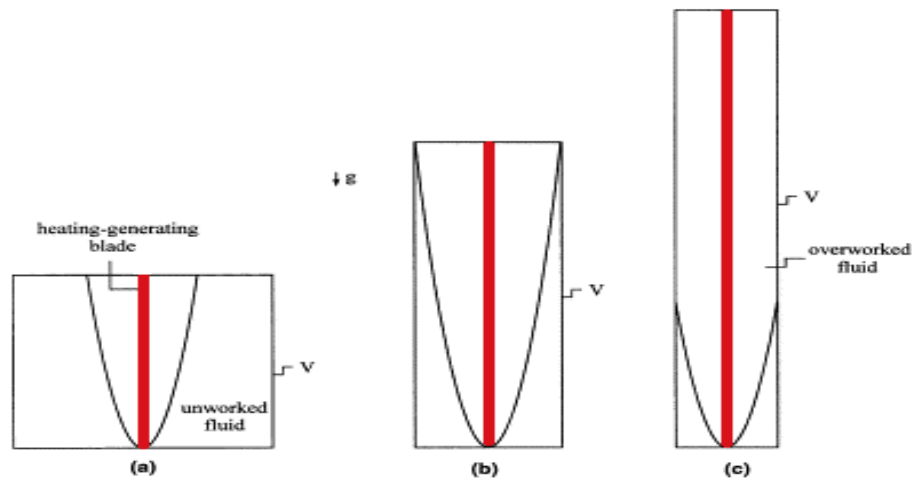
En générale, lorsque le rapport des vitesses de propagation (ou de conductivités thermiques) des deux milieux est infini, le chemin d'écoulement prévu doit avoir un angle de  $90^\circ$ . Lorsque le rapport est fini, chaque ligne brisée a un certain angle nécessairement inférieur à  $90^\circ$ .

Pour un écoulement entre deux points, la géométrie associée au mouvement est une ligne brisée (rayon réfracté). Pour l'écoulement de type Volume-Point, la géométrie correspond à un paquet d'un nombre infini de lignes brisées. Les structures dissipatives de la thermodynamique irréversible peuvent être déduites du même principe régissant l'optique et beaucoup d'autres architectures naturelles qui sont structurées selon la même loi. Par exemple, les tubes ronds, arbres bronchiques, cristaux dendritiques sont utilisés pour approcher les phénomènes de turbulence et de convection [25].

En convection naturelle, une relation basée sur des équations de similitude, développée par **A.Bejan** [26], caractérise la variation de la température à la paroi verticale d'un milieu poreux soumis à un flux thermique constant. Les travaux de **Bejan** ont permis d'établir un lien analytique entre la distribution de température et les propriétés des milieux comme la perméabilité et la conductivité équivalente.

A. K. da Silva et Al [27] ont examiné un nouveau concept de construction pour produire des structures multi-échelles dans le processus de la convection naturelle. L'objectif est de maximaliser la densité de transfert de chaleur ou bien le taux de transfert de chaleur par unité de volume.

Dans ces conditions, on s'arrange à ce que le volume d'écoulement soit rempli de lames verticales équidistantes chauffées selon des longueurs décroissantes figure I.23). Les espacements entre les lames sont alors optimisés pour assurer la densité maximale de transfert de chaleur.



**Fig.I.23. Forme optimale de volume pour la densité maximale de transfert de chaleur. [27].**

Les couches limites thermiques se développent pendant que le fluide balaye les surfaces thermogènes de sorte que le volume de fluide non chauffé apparaît entre les couches limites. La quantité de fluide non chauffée dépend de la forme du volume globale  $V$ . Ainsi deux formes extrêmes de volume sont proposées dans Fig. I.23a et Fig. I.23c.

Si le volume est de forme trop carrée (Fig. I.23a) la région non chauffée est alors grande de même que le volume occupé par le fluide devient petit.

Si le volume est de forme très mince (Fig. I.23c) les couches limites fusionnent, ce qui a pour conséquence que le jet crée le réchauffement. Cette propriété n'est plus vraie s'il s'agit d'un réfrigérant. Ces deux propriétés externes suggèrent l'existence d'une forme de

volume optimale :  $V$  est occupé totalement par le fluide de travail quand ses couches limites fusionnent à l'extrémité du canal (Fig. I.23b).

Le problème posé par les ailerons convecteurs et la solution constructale ont été envisagés également par **Bejan et Dan [28]**. Les recherches se limitent au cas d'un problème bidimensionnel dont le volume est constitué d'une surface ( $A$ ) et d'épaisseur  $W$ . Le problème pratique se propose de distribuer de façon optimale une quantité fixe de conductivité élevée  $K_p$  qui prend la chaleur à partir d'un point sur la frontière et la décharge ou la distribue dans tout le volume. Ceci a constitué le point de départ qui conçoit le processus de conduction de la chaleur sous la forme « d'arbres liquides ». Toutefois cette interprétation reste insuffisante et appelle à un travail théorique approfondi, numérique et expérimental plus rigoureux, à l'avenir, pour justifier l'optimisation constructale.

### III.2. APROCHE DYNAMIQUE

La théorie constructale d'optimisation globale sous certaines contraintes locales peut fournir l'explication de manière simple de l'émergence de nombreuses formes naturelles. L'idée constructale réside dans le fait que les architectures de flux naissent d'un principe de maximalisation de l'accès aux flux, dans le temps, qui est doté d'une capacité à se transformer.

#### ✱ Notion d'arbre constructal

Les réseaux d'arbre constructal sont des chemins d'écoulement déduits d'un principe : la minimisation de la résistance globale de l'écoulement entre un volume unique (source, ou puits) et le point de taille fine qui sera sujet aux contraintes globale et locale [29].

Les premiers arbres déduits entièrement de la loi constructale sont énoncés en 1996 comme des solutions au problème d'écoulement de point-surface [30]. La structure arborescente ne peut pas être déterminée théoriquement lorsque la direction du temps est inversée, à partir des grands éléments vers de plus petits éléments. Plus récemment, cette structure est devenue le centre de la théorie constructale.

Des réseaux d'arbre ont été appliqués au transfert de chaleur comme illustration de la théorie constructale qui représentent une nouvelle technique permettant de réaliser

l'optimisation des dispositifs de transfert de chaleur, des échangeurs de masse, des réacteurs chimiques et des piles à combustible.

**Murray [31,32]** et plusieurs autres auteurs [33,34] ont essayé de prévoir les dispositifs géométriques sous forme d'écoulements en arbre '' afin d'optimiser la résistance exercée par l'écoulement du fluide par rapport au volume d'écoulement global. Ce principe est alors équivalent à la minimisation de la puissance de pompage (ou génération d'entropie ou destruction d'exergie) si le taux d'écoulement est indiqué à l'avance. C'est le même principe qui régit le travail thermodynamique d'optimisation qui continue à être utilisé dans beaucoup de domaines de la technologie. En particulier, Il a été montré que si le régime d'écoulement est laminaire et entièrement développé dans chaque tube du fluide de l'arbre, on augmente les échanges lorsque les deux tubes viennent ensemble converger vers un seul (bifurcation).

### **Arbres sur un secteur rectangulaire**

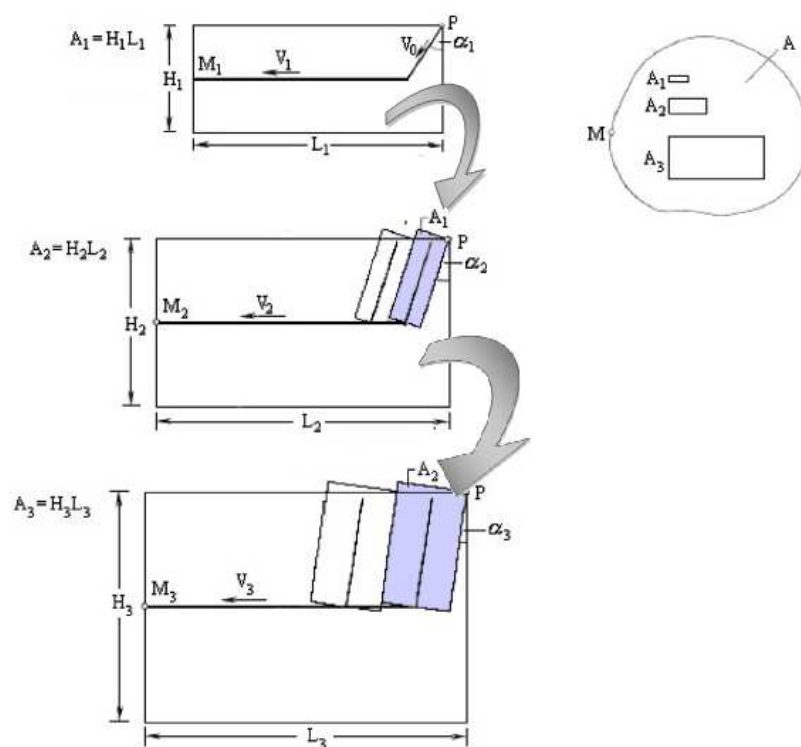
En théorie constructale, il est prouvé que la manière la plus facile de réaliser l'écoulement d'un nombre infini de points (surface, volume) vers un point consiste à évoluer selon la forme en '' arbre ''.

C'est ainsi que **A. Bejan [1]** a présenté des constructions de ''réseau en arbre '' afin d'illustrer le principe de Volume-Point. Il a proposé une solution pratique du problème de transfert de chaleur de ce type d'écoulement selon une procédure ordonnée construite en plusieurs étapes géométriques d'optimisation. Cet ordre d'élaboration du processus commence par le plus petit bloc constitutif ou système élémentaire pour aller vers le plus grand bloc constitutif: assemblage proche du système étudié.

La solution constructale du problème repose sur la minimisation du temps de séjour entre une surface et un point qui a été étudiée théoriquement par **G.A Ledezma et Al [35]**. La forme géométrique du '' réseau en arbre '' est déduite d'un mécanisme simple. La découverte de la forme d'un volume thermogène peut être optimisée à condition de minimiser la résistance thermique entre le volume et un point du radiateur. C'est cette procédure qui est utilisé pour résoudre le problème de minimisation du temps de séjour entre un volume (ou une surface) et un point. La vitesse de déplacement peut varier d'une taille donnée à l'assemblage suivant. Cependant, la plus basse vitesse est utilisée pour

atteindre une infinité de points situés dans les plus petits éléments de volume. Le chemin d'écoulement du principe Volume-Point qui en résulte est un "réseau en arbre". En pratique, il s'agit d'un principe de conception simple (l'optimisation géométrique de l'accès de volume-point) qui détermine tous les dispositifs du réseau d'arbre. Ils ont établi une solution constructive relative à la minimisation du temps de séjour en partant de la plus basse vitesse  $V_0$  correspondant à la plus petite échelle (surface élémentaire  $A_1$ ).

La géométrie associée à chaque bloc constitutif est optimisée en fonction du facteur d'aspect ( $H_i/L_i$ ), de  $V_i$  et de l'angle ( $\alpha_i$ ).



**Fig. I.24. Principe de conception simple de la minimisation géométrique du temps de séjour [35].**

On montre, d'après Bejan, que les dispositifs optimisés par construction des assemblages donnés en Fig. I.24, sont établis comme suit :

$$\left( \frac{H_1}{L_1} \right)_{opt} = \frac{2V_0}{f_1 V_1} \dots\dots\dots I.16$$

avec

$$\alpha_{1,opt} = \text{Arc sin}\left(\frac{V_0}{V_1}\right) \dots\dots\dots \text{I.17}$$

$$\left(\frac{Hi}{Li}\right)_{opt} = \frac{Vi-1}{f_i V_i} \dots\dots\dots \text{I.18}$$

et

$$\alpha_{i,opt} = \text{Arc sin}\left(\frac{Vi-1}{2V_i}\right) \dots\dots\dots \text{I.19}$$

Pour  $i \geq 2$

Où l'on a posé :

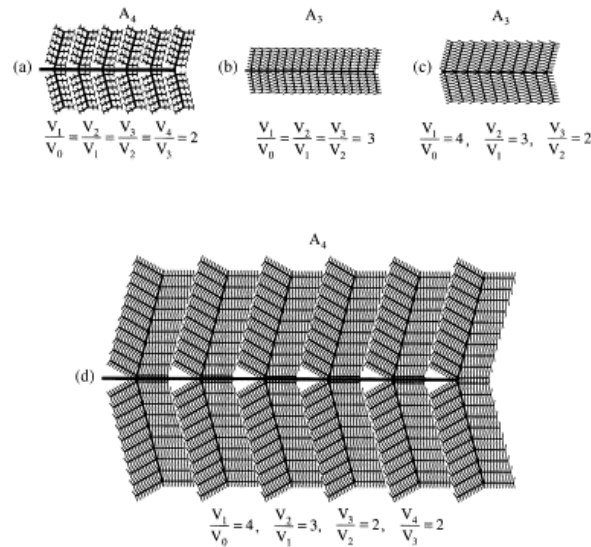
$$f_i = \frac{1}{\cos \alpha_i} - \frac{V_{i-1}}{2V_i} \tan \alpha_i \dots\dots\dots \text{I.20}$$

Le temps optimisé pour la première construction a pu être évalué selon:

$$t_1 = \left(\frac{2f_1 A_1}{V_0 V_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'ordre constructal peut être effectué analytiquement [3] en suivant les étapes illustrées dans figure. I.25. Un dispositif intéressant de cette construction est que le même modèle émerge si, au lieu de réduire au minimum le plus grand temps de déplacement à travers chaque secteur, on réduit au minimum le temps de déplacement ramené à une moyenne au-dessus de tous les points du secteur

Les figures (I.25.a et I.25.b) montrent deux exemples dessinés à l'échelle en employant comme unité de surface la même surface élémentaire  $A_1$ . Supposant que la vitesse augmente par le même facteur chaque fois qu'un nouvel assemblage est formé, les chemins deviennent plus près de la perpendiculaire à mesure que le facteur  $(Vi/V_{i-1})$  d'augmentation de vitesse augmente.



**Fig. I. 25. Réseaux d'arbre déterministes pendant le temps de déplacement minimal entre un secteur de taille finie et un point. [12].**

La figure. I. 25.c du secteur A. et la Figure. I. 25.d illustrent un cas dans lequel le rapport d'augmentation de vitesse ( $V_i/V_{i-1}$ ) diminue pendant que les assemblages deviennent plus grands. Les assemblages évoluent, deviennent moins minces, de sorte que le nombre de constituants décroît pendant que  $V_i/V_{i-1}$  diminue. Des chemins du même rang sont représentés par des lignes de même épaisseur.

Par exemple,

- Le secteur  $A_4$  du quatrième ordre, quand la vitesse d'un secteur au prochain est double (Fig. I.25.a).
- Les assemblages deviennent plus minces, leurs constituants sont alors plus nombreux, lorsque le rapport  $V_i/V_{i-1}$  d'augmentation des vitesses est plus grand (Fig. I.25.b).
- les assemblages de surface de troisième et quatrième ordre lorsque le rapport  $V_i/V_{i-1}$  d'augmentation de vitesse diminue pendant que la construction couvre le secteur donné (Fig. I.25.c et Fig. I.25d).

La solution constructale donnée par **Bejan et al [36]** au problème de refroidissement d'un volume thermogène uniforme est réalisée par la minimisation de la résistance thermique aux niveaux des points chauds.

Dans les travaux sur la théorie constructale, les constructions optimisées sont employées pour élaborer par accumulation la prochaine construction évoluée.

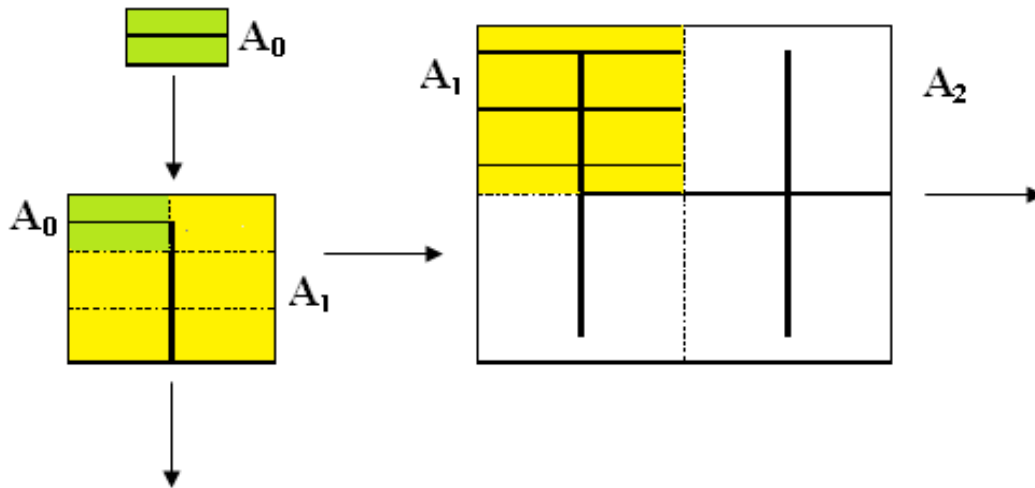


Fig.1.26. Ordre d'optimisation constructal. [36].

Une application assez rare de la théorie constructale a été présentée dans le travail de **M.Almogbel et Al** [37] qui donne un aperçu du procédé à mesure que l'embranchement interne (complexité) augmente. Ils ont appliqué la théorie constructale au même problème avec quelques changements par rapport à A.Bejan.

- les dispositifs optimisés des constructions précédentes qui sont employées ne sont pas préservés.
- des espacements choisis entre les liens d'insertion produisent une haute conductivité;
- Le problème de conduction de la chaleur qui est différent de l'application initiale de **A.Bejan** [28], est traité numériquement et en deux dimensions.

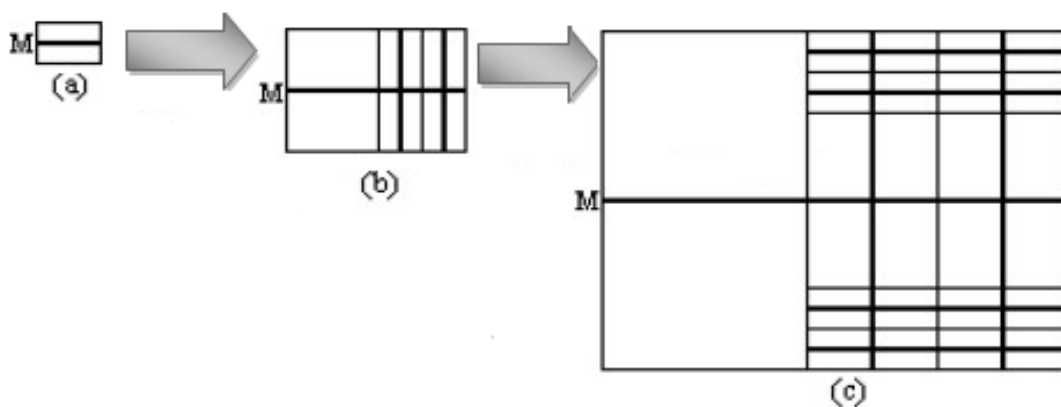
Tous ces changements ont amélioré la mise en œuvre de la théorie constructale **Ghodoossi** [38] a réexaminé le même travail d'un point de vue critique notamment la stratégie de solution constructale de **Bejan** [28]. Cette étude est récapitulée en Figure .I.27.

Un lien unique de conductivité élevée décharge la chaleur produite au radiateur (point M) en volume élémentaire. L'assemblage d'un certain nombre de volumes élémentaires optimisés des côtés supérieurs et inférieurs d'un nouveau lien de conductivité

de matériel élevé compose la première construction. De même, la deuxième construction se compose de l'ensemble des premières constructions optimisées.

La résistance thermique dans la première construction sera inférieure au volume élémentaire si la condition  $\tilde{k}\phi > 8$  sur la résistance thermique est satisfaite dans la deuxième construction est toujours plus haute que cela dans la première construction.

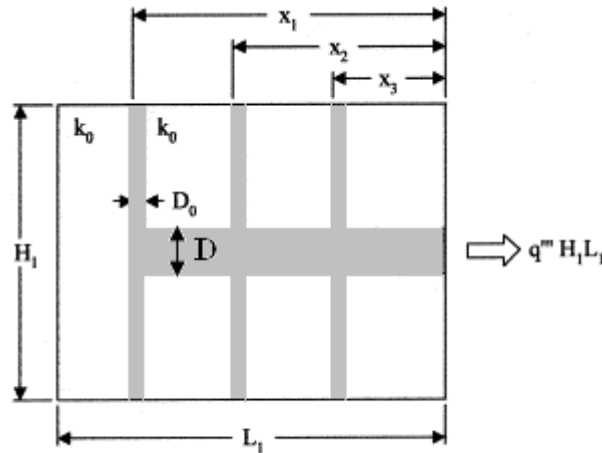
$\tilde{k}$  et  $\phi$  sont respectivement le rapport des conductivités et la fraction de volume du conducteur élevé.



**Fig.I.27. Méthode constructale : (a) élément constructal, (b) Première construction, (c) Deuxième construction [38].**

Par conséquent, l'exécution n'augmente pas par la marche à suivre vers les constructions évoluées avec un embranchement interne plus élevé.

**M. Almogbel et Al [39]** ont étudié l'optimisation des structures arborescentes non uniformes en régime de conduction de chaleur bidimensionnelle entre un domaine rectangulaire de taille fixe et un point situé sur sa frontière. Ils ont considéré l'espace rectangulaire  $H_1 L_1$  représenté en figure I. 28, dans laquelle le paramètre  $H_1/L_1$  de forme varie. La chaleur est produite uniformément avec un flux  $q'''$  au-dessus du domaine entier. Le courant de chaleur produit par le système ( $q'''H_1L_1$ ) s'échappe à partir d'un radiateur de diamètre  $D_f$ , le reste de la frontière rectangulaire est supposé isolé.



**Fig.I.28. Première construction avec une distribution uniforme de volumes élémentaires [39].**

La résistance thermique produite par le courant " Volume-Point " est réduite sensiblement en insérant un peu de matière assurant une haute conductivité ( $K_P$ ).

Les résultats prouvent que chaque structure ainsi optimisée ne dispose pas d'un volume élémentaire mais de plusieurs, et que les éléments de volume considérés sont situés loin de la racine de l'arbre apparaissent plus petits.

Une meilleure réalisation globale de la méthode constructale est atteinte lorsque la complexité et le nombre de degrés de liberté de la structure élémentaire augmentent.

### \* **Modèle de l'arbre en forme de disque**

Deux études récentes [40,41] ont montré comment faciliter le transfert de la chaleur produite quand le radiateur est situé au centre d'un volume en forme de disque. Dans ce cas, il est avantageux d'installer les éléments d'insertions de haute conductivité qui se prolongent radialement à partir du centre de disque, et bifurquent avant qu'elles atteignent le périmètre. Les insertions et les ailerons en forme d'arbre ont été optimisés de cette façon, de sorte que leurs architectures deviennent plus attrayantes et plus complexes lorsque les volumes thermogènes deviennent plus grands.

**L.Rocha et Al [42]** ont appliqué la théorie constructale au problème de refroidissement d'un volume thermogène uniforme par des canaux de conductivité élevée, à

un secteur en forme de disque. Une stratégie hiérarchique à développer la structure interne optimale d'un corps thermogène rond s'est refroidie au centre à l'aide des insertions de façon optimale ayant une conductivité élevée.

Le volume élémentaire est un secteur d'un disque que l'on présente dans la figure I.29.

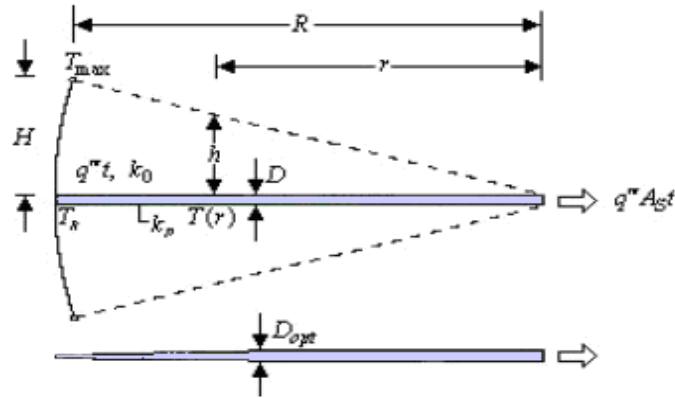


Fig.I.29. Volume élémentaire [42].

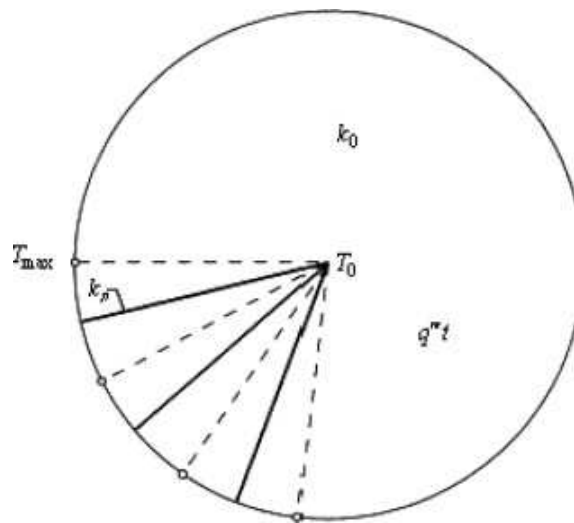
Le volume élémentaire est optimisé en réduisant au minimum la résistance thermique maximum. La minimisation d'une résistance thermique donnée par **L.Rocha et Al [42]** a été obtenue comme suit:

$$R_0 = \frac{(T_{\max} - T_0)_{\min}}{q'' A_s / k_0} = \frac{2}{(3\tilde{k}\phi)^{1/2}}$$

Un nombre (n) de volumes élémentaires optimisés qui se basent sur le traitement d'un disque complet est représenté en figure I.30. Celle-ci montre comment à partir de ce disque on parvient à faire la minimisation d'une résistance thermique donnée.

Dans le disque considéré on met bien en évidence la première construction ayant pour valeur :

$$R_1 = \frac{(T_{\max} - T_0)}{q'' NA_s / k_0} = \frac{4}{(3\pi\tilde{k}\phi)^{1/2}}$$



**Fig. I.30. Première construction en modèles élémentaires radiaux. [42].**

Par voies d'approches à la fois analytique et numérique, **A.K. da Silva et Al [43]** ont considéré le problème relatif à un système de refroidissement à partir de l'extérieur d'un disque thermogène. Au lieu d'utiliser des arbres de haute conductivité qui s'élèvent à partir du centre, ils envisagent la possibilité d'installer des insertions élémentaires de haute conductivité en les prolongeant du périmètre vers l'intérieur du disque.

Ils ont montré que la géométrie correspondante aux insertions rectangulaires de haute conductivité dans un corps en forme de disque qui produit de la chaleur en chaque point peut être optimisée afin d'atteindre une résistance thermique minimale (refroidissement).

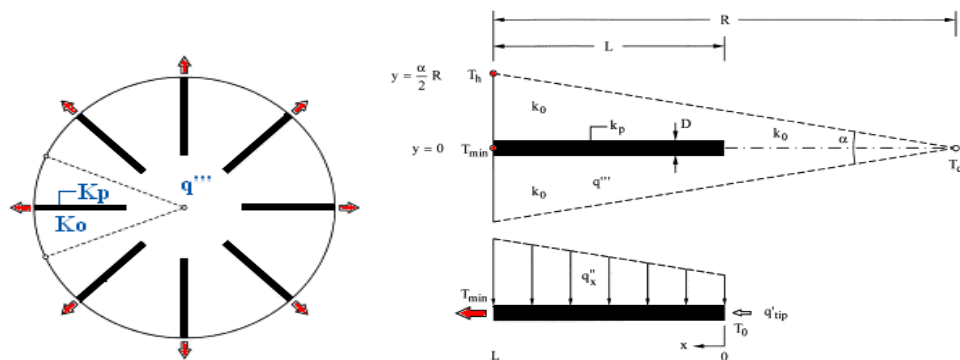
Cet exemple particulièrement instructif renforce la base théorique de la méthode constructale, qui soutient que la maximisation de " l'accès d'écoulement " (au sens transferts de chaleur, de quantité de mouvement, de masse, etc.) qui est sujet aux contraintes globales est responsable du mécanisme architectural des processus de transfert ou l'écoulement en général.

Ainsi, le système d'écoulement couvre le disque (figure I.31) de façon que pour un rayon  $R$  et de la conductivité thermique  $k_0$  produit de la chaleur  $q$  par unité de surface. Le courant ou flux de chaleur s'écoule à partir des ailerons radiaux ayant une conductivité

beaucoup plus élevée ( $K_p$ )  $K_p > K_0$ . Suivant les indications de Figure I.31, les ailerons sont placés de façon équidistante sur le périmètre du disque en se prolongeant vers l'intérieur.

Chaque aileron a la longueur  $L$  et l'épaisseur  $D$ . On suppose que la quantité de matière associée à  $K_p$  est fixe. Cette contrainte peut être exprimée en termes de fraction  $\phi$  du secteur occupée par l'élément correspondant à  $K_p$  de sorte que l'on a :

$$\phi = \frac{DLN}{\pi R^2}$$



Disque constituée des lames uniformes

Modèle triangulaire de la section transversale du disque

Fig. I.31. Système de transfert de chaleur conçu par le refroidissement d'après K. da Silva[43].

Lorsque le disque atteint le nombre d'une centaine d'ailerons, on réalise alors une comparaison entre la solution analytique de la longueur optimale (d'un aileron), et les résultats numériques obtenus illustrés par la figure I.32

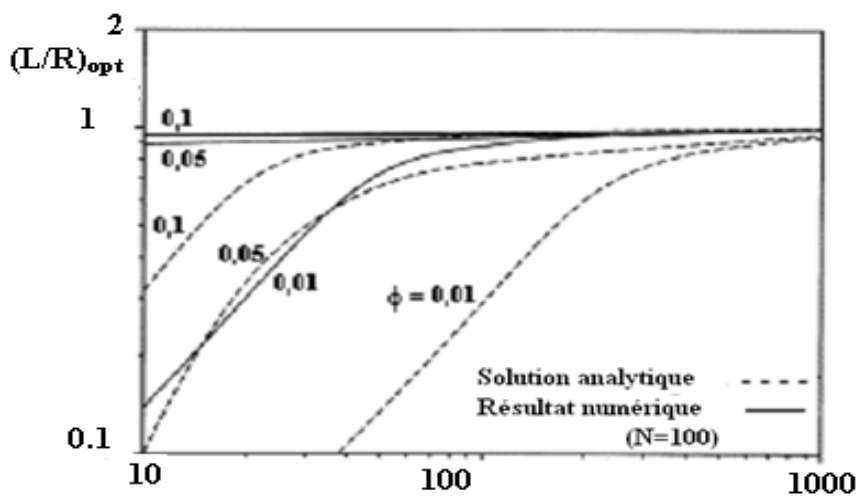
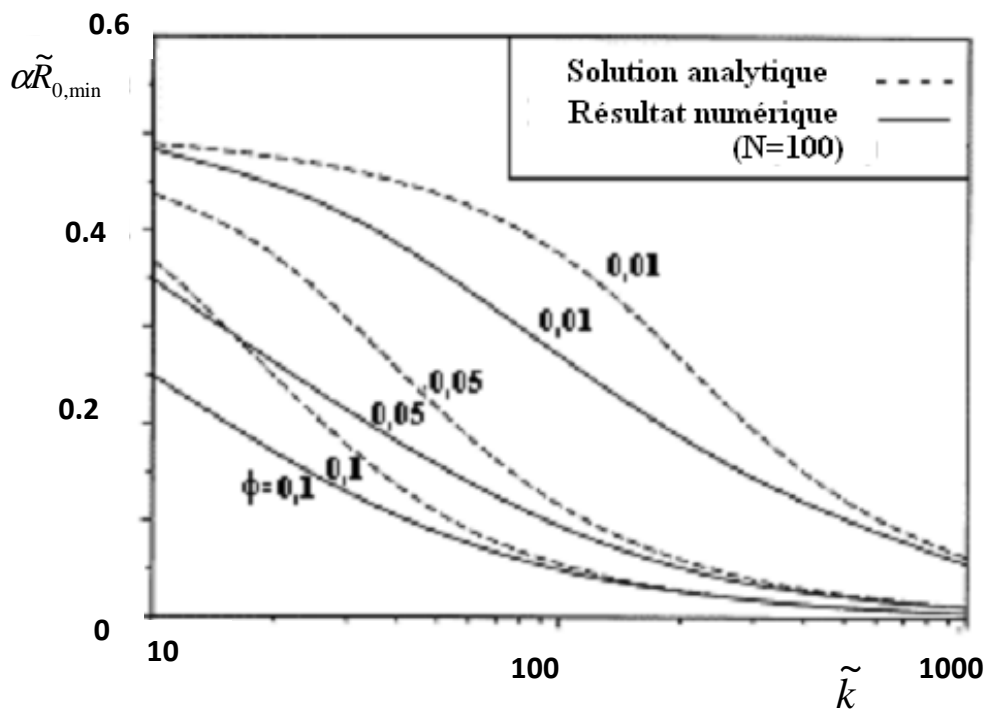


Fig. I. 32. Longueurs optimales d'aileron : Comparaison entre la solution analytique et les résultats numériques [43].

L'étude a été effectuée pour examiner la situation correspondant à  $k \gg 100$  et le transfert. Particulièrement si  $\tilde{k} \gg 100$ , on constate que le passage à la limite (L/R) tend asymptotiquement vers 1.

Pour de faibles valeurs de  $\tilde{k}$  ( $\tilde{k} \ll 100$ ), les résultats numériques sont peu sensibles, particulièrement lorsque  $\phi$  est suffisamment élevé si  $\phi \geq 0.05$ . Dans le cas limite, la solution analytique se comporte différemment. Les résultats numériques et analytiques de manière semblable.

La Figure I.33 donne une comparaison des résultats numériques et la solution analytique obtenue pour la résistance thermique minimale ( $\alpha \tilde{R}_{c,\min}$ ).



**Fig.I.33. Résistances thermiques minimales : comparaison entre la solution analytique et les résultats numériques [43].**

L'accord semble être bon dans l'intervalle  $10 < \tilde{k} < 1000$  et  $0.01 < \phi < 0.1$ . Les deux solutions convergent lorsque  $\tilde{k}$  augmente vers de grandes valeurs.

✱ Réseau d'arbre tridimensionnel

L'accès tridimensionnels au Volume - Point peut être optimisé de la même manière comme dans Figure I.25.

Une fois de plus en remplaçant les éléments de surface ( $A_1, A_2, \dots$ ) par les éléments de volumes ( $B_1, B_2, \dots$ ) cylindrique [44]. Chaque élément de volume à deux dispositifs géométriques qui peuvent être optimisés: la forme représentée par le rapport  $H_i/L_i$  (diamètre/longueur) dans Figure I.24, et l'angle  $\alpha_i$ . Les dispositifs optimaux du plus petit élément de volume  $B_1$  sont tels que :

$$\left(\frac{H_i}{L_i}\right)_{opt} = \frac{4V_E}{f_1 V_S} \dots\dots\dots I.18$$

Si  $i \geq 3$  les résultats géométriques suivent le modèle  $(H_i/L_i)_{opt} = 4V_{i-1} / (3f_i V_i)$ .

Les résultats pour  $B_2$  sont corrects seulement de façon approximative parce que les cylindres de diamètre constant ne s'adaptent pas parfaitement à l'intérieur de la totalité d'un cylindre de plus grand diamètre.

Selon [44] les réseaux d'arbres en trois dimensions ont la même origine déterministe que les réseaux d'arbre à deux dimensions.

M. Almogbel et Al [45] ont étendu la méthode constructale d'optimisation aux assemblages cylindriques des ailerons de goupille. L'assemblage est arrangé comme un arbre d'une tige composé de beaucoup de branches radiales (Figure. I.34). Ici, le problème d'optimisation a pour but de maximaliser la conductance globale soumise à un volume total fixe et à une quantité de matière circulant au niveau de l'aileron.

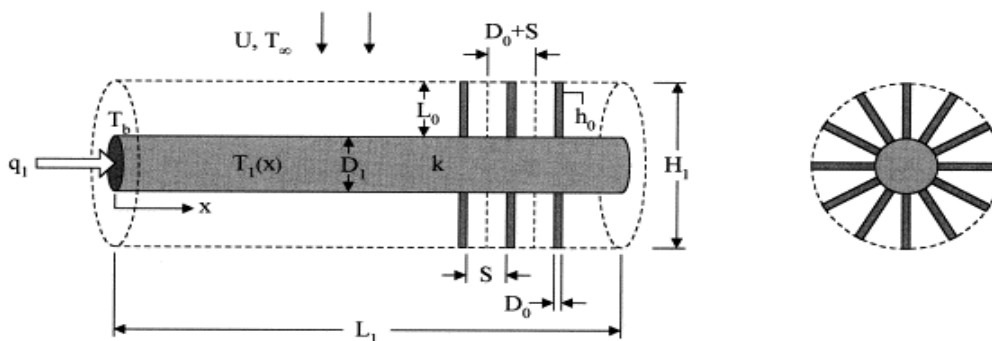


Fig. I. 34. Système cylindrique d'ailerons radiaux d'une goupille [45].

On évalue le volume élémentaire qui est donné par la relation :

$$V_0 = \frac{\pi}{4} (D_0 + S)^2 L_0 \dots\dots\dots I.19$$

Les extrémités libres des ailerons décrivent une surface cylindrique de diamètre  $H_1$ . Chaque aileron de goupille a pour diamètre  $D_0$  et une longueur  $L_0$ . Cet ensemble correspond à une première construction [46] tel que l'espace assigné à un aileron simple de goupille joue le rôle de volume élémentaire.

Les résultats d'optimisations numériques obtenues par les auteurs correspondent à un facteur d'aspect ou allongement externe optimisé ( $H_1/L_1$ ) qui sont représentés dans la figure I.35.

La première représente une étude effectuée pour un transfert de masse et de chaleur valable à  $Pr=0.7$ ,

La seconde étude (b) correspond à un même processus réalisé avec un nombre de Prandtl plus élevé  $Pr= 7$ .

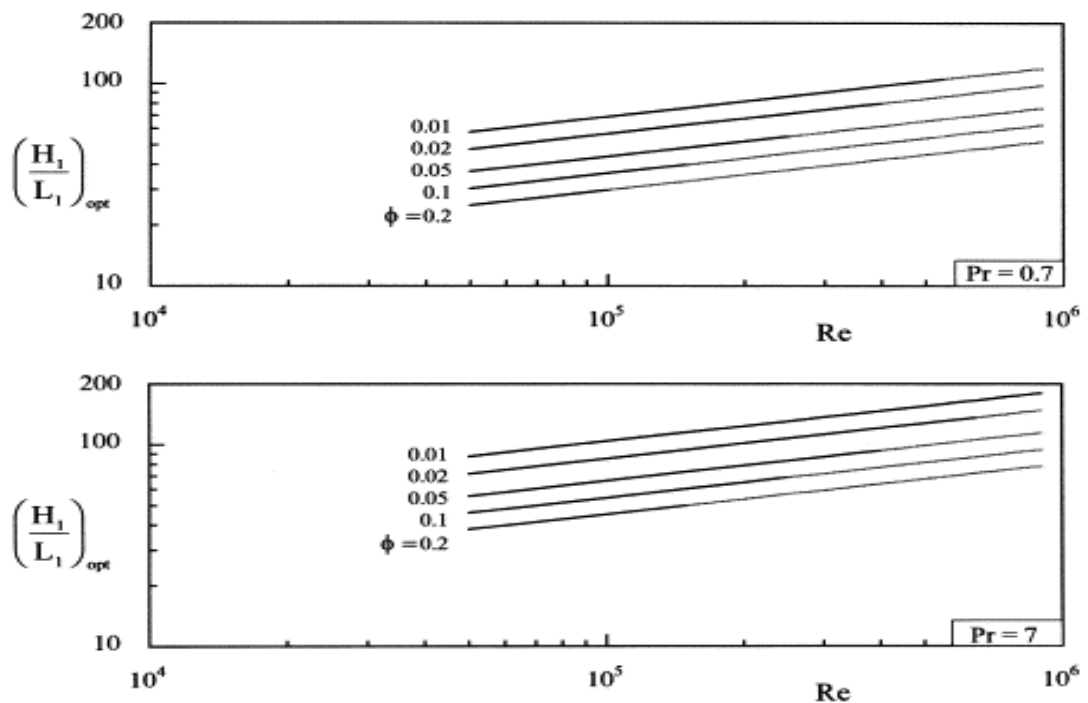


Fig. I.35. L'allongement H/L ou facteur d'aspect externe optimisé en fonction du nombre de Reynolds d'une assemblée cylindrique [46].

Ce rapport diminue à mesure que  $\phi$  augmente, et les valeurs numériques du facteur d'aspect  $\Gamma=H_1/L_1$  sont considérablement plus grandes que 1.

Les dimensions externes optimisées de l'assemblage peuvent être calculées en fonction d'une combinaison du facteur d'aspect  $H_1/L_1$  lié à la contrainte de volume  $V$ .

### III.2.1. Physique Atmosphérique

La circulation atmosphérique est le mouvement d'air à grande échelle qui redistribue la chaleur provenant du Soleil sur la Terre. D'une façon générale, ces écoulements d'air et d'eau se déplacent des régions chaudes, où la quantité de chaleur reçue est maximale (soleil proche de l'équateur) vers les régions froides, c'est-à-dire au niveau des pôles qui reçoivent une quantité moindre (soleil éloigné).

La circulation atmosphérique est caractérisée par trois zones distinctes, ou cellules de convection en raison de la rotation de la Terre (rotation de Coriolis). On peut citer la cellule équatoriale de Hadley, la cellule de Ferrel et la cellule polaire, qui sont à l'origine du phénomène de circulation atmosphérique (vent et circulation de courants aériens).

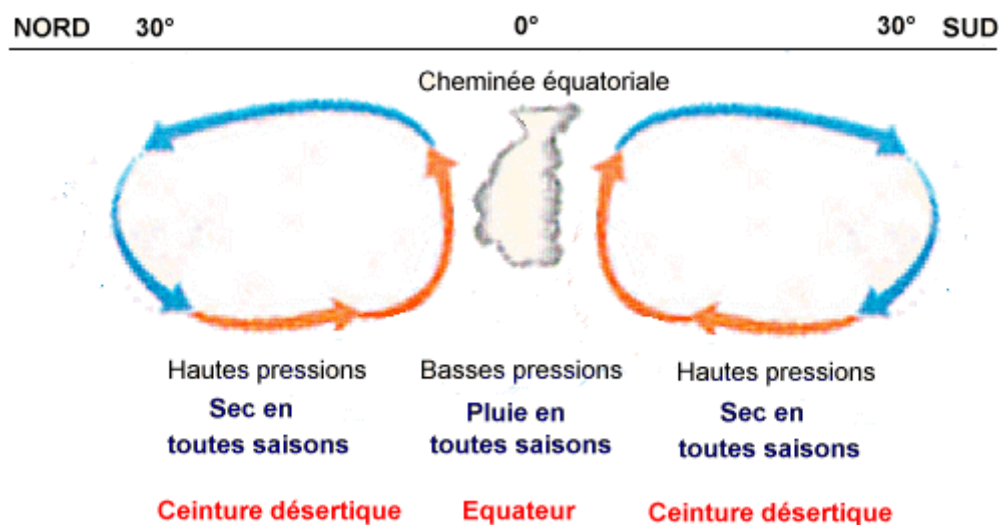
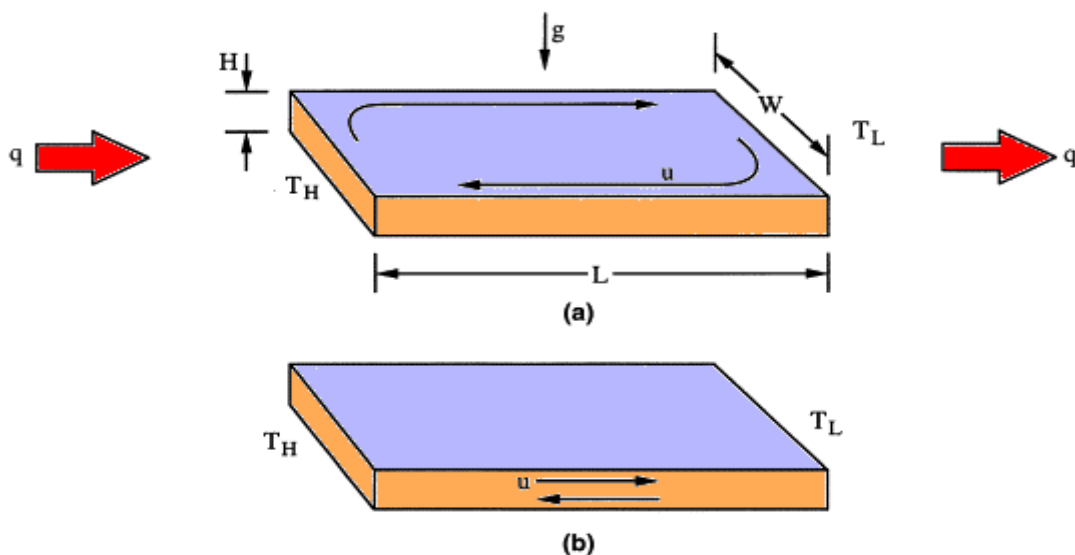


Fig. I.36.Circulation atmosphérique

A.H. Reis et Al [47] ont examiné théoriquement le système d'écoulement atmosphérique du point de vue de la théorie constructale d'organisation de la nature [36], comme en modèle relevant de la thermodynamique des systèmes hors équilibre. Cette nouvelle approche du climat pourrait avoir d'importantes implications dans la prévision des changements environnementaux. En effet, ils considèrent que la théorie constructale peut

prédire la circulation atmosphérique globale qui détermine les limites aussi bien entre les déserts et les forêts tropicales qu'entre les zones tempérées et les pôles. La théorie prévoit aussi d'autres caractéristiques climatiques, en se basant sur l'écoulement optimal de chaleur solaire, la vitesse moyenne des vents et la différence moyenne des températures entre le jour et la nuit. Mais l'intérêt de cette théorie ne s'arrête pas là; On pourrait aussi permettre de prédire les changements de dynamique environnementale telles que les variations de concentration des gaz à effet de serre.

La Terre, grâce à ses boucles de convection, nous permet d'estimer différentes quantités caractérisant la performance globale liée aux circulations atmosphérique et océanique. La circulation globale est menée par le gradient de température latitudinale qui consiste à transférer la chaleur de l'équateur vers les pôles.

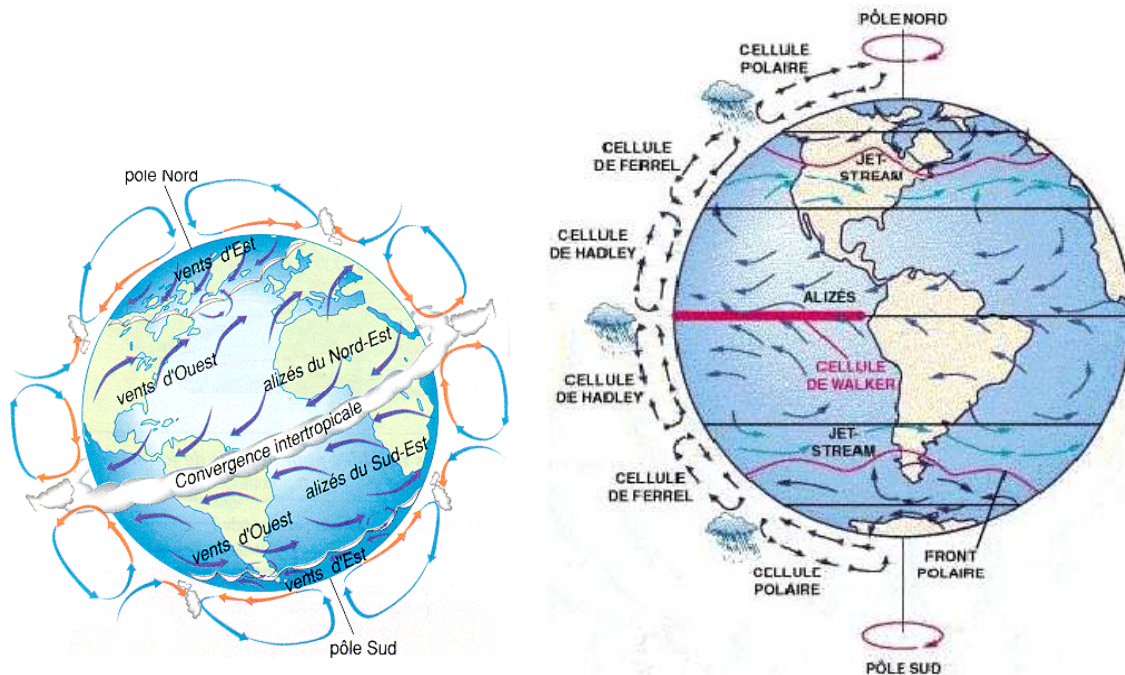


**Fig. I. 37. Boucles de convection naturelle dans une couche liquide reliant les surfaces équatoriales et polaires [47].**

Avec la méthode constructale, le processus est différent car il s'agit d'optimiser à chaque étape et non une fois la simulation terminée. Les chercheurs ont appliqué la théorie constructale en prenant comme point de vue que la circulation représente un fluide à géométrie donnée résultant de la maximisation des performances globales sous contraintes.

Afin d'analyser comment ce processus peut être optimisé grâce à la loi constructale. Celle-ci permet de retrouver les frontières latitudinales des trois zones : les cellules de

Hadley, celle de Ferrel et cellules polaires qui constituent la structure de la circulation globale principale sur Terre. Les chercheurs rapportent également que la théorie a permis de faire la prédiction de la vitesse moyenne d'écoulement atmosphérique et océanique ainsi que la température moyenne sur Terre, entre autres, paramètres caractéristiques du climat [47].



**Fig. I. 38. Structure de l'écoulement atmosphérique et océanique sur Terre.**

La modélisation expérimentale de ces phénomènes est actuellement étudiée au sein de notre laboratoire [48]. .

### III.2.2. APPLICATION AUX MILIEUX POREUX

L'optimisation en milieu poreux représente un champ de recherche qui est prometteur en raison de ses multiples applications potentielles dans l'ingénierie telles que le conditionnement des composants électroniques, les collecteurs solaires, l'isolation thermique, la climatisation, la ventilation, le refroidissement d'un réacteur nucléaire et la géothermie [49].

L'optimisation liée à l'architecture interne d'un dissipateur de chaleur a été abordée par **A.Bejan** [49]. L'auteur détermine analytiquement, grâce à une approche basée sur l'intersection des asymptotes, une configuration idéale de la matière permettant d'atteindre

le maximum de transfert de chaleur. L'étude suggère des relations analytiques qui caractérisent l'espacement optimal de micro-conduits qui ont remplis d'un milieu poreux saturé. Dans le même ordre d'idées, **Muzychka [50]** emploie également une approche constructale afin de déterminer l'arrangement interne optimal d'un échangeur de chaleur formé de micro-tubes. Le principe guidant cette approche consiste à dimensionner et positionner des tubes afin de tirer avantage de l'espace de refroidissement le plus efficacement possible. Les résultats indiquent qu'en accentuant la complexité de la structure, on constate alors que la résistance thermique globale du système décroît.

Une application intéressante de la théorie constructale dans les milieux poreux a été présentée par **Y Azoumah et Al [51]**. Ils emploient un réseau d'arbre constructal pour fournir le transfert de chaleur et de masse optimal dans un milieu réactif. Le modèle utilisé pour un réacteur plein de gaz contient un solide poreux doté d'une certaine quantité de substance. Le réacteur dans la phase vapeur est décrit à l'aide d'un volume élémentaire de forme parallélépipédique. On rappelle que le volume élémentaire ainsi choisi est semblable à celui que Bejan a employé pour présenter la méthode constructale.

Dans l'étude de cette problématique **Y. Azoumah et Al [52]** ont calculé analytiquement par la théorie constructale couplée à la condition de minimisation de la production d'entropie que la forme optimale des réacteurs ne dépend pas de leur dimension mais plutôt des caractéristiques du matériau et des collecteurs de gaz et de chaleur (figure. I .39).

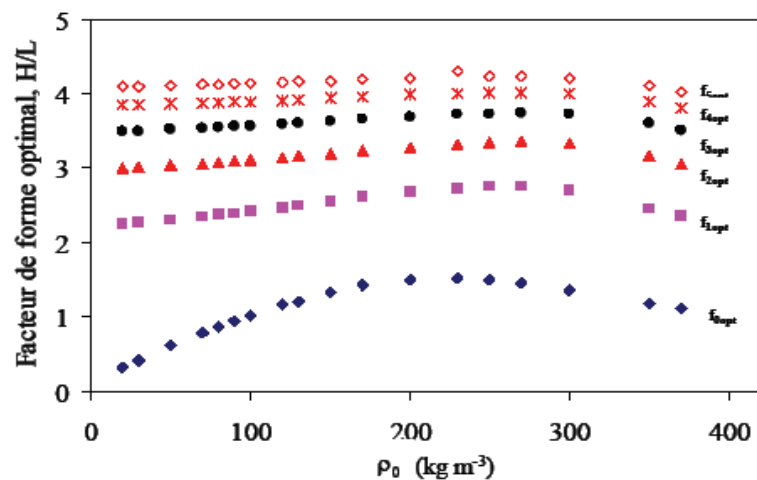


Fig. I.39 : Forme optimale des différents systèmes (du système élémentaire au système global [52]).

Les résultats précédents montrent que la théorie constructale va peut-être révolutionner totalement la thermodynamique parce qu'elle s'applique en amont de la conception, y compris l'élaboration de la forme géométrique, des systèmes énergétiques.

### III.2.3. BIOLOGIE ET SIMULATION NUMERIQUE

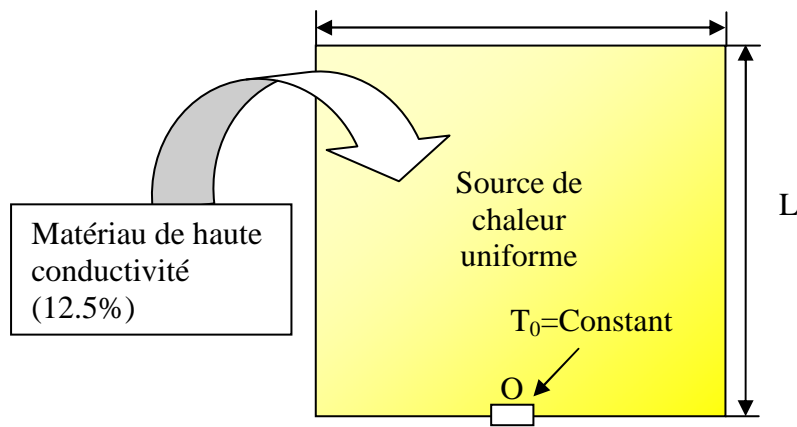
On a vu précédemment que le principe Volume-Point introduit la problématique de base du processus d'optimisation du transfert de chaleur. En particulier, le problème bidimensionnel non linéaire d'optimisation du principe Volume-Point peut être abordé selon une discrétisation qui le transforme en un problème d'optimisation combinatoire à résoudre à l'aide de quelques algorithmes d'optimisation adaptés.

#### \* Algorithme génétique

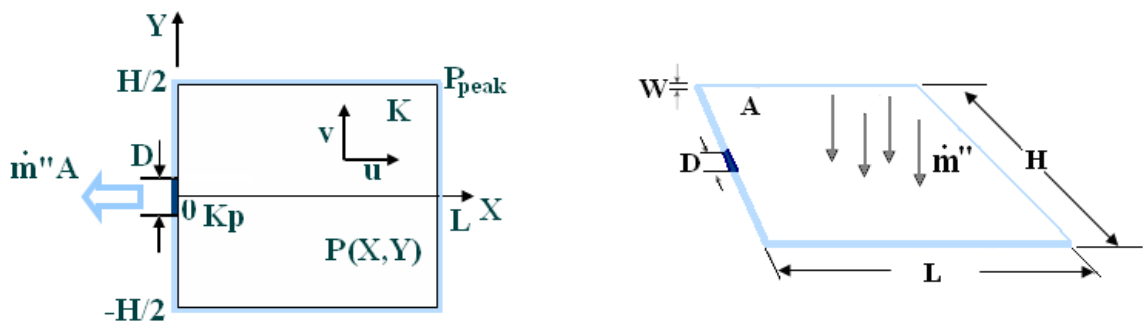
L'algorithme génétique (AG) est une technique de recherche qui s'inspire des principes biologiques de l'évolution. En effet, l'AG agit sur une population de solutions potentielles en appliquant des principes de sélection naturelle afin de générer la forme optimale (best design). Pour chacune des nouvelles générations créées, (ensemble d'individus) celle-ci est sélectionnée en fonction de leur niveau de performance par rapport au problème d'optimisation. Ces individus, supérieurs aux autres, sont ensuite combinés en utilisant des opérateurs semblables à ceux que l'on retrouve dans le monde de la génétique. Au fil des générations, ce processus permet au groupe d'évoluer et de s'adapter à son environnement.

Le problème 2D lié au " Volume-Point " est représenté dans la figure I.40. Ce volume est un carré qui est adiabatique au voisinage d'un point situé sur la plaque inférieure. La largeur de l'orifice ( $\delta$ ) est très faible par rapport à sa longueur  $L$  ( $\delta/L \ll 1$ ). Le volume total  $V$  est chauffé par une source de chaleur uniforme  $Q$ , et la conductivité de matière du volume élémentaire  $V_p$  est considérée beaucoup plus petite que celle du volume total  $V$  [53]. On définit à l'aide de ces deux volumes le rapport ou taux de remplissage qui est donné comme suit :

$$\phi = \frac{V_p}{V} \approx 0.02$$



**Fig.I.40. Principe du Volume-Point avec des sources de chaleur uniformes incluses dans un domaine carré [53].**



**Fig.I.41. Ecoulement ‘ Point–Surface ’ dans un milieu poreux évoluant selon l’écoulement de Darcy [4].**

Il est difficile de résoudre la question posée pour le principe d'optimisation du Volume-Point parce que c'est un problème d'optimisation non linéaire. Ce problème ne peut pas être résolu analytiquement alors qu'il peut être résolu par une approche numérique telle que les différences finies et la méthode des volumes finis.

**Xia [54]., Guo [55].et Cheng [56]** ont développé l'algorithme d'optimisation bionique pour résoudre le problème de Volume-Point . Le principe utilisé dans l'algorithme indique que la température moyenne est la plus basse lorsque la distribution de gradient de température du volume est uniforme.

L'optimisation bionique imite l'évolution biologique qui se compose d'un procédé de génération suivi d'un procédé de dégénération. Dans chaque étape du processus

d'évolution, la conductivité élevée avec la position de gradient de température le plus élevé est décalé vers la position de gradient de température la plus basse. La température moyenne devient plus faible tandis que l'évolution continue. La meilleure distribution est obtenue lorsque la température moyenne atteinte n'est pas la plus basse.

L'objectif de l'algorithme d'optimisation bionique est de réduire, au minimum, la température moyenne, mais pas la température la plus élevée. L'optimisation bionique permet d'obtenir une meilleure solution que la théorie constructale classique .

**Xianghua Xu et Al [57]** ont développée une nouvelle méthode pour résoudre le problème posé par le principe " Volume-Point ", qui transforme le problème d'optimisation non linéaire originel à celui d'un problème d'optimisation combinatoire. Ces auteurs emploient des algorithmes d'optimisation combinatoires pour rechercher la meilleure combinaison de conductivité élevée. Ils ont fait une comparaison entre l'algorithme d'optimisation bionique et la théorie constructale dans quelques cas.

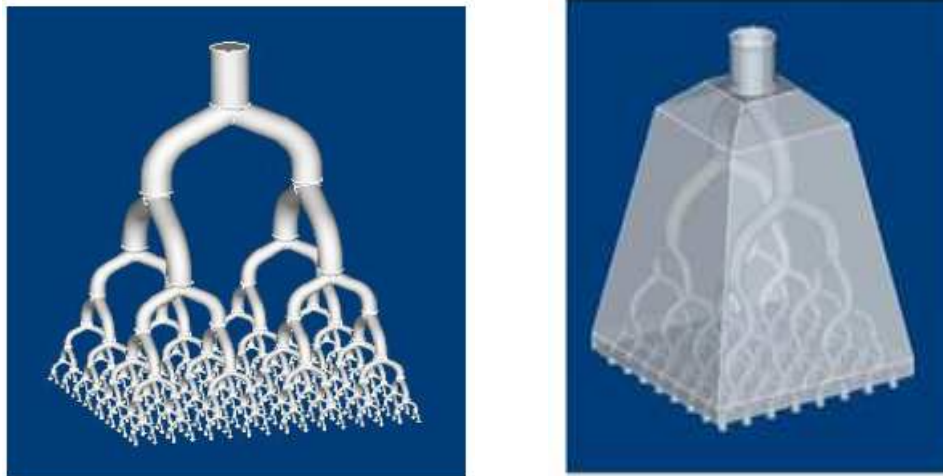
#### **IV.THEORIE CONSTRUCTALE ET VERIFICATION EXPERIMENTALE**

##### **1°) Transfert de quantité de mouvement :**

**A Bejan et Al [58]** montrent que la performance optimale d'un système fini est caractérisée par une équipartition des forces motrices ou par l'allocation optimale des ressources soumises par rapport aux des contraintes globales. A titre illustratif, il présente des exemples de systèmes inanimés (bassins hydrographiques, écoulements turbulents) et des systèmes animés (arbres). Il établit aussi que ce principe gouverne également l'architecture des structures arborescentes. Cette architecture peut être générée d'une manière purement déterministe, en minimisant la résistance à l'écoulement (frottement ou temps de transfert) entre un point et une surface ou un volume fini. La forme de chaque élément de volume qui minimise la résistance globale à l'écoulement peut être déterminée. Le réseau est alors construit en assemblant ces éléments, optimisés à différents niveaux, en partant de l'échelle la plus petite vers la plus grande.

**D.Tondeur et Al [59]** ont construit artificiellement le premier objet constructal. Ainsi, ils ont élaboré la forme d'un distributeur répartissant le fluide d'un point vers une surface donnée tel un pommeau de douche.

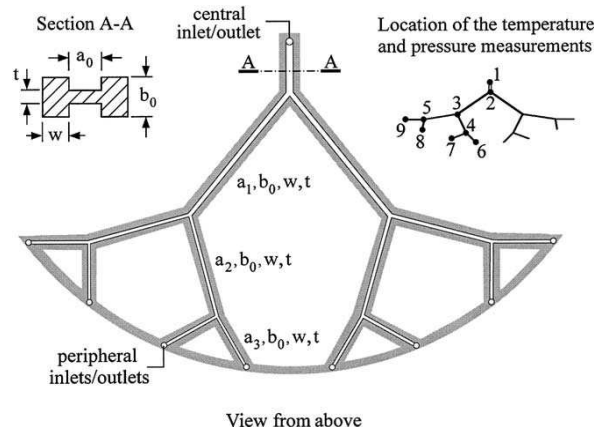
Ils ont d'abord présenté les objectifs visés. Cela consiste à minimiser les frottements et le temps de séjour du fluide dans l'appareil telles que les contraintes: débit d'entrée, surface à couvrir, taille du plus petit canal, etc..... partant des équations du mouvement en utilisant celle de Bernoulli pour l'hydrodynamique des fluides et celle de Poiseuille pour prendre en compte la viscosité à l'intérieur d'un tube. Ils ont déduit, échelle par échelle, tous les détails de la géométrie de leur distributeur: du diamètre des canaux aux angles de connexions. La figure I.42, montre la structure interne d'un distributeur conçu et construit au laboratoire par les auteurs



**Fig. I.42. Distributeur avec des arborescences binaires selon une complexification à courbure progressive de chaque canal (seulement la structure des canaux est représentée ici) [59].**

## **2°) Transfert de quantité de mouvement et de chaleur**

**A.K. da Silva et Al [60]** ont vérifié expérimentalement les comportements hydrodynamique et thermique d'un écoulement dendritique équilibré à contre-courant dans un échangeur de chaleur dans lequel chaque jet traverse une structure en " forme d' arbre " couvrant un domaine circulaire. La structure arborescente est la même des deux côtés de l'échangeur de chaleur schématisé dans la figure I. 43.



**Fig. I. 43. Forme dendritique d'un échangeur de chaleur [60].**

Du côté chaud, le fluide est pompé du centre vers la périphérie. Du côté froid, le fluide est pompé de la périphérie vers le centre, et laisse l'échangeur de chaleur comme un jet simple. Deux appareils expérimentaux ont été construits et examinés. Les résultats obtenus montrent une relation entre l'aspect des asymétries volumétriques de débit et les angles de bifurcation dans toute la structure dendritique.

### 3°) Instabilité Hydrodynamique

Parmi les applications de la théorie constructale que l'on rencontre dans la nature, A.Bejan [3] s'est intéressé aux différentes étapes de croissance d'un cône de pin qui peut se faire d'une manière analogue à la formation d'une onde hélicoïdale formée entre deux cônes coaxiaux rotatifs [F.Yahi et A.Bouabdallah].

Ainsi, on observe que le processus de croissance du cône de pin commence par une surface élémentaire qui se développe dans le sens de l'écoulement afin de former une première structure hélicoïdale.

En fait, cette cellule fait partie d'un mécanisme de formation d'onde hélicoïdale : onde instationnaire se propageant dans la direction axiale au sein de l'espace annulaire défini par deux cônes coaxiaux en rotation. Cette onde correspond à l'apparition de première instabilité qui sépare le régime laminaire de base du régime laminaire perturbé en régime de transition laminaire-turbulent.

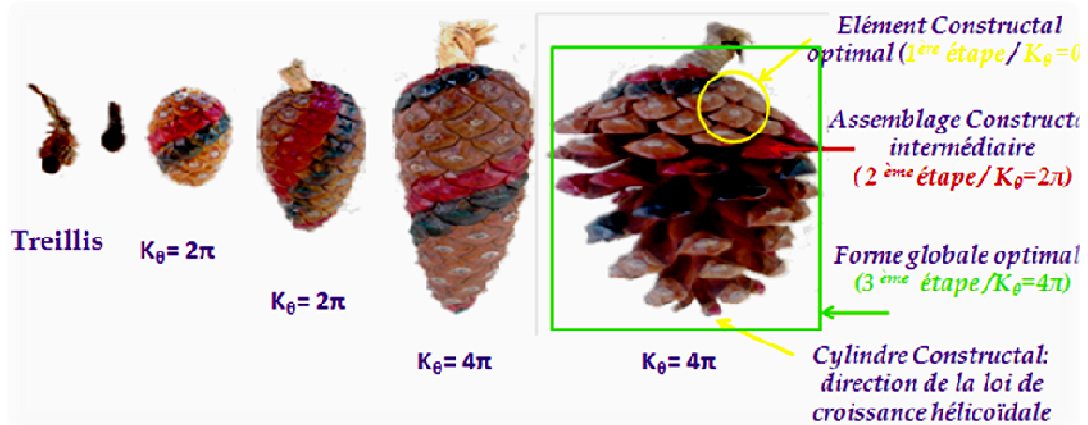


Fig. I. 44. Topologie de l'Effet Kink (torsion par rotation  $2\pi$  et  $4\pi$ ).

Interprétation d'après A. Bouabdallah



Fig. I :45. Instabilité Hydrodynamique de type onde instationnaire hélicodale

F. Yahi et A. Bouabdallah [61 ]

Parmi les applications de la théorie constructale qui se trouve dans la nature ou l'ingénierie. A. Bejan [21] a montré les différentes étapes de construction d'une structure en formation. Dans le cas présent, on s'est intéressé au processus de transfert de quantité de mouvement dans le cas de l'écoulement de Taylor-Couette : mouvement d'un fluide entre cylindre coaxiaux tournants.

En particulier, il permet de mettre en évidence les différentes étapes de structuration du mécanisme de formation d'une onde axiale stationnaire dans ce système d'écoulement.

Ainsi en procédant par simulation numérique (code de calcul FLUENT) les auteurs sont arrivés à reproduire ce mécanisme d'apparition de cette onde qui se propage dans la direction axiale de l'écoulement (une onde est constituée de deux cellules de Taylor).

Dans ces conditions, lorsqu'on fait varier de manière croissante le nombre de Taylor  $Ta$ , on est en mesure de suivre le processus de « cristallographie dissipative » (**I. Prigogine**) qui est défini par l'élément constructal apparaissant vers  $Ta = 20$  et qui se confirme nettement vers  $Ta=30$ .

Un début de pavage axial se déclenche à partir de la valeur  $Ta=30$ , Cette structuration se développe progressivement et pour  $Ta$  croissant on observe un germe structure de forme hexagonale qui s'étend à l'ensemble de l'espace annulaire.

Au voisinage de  $Tc_1=41.3$ , on atteint le seuil critique qui separe le régime laminaire stable du régime laminaire perturbé. Cet état critique se caractérise par le déclenchement de la première instabilité : onde axiale stationnaire de type Taylor.

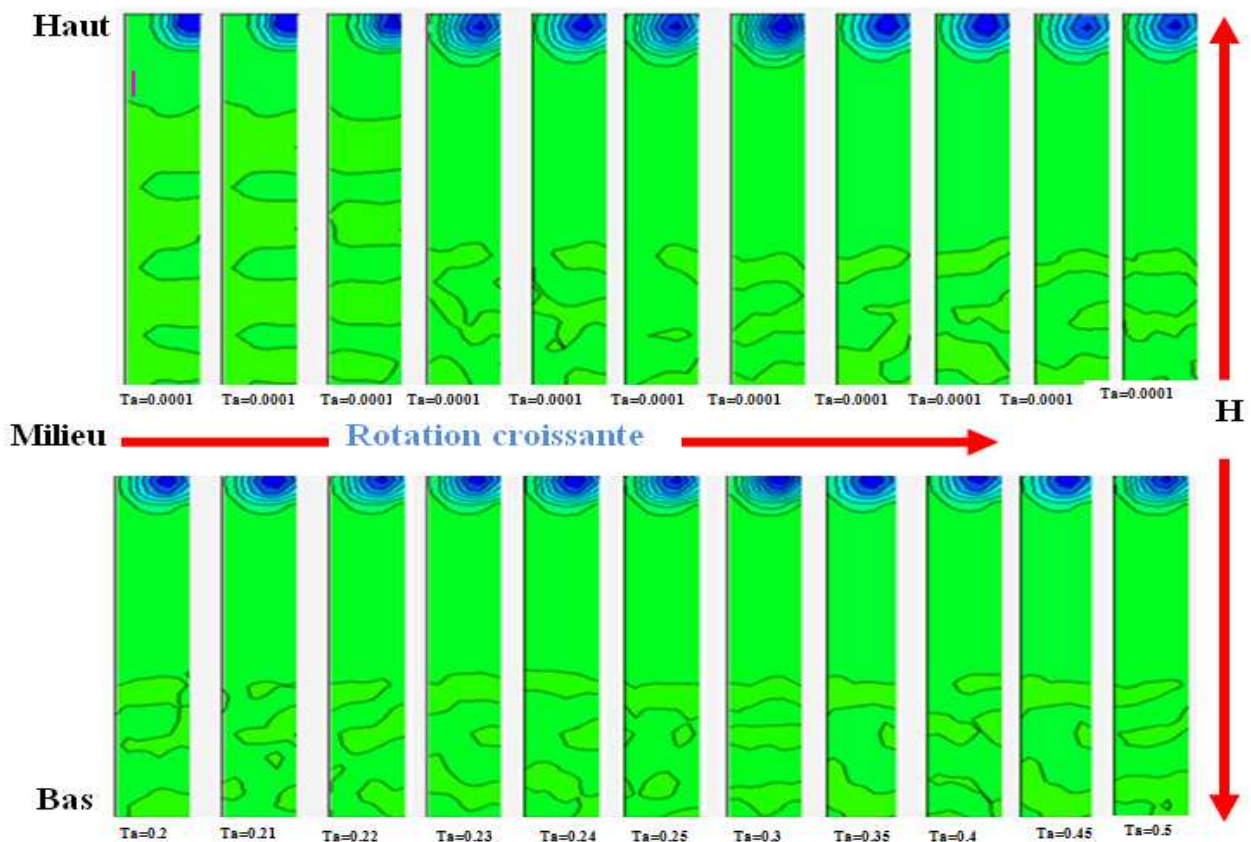
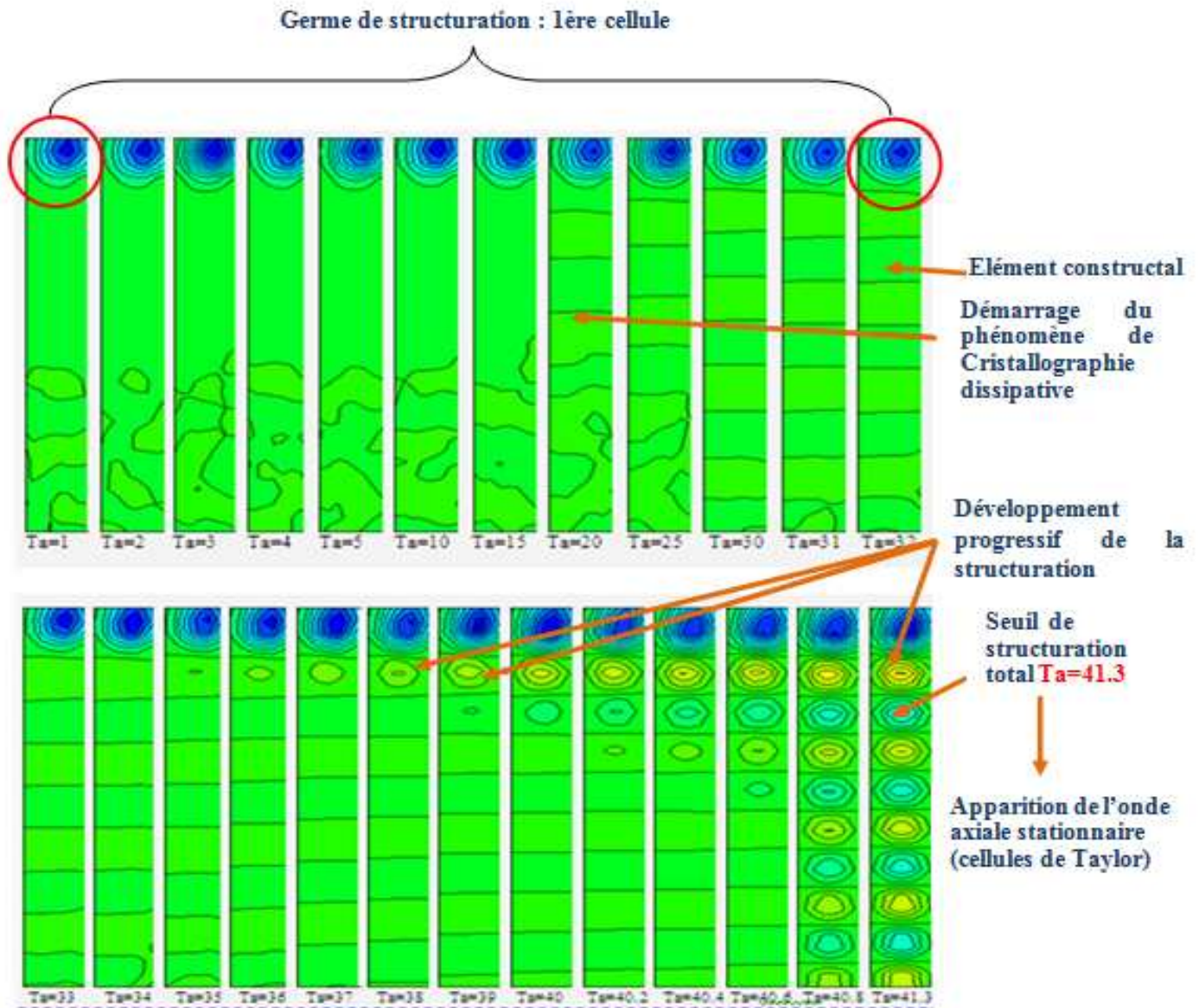


Fig I.44. Mécanisme de formation d'une onde stationnaire : Simulation par Fluent (Code de calcul CFD): Visualisation de la vorticité radiale (Rotationnel) M.Lebbi, H.Oualli, A.Bouabdallah [62].



**FigI.45.Mécanisme explicatif de la formation d’une onde stationnaire(onde de Taylor) sous forme de « cristallographie dissipative » A. Mahfoud, H.Oualli, A.Bouabdallah [63].**

**CONCLUSION**

La théorie constructale apparait comme une méthode rationnelle et efficace pour élaborer le « design » qui permet d’obtenir un rendement et une puissance-machine dépendant d’une forme géométrique optimale (Shaping). Selon les contraintes et les objectifs de départ, l’approche constructale génère des formes variables, à chaque étape d’optimisation. Autrement dit, elle détermine la forme qui distribue au mieux les

caractéristiques physiques (masse, température, vitesse) dans le temps et l'espace c'est-à-dire les échelles et la structure de façon que le rendement ou la puissance obtenue soit finalement maximale.

La théorie constructale semble ainsi présenter des caractéristiques essentielles qui ont assuré son succès: elle est prédictive, qualitative, unitaire et générale dans la plupart des domaines où elle a été appliquée.

# CHAPITRE II

## ETUDE THEORIQUE

## INTRODUCTION

Ce travail a pour but l'optimisation du mouvement d'un fluide visqueux incompressible à propriétés physiques, densité et viscosité, constantes confinés entre deux plaques parallèles (écoulement de Poiseuille). En se basant sur la théorie constructale de A.Bejan, on cherche à évaluer le facteur d'aspect  $\phi$  du système d'écoulement en fonction du rapport des vitesses  $\beta$  d'entrée et de sortie du fluide. En particulier, en procédant par analogie avec le Principe de Fermat, on essaye de minimiser le temps de séjour de l'écoulement. Ainsi, la théorie constructale qui s'appuie sur le concept de Volume- point est appliquée pour optimiser des flux de quantité de mouvement.

Ensuite, on complète notre étude par une analyse de l'effet de variation de l'angle d'injection du fluide  $\alpha$  pour une vitesse d'entrée donnée  $V_E$ .

Par conséquent, on établit à l'aide du concept Volume-Point la forme géométrique optimale qui réduit au minimum la résistance du mouvement du fluide au sein du système d'écoulement considéré.

En outre, on étend l'étude aux effets combinés de l'inclinaison du fluide injecté et du rapport des vitesses d'écoulement sur l'évolution du facteur d'aspect  $\phi$  dans la configuration d'un écoulement de type Poiseuille. En particulier, on cherche à déterminer le nombre optimal  $N$  de cellules de Poiseuille pouvant constituer un système d'échangeur de chaleur.

Les résultats obtenus permettent de déterminer l'évolution du facteur de forme optimisée  $\phi_{opt}$  en fonction du rapport des vitesses  $\beta$ .

### I. Principe d'optimisation dans l'approche de chemin optique

Afin de bien comprendre la nouvelle approche proposée par A.Bejan, on suggère de se référer à l'analogie avec le principe de Fermat utilisé en optique géométrique.

Le principe exprime que le chemin optique est stationnaire. Pour cela, on considère l'évolution de la lumière dans le plan (P) associé aux vitesses  $V_1$  et  $V_2$  correspondant aux trajets liés aux rayons incident AO et réfracté OB. Ils définissent avec l'axe verticale  $AA'$  respectivement les angles d'incidence  $\hat{i}$  et réfracté  $\hat{r}$  correspondant à IO et OR.

Les plans d'incidence et de réfraction caractérisés par les milieux traversés par la lumière d'indice  $n_1=c/V_1$  et  $n_2=c/V_2$  (Figure II.1).

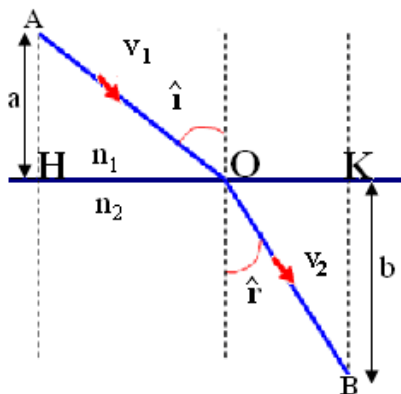


Fig. II.1. Trajet de la lumière réfractée.

### Evaluation du temps de parcours

Le Principe de Fermat permet d'établir que le trajet suivi AOB est conditionné par la minimisation du temps de parcours entre les points A et B.

Dans ces conditions, on évalue les durées de parcours correspondantes à  $\overline{AO}$  et  $\overline{OB}$  qui sont telles que :

$$t_{tot} = t_1 + t_2$$

Avec

$$t_1 = \frac{\overline{AO}}{V_1} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{\overline{OB}}{V_2}$$

Et l'on évalue les chemins  $\overline{AO}$  et  $\overline{OB}$  comme suit :

$$\overline{AO} = \frac{a}{\cos \hat{i}} \quad \text{et} \quad \overline{OB} = \frac{b}{\cos \hat{r}}$$

D'où la relation :

$$t_{tot} = \frac{a}{V_1 \cos \hat{i}} + \frac{b}{V_2 \cos \hat{r}} \tag{1}$$

Par ailleurs, on évalue la distance  $\overline{HK}$  liée au plan de séparation des deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$

Posons :

$$l = \overline{HO} + \overline{OK} \tag{2}$$

Avec  $\overline{HO} = atg\hat{i}$  et  $\overline{OK} = btg\hat{r}$

d'où l'on a :

$$l = atg\hat{i} + btg\hat{r} \tag{2'}$$

Cette relation joue le rôle d'équation de contrainte puisque  $l = \text{constante}$ . Le chemin AOB suivi par la lumière est stationnaire réalisant ainsi les conditions d'optimisation.

Différentions les équations (1) et (2) en imposant :

$$dt = 0 \quad \text{et} \quad dl = 0 \tag{3}$$

Ceci se traduit par le système d'équations différentielles suivant :

$$(\Sigma_1) \begin{cases} \frac{a}{V_1} \left( \frac{\sin \hat{i}}{\cos^2 \hat{i}} \right) d\hat{i} + \frac{b}{V_2} \left( \frac{\sin \hat{r}}{\cos^2 \hat{r}} \right) d\hat{r} = 0 & (4) \\ \frac{a}{\cos^2 \hat{i}} d\hat{i} + \frac{b}{\cos^2 \hat{r}} d\hat{r} = 0 & (5) \end{cases}$$

La résolution de ce problème peut se faire à l'aide de la méthode du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , en écrivant :

$$(4) - \lambda(5) = 0$$

Soit explicitement et en regroupant les différentielles  $d\hat{i}$  et  $d\hat{r}$  comme suit:

$$\frac{a}{\cos^2 \hat{i}} \left( \frac{\sin \hat{i}}{V_1} - \lambda \right) d\hat{i} + \frac{b}{\cos^2 \hat{r}} \left( \frac{\sin \hat{r}}{V_2} - \lambda \right) d\hat{r} = 0 \tag{6}$$

Cette égalité n'est possible que si l'on a :

$$\frac{\sin \hat{i}}{V_1} - \lambda = \frac{\sin \hat{r}}{V_2} - \lambda = 0 \quad (7)$$

d'où la relation suivante :

$$\frac{\sin \hat{i}}{V_1} = \frac{\sin \hat{r}}{V_2} \quad (7')$$

En faisant apparaître l'indice de milieux  $n_1$  et  $n_2$  tels que :

$$n_1 = \frac{c}{V_1} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{c}{V_2}$$

On obtient finalement la relation suivante :

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r} \quad (8)$$

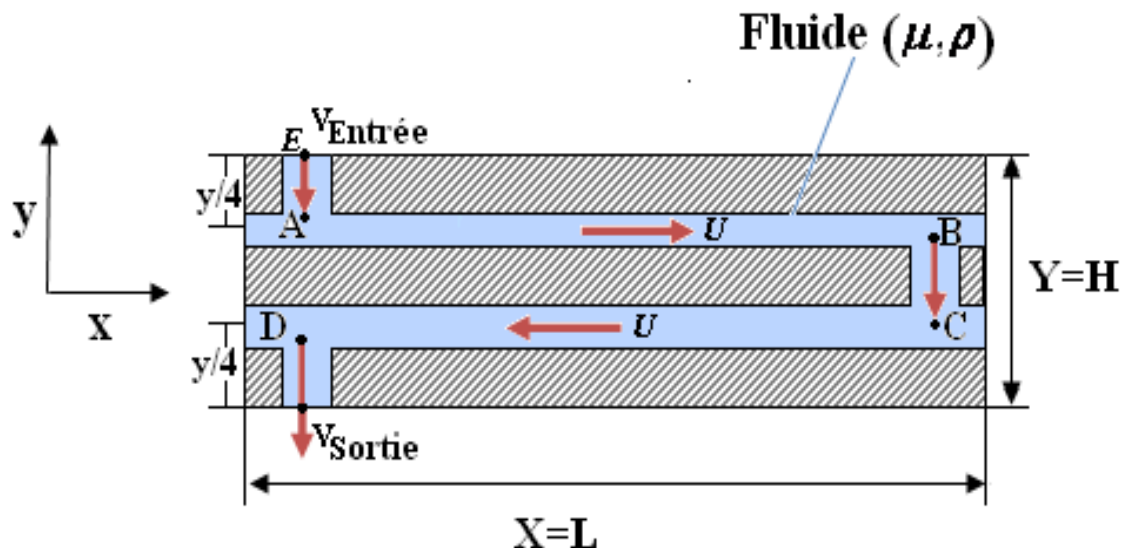
qui traduit la loi de Snell-Descartes bien connue sur la réfraction de la lumière.

## II.Principe d'optimisation dans l'approche de la thermodynamique constructale

Par analogie avec le principe de Fermat que l'on utilise en optique, il s'agit de formuler le principe Volume-Point de A.Bejan dans les cas suivants que nous nous proposons d'examiner:

- 1°) Cas particulier: Configuration simple du système d'échangeurs avec une entrée perpendiculaire à la paroi (Figure. II.2).
- 2°) Cas quelconque du système d'échangeurs avec effet angulaire  $\alpha$  donné (Figure. II.3).
- 3°) Généralisation : Construction d'un système d'échangeurs avec assemblage à N cellules élémentaires (Figure. II.4).

La figure, ci-dessous, représente une vue, en coupe, de la configuration du système d'écoulement considéré.



**Fig. II.2. Configuration du système d'échangeur avec injection verticale ou nulle ( $\alpha=0$ ).**

La géométrie considérée de forme parallélépipédique est caractérisée par une hauteur  $H$  et une longueur  $L$ . On suppose que chaque plaque possède la même épaisseur  $e_0$ , et que le fluide est animé initialement à une vitesse  $V_E$ . Il pénètre dans le parallélépipède par le haut et circule à travers un espace annulaire en ressortant par l'extrémité inférieure à une vitesse  $V_s$ . Il s'agit de minimiser le temps de séjours d'une particule qui traverse le système d'écoulement dont on cherche à évaluer le facteur de forme optimal  $\phi = \phi_{opt}$ .

### II.1.Mise en œuvre de la méthode constructale

Préalablement, il s'agit de définir le paramètre de facteur de forme  $\phi = \frac{H}{L}$  d'une géométrie parallélépipédique caractérisée par les dimensions suivantes :

Hauteur :  $y = \pm \frac{H}{2}$

Longueur :  $x = L$

Afin de résoudre le problème étudié, on pose les hypothèses suivantes :

- On suppose que la hauteur H ou l'espace annulaire entre les deux plaques parallèles est totalement rempli, donc la hauteur d'entrée est égale à H/4 soit la mi-hauteur entre les deux plaques.
- En régime établi, la vitesse est maximale à mi hauteur est nulle à la paroi.
- On rappelle que la surface  $S = xy$  est maintenue constante tandis que le facteur d'aspect  $\phi$  varie.

On considère le chemin de circulation de l'écoulement comme suit:

$$\overline{ES} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DS} \quad (9)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{EA} = \frac{y}{4} \\ \overline{AB} = \overline{CD} = x \\ \overline{BC} = \overline{DS} = \frac{y}{4} \end{array} \right.$$

dont on cherche à optimiser le temps total :

$$t_{tot} = \sum_{i=0}^4 t_i \quad (10)$$

$$t_{tot} = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \quad (10')$$

Compte tenu du fait que la géométrie du système est tel que les chemins sont égaux  $\overline{AB} = \overline{CD}$  et  $\overline{BC} = \overline{DS}$

$$t_1 = t_3 \text{ et } t_2 = t_4 \quad (11)$$

$$t_{tot} = t_0 + 2t_1 + 2t_2 \quad (11')$$

On a donc :

avec

$t_0 = \frac{y/4}{V_E}$  : Le temps nécessaire associé à une particule afin de parcourir la distance  $\overline{EA}$ .

$t_1 = t_3 = \frac{x}{U}$  : Le temps correspondant au déplacement pour  $x=L$

$t_2 = \frac{y/2}{U}$  : Le temps correspondant au déplacement du fluide du compartiment supérieur vers le compartiment inférieur.

## II.2. Condition d'Optimisation

L'optimisation de l'écoulement est définie en imposant les conditions de stationnarité sur le temps. Ceci se traduit en imposant :

$$dt = 0 \quad (12)$$

telle que la surface balayée  $S=x y$  reste constante :

$$dS = ydx + xdy = 0 \quad (13)$$

## II.3. Evaluation du chemin optimale pour un élément de l'assemblage

Comme il a été indiqué précédemment, l'optimisation de l'écoulement est définie en imposant les conditions de stationnarité sur le temps  $t = t_{tot}$  et la surface balayée  $S = xy = \text{constante}$ , à savoir, les restrictions suivantes :

$$dt = 0$$

$$ds = 0$$

Ceci exprime le principe de Bejan qui énonce que le transfert de quantité de mouvement dans la cellule de mesure est rendue optimale du point (E) à l'entrée pendant tout le parcours du chemin traversé dans le volume jusqu'au point de sortie (S).

Ceci se traduit par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \left( \frac{2}{U} - \lambda y \right) dx + \left( \frac{1}{4} \left( \frac{1}{V_E} + \frac{2}{U} \right) - \lambda x \right) dy = 0 \\ y dx + x dy = 0 \end{cases} \quad (14)$$

De la même façon que précédemment, on introduit le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et en regroupant les dérivées partielles en  $x$  et  $y$ , on obtient alors :

$$\frac{2}{U} dx + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{V_E} + \frac{2}{U} \right) dy = 0 \quad (15)$$

Cette égalité n'est possible que si l'on impose :

$$\frac{2}{U} - \lambda y = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{V_E} + \frac{2}{U} \right) - \lambda x = 0 \quad (16)$$

On éliminant  $\lambda$ , on obtient le facteur de forme optimisé :

$$\phi_{opt} \left( \frac{y}{x} \right)_{opt} = \frac{8}{\frac{U}{V_E} \left( 1 + \frac{2V_E}{U} \right)} \quad (17)$$

En introduisant le coefficient du rapport des vitesses  $\beta = \frac{V_E}{U}$ , on obtient finalement :

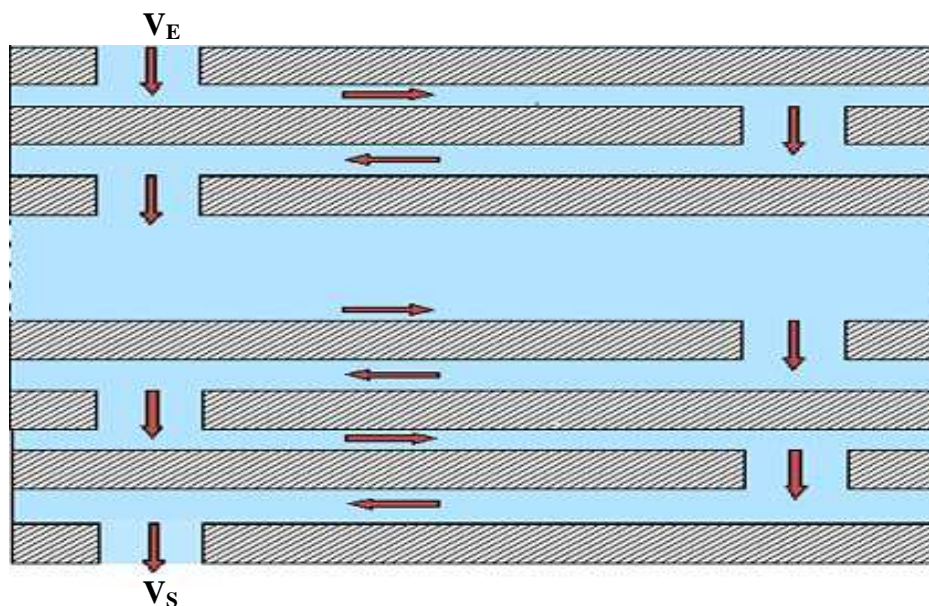
$$\phi_{opt} = \frac{8\beta}{(1+2\beta)} \quad (18)$$

Cette relation montre que le facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  dépend uniquement du rapport des débits ou de vitesses  $\beta$ .

### III. Généralisation à N élément

### III.1. Evaluation du chemin optimale pour un N éléments de l'assemblage avec injection verticale du fluide

Nous pouvons généraliser cette étude pour un nombre de N cellules que l'on peut combiner selon plusieurs niveaux d'écoulement. Pour cela, on considère que l'espace entre les deux plaques élémentaires sera maintenu fixe soit :  $y/2$



**Fig. II.3. Assemblage de chaque élément constructal-injection**

**verticale du fluide ( $\alpha=0$ ).**

La durée totale de parcours est donnée par l'équation suivante :

$$t_{tot} = \frac{y}{4V_E} \left( 1 + \frac{2NV_E}{U} \right) + \frac{Nx}{U}$$

De la même façon que précédemment, on introduit le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et on résoud le système d'équations différentielles obtenu. Le facteur de forme optimal pour un ensemble de cellules d'écoulement se traduit par :

$$\phi_{opt} = \frac{4N\beta}{1+2n\beta} \tag{19}$$

### III.2. Généralisation dans le cas

### l'injection angulaire quelconque du fluide

Après avoir établi la relation qui détermine le facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  associé à la géométrie étudiée, on passe ensuite à l'étude du cas général qui concerne l'effet angulaire  $\alpha$  d'injection du fluide à l'entrée. Tout d'abord, on s'intéresse à l'écoulement dans le cas bidimensionnel en cherchant à évaluer  $\phi_{opt}$  dans la configuration d'une cellule de mesure représentée en Figure. II.4.

On considère maintenant la particule du fluide (E) caractérisé par les vitesses (V, U) telle que  $V=V_E$  (vitesse initiale) à l'entrée. Admettons alors que l'angle  $\alpha$  entre les vitesses  $V=V_E$  et U peut changer. Dans ce qui suit, on cherche à évaluer la durée de parcours du fluide entre le point(E), à l'entrée, et le point (S) à la sortie du système d'écoulement.

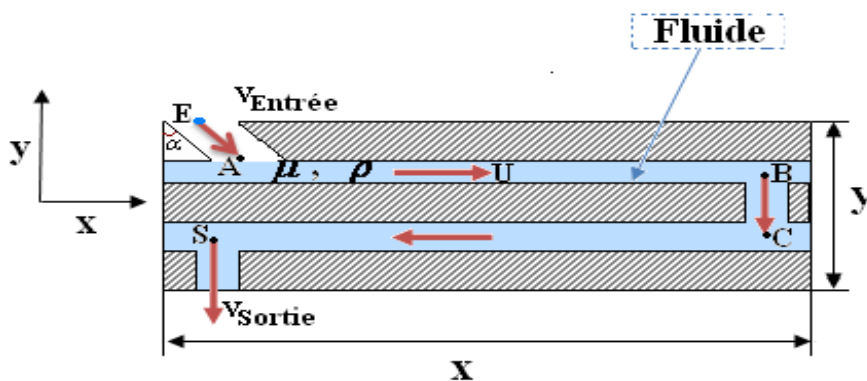


Fig. II.4. Configuration du système d'écoulement avec injection incliné  $\alpha$ .

D'abord, en définissant le chemin EABCDS et en évaluant le temps correspondant :

$$t = \frac{d}{V_E} - \frac{a}{U} + \frac{y}{U} + \frac{2x}{U} \tag{20}$$

On a après explicitation

$$t = \frac{y}{4V_E} \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \beta \tan \alpha + 2\beta \right) + \frac{2x}{U} \tag{21}$$

De la même façon que précédemment, on introduit le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\left[ \frac{2}{U} - \lambda y \right] dx + \left[ \frac{1}{4V_E x} \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \beta \tan \alpha + 2\beta \right) - \lambda x \right] dy + \left( \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\beta}{\cos^2 \alpha} \right) = 0 \quad (22)$$

Il s'agit d'éliminer le facteur  $\lambda$  des équations précédentes, d'où l'on a :

$$\begin{cases} \frac{2}{Uy} = \lambda = \frac{1}{4V_E x} \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \beta \tan \alpha + 2\beta \right) \\ \sin \alpha = \beta \end{cases} \quad (23)$$

Dans ces conditions, on détermine le facteur de forme optimal :

$$\phi_{opt} = \frac{8\beta}{\xi}$$

Avec :

$$\alpha_{opt} = \arcsin \beta \quad (23')$$

$$\xi = \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \beta \tan \alpha + 2\beta \right) \quad (24)$$

Ceci appelle à une comparaison de ce résultat avec celui obtenu par A. Bejan. Des lors, on remarque que l'expression du facteur de forme ou facteur d'aspect  $\phi$  est similaire mais avec un facteur multiplicateur 4.

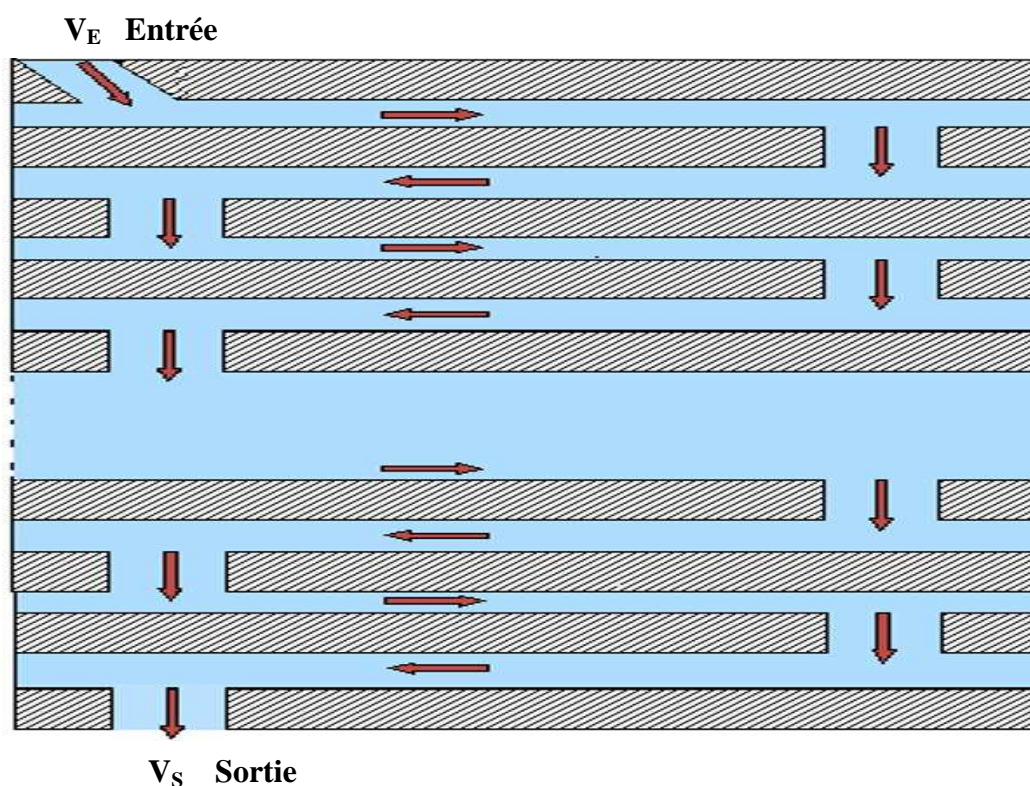
$$\phi_{opt} = 4 \phi_{Bejan}$$

Le facteur multiplicatif provient du fait que le problème qu'on a résolu est différent par rapport au dispositif initial étudié par A. Bejan qui se limite à un mouvement entre deux plans parallèles : un simple écoulement de Poiseuille. Ici, le résultat est plus général puisque il

s'agit d'un circuit composé de quatre plans parallèles : soit le double d'un écoulement de Poiseuille soumis à une injection quelconque.

❖ **Assemblage de plusieurs éléments**

On peut généraliser l'étude précédente dans le cas d'un écoulement de Poiseuille évoluant entre N plaques parallèles. Pour cela, on considère la figure II.5 qui donne tous les indications nécessaires correspondant à un assemblage monté de façon parallèle.



**Fig. II.5. Assemblages d'éléments constructuels disposés en montage parallèle.**

La détermination du chemin optimal lié à la structure précédente nous a permis d'établir l'évolution du facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et N selon la relation suivante :

$$\phi_{opt} = \frac{4N\beta}{f + 2N\beta}$$

$$f_{opt} = \left( \frac{1}{\cos \alpha_{opt}} - \beta \tan \alpha_{opt} + 2\beta \right)$$

On notera que le paramètre  $f_{opt}$  relié aux caractéristique de cellule  $\alpha$  et  $\beta$

A partir de cette étude, on peut concevoir des systèmes d'échangeurs de chaleur ou de masse sous la forme de montages en série, parallèle ou éventuellement mixte.

## IV. Résultats et discussions

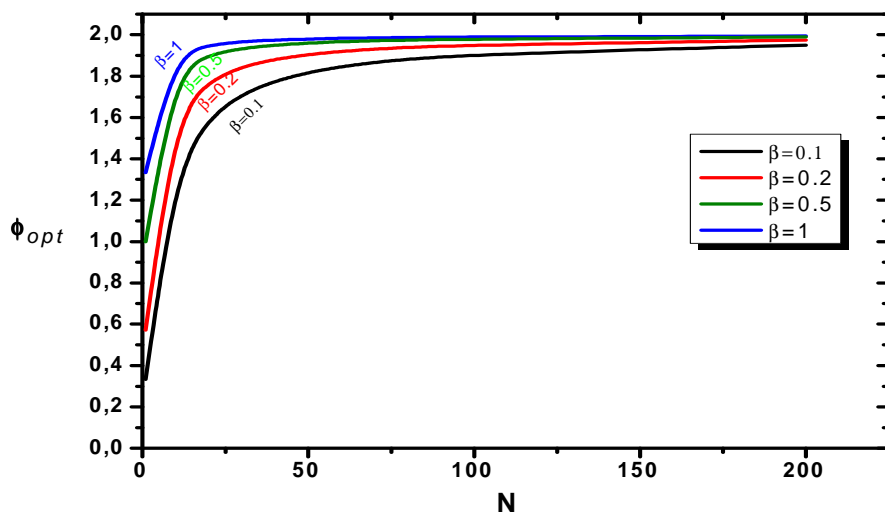
Précédemment on a déterminé théoriquement les valeurs associées au facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  en fonction du rapport des vitesses  $\beta$ , de l'inclinaison d'injection  $\alpha$  du fluide et du nombre de cellules élémentaires N de l'assemblage envisagé.

### IV.1. Etude de l'effet du nombre d'écoulement de Poiseuille sur le facteur d'aspect

#### IV.1.1. Cas d'une injection perpendiculaire au plan d'écoulement ( $\alpha = 0$ )

En position verticale  $\alpha = 0$ , lorsque on fait varier le rapport des vitesses  $\beta$ , on procède à la mise en évidence des propriétés liées à la géométrie étudiée. En particulier, il s'agit de déterminer théoriquement les valeurs optimales associées au facteur de forme  $\phi$  en fonction du nombre de plaques M utilisées (N cellules N =M-1).

Les résultats de cette étude sont résumés dans un diagramme présentant les valeurs du facteur d'aspect  $\phi$  en fonction de N pour chaque rapport des vitesses  $\beta$  considérée tel que N désigne le nombre de cellules élémentaires de Poiseuille.



**Fig. II.6.** Evolution du facteur de forme  $\phi_{opt}$  en fonction de nombre de cellule N cas  $\alpha=0$ .

quasiment constante dans l'intervalle  $50 \leq N \leq 200$  lorsque le rapport des vitesses  $\beta$  est supérieur à  $\beta=1/2$ .

La figure II.6 présente les variations du facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  en fonction du nombre N de cellules d'écoulement.

On a représenté l'ensemble des courbes  $\phi_{opt} = \phi_{opt}(N)$  pour différentes valeurs du rapport des vitesses  $\beta$  dans l'intervalle considéré  $0.1 < \beta < 1$ .

L'examen de cette figure révèle l'existence de trois zones de variation principale :

- La première zone correspond au domaine à nombre de cellules N faible ou limité :  $0 \leq N \leq 10$  où se produit l'essentiel de l'évolution de  $\phi_{opt}$ . En particulier, lorsque N est petit, (N variable de 1 à 10 cellules) et  $\phi_{opt}$  varie lorsque  $\beta$  passe de 0.1 à 1.

On constate que l'écart entre courbes de  $\phi_{opt}$  semble d'égale valeur lorsque  $\beta$  varie de 0.1 à 1 malgré le fait que  $\beta$  change lentement ( $\beta = 0.1, 0.2$ ) et rapidement si  $\beta \geq 0.5$ .

- La deuxième zone qui s'étend de  $10 \leq N \leq 50$  correspond à une évolution notable ou assez importante des variations de  $\phi_{opt}$  lorsque  $\beta$  varie dans le même intervalle :  $0.1 < \beta < 1$

Ainsi, on note que si  $N=25$  un écart d'égal valeur lorsque on passe respectivement de  $\beta = 0.1$  à  $\beta = 0.2$  et de  $\beta = 0.2$  à  $\beta = 0.5$ . Par contre, cet écart tend à diminuer si l'on passe de  $\beta = 0.5$  à 1

Ceci signifie que le rapport des vitesses n'influence pas lorsque on le débit de sortie correspond à la moitié de la vitesse d'entrée : il y a alors tendance à saturation dans le transfert de quantité de mouvement.

- La troisième zone qui s'étend dans l'intervalle  $50 \leq N \leq 200$  et, au-delà, est relative à une évolution qui semble quasi-identique à toutes les courbes. On constate que les variations de  $\phi_{opt} = \phi_{opt}(N)$  semblent comparables qualitativement et quantitativement vers  $\phi_{opt} = 1.9$ , quelle que soit la valeur de  $\beta$ .

Par conséquent, on estime qu'à partir de  $N \geq 50$  cellules et donc une valeur inférieure à  $N = 100$  cellules les variations de  $\phi_{opt}$  sont quasi-identiques si  $\beta$  varie de 0.5 à 1 et reste très faible si  $\beta$  varie de 0.1 à 0.2.

L'ensemble des résultats précédents permettent de fournir des propriétés intéressantes pour réaliser des assemblages adéquats composés de  $N$  cellules visant à l'optimisation des transferts de quantité de mouvement et éventuellement de chaleur.

#### IV.1.2. Cas d'une injection inclinée ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )

Les courbes II.7a, II.7b, II.7c, II.7d, II.7e représentent l'évolution du facteur de forme  $\phi_{opt}$  en fonction du nombre de cellules de Poiseuille ( $N$ ) pour des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  données.

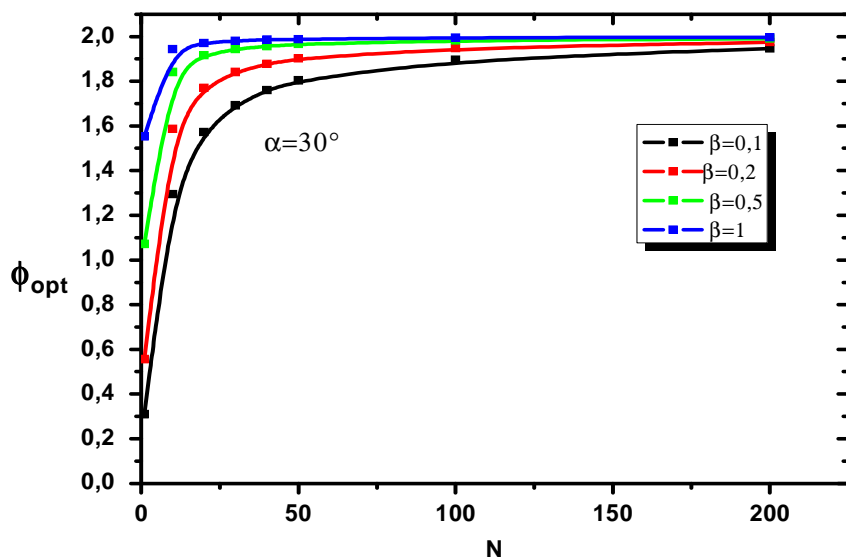


Fig. II.7a. Variation de facteur de forme optimal  $\phi = \phi(\beta)$  en fonction du Nombre N de cellules. Cas  $\alpha=30^\circ$ .

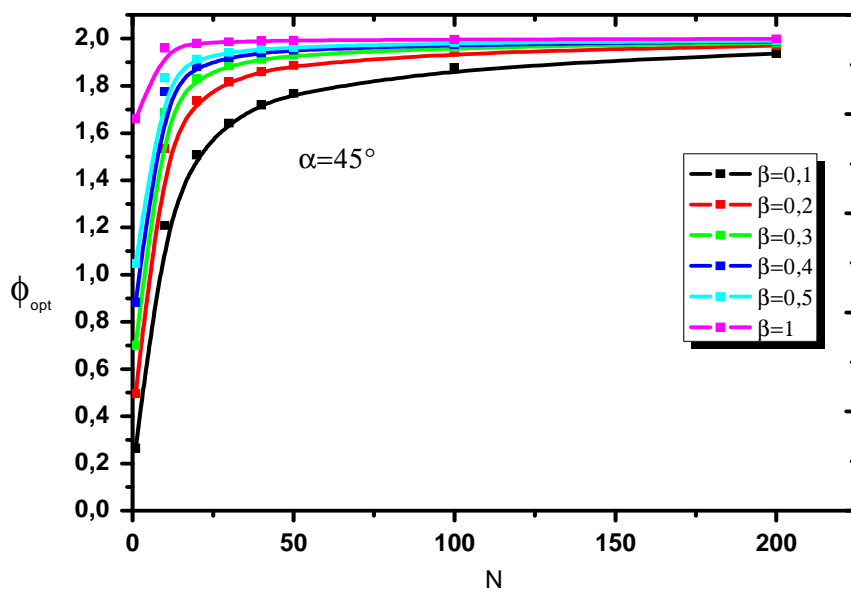


Fig. II.7b. Variation de facteur de forme optimal  $\phi = \phi(\beta)$  en fonction du Nombre N de cellules. Cas  $\alpha=45^\circ$ .

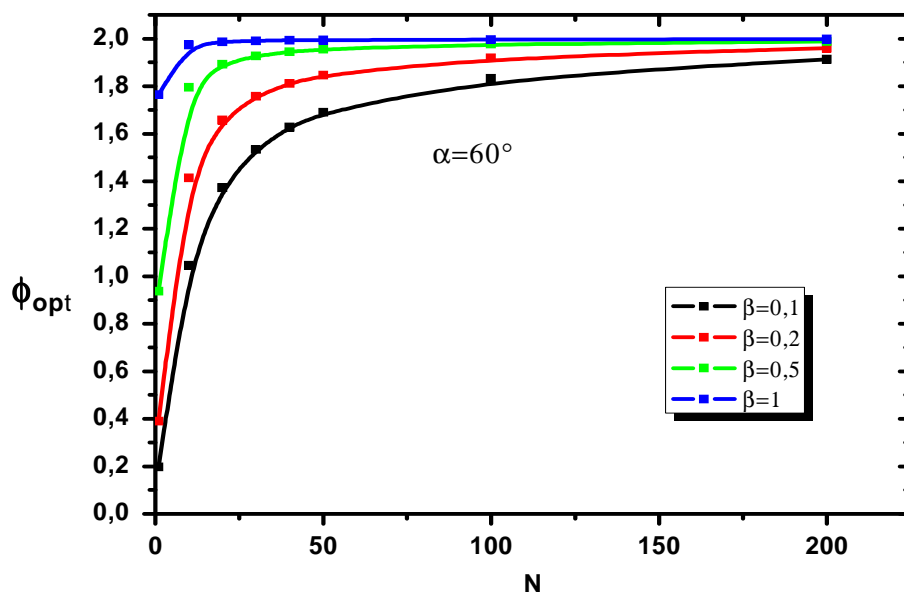


Fig. II.7c. Variation de facteur de forme optimal  $\phi = \phi(\beta)$  en fonction du Nombre de cellules cas  $\alpha=60^\circ$

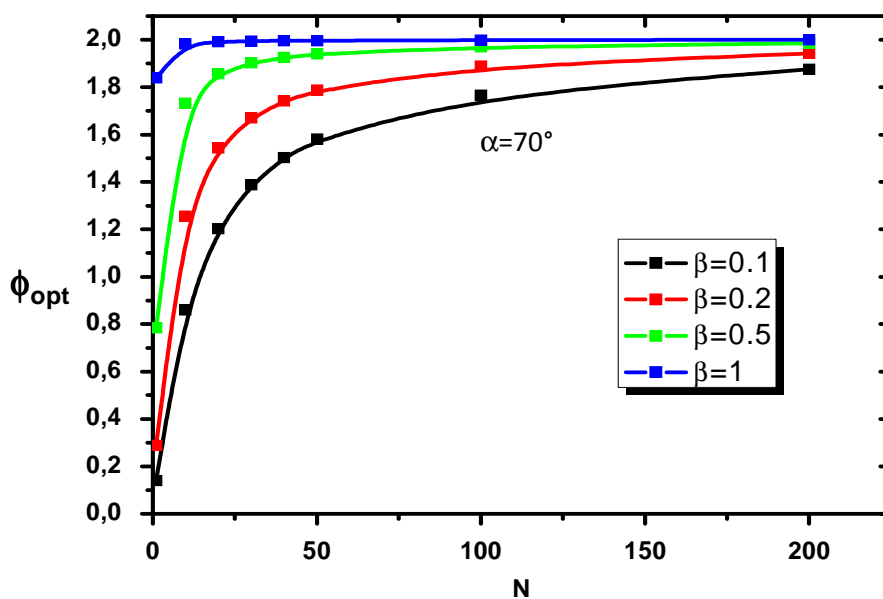
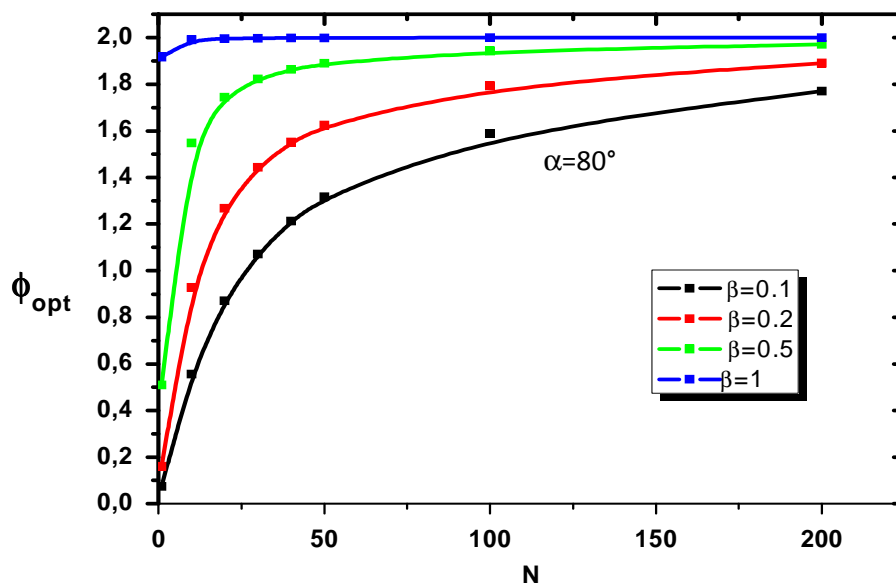


Fig. II.7d. Variation de facteur de forme optimal  $\phi = \phi(\beta)$  en fonction du Nombre N de cellules. Cas  $\alpha=70^\circ$



**Fig. II.7e. Variation de facteur de forme optimal  $\phi_{opt} = \phi(\beta)$  en fonction du Nombre N de cellules. Cas  $\alpha=80^\circ$**

Les courbes considérées représentent une augmentation remarquable du facteur de forme  $\phi_{opt}$  pour des angles d'injection données dans l'intervalle  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  et un nombre de cellules N variable. Par la suite, on constate un accroissement rapide de  $\phi_{opt}$  qui tend vers une valeur asymptotique constante  $\phi_{opt} = 2$ .

D'après cette étude, on peut dire que le facteur de forme est influencé par la variation de l'angle d'injection du fluide  $\beta$ .

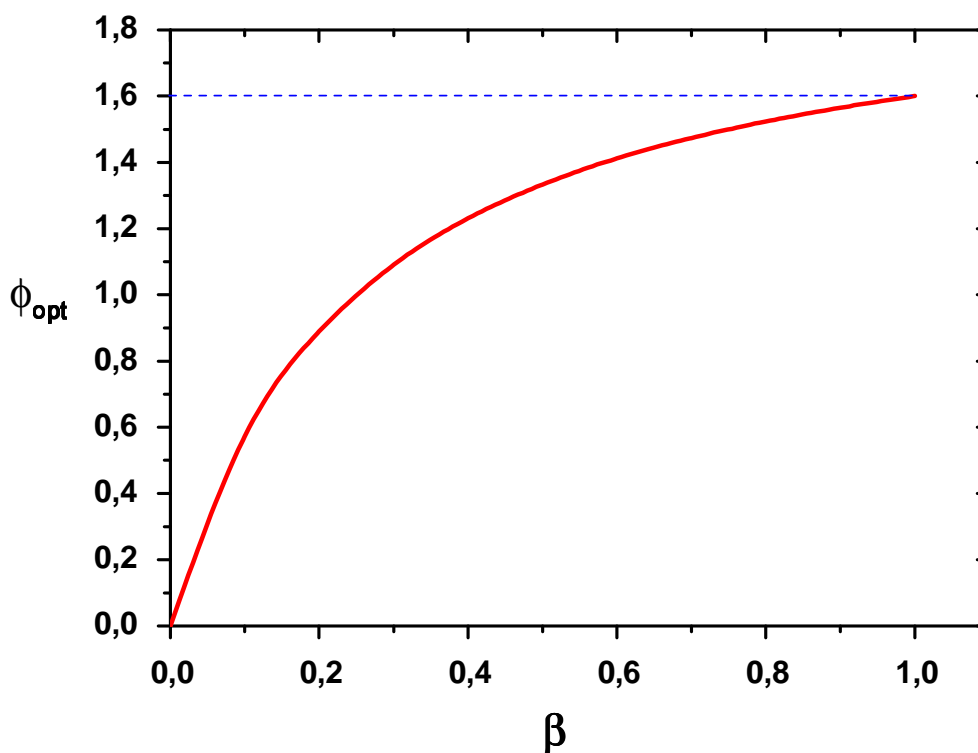
#### IV.2. Etude de l'effet du rapport de vitesse sur le facteur d'aspect

On donne un aperçu de l'évolution de  $\phi_{opt}$  dans le cas d'une injection de fluide verticale limité à quelques cellules.

**❖ Cas d'un double écoulement de Poiseuille : N=2 cellules**

La systématisation des calculs précédents peut être effectuée ici pour prédire l'évolution du facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  lié à la géométrie étudiée en fonction du rapport des vitesses  $\beta$  que l'on représente ci-dessous (fig. II.8).

Les résultats montre que l'on atteint ou valeur limite à  $\phi_{opt} = 1.6$  au lieu de  $\phi_{opt} = 1.2$ . Par conséquent, le montage de système d'écoulement de N=2 cellules injecté par le fluide verticalement semble préférable à l'injection inclinée.



**Fig. II.8. Evolution du facteur de forme  $\phi_{opt}$  en fonction de rapport des vitesses  $\beta$  pour N=2.**

Les variations de la courbe  $\phi_{opt}$  montrent que l'évolution de celle-ci augmente de zéro jusqu'à une valeur maximale qui correspond à un rapport des vitesses  $\beta$  voisin de l'unité. Au

passage, on notera que lorsque  $\beta$  devient grand  $\phi_{opt}$  tend alors vers 1.6 qui est la valeur asymptotique pour  $N=2$  cellules.

Par ailleurs, on observe qu'il ya de différence notable avec ce résultats ( $\phi_{opt}=2$  pour  $\beta=1$ ) lorsqu'on travail avec rapport des vitesses de moitié, on évaluer aussi pour  $\beta = 1/2, \phi_{opt} = 1.6$  ce qui donne un écart inférieur à 15% par rapport au cas limité précédement.

Dans la pratique industrielle, il est évident et donc intéressant de travailler avec un rapport de débit moyen ( $\beta = 1/2$ ).

❖ Cas de N cellules de Poiseuille

Les calculs effectués pour N cellules sont représentés sur la figure (II.9)

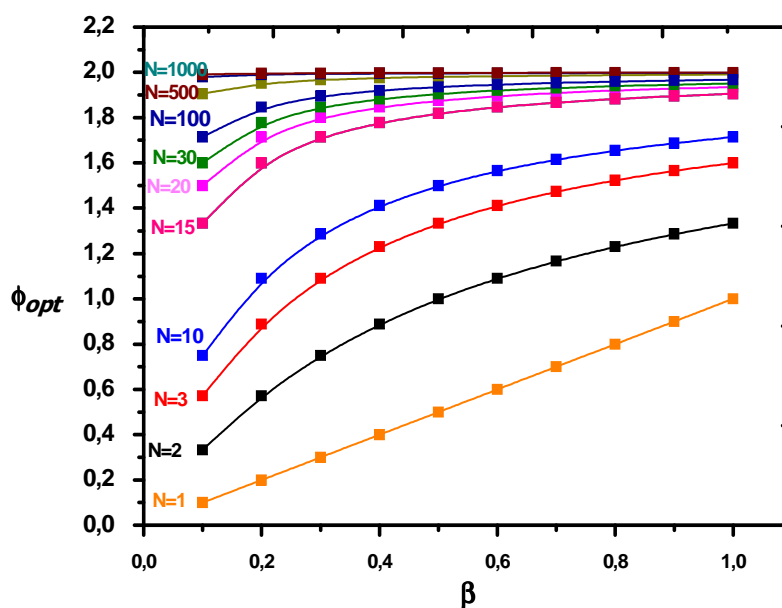


Fig. II.9. Variation du facteur d'aspect optimal pour un nombre de cellules N donné.

Dans la pratique industrielle, on peut énoncer un critère de performance : Le nombre de cellules optimale pour fabriquer un système d'échangeur peut être estimé à  $N_{opt} = 15$  cellules.

En effet on évalue l'écart du facteur d'aspect optimal pour un rapport de débit moyen  $\beta = 1/2$  à  $\phi_{opt} = 1.85$  pour  $N=15$  et  $\phi_{opt} = 1.82$  pour  $N=20$  donnant un écart relatif de l'ordre 3% ce qui est largement satisfaisant.

Par ailleurs, l'écart relative des courbes  $N < 100$  ne diffère pas considérablement entre elles.

On constate que lorsque  $N$  devient très grand, voisin de  $N=100$ , on atteint la limite de  $\phi_{opt} = 2$ . On note que cette valeur ne change pas de  $N=100$  à  $N=500$  et  $1000$  si  $\beta$  varie.

Par conséquent, cette courbe suggère deux types de comportement de  $\phi_{opt} = \phi(\beta)$  qui dépendent du nombre de cellules considérées. Il est intéressant de remarquer que le nombre de cellules permettant d'atteindre  $\phi_{opt}$  maximale est voisin de  $N=15$  cellules.

## V. CONCLUSION

Dans cette étude, on a illustrer la méthode constructale, à partir du principe Volume-point, appliqué au transfert de quantité de mouvement. Ainsi, pour la géométrie parallélépipédique considérée avec un angle d'injection de fluide quelconque on a pu établir une loi d'optimisation du facteur de forme  $\phi$  qui dépend du rapport des vitesses  $\beta$  et de l'angle d'injection  $\alpha$ .

Ce résultat très général permet de réaliser les systèmes d'échangeurs de chaleur et de masse sous la forme de montages en série où parallèle.

# CHAPITRE III

DISPOSITIF EXPERIMENTAL

ET

CONDITIONS D'ESSAIS

## INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la présentation du dispositif expérimental réalisé au Laboratoire. Il s'agit d'un banc d'essais qui est conçu pour retrouver les résultats théoriques, ou observations éventuelle, déjà établis par d'autres auteurs. Le but expérimental consiste à concrétiser l'ensemble des propriétés qui soit à la base du principe Volume-Point (Principe constructal).

A cet effet, on a procédé à la mise en eau et effectué quelques vérifications relative aux effets du débit d'entrée et l'angle d'injection du fluide dans la configuration de Poiseuille définie par deux plans parallèles pour mettre en évidence le principe constructal qui s'applique ici au transfert de quantité de mouvement.

Pour cela, on procède aux mesures des caractéristiques du fluide utilisé, à savoir, la température, densité et viscosité afin de se placer dans des meilleures conditions d'essais. On donne, ensuite, quelques indications sur la procédure de mesures expérimentale adoptée.

## I. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

### I.1. Description de la boucle d'essai

Le banc d'essai est constitué d'une veine de mesure s'intégrant dans une boucle fermée d'une capacité volumique  $V_0=0.225\text{m}^3$ . Le banc d'essai se compose de deux débitmètres du type « Brooks » (50 l/h) et sont montés en parallèles afin de mesurer une gamme de débits dans l'intervalle des nombre de Reynolds :  $5 \leq \text{Re} \leq 500$  dont la précision est de 6%.

On définit le nombre de Reynolds  $\text{Re} = \frac{U H}{\nu}$

Où

U : Vitesse de l'écoulement

H : Hauteur de la cellule de mesure

$\nu$ :viscosité cinématique du fluide

Une pompe centrifuge à corps en plastique permettant d'envoyer ce liquide du réservoir pour assurer l'alimentation de la veine d'essai avec une charge constante. Une vanne située entre le réservoir et la pompe jouant le rôle d'un robinet qui sert à vider le réservoir dans le cas d'une boucle ouverte. Le réservoir est équipé d'un flotteur pour maintenir un niveau constant du fluide.

De plus, le système d'écoulement contient deux autres vannes, l'une pour faire un réglage grossier et, l'autre pour effectuer un réglage fin.



Figure III.1. Vue d'ensemble du dispositif expérimental.

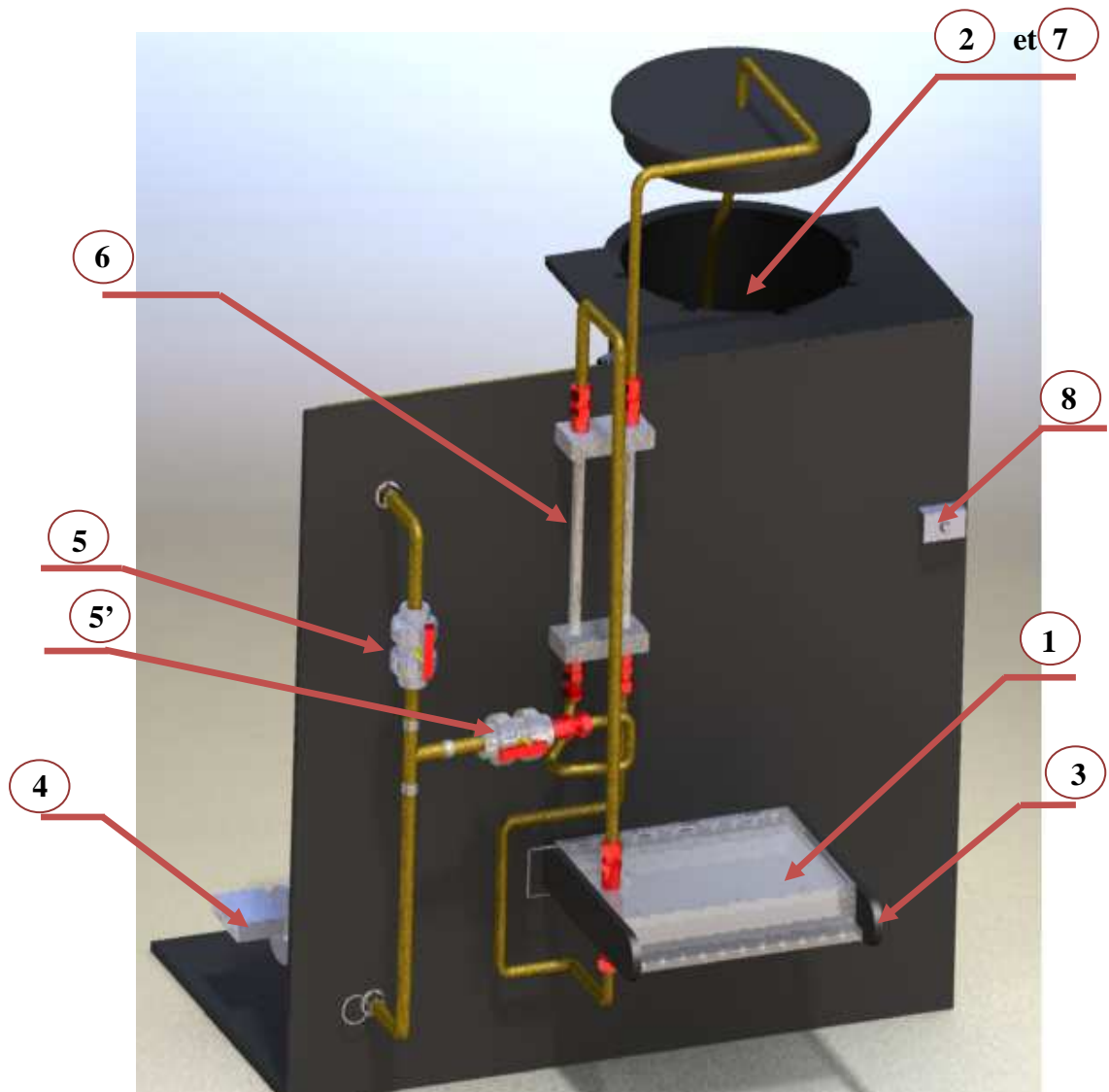


Figure.III.2.Description des éléments du dispositif expérimental.



### I.2.bac de tranquillisation

Le bac de tranquillisation est une conduite de section transversale rectangulaire de dimensions 245x300mm et de 390mm de longueur. Deux systèmes purges, haute et basse permettent de faire le remplissage et la vidange complète du bac de tranquillisation.

Sa principale fonction consiste à réduire fortement les éventuelles perturbations qui se présentent dans l'écoulement venant du réservoir, ainsi qu'à uniformiser le profil de vitesse de l'écoulement. Ceci est obtenu à l'aide de différents éléments de filtres insérés à l'intérieur du bac de tranquillisation et séparés par des entretoises, comme illustré par la figure III.3.

**Nid d'abeilles:** ces éléments sont destinés à réduire le taux de turbulence est d'éliminer les composantes transversales de l'écoulement entrant ainsi que de fractionner les tourbillons éventuellement présents au sein de l'écoulement. Il est constitué de trois plaques en nid d'abeille, dont les cellules ont une longueur de 240mm placées côte à côte. Elles sont fixées sur un cadre qui permet de les garder correctement tendues.

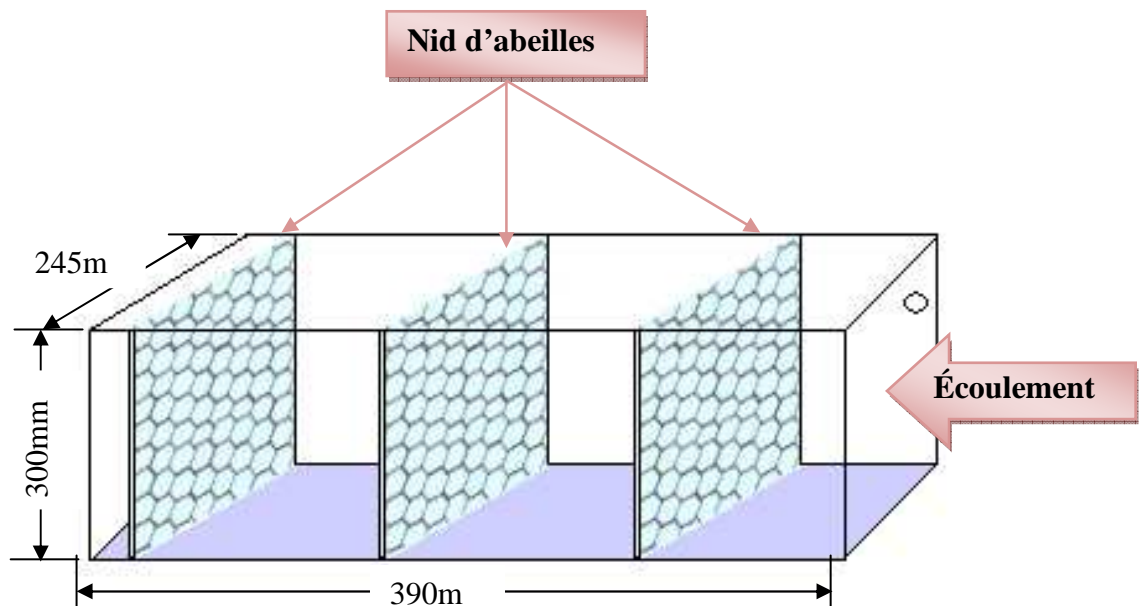


Fig. III.3. Bac de tranquillisation équipé d'un réseau de nids d'abeilles.

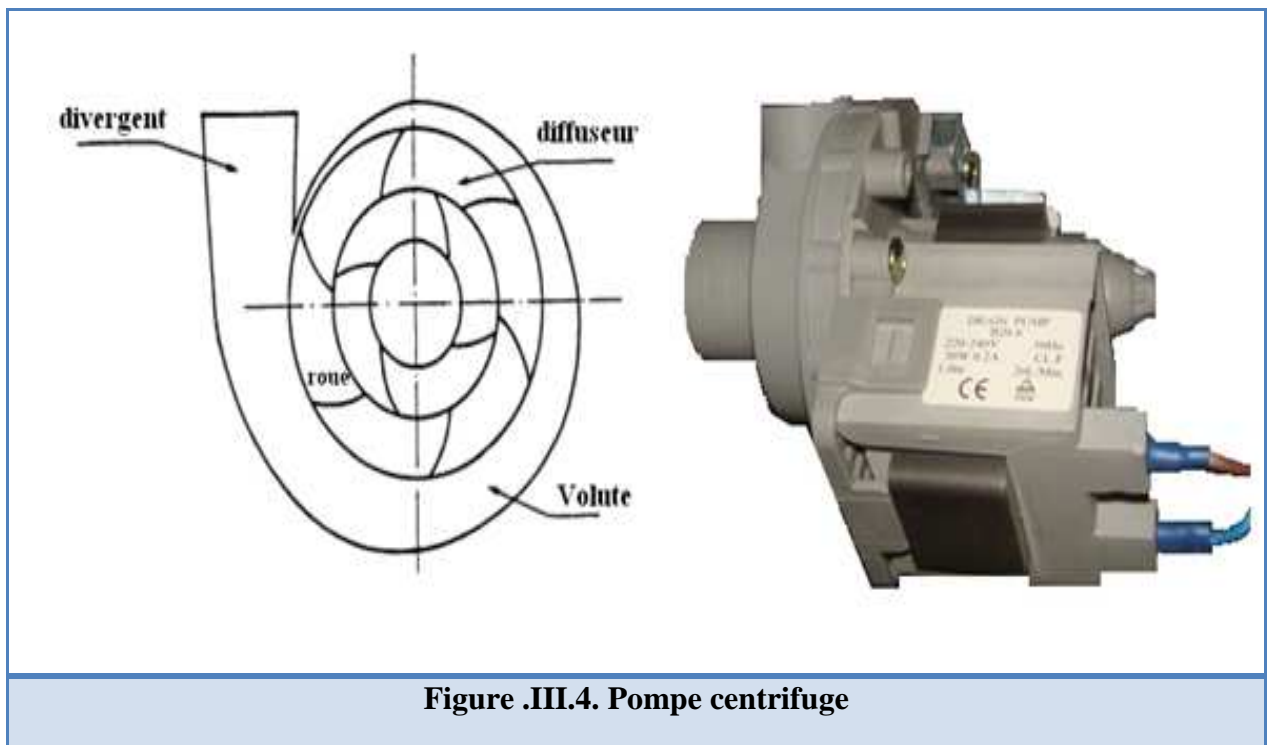
### I.3.Systèmes de pompage et accessoires

#### I.3.1.Pompe centrifuge

L'entraînement du système s'effectue à l'aide d'une pompe centrifuge à courant continu de type B20-6 délivrant d'une puissance de 30 watts. La pompe centrifuge est composée d'une roue à aubes qui tourne autour de son axe, d'un stator constitué au centre d'un distributeur qui dirige le fluide de manière adéquate à l'entrée de la roue, et d'un collecteur en forme de spirale disposé en sortie de la roue appelée volute.

Le fluide arrivant par l'ouïe est dirigé vers la roue en rotation qui sous l'effet de la force centrifuge lui communique de l'énergie cinétique. Cette énergie cinétique est transformée en énergie de pression dans la volute.

Un diffuseur à la périphérie de la roue permet d'optimiser le flux sortant est ainsi de limiter les pertes d'énergie (Figure III.4).



### I.3.2. Vannes

Deux vannes de tailles similaires sont associées permettant le réglage du débit de l'écoulement.

- Un réglage grossier pour avoir un débit maximum de l'écoulement qui traverse la boucle.
- Un réglage fin pour réglé le débit qui traverse la cellule de mesure.

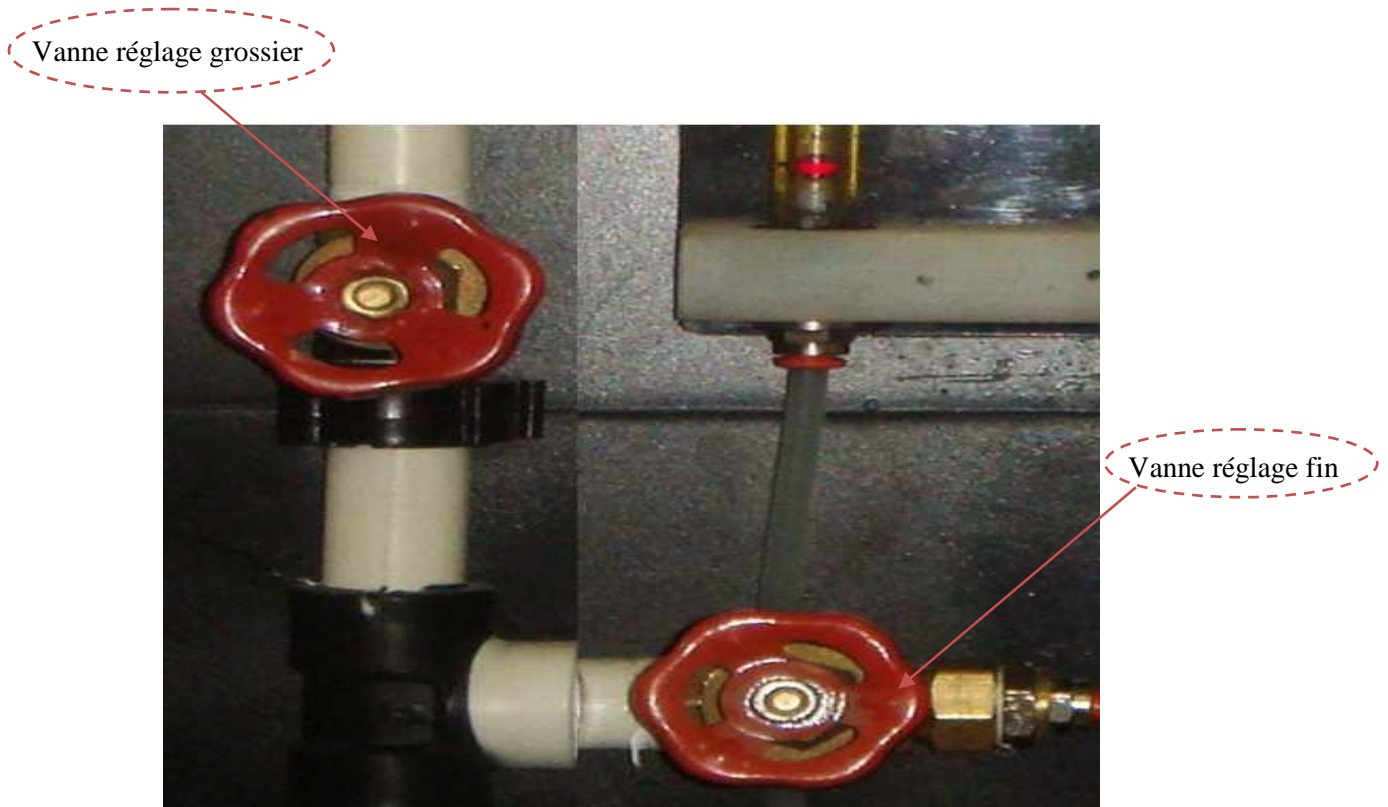
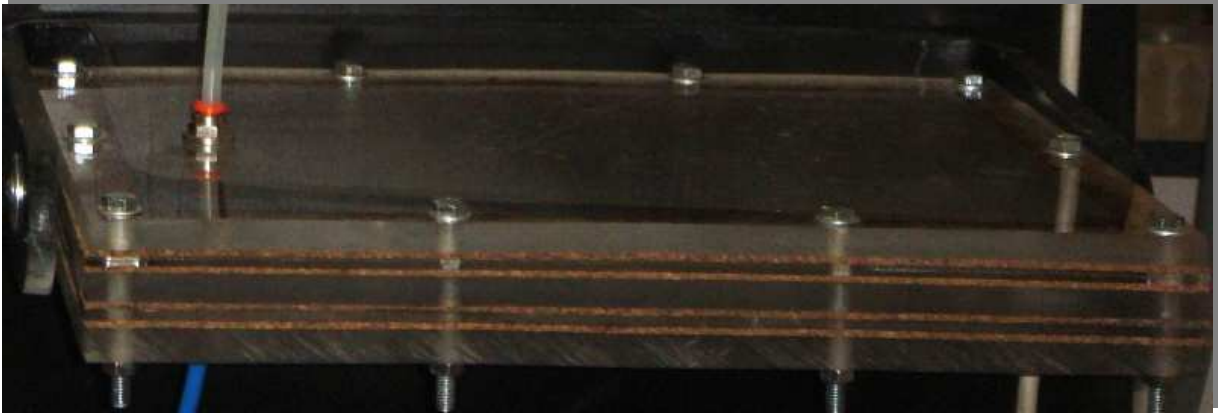


Figure.III.5 .Vannes de réglage

## II. Cellule de mesure

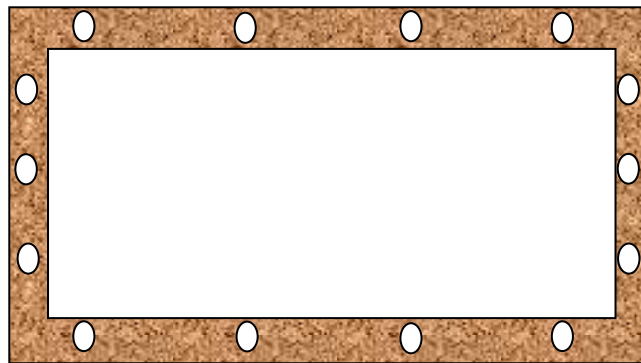
Le système d'écoulement est constitué de trois plaques superposées en parallèle de forme parallélépipédique garnies de joints d'étanchéité en liège situés à leur périphérie. La cellule se compose d'éléments en plexiglas transparents de bonne qualité offrant ainsi la possibilité de permettre de réaliser une étude qualitative et quantitative (Figure.III. 6) notamment pour visualiser l'écoulement au sein de la cellule de mesure.



**Figure.III.6.Cellule de mesure vue de côté.**

La plaque supérieure contient un orifice de diamètre  $d=6\text{mm}$  pour l'injection du fluide, à différents angles d'injection  $\alpha$ , traversant la deuxième plaque équipée d'un deuxième orifice de même diamètre. Le fluide s'écoule dans la plaque inférieure de façon à faciliter la vidange.

Pour éviter toute fuite, on a disposé des joints d'étanchéité en liège entre les plaques de verres (Fig. III.7).

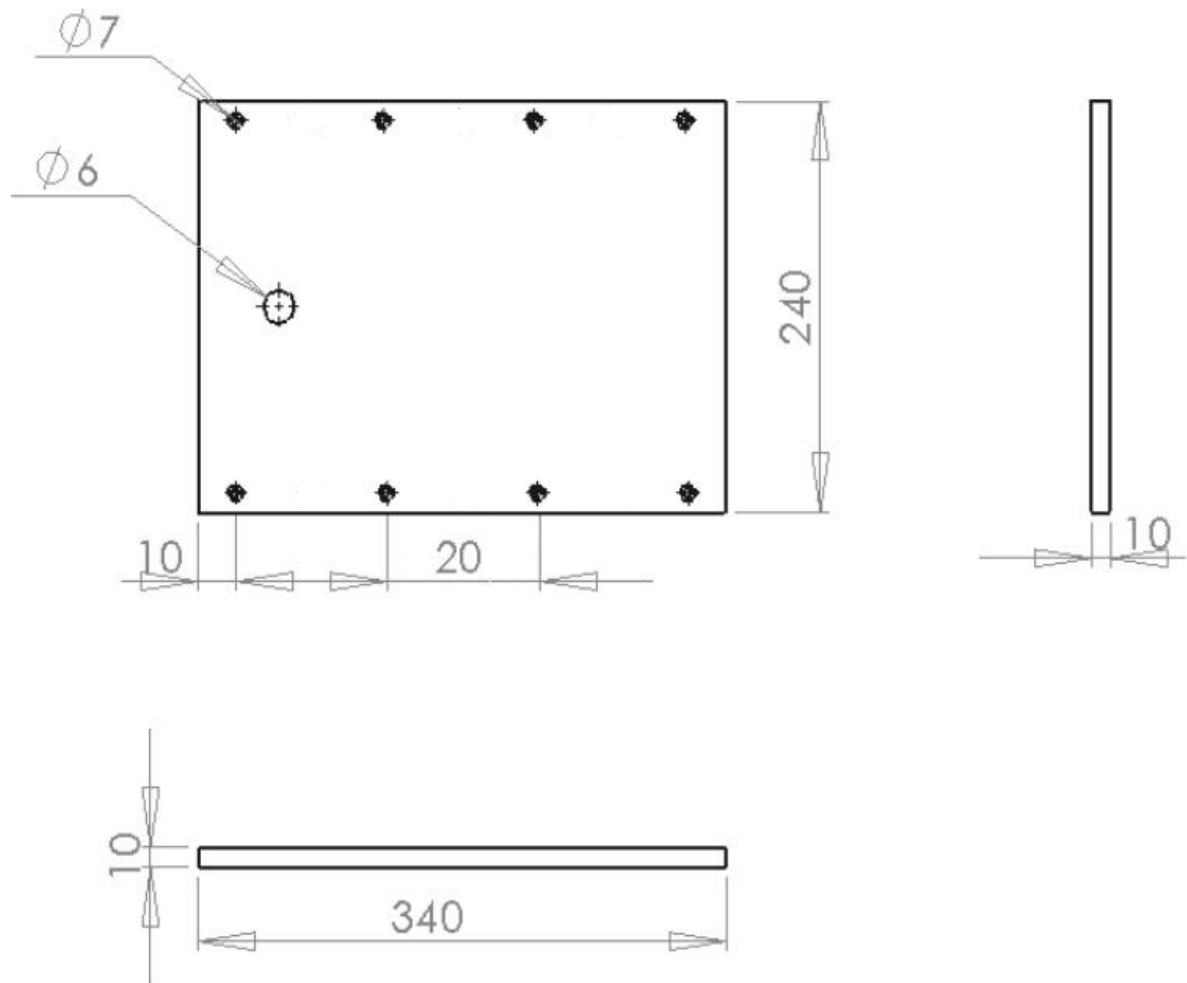


**Figure.III.7 .Joint d'étanchéité.**

La veine de mesure est montée sur un axe en forme de U. Le système de logement est prévu pour l'emploi de plusieurs plaques interchangeables. Le montage est conçu pour faciliter les opérations de montage et de démontage de la cellule de mesure.

Les cellules de mesure présentent les dimensions caractéristiques suivantes:

- Longueur:  $L = 300$  mm
- Largeur:  $e = 200$  mm
- Hauteur:  $H = 10$  mm



**Figure.III.8. Paramètres de cellule de mesure.**

Dans notre expérience, on change la plaque supérieure où l'angle d'injection  $\alpha$  varie. Au cours de nos essais nous avons utilisé quatre plaques tel que  $\alpha$  prend les valeurs suivantes :  $0^\circ$  ;  $20^\circ$  ;  $30^\circ$  ;  $60^\circ$ .

**Remarque importante :** Le dispositif ainsi conçu peut s'adapter à différentes cellules de mesure de configuration très différentes :

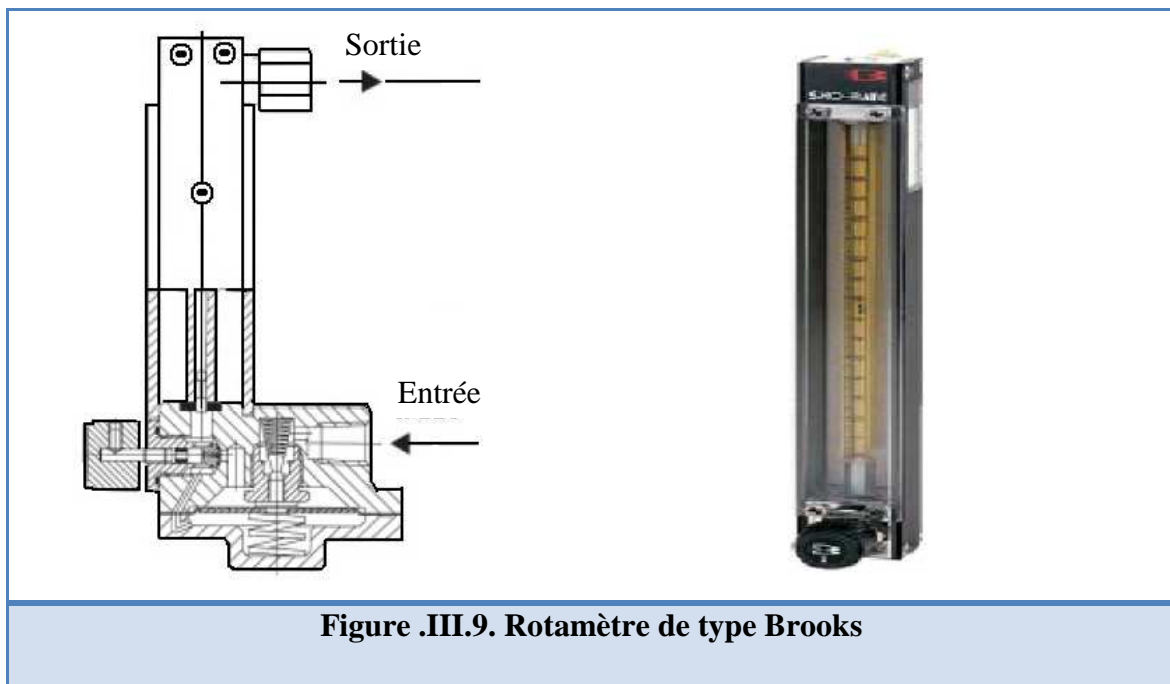
Cellule de mesure de forme cylindrique, disque, conique etc.... Cette façon de faire constitue autant de systèmes d'écoulement intéressants à étudier expérimentalement.

### III. Instruments de mesure

#### III.1. Débitmètre

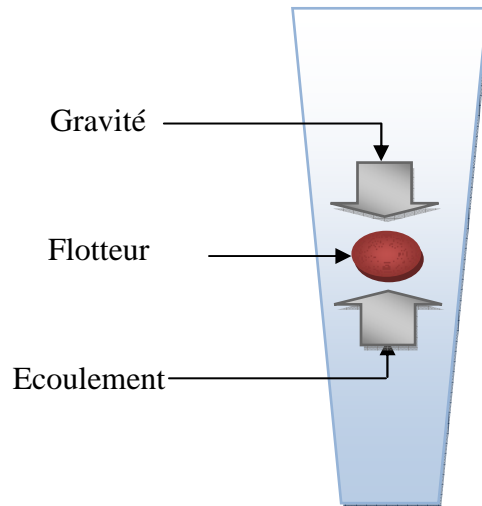
La mesure du débit revêt une importance cruciale dans les réseaux de transport des fluides, notamment dans toute installation où doit être contrôlée la quantité de fluide intervenant dans le processus expérimental.

Ici, notre système d'écoulement contient deux débitmètres (rotamètres) de type Brooks l'un en amont, l'autre en aval du volume contrôlé. En effet, les débits mis en jeu étant de quelques litres par minute.



Les rotamètres utilisés sont constitués d'un petit flotteur placé dans un tube conique vertical. Le flotteur est en équilibre sous la triple action suivante :

- son poids.
- la force de poussée d'Archimède.
- la poussée du liquide.

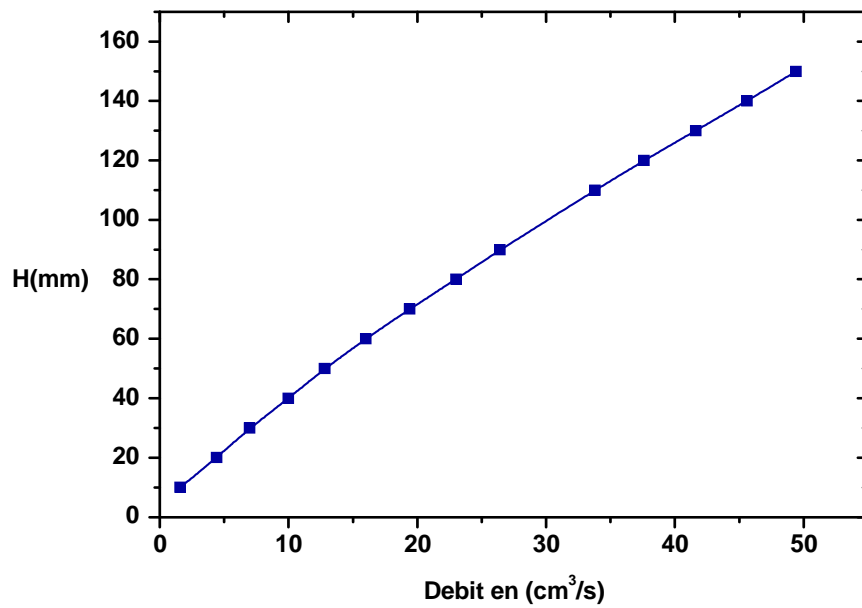


Le diamètre du tube en verre étant plus grand en haut qu'en bas, le flotteur reste en suspension au point où la différence de pression entre les surfaces supérieure et inférieure équilibre le poids correspondant. Le repérage de la position du flotteur se fait par lecture directe sur le tube en verre qui est muni de graduations. Le débit mesuré correspond à une pression de l'ordre de 3%.

### III.1.1. Etalonnage

Tout système de mesure nécessite d'être étalonné. Cet étalonnage doit tenter de prendre en compte tous les paramètres pouvant perturber la mesure (température, pression, viscosité, etc.).

Le dispositif présenté dans cette partie a l'avantage d'effectuer des mesures plus directes du débit. Celles-ci sont essentiellement obtenues par le relevé des variations temporelles de volume du liquide testé à la sortie du réservoir.



FigureIII.10.Courbe d'étalonnage de débit

### III.1.2.Mesure de la pression

Pour mesurer la pression avec plus de précision en utilise les prises de pression montrée dans la figure III.11.



FigureIII.11. Prises de pression

### III.2. Déterminations de caractéristiques du fluide

#### III.2.1. Mesure de la température

La mesure de température est effectuée à l'aide d'un capteur électronique à courant continu très performant pouvant atteindre une précision inférieure à 1%.

#### III.2.2. Mesure de la densité

On a évalué la densité de l'eau correspondant à la température ambiante de la salle du Laboratoire qui se situe en moyenne autour  $T=20^{\circ}\text{C}$ . Des corrections systématiques sont faites lorsque la température s'écarte de cette valeur (utilisation d'un abaque de la densité de l'eau).

La masse volumique est déterminée au moyen d'une balance électronique de haute précision ( $\Delta m/m < 1\%$ ).

#### III.2.3. Mesure de la viscosité

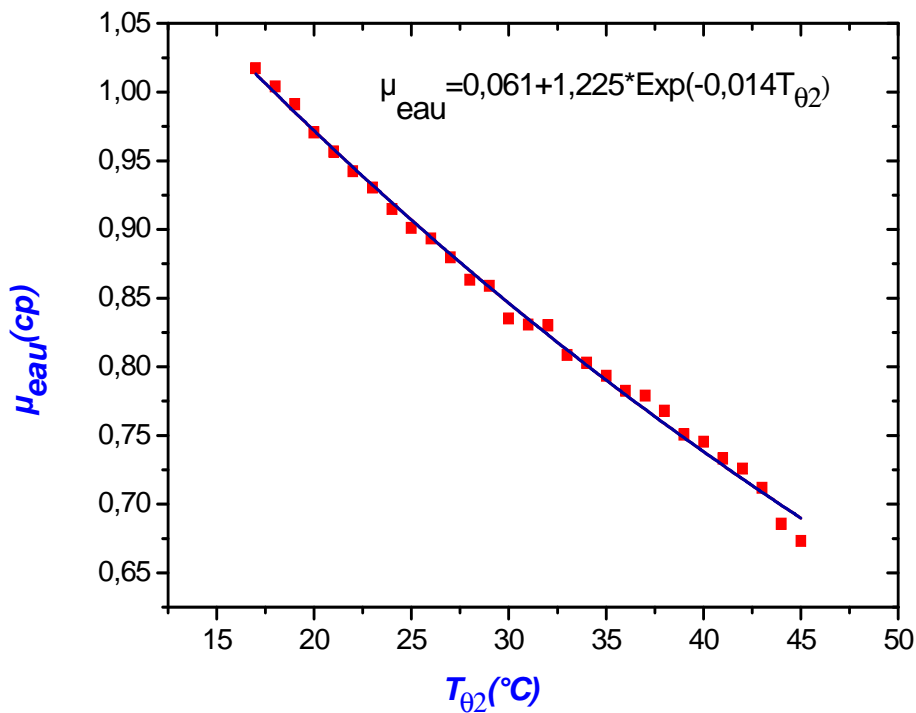
Les viscosités dynamique et cinématique de l'eau sont évaluées en fonction de la température à l'aide d'un viscosimètre à tube capillaire.



Figure III.12. Appareillage de mesure de viscosité

Nous donnons, ci après, les courbes d'étalonnages relatifs à l'évolution des viscosités dynamique et cinématique ( $\mu_e$  et  $\nu_e$ ) de l'eau en fonction de la température. On a pu établir les variations de  $\mu_e$  et de  $\nu_e$  en fonction de T pour ajusté les courbes expérimentales avec des lois exponentielles. La précision de la mesure de la viscosité cinématique.

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta \mu}{\mu} + \frac{\Delta \rho}{\rho} = 2\%$$



**Figure III.13. Evolution des viscosités dynamique de l'eau en fonction de la température.**

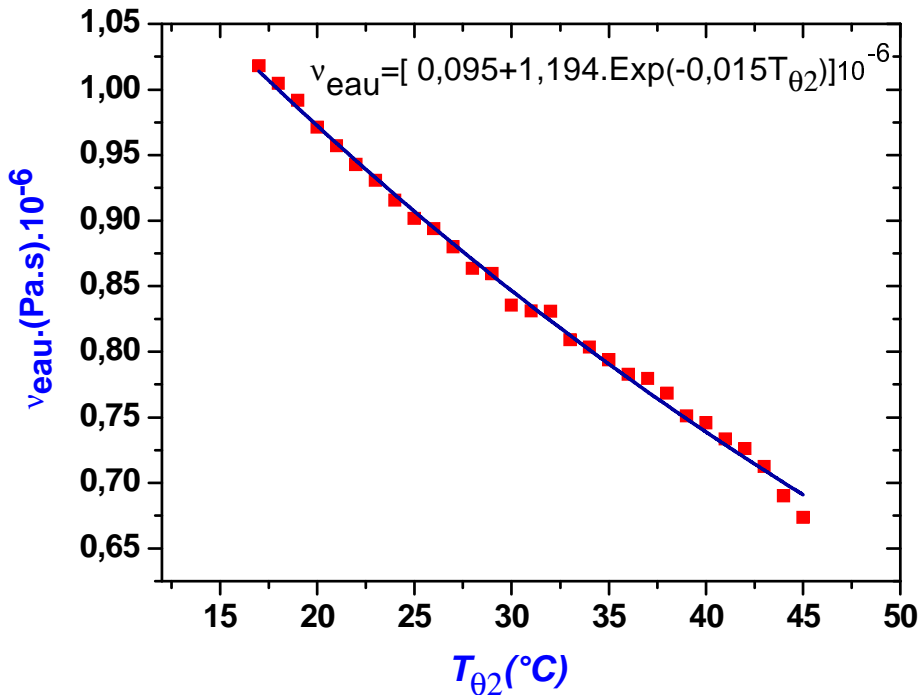


Figure III.14. Evolution des viscosités cinématique de l'eau en fonction de la température.

#### IV. CONDITION D'ESSAIS

Etant données que les caractéristiques géométriques sont fixées à l'avance et n'évoluent ni dans l'espace ni dans le temps, la valeur du paramètre de contrôle  $\phi = H/L$  dépend du débit, de la hauteur  $H$  ou l'espace annulaire et de l'angle d'injection  $\alpha$ .

En pratique, le mode opératoire adopté pour les différents essais s'effectue comme suit : A partir du repos, on met la pompe en marche en augmentant lentement et progressivement la vitesse. Puis on s'arrête, chaque fois, afin de permettre à l'écoulement de se stabiliser dans l'état qu'il occupe et l'on note ensuite la vitesse à la sortie.

Le régime d'écoulement dépend de la vitesse d'injection du fluide  $V_E$  et du facteur de forme  $\phi$ .

Au cours de nos expériences, le fluide utilisé a des propriétés physiques connues. Le mouvement est caractérisé par la valeur du paramètre d'influence  $\phi$  qui ne dépend, en principe, que du rapport des vitesses  $\beta = \frac{V_S}{V_E}$  et des nombres de cellules de mesure N utilisées.

Ces données permettent de fixer le nombre de Reynolds Re :  $Re = \frac{U H}{\nu}$

avec l'incertitude suivante

$$\frac{\Delta Re}{Re} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta \nu}{\nu}$$

En pratique soit une imprécision de 6%

## V.DEFINITION DES TACHES EXPERIMENTALES

On a élaboré le protocole expérimental comme suit :

- 1) Fixer la température du liquide proche de l'ambiance de la salle de Laboratoire,
- 2) Mesurer la viscosité,
- 3) Fixer le débit en mesurant la vitesse au voisinage de la cellule de mesure,
- 4) Evaluer le nombre de Reynolds pour s'assurer que  $Re < Re_c$ , s'assurer après vérification que l'écoulement de Poiseuille se produit en régime laminaire stable,
- 5) Vérifier l'existence éventuelle de perturbations qui peuvent s'introduire par intermittence en jouant sur le débit d'arrivée du bac de tranquillisation,
- 6) Au départ, on procède d'abord avec une seule cellule de mesure,
- 7) Généralisation : progressivement, on introduit des cellules de mesures pour être proche de modèle de prototype d'un système d'échangeur selon l'objectif recherché :
  - Système d'échangeur : montage en série à N cellules
  - Système d'échangeur : en montage parallèle à N cellules
  - Système d'échangeur : en montage série-parallèle à N cellules
- 8) Diversifications des systèmes d'échangeurs : dans notre objectif de recherche, on envisage d'étendre nos investigation à la réalisation d'une batterie d'échangeurs qui peuvent fonctionner à Co-courant et contre-courant (en montages série ou parallèle).

## VI.CONCLUSION

On a réalisé un dispositif expérimental consacré à l'étude du principe constructal ou principe Volume-Point en l'adaptant à la configuration d'un écoulement laminaire confiné dans une cavité entre deux plans parallèles (Ecoulement de Poiseuille).

On a créé les conditions nécessaires pour mettre en lumière la nature du mouvement soumis aux effets combinés du débit et l'angle d'injection du fluide à l'entrée dans le cas d'un régime laminaire stable. En outre, ce système est conçu pour valider la théorie de Bejan au moyen d'une cellule de mesure ayant un facteur d'aspect variable  $\Gamma = \frac{H}{L}$ . Dans tous les cas, on a pris soin de mesurer les caractéristiques nécessaires pour déterminer avec précision les paramètres de contrôle pouvant influencer sur l'écoulement.

Il est à noter que le dispositif est de nature «versatile » puisque on peut aisément adopter des cellules de mesure de géométrie différente (disque, cylindre, etc..).

# CHAPITRE IV

## APPROCHE NUMERIQUE

## Introduction

L'utilisation des logiciels appropriés pour la résolution numérique des problèmes physiques devient très fréquente actuellement. En effet, dans la plupart de ces problèmes, la résolution des phénomènes du transfert, couplés à la mécanique des fluides n'est possible que sous certaines hypothèses simplificatrices qui permettent de faire la simulation des phénomènes observés expérimentalement.

Ici, l'objectif principal consiste à amorcer la prévision numérique de l'écoulement évoluant au sein de l'espace défini entre deux plans parallèles (écoulement de poiseuille) dans le but d'élaborer un système d'échangeur à N cellule.

Après un choix défini concernant le maillage de calcul qui s'adapte aux conditions aux limites du problème considéré, on effectue une simulation bidimensionnelle pour déterminer la nature et la structure du mouvement telles que la fonction de courant, le champ de vitesse et de vorticité. De plus, on a examiné l'effet de l'épaisseur du canal ou du facteur d'aspect sur les modifications de l'écoulement en régime laminaire stable.

Dans ce travail, il s'agit de montrer que la simulation numérique permet de retrouver directement les résultats obtenus par voie de calcul analytique à partir de la théorie constructale de A.Bejan pour un système d'échangeur à N cellules.

De cette façon, cette comparaison va montrer les avantages de cette dernière par rapport à la résolution directe des équations de Navier-Stokes.

Les résultats de la simulation sont comparés aux travaux disponibles en littérature et notamment avec ceux obtenus par voie analytique.

## I. Description du code de calcul Fluent

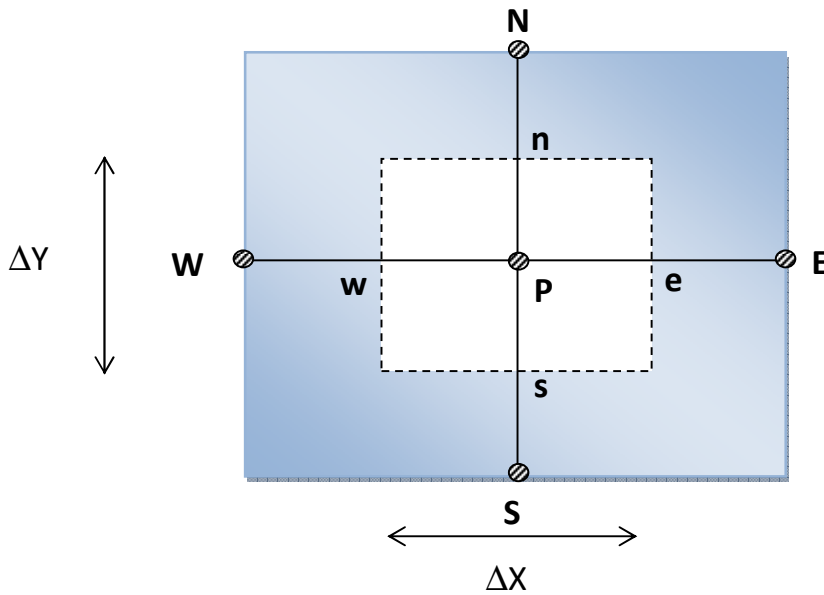
Fluent est un code de simulation numérique conçu pour résoudre des problèmes complexes liés aux transferts de chaleur, de masse et de quantité de mouvement dans des géométries complexes de nature bidimensionnelles et tridimensionnelles. Ce code est valable pour les écoulements stationnaires ou instationnaires, laminaires, ou turbulents. Il sert à faire la prédiction des instabilités, du déclenchement de la turbulence ainsi que les propriétés caractéristiques associées. Il est également appliqué dans la pratique industrielle dans divers domaines.

Le logiciel Fluent permet de réaliser une modélisation numérique qui est connue pour sa puissance de calcul et sa facilité de mise en œuvre basé sur la méthode des volumes finis.

### I.1. Méthode des volumes finis

Cette méthode a été signalée, pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et a fait l'objet ensuite d'une publication paru en 1980 par **Patankar [63]**. La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, à l'instar de la méthode des éléments finis et des différences finies. Mais, contrairement à la méthode de différences finies qui utilise une approche algébrique des dérivées, la méthode de volumes finis s'appuie, comme la méthode d'éléments finis, sur des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des éléments finis emploie une formulation variationnelle ou optimale de l'équation à résoudre basée sur la méthode de Galerkin (on parle aussi de forme faible), tandis que la méthode des volumes finis est fondée directement sur la forme dite forte de l'équation.

En pratique, le domaine de calcul est divisé en sous-domaines distincts appelés volumes de contrôle (Figure IV.1). Chaque volume de contrôle comporte un nœud placé en son centre géométrique. L'équation différentielle est discrétisée sur le groupe de nœuds considéré, en exprimant un principe de conservation en fonction de la variable dépendante liée au volume de contrôle. L'équation différentielle est alors intégrée localement au niveau de chaque cellule, le résultat de l'intégrale donne la valeur de la variable en question au centre de la cellule [64].



**Figure IV.1 : Volume de contrôle**

Chaque volume de contrôle est caractérisé par son nœud central "P" et ses quatre faces cardinales désignées respectivement par ("e"), ("w") de largeur  $\Delta y$ , et ("n"), ("s") de longueur  $\Delta x$  respectivement. Les points "E", "W", "N" et "S" sont les nœuds du maillage qui entourent le point "P", .

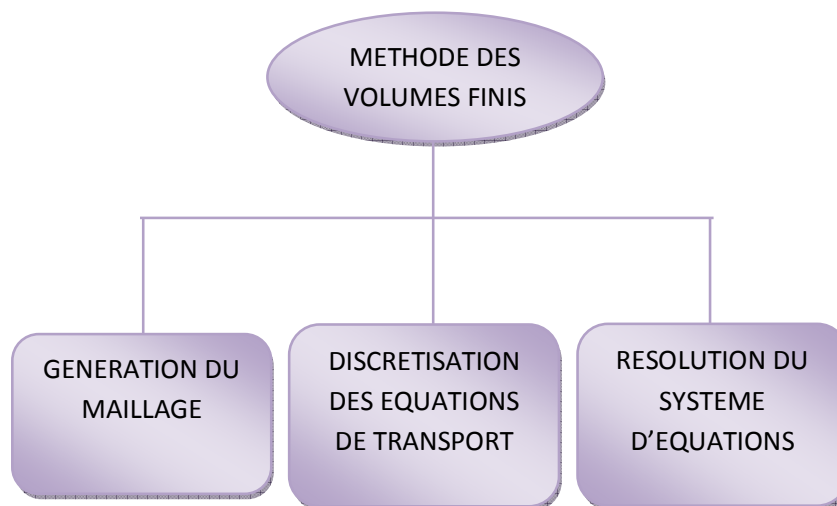
Cette méthode permet de transformer un système d'équations différentielles en un système d'équations algébriques obtenu par intégration correspondant au volume de contrôle considéré.

On résoud l'équation aux dérivées partielles de manière approchée par un maillage donné. Ce maillage est constitué de volumes finis. Les volumes finis sont des petits volumes en 3D, des surfaces en 2D complété par des segments en 1D et dont la réunion forme le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais pas nécessairement.

Les méthodes utilisant les volumes finis ont été mises au point initialement pour des lois de conservation, mais des développements récents permettent, à présent, de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle peut être employée avec des maillages non-structurés. En effet, la formulation d'une méthode de volumes finis ne tient aucun compte de la complexité du maillage concernant la discrétisation des lois de conservation. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle déterminant pour ce qui est des flux diffusifs.

La méthode des volumes finis s'articule autour de trois étapes principales : la génération du maillage, la discrétisation des équations de transport basées sur le principe d'intégration des équations sur un volume de control, enfin la résolution du système d'équations par différentes méthodes de résolution numériques de manière directe et itérative (Fig. IV.2).



**Figure IV.2 : Etapes utilisées dans la méthode des volumes finis.**

## I.2. Implémentation sous Fluent

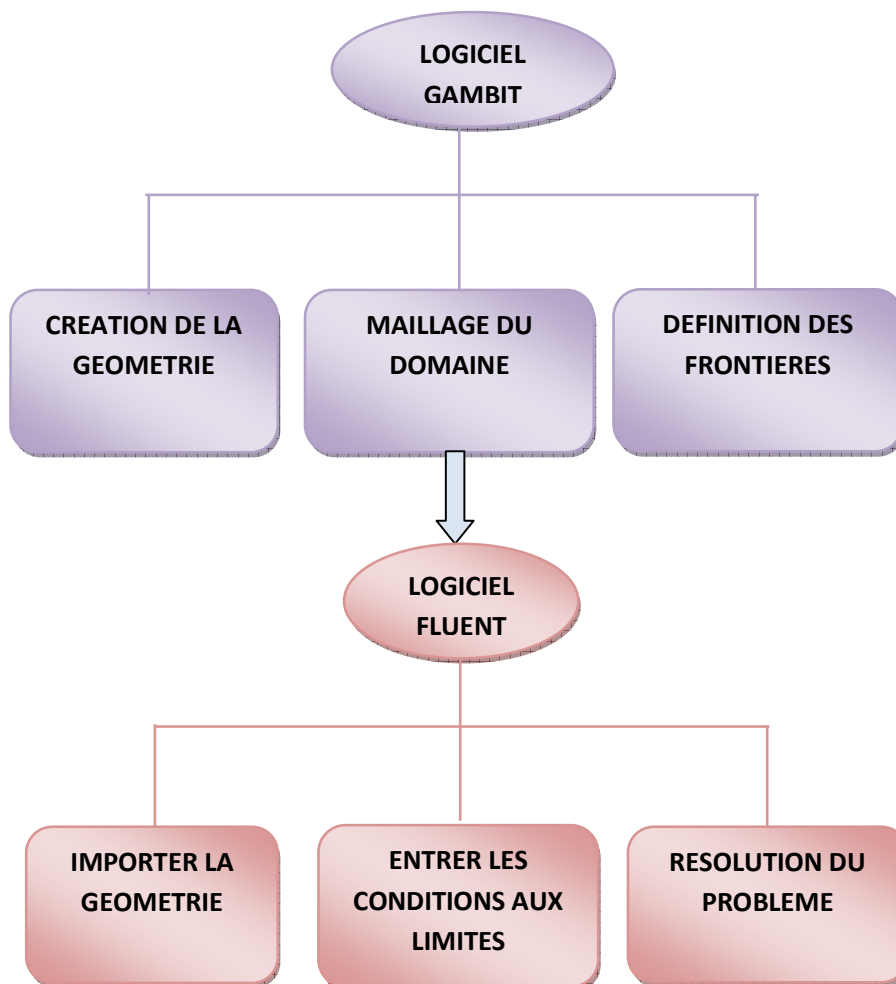
La simulation numérique est réalisée à l'aide de deux logiciels Gambit et Fluent qui permettent de réaliser des simulations bidimensionnelles ou tridimensionnelles. Ceux-ci permettent de faire la construction du maillage sur Gambit et de procéder à la résolution des équations de conservation de masse, de chaleur et de quantité de mouvement ainsi que le traitement des résultats obtenus avec Tecplot 10.

Par conséquent, Fluent est un code de calcul CFD (Computational Fluid Dynamics) qui est capable de simuler les problèmes des écoulements de fluide.

En fait, Gambit est un logiciel utilisé pour construire la géométrie, générer le maillage et définir les frontières appropriées au système considéré.

Quant à Fluent, il est utilisé pour modéliser les écoulements de fluides et transferts thermiques dans et autour des géométries complexes. Il contribue à résoudre des problèmes d'écoulement avec des mailles non structurées qui peuvent être produites pour des géométries complexes, avec une facilité relative. Les types de mailles possibles sont des formes à deux dimensions, triangulaires ou quadratiques, ou en trois dimensions tétraédriques, hexaédriques ou pyramidales (help Fluent), et les mailles hybrides ou mixtes.

Pour résoudre les problèmes thermiques ou de dynamique des fluides, par les logiciels Fluent et Gambit, on doit d'une manière générale suivre les étapes suivantes données dans la figure IV. 3.



**Figure IV.3 : Schéma des étapes utilisées dans la simulation par Fluent**

### I.3. Procédure sous Fluent

Au chargement de la géométrie sous Fluent, il s'agit, en premier lieu, d'adapter la géométrie considérée à l'échelle appropriée : mètres, centimètres, millimètres ou pouces. Ce logiciel permet aussi de d'ordonner les nœuds, les surfaces et les cellules en mémoire de telle façon qu'ils aient la même disposition dans la grille et dans la mémoire. Ceci permet d'améliorer les performances de calcul et d'efficacité en accédant à la mémoire.

#### I.3.1. Précision des calculs

Selon la complexité du problème traité, deux versions sont disponibles sous Fluent, à savoir, « simple précision » et « double précision » (help Fluent).

Dans le mode « double précision », les nombres à virgule flottante sont représentées en utilisant 64 bits, alors que le mode « simple précision » utilise une représentation à 32 bits. Le premier mode demande plus d'espace mémoire.

#### I.3.2. Choix du solveur

FLUENT nous permet de choisir l'une des deux méthodes numériques suivantes :

- Une méthode du solveur basée sur la pression.
- Une méthode de solveur basée sur la densité.

L'approche basée sur la pression a été développée pour les écoulements incompressibles à faible débit, alors que l'approche basée sur la densité a été principalement utilisé pour les écoulements compressibles à grande vitesse.

Dans les deux méthodes, le champ des vitesses est obtenu à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement. Dans l'approche basée sur la densité l'équation de continuité est utilisée pour obtenir le champ de densité alors que le champ de pression est déterminé à partir de l'équation d'état.

Dans l'approche basée sur la pression, le champ de pression est obtenu en résolvant l'équation de la pression ou l'équation de correction de la pression qui est obtenue par manipulation des équations de la continuité et de la conservation de la quantité de mouvement.

En utilisant l'une de ces méthodes, FLUENT permet de résoudre les équations intégrales de la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie et d'autres grandeurs éventuellement la température, le champ de concentration des espèces chimiques qui peuvent être présents au sein de l'écoulement.

Pour cela, il est nécessaire de procéder à :

- La division du domaine en volumes de contrôle.
- L'intégration des équations gouvernantes sur les volumes de contrôle individuellement pour construire des équations algébriques des variables dépendantes discrètes inconnues, telles que la vitesse, la pression et la température.
- La linéarisation des équations discrétisées et la résolution du système d'équations linéaires pour donner les nouvelles valeurs des variables dépendantes.

Dans notre cas, on a choisit l'approche numérique basée sur la pression car le fluide utilisé est un fluide incompressible. L'approche basée sur la pression utilise un algorithme de résolution où les équations gouvernantes sont résolues de façon séquentielle (séparées les unes des autres). Puisque ces équations sont non linéaires et couplées, la boucle de résolution doit être itérative afin d'obtenir une solution convergente numériquement.

### **I.3.3. Schéma de discrétisation**

Plusieurs schémas d'interpolation où de discrétisation ont été développés par Patankar, à savoir ,le schéma centré, le schéma décentré amont (UPWIND) du premier et du deuxième ordre, le schéma hybride, le schéma exponentiel et le schéma en loi de puissance. Dans le code Fluent, les termes visqueux sont discrétisés automatiquement avec des schémas du second ordre. Pour les termes convectifs, il existe plusieurs possibilités de discrétisation notamment la discrétisation avec un schéma UPWIND du 1er et 2ème ordre, avec un schéma en loi de puissance ou un schéma QUICK . Notons que ce dernier schéma est plus précis que le schéma en loi de puissance

particulièrement en ce qui concerne la diffusion, mais il est plus coûteux en temps de calcul et beaucoup moins stable. Cependant, le schéma UPWIND 2ème ordre est connu pour être inconditionnellement stable notamment pour les écoulements accompagnés d'un transfert de masse.

#### **I.3.4. Interpolation de la pression**

Comme toutes les autres quantités scalaires utilisées dans Fluent, les valeurs de pression et de vitesse sont stockées au centre du volume de contrôle. Et sachant que les valeurs de pression aux interfaces des cellules sont nécessaires à la résolution des équations de quantité de mouvement, un schéma d'interpolation de la pression doit être utilisé. Plusieurs schémas d'interpolation sont proposés dans Fluent, à savoir, le schéma STANDARD et le schéma du second ordre .

#### **I.3.5. Choix de la méthode de couplage Vitesse –Pression :**

En ne disposant pas d'une équation explicite de la pression, un couplage vitesse-pression basé sur l'équation de la continuité est introduit. La solution passe par l'emploi de l'algorithme SIMPLE pour résoudre le couplage entre la pression et la vitesse. Cet algorithme semi-implicite, utilise une correction de la pression  $P^*$  qui vérifie l'équation de conservation de la masse. Il est disponible dans le code Fluent à côté de deux autres méthodes réalisant le couplage vitesse-pression, à savoir, la méthode SIMPLEC (SIMPLE Consistent) et la méthode PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators).

#### **I.3.6. Facteurs de relaxation**

Dans les méthodes itératives, pour trouver la solution des systèmes d'équations algébriques linéaires, (lors de l'utilisation des schémas itératifs permettant d'appréhender les non-linéarités) on cherche souvent à ralentir ou accélérer, d'une itération à l'autre, l'écart relatif de la variable considérée. Ces processus sont appelés respectivement : Sous-relaxation (ralentissement) et Sur-relaxation (accélération).

## II.. MISE EN EQUATION DU MOUVEMENT

Le champ de vitesse a pour caractéristiques  $U, V$  et  $W$  qui désignent respectivement les composantes selon  $x, y$  et  $z$  auquel on associe la pression correspondante  $P$ . L'écoulement du fluide réel et incompressible est décrit par l'équation de Navier-Stokes qui exprime la conservation de la quantité de mouvement et l'équation de continuité qui découle du principe de conservation de matière.

L'écoulement de fluide au sein du parallélépipède est considéré incompressible et évoluant en régime laminaire.

On rappelle l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien est de la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V} \cdot \vec{grad} \right) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{grad} P + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{IV.1})$$

Où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  désigne la viscosité cinématique du fluide.

Les opérateurs gradient ( $\nabla$ ) et Laplacien ( $\Delta$ ) ont pour expression:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{IV.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

### II.1-Equation de continuité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

### II.2 Equations de transfert de la quantité de mouvement

Celle-ci se traduit par l'équation de Navier-Stokes est projetée selon les trois directions( $x, y, z$ ):

Selon la direction x :

$$\rho \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (\text{IV.6})$$

Selon la direction y :

$$\rho \left( U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \quad (\text{IV.7})$$

Selon la direction z :

$$\rho \left( U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (\text{IV.8})$$

### II. -3. Hypothèses simplificatrices

Un fluide visqueux, s'il est en écoulement lent entre deux plaques parallèles, est considéré écoulement laminaire stable. En première approximation, on admet les hypothèses suivant :

- l'écoulement du fluide est incompressible et partout parallèle aux parois.
- Ecoulement stationnaire ou indépendant du temps.
- On suppose que le gradient de pression est orienté selon l'axe x et soit  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ .

Ces conditions impliquent que l'écoulement s'organise selon un champ de vitesse théoriquement parabolique telle que la vitesse est nulle aux parois et maximale à mi-hauteur.

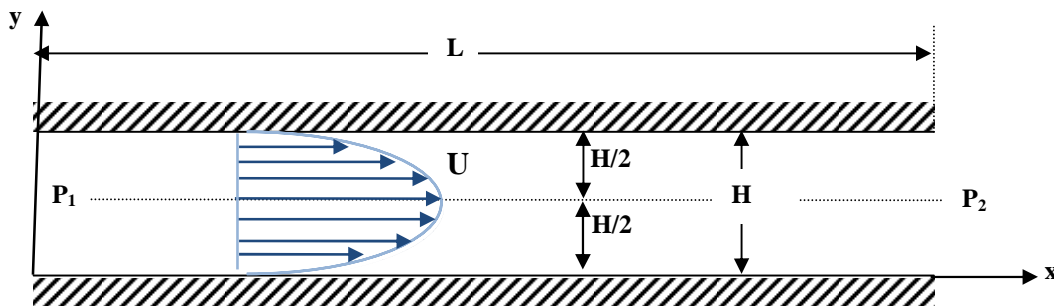


Figure IV.4. Profil de vitesse moyenne de l'écoulement de type Poiseuille.

Afin de simplifier cette étude, on se restreint à un écoulement bidimensionnel à deux dimensions. On peut projeter l'équation de Navier-Stokes sur les deux axes  $x$  et  $y$ .

### Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.9})$$

### Equations de Navier-Stokes :

Selon la direction  $x$ :

$$\rho \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \quad (\text{IV.10})$$

Selon la direction  $y$ :

$$\rho \left( u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \quad (\text{IV.11})$$

## II.4. Analyse des équations adimensionnelles

La formulation adimensionnelle des équations générales est décrite en rapportant chacune des grandeurs physiques à une grandeur caractéristique lui correspondant et choisie en fonction de la problématique envisagée.

### II.4-1 Grandeurs adimensionnelles

Les grandeurs de référence se rapportent aux variables spatiales, temporelles, de vitesse et de pression. On résume, ci-après, les grandeurs adimensionnelles utilisées adaptées à notre étude.

$$* \text{ Variables d'espace : } \left\{ \begin{array}{l} x^* = x/L \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{ou} \quad 0 \leq x^* \leq 1 \\ y^* = y/L: \quad -\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2} \leq y^* \leq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

\* **Variable de temps** :  $t^* = \frac{tV}{H^2}$

\* **Champ moyen de vitesse et de pression** :

$$U^* = \frac{U}{V}, \quad V^* = \frac{V}{V}, \quad P^* = \frac{p}{\rho V^2}$$

\* **Paramètre externe du mouvement** :

**Nombre de Reynolds** :  $R_e = \frac{V_m H}{\nu}$

\* **Paramètre géométrique**:

Le facteur de forme  $\phi$  représente le rapport de la hauteur  $H$  de l'écoulement par la longueur  $L$  tel que  $\phi = \frac{H}{L}$ . C'est le paramètre recherché qui fait l'objet de cette étude.

#### II.4-2 Equations adimensionnelles du champ de vitesse

On introduit les grandeurs sans dimensions dans le système d'équations précédent pour obtenir un système d'équation adimensionnelle du mouvement lié au paramètre de contrôle de l'écoulement  $Re$ .

Selon  $x$  :

$$\left( U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{IV.12})$$

Selon  $y$  :

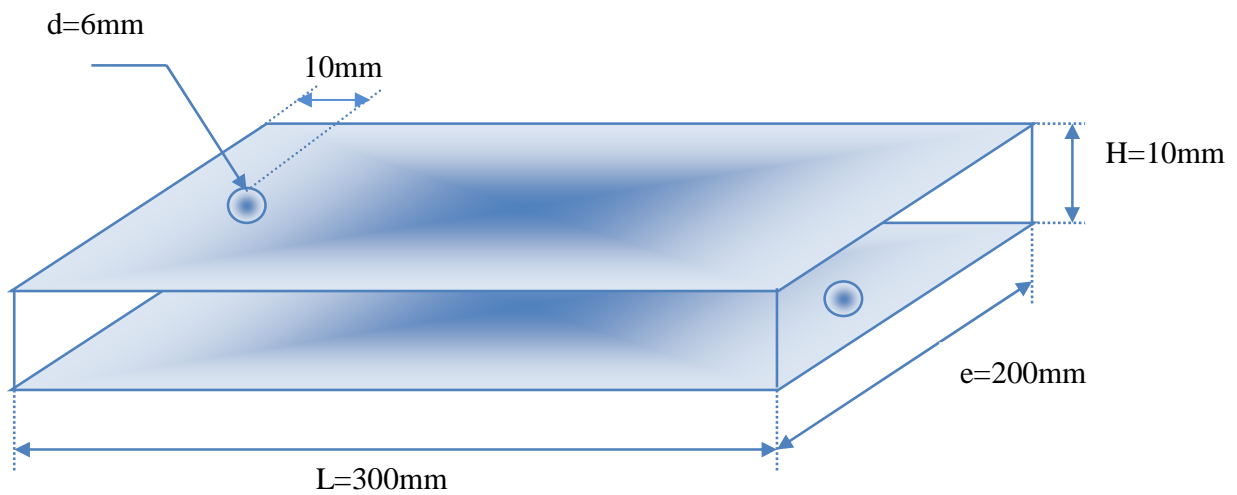
$$\left( U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{IV.13})$$

### III- GENERATION DE MAILLAGE

#### III.1. Configuration géométrique

La géométrie étudiée est constituée d'une cellule de mesure de forme parallélépipédique de longueur  $L=300\text{mm}$ , Largeur  $l=200\text{mm}$  et une Hauteur ou épaisseur  $H=e=10\text{mm}$ .

La plaque supérieure contient un orifice circulaire assurant l'injection du fluide (situé au côté droit à 1 cm du bord). Un orifice de sortie de diamètre égal est localisé dans la plaque inférieure située à une distance 1 cm de côté gauche (voir figure IV.4).



**Figure IV.5. Configuration géométrique du système d'écoulement**

### III.2. Paramètre de l'étude

Les caractéristiques géométriques et les propriétés du fluide sont résumées dans le tableau IV.1 suivant.

Grandeurs	valeurs	Observation
Longueur de la cellule	$L=300\text{mm}$	Constante pour toute l'étude
Largeur de la cellule	$e=200\text{mm}$	Constante pour toute l'étude
Hauteur de la cellule	$H=10\text{mm}$	On a considéré plusieurs cas pour examiner son influence sur le rapport des vitesses $5\text{mm}<H<30\text{mm}$
Diamètre des orifices	$\phi=6\text{mm}$	Constant pour toute l'étude
Vitesse à l'entrée	$V_E=0.61\text{m/s}$	D'autres cas ont été examinés $0.30\text{m/s}<V_E<0.60\text{m/s}$
Viscosité cinématique	$\nu=0.001003\text{Kg/m-s}$	Viscosité cinématique de l'eau aux conditions normales de température et de pression
Densité du fluide	$\rho=998.2\text{ Kg/m}^3$	Densité de l'eau aux conditions normales de température et de pression

Tableau IV.1 : Paramètres d'étude adoptés

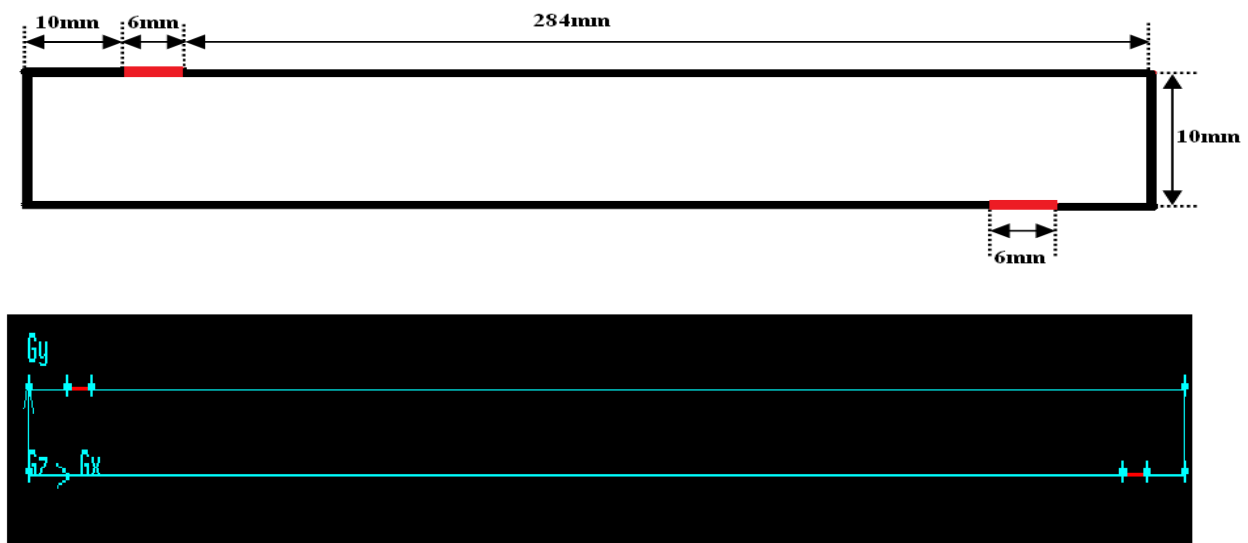
### III.3. Maillage sous Gambit

#### III.3.1. Maillage du domaine de calcul

La création de la géométrie ainsi que le maillage s'est fait à l'aide du logiciel Gambit 2.4.6. Ce mailleur propose des solutions étendues pour les géométries les plus compliquées. Cependant, dans notre cas, deux choix principaux du maillage se sont posés à nous: triangulaire et quadrilatère.

Celui-ci permet de construire deux types de grilles de calcul : structurée ou non structurée, de nature bidimensionnelles ou tridimensionnelles.

Pour réaliser le schéma de la configuration par Gambit, on doit d'abord définir les coordonnées exactes des points qui délimitent le domaine de calcul par leurs coordonnées exactes. Par la suite, on les relie par des segments de droite. La géométrie réalisée à l'aide de Gambit est donnée sur la figure. IV.6.



**Fig. IV.6. Géométrie de la cellule rectangulaire.**

Ainsi, lorsqu'on adopte la simulation à deux dimensions, le maillage peut être composé soit de cellules quadrilatères, soit de cellules triangulaires. Par contre, lorsqu'on passe à l'échelle tridimensionnelle, il peut être constitué soit de cellules hexaédriques soit de cellules tétraédriques.

On a constaté que l'utilisation d'un maillage triangulaire induirait un surplus d'utilisation du nombre de cellules par rapport aux cellules quadrilatères, entraînant la nécessité d'avoir plus de ressources et de temps de calcul.

On a adapté pour notre configuration un maillage structuré uniforme. Le nombre et la distribution des nœuds à travers chaque frontière du domaine du calcul sont choisis sur la base des considérations physiques.

### III.3.2. Description des grilles

La qualité du maillage joue un rôle très important dans la précision et la stabilité du calcul numérique. Un test préliminaire pour différents maillages est indispensable pour toute étude numérique.

Il faut noter que la recherche d'une solution indépendante du maillage mène à des maillages assez différents en fonction de la géométrie étudiée. De façon générale, pour le cas analysé, on a adapté le même maillage pour chaque configuration.

Dans la pratique deux types de test doivent être entrepris, à savoir, le test géométrique concernant le maillage du domaine de calcul, et celui du pas de temps pour les écoulements instationnaire qui est le comportement du fluide de notre configuration.

Dans l'étude de ce problème, nous avons eu besoin de faire différents tests afin de valider nos calculs. Il sera, entre autres, nécessaire de faire une étude de dépendance au maillage ("Grid Convergence"). Pour cela, nous avons utilisé trois grilles :

- 1°) Une grille avec un maillage assez grossier comportant 906 nœuds et 750 cellules. Celle-ci est représentée sur la figure IV.7
- 2°) Une grille avec un maillage raffiné. Elle comporte 11865 nœuds et 11280 cellules. Cette grille est représentée sur la figure IV.8
- 3°) Une dernière grille dont le maillage est encore plus raffiné près des orifices. Elle contient le même nombre d'éléments et de nœuds que la grille précédente mais répartie différemment. Elle est représentée sur la figure IV.9.

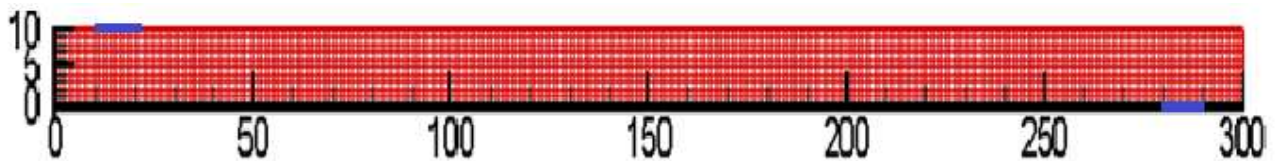


Fig. IV.7. Grille grossière

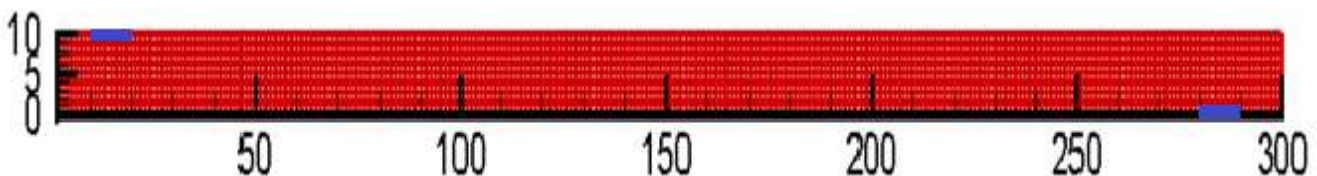
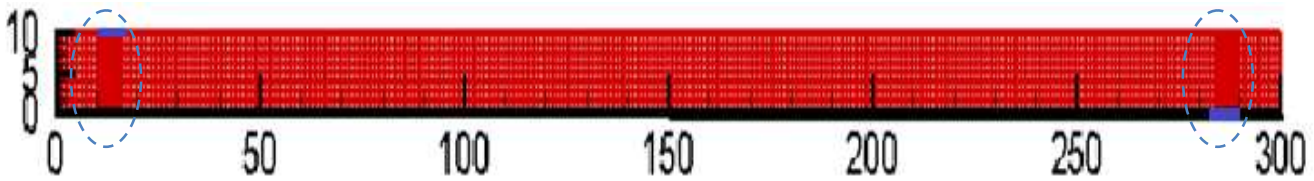
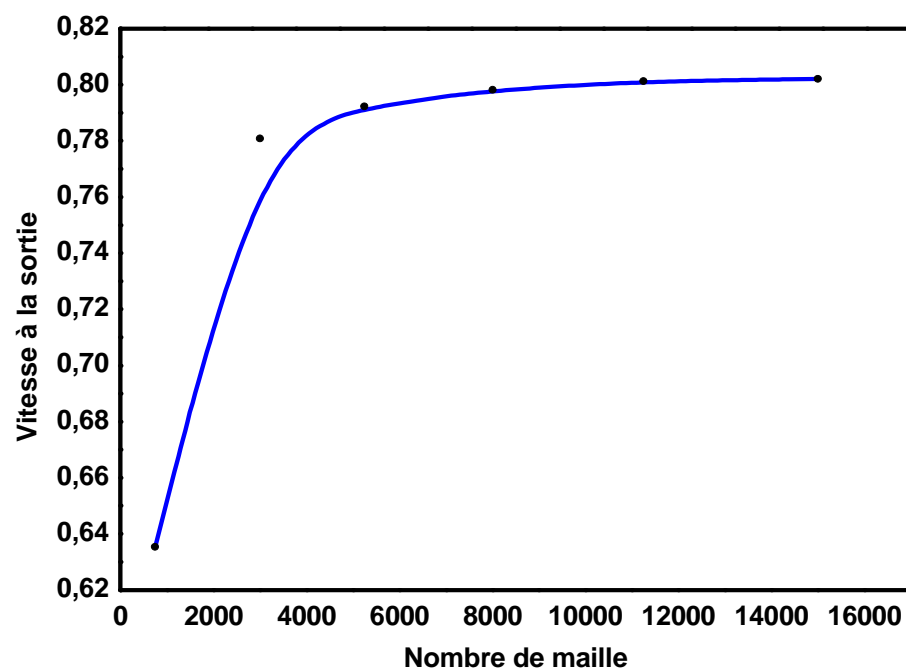


Fig. IV.8. Grille raffinée



**Fig. IV.9. Grille raffinée -Remaillage près des orifices**

Pour avoir le maillage adéquat, on a fait une étude de la dépendance de la vitesse à la sortie en fonction du maillage pour une valeur de la vitesse d'injection :  $V_E=0.6\text{m/s}$ .



**Figure IV.10. Dépendance des résultats au maillage**

En pratique, le maillage est au fur et à mesure progressivement affiné jusqu'à ce que la solution ne varie plus avec l'affinage de quelque % comme il est montré dans la figure. IV.10.

D'après la courbe représentée en figure IV.10, on constate qu'un maillage de  $25 \times 600$  donne de bons résultats.

### III.3.3. Conditions aux limites

L'écoulement bidimensionnel entre deux plaques sera considéré comme étant laminaire, et modélisé à l'aide de Fluent.

On définit les conditions aux limites suivantes :

Vitesse à l'entrée : inlet\_velocity

Vitesse à la sortie : Pressure Outlet

Et on applique la condition– Wall sur les autres frontières du domaine,

### III.3.4. Mise en œuvre de la méthode numérique

Le problème de la théorie constructale, dans la configuration précédente, est résolu en utilisant le code de calcul Fluent basé sur la méthode des volumes finis.

L'algorithme PISO est utilisé pour le couplage pression-vitesse et le schéma SECOND ORDER est employé pour faire l'interpolation de la pression. La convergence est obtenue en contrôlant pour minimiser les résidus des équations de continuité et de quantité de mouvement.

## IV. Résultats et discussions

Nous avons étudié l'évolution du facteur de forme  $\phi$  pour différentes valeurs du rapport des vitesses  $\beta$ . Pour cela, on a joué sur plusieurs variables, à savoir :

- La vitesse d'injection  $V_E$  entre 0.30m/s et 0.61m/s.
- L'espace annulaire entre les deux plaques (H).
- Enfin le nombre de cellules de Poiseuille (N).

### IV.1. Influence du nombre de Reynolds

Dans cette partie, on montre l'effet du nombre de Reynolds sur la structure de l'écoulement, notamment la fonction de courant  $\Psi$  et de vitesse  $V$  pour un facteur de forme donnée :  $\phi = 0.03$ .

### IV.1.1 Lignes de courants

La résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire bidimensionnel stationnaire et incompressible a été faite en utilisant des nombres de Reynolds croissants à savoir  $Re=400$ ,  $Re=500$ ,  $Re=600$  et  $Re=700$ .

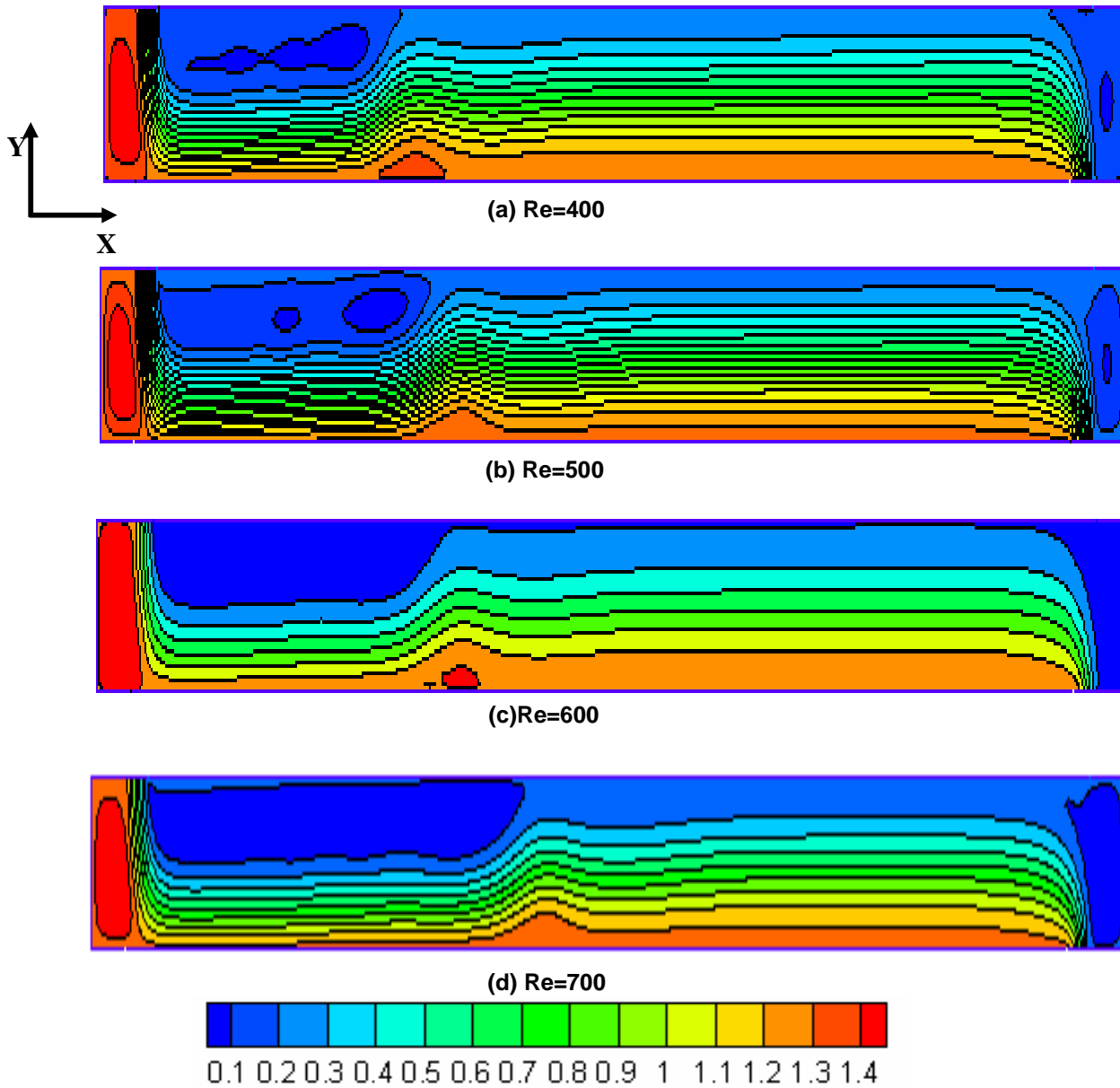


Figure IV.11. Lignes de courant pour  $\phi=0.03$

Sur les figures IV.11. (a, b, c, et d), sont représentées les lignes de courant  $\Psi$  de l'écoulement, pour les différents nombres de Reynolds.

L'analyse des figures ci-dessus pour un rapport d'aspect  $H/L=0.03$  correspondant à différentes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$  a montré que :

Dans l'intervalle de nombre de Reynolds  $500 < Re < 700$ , on observe trois zones de recirculation, l'une se forme le long de la paroi supérieure (mouvement turbulent de discontinuité tangentielle) au-dessus de l'écoulement, les deux autres (tourbillons secondaires) sont proches des orifices, amont et aval.

La première zone de recirculation beaucoup plus étalée et qui occupe presque la moitié de la cavité lorsque on atteint  $Re=700$ .

On note que la structure des zones de recirculation, qui s'établit dans notre géométrie, est de plus en plus grande au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de Reynolds.

#### **IV.1.2 Champ de vitesse moyenne**

L'écoulement bidimensionnel dans la cavité est simulé pour un nombre de Reynolds  $Re$  au choix, variant entre 400 et 700. La vitesse à l'entrée  $V_E$  fixé. La hauteur  $H$  du canal est prise égale à 0.01m telle que la longueur  $L = 30H$ .

La figure IV.12 met en évidence l'influence du nombre du Reynolds  $Re$  sur la distribution du champ de vitesse au sein de la cellule d'écoulement.

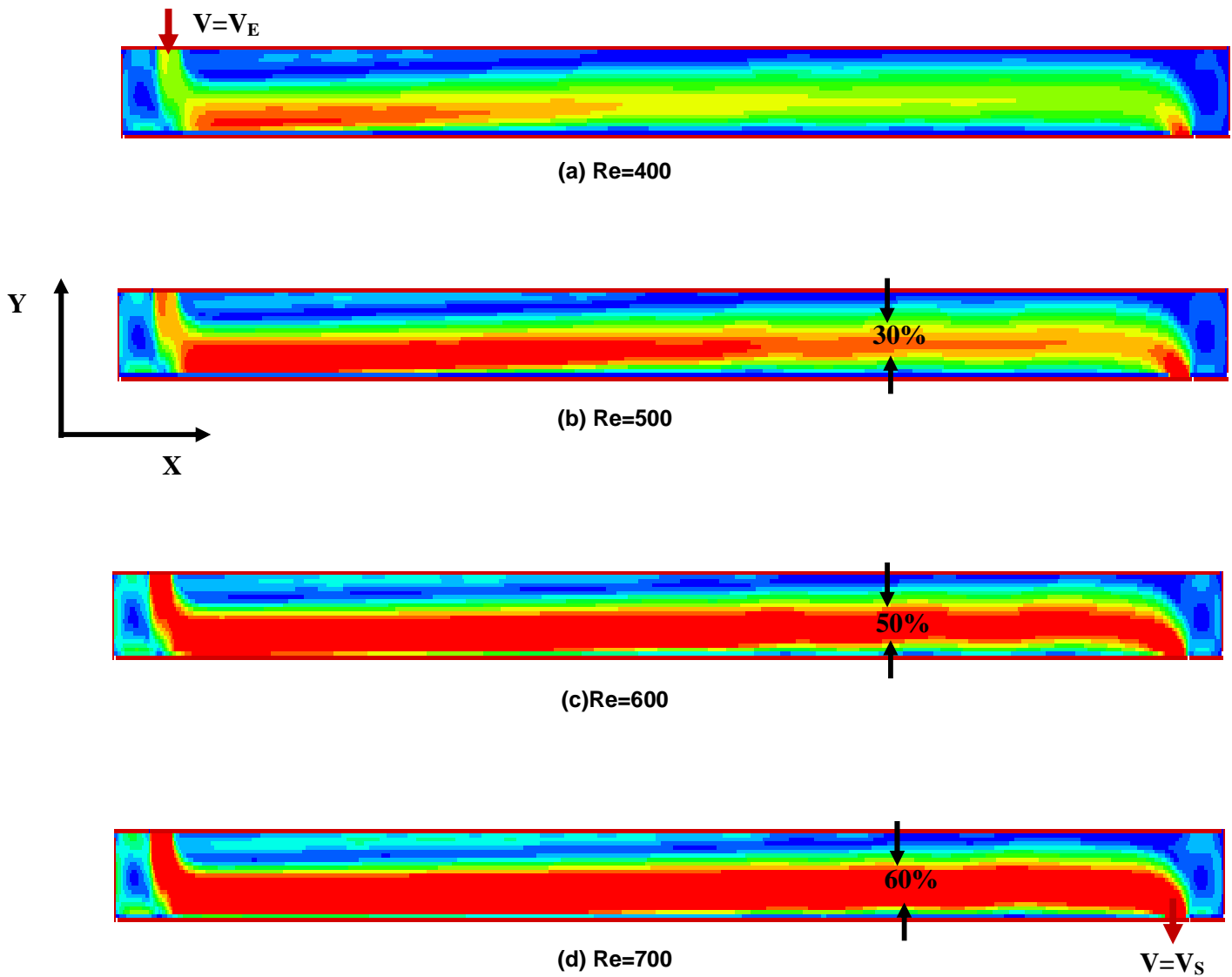


Figure IV.12. Champs des vitesses pour  $\phi=0.03$ .

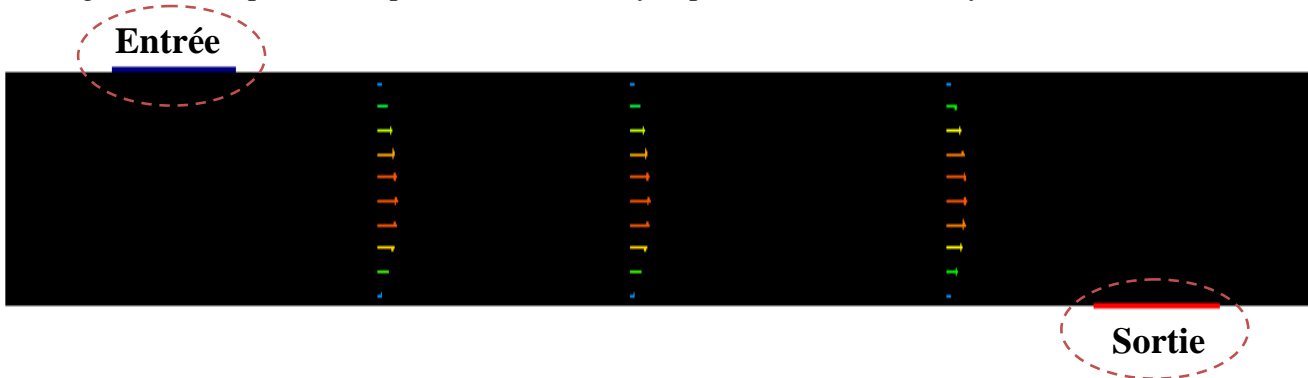
Les figures (IV.12a, 12b, 12c, 12d) montrent que les différentes zones caractéristiques de mouvement sont nettement visibles pour les quatre cas que nous avons traités. La zone de mouvement principal devient prépondérante quand le nombre de Reynolds augmente.

En raison de la manière d'attaquer  $V=V_E$  la cavité parallélépipédique à partir du haut de la cellule de mesure, l'écoulement devient dissymétrique : la veine centrale du mouvement (signalée

en rouge) est rejetée vers la paroi inférieure. Celle-ci devient prépondérante au fur et à mesure que  $Re$  croit.

Pour visualiser les champs de vitesse nous avons choisi de représenter leurs profils dans des différentes stations axiale  $x$  à l'intérieur de la cellule de mesure.

La figure IV.13 représente le profil de vitesse moyen pour un nombre de Reynolds  $Re=500$ .



**Fig. IV.13. Profil de vitesse dans la cavité de Poiseuille**

Cette figure montre que l'écoulement se stabilise progressivement pour prendre l'allure parabolique au centre du dispositif. On vérifie bien que le mouvement se développe bien au voisinage de l'entrée et semble similaire à celui d'un écoulement de Poiseuille classique (écoulement dans une cavité entre deux plans parallèle).

Les résultats qui suivent présentent les profils des vitesses moyennes dans la cavité pour  $300 < Re < 700$  relevés en  $x = 150\text{mm}$  ( $L=15H$ ) (Fig. IV.14).

L'examen des profils de vitesse calculés semblent conforme à une loi de distribution des vitesses moyennes proche de la réalité expérimentale (Fig. IV.15). L'ensemble des profils met en évidence une caractéristique fondamentale : la vitesse maximum est croissante lorsque le nombre de Reynolds  $Re$  augmente (voir tableau IV.2).

En outre, on vérifie bien que la vitesse maximale se situe au centre de la cavité, sur l'axe de l'écoulement, quel que soit le nombre de Reynolds  $Re$  dans l'intervalle considéré.

$V_m$	0.045	0.094	0.20	0.277	0.371
$Re$	300	400	500	600	700

**Tableau IV.2. Vitesse maximale au centre de la cavité**

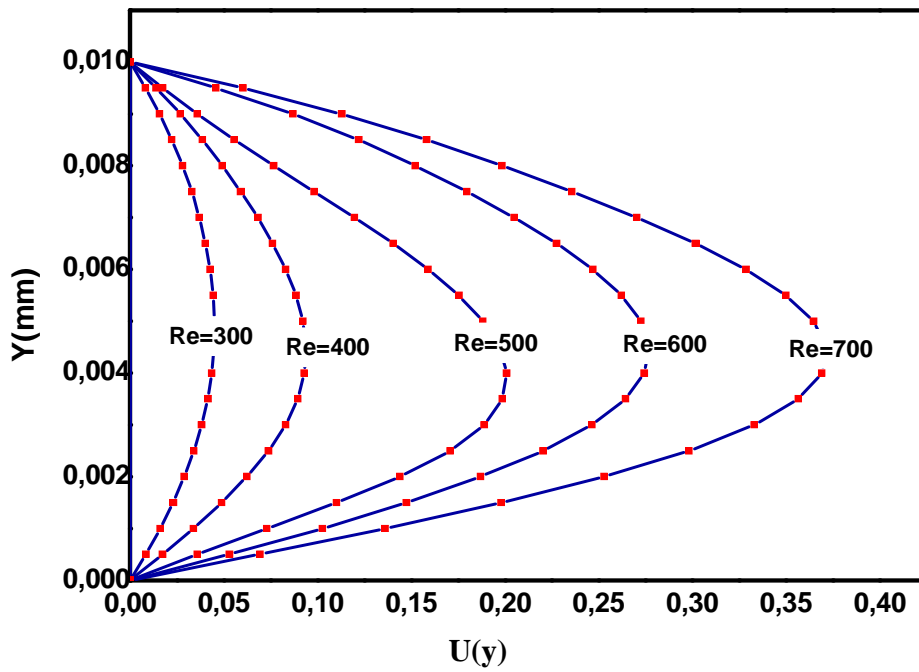


Fig. IV.14. Evolution du profil des vitesses à  $x=0.15m$ .

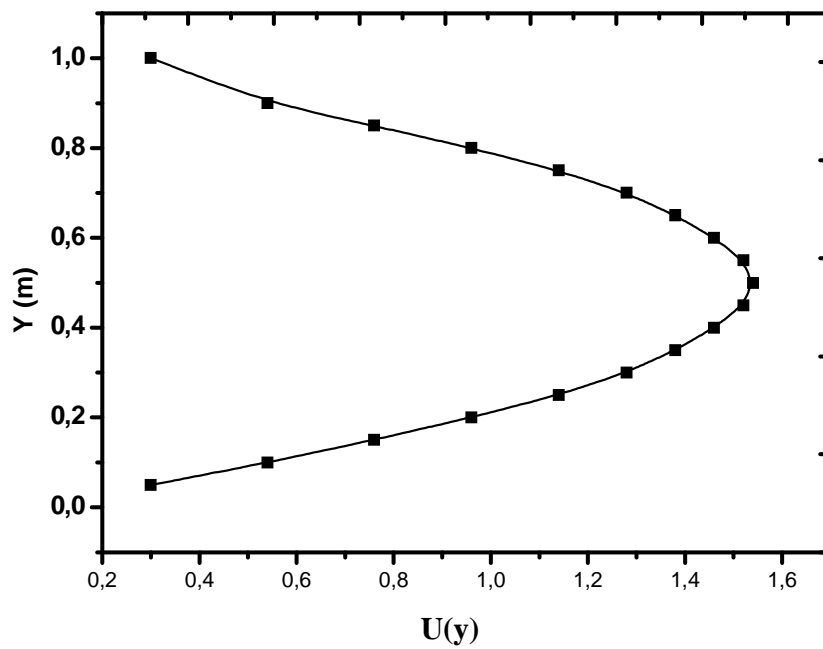
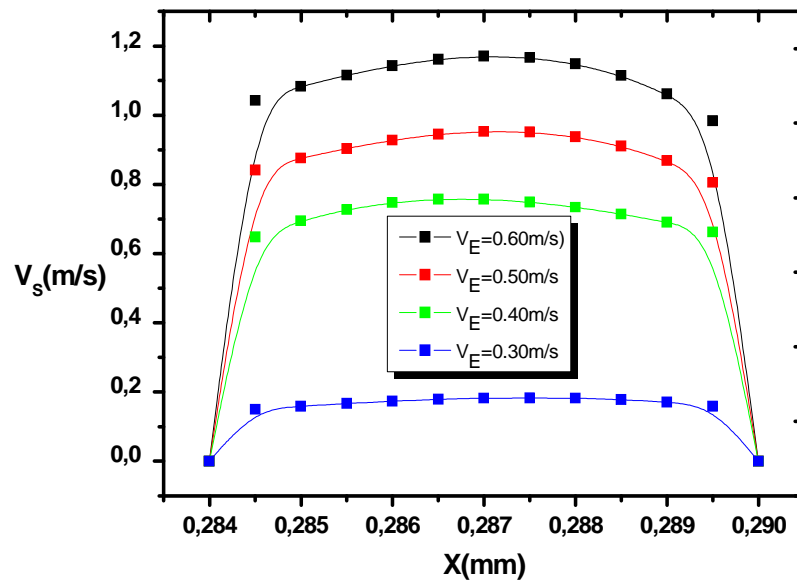


Fig. IV.15. Profil experimental de Poiseuille [65].

La figure IV.16 met en évidence l'influence de la vitesse à l'entrée de la cellule  $V_E$  sur l'évolution de la vitesse de la sortie  $V_S$ . Pour cela, on fixe l'épaisseur de la cellule à  $H=10\text{mm}$  et sa largeur à  $L=300\text{ mm}$  et on fait varier la vitesse  $V_E$  dans la gamme comprise entre  $0.30\text{m/s}$  et  $0.60\text{m/s}$ .



**Fig. IV.16.** Allure des profils de vitesse à la sortie de l'écoulement  $V_S$  lorsque la vitesse d'entrée  $V_E$  varie.

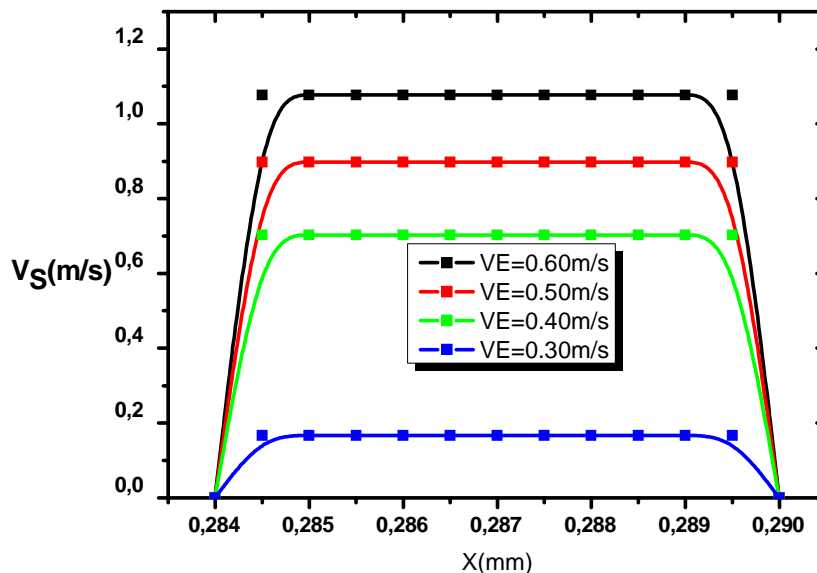
Pour une vitesse d'injection donnée, le profil de vitesse du fluide à la sortie est identique à celui qu'on trouve dans l'écoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire ou rectangulaire. Le profil de vitesse n'est plus parabolique et devient plus aplati. Ceci suggère que l'écoulement n'est plus laminaire et a tendance à devenir turbulent.

La loi de distribution du champ des vitesses moyenne obéit à la relation suivante :

$$V_S = V_E (\eta - a\eta^m)$$

$m=8,10, 12, \text{ etc...}$  correspondent aux grand nombre de Reynolds.

Afin d'examiner l'influence de  $\beta$  qui représente le rapport des vitesses  $V_E$  par rapport à la vitesse de sortie  $V_S$ , il est très commode de calculer la vitesse moyenne à la sortie de l'écoulement. La figure IV.17 illustre le profil des vitesses moyennes à la sortie de l'écoulement en prenant un pas régulier des vitesses égal à 0.1m/s donc les vitesses considérées sont de 0.3,0.4 ;0.5et 0.6m/s.



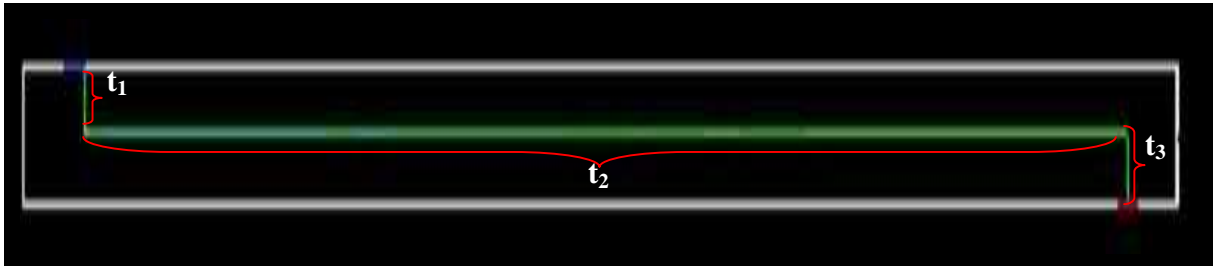
**Fig. IV.17. Profil des vitesses moyennes**

L'écart entre les courbes représentant les vitesses moyennes de sortie en fonction des vitesses à l'entrée  $V_E$  est très important en passant de  $V_E=0.3\text{m/s}$  à  $V_E=0.4\text{m/s}$  c'est une augmentation de 77%, cette dernière est plus importante par rapport à celle entre 0.4m/s et 0.5m/s qui est de 22% et celle entre 0.5m/s et 0.6m/s qui est de 15%. Donc, plus la vitesse d'injection est grande moins l'écart entre les vitesses moyennes augmente. Dans tous les cas, on confirme ainsi le régime d'écoulement évoluant localement à l'entrée et à la sortie est de nature turbulente en raison de l'aplatissement du profil des vitesses moyennes correspondant.

### IV.1.3. Temps de séjour

La figure, ci-dessous, représente la configuration du système d'écoulement considéré qui est caractérisé par les chemins  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$ . On suppose que chaque chemin correspond à un temps de séjour  $t$ , et que le fluide est animé initialement à une vitesse  $V_E$ . Il pénètre dans la cavité parallélépipédique par le haut et circule à travers un trajet  $l_1$  et un temps  $t_1$  en ressortant par

l'extrémité inférieure à une vitesse  $V_s$  et un temps  $t_3$ . Entre les deux plaques, l'écoulement s'écoule avec un temps  $t_2$ .



**Fig. IV.18. Configuration géométrique d'écoulement avec le temps de déplacement.**

On donne dans le tableau suivant les temps d'écoulement ou de séjour qui correspondent au différents nombre de Reynolds compris entre 500 et 700.

$t(s)$ Re	$t_1$	$t_2$	$t_3$
<b>500</b>	[0,03338-0,04398]	[0,14642-1,39932]	[0,38812-1,39932]
<b>600</b>	[0,02782-0,03663]	[0,54698-0,71899]	[0,31383-1,2376]
<b>700</b>	[0,02385-0,03139]	[0,02385-1,04436]	[0,27531-1,04436]

**Tableau. IV.3. Temps d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds.**

Pour Re fixé, par exemple  $Re=600$ , on a effectué la comparaison de ces données numérique sur les durées de séjour  $t_i$  avec le calcul analytique d'après Bejan. Ceci a permis de vérifier ces valeurs qui semblent être du même ordre de grandeur (précision 30%).

#### IV.1.4. Etude de facteur de forme $\phi_{opt}$

Le but consiste à trouver les dimensions optimales de la cellule de mesure en déterminant la hauteur ou l'épaisseur adéquate de la cavité liée au système d'écoulement considéré.

Dans cette partie, on examine le facteur de forme optimal en fonction du rapport des débits  $\beta$ . Pour cela, nous avons pris différentes hauteurs  $H$  de la cavité de Poiseuille mais pour une longueur  $L$  fixées.

Dans le cadre de nos investigations numériques on s'est intéressé plus particulièrement à l'évolution du facteur de forme  $\phi$  en fonction de la hauteur de la veine de mesure ; la plage de valeurs explorées s'étend de  $10\text{mm} \leq H \leq 450\text{mm}$ .

En pratique, on se donne la surface de débit ( $H, e$ ) et on fait varier le facteur de forme  $\phi_{opt}$ . Pour une vitesse d'entrée  $V_E=0.60\text{m/s}$ , la figure IV.20 représente la distribution du champ de vitesse pour chaque valeur de  $H$ .

La résolution numérique du problème a donné lieu au résultat suivant (Fig. IV.19).

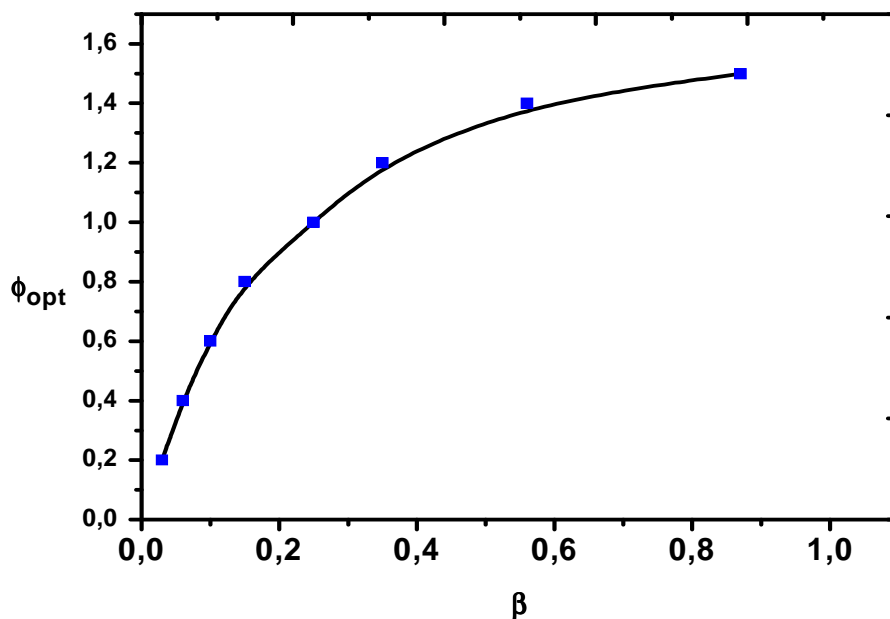


Figure .IV.19. Précision numérique du facteur de forme  $\phi$  en fonction du rapport des vitesses  $\beta$ .

L'analyse de l'allure de cette courbe permet de vérifier, au moins qualitativement, que l'évolution de facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  en fonction du rapport des débits est conforme à l'étude analytique.

En particulier, les variations de  $\phi_{opt}$  dans l'intervalle  $0 \leq \beta \leq 1$  s'étendent de 0 à 1.6 environ, valeur qui a été déjà établie analytiquement.

### Optimisations pour N=2 cellules

- De la même façon on vérifie bien que l'évolution de l'étude du facteur de forme  $\phi_{opt}$  en fonction de  $\beta$  obéit à la même loi pour N=2 cellules. On note que  $\phi_{opt}$  tend vers l'asymptote  $\phi_{opt} \approx 1.6$  dans les deux cas (analytique et numérique).

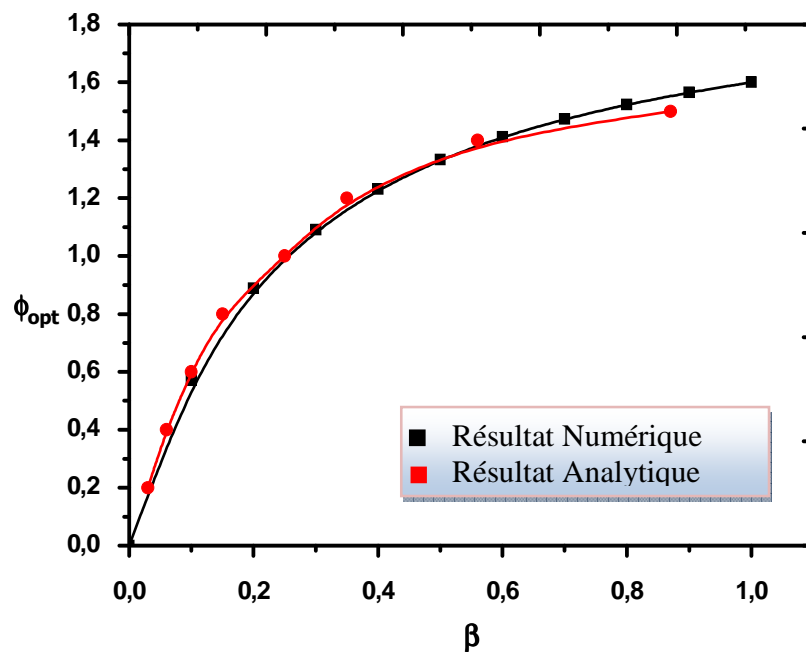


Figure .IV.20. Présentation comparative du facteur de forme optimal par les voies analytique et numérique en fonction de  $\beta$ . Cas d'une injection nulle  $\alpha=0^\circ$  et N=2cellules.

Par ailleurs, il est intéressant d'évaluer la précision de l'approche numérique par rapport à l'étude analytique. L'évaluation de l'erreur quadrique moyenne est estimée de la manière suivante :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}}$$

On effectue un calcul d'erreur basé sur n=9 données.

Soit :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_9^2}{9}}$$

$$\varepsilon = 2.7\%$$

Par conséquent la précision est inférieure à 3% ce qui signifie que la prédiction numérique permet de retrouver les résultats analytiques.

## Conclusion

Cette simulation de l'écoulement présentée a pour intérêt d'analyser qualitativement l'écoulement en régime laminaire évoluant dans un système d'écoulement de type Poiseuille.

Ce travail a permis de tracer l'allure du facteur de forme optimal  $\phi_{opt}$  en fonction du rapport de débit  $\beta$  et de l'angle d'injection  $\alpha$  du fluide et du nombre de cellules  $N$ .

Essentiellement cette simulation a permis de retrouver la précision analytique en l'absence de données expérimentales au regard de la précision des cellules obtenue.

En outre, il nous a donné la possibilité de généraliser cette investigation pour différents angles  $\alpha$  d'injection du fluide et rapport de débit  $\beta$ .

En particulier on a pu évaluer le nombre optimal de cellules ( $N=15$ ) pour un facteur de forme optimisé  $\phi_{opt} \approx 2$ .

# CONCLUSION GENERALE

## CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons tenté d'analyser le mouvement d'un fluide confiné entre deux plans parallèles soumis à l'influence de l'inclinaison  $\alpha$  de l'injection du fluide, du rapport des débits  $\beta$  pour un nombre  $N$  quelconque de cellules d'écoulement de Poiseuille.

L'analyse des principales contributions à la théorie de A.Bejan a révélé l'intérêt d'une observation expérimentale qui fait défaut pour consolider cette nouvelle approche au regard de l'existence d'un nombre considérable de modélisations.

C'est dans cet esprit qu'on a conçu et réalisé au laboratoire un dispositif expérimental approprié pour vérifier l'énoncé correspondant au Principe volume-point : le système d'écoulement à configuration parallélépipédique de Poiseuille en tant que procédé d'échanges de chaleur et de quantité de mouvement.

Préalablement, on s'est attaché à satisfaire toutes les exigences nécessaires aux conditions d'essais telles que les mesures de caractéristiques du fluide et de débit fonctionnant en régime laminaire de base. Le montage expérimental a donné satisfaction en tenant compte de la précision des mesures dans la plage d'incertitude admise.

Au plan théorique, on s'est intéressé d'abord à la formulation des équations générales du mouvement dans le but de déterminer le facteur de forme optimal lié aux processus de transfert de chaleur et de quantité de mouvement en fonction des paramètres de l'écoulement.

En se basant sur la théorie constructale d'A.Bejan, on a d'abord examiné l'évolution du facteur d'aspect du système d'écoulement étudié en fonction du rapport des vitesses d'entrée et de sortie du fluide. Actuellement, la plupart des travaux consacrés à ce nouveau domaine ont été menés dans le cadre des études d'optimisation dédiées au transfert thermique. Par contre, en hydrodynamique, l'effet d'angle d'injection du fluide  $\alpha$ , l'influence du nombre de plaques  $N$  et la variation du rapport des vitesses  $\beta$  sur l'écoulement n'ont pas été encore abordés. D'une façon générale, les études expérimentales consacrées à l'exploration des écoulements sont très rares, à notre connaissance.

En particulier, on a étudié notamment les effets combinés de l'inclinaison du fluide injecté et du rapport des vitesses d'écoulement sur l'évolution du facteur d'aspect dans la configuration parallélépipédique. Dans ces conditions, nous avons établi le système d'équations régissant cet écoulement. Notre démarche s'appuie alors sur une approche du

Principe constructal de type Volume-point. On a pu établir une solution analytique qui détermine le facteur de forme optimal et vérifiant les hypothèses de travail dans le système d'écoulement précédemment adopté.

On a regroupé l'ensemble des résultats sous forme de courbes optimisées du facteur de forme  $\phi_{opt} = \phi_{opt}(N)$  que l'on a discuté en fonction des différentes valeurs du rapport des vitesses  $\beta$  dans l'intervalle considéré  $0.1 < \beta < 1$  et pour un angle d'injection :  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

L'examen de l'évolution correspondante de  $\phi_{opt}$  montre que le rapport des vitesses n'a pas d'influence lorsque le débit de sortie correspond à la moitié du débit d'entrée ( $\beta=1/2$ ). Au-delà  $\beta>1/2$ , il y a une tendance à saturation du transfert de quantité de mouvement lorsque on atteint  $\phi_{opt} = 2$ .

Il est remarquable de noter que l'on obtient cette valeur asymptotique  $\phi_{opt} = 2$  si  $N>2$  pour un angle  $\alpha$  d'injection du fluide nulle, alors que cette valeur ne peut être atteinte que si  $N>30$  en cas d'injection  $\alpha$  du fluide non nulle. De ce qui précède, nos résultats suggèrent donc qu'un nombre de cellules limité, environ  $N=15$  cellules, est suffisant pour assurer un bon transfert de quantité de mouvement si  $\alpha=0^\circ$ .

L'ensemble des résultats précédents permet de fournir des propriétés intéressantes pour réaliser des assemblages adéquats composés de  $N$  cellules visant à l'optimisation des transferts de quantité de mouvement et éventuellement de chaleur.

Afin d'élargir notre domaine d'investigation théorique, une étude numérique a été réalisée à l'aide du code de calcul FLUENT pour examiner l'effet de la hauteur de la cavité ou cellule de mesure en vue d'une optimisation du transfert.

Après avoir mis au point le code de calcul selon le maillage adéquat dans l'approximation bidimensionnelle, on a pu déterminer la loi de distribution du champ des vitesses moyennes en régime laminaire stable.

La validation des calculs numériques s'est faite sur la base de l'établissement du champ moyen de forme parabolique avec vérification de la vitesse maximale sur l'axe qui est proche de la réalité expérimentale.

Cette simulation a permis de mettre en évidence la structure du mouvement au sein de la cavité et de préciser ses conditions particulières de fonctionnement en raison de l'existence de

tourbillons secondaires à l'entrée et à la sortie et la forme dissymétrique du mouvement obtenue dont la veine principale est située vers la paroi inférieure.

C'est dans ces conditions qu'on a pu évaluer  $\phi_{opt}$  pour une configuration donnée (H,L) et un nombre de Reynolds Re correspondant au régime laminaire de base.

L'ensemble de ces simulations directes de l'écoulement a permis d'évaluer  $\phi_{opt}$  et a révélé certains détails de la structure du mouvement qui va d'ailleurs se compliquer davantage lorsque on aborde l'étude d'un système d'échangeurs à N cellules.

En revanche, la méthode de Bejan fournit analytiquement, globalement et directement le résultat recherché quel que soit le nombre de cellules N pour  $\alpha, \beta$  et un nombre de Reynolds Re donné.

Au stade actuel, la confrontation des calculs analytiques et de simulation suggère que les principaux résultats sont en bons accords (précision inférieure à 3% environ). Toutefois, il est nécessaire de les vérifier dans les deux cas avec l'expérience surtout lorsque le nombre de cellules N augmente considérablement et pour lequel on ne dispose pas d'information précises.

La perspective que l'on peut donner à ce travail consiste donc à vérifier expérimentalement l'ensemble des résultats précédents à partir du dispositif ainsi réalisé au Laboratoire. En raison de la souplesse de conception de celui-ci, on peut l'adapter à n'importe quelle cellule de mesure de configuration géométrique donnée (parallélépipédique, cylindrique, conique) et tenant compte du système d'échangeurs plus ou moins complexes (montage à N cellules en série, parallèle, mixte).

REFERENCES  
BIBLIOGRAPHIQUES

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **A. Bejan** : « Shape and Structure from Engineering to Nature » (2000), Cambridge University Press.
- [2] **J.P. Baquiast** : « Pour un principe matérialiste fort », chapitre II, Edition Bayol (2005).
- [3] **H. Poirier**: «Une Théorie explique l'Intelligence de la Nature». Interview avec A. Bejan, Science & Vie, No. 1034, Novembre (2003), pp. 44-63.
- [4] **A. Bejan and S. Lorente** : « The constructal law of design and evolution in nature », , 1335-1347 365 (2010) Phil. Trans. R. Soc. B.
- [5] **A. Bejan, Y.Ikegami, G.A.Ledezma** : «Constructal theory of natural crack pattern formation for fastest cooling»,Int.J .Heat Mass transfer,Vol.41,(1998),pp.1945-1954.
- [6] **A. Bejan, W. Wechsatoł, S. Lorente**: «Optimal tree-shaped networks for fluid flow in a disc-shaped body», Int. J. Heat Mass Transfer 45 (2002) 4911–4924.
- [7] **S. Lorente, W. Wechsatoł, A. Bejan** : T«ree-shaped flow structures designed by minimizing path lengths», Int. J. Heat Mass Transfer 45 (2002) 3299–3312.
- [8] **A. Bejan, L.A.O. Rocha, S. Lorente** : «Thermodynamic optimization of geometry: T- and Y-shaped constructs of fluid streams, Int. J. Therm. Sci. 39 (2000) 949–960.
- [9] **A. Bejan and S. Lorente** : «The constructal law and the thermodynamics of flow systems with configuration», International Journal of Heat and Mass Transfer 47 (2004) 3203–3214.
- [10] **A. Bejan,I.Dincer,S. Lorente,A.F.Migue,A.H.Reis** : «Porous and Complex Flow Structure in modern Technologies»,Spriger-Verlag,New York ;2004.
- [11] **A Bejan** : Int. J. Heat Mass Transfer 40 (1997) 799-816.
- [12] **A. Bejan and S. Lorente** : «Constructal tree-shaped flow structures», Applied Thermal Engineering 27 (2007) 755–761.
- [13] **S. Lorente, W. Wechsatoł, A. Bejan** : «Tree-shaped flow structures designed by minimizing path lengths», Int. J. Heat Mass Transfer 45 (2002) 3299–3312.
- [14] **G.A. Ledezma, A. Bejan, M.R. Errera**:Constructal tree tworks for heat transfer», J. Appl. Phys. 82 (1997) 89–100.
- [15] **A. Bejan and S. Lorente** : «The constructal law and the thermodynamics of flow systems with configuration», Int. J. Heat Mass Transfer 47 (2004) 3203–3214.
- [16] **A.Bejan and S.Lorent**: «The constructal Law» (2004).
- [17] **A.Bejan and Sylvie Lorente** : «Constructal theory of generation of configuration in nature and engineering», journal of applied physics 100, 041301 (2006).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [18] **A. Bejan** : «Constructal tree network for fluid flow between a finite-size volume and one source or sink», *Int. J. Heat Mass Transfer* 36(1997) 592-604.
- [19] **A. Bejan** : «Street network theory of organization in nature», *J. Adv. Transportation*(1996)30, 85-107
- [20] **S. Sieniutycz** : «Dynamic programming approach to a Fermat-type principle for heat flow», *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000), pp. 3453–3468 .
- [21] **A. Bejan**: «Constructal comment on a Fermat-type principle for heat Flow», *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46 (2003) 1885–1886 .
- [22] **A. Bejan**: «Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume». *Int. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997), pp. 799–816 .
- [23] **A. Bejan** : «Advanced Engineering Thermodynamics», second ed.Wiley, New York, 1997.
- [24] **D.S.Lemmons**,*Perfect Form*,Princeton Univ.Press.Princeton,NJ,1997.
- [25] **A. Bejan** : «How nature takes shape :extensions of constructal theory to ducts, rivers, turbulence, cracks, dendritic crystals, and spatial economics»,*Int.J.Therm.Sci.(Rev.Gen Ther)* vol.38,1999,pp.653-663.
- [26] **A. Bejan** : «Convection Heat transfer,2<sup>nd</sup> ed,Wiley, New York, 1995.
- [27] **A.K.da Silva, Adrian Bejan** : «Constructal multi-scale structure for maximal heat transfer density in natural convection», *International Journal of Heat and Fluid Flow* 26 (2005) 34–44.
- [28] **A. Bejan and N. Dan** : «Constructal trees of convective fins», *J Heat Transfer Trans ASME* 121 (3) (1999), pp. 675–682.
- [29] **M.R.Errera and A. Bejan** : Deterministic tree networks for river drainage basins», *Fractals*,Vol.6, 1998,pp.245-261.
- [30] **A.Bejan,V.Badescu,A.De Vos** : «Constructal theory of economics structure generation in space and time», *Energy Convers. Manage*, Vol.41,2000,pp.1429-1451.
- [31] **C.D. Murray** : «The physiological principle of minimal work in the vascular system, and the cost of blood-volume», *Proc. Acad. Natl. Sci.* 12 (1926) 207–214.
- [32] **C.D. Murray** : «The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries», *J. Gen. Physiol.* 9 (1926) 835–841.
- [33] **D’A.W. Thompson** : «On Growth and Form», Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1942.
- [34] **T.A. Wilson** : «Design of the bronchial tree», *Nature (London)* 213 (1967) 668–669.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [35] **G.A. Ledezma and A.Bejan** : «Streets tree networks and urban growth: Optimal geometry for quickest access between a finite-size volume and one point», *Physica A* 255 (1998).211-217.
- [36] **A. Bejan** : «Constructal theory of pattern formation, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 11, 753–768, 2007.
- [37] **M.Almogbel and A.Bejan** : «Conduction trees with spacings at the tips», *Int J Heat Mass Transfer* 42 (20) (1999), pp. 3739–3756.
- [38] **L.Ghodoossi** : «Conceptual study on constructal theory, *Energy Conversion and Management* 45 (2004) 1379–1395.
- [39] **M. Almogbel and A. Bejan** : «Constructal optimization of nonuniformly distributed tree-shaped flow structures for conduction», *Int J Heat Mass Transfer* 44 (22) (2001), pp. 4185–4194
- [40] **R.Revelin,J.R.Thome,A.Bejan,J.Bonjour** : «Constructal tree shaped microchannel networks for maximizing the saturated critical heat flux»,*Int.J.Therm.Sci*,vol 48no2pp342-352,Feb 2009.
- [41] **J. Bonjour, L.A.O. Rocha, A. Bejan and F. Meunier** : «Dendritic fins optimization for a coaxial two-stream heat exchanger». *Int. Heat Mass Transfer* 47 (2004), pp. 111–124.
- [42] **L.A.O. Rocha, S. Lorente, A. Bejan** : Constructal design for cooling a disc-shaped area by conduction», *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45 (2002) 1643–1652
- [43] **A.K. da Silva, C. Vasile, A. Bejan** : «Disc cooled with high-conductivity inserts that extend inward from the perimeter», *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 4257–4263.
- [44] **G.A. Ledezma and A. Bejan** : «Constructal three-dimensional trees for conduction between a volume and one point», *J.Heat Transfer*, Vol.120,1998,pp.977-984.
- [45] **M. Almogbel and A. Bejan** : «Cylindrical trees of pin fins», *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43 (2000) 4285-297.
- [46] **A. Bejan and M.R.Errera** : «Convective trees of fluid channels for volumetric cooling», *Int.J.Heat Mass Transfer*, Vol.43,2000,pp.3105-3118.
- [47] **A. Heitor Reis, Adrian Bejan** : «Constructal theory of global circulation and climate», *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49 (2006) 1857–1875.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [48] **A. Mahfoud, H.Oualli, A.Bouabdallah** : « Effets de la mise en régime des vitesses sur les conditions d'apparition des instabilité et de la turbulence entre deux cylindres coaxiaux» Février 2007.
- [49] **A. Bejan** : «Designed porous media: Maximal heat transfer density at decreasing length scales», *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 3073–3083.
- [50] **Y.S. Muzychka** : «Constructal multi-scale design of compact micro-tube heat sinks and heat exchangers», *International Journal of Thermal Sciences* 46 (2007) 245–252.
- [51] **Y .Azoumah, N. Mazet, P. Neveu** : «Constructal network for heat and mass transfer in a solid-gas reactive porous medium», *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 pp.2961-2970, 2004.
- [52] **Y .Azoumah, P. Neveu, N. Mazet**: «Constructal design combined with entropy generation minimization method for solid-gas reactors» Soumis en février 2005 à *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [53] **Y. Zhang and S. Liu** : « Design of conducting paths based on topology optimization», *Heat Mass Transfer* DOI 10.1007/s00231-007-0365-1.
- [54] **Z.Z. Xia, Z.X. Li, Z.Y. Guo**: Heat conduction optimization: high-conductivity constructs based on the principle biological evolution», in: *Heat transfer 2002*, pp. 27–32.
- [55] **Z.Y. Guo, X.G. Cheng and Z.Z. Xia**: «Least dissipation principle of heat transport potential capacity and its application in heat conduction optimization», *Chin. Sci. Bull.* 48 (2003) (4), pp. 406–410.
- [56] **X.G. Cheng, Z.X. Li and Z.Y. Guo**: «Construct of highly effective heat transport paths by bionic optimization», *Sci. China (Ser. E)* 46 (2003) (3), pp. 296–302.
- [57] **X. Xu, X. Liang, J.Ren**: «Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume50,Issues9-10, May2007,Pages1675-1682.
- [58] **Adrian Bejan and Daniel Tondeur** : «Equipartition, optimal allocation, and the constructal approach to predicting organization in nature; *Rev Gin Therm (I 998)* 37, 165-1 80.
- [59] **D. Tondeur, L. Luo , H. Le Gall, S. Corbel** : «Constructal approach and multi-scale components», *Applied Thermal Engineering* 27 (2007) 1708–1714.
- [60] **A. K. da Silva, Adrian Bejan** : «Dendritic counterflow heat exchanger experiments » , *International Journal of Thermal Sciences* 45 (2006) 860–869.
- [61] **F.Yahi et A. Bouabdallah** : « Etude Théorique et Expérimentale de phénomènes de Transitions Laminaire-Turbulent dans l'écoulement entre cônes coaxiaux en rotation» Juin 2009.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [62] **M.Lebbi, H.Oualli, A.Bouabdallah:** « Simulation Numérique de l'Influence des Vibrations Radial sur les instabilités dans le système Taylor-Couette » Mars 2008.
- [63] **A. Mahfoud, H.Oualli, A.Bouabdallah :** « Effets de la mise en régime des vitesses sur les conditions d'apparition des instabilité et de la turbulence entre deux cylindres coaxiaux» Février 2007.
- [64] **S.V.Patankar :** « Numerical Heat Transfer and fluid flow » , Taylor and Francis 1980.
- [65] **B.rouby:** « influence du mouvement d'une structure sur le developpement de la couche limite», 1997 - 1998.