

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DES SCIENCES DE LA TERRE, GEOGRAPHIE ET AMENAGEMENT DU TERRITOIRE.
(FSTGAT)



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR
En : S.T.G.A.T

Spécialité : GEOLOGIE MINIERE

Par

Abdelhakim LAZOUNI

THEME

**ETUDE DE MODELES DE REPARTITION
QUANTITATIVE ET QUALITATIVE D'UN GISEMENT
AURIFERE: CAS DU GISEMENT D'AMESMESSA**

Soutenue publiquement le 06/ 01/ 2014, devant le jury composé de :

A. BOUTALEB	Professeur, à l'USTH	Présidente
H. BENALI	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
D-E. AISSA	Professeur à l'USTHB	Examineur
M-S. GUETOUCHE	Professeur à l'USTHB	Examineur
S. DJEMAI	Maitre de conférence /A, à l'USTHB	Examineur
B. HENNI	Maitre de conférence/ A, à l'ENS- KOUBA	Examineur

Avant –propos

Arrivant au terme de ce travail de thèse, qu'il me soit permis de remercier et d'exprimer ma gratitude envers le tout puissant ALLAH.

En second lieu, j'exprime ma profonde gratitude à mes parents; je leurs dois, parmi tant d'autres choses, d'avoir su me faire aimer la vie, les sciences et le respect de l'autrui. J'espère, que je serai toujours à la hauteur de leurs espérances.

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance et mes vifs remerciements à Monsieur BENALI Hanafi (professeur à l'USTHB/FSTGAT ALGER) directeur de ma thèse, qu'il trouve ici l'expression de mon respect et ma profonde reconnaissance. Qui tout au long de ce travail de thèse et des difficultés rencontrées, s'est montré très disponible et serviable. Ses conseils, ses orientations, ainsi que son implication direct dans la thèse ont permis son aboutissement avec pour chaque thème une validation expérimentale.

Aussi, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur D.E. AISSA (professeur à l'USTHB/FSTGAT ALGER) pour deux choses ; d'abord pour avoir été à l'origine du thème de recherche et de m'avoir encadré au début de ma thèse, je lui témoigne ma profonde reconnaissance. Deuxièmement, pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse.

Un grand remerciement à Monsieur MARIGNAC C professeur au CRPG pour l'accueil chaleureux et les facilités qu'il m'a accordé lors de mon séjour au CRPG à NANCY France.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur JJ ROYER Professeur à CESEV pour avoir initié et conduit mes premiers pas dans la Géostatistique et pour le temps qu'il m'a consacré.

Mes remerciements vont à Monsieur BOUTALEB A (Professeur à l'USTHB / FSTGAT ALGER) pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

A Messieurs GUETOUCHE M-S, DJEMAI S, HENNI B, d'avoir accepté d'examiner et de juger ce travail, je les remercie et leur suis très reconnaissant.

Je ne peux m'empêcher, de remercier tous ceux qui ont contribué de loin ou de près afin que ce travail puisse voir le jour.

Finalement, je ne sais par quelle mots, ni par quelle langue, je pourrai remercier ma femme, et lui témoigner ma gratitude, pour m'avoir soutenu et pour avoir été très patiente, tout au long de la durée de préparation de ce travail de thèse.

RESUME

Le gisement aurifère d'Amessmassa est situé dans le SW du Hoggar. Il est représenté par des lentilles et filons lenticulaires de quartz, encaissés essentiellement dans des mylonites-ultramylonites, soulignant une méga-shearzone. Celle-ci, représente la zone de cisaillement 2°30 Est Ouzzalienne, qui sépare le terrane d'In Ouzzal, à l'Ouest, du terrane de Tirek. Ces filons sont caractérisés par une très grande irrégularité dans la morphologie, la puissance, et surtout dans la distribution de l'or. En plus, certaines zones bérésitisées (altération hydrothermale à quartz-carbonates-séricite-pyrite) supposées riches en minéralisation, sont dénuées d'or. Cette dispersion de l'or dans les filons, ainsi que la difficulté de cerner l'ampleur de son auréole de diffusion dans les roches encaissantes, pose un sérieux problème de calcul des réserves, le bon choix de la méthode d'exploitation et la bonne conduite des travaux d'exploitation. Afin de palier à ces difficultés, une étude statistique et géostatistique a été entreprise.

L'étude statistique des paramètres (teneur et puissance) des corps minéralisés de la zone 8 d'Amessmassa, a permis de montrer que la teneur suit le modèle de dispersion selon la loi log normal, alors que la puissance suit le modèle de la loi normal.

L'étude géostatistique (variogrammes et krigeage) des variables régionales (puissance, teneur) de la zone étudiée, montre que la minéralisation présente une morphologie lenticulaire. La localisation des lentilles aurifères est décelée par les cartes d'isoteneur et d'isopuissance. Ces cartes ont été établies suivant un plan de projection vertical, des intersections des sondages avec la minéralisation. La minéralisation étant sub-verticale, l'erreur induite par cette projection est insignifiante.

L'observation des cartes d'isoteneur et d'isopuissance, montre que la minéralisation se présente sous forme de lentilles dont les plus riches se situent près de la surface.

SOMMAIRE

Partie 1: Introduction générale

Chapitre I: Introduction	2
1) Introduction	2
2) Plan de travail	2
3) Aperçu géographique de la région	3
4) Historique sommaire des travaux antérieurs	4
Chapitre II: Géologie du Hoggar	6
1) Les différents modes de subdivision du Hoggar	4
1-1) première subdivision	6
1-1-a) Le cycle suggarien	6
1-1-b) Le cycle pharusien	6
1-2) Deuxième subdivision	6
1-2-a) Le Hoggar occidental:	7
1-2-b) Le Hoggar central:	8
1-2-c) Le Hoggar Oriental	9
1-3) La troisième subdivision	9
1-3-1) les terranes	9
1-3-1-a) Les terranes occidentaux :	10
1-3-1-b) Les terranes centraux	11
1-3-1-c) Les terranes orientaux	11
2) Les minéralisations Aurifères du Hoggar	11
Chapitre III: LE Mole In-Ouzzal	
1) Géologie du Mole In-Ouzzal	13
1-1) Les orthogneiss et les granites charnockitiques	13
1-2) Les formations supracrustales	13
1-3) Les carbonatites et les syénites	15
1-4) Les granites du cycle panafricain	15
2) La zone de cisaillement Est-Ouzzalienne (ZCEO)	17
2-1) Les ultramylonites	17
2-2) Les mylonites et les protomylonites	17
2-3) Les roches magmatiques	17
3) Le Gisement d'Or d'Amesmess	19
4) Les filons de quartz et la minéralisation	20
5) Altérations hydrothermales et minéralisation aurifère	22

Partie 2: Etude statistique **23**

Chapitre I: Généralités **24**

1) Introduction	24
2) Objectif de la statistique	24
3) Vocabulaire de la statistique	25

Chapitre II: Statistique descriptive **26**

1) caractéristiques des distributions	26
1 1) Forme de l'histogramme	26
1 2) La Tendance centrale	27
1 3) Les Quantiles	27
1 4) Les Quartiles	27
1 5) les Déciles	28
1 6) La Dispersion	28
1 6 1) La Variance	28

1 6 2) L'écart type S	28
1 7) Coefficient de variation	29
1 8) Caractéristiques de forme ou coefficients de Fisher	29
1 8 1) Le coefficient Skewness (Le coefficient d'asymétrie)	29
1 8 2) Le coefficient de Kurtosis (Le coefficient d'aplatissement)	30
Chapitre III: La Statistique inductive	32
1) L'Estimation d'une population	28
1 1) L'inférence statistique	28
2) Notion de probabilité	32
2 1) Densités de probabilité	33
2 2) La Moyenne d'une population	34
2 3) La variance de la population	34
3 Loi de probabilité d'une population	34
3 1) La Fonction de répartitions	34
3 1 1) Le modèle de la loi normale	35
3 1 1 1) La Loi normale réduite	36
3 1 1 2) La loi log-normale (loi de Galton)	37
4) Espérance mathématique et variance	38
4 1) L'Opérateur espérance mathématique	39
4 2) La Variance	40
4 3) La Covariance	40
4 4) Coefficient de Corrélation	41
5) Calcule des paramètres d'une population	42
5 1) l'Estimation de la moyenne d'une population	42
5 2) Loi des grands nombres	44
5 3) L'Intervalle de confiance	45
5 4) Le biais	46
5 5) l'estimation d'une variance	47
6) Test de normalité	48
6 1) Hypothèse Test de χ^2	48
6 2) Test de χ^2	49
Chapitre IV: Application à la minéralisation aurifère de la zone 8 d'Amesmessa	51
1) Historique du projet	51
2) Plan d'échantillonnage	51
3 Statistique descriptive de la teneur	54
3 1) Les Statistiques de la teneur	54
3 2) Histogramme de la distribution	56
4) Statistique Inductive (probabiliste)	56
4 1) Modèle de distribution log-normal	56
4 1 1) Les Statistiques des valeurs en logarithmes	57
4 1 2) Histogramme et modèle de distribution	57
4 2) Test χ^2	60
5) Statistiques descriptive de la puissance des corps minéralisés	61

5 1) Les Statistiques de la variable puissance	61
5 2) Histogramme de la distribution	61
6) Etude des corrélations	62
6 1) la corrélation entre teneur et puissance	62
6 2) la corrélation entre teneur et la cote Z	62
Partie 3: Etude Géostatistique	64
Chapitre I	65
1) Introduction	65
2) Notions de base en géostatistique	66
2 1) Les variables régionalisées et fonctions aléatoires	66
2 2) Support et champ	67
2 3) Hypothèses de travail	67
2 3 1) Hypothèses de stationnarité	68
2 3 2) Stationnarité du second ordre	68
Chapitre II: L'Etude variographique	69
1) Introduction	69
2) Le Variogramme et le Covariogramme	69
3) Propriétés du Variogramme et du Covariogramme	70
4) Analyse structurale	71
5) Variogramme expérimental	73
6) Les Anisotropies	74
6 1) L'Anisotropie Géométrique	75
6 2) L'Anisotropie Zonale	76
7) Les Variogrammes théoriques et modélisation:	76
8) Relation entre variance et support de meure	79
8 1) Variance de blocs et de dispersion	79
8 2) Variance d'estimation et d'extension	81
8 2 1) Calcul des quantités $\bar{\gamma}(x_i, v)$ et $\bar{\gamma}(v, v)$	81
8 3) Combinaison d'erreurs élémentaires pour une estimation globale	81
8 3 1) Cas d'un échantillonnage régulier	82
8 3 2) Cas d'un échantillonnage aléatoire à densité uniforme (maille aléatoire stratifiée)	82
8 3 3) Cas d'un échantillonnage quelconque	82
Chapitre III: Le Krigeage	84
1) Introduction	84
2) Le Krigeage ordinaire	84
3) Le Krigeage simple	86
4) Propriétés du Krigeage	87
5) la Validation croisée	87
Chapitre IV: Application à la minéralisation aurifère de la zone 8 d'Amesmes	89
1) La variographie de la teneur	89
1 1) Le Variogramme expérimental de la teneur	89

1 2) Le modèle théorique d'ajustement	91
2) Le Variogramme de surface	91
3) La Validation croisée	94
4) La Variographie de la puissance de la minéralisation	95
4 1) Le Variogramme expérimental de la puissance	95
4 2) Le modèle théorique d'ajustement	96
5) Le krigeage	96
5 1) Krigeage et cartographie de la teneur	96
5 2) Krigeage et cartographie de la variable puissance	98
6) Comparaison entre l'estimation par krigeage et celle par triangulation	100
Conclusion générale	102
Bibliographie	103
Annexe	

Partie 1

Introduction générale

CHAPITRE I : INTRODUCTION

Introduction

Cette thèse tente de se pencher sur l'étude de la distribution des paramètres (teneur et puissance) de la minéralisation aurifère d'Amesmess. Plus précisément, la zone 8 située dans la zone centrale d'Amesmess. Cette minéralisation est caractérisée par une très grande irrégularité dans la morphologie, la puissance, et surtout dans la distribution de l'or. Cette complexité aura des répercussions négatives sur les différentes étapes du processus de l'exploitation telle que:

- La surestimation ou la sous-estimation des réserves et donc l'obtention des réserves erronées
- Mauvais choix de la méthode d'exploitation du gisement.
- Non respect de la cadence d'exploitation
- Faible possibilité, de mener une exploitation sélective des blocs.

Les exemples cités ci-dessus ont des répercussions négatives sur l'investissement, l'amortissement et surtout sur le prix de revient de la tonne de minerai.

Pour toutes les raisons évoquées ci-dessus, il est impératif de connaître le détail de la distribution spatiale de la minéralisation et c'est bien le but de cette thèse

1) Plan de la thèse

Cette étude est structurée en trois parties.

- **la Première partie** est consacrée à la présentation d'une synthèse de la géologie et de la géologie de la région.
- **la deuxième partie** a pour objectif de déterminer le modèle mathématique de la distribution statistique de la teneur et de la puissance. Cette étape est impérative pour déterminer les paramètres essentiels d'une distribution statistique, en l'occurrence la moyenne et la variance de la variable étudiée. Cette étape, permet également de vérifier s'il s'agit d'une minéralisation homogène ou hétérogène et donc s'il s'agit d'une minéralisation à une seule génération ou multiple. Cette partie de l'étude est divisée en deux volets : le volet théorie de la statistique et l'autre volet, une application sur la minéralisation de la zone 8.
- **la troisième partie** concerne l'étude géostatistique des deux variables citées ci-dessus. Lors de cette étude, les variables étudiées sont dites régionalisées ; ceci dit, chaque

valeur prise par la variable doit être repérée dans l'espace, c'est-à-dire géoréférencée. Le but de ce travail, est d'estimer la valeur de la variable en tout point de l'espace occupé par la minéralisation, sans qu'on ait à faire un prélèvement ou un sondage. Vérifier si la répartition de la minéralisation est la même dans toutes les directions, afin de constater s'il y a une isotropie ou une anisotropie. Pour atteindre cet objectif, la géostatistique exige le passage par deux étapes essentielles: la première étape est l'étude de la variographie, qui permet de déterminer la distance maximale au delà de laquelle, les valeurs deviennent indépendantes. Cette distance appelée la portée, doit être vérifiée pour différentes directions, c'est la condition qui permet de vérifier l'isotropie (ou l'anisotropie). Dans le cas d'une anisotropie, il faut chercher la direction préférentielle de la mise en place de la minéralisation. La deuxième étape est celle d'estimations des valeurs, pour différents points de l'espace, réalisée par une méthode d'estimation, appelée Krigeage. Les avantages de cette méthode résident dans le fait que :

- 1) Le Krigeage est le meilleur estimateur linéaire sans biais
- 2) Chaque valeur estimée est associée à une valeur de la variance d'estimation, ce qui permet de vérifier la précision de l'estimation
- 3) La possibilité de cartographier les paramètres étudiés, en l'occurrence, la teneur et la puissance, par la réalisation des courbes d'isoteneur.

A cet effet, il existe plusieurs logiciels, on peut citer, a titre exemple : le Surfer, ou le Vertical Mapper, comme étant un module du logiciel Mapinfo. Ce dernier, est un logiciel très utilisé pour la réalisation des SIG (système d'information informatique).

3) Aperçu Géographique de la région

Le gisement aurifère d'Amesmessas se situe à l'extrême sud du pays, à 400 km environ de la ville de Tamanrasset (Figure (I-1)). Les coordonnées de son centre sont : 2°29' E et 20°59'.

Le relief est représenté par un plateau désertique fortement raviné par les Oueds. Il n'y a pas de cours d'eau permanent dans la région; les points d'eau les plus proches sont localisés au pied des Tassilis de Timissaou, situé à 100-120 km au Nord Est du gisement.



Figure (I-1) : Carte de situation géographique du district aurifère Tirek-Amesmessas.

Le climat est aride et sec, nettement continental. Les précipitations sont relativement faibles, mais peuvent être fortes après une longue période de sécheresse. La température subit d'importants écarts entre le jour et la nuit, et varie selon les saisons. Les vents de sable sévissent surtout au mois de Mars et Avril.

2) Historique sommaire des travaux antérieurs

Les premières études géologiques menées sur le territoire du Hoggar occidental remontent aux années 1920, et leurs exécutions étaient assurées par les Français. Des indices de cuivre (Cu), de plomb (Pb), et de zinc (Zn) ont été mis en évidence, mais n'ont reçu que des appréciations négatives (chett-iller, Tetencoul, Echchekal).

Depuis l'indépendance à ce jour, les nombreux travaux effectués par l'équipe de la

S.O.N.A.R.E.M. (devenue E.R.E.M. puis O.R.G.M.) dans le Hoggar occidental ont permis la découverte de plusieurs gisements et indices aurifères, tels que Kiouéne, In Allarène nord (Tirek), In Allarène sud, Timeg, Dherreg, Amesmessa etc.

Plusieurs travaux académiques ont été réalisés dans cette partie du Hoggar (Aïssa et Bedouhene, 1984 ; Haddoum et al.; 1994 ; Semiani, 1995; Marignac et al., 1996; Ouzegane et al., 1996 ; Djemai, 1996; Attoum, 1983; Bendaoud, 2008 ; Aïssa et al., 2002 ; Ferkous et Monié, 2002), ces travaux ont permis de préciser la géologie et la géologie d’In Ouzzal et de ces environs.

CHAPITRE II GEOLOGIE DU HOGGAR

1) Les différents modes de subdivision du Hoggar

1-1) première subdivision

La première subdivision du Hoggar à été proposée par Lelubre (1952) qui identifie deux cycles orogéniques séparés par une nette discordance majeure :

1-1-a) Le cycle suggarien à la base comprenant deux ensembles d'âge Paléoprotérozoïque essentiellement gneissiques, polycycliques et fortement métamorphiques. Le premier ensemble gneissique est constitué d'orthogneiss et de rares méta-sédiments (série Arechchoum), le second ensemble gneissique se superpose au premier, il est à dominance méta-sédimentaire (Série Egéré ou Aleksod).

1-1-b) Le cycle pharusien est d'âge Néoprotérozoïque, il surmonte le premier cycle. Il est également constitué de deux ensembles qui sont ici volcano-sédimentaires, moins métamorphiques et monocycliques.

1-2) Deuxième subdivision

La seconde subdivision du Hoggar est l'œuvre de Bertrand et Caby (1978) dont les travaux menés sur l'ensemble du Hoggar ont permis d'établir une véritable subdivision litho-stratigraphique et structurale. Pour ces auteurs, le Hoggar est une juxtaposition de compartiments longitudinaux, qui montrent des caractéristiques géologiques (lithologiques, métamorphiques, structurales et géochronologiques) différentes. Il est subdivisé en trois domaines disposés N-S Figure (I-2) résultant d'un serrage E-W extrême vers 600 M.a. entre deux plaques rigides (les cratons Est et Ouest africain). Ces trois domaines séparés par deux accidents transcurrents majeurs subméridiens ($8^{\circ}30'$ et $4^{\circ}50'$) sont: Le Hoggar oriental ; le Hoggar central ; et le Hoggar occidental.

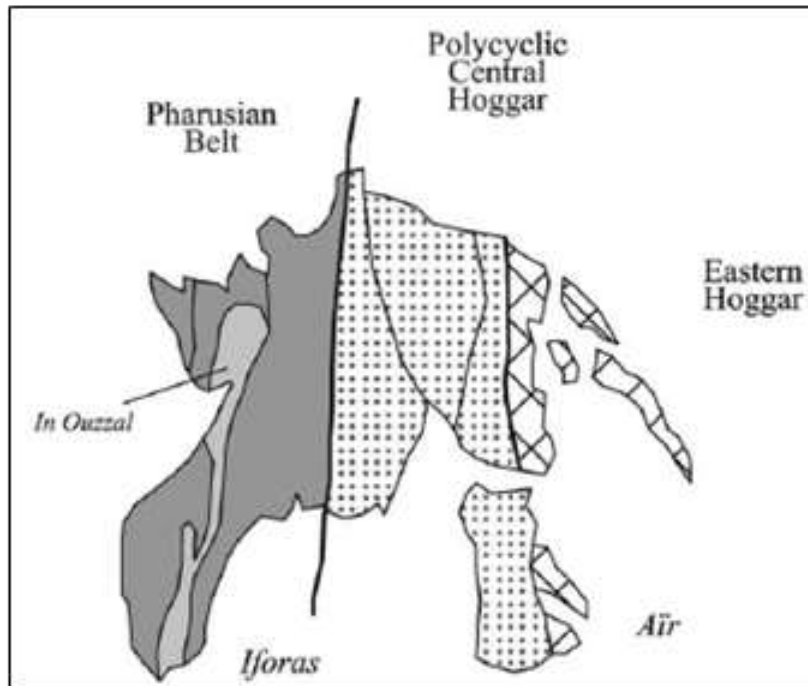


Figure (I-2) : Subdivision structurale du bouclier Touareg (Bertrand et Caby, 1978 ; Liégeois et al., 2003)

1-2-a) Le Hoggar occidental

Encore appelé "chaîne pharusienne", est un équivalent local de la chaîne panafricaine. Il est limité à l'ouest par la suture avec le craton ouest africain, et à l'Est par le grand accident décrochant du 4°50' Figure (I-3).

L'ensemble est séparé par le **môle In Ouzzal** en deux (02) rameaux: **rameau occidental** de la chaîne pharusienne (Bertrand 1966) et **rameau central** qui correspond au "fossé central Pharusien" (caby. 1968) ou fossé de l'Ahaggar Centro-occidental" (Gravelle., 1969).

Le môle in Ouzzal est caractérisé par des gneiss variés à faciès granulite et des charnockites recoupés par des granitoïdes et des roches pégmatoïdes.

Le complexe catazonal est surmonté d'ignimbrites rhyolitiques, terstratifiées dans les termes de base de la série pourprée (R.caby, 1970).

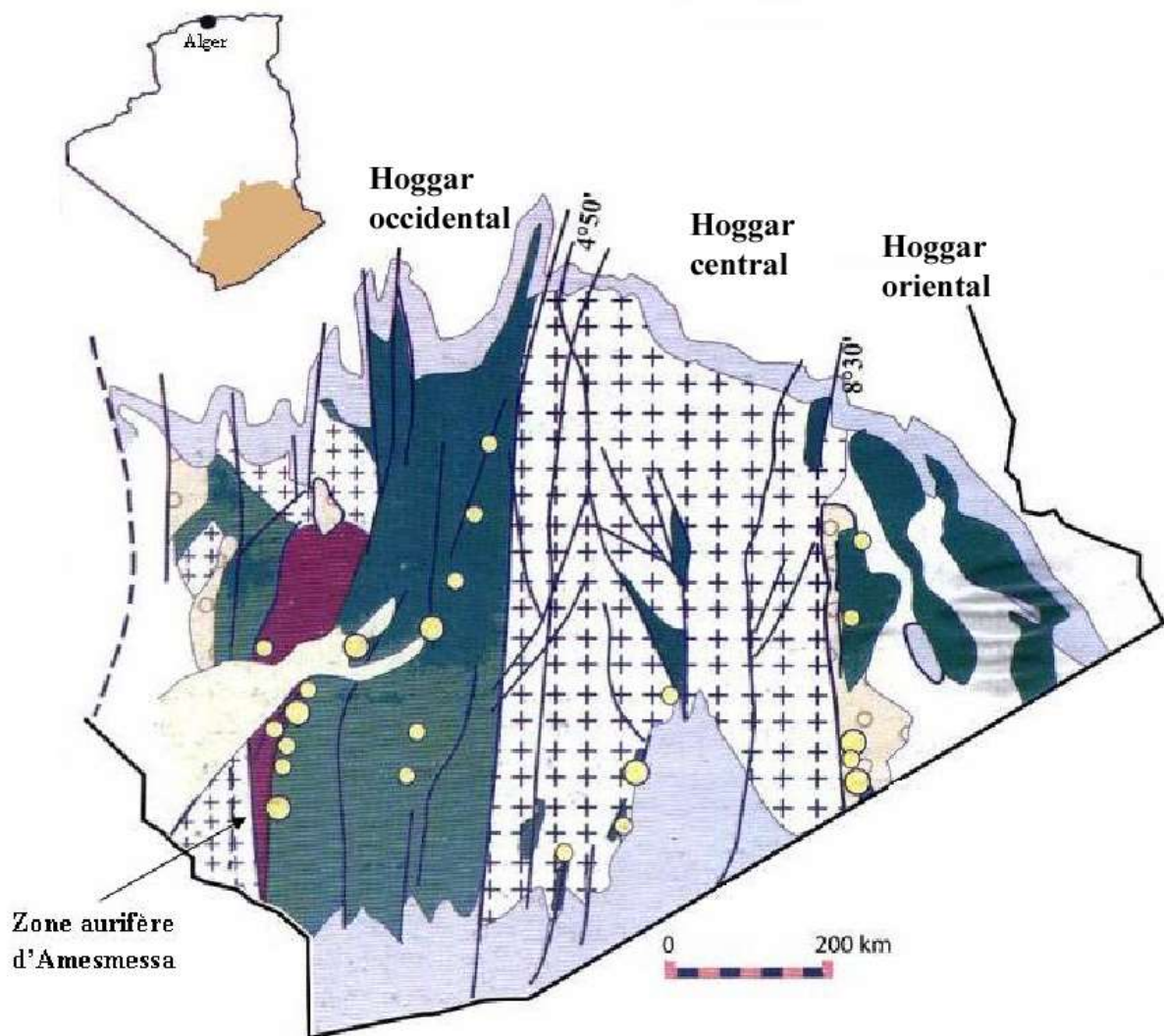


Figure (I-3) : Carte géologique schématique montrant la structuration longitudinale du Hoggar avec localisation des gîtes et indices d'or (Semiani et al. 2004)

1-2-b) Le Hoggar central

Le Hoggar central est limité à l'ouest par l'accident $4^{\circ}50'$ et à l'Est par l'accident $8^{\circ}30'$. Il comporte essentiellement des formations d'âge protérozoïque inférieur et Archéen. On y distingue deux séries types qui sont:

- La série de l'Arechchoum composée d'orthogneiss tonalitiques ou granitiques formant des gneiss rubanés et homogènes, avec parfois des gneiss œillés et de rares métasédiments. Les roches dominantes sont des gneiss gris à grains fins.
- La série de l'Aleksod repose en discordance sur la série précédente et représente une série métasédimentaire de plate-forme ; composée de quartzites, marbres, métapelites et roches volcano-détritiques, le tout associé à un grand volume de roches basiques et de migmatites granodioritiques. Cette série est déformée et métamorphisée dans le faciès amphibolite.

Les formations volcano-détritiques du Protérozoïque supérieur, généralement en contact

tectonique avec les terrains précédents, sont déformées et métamorphisées dans le faciès schistes verts et présentent les mêmes caractéristiques que leurs analogues affleurant dans le Hoggar occidental.

1-2-c) Le Hoggar Oriental

Le Hoggar Oriental est situé à l'est de l'accident 8°30' Il est caractérisé par l'existence de deux socles séparés par un rameau linéaire très étroit (la chaîne Tiririnienne) ainsi que la prédominance de terrains d'âge protérozoïque supérieur.

La série de Tiririne longe la bordure occidentale de la zone de cisaillement 8°30'. La sédimentation de cette série combine des caractères molassiques (arkoses et conglomérats) et des caractères plus nettement orogéniques (faciès flychoïdes).

Le socle de l'Ouest (môle Issalane) est en contact anormal avec la série de Tiririne. Le métamorphisme original de haut grade de ce socle s'efface au profit d'une rétro-morphose en faciès schistes verts. Un âge ponctuel de 3,3 Ga. (Latouche et Vidal, 1974) indique l'existence de protolithes archéens dans ce socle.

Le socle de l'Est (formation de Tafassasset-Djanet) est métamorphisé dans le faciès schistes verts et supporte en discordance la série de Tiririne. Il est caractérisé par un grand développement de granodiorites tardi-tectoniques.

1-3) La troisième subdivision

1-3-1) les terranes

La troisième subdivision du Hoggar est due à Black et al. (1994).

Cette subdivision est basée sur le concept d'assemblage de micro-plaques tectoniques qui donneraient naissance par leur assemblage à une chaîne orogénique. 23 terranes ont été identifiés dans le bouclier Touareg (Hoggar, Adrar des Iforas et Aïr) (Figure (I-4)).

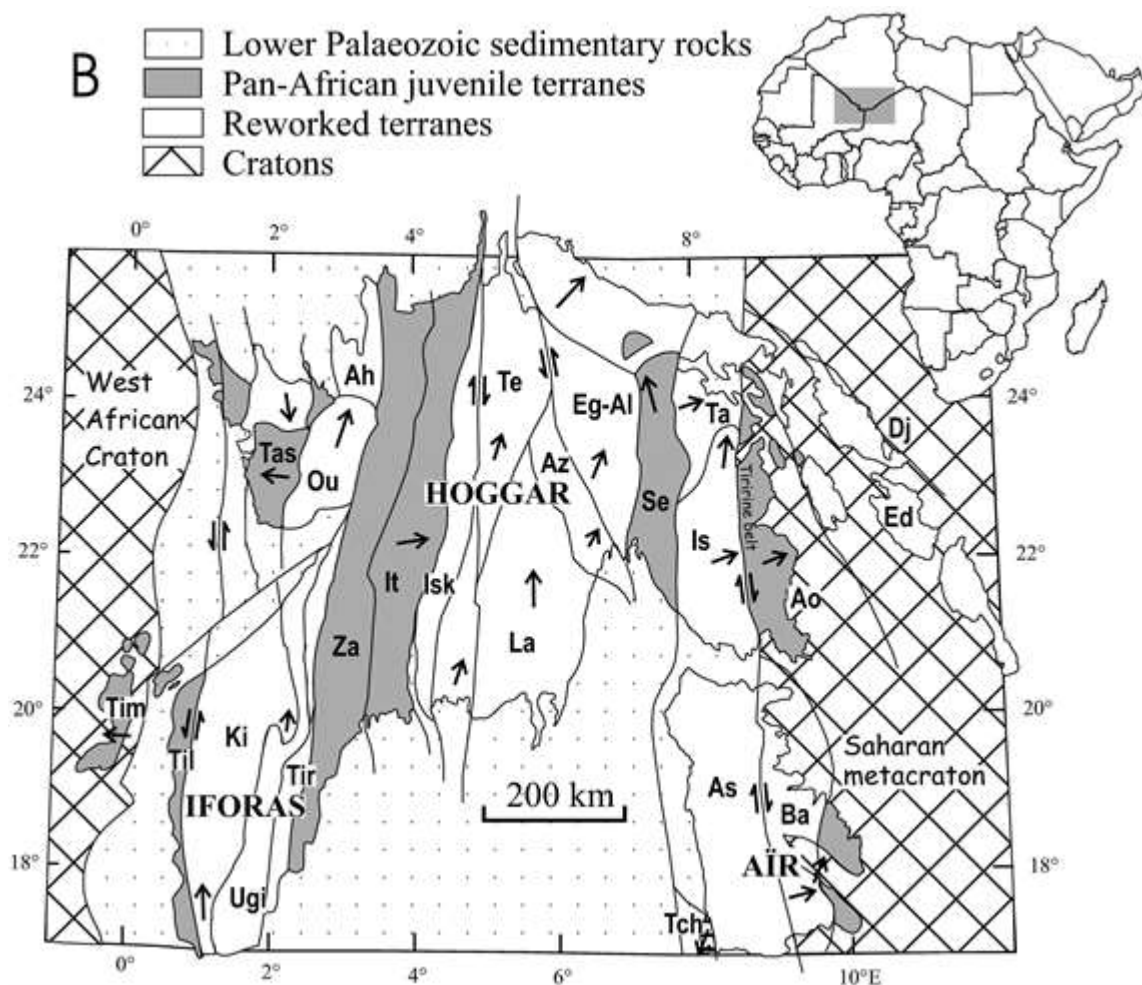


Figure.(I-4) : Carte des terranes du bouclier Touareg (Black et al., 1994 ; Liégeois et al., 2003). Djanet (**Dj**), Edembo (**Ed**), Aouzegueur (**Ao**), Barghot (**Ba**), Assodé-Issalane (**As-Is**), Tchilit (**Tch**), Tazat (**Ta**), Serouenout (**Se**), Egéré-Aleksod (**Eg-Al**), Azrou-n-Fad (**Az**), Tefedest (**Te**), Laouni (**La**), Iskel (**Isk**), In Teidini (**It**), Tin Zaouatene (**Za**), Tirek (**Tir**), Ahnet (**Ah**), In Ouzzal (**Ou**), Iforas granulitic unit (**Ugi**), Tassendjanet (**Tas**), Kidal (**Ki**), Tilemsi (**Til**), Timetrine (**Tim**).

Ces terranes sont regroupés dans le Hoggar en terranes occidentaux, centraux et orientaux (Caby, 2003), on distingue de l'Ouest vers l'Est

1-3-1-a) Les terranes occidentaux

Ces terranes correspondent au Hoggar occidental limité à l'Est par l'accident mylonitique majeur 4°50. Ils forment la chaîne «pharusienne» constituée de deux branches ; occidentale et orientale, séparées par les unités granulitiques archéennes Iforas-In Ouzzal.

La branche occidentale est située entre la zone d'accrétion de Tilemsi et l'accident majeur 2°30 (faille de l'Adrar) et comprend les terranes In Ouzzal-Iforas, Kidal-Tirek, Tassendjanet et Ahnet.

La branche orientale est située entre la faille de l'Adrar ($2^{\circ}30'$) et l'accident $4^{\circ}50'$. Elle aux terranes de Tin Zaouatene - In Tedeini et Iskel.

1-3-1- b) Les terranes centraux

Ils correspondent au Hoggar central polycyclique et môle Issalane, limités par les deux accidents mylonitiques $4^{\circ}50'$ et $8^{\circ}30'$. Ils englobent les terranes formant le métacrâton LATEA (Laouni, Azrou –N-Fad, Tefedest, Egéré et Aleksod) et les terranes de Serouenout, Tazat, Issalane et Assodé.

1-3-1-c) Les terranes orientaux

Le Hoggar oriental est formé de quatre terranes qui sont d'est à Barghot, Aouzegueur, Edembo et Djanet. Ces terranes forment un bloc cratonisé à 730 Ma (Caby et al., 1987).

2) Les minéralisations aurifères du Hoggar

Le Hoggar présente une forte densité de minéralisations aurifères. Ces concentrations sont d'âge tardi à postpanafricain. Elles sont contrôlées par les grands accidents majeurs qui séparent les terranes anciens (archéens et éburnéen) des terranes panafricains Figure (I-5).

Il y'a 4 principales provinces aurifères dans le Hoggar :

- La province du Hoggar oriental (province tirrorinienne)
- La province de Laouni-In Abeggui.
- La province de Timgaouine-Tesnou.
- La province ouzzalienne.

Le gisement d'Amesmessa se situe au sud de la province aurifère ouzzalienne, sur la zone de cisaillement est-ouzzalienne (accident $2^{\circ}30'$). Les coordonnées de son centre sont : $2^{\circ}29'E$ et $20^{\circ}59'N$. La faible épaisseur et la discontinuité des zones minéralisées ainsi que l'irrégularité de la distribution de la minéralisation rendent l'estimation des ressources difficile.

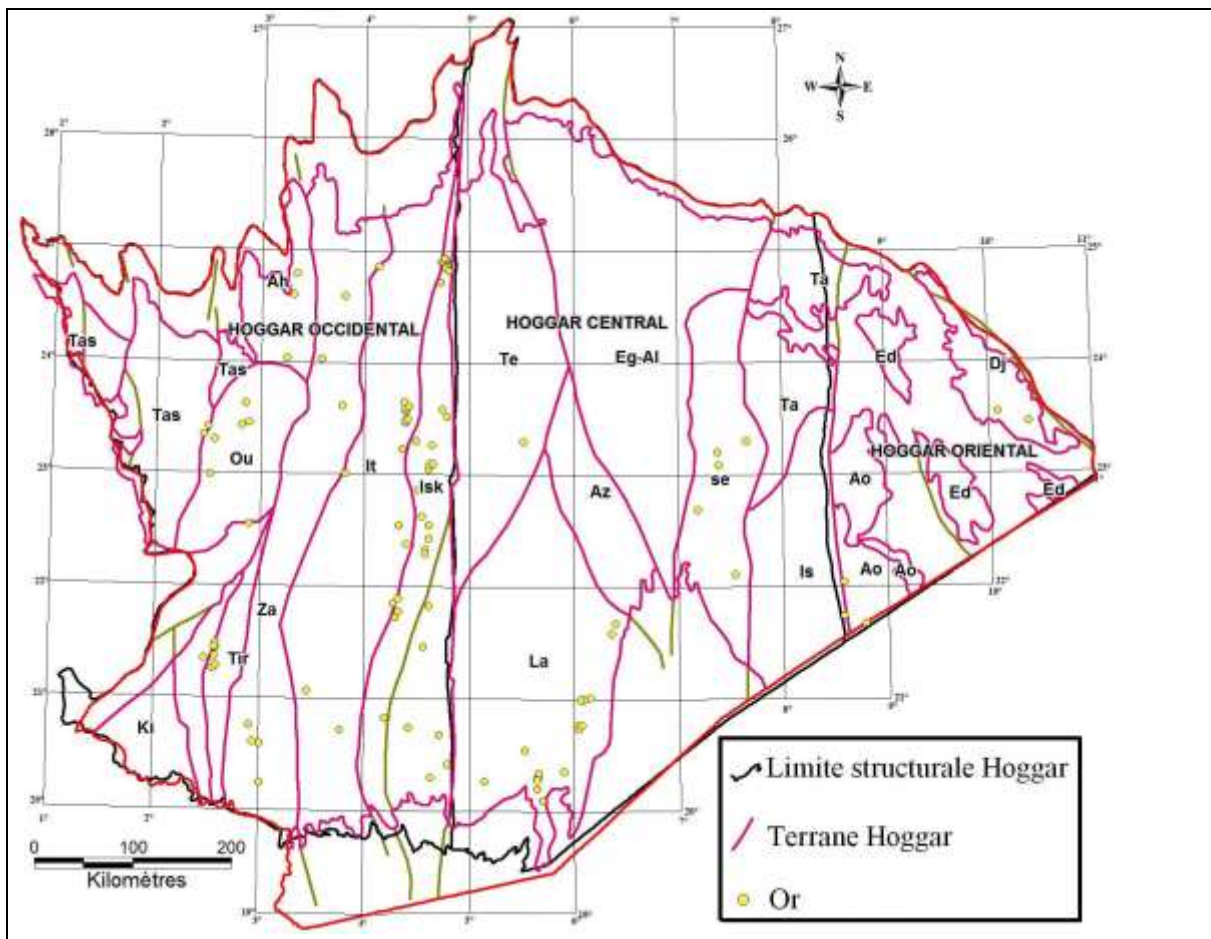


Figure (I-5) : Répartition des minéralisations aurifères dans le massif du Hoggar (Guessoum2012)

CHAPITRE III LE MOLE IN-OUZZAL

1) Géologie du Mole In-Ouzzal

Le môle In-Ouzzal est constitué de matériaux essentiellement d'âge Archéen et Protérozoïque inférieur. C'est un compartiment en forme triangulaire long de 450 Km et large dans sa partie septentrional d'environ 80 Km Figure (I-6). Il est limité à l'Est et à l'Ouest par des zones de cisaillement dont les derniers jeux, respectivement dextre et sénestre, compatibles avec la remontée vers le nord du môle ont été acquis vers la fin de l'évènement tectono-métamorphique panafricain (Caby, 1970 ; Attoum, 1983 ; Haddoum, 1993).

Les roches du môle In-Ouzzal peuvent être regroupées en plusieurs ensembles distincts du point de vue lithologique :

1-1) Les orthogneiss et les granites charnockitiques :

Cet ensemble, très diversifié, constitue l'essentiel des formations affleurantes Figure (I-7). Haddoum et al. (1994) distinguent trois différentes familles :

- Les orthogneiss granulitiques γ_0 forment des structures en dômes gneissiques d'allure sigmoïdale ; ce sont des roches granitiques et tonalitiques à foliation pénétrative bien marquée, affectées localement par une migmatisation.

- Les orthogneiss granulitiques γ_1 présentent une composition identique aux orthogneiss granulitiques γ_0 . Ils sont le plus souvent rencontrés en position interne dans de vastes structures sigmoïdes, moulés par la foliation des orthogneiss γ_0 .

- Les granites charnockitiques γ_2 diffèrent des roches des deux premières familles par leur faciès pegmatoïdique et leur caractère plus ou moins sécant sur la foliation gneissique. Ces roches sont tardi à post cinématique éburnéenne et contiennent un quartz bleu, caractéristique d'une cristallisation en faciès granulite.

1-2) Les formations supracrustales

Ce sont essentiellement des métapélites granulitiques, des quartzites, des granulites alumino-magnésiennes, des marbres à olivine-spinelle et de rares niveaux de quartzites à magnétite (métaBIFs). En plus de ces roches paradérivées, on rencontre, parfois, des pyrigarnites et des cumulats basiques et ultrabasiques riches en spinelle. Ces formations affleurent le plus souvent dans de petits synformes coincés entre des lentilles sigmoïdes de granito-gneiss. Ces séries sont le plus souvent l'hôte de minéralisations aurifères (A. Semiani, 1995).

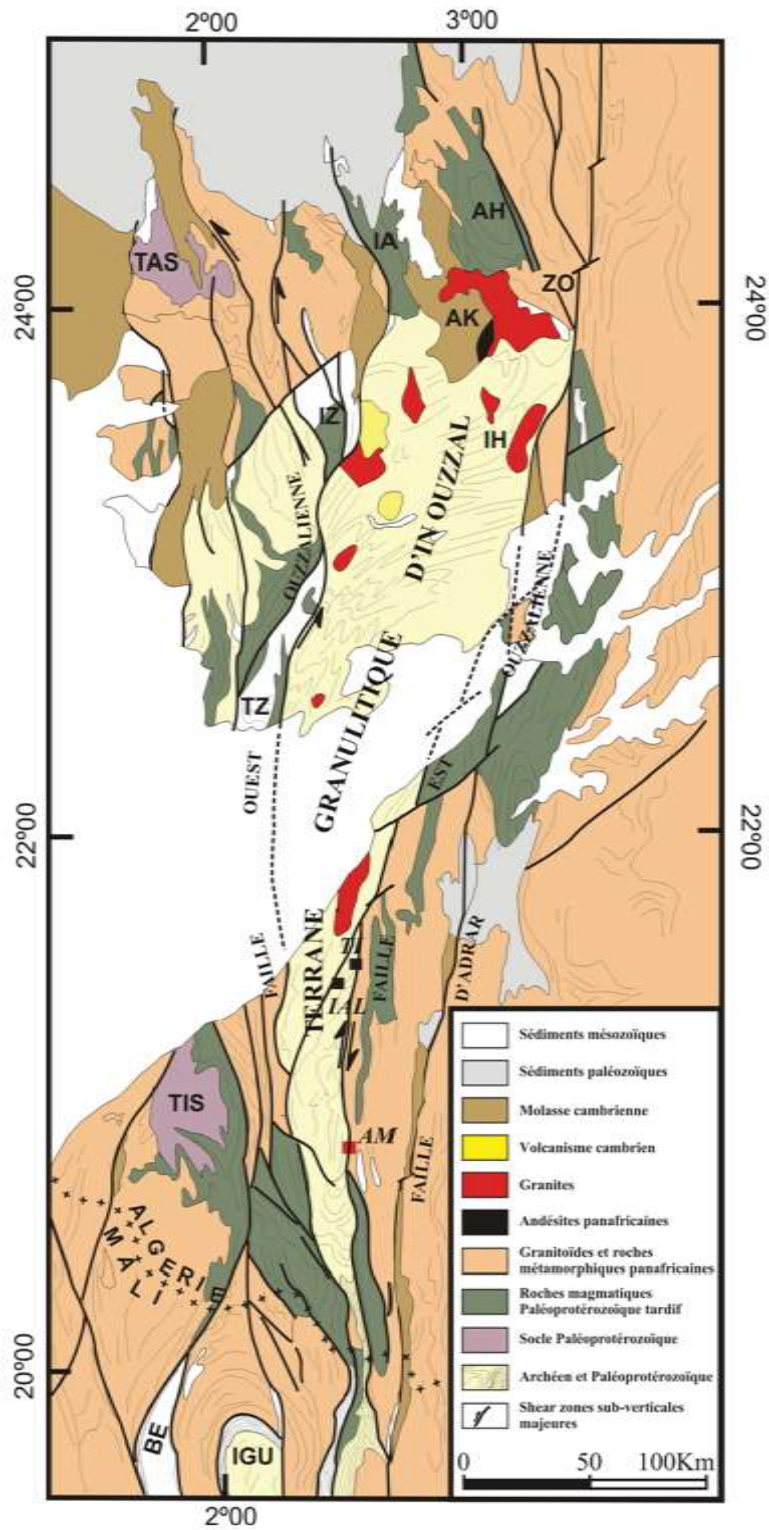


Figure (I-6) : Carte géologique schématique du terrane de l'In Ouzal et des régions avoisinantes (Caby, 1996, in Djemai 2008). **AM**: Mine d'or Amesmesa, **TI**: Mine d'or de Tirek, **IAL**: In Allarene, **IH**: Ihouhaouène.

1-3) Les carbonatites et les syénites

Vers la fin de l'événement éburnéen des intrusions de carbonatites et de syénites se mettent en place dans le môle In-Ouzzal (Bertrand, Griffiths et al., 1988).

Les intrusions de carbonatites affleurent dans la partie nord du môle In-Ouzzal. Leur mise en place, ainsi que celle des syénites s'est faite vers la fin de l'Eburnéen.

Deux types de syénites sont observés au niveau de l'In Ouzzal. Les premières, liées aux carbonatites, résultent de la fénitisation (transformation métasomatique) des roches encaissant ces dernières. Le deuxième type est lié aux formations supracrustales. Ce sont des syénites magmatiques intrusives qui affleurent surtout dans le sud du môle In-Ouzzal.

1-4) Les granites du cycle panafricain:

Ce sont des granites hypovolcaniques calco-alcalins potassiques, à tendance alcaline. Ils sont accompagnés parfois de venues effusives (rhyo-ignimbrites d'In-Hihaou/In-zize, de Nahalet), notamment dans sa partie Nord. Ces granites sont tout à fait comparables aux granites « Taourirt ». Leur âge de mise en place exact est mal connu mais pourrait se situer dans la période tardive du cycle panafricain par analogie avec les granites « Taourirt ».

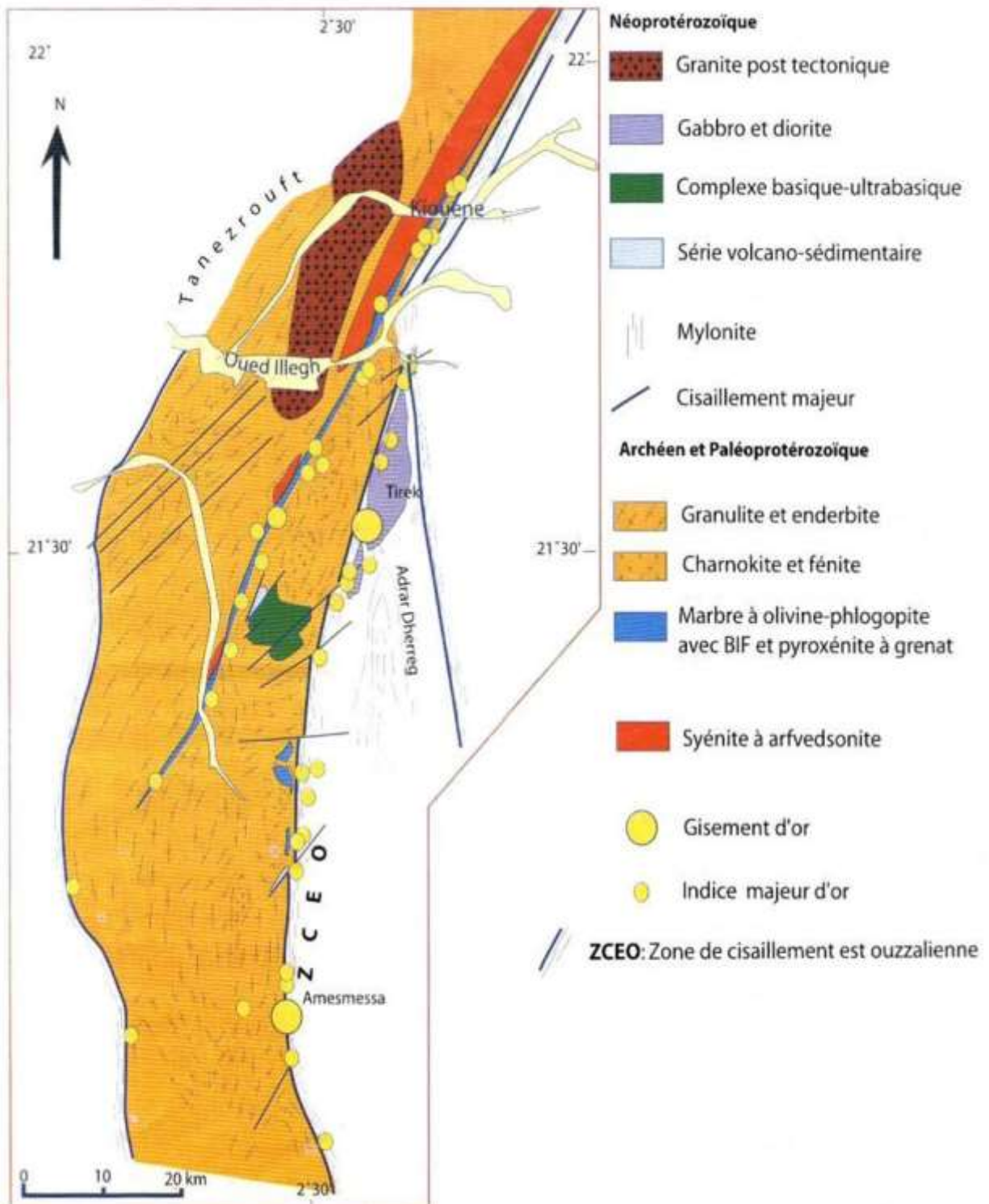


Figure (I-7): Carte géologique du sud du môle In Ouzal avec la position des indices et gisements d'or. (A. Semiani, M. Bellal, A. Bennouh - 2004)

2) La zone de cisaillement Est-Ouzzalienne (ZCEO)

Les faciès rencontrés dans cette zone vont des roches intensément déformées (ultramylonites) à des roches beaucoup moins déformées (protomylonites) associées à différentes intrusions magmatiques Figure (I- 8) (Semiani, 1995 - Ferkous, 1996).

2-1) Les ultramylonites :

Ce sont les roches qui encaissent les filons de quartz aurifères. On distingue d'Ouest en Est trois faciès principaux représentés par (Ferkous, 1996) :

- ultramylonites noires riches en biotite et extrêmement déformées.
- ultramylonites beiges moins riches en biotite et moins déformées.
- ultramylonites noires riches en pyrite et moins déformées.

Les deux derniers faciès constituent des unités lenticulaires qui peuvent être bordées par des ultramylonites noires riches en biotite (Ferkous, 1996).

2-2) Les mylonites et les protomylonites :

Elles sont présentes dans la partie Est de la zone de cisaillement, associées à des roches magmatiques (Semiani, 1995 - Ferkous, 1996).

Les mylonites sont finement laminées et présentent des structures fluidales le long de plans de cisaillement (Ferkous, 1996).

Les protomylonites se présentent sous forme de lentilles cohérentes, où les structures originelles des gneiss Protérozoïques sont préservées (Ferkous, 1996).

On observe à proximité des ultramylonites des affleurements de gneiss et de méta-diorites foliés. Les diorites contiennent une biotite magmatique auréolée d'une biotite fine néoformée (syncinématique) (Ferkous, 1996).

2-3) Les roches magmatiques :

La zone de cisaillement Est-Ouzzalienne est marquée par la mise en place de roches magmatiques, en corps intrusif ou en dykes. Les structures de déformation ductile qui affectent ces roches suggèrent une mise en place syncinématique (Attoum, 1983).

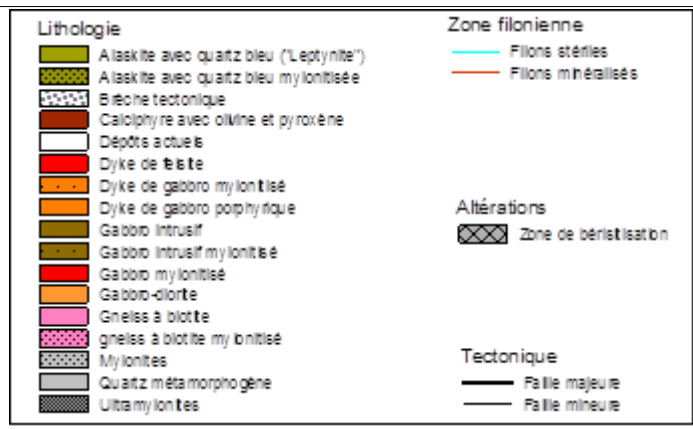


Figure (I- 8) : Carte géologique de la zone centrale du gisement aurifère d'Amesmesa, d'après le rapport de l'ORGM (campagne 1990-1993) e : 1/40000

Le développement des intrusions basiques et intermédiaires est particulièrement important à la jonction des gisements de Tirek et Amesmessa et leur degré de déformation s'intensifie du Nord au Sud. Aux limites du gisement d'Amesmessa seuls quelques boudins ont échappés à la déformation. Les anomalies magnétométriques mises en évidence lors d'une campagne de prospection par l'ORGM coïncident avec des gabbros entièrement mylonitisés (Semiani, 1995). Dans le domaine mylonitique, les intrusions présentent des faciès non déformés localement plissés, foliés et étirés et c'est à l'approche du domaine ultramylonitique qu'elles se dilacèrent progressivement puis se déforment et s'incorporent aux ultramylonites (Ferkous, 1996).

3) Le Gisement d'Or d'Amesmessa

L'indice aurifère d'Amesmessa Figure (I-9) est particulièrement intéressant; il a été exploré en profondeur et les réserves géologiques calculées s'élèvent à plusieurs dizaines de tonnes par km vers le nord, à titre indicatif, les réserves d'or de l'indice de Tirek (ATTOUM 1983.), sont quatre fois moins importantes.

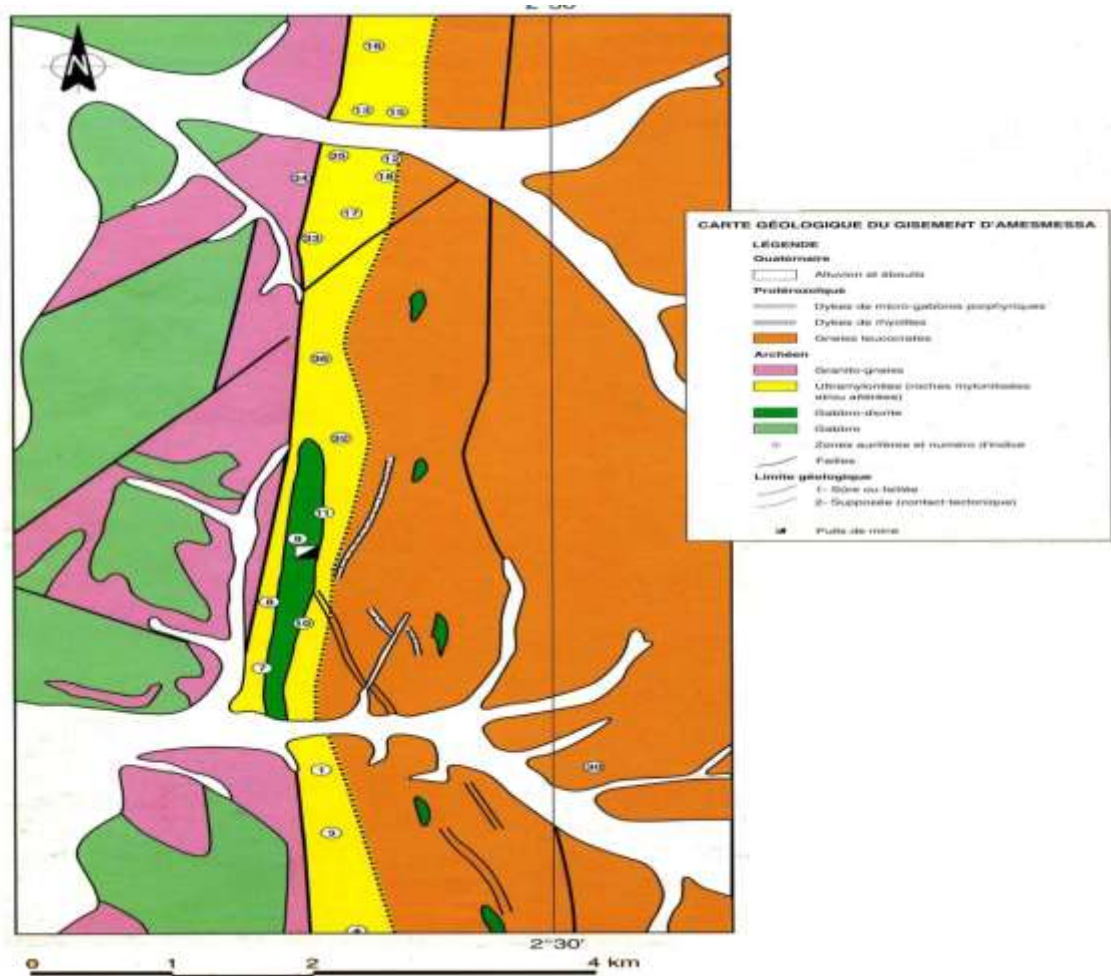


Figure (I- 9) : Carte géologique du gisement d'Amesmessa d'après le rapport O.R.G.M/ENOR, 1992.

4) Les filons de quartz et la minéralisation:

La minéralisation aurifère à Amesmessa est du type filonien, les filons de quartz renfermant de l'or économique sont de direction N-S et sont encaissés dans l'unité ultramylonitique ou le long de sa bordure ouest avec le complexe archéen Figure (I-10).

Hormis cette étroite zone ultramylonitique favorable, l'unité mylonitique et le bloc protérozoïque dont les filons de quartz sont de direction E-W sont pauvres en or.

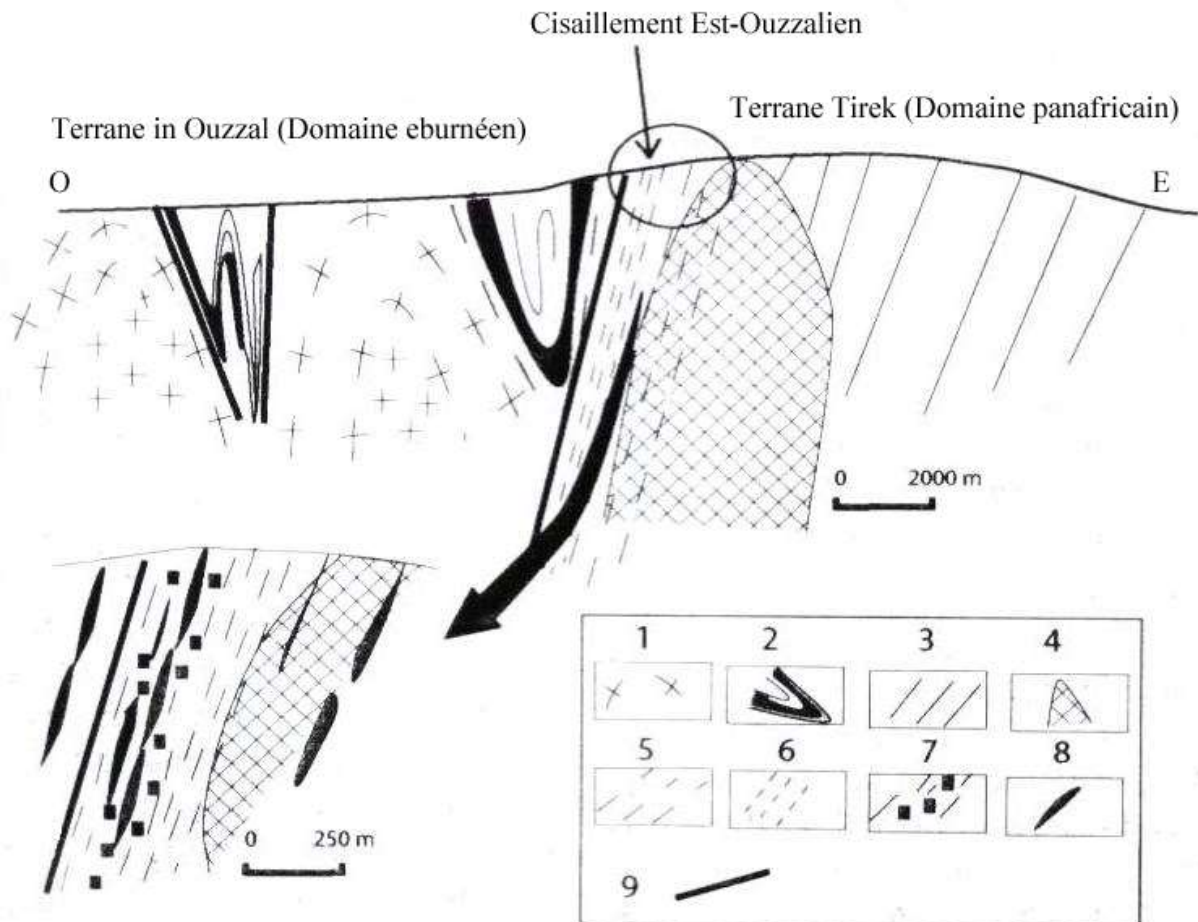


Figure (I-10) : Coupe géologique montrant la position des filons d'or par rapport aux terranes d'In Ouzzal et Tirek (A. Semiani, M. Bellal, A. Bennouh, 2004).

Archéen : 1 Dôme gneiss - charnockite. 2 Formation supracrustale.

Mésoprotérozoïque : 3 Quartzite - amphibolite – marbre gneiss.

Néoprotérozoïque : 4 Gabbro. 5 Mylonite. 6 Ultramylonite. 7 Roches silicifiées, pyritisée, séricitisées et carbonatisées. 8 Veine de quartz aurifère 9 Cisaillement majeur.

Les minéraux métallifères sont rares (maximum 3%), ils sont concentrés dans les rubans de quartz gris-sombre.

L'association minérale est constituée par ordre décroissant de pyrite, de galène, d'or natif, est de sphalérite.

Les sulfures de cuivre sont rares et ceux d'arsenic sont inexistants.

Dans la zone de bordure archéenne, les filons sont légèrement riches en sulfures, tandis que dans le bloc protérozoïque, les filons de quartz aurifères ne contiennent que des pyrites.

La pyrite se présente soit sous de cristaux automorphes isolés de quelques mm à quelques cm ou en agrégat.

La galène est sous forme de petits cristaux automorphes remplissant les cavités de dissolution le long des plans intergranulaires des fractures tardives.

La sphalérite est très rare et est associée à la galène.

L'or natif est souvent présent le long ou dans les imperfections de la galène et les zones riches sont généralement rencontrés dans les parties de filons de quartz où la galène est relativement plus abondante.

L'or apparaît soit sous forme de petites paillettes intergranulaires, à l'intérieur des rubans de quartz finement grenus. Les paillettes sont de l'ordre de 0,1 à 1,5 mm et montrent des surfaces de cisaillement striées. Il peut également se présenter en microgranules recouvrant les cristaux de quartz idiomorphes dans les cavités de dissolution tardives et montrent quelques faces cristallines.

Les deux types renferment des teneurs similaires en argent (8 à 10 % de volume de Ag).

La minéralisation aurifère disparaît lorsque le filon sort des limites de la bande mylonitique et c'est une observation valable pour tous les filons NE-SW tout au long de la zone de cisaillement Est-Ouzzalienne (FERKOUS, 1991)

L'indice aurifère d'Amesmes compte plusieurs filons dénombrés qui se distinguent par leurs morphologie et orientations diverses.

Ces filons qui sont encaissés dans des ultramylonites et parfois dans les gneiss protérozoïques forment généralement un réseau dense avec des puissances variant de l'échelle centimétrique au mètre pour des extensions latérales pouvant atteindre 1000 m.

La forme générale des filons est lenticulaire présentant des gonflements au cœur des filons et des rétrécissements à leurs extrémités. Les filons sont généralement fracturés et diaclasés, ils se présentent en séries de filons de quartz discontinus qui se rejoignent, par endroit, pour constituer un seul filon. Les filons se disposent en échelon parallèle à sub-parallèles, en chapelets, ou en essaims et présentent des rétrécissements et des renflements en direction.

Les directions des filons minéralisés dans l'ensemble, se répartissent suivant 3 directions : N-S, NE-SW et E-W.

Le pendage est variable parfois même au sein d'un même il est en moyenne de

l'ordre de 60°.

5) Altérations hydrothermales et minéralisation aurifère

Deux stades successifs d'altérations se développent dans les zones minéralisées (Semiani, 1995) :

Le premier stade est lié à la phase majeure du fonctionnement de la zone de cisaillement. Il ne présente pas de relation directe avec la minéralisation aurifère et est caractérisé par l'association néoformée : Biotite – amphibole – chlorite – quartz et carbonates.

Le deuxième stade se focalise le long des couloirs fortement tectonisés et est accompagné par la mise en place de veines et veinules minéralisées. Il est rétromorphique par rapport au premier stade et est caractérisé par l'association : quartz – séricite – carbonates et pyrite. Les roches résultantes (bérisites) sont le produit d'une altération polyphasée des ultramytonites : une altération acide (quartz – séricite) en milieu réducteur (présence de pyrite), se poursuivant par une silicification et s'achevant par une phase de carbonatation en milieu oxydant (dissolution partielle de la pyrite) sous l'influence d'un fluide sous-saturé en silice. Ce deuxième stade se développe de façon pénécontemporaine avec une déformation ductile non coaxiale et est assimilé à la fin du fonctionnement de la ZCEO (Semiani, 1995).

Le nom bérisite, issu de la littérature soviétique, désigne des roches d'altération hydrothermale à quartz – séricite – pyrite – carbonates.

Elles représentent l'encaissant immédiat des filons de quartz, et sont reconnaissables grâce à leur teinte brun-rougeâtre qui contrastent avec les teintes des ultramytonites sur lesquelles elles se développent. Les zones de bérisites forment des bandes, larges d'une vingtaine de mètres, allongées N-S parallèlement à la schistosité mylonitique. La transition des bérisites aux ultramytonites est généralement brutale.

La minéralogie des bérisites est polyphasée et rétromorphiques par rapport aux ultramytonites (Semiani, 1995). Elle s'est développée en conditions profondes (déformation ductile). Les épisodes hydrothermaux alternent avec les épisodes de déformation ductile. En revanche, certains épisodes hydrothermaux, notamment la silicification, semblent associés à une déformation fragile (fracturation hydraulique).

Partie 2

Etude Statistique

CHAPITRE I: GENERALITES

1) Introduction

Dans le passé, pour progresser dans la connaissance de n'importe quel phénomène naturel et lui apporter des explications ou des solutions, les spécialistes faisaient appel à leurs connaissances empiriques, acquises au fil des années d'expériences, d'observations et de mémorisations.

Cependant, bien que ces connaissances ont souvent fait preuve de leurs efficacité, mais elles restent de natures trop subjectives et donc bien difficile de juger de la fiabilité du savoir acquis. Afin de palier à ce problème, les scientifiques ont recouru à des méthodes statistiques. Ces méthodes exigent de faire des mesures et le résultat final présentent une garantie d'objectivité. Ces mesures sont facilement transmissibles, exploitables à plusieurs niveaux, qualitativement et quantitativement comparables si on respecte certaines conditions (la représentativité des données, l'esprit critique ...etc.).

2) Objectif de la statistique

Le but de la statistique est de dégager les significations de données, numériques ou non, obtenues au cours de l'étude d'un phénomène.

Il faut distinguer les données statistiques, qui sont les résultats d'observations recueillies lors de l'étude d'un phénomène et la méthode statistique qui a pour objet, l'étude rationnelle des données.

La méthode statistique comporte plusieurs étapes.

a) La statistique descriptive ou déductive

C'est l'ensemble des méthodes à partir desquelles, on recueille, ordonne, réduit, et condense les données.

A cette fin, la statistique descriptive utilise des paramètres, ou synthétiseurs, des graphiques et des méthodes dites d'analyse des données (l'ordinateur a facilité le développement de ces méthodes).

b) La statistique mathématique ou inductive

C'est l'ensemble des méthodes qui permettent de faire des prévisions, des interpolations sur une population à partir des résultats recueillis sur un échantillon.

Nous utilisons des raisonnements inductifs; c'est-à-dire des raisonnements de passage du particulier (l'échantillon) au général (la population), c'est ce qu'on appelle l'inférence statistique

Cette statistique utilise des repères de référence qui sont les modèles théoriques (Lois de Probabilités).

Une condition impérative pour pratiquer l'inférence statistique, sera que l'échantillon soit représentatif de la population, c'est à dire qu'il ne correspond pas à une partie singulière de la population ; par exemple, lors de la reconnaissance d'un gisement, il arrive que l'on plante les sondages uniquement dans des zones présumées riches par les géologues, on parle alors d'implantation « préférentielle ». Dans ces conditions, les teneurs mesurées ne seront pas représentatives du gisement. Cette statistique nécessite la recherche d'échantillons qui représentent le mieux possible la diversité de la population entière ; il est nécessaire qu'ils soient constitués au hasard ; on dit qu'ils résultent d'un tirage non exhaustif.

L'étude sur échantillon se justifie pour réduire le coût élevé et limiter la destruction d'individus pour obtenir la réponse statistique.

3) Vocabulaire de la statistique

La statistique a son propre vocabulaire particulier :

2.1) La Variable:

La grandeur mesurée (Teneur, Puissance...etc.) est appelée variable

2.2) L'Individu

Le support de mesure (Carotte de sondage pour une teneur, poste pour un rendement, amorce pour le micro retard ...etc.) est appelé individu.

2.3) L'Echantillon

L'ensemble des individus sur lesquels ont effectivement porté les observations constituent un échantillon.

2.4) La population

L'ensemble bien défini des individus auquel on s'intéresse et sur lequel on veut émettre des conclusions est appelé population.

CHAPITRE II: STATISTIQUE DESCRIPTIVE

Les statistiques descriptives sont des nombres (moyenne, variance...etc.) ou des graphiques (histogramme, fréquences cumulées...etc.) visant à décrire les principales caractéristiques d'un échantillon donné et donc sa distribution

1 Caractéristique des distributions

1.1 Forme de l'histogramme

Trois cas sont possibles selon que la distribution soit symétrique ou asymétrique et que l'on peut exprimer par le coefficient d'asymétrie γ_1 (cf 1.8.1)

Distribution asymétrique du côté de faibles valeurs ; cas très rencontré pour les gisements pauvres c'est-à-dire à faible teneur (Au, U). Figure (I-1.A).

Distribution symétrique : cas très fréquent (durée de chargement des camions, retard des amorces...etc.). Figure (I-1. B)

Distribution asymétrique du côté de fortes valeurs ; cas assez rare, observé pour les distributions des teneurs dans un gisement à fortes teneurs (Fer de Kiruna).

Figure (II-1. C).

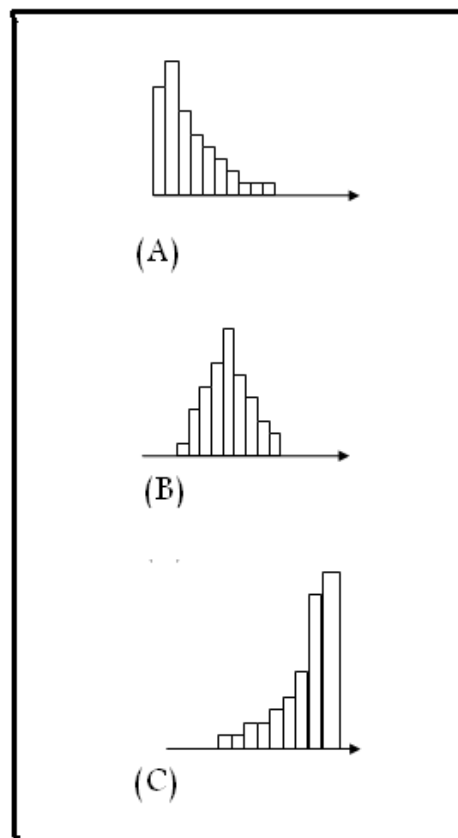


Figure (II-1): formes de l'histogramme, (A) forme asymétrique du côté de faibles valeurs. (B) forme symétrique. (C) forme asymétrique du côté de fortes valeurs.

1.2 La Tendence centrale

La tendance centrale peut être exprimée par trois grandeurs possibles

1.2.1) Le Mode : c'est la classe ayant le maximum d'observation

N.B : une distribution peut être bimodale et c'est souvent le signe d'une hétérogénéité de l'échantillon à laquelle il faut faire attention.

1.2.2) La Médiane: c'est la valeur de la variable autour de laquelle les réalisations se partagent par moitié.

1.2.3) la Moyenne :

- La Moyenne arithmétique:

- cas d'une variable aléatoire discrète X

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

x_i ces réalisations

-cas de variable continue X

$$m = \sum_{i=1}^n f_i x_i$$

f_i : fréquence de la classe

$x_{i,}$ centre de la classe

- La Moyenne pondérée :

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

x_i les réalisations

a_i les pondérateurs

1.3) Les Quantiles :

On appelle les quantiles ou fractiles d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) d'une variable aléatoire X

Dont la fonction de répartition est $F(x)$, la valeur x_0 telle que $F(x_0) = \alpha$

Par conséquent, la médiane « Me » est le quantile d'ordre $\alpha=0.5$

1.4) Les Quartiles :

Les quartiles notés Q_i (respectivement $i=1,2,3$) correspondent aux quantiles d'ordre ($\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$). On constate que $Q_{0.5} = Me$

1.5) les Déciles :

Le K -ème Décile ($k= 1,2,\dots,9$) est le quantile d'ordre $k/10$. Par conséquent le 5-ème décile correspond à la médiane

1.6) La Dispersion

La dispersion caractérise l'étendu (différence entre valeur max et valeur min) dans lequel les réalisations sont réparties, le paramètre qui caractérise le mieux la dispersion est la variance.

1.6.1). La Variance :

On appelle variance de X , la moyenne arithmétique des carrés des écarts de X à sa moyenne qu'on peut définir également par (la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne m).

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - m)^2$$

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i)^2 - m^2$$

1.6.2) L'écart type S :

C'est la racine carré de la variance $\sqrt{s^2}$

1.7) Coefficient de variation CV :

Le coefficient de variation est utilisé afin de grouper les gisements suivant la variabilité de leurs paramètres géologiques. On peut distinguer 4 groupes de gisements qui sont :

$$CV = \frac{S * 100}{m}$$

Très réguliers	CV < 20%
Réguliers	CV de 20 à 40%
Irréguliers	CV de 40 à 100%
Très Irréguliers	CV > 100%

Tableau (II-1) : classification des gisements, en fonction du coefficient de variation CV

1.8) caractéristiques de forme ou coefficients de Fisher

1.8.1) Le coefficient Skewness (Le coefficient d'asymétrie)

Le coefficient de Skewness mesure le degré d'asymétrie de la distribution, il est défini par l'expression suivante

$$\gamma_1 = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = \frac{E(X-m)^3}{\left(\sqrt{E(X-m)^2}\right)^3}$$

PS : « E » Désigne l'espérance mathématique, c'est-à-dire la moyenne de la variable aléatoire X

Le coefficient de Skewness est calculé en pratique de la manière suivante

$$\gamma_1 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum \left(\frac{xi-m}{s} \right)^3$$

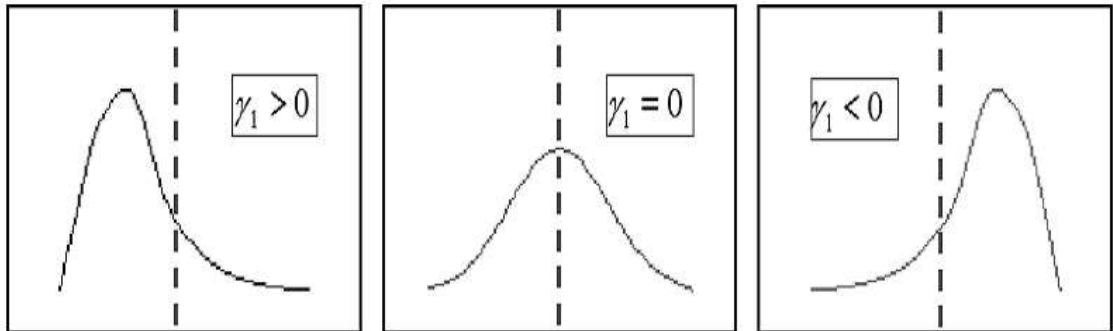


Figure (II- 2) : formes de la distribution selon le coefficient d'asymétrie γ_1 .

Si γ_1 est égal à 0, la distribution est symétrique, s'il est négatif la distribution est asymétrique vers la gauche et s'il est positif, la distribution est asymétrique vers la droite Figure (II- 2)

1.8.2) Le coefficient de Kurtosis (Le coefficient d'aplatissement):

Le coefficient de Kurtosis mesure le degré d'aplatissement (d'écrasement) de la distribution Figure (II- 2). Il est défini par l'expression suivante :

$$\gamma_2 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X-m)^4}{\left(E(X-m)^2 \right)^2} - 3$$

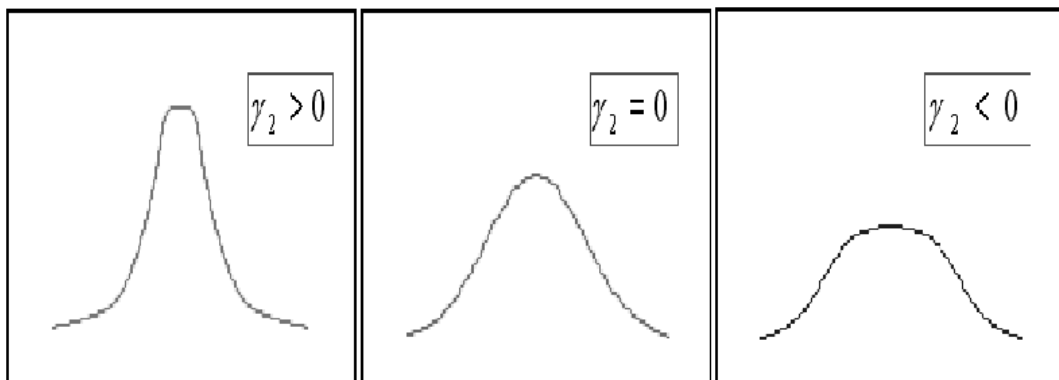


Figure (II- 3) : formes de la distribution selon le coefficient d'aplatissement γ_2

La constante (3) a été choisie de manière à ce que le coefficient d'aplatissement de la loi normale soit nul c'est-à-dire $\gamma_2 = 0$

CHAPITRE III: LA STATISTIQUE INDUCTIVE

1) L'estimation d'une population

1.1) L'inférence statistique

Les paramètres d'une population (sa moyenne et son écart type) ne sont jamais connus, néanmoins, on peut seulement les estimer. A cet effet, on recourt à la notion de modèle mathématique qui permettra de raccorder la population à l'un des modèles de base connus et qui constituera un modèle synthétique pouvant remplacer la population et sur lequel on réalisera l'inférence statistique à partir de l'échantillon figure (II- 3).

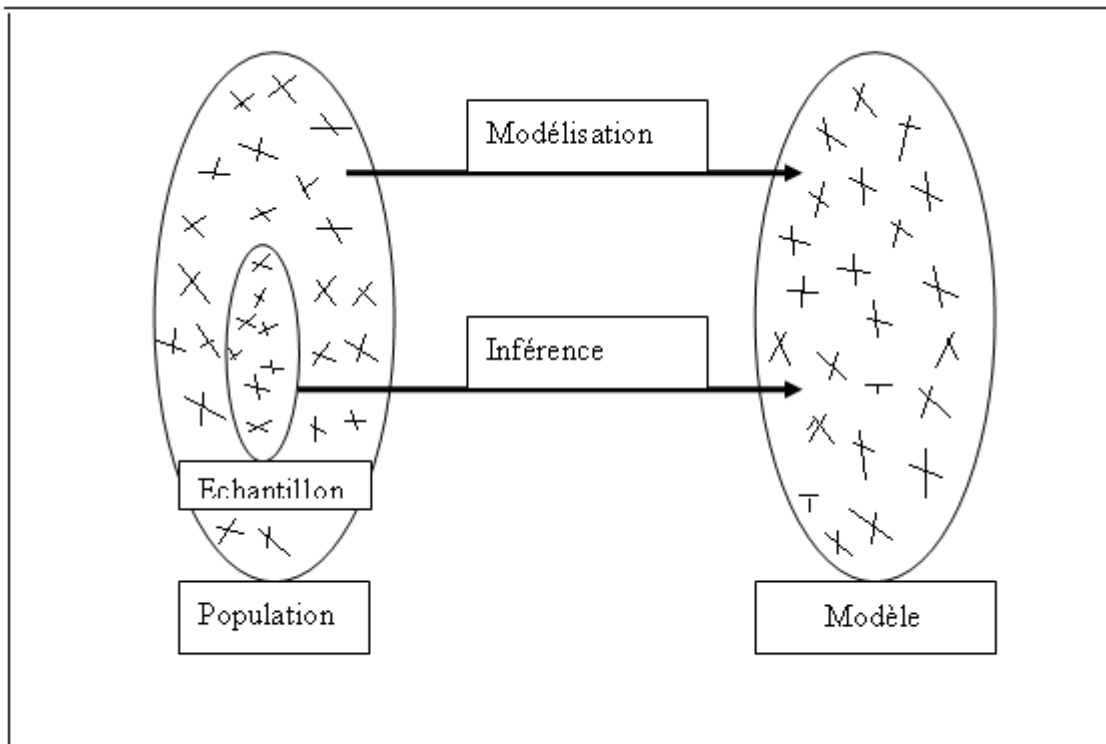


Figure (II- 3). Echantillonnage et inférence statistique.

2) Notion de probabilité

Pour passer de l'échantillon vers la population, il suffit d'imaginer que l'on dispose d'un échantillon de taille finie et que l'on fait accroître sa taille ; c'est-à-dire, augmenter le nombre d'individus, pour chaque échantillon, on trace son histogramme, on imagine bien qu'à la limite, lorsque sa taille N tend vers l'infini, on obtiendra l'histogramme de la population Figure (II. 3 (a, b)) , qui sera limité par une certaine courbe appelée courbe de distribution de la population.

si on appelle x et x' deux valeurs particulières de la variable aléatoire, la fréquence des observations $f(x, x')$ tend vers une certaine quantité $P(x, x')$ que l'on appelle la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle (x, x') et que l'on peut écrire

$$P(x, x') = \text{Prob} \{ x < X < x' \}$$

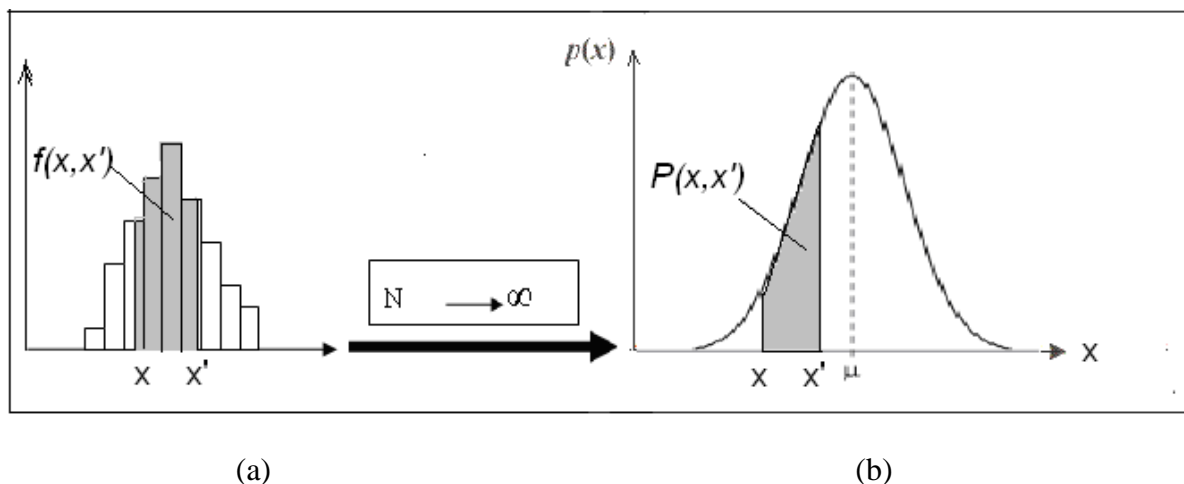


Figure (II- 4): passage de l'échantillon vers la population. (a) Histogramme de l'échantillon, (b) Histogramme de la population

Ainsi, la surface totale entre la courbe de distribution de X pour la population et l'axe des abscisses, est comme la surface totale de l'histogramme des fréquences pour l'échantillon, égale à l'unité.

$$\text{Prob} \{ -\infty < X < +\infty \} = 1$$

2.1) Densités de probabilité

Considérons deux valeurs x et x' très voisines de sorte que $x' = x + \Delta x$ avec Δx très petit. La probabilité pour que X soit compris entre x et $x + \Delta x$ peut être estimée par la surface du rectangle dont la base est Δx et la hauteur est y l'ordonnée du point d'abscisse x Figure (II- 5)

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe de distribution, dans ce cas on peut écrire

$$\text{Prob} \{ x < X < x' \} = f(x) \cdot \Delta x$$

L'ordonnée $f(x)$ est appelée densité de probabilité de la variable X

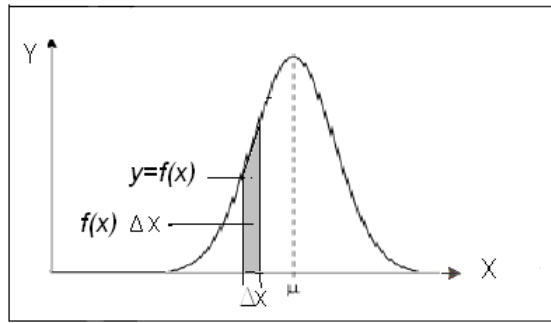


Figure (II- 5) : densité de probabilité

Cette notion permet d'écrire la probabilité sur un intervalle quelconque $\{x, x'\}$ sous la

forme d'une intégrale définie:
$$\text{Prob} \{ x < X < x' \} = \int_x^{x'} f(x) \cdot dx$$

Cette relation permet d'écrire
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

2.2) La moyenne d'une population

La moyenne d'une population notée μ est la moyenne d'un échantillon dont la taille tend

vers ∞ :
$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f_k \cdot x_k$$

Par analogie cette équation peut s'écrire sous forme d'une intégrale

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

2.3) La variance de la population

La variance d'une population est également notée par une lettre grecque σ^2 dont la racine carrée donne l'écart type, la variance ; elle est estimée par la relation suivante

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) \cdot dx$$

3) Loi de probabilité d'une population

3.1) Fonction de répartition F(x)

C'est la probabilité notée P(x) de l'événement* $\{X < x\}$; c'est-à-dire l'aire délimitée par la courbe de distribution (densité de probabilité) et $X < x$, Figure (II- 6).

$$F(x) = P(x) = \text{prob}\{X < x\} = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx$$

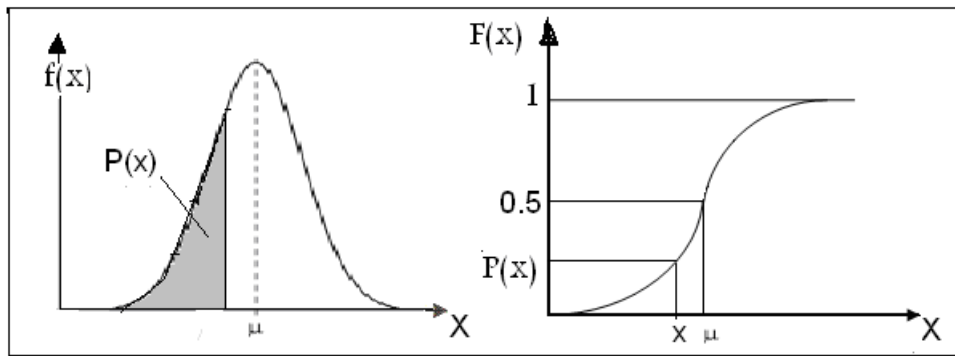


Figure (II- 6) : relation entre densité de probabilité $f(x)$ et la fonction de répartition $F(x)$

Ainsi, pour calculer la probabilité d'un événement ou estimer les paramètres d'une population, il est impératif de connaître la fonction de densité de probabilité $f(x)$ c'est-à-dire le modèle probabiliste ($f(x) = p(x)$)

Parmi les modèles les plus fréquemment rencontrés et utilisés dans la géologie minière on cite le modèle de la loi normale et loi log-normal.

3.1.1) Le modèle de la loi normale

Ce modèle a été établie au XVIII^e siècle par les mathématiciens Laplace et Gauss pour modéliser les erreurs de mesures ; c'est pourquoi le modèle porte leurs noms

L'expression mathématique du modèle est une fonction exponentielle paramétrique ; c'est-à-dire qu'elle dépend de deux paramètres; la moyenne μ et l'écart type σ et dont l'expression mathématique est la suivante :

L'Événement *: c'est le fait, qu'une variable X , prenne une valeur dans un certain intervalle $\{x, x'\}$ constitue un événement note par $\{x < X < x'\}$ et sa probabilité $P(x) = \text{Prob} \{x < X < x'\}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

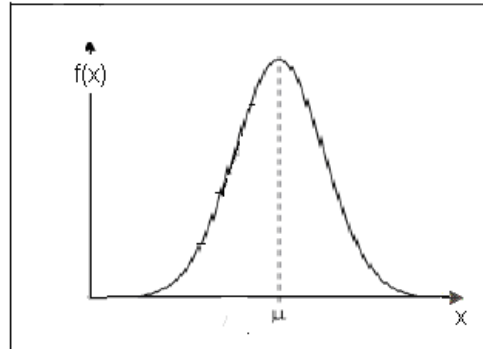


Figure (II- 7) : modèle de la loi normale

La courbe du modèle de la loi normale, se présente sous forme d'une cloche Figure (II- 7). Elle est symétrique par rapport à μ et elle est d'autant plus étalée que l'écart type est grand (c'est-à-dire que les valeurs sont plus dispersées) et d'autant plus resserrée que l'écart type est moins grand (donc que les valeurs sont moins dispersées).

3.1.1.1) La Loi normale réduite

Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et d'écart type σ , si on effectue un chargement de variable

$$T = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

On dit que la variable T est centrée et réduite ; centrée parce qu'on a la différence (X- μ) et réduite par le rapport sur σ , la variable T est caractérisée par sa moyenne égale à 0 et son écart type égal à 1. Figure (II- 8).

Si X suit la loi normale, la densité de probabilité de la variable T devient

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Par conséquent, si X suit la loi normale notée $N(\mu, \sigma)$, la variable T suit également la loi normale mais notée $N(0, 1)$, ainsi, le calcul des probabilités se trouve simplifier par

l'utilisation de la table de la loi de Gauss établie pour la variable centrée et réduite, c'est la table qui donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale réduite :

$$P(t) = \text{Prob}\{T < t\}$$

Pour les valeurs de t à deux décimales prises entre 0.0 et 3.49 puisque au delà de $t = 3.49$ toutes les valeurs de $P(t)$ sont pratiquement égales à 1

$$P(3.49) = P(\infty) = 1$$

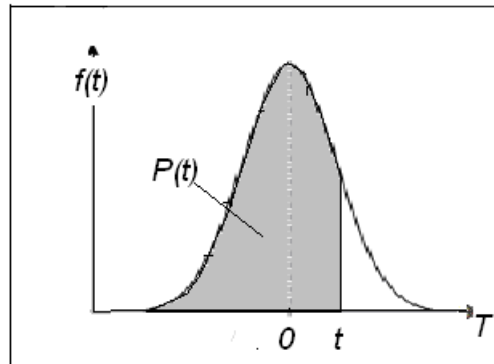


Figure (II- 8) : courbe de densité de probabilité, cas de la loi normale centrée réduite notée $N(0,1)$

3.1.1.2) La loi log-normale (loi de Galton)

Une variable aléatoire X suit une loi log-normale quand son logarithme, $Y = \text{Ln } X$, suit une loi normale; c'est à dire que Y suit une loi $N(\alpha; \beta)$, α et β étant les paramètres de la loi normale.

C'est une loi définie dans \mathbb{R}^+ asymétrique, étalée à droite. Figure (II- 9). Sa densité de probabilité est :

$$g(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \beta} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \alpha}{\beta} \right)^2}$$

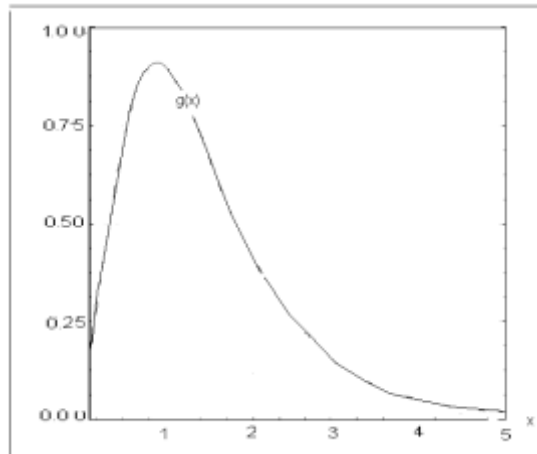


Figure (II- 9) ; courbe de densité de la loi log-normale

Les paramètres de la variable X (log-normale) sont α et β

$\alpha = \mu_y$ c'est-à-dire la moyenne de $\ln(X)$ et $\beta = \sigma_y$ (écart type de $\ln(X)$)

La moyenne μ_x
$$\mu_x = e^{(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2})}$$

La variance σ_x^2
$$\sigma_x^2 = e^{2(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2})} \left(\frac{e^{\sigma_y^2} - 1}{e^{\sigma_y^2}} \right)$$

Coefficient de variation CV_x
$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \sqrt{e^{\sigma_y^2} - 1}$$

4) Espérance mathématique et variance

Lors d'un traitement statistique de certaines variable aléatoire, il arrive qu'on aie besoin de les traiter sous forme de fonction de variables aléatoires, ce qui rend la tache très

compliquée et fastidieuse, à cet effet, les statisticiens ont introduit un opérateur mathématique appelé l'espérance mathématique.

4.1) l'opérateur espérance mathématique

La détermination de la moyenne d'une population dont on connaît la loi de probabilité consiste à faire un calcul d'intégrale définie souvent très long et difficile. À cet effet on l'a remplacé par un opérateur qui transforme l'ensemble des valeurs x d'une variable X auxquelles sont attachées les densités de probabilité $f(x)$, en l'intégrale.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

Cet opérateur est appelé espérance mathématique désigné par $E(X)$ et qui se lit « espérance mathématique de la variable X ». et par conséquent on peut écrire la relation suivante :

Dans le cas d'une fonction de variables aléatoires $f(X)$, on peut utiliser l'espérance mathématique de $f(X)$:

$$E(G(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

Si par exemple, $f(X)$ est une fonction linéaire, on peut écrire

$$E(ax + b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) \cdot f(x) \cdot dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = E(x) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Par conséquent : l'espérance de la somme ou de la différence de variables aléatoires est égale à la somme ou à la différence des espérances, ce qui signifie que l'espérance mathématique est un opérateur linéaire

4.2) La Variance

La variance d'une population que nous avons déjà présentée au ci-dessus par la relation suivante :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) \cdot dx$$

Tout comme la moyenne, on peut considérer la variance comme étant une espérance

Et ce on posant $g(x) = (x - \mu)^2$ avec $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$

Donc
$$\text{Var}(x) = E(x - \mu)^2$$

En décomposant la relation précédente et en appliquant les propriétés de l'espérance

On peut écrire:

$$\text{VAR}(x) = E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) = E x^2 - 2E x \cdot E x + (E x)^2$$

D'où la relation importante, que l'on peut facilement retenir on disant que la variance est égale à l'espérance des carrés moins le carrés des espérances

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - (Ex)^2$$

De la même manière on peut décomposer la variance d'une fonction de variables aléatoires:

$$\text{Var}(ax+b) = a^2 \text{Var}(x)$$

Ce résultat nous permet de conclure que la variance est invariante lors d'une translation. et que lors d'un chargement d'échelle de la variable l'écart type subit le même chargement d'échelle :

$$\sigma(aX) = a\sigma(X)$$

4.3) La Covariance

C'est une fonction statistique qui permet de vérifier s'il existe une relation de dépendance ou pas entre deux variables aléatoires

La variance de la somme de deux vérifiables aléatoires X et Y est :

$$\text{var} (X + Y) = E (X + Y)^2 - (E(X + Y))^2$$

En décomposant les carrés, il vient

$$\text{var} (X + Y) = [E (X)^2 - (E(X))^2] + [E (Y)^2 - (E(Y))^2] + 2[EXY - EX.EY]$$

On constate que le premier et le deuxième terme désignent respectivement la variance de X et de Y, par contre le troisième terme désigne la covariance des deux variables aléatoires X et Y

$$\text{var} (X + Y) = \text{var} (X) + \text{var} (Y) + 2 \text{cov} (XY)$$

$$\text{cov} (XY) = E (X.Y) - E (X) E (Y)$$

On peut facilement retenir cette expression mathématique, en disant que la covariance est l'espérance du produit moins le produit des espérances.

La variance de la différence par le même raisonnement est donnée par la relation suivante :

$$\text{var} (X - Y) = \text{var} (X) + \text{var} (Y) - 2 \text{cov} (XY)$$

Si Y=X la covariance devient variance c'est-à-dire

$$\text{cov} (XX) = \text{var} (X)$$

Ainsi, on dit que deux variables aléatoires X et Y sont dépendantes ou indépendante, (c'est-à-dire que, l'influence de X sur Y ou Y sur X) c'est selon que la valeur de la covariance soit nulle ou pas. Par conséquent si deux variables aléatoires sont indépendantes, la covariance sera nulle.

4.4) Coefficient de Corrélation r

C'est un coefficient qui permet de mesurer le degré de dépendance entre deux variables aléatoires. On le détermine par la relation suivante

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Les valeurs du coefficient de corrélation r varient entre -1 et +1 c'est-à-dire que

$$-1 \leq r \leq +1$$

La valeur et le signe du coefficient de corrélation r (positif ou négatif), permet de comprendre la nature de la relation entre deux variables, a cet effet, trois cas sont possibles :

a) $r = 0$ ou proche de zéro on dit qu'il n'y a pas de relation entre les deux variables ou que la relation est improbable si non faible corrélation

b) r proche de $+1$ on dit qu'il y a une très bonne corrélation positive (forte relation de dépendance entre les deux variables aléatoires), a chaque fois que l'une augmente de valeurs, l'autre augmente également (le contraire est valable).

c) r proche de -1 c'est le cas d'une très bonne corrélation négative (forte relation de dépendance entre les deux variables aléatoires) mais pour ce troisième cas, si l'une des deux variables augmente, l'autre diminue (le contraire est valable).

5.) Calcule des paramètres d'une population

5.1) l'Estimation de la moyenne d'une population

Considérons une population de référence définie par la loi de probabilité d'une certaine variable aléatoire X . Si nous prélevons, au hasard et de façon non exhaustive, un échantillon de taille n , nous observons n valeurs : $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ dont on peut calculer la moyenne m et la variance s^2 . Mais un autre échantillon de taille n , prélevé au hasard dans la même population, conduirait à d'autres valeurs : $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_n\}$, puis m' et s'^2 , a priori différentes à cause des fluctuations dues à l'échantillonnage ... Et ainsi de suite, on pourrait répéter ces mesures et ces calculs sur un grand nombre d'échantillons différents.

Les nombres x_1, x'_1, \dots peuvent alors être considérés comme des réalisations d'une certaine variable aléatoire X_1 , les nombres x_2, x'_2, \dots comme des réalisations d'une variable aléatoire X_2 , et plus généralement, les nombres x_i, x'_i, \dots comme des réalisations d'une variable aléatoire X_i .

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ sont indépendantes (si l'échantillonnage est non exhaustif) et ont même loi de probabilité: celle qui définit la population de référence (la loi de probabilité de la variable aléatoire X), et en particulier leurs espérance mathématique est égale à $EX = \mu$ et de même pour les variances

$$EX_1 = EX_2 = \dots = EX_i = \dots = EX_n = \mu$$

$$\text{var}X_1 = \text{var}X_2 = \dots = \text{var}X_i = \dots = \text{var}X_n$$

$$X_1 = X_2 = \dots = X_i = \dots = X_n \text{ sont indépendantes}$$

Les valeurs $m, m', m'' \dots$ peuvent alors être considérées comme des réalisations d'une variable aléatoire M , fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$:

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E(M) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i$$

$E(M) = \frac{1}{n} n\mu \quad \text{D'où} \quad E(M) = \mu$
--

Donc, l'espérance mathématique de la variable aléatoire moyenne M (V, A, M) d'un échantillon est la moyenne de la population. Figure (II. 9)

Il en est de même pour la variance de la V.A M S^2 :

$$\text{var}(M) = \text{var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2$$

$$\text{var}(M) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Et par conséquent l'écart type σ , Figure (II- 10)

$$\sigma(M) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

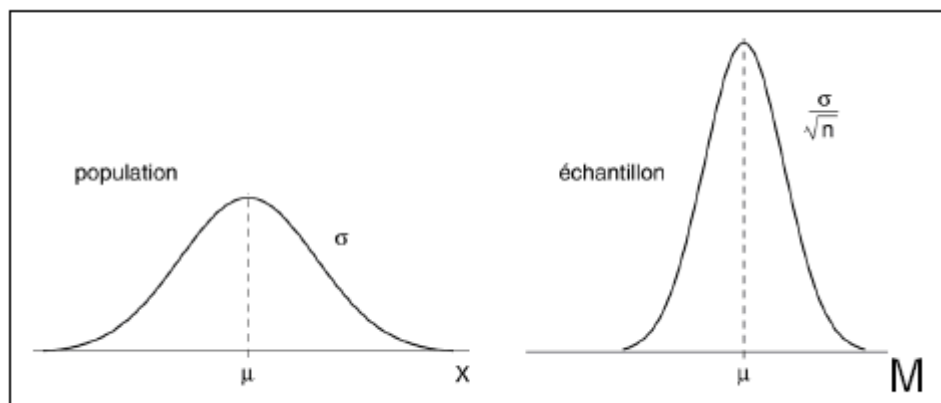


Figure (II- 10) moyenne et variance de la variable moyenne M

On signale que si la (V, A) X suit la loi normale alors M suit également la loi normale.

Par contre, si X suit une loi quelconque, M suit approximativement la loi normale à condition que la taille de l'échantillon soit suffisamment grande avec $n \geq 30$

5.2) Loi des grands nombres

L'estimation de la moyenne est obligatoirement entachée d'erreur $d = m - \mu$ que l'on peut considérer comme étant une réalisation de la V.A $D = M - \mu$

A cet effet, il sera intéressant de chercher la probabilité pour que l'erreur soit minimale, admissible et comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, Figure (II- 11).

La moyenne de la V.A D est nulle et son écart type est $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Si on pose $\alpha = \text{prob}\{|M - \mu| > \varepsilon\}$

En utilisant la loi normale réduite, c'est-à-dire que $T = \frac{M - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$

$\alpha = 2 \text{prob}\{T > t_\alpha\}$ } avec $t_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$

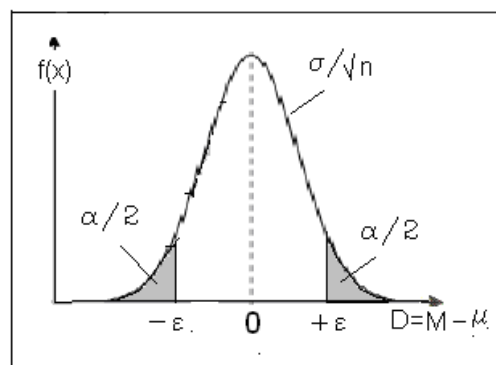


Figure (II- 11): intervalle de confiance pour l'estimation de la moyenne d'une population

Selon les deux dernières relations, on constate que si

$$n \longrightarrow \infty, \quad t_{\alpha} \longrightarrow \infty \quad \alpha \longrightarrow 0$$

En conclusion, selon la loi des grands nombres, la probabilité, pour que l'erreur faite en remplaçant μ par son estimateur m soit plus grande qu'un seuil donné ε , tend vers 0 quand la taille de l'échantillon augmente.

En d'autres termes, il existe toujours un nombre n qui permet d'atteindre la précision voulue

5.3) L'intervalle de confiance

On peut toujours fixer un risque α c'est-à-dire un niveau de confiance $(1 - \alpha)$ et pour

Lequel on estimera l'erreur $\varepsilon = \frac{t_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}}$ et qui peut être soit par défaut ($-\varepsilon$) ou soit par excès donc $(+\varepsilon)$ et par conséquent, permet de définir un intervalle de confiance de la moyenne comme suite :

$$m - \varepsilon < \mu < m + \varepsilon \quad \text{Ou} \quad m - \frac{t_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < m + \frac{t_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{avec un risque } \alpha$$

Ainsi, plus le risque est faible plus l'intervalle de confiance est grand.

Niveau de confiance (1- α)	Risque α	$t_{1-\alpha/2}$
90%	0.10	1.645
95%	0.05	1.96
99%	0.01	2.58

Tableau (II-2) : relation entre le risque α et l'intervalle de confiance.

Le schéma ci-dessous Figure (II.12 (a, b, c)): présente les valeurs remarquables de niveaux de confiances avec le risque α de l'estimation et l'intervalle de confiance qui lui correspond,

a) pour un niveau de confiance de 90 % donc un risque α de 10% ce qui permet d'avoir une erreur d'estimation de la moyenne de plus ou moins

$$\varepsilon = \frac{t_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.645 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

b) pour un niveau de confiance de 95% donc un risque α de 5% ce qui permet d'avoir une erreur d'estimation de la moyenne de plus ou moins

$$\varepsilon = \frac{t_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}}$$

c) pour un niveau de confiance de 99% donc un risque α de 1% ce qui permet d'avoir une erreur d'estimation de la

$$\varepsilon = \frac{t_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.58 \sigma}{\sqrt{n}}$$

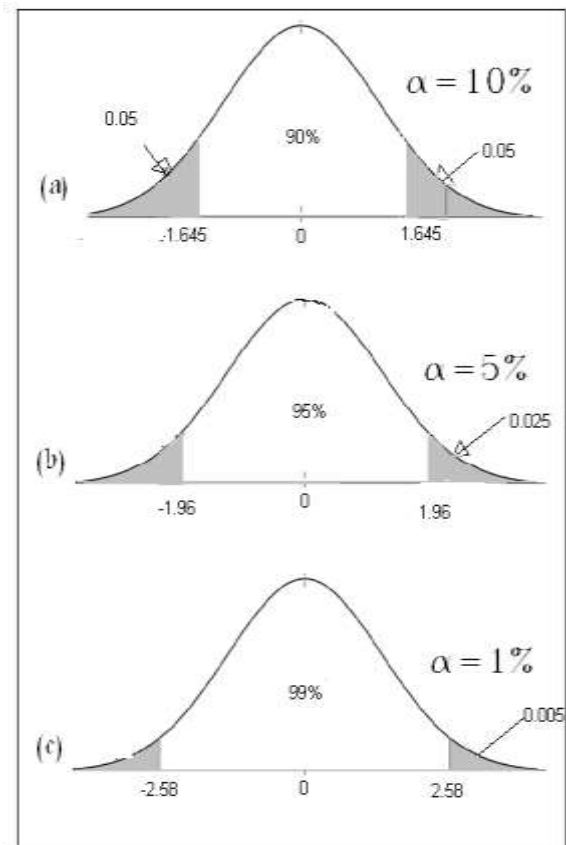


Figure (II.12): l'intervalle de confiance selon le seuil de signification (Le risque α), ((a) $\alpha = 10\%$, (b) $\alpha = 5\%$, (c) $\alpha = 1\%$)

5.4) Le biais

Lors de l'estimation de la moyenne d'une population, on a conclut que $E(M) = \mu$

Ce ci dît que $E(M - \mu) = 0$ c'est-à-dire que l'erreur en moyenne est nulle, ce qui permet de dire que l'estimation est sans biais, si c'était le contraire, on dit que l'estimation est biaisée.

5.5) l'estimation d'une variance

Soit S^2 la variable aléatoire «variance de l'échantillon »

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (M - \mu)^2$$

L'espérance de la variable aléatoire «variance de l'échantillon » S^2 est :

$$E S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E (X_i - \mu)^2 - E (M - \mu)^2$$

$$E S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = E S^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E S^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad E S^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) \sigma^2$$

$$E(S^2 - \sigma^2) = -\frac{\sigma^2}{n} \neq 0$$

Pour que l'estimation de la variance soit sans biais, c'est-à-dire que $E(S^2 - \sigma^2) = 0$

Il faut choisir comme estimateur pour la variance σ^2 l'expression suivante

$$\sigma^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2$$

Ainsi, on peut estimer les paramètres d'une population (μ, σ) la moyenne et la variance par les paramètres de l'échantillon (m, s^2) tout en évitant le biais de l'estimation, par les deux relations suivantes :

$\mu^* = m \qquad \text{et} \qquad \sigma^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2$

Le symbole (*) est utilisée pour designer un estimateur.

6) Test de normalité

6.1) Hypothèse Test de χ^2

Avant de réaliser un teste quelconque, il faut tout d'abord définir une hypothèse sur la valeur d'un paramètre de la population que l'on veut tester et par la suite l'accepter ou la rejeter, ceci, nous ramène a définir deux hypothèses:

Hypothèse nulle (H_0)

C'est l'hypothèse du statu quo, celle qui est maintenue jusqu'à preuve du contraire.

C'est l'hypothèse qu'on veut rejeter. Pour la formuler, on utilise les symboles: =, ≤, ≥

Hypothèse alternative (H_1)

C'est l'hypothèse qu'on voudrait démontrer, son acceptation n'est conditionnelle qu'au rejet de l'hypothèse nulle. Pour la formuler, on utilise les symboles: ≠, >, <

Il est à signaler, que H_0 doit être formulée de façon à ce que son rejet erroné, soit plus grave que son acceptation erronée. Par conséquent, la question est fonction de H_0 qui est maintenue (et non pas prouvée) ou rejetée

Selon que la décision statistique nous amène à accepter ou à rejeter H_0 , il existe une probabilité de commettre une erreur de décision dans chaque cas ; à cet effet on dégage deux types d'erreur :

- L'erreur de type I (ou de «première espèce») est l'erreur commise quand l'hypothèse nulle est rejetée, alors qu'elle est vraie (cette erreur est jugée plus grave que l'autre)

- L'erreur de type II (ou de «deuxième espèce») est l'erreur commise quand l'hypothèse nulle est maintenue, alors qu'elle est fausse,

Selon la décision prise, quatre cas sont possibles et qui sont représentés par le Tableau (II-3) suivant :

Décision et réalité	H_0 est maintenue	H_0 est rejetée
H_0 est vraie	Aucune erreur	Erreur de type I
H_0 est fausse	Erreur de type II	Aucune erreur

Tableau (II-3) : type d'erreur selon la discision statistique

Soit α l'erreur de première espèce et α qui désigne le niveau de signification du test. C'est le risque de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.

Soit β l'erreur de deuxième espèce. C'est le risque de maintenir H_0 alors qu'elle est fausse.

$1-\beta$ est la puissance du test ; c 'est la probabilité de rejeter H_0 quand elle est fausse.

Un test est dit sans biais si $1-\beta > \alpha$ et convergent si $1-\beta \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$.

Décision Réalité	Retenir H_0	Retenir H_1
H_0 est vraie	$1-\alpha$	α
H_0 est fausse	B	$1-\beta$

Tableau (II-4) : relation entre la puissance d'un test et la décision statistique

6.2) Test de χ^2

Il s'agit d'évaluer l'importance des écarts entre des fréquences (ou des pourcentages) observées, à l'intérieur d'échantillons aléatoires et des fréquences (ou des pourcentages) théoriques espérées, qui devraient être observées ; c'est-à-dire, si l'hypothèse nulle soumise au test était vraie. Par conséquent tester la modélisation retenue, permet de tester l'ajustement

d'une distribution expérimentale à une loi de probabilité :
$$\begin{cases} H_0 : F(x) = F_0(x) \\ H_1 : F(x) \neq F_0(x) \end{cases}$$

Où $F(x)$ est la fonction de répartition de la variable échantillonnée et $F_0(x)$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire connue.

Sous l'hypothèse nulle H_0 , un échantillon de taille n dont l'étendu divisé en k classes

($k = \text{Log}_2(n)$) d'effectifs n_i et de probabilités P_i , ce qui permet de déterminer les effectifs théoriques nP_i à cette étape il faut vérifier que l'effectif théorique de chaque classe soit au moins égal à « 5 » sinon on se retrouve dans l'obligation de fusionner certaines classes.

Pour réaliser le test χ^2 il faut calculer la quantité suivante

$$\chi_c^2 = \sum \frac{(f_e - f_o)^2}{f_e}$$

Avec f_e , f_o sont respectivement fréquence théorique (effective) et fréquence observée

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i p - np_i)^2}{np_i} \quad \text{Suit une loi } \chi^2 \text{ à } (k-1-q) \text{ degrés de liberté.}$$

Avec k nombre de classe et q nombre de paramètre du model de loi de distribution

Dans le cas de la loi normal $q = 2$

Si la valeur calculée du χ^2 est inférieure à la valeur de χ_c^2 , lue dans la table du χ^2 pour un seuil de signification α (souvent α est fixée à 5%) on accepte l'hypothèse H_0 avec un risque d'erreur α .

Les étapes du test χ^2

Pour facilité la réalisation du test, il est impératif de réaliser un tableau a cinq colonnes

1°) la colonne [1], désigne les classes des effectifs x^k

2°) la colonne [2], pour les limites des classes x_p

3°) la colonne [3], on calcule la valeur centrée réduite $t_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$ pour chaque limite de classe t_p

4°) colonne [4], détermination de l'aire sous la courbe normale situé entre 0 et t_p

5°) colonne [5], détermination des aires pour chaque classe en additionnant successivement les aire des t_p de signes différent ou en les soustrayant dans le cas contraire.

6°) colonne [6], détermination des fréquences théoriques f_e pour chaque classe, en multipliant chaque valeur de la cinquième colonne par l'effectif total

7°) colonne [7], présente les valeurs d'effectif de chaque classe qui représente en fait la fréquence observée f_o

[1],	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
x^k	x_p	$t_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$	Aire entre 0 et t_p suivant la courbe normale	Aire pour chaque classe (fréquence relative)	f_e	f_o

Tableau (II- 5) : étapes du calcul de χ^2 pour tester la normalité d'une distribution.

CHAPITRE IV APPLICATION A LA MINERALISATION AURIFERE DE LA ZONE 8 D'AMESMESSA.

1) Historique du projet

Le gisement d'or d'Amesmesssa fut découvert en 1978 par la SONAREM. Les travaux de recherches et d'évaluation se sont poursuivis de 1983 à 1992 par l'EREM (Entreprise Nationale de Recherche Minière, issue suite a la Loi de la restructuration des entreprises) et qui sera par la suite relayés par l'ORGM

La première étude de préfaisabilité du projet d'exploitation du gisement a été initiée en 1989 par l'ENOF (Entreprise Nationale des produits non-ferreux). En Avril 1992 fut crée l'ENOR afin d'exploiter le gisement.

2) Plan d'échantillonnage

Pour la collecte de données, nous avons utilisé les données de sondage carottier de la campagne de sondage, réalisée entre 1992 et 1995 par ORGM. Lors de cette campagne de sondage, l'ORGM a réalisé des sondages selon des profils établis perpendiculaires à la direction des filons de quartz, qui sont orientés Nord Sud. Ces profils sont espacés de 40 mètres en moyenne. Suivant chaque profil, les sondages ont été réalisés tout les 40 mètres pour atteindre la minéralisation à de faible et moyenne profondeur (les sondages sont inclinés vers l'Est, puisque la minéralisation plonge vers l'Ouest). Pour les grandes profondeurs, les sondages sont espacés de 80 mètres.

Nous avons réalisé une carte géoréférencée de la zone d'étude en utilisant le logiciel Mapinfo 07, Cette carte permet de visualiser le plan d'implantation des sondages Figure (II-13).

La réalisation de cette carte, a été possible suite a la combinaison des données des deux cartes suivantes:

- La carte de localisation des travaux de sondage, réalisés sur la zone centrale (8 et 9) d'Amesmesssa, tirée du rapport O.R.G.M, Rapport final sur l'évaluation en profondeur du gisement d'Amesmesssa (campagne 90-93)
- La carte géologique de la zone centrale du gisement aurifère d'Amesmesssa, d'après le rapport de l'ORGM (campagne 1990-1993)

Pour la projection des points de sondages sur la carte, nous avons utilisé le système Géodésique WGS 84 (World Géographic System) établi en 1984, et dont le type de projection est en UTM (Transverse Universelle de Mercator) Zone 31 hémisphère nord

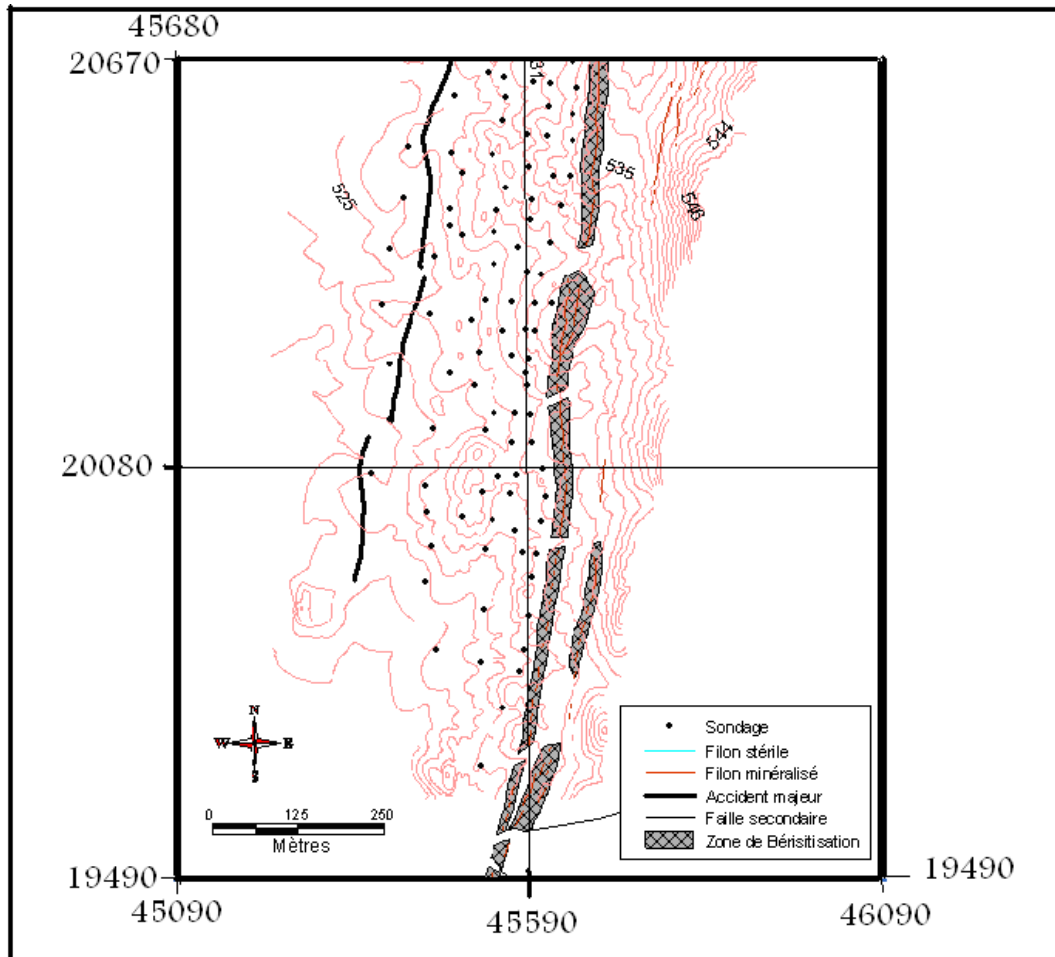


Figure (II- 13) : Plan d'implantation de sondages en surface

Pour étudier la minéralisation aurifère de la zone 8 d'Amesmessa, on a constaté que:

- La minéralisation aurifère est le plus souvent encaissée par des filons de quartz
- Ces filons de quartz, ont une direction subméridienne N-S
- Ils ont une direction de plongement vers l'ouest.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, on doit d'abord réaliser un plan défini par les deux directions citées ci-dessus (la direction N-S et la direction suivant la cote Z), qui permet de comprendre comment varie la minéralisation aurifère en profondeur.

La figure (II- 14) illustre la projection suivant le plan vertical de l'intersection des sondages et la minéralisation aurifère, suivant la direction N-S et la cote Z.

La réalisation de ce plan a nécessité le passage par deux étapes :

- La première étape, consiste à calculer les coordonnées de chaque point de rencontre entre le sondage et la minéralisation. Ce calcul a été réalisé sur la base des données de la campagne de sondage réalisée par la SONAREM (1992-1995), voire tableau annexe. Ce tableau présente les coordonnées de surface de chaque sondage (x, y, z), sa profondeur, son Dip (inclinaison) et son azimuth, sans oublier la teneur moyenne et la puissance (l'épaisseur réelle) de la partie minéralisée de chaque sondage.

- La deuxième étape, l'utilisation des SIG (système d'information géographique) dans le but de présenter un plan vertical, où les points de rencontre sondage-minéralisation sont géoreferencés. Chaque point est repéré par un couple (y, z), où y coordonnée suivant la longitude et z suivant la cote (par rapport au niveau de la mer).

Ce plan vertical, a servi de base pour la cartographie des facteurs étudiés (teneurs et puissances). Les sondages utilisés sont en nombre de 74, réalisés suivant une maille régulière de 40x40 m, couvrant une superficie de 24,8 ha. Ces sondages ne concernent que la zone 8.

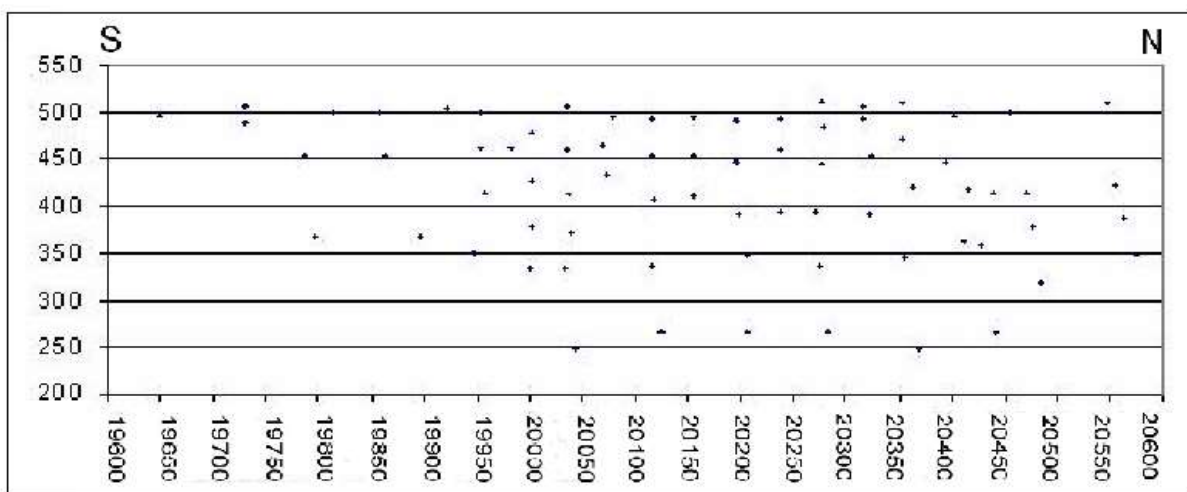


Figure (II- 14) - Plan vertical de l'intersection des sondages et de la minéralisation aurifère, suivant la direction N-S et la cote Z

3) Statistique descriptive de la teneur

3.1) Les Statistiques de la teneur

Le résultat de l'analyse statistique de la variable teneur réalisée sur des données issues des 74 Sondages, est présenté dans le tableau (II- 6).

Nombre de valeurs	74
Moyenne m	5,480135
Médiane M_e	2,900000
Mode M_o	1,0000
Minimum	0,200000
Maximum	84,600000
Variance s^2	143,872763
Ecart type s	11,994697
Coefficient de Variation CV	218,875940
Skewness	5,614126

Tableau (II- 6): Résultats statistiques en utilisant les 74 valeurs de la teneur en Or

La valeur minimale de la teneur de l'or est de 0,2 g/t alors que la valeur maximale est de 84,6 g/t, ce qui montre un grand intervalle de distribution des valeurs étudiées.

Les valeurs de la teneur sont très dispersées, ceci est montré par un coefficient de variation CV= 218.87 très élevé. La figure (II- 15) illustre la dispersion de la teneur suivant la direction N-S et la côte Z.

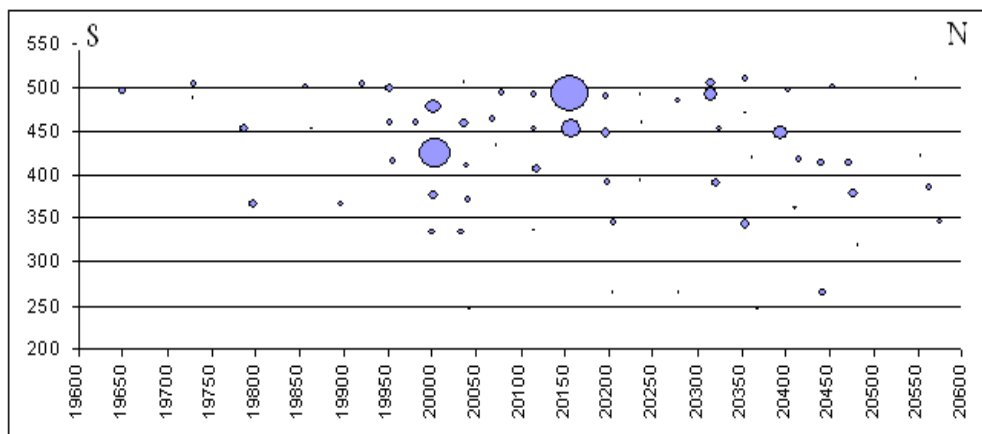


Figure (II- 15) : Dispersion de la teneur en Or suivant la direction N-S et la cote Z
 Les grands cercles représentent les hautes teneurs, les petits cercles représentent les faibles teneurs en Or.

3.2) Histogramme de la distribution

L'Histogramme de la figure (II. 16) montre que la distribution des teneurs est fortement asymétrique du côté des faibles valeurs (asymétrie positive). Cette asymétrie se traduit par une forte valeur du skewness ($\gamma_1=5.61$) caractéristique d'une distribution classique des gisements à faible teneur. (Royer J.J 1994, Guiblin P et al 1995). Cette asymétrie positive se traduit également par le fait que la moyenne des teneurs (5,48 g/t) est supérieure à la médiane (2,9 g/t), qui est elle-même supérieure au mode (1.00)

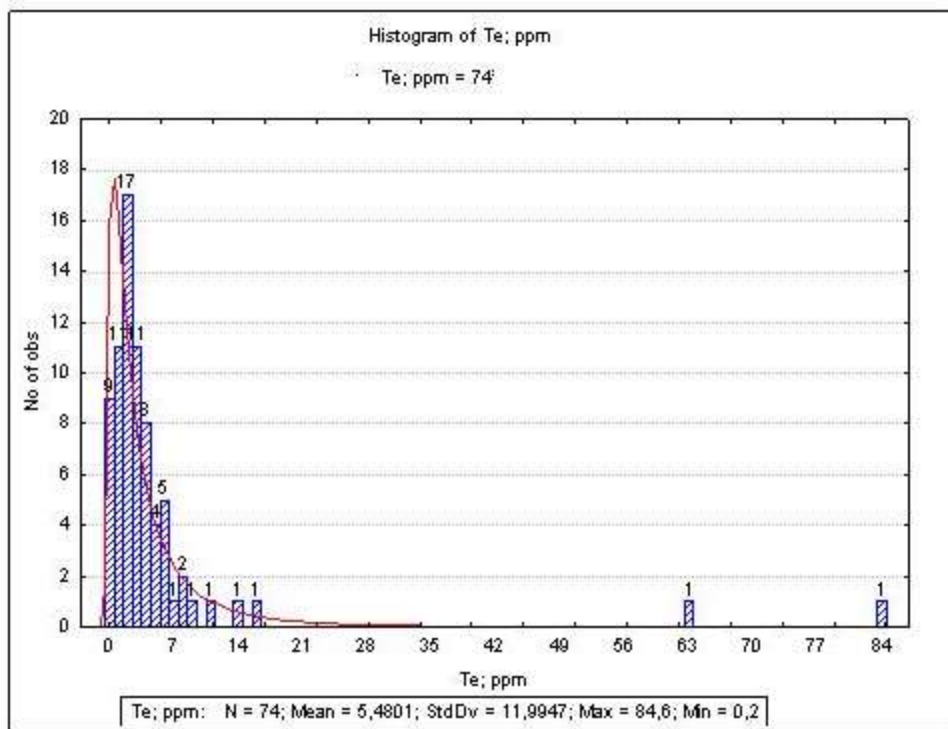


Figure (II- 16) : Histogramme des teneurs en Or des 74 valeurs

L'histogramme des teneurs montre également, l'existence de deux valeurs extrêmes (63,3 et 84,6), qui semblent ne pas appartenir à la population étudiée, ces deux valeurs sont éliminées pour la suite de notre étude statistique. Ces valeurs extrêmes, fréquemment rencontrées dans les gisements aurifères, ne sont pas des valeurs aberrantes, mais si on les conserve, il y a un risque sérieux de surestimer la teneur moyenne du gisement (Armstrong M, et al ,1997).

4) Statistique Inductive (probabiliste)

4.1) Modèle de distribution log-normal

Les distributions asymétriques (telles que les valeurs étudiées) ne permettent pas de déterminer des valeurs statistiques qui permettent d'estimer les valeurs réelles d'une population donnée. Dans ce cas, les valeurs de la variable étudiée (teneur) sont transformées en logarithme afin de normaliser la distribution (la rendre symétrique). Cette opération dite « une anamorphose » permet ainsi, de raccorder cette distribution asymétrique à un model log-normal.

4.1.1) Les Statistiques des valeurs en logarithmes

Le résultat de cette transformation logarithmique sur les 72 valeurs est résumé dans le tableau2.

Nombre de valeurs N	72
Moyenne m	0,926242
Médiane M_e	1,029619
Mode M_o	1,0000
Minimum Min	-1,609438
Maximum Max	2,772589
Variance s^2	0,850624
Ecart type s	0,922293
Coefficient de Variation	99,573663
Skewness	-0,684913

Tableau (II- 7): Résultat statistique des 72 valeurs obtenues par la transformation logarithmique

4.1.2) Histogramme et modèle de distribution

La distribution des logarithmes des teneurs est légèrement dissymétrique du coté de fortes valeurs Figure (II. 17). Cette dissymétrie ce traduit par le fait que la moyenne, la médiane et le mode ont des valeurs différentes, et que le skewness est différent de zéro. La distribution des logarithmes des teneurs ne peut donc pas être raccordée à une loi normale.

L'histogramme de la Figure (II- 17) présente une bimodalité, qui révèle une hétérogénéité des valeurs étudiées à laquelle il faut bien prendre garde. Cette bimodalité peut

être expliquée par l'existence de deux probables populations décelées par les diagrammes des Figure (II- (17,18)). Le diagramme des probabilités selon la loi normale Figure (II- 18) permet de distinguer les deux populations par le point d'inflexion du diagramme selon la méthode employée par Sinclair (in Mezghache H 1989).

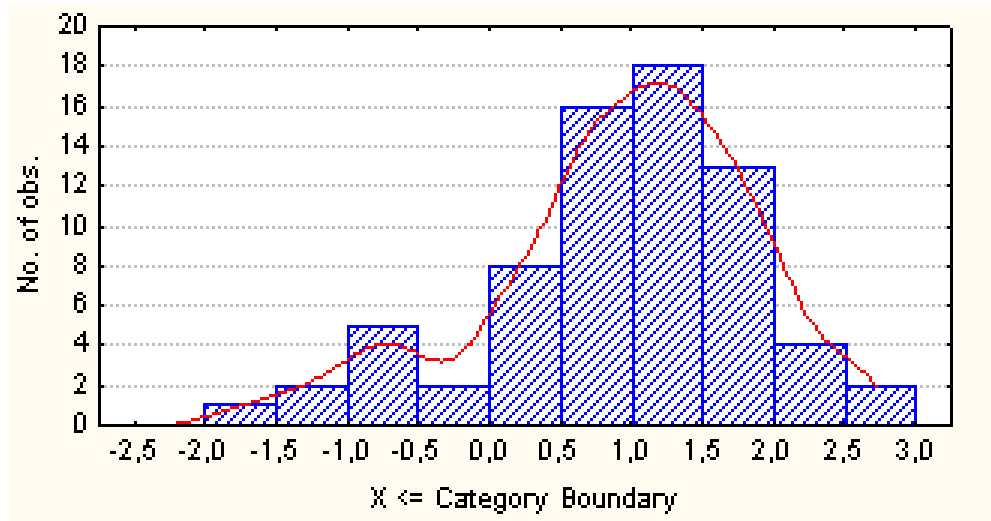


Figure (II- 17): Histogramme des 72 valeurs obtenues par la transformation logarithmique

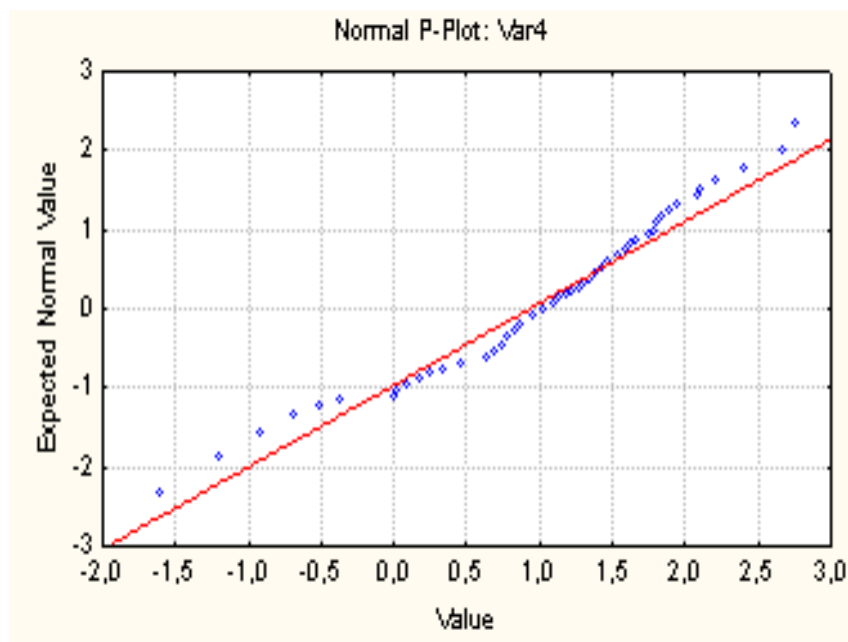


Figure (II- 18): Diagramme des probabilités selon la loi normale

Le diagramme de la Figure (II- 18) permet de vérifier le modèle de distribution choisis (modèle de la loi normale). Ce diagramme montre que les valeurs de la teneur sont alignées à l'exception de quelques valeurs. Ces valeurs appartiendraient à la première population supposée par le diagramme de la Figure (II- 17). L'élimination de ces valeurs, a généré un nouvel ensemble de données formé de 64 valeurs comprises entre -0,51 et 2,77

L'histogramme obtenu Figure (II- 19) est symétrique et présente une valeur du skewness presque nulle (tableau (II-.8)).

Nombre de valeurs	64
Moyenne m	1.1473
Médiane	1,115000
Mode	1,0000
Minimum	-0,510000
Maximum	2,772589
Variance s^2	0,552417
Ecart type s	0,743248
Coefficient de Variation	59,75
Skewness	-0.035

Tableau (II-.8) : Résultat statistique des 64 valeurs de la variable Teneur (en valeurs logarithmiques)

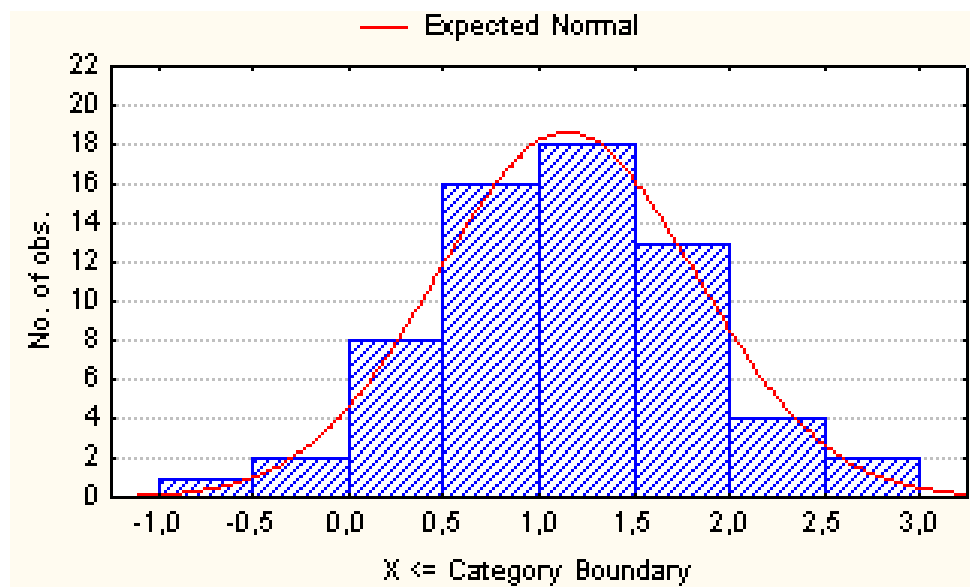


Figure (II- 19): Histogramme des fréquences des 64 valeurs de la variable Teneur

Les valeurs de la moyenne (1.1473), la médiane (1,115000) et le mode (1,000) sont sensiblement égales. Le coefficient de variation CV est réduit à la valeur de 59.75

Le diagramme des probabilités selon la loi normale Figure (II- 20), montre que les valeurs des teneurs sont bien alignées avec ceux des valeurs estimées en utilisant le modèle probabiliste normal, par conséquent, nous pouvant supposer que, les teneurs en or de la zone 8 suivent la loi log-normale.

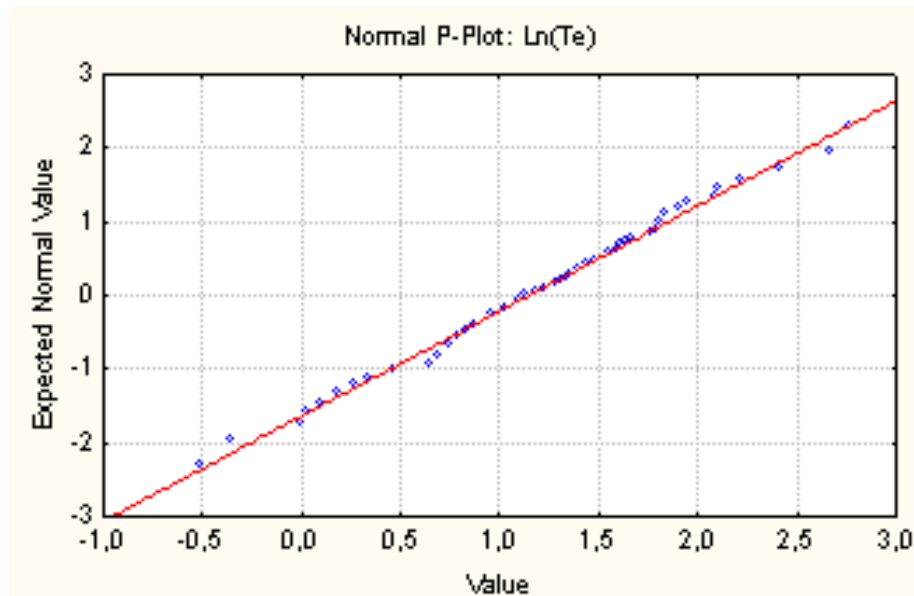


Figure (II- 20): diagramme des probabilités du logarithme des teneurs en Or, selon la loi normale

4.2) Test χ^2

Pour confirmer que le modèle de distribution de la teneur est bien le modèle Log-normal, nous avons réalisé un test de χ^2 . Ce test a été réalisé pour un seuil de signification

$\alpha = 5 \%$ c'est-à-dire, le niveau de probabilité pour que l'hypothèse nulle H_0 soit rejetée alors qu'elle est en fait exacte. et avec un degré de liberté $v = 5$

On a trouvé $\chi^2 = 0.949$ alors que $\chi_c^2 = 9.48$

Le résultat ci-dessus montre bien que la variable teneur suit le modèle de distribution log-normal.

5) Statistiques descriptive de la puissance des corps minéralisés

5.1) Les Statistiques de la variable puissance

La statistique de la variable puissance de la minéralisation est présentée par le Tableau (II- 7).

Nombre de valeurs N	74
Moyenne m	1,128649
Médiane M_e	1,150000
Mode M_o	1,0000
Minimum Min	0,250000
Maximum Max	3,220000
Variance s^2	0,456031
Ecart type s	59,832676
Coefficient de Variation CV	59,832676
Skewness	0,761970

Tableau (II- 9): Résultat de l'étude statistique de la variable puissance de la minéralisation.

5.2) Histogramme de la distribution

L'histogramme de cette variable est bimodal Figure (II- 21), ce qui montre qu'il s'agit de deux populations. Une population caractérisant des corps minéralisés à faible puissance dont la valeur la plus fréquente est égale à 0.6 m et une deuxième population, dont la valeur la plus fréquente est de 1.3 m, et dont la valeur maximale peut atteindre 3 mètre

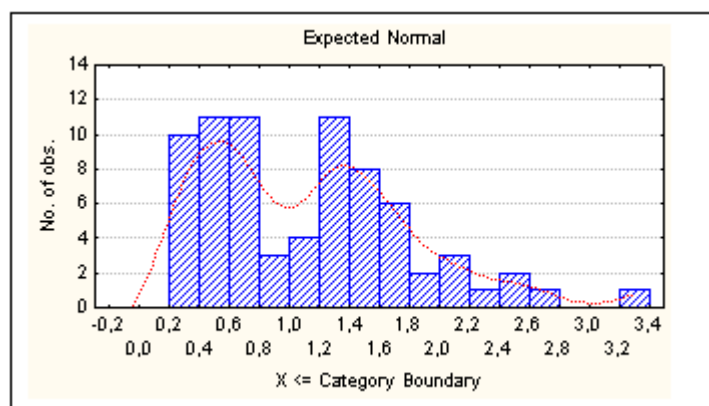


Figure (II- 21): Histogramme des fréquences de la variable puissance de la minéralisation

6 Etude des corrélations

6-1) la corrélation entre teneur et puissance

Le diagramme de corrélation entre la variable teneur et la variable puissance

Figure (II. 22) montre qu'il n'y a aucune corrélation significative entre les deux variables citées ci-dessus. Donc on peut conclure que, les fortes ou faibles valeurs prises par la variable teneur peuvent être observées indépendamment de la valeur de la puissance

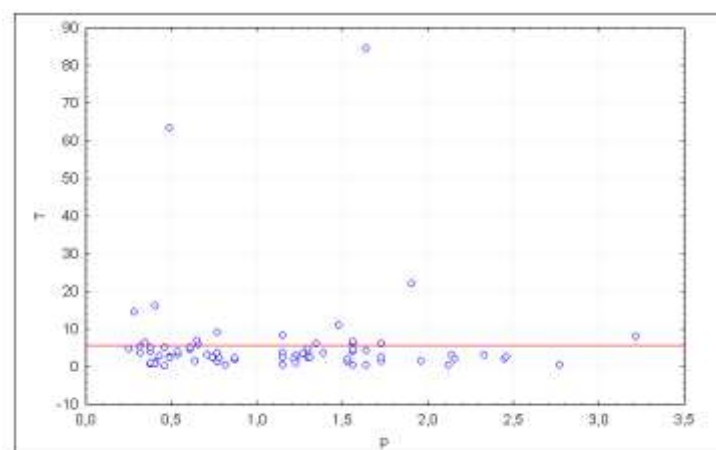


Figure (II. 22): Nuage de corrélation entre la variable teneur et la variable Puissance

6-2) la corrélation entre teneur et la cote Z

En vu de vérifier, s'il existe une éventuelle corrélation entre la teneur et la cote Z ; c'est-à-dire voire comment varie la teneur en profondeur, nous avons réalisé un diagramme de corrélation entre les deux variables citées ci-dessus figure (II. 23).

Le nuage de corrélation montre qu'il y a une très faible corrélation entre la teneur et la cote Z, et que les plus fortes valeurs sont localisées près de la surface, en l'occurrence les deux

valeurs extrêmes que nous avons du éliminé lors de l'étude statistique. Même constat sur le nuage de corrélation obtenu par suite de l'élimination des valeurs extrêmes figure (II. 24)

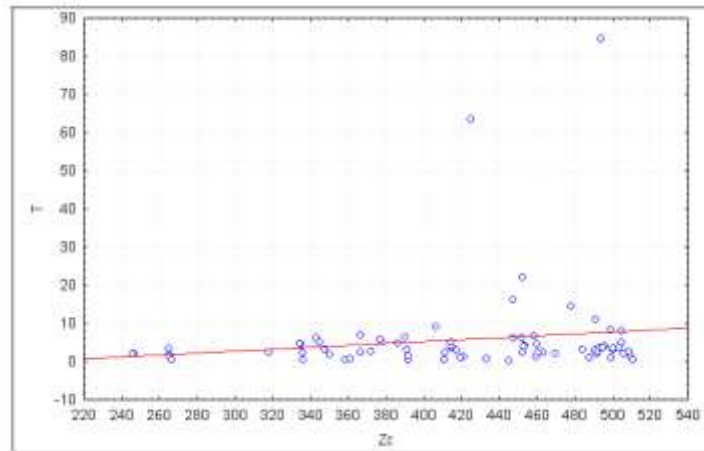


Figure (II. 23): Nuage de corrélation entre la variable teneur et la cote Z
En utilisant les 74

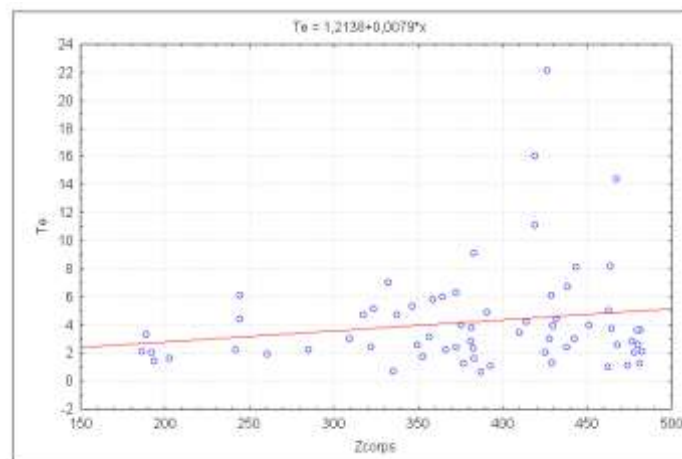


Figure (II. 24): Nuage de corrélation entre la variable teneur et la cote Z
utilisant les 64 valeurs

Partie 3

Etude Géostatistique

CHAPITRE I

1) Introduction :

La géostatistique est une discipline qui permet d'étudier les sciences de la Terre par les mathématiques. Son principal domaine d'utilisation a historiquement été l'estimation des gisements miniers, mais actuellement son domaine d'application est beaucoup plus large ; car tout phénomène spatialisé peut être étudié en utilisant la géostatistique.

L'histoire de la géostatistique est liée à l'estimation des gisements exploités dans les mines. Dans les années 50, un professeur de l'université du Witwatersrand en Afrique du Sud, Krige s'est aperçu que la variabilité de la teneur du minerai d'or était liée à la taille, c'est-à-dire au support, sur lequel celle-ci était calculée. La variabilité des teneurs sur panneau est ainsi beaucoup plus faible que la variabilité des teneurs sur carottes (échantillon cylindrique extrait du sol). Cette théorie a ensuite été développée pendant les années 60 par un ingénieur français du Corps des Mines, Georges Matheron qui y consacra sa vie et fonda le centre de géostatistiques de l'École des Mines de Paris à Fontainebleau. En 1962 il donna la définition suivante au terme de géostatistique « *La géostatistique est l'application du formalisme des fonctions et l'estimation des phénomènes naturels* ».

La mine est le domaine originel de la géostatistique. Celle-ci a développé un certain nombre de concepts et de méthodes permettant de formaliser et de résoudre les problèmes rencontrés à différents stades de l'évaluation minière, en étudiant de près les corrélations spatiales qui existent dans les données minières, pour atteindre cet objectif, on doit modéliser ces données par un outil probabiliste qu'on appelle le « Variogramme », qui a son tour sera employé par une technique d'estimation dite « Krigeage », une appellation qui dérive du nom du Professeur sud africain « Krige ».

Le Krigeage permet l'estimation des ressources in situ, que ce soit en contrôle des teneurs à l'exploitation, ou bien en étude de faisabilité; il évite le biais conditionnel et la surestimation des valeurs riches, si son voisinage est bien choisi.

L'étude de faisabilité, permet en menant une campagne de sondage à maille large la prévision des réserves récupérables au-dessus de teneurs de coupures ; en l'occurrence, le tonnage et la teneur du gisement donc la quantité Q de métal contenue, c'est ce qu'on appelle l'estimation globale. Ainsi, si la quantité Q est suffisante on passe au calcul du projet c'est-à-dire :

- Définir une méthode d'exploitation adéquate aux conditions naturelle du gisement.
- La sélection des blocs exploitables ; c'est à dire le découpage du gisement en blocs v

Avec $Z(v)$ la teneur du bloc, ce dernier ne sera exploité que si sa teneur est supérieure à Z_c teneur de coupure, c'est l'étape primordiale pour l'estimation des réserves récupérables

2) notions de base en géostatistique

2.1) variables régionalisées et fonctions aléatoires

Une variable régionalisée « VR » est une variable qui prend ses valeurs en chaque point d'un certain espace G MATHERON (1965). Ce type de variable est souvent une caractéristique d'un certain phénomène ; a titre d'exemple : les teneurs en métaux, sont caractéristique d'une minéralisation, ainsi, la plupart des variables étudiées en science de la terre peuvent être considérées comme étant des variables régionalisées.

Du point de vue mathématique, une variable régionalisée n'est qu'une fonction $Z(x)$ du point x , généralement se présente sous deux aspects voir schéma de la figure (III-1)

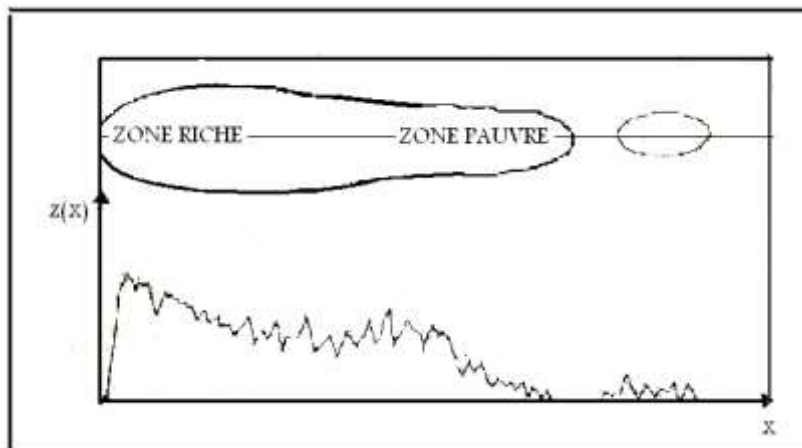


Figure (III-1): Aspect aléatoire et structuré d'une variable régionalisée

- Un aspect aléatoire, imprévisible et irrégulier.
- Une tendance régulière structurée et prévisible

Ce double aspect de la fonction aléatoire ne peut être traduit que par le langage probabiliste des fonctions aléatoires

Une fonction aléatoire $Z(x)$ peut être vue comme un ensemble de variables aléatoires

$Z(x_i)$ définies en chaque point x_i du gisement G ou $Z(x) = \{Z(x_i), \forall x_i \in G\}$ (A. Journel 1977).

Les variables $Z(x_i)$ et $Z(x_i+h)$ sont en général corrélées entre elles, cette corrélation dépend du vecteur h (module et direction) séparant les deux points x_i et x_{i+h} et de la nature de la variable considérée ; par exemple la variabilité spatiale d'une teneur en or dans un placier n'a aucune raison d'être la même que celle d'une teneur en or dans un amas. (A. Journel 1977). Ainsi, cette corrélation permet d'exprimer la structure spatiale de la variable régionale $Z(x)$.

2.2) Support et champ

Nous avons vu ci-dessus, que la variable régionale, prend ces valeurs sur un certain champ, par exemple un gisement ou une partie d'un gisement, mais une variable régionalisée n'est mesurable que sur un certain support, par exemple, une carotte de sondage constitue un support de mesure pour les variables régionales suivantes (la teneur, la puissance, le pendage...etc.)

2.3) Hypothèses de travail

Pour étudier cette fonction aléatoire $Z(x)$, la géostatistique se fixe les hypothèses de base suivantes :

- la variable régionalisée $z(x)$, est une réalisation d'une fonction aléatoire $Z(x)$
- une fonction aléatoire est une famille de fonction chacune ayant une probabilité.
- En un point x_0 , $z(x_0)$ est une réalisation d'une fonction aléatoire $Z(x_0)$.

Pour définir une fonction aléatoire, on détermine les termes suivants :

- L'espérance mathématique ou moment d'ordre un de la fonction aléatoire FA $Z(x)$

$$E Z(x) = m(x)$$

- La variance ou le moment d'ordre deux de la FA $Z(x)$

$$\text{Var } Z(x) = s^2(x)$$

- La covariance de la FA $Z(x)$

$$\text{Cov } (Z(x) Z(y)) = k(x, y)$$

2.3 1) Hypothèses de stationnarité

En pratique, il est impossible d'estimer les caractéristiques de la F.A $Z(x)$, puisque on ne connaît que très peu de données. A cet effet, on doit particulariser la F.A $Z(x)$, en disant que, la FA $Z(x)$ est stationnaire c'est-à-dire ; que la loi de la F.A $Z(x)$ est la même en tous les points x et nous considérons également que, la valeur prise par une V.R $z(x)$ en un point donné x comme étant, la réalisation unique d'une FA $Z(x)$. La différence entre les valeurs prises par deux V.A $z(x)$, $z(y)$ est également une V.A dont on peut calculer la variance et la covariance.

Pour atteindre ces objectifs, on pose certaines hypothèses concernant la régularité du phénomène régionalisé. On suppose que:

- L'espérance mathématique ne dépend pas de x .

$$E [Z(x)] = m$$

- L'espérance des écarts est zéro.

$$E [Z(x) - Z(x+h)] = 0$$

$$\text{Puisque } E [Z(x)] = E [Z(x+h)] = m$$

2.3.2) Stationnarité du second ordre

La covariance entre deux points ne dépend que de la distance qui les sépare h .

$$\text{Cov} (Z(x), Z(x+h)) = C(h).$$

$C(h)$ est appelé fonction de covariance ou covariogramme

CHAPITRE II L'ETUDE VARIOGRAPHIQUE

1) Introduction

Puisque l'hypothèse de stationnarité de la fonction aléatoire F.A $Z(x)$ est trop rigoureuse, alors nous considérons que les accroissements de la F.A $Z(x)$ qui sont stationnaires ; c'est-à-dire que $Z(x)-Z(x+h)$ est une fonction aléatoire stationnaire. Cette solution permet de travailler sous l'hypothèse intrinsèque, dont les propriétés sont les suivantes :

- $E(Z(x+h)-Z(x)) = 0$
- $\text{Var}(Z(x+h)-Z(x)) = E(Z(x+h)-Z(x))^2 = 2\gamma(h)$

$\gamma(h)$ est ce qu'on appelle le Variogramme

2) Le Variogramme et le Covariogramme

La fonction la plus utilisée en géostatistique pour décrire la continuité de la VR est le variogramme $\gamma(h)$, et ce surtout parce qu'elle est plus simple à estimer que la covariance $C(h)$ (qui exige l'estimation préalable de l'espérance mathématique), mais également parce qu'elle permet d'accommoder les situations où la variance $\text{Var}(Z(x))$ n'est pas définie

Le Variogramme et ou le Covariogramme sont des outils qui permettent l'étude de la structure spatiale d'un phénomène régionalisé.

Le Variogramme est défini par :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{VAR}(Z(x) - Z(x+h)) = \gamma(h) = \frac{1}{2} E[(Z(x) - Z(x+h))^2] \quad (1)$$

Le Covariogramme est défini par :

$$C(h) = E[(Z(x+h) - m(x+h)) * (Z(x) - m(x))] \quad (2)$$

La relation entre Variogramme et le covariogramme

$$\gamma(h) = \sigma^2 - C(h) = C(0) - C(h) \quad (3)$$

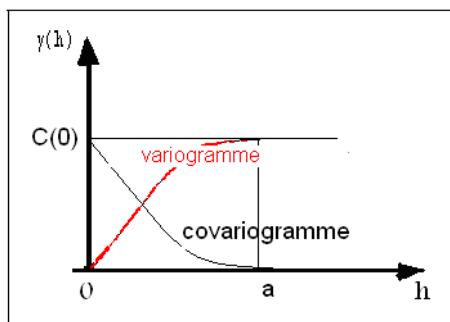


Figure (III-2): relation entre variogramme et covariogramme

3) Propriétés du variogramme et du covariogramme

Le variogramme est une fonction symétrique paire souvent croissante et positive

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(h) \geq 0$$

$$\gamma(h) = \gamma(-h)$$

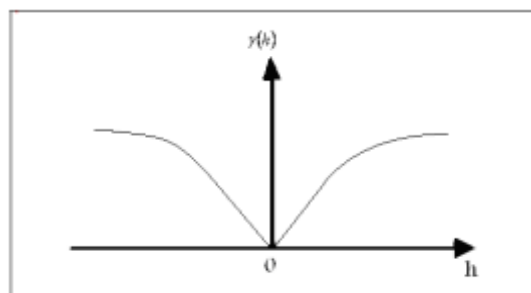


Figure (III-3): courbes de variogrammes présentant la symétrie

La covariance et le Variogramme sont des fonctions symétriques vérifiant les relations suivantes :

$C(0) = \text{var}(Z(x)) \geq 0$ car une variance a priori ne peut être négative

$C(h) = C(-h)$ la covariance est une fonction paire

$C(h) \leq C(0)$

Ceci dit que si on prend deux points situés en x et $x+h$, donc séparés d'une distance h le degré de corrélation ou tout simplement le degré de ressemblance entre deux variables $Z(x)$

et $Z(x+h)$ diminue au fur et à mesure que la distance h augmente et par conséquent cette corrélation devient quasiment nulle quand h est trop grande

$$C(h) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty$$

3-1) La portée a

Distance à partir de laquelle, deux observations ne sont plus corrélées, donc indépendantes

Pratiquement, $C(h) = 0$ dès que $h = a$ et la valeur du variogramme correspond à la variance de la variable $z(x)$. (cf. Figure (III-2))

3-2) Le palier

Dans le cas de variables régionales stationnaires la courbe du variogramme est caractérisée par un palier qui correspond à la valeur de la variance de la variable $z(x)$, c'est-à-dire σ^2

$\sigma^2 = C_0 + C$ C_0 est appelé effet pépite ; due à des variations à très courte échelle, erreurs de localisation ou d'erreurs de mesure.

4) Analyse structurale

Le Variogramme est l'outil d'étude structurale par excellence, il renseigne sur le degré de régularité du phénomène étudié en l'occurrence, la minéralisation pour notre cas et surtout sur le rayon du champ d'influence qui est très important à estimer, qui sera utilisé pour d'éventuelle estimation, à cet effet on distingue les trois cas selon le Comportement du Variogramme à l'origine:

4.1) nul à l'origine

Pour $h = 0$ puis $\gamma(h) = C_0$ pour $h \neq 0$ ce cas est dit pur effet de pépite c'est-à-dire qu'on est devant le cas de pur hasards donc aucune relation de dépendance spatiale

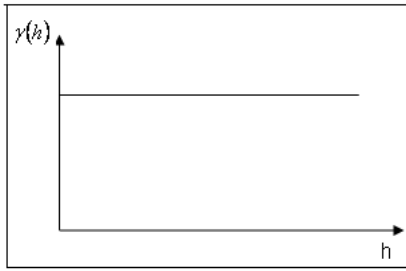


Figure (III-4) : courbe de variogrammes pur effet de pépite

4.2) Comportement parabolique

$$\gamma(h) = A |h|^2 \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

Ce cas témoigne d'un phénomène très régulier, donc l'existence d'une dérive et par conséquent le non respect de l'hypothèse de stationnarité.

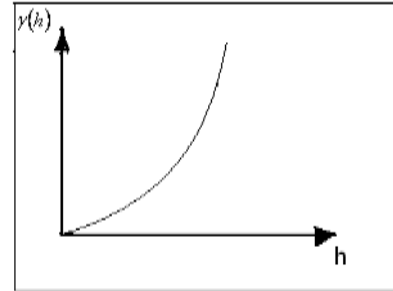


Figure (III-5): courbe de variogrammes présentant une dérive

4.3) Comportement linéaire

$$\gamma(h) = A |h| \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

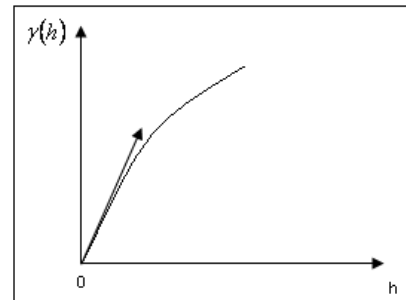


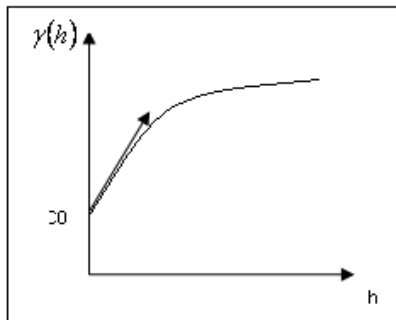
Figure (III-6): courbe de variogrammes présentant une dérive

4.4) Discontinuité à l'origine ou effet de pépite C_0 :

Dans ce cas, la valeur $\gamma(0) = C_0$ c'est-à-dire que $\gamma(h)$ ne tend pas vers

zéro quand $h \rightarrow 0$ alors que par définition de $\gamma(0) = 0$

Figure (III-7): Courbe de variogrammes présentant une dérive



5) Le Variogramme expérimental

Soit $Z(x)$ une FA supposée stationnaire sur un domaine limité V , sur un tel domaine limité dans l'espace, on peut réaliser le variogramme dit expérimental à partir des données d'échantillonnage $z(x_i)$ prélevées sur le domaine V

On estime le variogramme à l'aide de l'expression ci-dessous proposée par Matheron .D 1962:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (4)$$

Où $N(h)$ est le nombre de paires dont les éléments sont séparés par la distance vectorielle h .

Pour calculer le variogramme, dans le cas de données non alignées (cas où la maille de prélèvement de données est irrégulière), les paires de données sont groupées en classes de distances et en classes angulaires. Ce regroupement en classes permet d'obtenir une estimation de $\gamma(h)$ basée sur un nombre suffisant de paires. La Figure (III-8) illustre les paramètres requis pour estimer $\gamma(h)$ et qui sont cités ci-dessus.

- Distance de l'intervalle de classe

- La tolérance sur l'intervalle de classe Δh , qui doit être inférieure ou égale à la moitié de l'intervalle de classe

- L'angle azimutal θ (direction suivant laquelle $\gamma^*(h)$ est calculé).

- La tolérance angulaire $\Delta \theta$ (pour définir des classes angulaires $[\theta \pm \Delta \theta]$)

- La largeur de bande ou distance maximale acceptable dans la direction perpendiculaire au vecteur directeur.

Cette méthode de calcul du variogramme, bien qu'elle soit inévitable dans le cas de données non alignées (maille irrégulière), fait que le variogramme soit lissé. Cet effet de lissage est d'autant plus important que la tolérance soit grande.

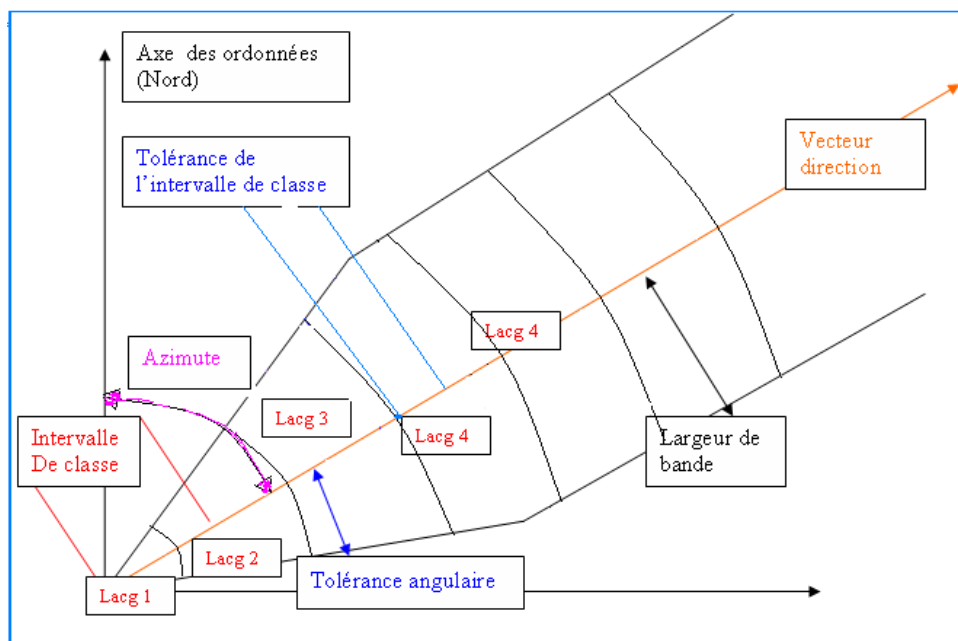


Figure (III-8): Schéma montrant la direction de recherche, la tolérance angulaire et la largeur de bande, Deutsch Journal, 1992 in Pannatier, 1996

On peut également, calculer le variogramme selon certaines directions spécifiques (variogramme directionnels) pour la recherche de structures anisotropes.

6) Les Anisotropies

Les Anisotropies se manifestent par un comportement différent du variogramme dans les différentes directions de l'espace. On peut distinguer deux types :

6.1) L'Anisotropie Géométrique

On observe, selon divers directions, des paliers et des composantes peptiques identiques mais des portées différentes.

Les portées maximales (a_g) et minimales (a_p) s'observent selon deux directions orthogonales, dans ce cas, une simple transformation linéaire des coordonnées suffit pour rétablir l'isotropie c'est-à-dire, rendre les portées identiques (et égales à a_g suivant toutes les directions en multipliant la composante de la portée parallèle à a_p par le facteur (a_g/a_p).

Les portées décrivent une ellipse dont l'axe majeur est orienté parallèlement à a_g .

$$\frac{(a_g \cos \vartheta)^2}{a_g^2} + \frac{(a_g \sin \vartheta)^2}{a_p^2} = 1$$

Connaissant a_g , a_p , on peut trouver a_θ ou θ désigne l'angle mesuré par rapport à la direction ou est rencontré a_g

$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\left(a_p^2 \cos^2 \vartheta + a_g^2 \sin^2 \vartheta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi, on peut évaluer $\gamma(h, \theta)$ soit en utilisant a_θ , soit en corrigeant la distance h pour tenir compte de l'anisotropie :

$$\gamma(h_\theta, \theta) = \gamma(h_g)$$

Modèle isotrope avec portée a_g

$$h_g = \sqrt{(h_\theta \cos \vartheta)^2 + \left(\frac{a_g}{a_p} h_\theta \sin \vartheta\right)^2} \quad (2)$$

Pratiquement, on observe l'anisotropie géométrique là où le corps étudié présente des allongements préférentiels (les lentilles, paléochenaux, strates...)

L'estimation correcte et à la limite, la détection, d'anisotropie géométrique n'est possible, en pratique, qu'à quatre conditions (fortement liées) devant être remplies simultanément:

- Le nombre de données est suffisant (au moins 50)
- Le facteur d'anisotropie est important (au moins 1.5)

- Une des directions utilisées dans le calcul du variogramme est près de la direction de plus grande portée.
- La fenêtre angulaire utilisée est suffisamment étroite.

6.2) L'Anisotropie Zonale

Dans l'espace à trois dimensions, il arrive souvent que le phénomène régionalisé soit marqué par une plus grande variabilité suivant une direction que suivant les deux autres directions, figure (III-9). Dans ce cas de figure on doit prendre un variogramme de la forme :

$$\gamma(h) = \gamma_0(h_1, h_2, h_3) + \gamma_1(h_3)$$

Où : γ_0 est un variogramme isotrope et γ_1 le variogramme de la direction de plus grande variabilité.

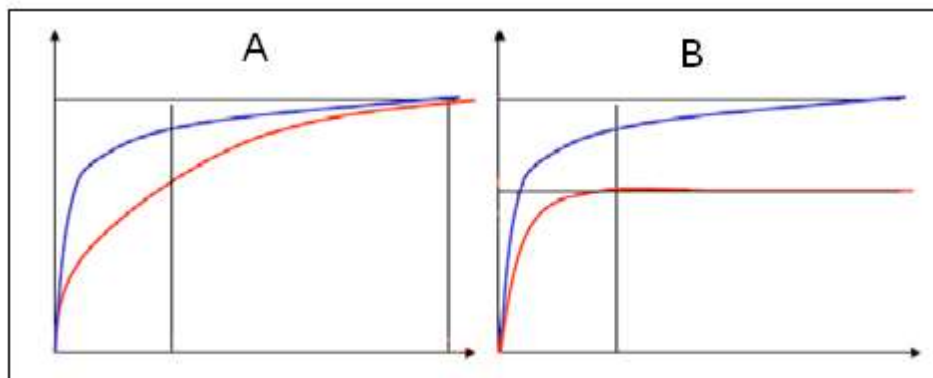


Figure (III-9): Illustration des anisotropies (A : Géométrique, B : Zonale).

7) Les Variogrammes théoriques et modélisation

Les modèles sont des expressions analytiques que l'on tente d'ajuster le mieux possible aux points des variogrammes expérimentaux. MATHERON [1970] a démontré que la fonction qui permet l'ajustement, doit être conditionnellement définie positive et que pour h tend vers ∞

$\gamma(h)$ doit nécessairement croître moins que h^2 , c'est-à-dire que limite de $\frac{\gamma(h)}{h^2}$ tend vers 0 quand h tend vers 0

Bien qu'il existe un grand nombre de modèles de variogramme admissibles, on en utilise couramment en géostatistique que quatre qui sont :

7.1) L'effet Pépite :

Ce modèle est illustré par la figure c'est une simple droite horizontale, c'est le cas du pur hasard, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune relation de dépendance entre les valeurs quelque soit la distance qui les sépare

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & (h = 0) \\ C_0 & (h > 0) \end{cases}$$

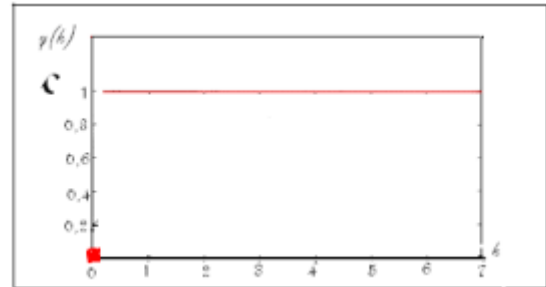


Figure (III-10): Effet pépite

7.2) Le modèle Sphérique

Le modèle sphérique est l'un des modèles les plus fréquemment rencontrés lors de l'ajustement des variogrammes expérimentaux. L'expression mathématique ci-dessous permet de tracer le diagramme du variogramme théorique en fonction de h appelé le pas.

Ce diagramme montre qu'il s'agit d'une fonction positive et croissante au fur et à mesure que la distance entre les points (h) augmente et puis atteint un seuil appelé (palier) dès que la distance entre les points atteint une certaine valeur dite la portée (a).

Le schéma ci-dessous figure (III-11) exprime le cas d'un modèle sphérique standardisé, c'est-à-dire pour un seuil (le palier) $C_0 + C = 1$

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[\frac{3|h|}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{|h|}{a} \right)^3 \right] & (0 < h < a) \\ C & (h \geq a) \end{cases}$$

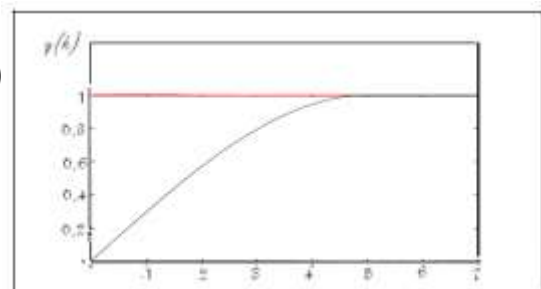


Figure (III-11): Le modèle sphérique

7.3) Model exponentiel

Le variogramme du modèle exponentiel est tout comme le modèle sphérique, sauf qu'il atteint la portée à 95% du seuil, puisque la courbe atteint le seuil asymptotiquement. Ce modèle est

illustré par la figure (III-12). L'expression mathématique ci-dessous permet de tracer le diagramme de ce modèle théorique

$$\gamma(h) = C \left[1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right) \right]$$

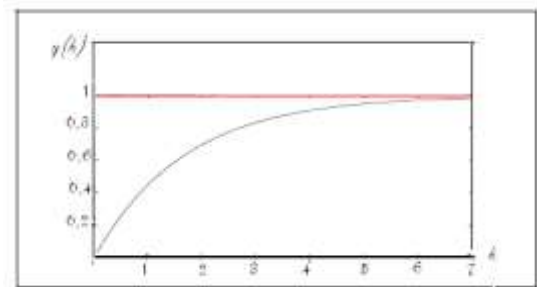


Figure (III-12): modèle exponentiel

7.4) Modèle Gaussien

Ce modèle de variogramme diffère des autres modèles par le fait, qu'il présente une allure parabolique à l'origine, ce qui traduit une grande continuité de la variable régionale

La portée effective est donnée par la relation : $(3)^{1/2} a$

Ce modèle est illustré par la figure (III-13). L'expression mathématique ci-dessous permet de tracer le diagramme de ce modèle théorique

$$\gamma(h) = C \left[1 - \exp\left(-\frac{|h|^2}{a^2}\right) \right]$$

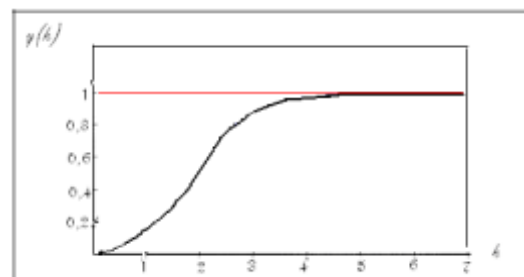


Figure (III-13): modèle Gaussien

Lors du calcul et de l'ajustement de modèles aux variogrammes expérimentaux il est très important de prendre certaines précautions :

- On accorde plus de poids aux points du variogramme expérimental calculés avec beaucoup de paires.
- Afin d'avoir un nombre suffisant de couples on s'accorde une tolérance sur h et θ .

- On essaie d'avoir $N(h) \geq 30$ pour chaque point expérimental du variogramme. Si ce n'est pas possible pour certaines classes, on accorde moins d'importance à ces points. Si le nombre de paires est très faible (≤ 10), on ne considère plus du tout le point.

- On accorde plus de poids aux premiers points du variogramme (h petit) car ce sont ces valeurs qui ont le plus d'impact dans les calculs géostatistiques.

- Lorsque h dépasse environ $d_{\max}/2$, on ne tient pas compte des valeurs du variogramme. d_{\max} est la taille du phénomène étudié dans la direction considérée.

- On cherche à obtenir des modèles les plus simples possible qui rendent bien compte des valeurs expérimentales.

8) relation entre variance et support de meure

Il est clair que la variance des supports d'exploitation d'une mine (blocs d'une certaine taille) est différente de la variance des points d'échantillonnage. Nous savons aussi que le rendement d'une exploitation donnée est fonction du support d'exploitation (effet support) et de la régularité de la minéralisation (effet information). Il est donc important de connaître la variance d'éventuels blocs d'une exploitation avant d'entamer son exploitation.

Le grand intérêt de la géostatistique réside dans le fait qu'elle permet de calculer des variances d'estimation des blocs.

8.1) Variance de blocs et de dispersion

La variance des blocs décrit l'amplitude théorique des variations des teneurs de bloc pour un domaine infini. C'est l'analogie de la variance ponctuelle (palier du variogramme) pour des blocs. Cette notion n'est définie que pour les modèles de variogramme avec palier.

La variance de dispersion décrit l'amplitude théorique des variations des teneurs de bloc à l'intérieur d'un domaine fini. Cette notion est définie même pour les variogrammes sans palier.

Nous pouvons donc calculer la variance des blocs de n'importe quelle taille en connaissant le variogramme ponctuel par la formule :

$$Var(Z_v) = \sigma_v^2 = \bar{C}(v, v) \quad (5)$$

En terme de variogramme et en utilisant la relation (3) nous avons :

$$Var(Z_v) = \sigma^2 - \bar{\gamma}(v, v) \quad (6)$$

La variance de dispersion d'un bloc v dans un domaine V est la différence de variabilité des teneurs mesurées sur les deux volumes. Elle est donnée par la formule :

$$D^2(v|V) = \sigma_v^2 - \sigma_V^2 \quad \text{et on a} \quad \begin{array}{ll} v \rightarrow 0 & D^2(v|V) \rightarrow \bar{\gamma}(V, V) \\ v \rightarrow V & D^2(v|V) \rightarrow 0 \\ v \rightarrow \infty & D^2(v|V) \rightarrow \sigma_v^2 \end{array}$$

En terme de variogramme et en utilisant les relations (3) et (4) nous avons :

$$D^2(v|V) = \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) \quad (7)$$

Les relations précédentes permettent de définir une règle générale d'additivité des variances de plusieurs blocs de taille différente.

$$D^2(v_1|v_n) = D^2(v_1, v_2) + D^2(v_2, v_3) + \dots + D^2(v_{n-1}, v_n)$$

Avec : $v_1 < v_2 < \dots < v_n$

8.2) Variance d'estimation et d'extension

La variance d'estimation est une mesure de la précision des estimés, effectués par une méthode d'estimation linéaire quelconque.

Soit Z_v^* une estimation par combinaisons linéaires de n valeurs observées Z_i d'une VA Z_v par :

$$Z_v^* = \sum_1^n \lambda_i Z_i$$

Avec : λ_i les poids affectés aux valeurs Z_i

La variance de l'erreur d'estimation ($e=Z_v - Z_v^*$) est donnée par la formule :

$$\sigma_e^2 = \text{Var}(Z_v) + \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) - 2 \sum_i \lambda_i \text{Cov}(Z_i, Z_v) \quad (8)$$

En terme de variogramme et en posons $\sum \lambda_i = 1$ (condition de non biais) on a :

$$\sigma_e^2 = 2 \sum_i \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, v) - \bar{\gamma}(v, v) - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) \quad (9)$$

La variance d'extension est la variance d'estimation obtenue lorsqu'on étend la valeur d'un point à une surface ou un volume; la valeur d'un segment à une surface ou un volume; la valeur d'une surface à un volume, etc. Bref, il s'agit de variances d'estimation correspondant à des situations particulières qui, par leur simplicité, se prêtent bien à la construction d'abaques (Annexe 11)

8.2.1) Calcul des quantités $\bar{\gamma}(x_i, v)$ et $\bar{\gamma}(v, v)$

Les valeurs $\bar{\gamma}(x_i, v)$ et $\bar{\gamma}(v, v)$ peuvent être calculées de trois façons différentes :

- Intégration de $\gamma(h)$ pour obtenir une expression analytique : praticable en 1D.- Utilisation d'abaques pour des cas simple d'estimation et pour certains modèles (sphérique; exponentiel). Voire (Annexe 11)
- Approximation numérique par ordinateur.

8.3) Combinaison d'erreurs élémentaires pour une estimation globale

Le calcul de la variance d'estimation devient difficile lorsqu'on a un nombre important d'observations. Le principe de combinaison des erreurs élémentaires permet de

simplifier le calcul. Il consiste à décomposer une estimation donnée, en une série d'estimations élémentaire, approximativement indépendantes, pour lesquelles, la variance d'estimation est facilement calculable.

8.3.1) Cas d'un échantillonnage régulier :

Dans ce cas l'estimé est simplement

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

Ceci consiste à étendre la valeur de chaque point d'échantillonnage à un bloc dont il est le centre. On commet dans ce cas pour chaque bloc la même erreur σ_{ei}^2 .

La variance d'estimation globale est :

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_{ei}^2}{n}$$

8.3.2) Cas d'un échantillonnage aléatoire à densité uniforme (maille aléatoire stratifiée)

Dans ce cas on considère qu'on a implanté aléatoirement un point dans chaque bloc d'une grille régulière. Les dimensions des cellules de la grille dépendent de la taille du champ à estimer et de la densité de l'échantillonnage. On construit donc une grille de manière à avoir en moyenne, une observation par cellule.

La variance d'erreur d'estimation d'un bloc, par un point implanté aléatoirement dans le même bloc, n'est autre que la variance de dispersion d'un point dans un bloc. $D^2(\bullet|V)$.

La variance d'estimation globale est :

$$\sigma_e^2 = \frac{D^2(\bullet|V)}{n}$$

8.3.3) Cas d'un échantillonnage quelconque

L'usage dans le cas d'un échantillonnage quelconque, est de diviser le champ global en domaine V_i , de densité d'échantillonnage uniforme. On applique alors la méthode de la maille aléatoire stratifiée à chacun des domaines V_i .

L'estimation du champ global, se fait en combinant les estimés des domaines V_i pondérés par leur tailles :

$$Z_g^* = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^p V_i Z_{V_i}^* \quad \text{Avec} \quad V_g = \sum_{i=1}^p V_i$$

La variance d'estimation globale est donnée par :

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{V^2} \sum_{i=1}^p V_i^2 \sigma_{V_i}^2$$

CHAPITRE III : LE KRIGEAGE

1) introduction

En termes miniers, le problème du krigeage consiste, à trouver la meilleure estimation linéaire possible de la teneur d'un volume donné, compte tenu de l'information disponible (les teneurs des échantillons prélevés à l'intérieur ou à l'extérieur du volume et l'information structurale tirée de ces échantillons). Le krigeage revient à attribuer un poids à la teneur de chaque échantillon, dans le but de minimiser la variance d'estimation résultante.

Selon que la moyenne du processus est connue ou non, on distingue deux principaux types de krigeage : le krigeage simple et le krigeage ordinaire.

2) Le Krigeage ordinaire :

Supposons que l'on veuille estimer un bloc v centré au point x_0 . Notons Z_v la vraie valeur (inconnue) du bloc et Z_v^*

l'estimateur linéaire qu'on obtient par :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z_i$$

Où les Z_i représentent les variables aléatoires correspondant aux échantillons et les λ_i les poids correspondants.

Pour que l'estimateur soit sans biais, il faut que :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

La variance d'estimation associée est donnée par les formules (8) et (9).

Pour minimiser cette fonction sous la contrainte d'égalité, on solutionne par la méthode de Lagrange. Avec μ est le multiplicateur de Lagrange, on forme le lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\boldsymbol{\lambda}) &= \sigma_N^2 + 2\mu \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right) \\ &= \text{VAR}(Z_v) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \text{COV}(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{COV}(Z_v, Z_i) + 2\mu \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right) \end{aligned}$$

Le minimum est atteint lorsque toutes les dérivées partielles par rapport à chacun des λ_i et par rapport à μ s'annulent. Ceci conduit au système de krigeage ordinaire:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \lambda_j \text{COV}(Z_i, Z_j) + \mu = \text{COV}(Z_v, Z_i) & \forall i = 1 \dots N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \end{cases}$$

La variance d'estimation minimale, appelée variance de krigeage, est obtenue en substituant les équations de krigeage dans l'expression générale, pour la variance d'estimation et on obtient :

$$\sigma_k^2 = \text{VAR}(Z_v) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{COV}(Z_v, Z_i) - \mu$$

Comme la variance d'estimation s'écrit en termes de variogramme, on peut aussi écrire le système de krigeage en fonction du variogramme :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \lambda_j \bar{\gamma}(x_i, x_j) + \mu = \bar{\gamma}(v, x_i) & \forall i = 1 \dots N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Avec

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{\gamma}(v, x_i) - \bar{\gamma}(v, v) - \mu$$

En notation matricielle le système de krigeage et sa variance d'estimation s'écrivent :

$$K_o \boldsymbol{\lambda}_o = k_o$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & Cov(Z_1, Z_2) & \bullet & Cov(Z_1, Z_n) & 1 \\ Cov(Z_2, Z_1) & \sigma^2 & \bullet & \bullet & 1 \\ \bullet & \bullet & \sigma^2 & \bullet & 1 \\ Cov(Z_n, Z_1) & \bullet & \bullet & \sigma^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_v) \\ \bullet \\ \bullet \\ Cov(Z_n, Z_v) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et : $\sigma_{ko}^2 = \sigma_v^2 - \lambda_o' k_o$

$$\sigma_{ko}^2 = \sigma_v^2 - [\lambda_1 \bullet \bullet \lambda_n \mu] * \begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_v) \\ \bullet \\ \bullet \\ Cov(Z_n, Z_v) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le système de krigeage permet à d'estimer des points (krigeage ponctuel) ou des bloc (krigeage de bloc) en changeant le terme k_o .

3) Le Krigeage simple

Lorsqu'on connaît la moyenne « m » du champ à estimer ou on en possède un estimateur fiable, On peut former un estimateur sans biais, sans imposer la contrainte que la somme des poids soit égale à 1 :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z_i + \left(1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i\right) m$$

Comme pour le krigeage ordinaire la variance d'estimation s'écrit :

$$\sigma_N^2 = VAR(Z_v - Z_v^*) = VAR(Z_v) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j COV(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i COV(Z_v, Z_i)$$

On dérive par rapport à chacun des λ_i et ont trouve le système du krigeage simple :

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \text{COV}(Z_i, Z_j) = \text{COV}(Z_v, Z_i) \quad \forall i = 1 \dots N$$

La variance d'estimation, appelée variance de krigeage simple s'écrit:

$$\sigma_{ks}^2 = \text{VAR}(Z_v) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{COV}(Z_v, Z_i)$$

La variance de krigeage simple, est toujours inférieure à la variance de krigeage ordinaire. Et l'hypothèse de stationnarité requise, est plus forte que dans le cas du krigeage ordinaire, où seule l'hypothèse intrinsèque est requise. Ainsi, il n'est pas possible d'effectuer un krigeage simple, si le variogramme ne présente pas de palier. De plus, le système de krigeage simple, ne peut s'écrire directement en termes de variogrammes.

4) Propriétés du krigeage :

Les principales propriétés et caractéristiques associées au krigeage sont:

- Linéaire, sans biais, à variance minimale, par construction.
- Interpolateur exact ; si l'on estime un point connu, on retrouve la valeur connue.
- Présente un effet d'écran: les points les plus près reçoivent les poids les plus importants. Cet effet d'écran varie selon la configuration et selon le modèle de variogramme utilisé pour le krigeage. Plus l'effet de pépité est important, moins il y a d'effet d'écran.
 - Tient compte de la taille du champ à estimer et de la position des points entre eux.
 - Par l'utilisation du variogramme, tient compte de la continuité du phénomène étudié (effet de pépité, anisotropie, etc.).
 - Effectue généralement un lissage, i.e. les estimations sont moins variables que les teneurs réelles (point ou bloc) que l'on cherche à estimer.

5) la Validation croisée

La validation croisée, est une méthode qui permet de vérifier l'impact du choix du modèle de variogramme sur la précision de l'estimation par krigeage. En d'autre terme, permet d'évaluer La performance d'un modèle d'interpolation. Le principe de cette technique de validation des modèles de Variogramme est le suivant : une mesure $z(x_j)$ est temporairement soustraite du jeu de données $z(x_i)_{i=1..P}$. La valeur de z en ce point x_j est

alors réestimée par Krigeage, en utilisant l'information sur les points de mesure restants $(z(x_i)_{i \neq j})$ et le modèle de Variogramme $\gamma(h)$. Notons $z^*(x_j)$ cette valeur réestimée par krigeage et σ_j^2 la variance théorique de l'erreur d'estimation de $z(x_j)$ en ce point x_j . On signale que cette opération, menée pour tous les points $(x_i)_{i=1,p}$ pris un à un, permet de comparer l'erreur d'estimation expérimentale (différence entre la valeur réestimée par Krigeage $z^*(x_i)$ et la valeur réelle mesurée $z(x_i)$) et l'erreur d'estimation due au modèle de Variogramme à travers le calcul des expressions suivantes :

$$\text{Moyenne de l'erreur} \quad m_\varepsilon = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (z^*(x_i) - z(x_i))$$

$$\text{Variance de l'erreur} \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (z^*(x_i) - z(x_i))^2$$

$$\text{Moyenne de l'erreur standardisée} \quad \hat{m}_\varepsilon = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left(\frac{(z^*(x_i) - z(x_i))}{\sigma_i} \right)$$

$$\text{Variance de l'erreur standardisée} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left(\frac{(z^*(x_i) - z(x_i))}{\sigma_i} \right)^2$$

En définitif, le variogramme retenu doit assurer les points suivant :

- l'estimation soit sans biais, donc il faut que La moyenne de l'erreur tende vers zéro
- La variance de l'erreur standardisée, qui doit se rapprocher de 1, correspond au rapport entre les variances expérimentale et théorique de krigeage.
- Il faut que les erreurs de krigeage soient cohérentes avec la variance calculée.

CHAPITRE IV APPLICATION A LA MINERALISATION AURIFERE DE LA ZONE 8 D'AMESMESSA.

1) La Variographie de la teneur

Afin de déterminer le comportement et l'évolution des paramètres de la minéralisation dans l'espace, des variogrammes des teneurs et des puissances de la minéralisation ont été réalisés.

1.1) Le Variogramme expérimental de la teneur :

Les Variogrammes expérimentaux de la teneur, sont réalisés suivant le plan vertical, voire plus haut figure (II-4). Selon le même plan, on a pris quatre directions ; la direction horizontale (0°), la direction verticale (90°) et deux autres directions inclinées (45° et 135°) voire figure (III-14).

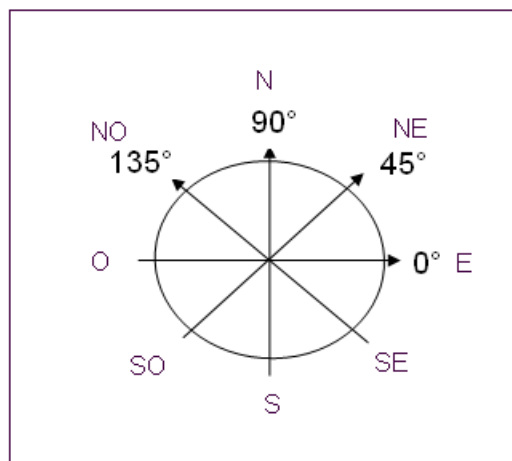


Figure (III-14): les quatre directions à prendre pour réaliser les variogrammes expérimentaux.

Les variogrammes obtenus sont présentés par la Figure (III-15).

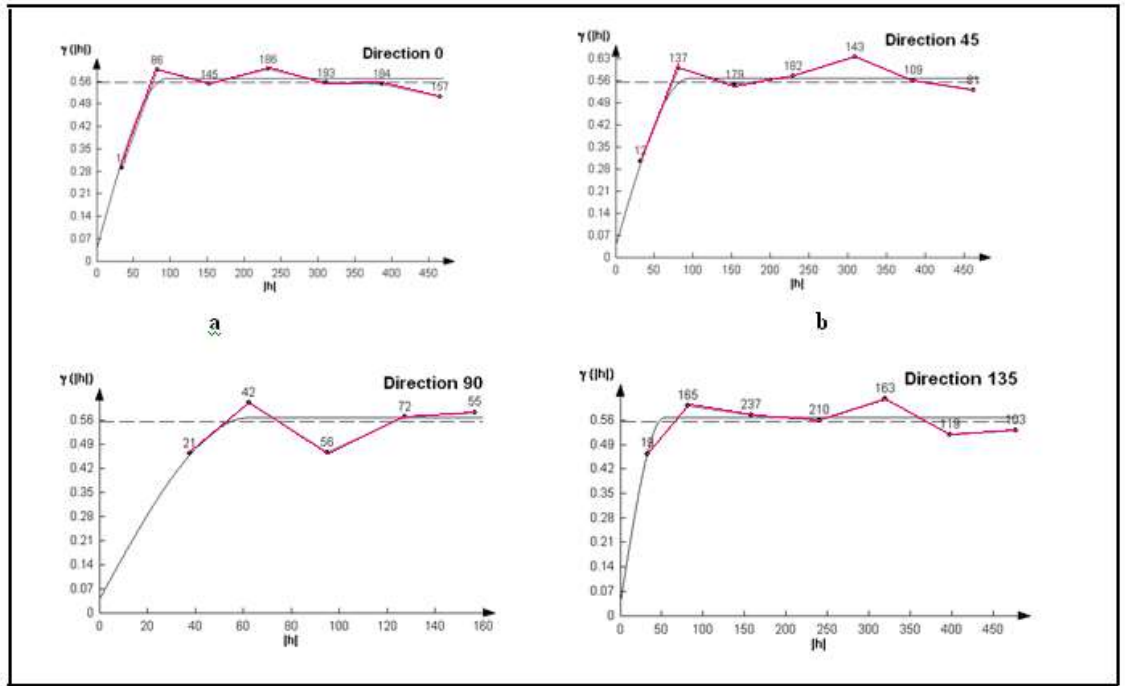


Figure (III-15). Variogrammes expérimentaux et théoriques selon les quatre directions

— Variogramme Expérimental. — Variogramme Théorique

Dans le cas d'une anisotropie géométrique, les portées diffèrent en valeur selon chaque direction, donc au lieu d'avoir un cercle (cas d'une isotropie) figure (III-14) on obtiendra une ellipse figure (III-16)

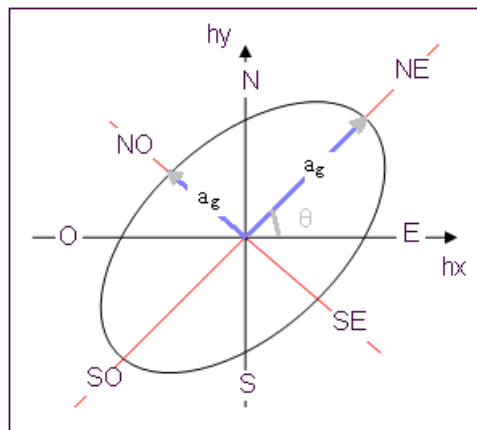


Figure (III-16): cas d'une anisotropie géométrique montrant la direction de maximum continuité et l'angle θ (a_g la grande portée a_p la petite portée)

1.2) Le modèle théorique d'ajustement

Pour que l'on puisse utiliser les données du variogramme expérimental, il est impératif de l'ajuster à un modèle théorique (voir paragraphe 7). Dans notre cas, le modèle théorique qui a permis un bon ajustement des variogrammes expérimentaux est le modèle sphérique Figure (III-11).

Ce modèle, montre un effet de pépité C_0 égal à 0.042. Cette discontinuité à l'origine traduit une irrégularité de la variable. Un tel comportement peut être expliqué soit par des erreurs de mesures dues au protocole expérimental, soit par l'échelle de la structure qui peut être très inférieure à l'espacement des données.

Ce modèle montre un palier (variance) de 0.57, cette valeur est très proche de la valeur estimée lors du calcul statistique Tableau (II-8). Pour estimer le facteur d'anisotropie, et l'angle θ précisant l'axe de meilleure continuité, il est vivement conseillé de réaliser le variogramme de surface

2) Le variogramme de surface

Dans le cas, où les variogrammes directionnels présentent un même palier mais différentes valeurs de la portée, on dit qu'il s'agit d'une anisotropie géométrique.

Cette anisotropie, sera estimée par le rapport a_g / a_p , ce rapport est dit facteur d'anisotropie

Où ; a_g est la valeur de la portée maximale (valeur du grand axe), a_p est la valeur de la portée minimale (valeur du petit axe).

Il faut déterminer également, l'angle de l'axe de grande portée θ .

Ces deux paramètres sont nécessaires pour le krigeage que l'on abordera dans le chapitre suivant

Pour estimer ces paramètres, on recourt à l'utilisation du variogramme surfacique qui n'est autre qu'une représentation variographique en plan du variogramme $\gamma(h_{kl})$.

Le variogramme surfacique se distingue du variogramme uniaxe par les composantes du vecteur h_{kl} suivant les deux axes X et Y voir figure (III-17).

Ainsi, le vecteur h_{kl} est défini comme suit :

$$h_{kl} = (h_{xkl}, h_{ykl}) \quad \text{et} \quad |h_{kl}| = \sqrt{(h_{xkl})^2 + (h_{ykl})^2}$$

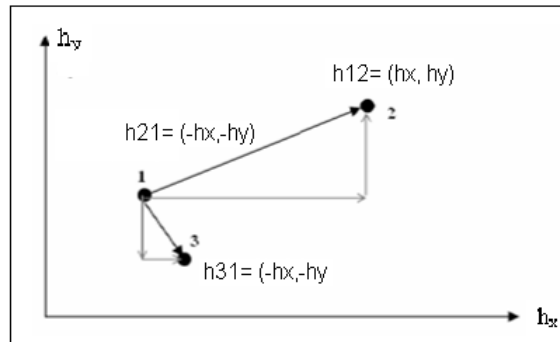


Figure (III-17): vecteur d'anisotropie

Cette différence, permet justement d'identifier la direction de la variation suivant un plan, puisque la variance maximale (seuil) est identique dans toutes les directions, alors que la distance d'extinction (portée) de l'auto corrélation diffère. Ce constat permet de conclure que la surface obtenue est symétrique

L'évaluation de l'auto corrélation se fait par le choix des distances maximales de façon empirique

La réalisation de ce travail, nécessite l'emploi de l'outil informatique, à cet effet, on a utilisé un Logiciel appelé VarioWin 2.2.

$$|h_{x \max}| = \frac{3}{4} \Delta x \max \quad \text{et} \quad |h_{y \max}| = \frac{3}{4} \Delta y \max$$

Dans notre cas, la distance maximale $\Delta X \max = 500$ obtenue par la demi-distance entre $x \max$ et $x \min$

$$|h_{x \max}| = \frac{3}{4} \times 500 = 420 \text{ m}$$

De même pour $\Delta y \max = 200$ m obtenue par la demie distance entre la cote \max et la cote \min

$$|h_{y \max}| = \frac{3}{4} \times 200 \text{ m} \cong 150 \text{ m}$$

La représentation de la surface nécessite, la segmentation de l'espace étudié, suivant les composantes h_x et h_y en un nombre d'intervalles donné nb .

Le pas de chaque intervalle, est donné par *lag spacing* et le nombre d'intervalles par *nb.lags*.

$$h_{x \max} = nb.lags.x \times lag \text{ spacing}.x$$

$$h_{y \max} = nb.lags.y \times lag \text{ spacing}.y$$

Souvent on réalise des essais de deux ou trois jeux de paramètres ; afin d'observer une meilleure tendance. Pour notre cas on a choisie

lag spacing.x = 28 m lag spacing.y = 30 m

En tenant compte des paramètres ci-dessus, on peut facilement remarquer que, le variogramme de surface obtenu Figure (III-18), présente une tendance directionnelle.

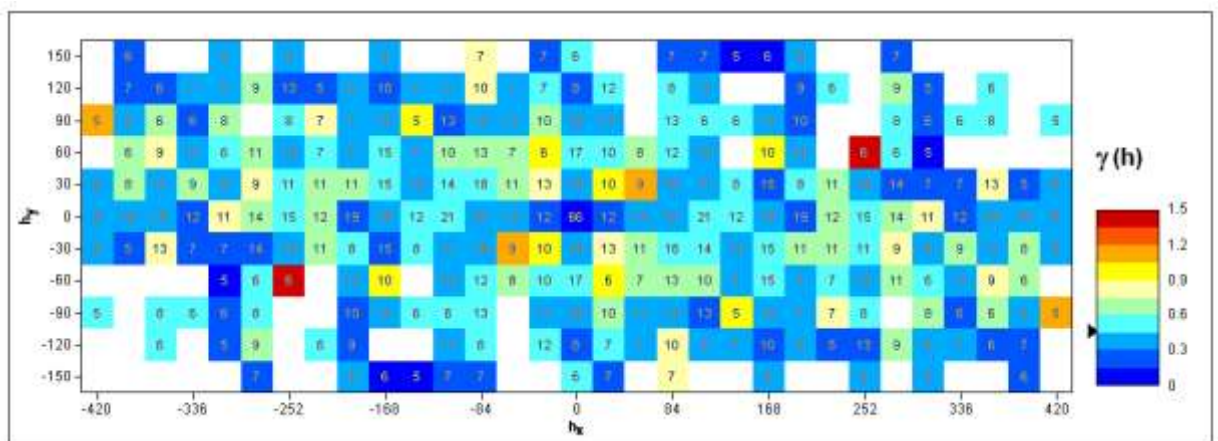


Figure (III-18): Variogramme de surface (à chaque fraction correspond une couleur indiquant la valeur du variogramme et un chiffre précisant le nombre de couples utilisés pour le calcul du variogramme.

A partir du variogramme de surface illustrée par la Figure (III-18), on peut constater qu'il existe une anisotropie géométrique. Cette anisotropie, est définie par son axe principal (a_g axe de grande portée, orienté horizontalement) et l'axe de petite portée a_p orienté verticalement Figure (III-19).

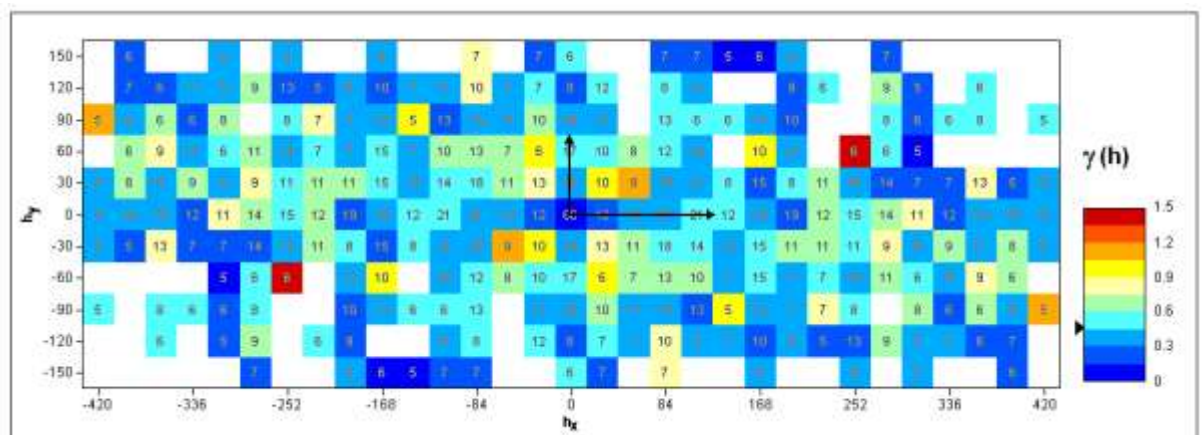


Figure (III-19) : Variogramme de surface et les directions de grande continuité a_g et celle de petite continuité a_p

Ce même résultat peut être confirmé par les variogrammes directionnels Figure (III-15) et à partir desquelles on en déduit les valeurs de la grande portée a_g (portée maximale) et celle de la petite portée a_p (portée minimale) et par conséquent, la valeur du facteur d'anisotropie.

Les résultats sont les suivants :

La portée maximale $a_g = 120\text{m}$ (selon la direction 0°)

La portée minimale $a_p = 99,6\text{m}$ (selon la direction 90°).

Le facteur d'anisotropie géométrique de 1,2.

3) La validation croisée :

Le choix d'un bon modèle théorique de variogramme et donc ses paramètres, est d'une importance capitale. On rappelle que la meilleure estimation d'une variable régionale $z(x_i)$ en un point quelconque x_i par krigeage, est étroitement liée au modèle du variogramme et ses paramètres. A cet effet, il faut justifier ce choix par une méthode dite « la validation croisée » (voire ch. III, paragraphe 5).

On rappelle que le bon choix du variogramme, doit impérativement satisfaire aux conditions suivantes.

La moyenne de l'erreur, qui doit tendre vers zéro, permet de vérifier si le krigeage est effectivement non-biaisé.

La variance de l'erreur standardisée, qui doit se rapprocher de 1, correspond au rapport entre les variances expérimentale et théorique de krigeage.

La variance de l'erreur standardisée, permet de vérifier que les erreurs de krigeage, sont cohérentes avec la variance calculée.

Les points x_i pour lesquels l'erreur standardisée est comprise dans l'intervalle $[-2. ; 2.]$ (Par analogie au cas de la loi normale centrée réduite, où cet intervalle contient 95% des valeurs) sont dits robustes.

Le tableau (III-1) reprend les valeurs des expressions citées ci-dessus dans le paragraphe de la validation croisée, obtenues par validation croisée sur les logarithmes népériens de la teneur.

Pour réaliser la validation croisée, nous avons pris deux modèles de variogrammes.

Un modèle de variogramme sphérique de portée 120 m avec une anisotropie de 1,2 et d'un seuil de 0.53.

Un deuxième modèle Gaussien de portée 160 m et un seuil égale à 0.53

Les résultats obtenus sont portés par le tableau (III-1) ci-dessous

	m_ε	σ_ε^2	\hat{m}_ε	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	Les données robustes
Sphérique	-0.05	0.32	-0.12	1.19	44
Gaussien	-0.041	0.36	-0.108	1.299	45

Tableau (III-1) : Comparaison des résultats statistiques de la validation croisée pour les deux modèles de variogrammes choisis

Les résultats statistiques de la validation croisée, présentés par le tableau ci-dessus, sont presque identiques pour les deux modèles utilisés. La condition de non-biais semble plus vérifiée pour le deuxième modèle, puisque la moyenne des erreurs est faible (-0,041). Alors que la variance de l'erreur standardisée pour le premier et qui vaut 1,19 est la plus proche de 1, signe que l'erreur de krigeage expérimentale est légèrement supérieure à l'erreur théorique.

L'erreur moyenne standardisée, plus élevée, montre une erreur de krigeage plus importante, c'est notamment le cas du modèle sphérique pour lequel cette valeur est de -0.12.

On constate de plus, que les grandes valeurs de l'erreur moyenne standardisée, influent négativement sur le nombre de valeur robuste issu du krigeage ; pour notre cas, sur les 64 points, 45 sont robustes avec le modèle gaussien et 44 avec le modèle sphérique.

Ces résultats font que, la meilleure estimation des teneurs en logarithme népérien par krigeage ordinaire peut être assurée par le choix du modèle de variogramme gaussien

4) La Variographie de la puissance de la minéralisation.

4.1) Le Variogramme expérimental de la puissance

Pour réaliser les variogramme expérimental de la variable puissance, nous avons suivis les mêmes étapes que pour la variable teneur.

4.2) Le modèle théorique d'ajustement

Le modèle choisi pour l'ajustement du variogramme expérimental des puissances est, comme celui des teneurs, sphérique. La Figure (III-20) représente les variogrammes théorique et expérimental. Le modèle théorique choisi a permis d'obtenir une portée de 41 m, un palier (variance) de 0.46 et un effet de pépite C_0 négligeable (0.005).

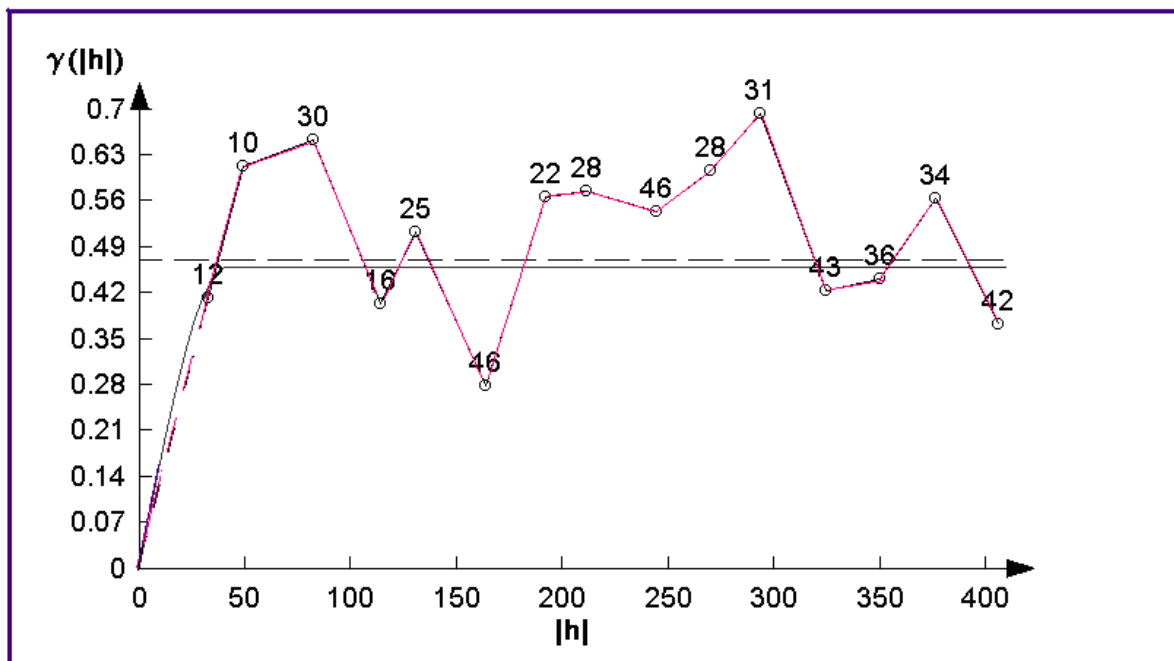


Figure (III-20) : Variogramme expérimental et théorique de la variable puissance de la minéralisation

— Variogramme Expérimental. — Variogramme Théorique

5) Le krigeage

Pour choisir les points à utiliser pour l'estimation des valeurs des variables étudiées (teneur et puissance de la minéralisation) par krigeage, une grille régulière de 10x10 m a été créée en utilisant le plan de la Figure (II- 14). La difficulté à estimer la moyenne statistique avec une marge d'erreur faible ne permet pas d'utiliser la méthode de krigeage simple. Le krigeage ordinaire, qui n'exige pas de connaître cette moyenne, sera utilisé dans la suite de notre étude.

Afin de réaliser le krigeage, les paramètres obtenus par les variogrammes (effet de pépité, palier et porté) ont été utilisés.

5.1 Krigeage et cartographie de la teneur.

Dans la pratique, le nombre de point de prélèvement (sondage carottier pour notre cas) pour l'échantillonnage est limité. La cause est purement économique ; car souvent le coût au mètre linéaire qui dépend des propriétés physico-mécaniques des roches est très élevé.

D'habitude, On choisit une maille de préférence régulière, ce qui permet d'effectuer un prélèvement ou un sondage carottier à chaque nœud de la maille. Ceci dit, la variable étudiée ne sera effectivement connue que pour les points de prélèvement. Pour connaître les valeurs de la variable étudiée en dehors des points de prélèvement, souvent on recourt aux méthodes d'interpolation linéaire. On rappelle qu'il existe plusieurs méthodes d'interpolation linéaire classiques, telle que : (méthode des polygones (plus proche voisin), méthode des triangles, méthode de l'inverse de la distance, etc...) et des méthodes d'interpolation par krigeage.

L'utilisation des méthodes par krigeage est très recommandée; par rapport aux méthodes classiques, les méthodes par Krigeage permettent d'avoir des estimations sans biais.

Pour chaque valeur estimée, on peut obtenir la valeur de la variance de l'estimation, donc le degré de précision de la valeur estimée. Plus la variance d'estimation de la variable en un point donné est grande, plus la précision de l'estimation de la variable est faible.

L'utilisation du logiciel Vertical Mapper version 3, comme module intégré au logiciel Mapinfo professionnel 7.5, nous a permis la réalisation de la carte de distribution des teneurs en valeurs logarithmique Figure (III-21), suivant le plan de la Figure (II- 14). Le même logiciel cité ci-dessus, nous a permis également, de cartographier la variance de l'estimation de la teneur Figure (III- 22).

L'observation de la carte de la Figure (III- 21), permet de voir que la minéralisation se présente sous forme de lentilles étirées vers le bas. Ces lentilles se localisent préférentiellement dans les faibles et parfois moyennes profondeurs (entre 0 et 200 m).

Les variances des valeurs estimées par krigeage ont été calculées. Ces valeurs permettent de vérifier le degré de précision de l'estimation par krigeage (la précision est

d'autant plus grande que la variance est faible). La réalisation d'une carte à partir des variances calculées Figure (III- 22), permet de voir que dans la partie sud, où les valeurs de la variance d'estimation sont très importantes, l'erreur de l'estimation est importante. Cette imprécision est due au manque de données. Cette observation est valable également pour les parties profondes (>250m) au nord de la zone étudiée. Dans le reste de la zone étudiée, les valeurs estimées présentent une grande précision.

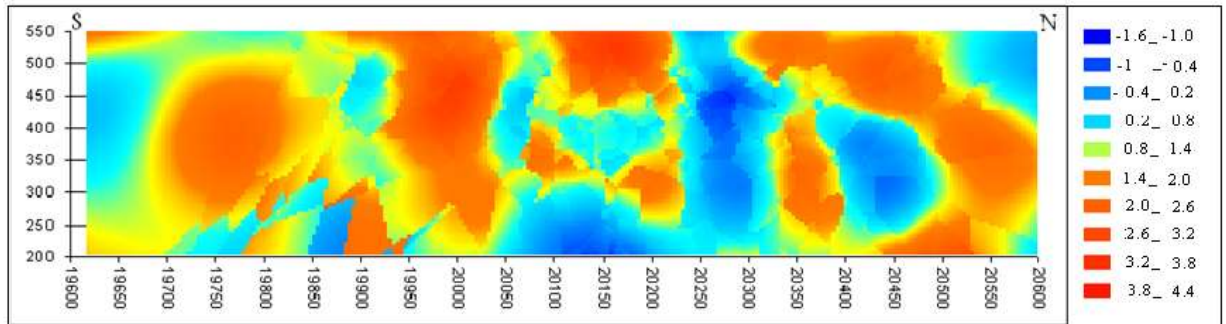
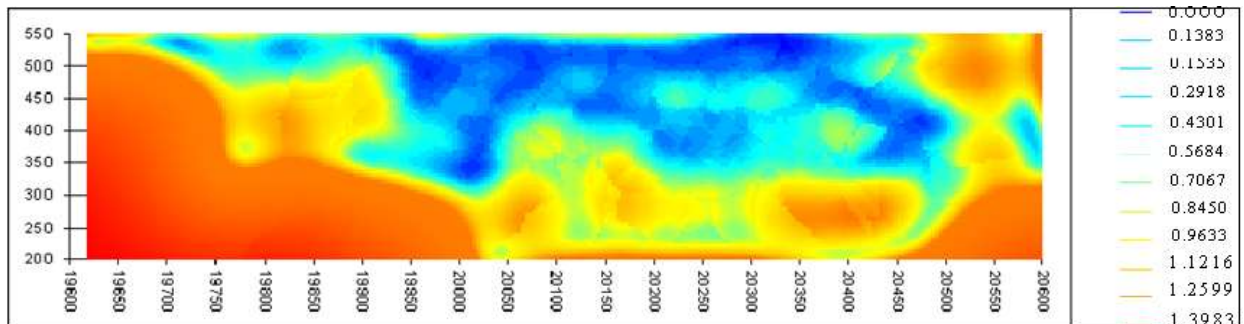


Figure (III-21) : Carte de distribution des teneurs aurifères en valeurs logarithmiques



Figure(22) : Carte de distribution des variances d'estimation des teneurs aurifères en valeurs logarithmiques

5.2) Krigeage et cartographie de la variable puissance

La même démarche pour le krigeage de la teneur a été utilisée pour la variable puissance de la minéralisation. Cela a permis de réaliser les cartes de distribution et des variances Figure (III-23,24). L'observation de la carte des variances Figure (III-,24) permet de constater, là aussi, le manque de précision dans l'estimation de la variable puissance, dans la partie sud et en profondeur de la partie nord de la zone étudiées.

L'observation de la carte de la figure (III-23), permet de voir, là également que la minéralisation se présente sous forme de lentilles étirées vers le bas, dont la puissance peut atteindre 3 m.

Ces lentilles se localisent préférentiellement dans les faibles et parfois moyenne profondeurs (entre 0 et 200 m).

La partie profonde du centre de la zone étudiée présente des puissances allant de 2 à 3 m. L'insuffisance de précision de l'estimation, dans cette partie, ne permet pas d'affirmer la continuité de cette distribution au delà des zones touchées par les sondages.

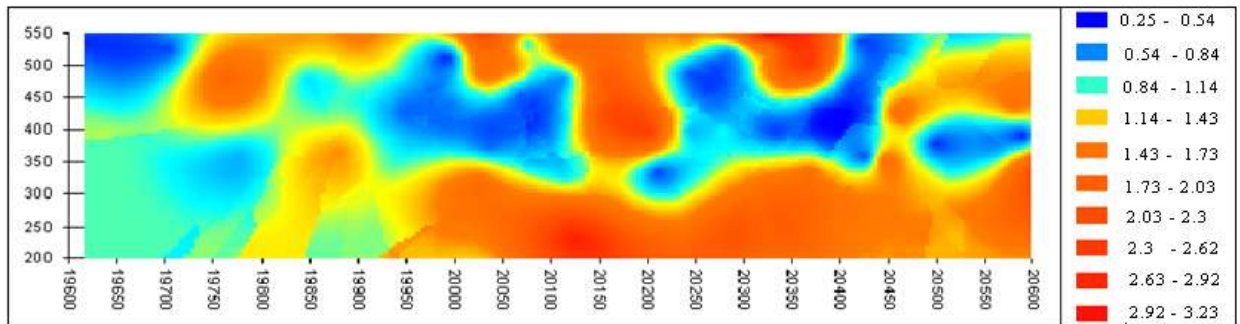


Figure (III-23) : Carte de distribution des puissances du corps aurifère

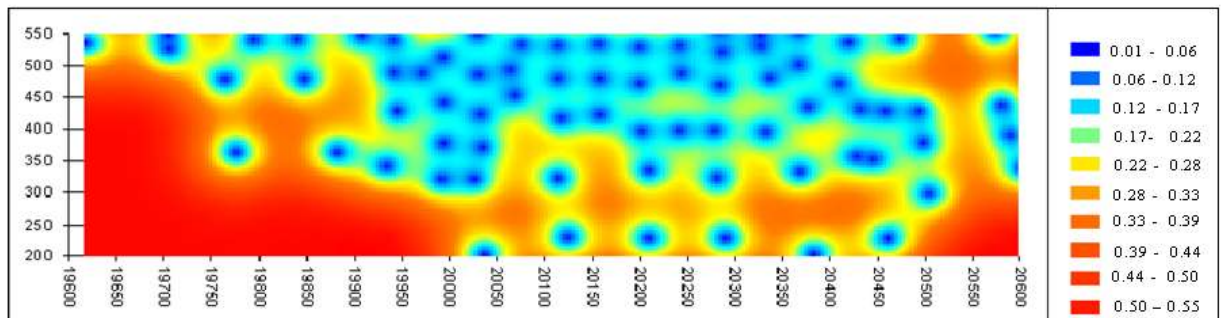


Figure (III-24) : Carte de distribution des variances d'estimation des Puissances

6) Comparaison entre l'estimation par krigeage et celle par triangulation.

Dans le but de montrer l'intérêt de la méthode d'estimation par krigeage, un diagramme a été réalisé en superposant les courbes des teneurs obtenus par krigeage et celles obtenues par la méthode classique de triangulation Figure (III-26). Ce diagramme est tracé à partir de points ayant 50 m de profondeur et suivant la direction NS.

Pour rendre cette tâche possible nous avons tracé la carte de distribution des teneurs obtenues par la méthode d'interpolation linéaire classique de triangulation) Figure (III-25).

L'observation de ce diagramme comparatif montre, que la méthode par triangulation présente, parfois, des sous-estimations très importantes, allant jusqu'à 6 ppm (point a) pour des teneurs calculées par krigeage de 17 ppm. Cette méthode présente, également, (au niveau du point b) des surestimations allant jusqu'à 49 ppm alors que la teneur obtenue par krigeage est nulle.

Il est à remarquer aussi que les points (a et b) pris comme exemple sont situés à des endroits où la variance d'estimation par krigeage est très faible (1 à 1.5) ce qui permet de considérer que les valeurs estimées par krigeage sont très proches des valeurs réelles.

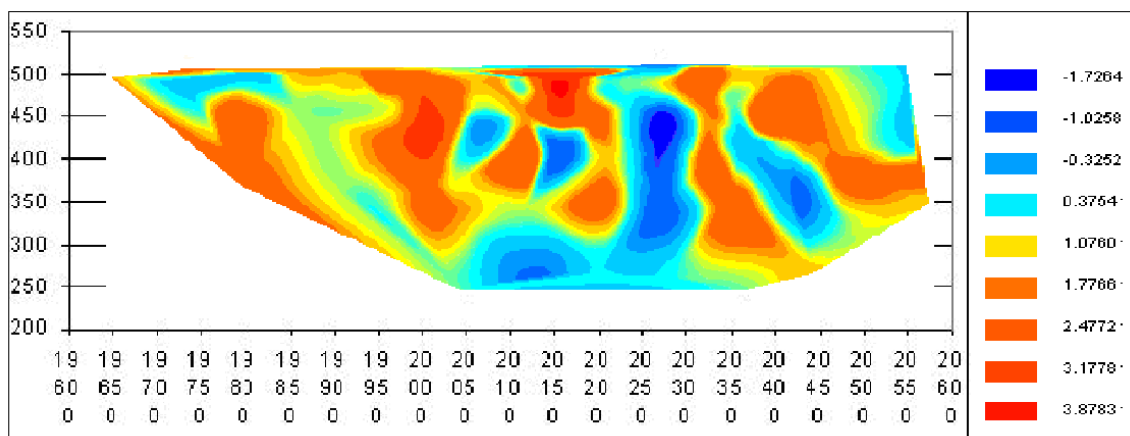


Figure (III-25): Carte de distribution des teneurs aurifères en valeurs logarithmiques (l'interpolation linéaire par triangulation)

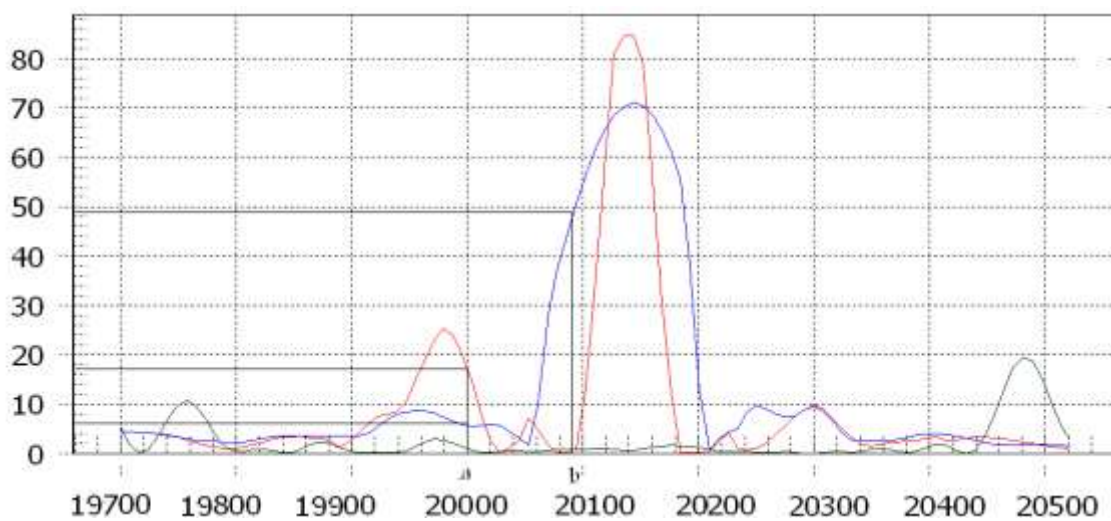


Figure (III-26) : Diagramme comparatif entre les teneurs calculées par krigeage (rouge) et les teneurs estimées par triangulation (bleu) suivant la direction N-S et à 50 m de profondeur (courbe verte= variances d'estimation des valeurs estimées par krigeage).

Conclusion générale

L'étude statistique des teneurs révèle une distribution bimodale. Cela est probablement dû à l'existence de deux populations. La première montre des teneurs allant de (0.2 à 2 ppm) alors que dans la deuxième population les teneurs sont plus élevées avec des valeurs extrêmes de 63.3 et 84.6 ppm mais dont le reste de la population est entre 0.4 et 22 ppm.

La présence de deux populations est probablement due à une remobilisation partielle d'une première minéralisation.

L'histogramme de la variable puissance met en relief également une bimodalité, ce qui montre qu'il s'agit de deux populations. Une population caractérisant des corps minéralisés à faible puissance dont la valeur la plus fréquente est égale à 0.6 m et une deuxième population, dont la valeur la plus fréquente est de 1.3 m, et dont la valeur maximale peut atteindre 3 m.

L'étude géostatistique des variables teneurs et puissance a montré que la minéralisation se concentre préférentiellement près de la surface. Elle se présente sous forme de lentilles étirées vers le bas et dont la puissance maximale peut atteindre 3 m. Ces lentilles se rencontrent entre 0 et 100 m de profondeur. Quelques lentilles peuvent, cependant, atteindre les 200 m.

BIBLIOGRAPHIE

AÏSSA D. E. et BEDOUHENE N.-1984. Les minéralisations aurifères d'Algérie Nord-orientale et du Hoggar essai d'approche sur leur métallogénie, pp. 429-442

AÏSSA, DJ. E., TALBI M., LAZOUNI A., KESRAOUI M., 2002. Les minéralisations aurifères du Hoggar (Sud algérien) et leur relation avec les zones de cisaillements lithosphériques. Bul. Serv. Geol. de l'Algérie. V13., n°2, pp. 93-115

AÏSSA, D. E., MARIGNAC, CH., KESRAOUI, M., NEDJARI, S., BOUTRIKA, R., GUESSOUM, N., 2006. Relations entre les minéralisations aurifères et a métaux rares Eocambriennes du Hoggar. Fourth meeting of IGCP 485-USTHB, Algiers, Algeria,

ARMSTRONG M, CARIGMAN J ,1997. Géostatistique linéaire : application aux domaines Minier, Les Presses de l'Ecole des Mines. 112 p. ISBN : 2-911762-07-R

ATTOUM, A., 1983. Etude géologique et structurale des mylonites panafricaines et des minéralisations aurifères associées dans le secteur de Tirek (Hoggar, Algérie). Thèse Doc. Ing. U.S.T.L. Montpellier, 98 p.

BAILLARGEON S. 2005. Le krigeage : revue de la théorie et application a l'interpolation spatiale de données de précipitations, Mémoire de maîtrise en statistique, Faculté des sciences et de génie Université Laval Québec avril 2005, 100 p.

BENDAOU, A. 2008. Pétrologie et géochimie des séries basiques et ultrabasiques précambriennes de l'In Ouzzal et du Hoggar central et leur relation avec l'encaissant. *Thèse d'Université, USTHB/FSTGAT, 301 p*

BERTRAND J. L. M. ET CABY R. 1978. Geodynamic evolution of the Pan African orogenic belt: a new interpretation of the Hoggar shield (Algerian Sahara). *Geol. Rundschau* Bd. 67, 2: 357-388.

BOULLIER A. M, 1991. The Pan-African Trans-Saharan belt in the Hoggar shield (Algeria, Mali, Niger): a review. In : R.D. Dallmeyer and J.P. Lécorché (Editors). *The West African Orogens and Circum-Atlantic Correlatives* Springer-Verlag. Berlin, pp. 85-105

CABY, R. 2003. Terrane assembly and geodynamic evolution of central-western Hoggar: a synthesis. *Journal of African Earth Sciences*, 37, 3-4, 133-159.

DJEMAI, S. 1996. Les pyrigarnites et les granulites alumineuses d'Amesmessas Môle In Ouzzal, Hoggar: Relations de phases et déformation. Magister, U.S.T.H.B., Alger, 210 p.

DJEMAI S. 2008 : Etude structurale et pétrologique des séries précambriennes de la terminaison sud de l'In Ouzzal (Hoggar occidentale). Doctorat d'Etat FSTGAT/USTHB le 15 décembre 2008, 200 p

FERKOUS K. 1995 : Filons de quartz aurifères dans une zone de cisaillement lithosphérique panafricaine (Amesmessas-Tirek, Hoggar ouest, Algérie) Thèse de doctorat, Université de Montpellier II France, pp 1-264

FERKOUS, K. ET MONIÉ, P., (2002): Neoproterozoic shearing and auriferous hydrothermalis along the lithospheric N-S East InOuzzal shear zone (Western Hoggar, Algeria, North Africa). In *Journal of AfricanEarth Sciences* 35, pp. 399-415

GUESSOUME N 2012. Etude géologique des minéralisations Aurifères de la partie orientale du terrane de laouini (Hoggar central) Magister, U.S.T.H.B., Alger, 166 p

GUIBLIN P, RIVOIRARD J, SIMMONDS E.J. 1995: Analyse structurale de données à Distribution dissymétrique : exemple du hareng écossais, *Cahiers de Géostatistique* 5(1995), 137-159 Ecole des Mines de Paris 1995.

HADDOUM, H. 1992. Étude structurale des terrains archéens du môle In Ouzzal Hoggar occidental, Algérie. *Doctorat d'État*, U.S.T.H.B., Alger, 195 p.

HADDOUM, H. CHOUKROUNE,P., PEUCATJ.J., (1994)- Structural evolution of the Precambrian In Ouzzal massif Central Sahara, Algeria . *Precamb. Res.*, 65, 155- 166.

JOURNEL A. G. 1977 : Géostatistique minière. Ecole Nationale Supérieuredes Mines Paris. Centre de Géostatistique, 1, 388 p.

KOUADRI M. 1983 Etude des minéralisations aurifères du district d'In Ouzzal sur l'exemple de Tirek et Amesmessa (SW du Hoggar, Sahara central algérien); pétrographie, minéralogie, géochimie. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, Doctoral thesis (1983) 187 pp.

LATOUCHE, L., VIDAL, P., (1974)- Géochronologie du Précambrien de la région des Gour Oumelalen NE de l'Ahaggar, Algérie. Un exemple de mobilisation du strontium radiogénique. *Bull. Soc. Geol.Fr.* 16.193 203

LIÉGEOIS, J.P., LATOUCHE, L., BOUGHRARA, M., NAVEZ, J., GUIRAUD, M., (2003)- The LATEA metacraton (Central Hoggar, Tuareg Shield, Algeria): behaviour of an old passive margin during the Pan-African orogeny. *Journal of Earth Sciences* 37,161-190.

MARCOTTE D 2007. Cours de Géostatistique I, Département de génie minéral de l'École Polytechnique de Montréal, 150 p.

MARIGNAC, CH., SEMIANI, A., FOURCADE, S., BOIRON, MC., JORONN, J.L., KIENAST, J.R. ET PEUCAT, J.J., 1996. Metallogenesis of the late Pan-African gold bearing Est In Ouzzal shear zone (Hoggar, Algeria): *J. Metamorphic Geol.*, pp. 783-801

MATHERON G. 1965. Les variables régionalisées et leur estimation, Masson, Paris, 305p.

MATHERON G. 1970. La théorie des variables régionalisées et ses applications. Les cahiers du centre de morphologie mathématique, fasc.5, école de Mines de Paris.1970, 200 p

MEZGHACHE H 1989. Cartographie automatique et interprétation Géostatistique d'une campagne de prospection Géochimique sur sol – Application a la zone Mercurielle nord Numidique (Algérie), Institut National Polytechnique de Lorraine, Thèse de Doctorat 1989 178 p.

OUZEGANE, K., DJEMAI, S. AND GUIRAUD, M. 1996. Gedrite garnet sillimanite-bearing granulites from Amesmessa area, South In Ouzzal, Hoggar, Algeria. *Journal of Metamorphic Geology*, 14, 739-753

RAPPORTS O.R.G.M, 1990-1992. Rapport final sur l'évaluation en profondeur du gisement d'Amessmessa (campagne 90-93).

RAPPORTS O.R.G.M ENOR, 1992. Etude faisabilité Amessmessa-Tirek (zones filoniennes 8 - 9). Tomes I et II Groupe minier Sidam1992 p.A2.

RIVOIRARD J. 1995. Cours de Géostatistique «Concepts et méthodes de la Géostatistique », Centre de Géostatistique Ecole des Mines de Paris, 92 p

RIVOIRARD J. 2003. Cours de Géostatistique Multi variable, Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris, 63 p

ROYER J.J. 1994. Cours de Géostatistique 3eme année Tome 1 ; Ecole nationale supérieure de Géologie appliquée et de protection minière de Nancy

SAPORTA G 1990. Probabilité, Analyse des données et Statistique, Ed Technip. 496 p ISBN : 2-7108-0565-0.

SEMIANI, A. 1995. Métallogénie de la zone de cisaillement aurifère Est-Ouzzalienne: structure, pétrologie et géochimie des gisements d'or de Tirek-Amessmessa (Hoggar occidental, Algérie). Thèse de doctorat de l'Université de Rennes I, France, 262 p.

SEMIANI, A., BELLAL, M., BENNOUH, A 2004. La métallogénie de l'or liée à l'évolution de la chaîne Panafricaine du massif du Hoggar (sud de l'Algérie) : influence des socles Anté-Panafricain dans le processus de mise en place des minéralisations aurifères. Bulletin du Service Géologique de l'Algérie, Vol. 15, pp.107 – 133.10 fig.

SERMA.D.D.2009. Geostatistics with Applications in Earth Sciences Springer 2009, ISBN: 1402093799, 1402093802, 206 p

ANNEXE 1

Les données de sondages de la zone 8 d'Amesmessa

Annexe I: Tableau ci-dessus présentant les coordonnées (X, Y, Z), l'azimut, le dip et la profondeur de chaque sondage réalisé dans la zone 8 d'Amesmessa. A chaque sondage on a relevé les données nécessaires pour l'étude du gisement, en l'occurrence la valeur de la teneur en Or et la puissance du corps minéralisé.

n du profil	n du son	Prof du sondage	X surface	Y surfa	Zsurfa	(long sond)	epais moy	ten pondée	accum	Dip	Azim
XXV	78	25,6	45588	20550	533,5	55,8	0,77	1,2	0,92	70	100
	133	116,5	45585,7	20560	530,7	163,5	1,53	1,2	1,84	70	95
	177	149,7	45550	20580	528,8	201,5	0,25	4,7	1,18	72	105
	184	183	45550	20580	528,7	221,3	2,14	3	6,42	82	100
XXVIII	134	32	45634	20456	531,2	91,7	0,71	3	2,13	75	95
	187	123,4	45553,8	20482	530,5	158,5	1,15	3,8	2,13	70	100
	190	154,7	45553,8	20482	530,5	186,2	0,32	5,3	1,7	81	100
	220	217,1	45490,4	20504	528,4	251	1,15	2,2	2,53	76	110
XXVIII	296	271,5	45405	20468	526,04	350,4	1,3	3,3	4,29	74	105
	282	179,9	45473	20451	527,5	281,6	1,56	0,4	0,62	70	103
	209	121,9	45542	20450	529,2	163,4	1,56	4	6,24	70	100
XXIX	223	171,5	45490	20415	527,8	198,5	0,38	0,7	0,27	76	95
	151	117,5	45537,7	20419	528,34	155,7	0,43	2,8	1,2	71	95
	136	86,6	45570,8	20398	528,8	116,8	0,41	16	6,56	70	95
	80	35	45618,2	20403	529,9	81,2	0,38	4	1,52	75	90
XXX	292	290,8	45385	20395	525,8	353	1,53	2,1	3,21	74	105
	283	194,2	45450	20383	525,9	299,6	1,56	6,1	9,52	70	105
	210	116	45537	20373	527,8	144,6	0,38	1,03	0,49	69	100
	203	63,5	45585,9	20361	529,4	110,6	2,45	2	4,9	70	100
	135	33,5	45605,8	20357	539,99	76,7	2,46	2,6	6,4	70	95
XXXI	81	80	45564	20317	528,8	121,8	1,64	4,2	6,89	70	80
	29	41,6	45596	20316	530,3	118,1	1,48	11,1	16,43	70	90
	116	28,8	45621	20316	531,2	95,8	3,22	8,1	26,08	66	90
	137	145,3	45523	20321	528,4	163,9	0,35	6,3	2,2	72	90
XXXII	297	277,8	45375	20314	526,4	344,2	1,96	1,6	3,14	70	105
	285	202,1	45444	20300	526,1	284	1,15	0,4	0,46	70	105
	284	143,6	45503	20291	526,85	216	0,82	0,3	0,25	70	105
	35	88,5	45550	20276	528,3	106,2	0,46	0,2	0,09	70	90
	205	48,5	45582	20278	529,7	108,4	0,54	3	1,62	70	90
	30	22,6	45596	20276	531	60	1,64	0,5	0,82	65	90
XXXIII	222	144	45514,5	20246	527,3	153,3	0,64	1,6	1,02	70	100
	152	73,4	45564	20241	528,35	105,6	0,41	1,3	0,53	70	95
	31	43,7	45588	20236	529,8	59,5	1,23	2	2,46	60	90
XXXIV	288	269,8	45386	20228	524,6	344,1	1,73	1,4	2,42	74	103
	224	188,3	45473,2	20216	526,8	210,2	0,38	5,1	1,94	75	100
	38	144,4	45509	20198	526,7	181	2,33	3,1	7,22	70	90
	36	81,3	45586	20196	528,2	100	1,35	6,1	8,23	84	90
	32	43,4	45586	20196	528,2	59,5	1,23	2,8	3,44	60	90
XXXV	138	122	45537	20157	526,6	136,1	2,12	0,3	0,64	72	90
	204	79,4	45567	20157	527,2	107,6	1,91	22,1	42,21	70	90
	33	39,1	45589,5	20156	527,8	57,3	1,64	84,6	138,7	60	90
XXXVI	298	267,8	45386	20149	524,04	317,5	2,77	0,5	1,38	74	105
	276	201,2	45449	20135	524,9	301	0,78	2,2	1,72	70	100

	227	154,4	45523	20133	526,8	185,1	1,3	1,7	2,21	70	100
	225	127,6	45523	20133	526,3	152,3	0,77	9,1	7,01	70	105
	37	79	45563	20116	527,3	103,5	0,54	3,9	2,11	70	90
	34	40,6	45592	20116	528,2	54,7	1,73	2,6	4,5	62	90
XXXVII	140	97,5	45543,7	20066	527,55	145,3	0,41	0,6	0,25	75	80
	206	68	45570,6	20068	527,4	165	1,3	2,4	3,12	70	90
	139	36,1	45607,3	20077	528,34	48,2	0,77	3,6	2,77	75	80
XXXVIII	295	290,9	45359,5	20071	524	347,2	1,22	2	2,44	73	105
	275	203,8	45438	20052	526,3	300,1	1,56	4,4	6,86	70	100
	156	158	45519,8	20043	528,13	180,8	0,49	2,6	1,27	81	95
	155	123,7	45519,8	20043	528,13	154,1	0,49	2,3	1,13	71	95
	153	74,1	45561	20040	526,93	95,3	1,56	6,7	10,45	68	95
	83	23,6	45611,8	20036	528,3	47,9	2,16	2,1	4,54	72	90
XXXIX	226	203,6	45440,1	20015	525,8	221,4	1,3	4,7	6,11	70	100
	157	161	45489,7	20008	528,13	180	0,66	5,8	3,83	70	95
	142	110,4	45534,8	20003	528,8	116	0,49	63,3	31,02	70	90
	207	70,8	45567	19988	526,4	100,8	0,61	4,4	2,68	70	100
	141	52,2	45603,8	20002	527,78	63,3	0,28	14,4	4,03	72	90
XL	274	186,3	45447	19964	525,1	281,4	0,87	1,9	1,65	70	100
	158	115,1	45523,7	19960	525,47	140	0,46	4,9	2,25	74	95
	154	69,8	45577,8	19956	525,88	93,6	0,87	2,4	2,088	70	95
	84	29,5	45598,2	19953	527,4	65,4	1,15	8,2	9,43	77	90
XLI	143	25,3	45592,5	19921	527,6	50,8	1,39	3,6	5,004	70	90
XLII	291	165,8	45437,3	19914	524,2	212,5	1,31	2,4	3,14	72	104
	286	77,9	45521	19875	525,3	169	0,74	2,2	1,63	70	100
	277	28,25	45588	19865	526,8	124,2	1,27	3,4	4,32	70	100
XLIII	87	28,5	45581,5	19815	526,1	55,5	1,23	1,1	1,35	70	90
XLIV	289	163,1	45454	19814	521,8	199	0,65	7	4,55	72	105
	287	77	45517	19797	524,3	170,2	1,73	6	10,38	70	100
	281	22,4	45574	19734	525,8	66,8	0,61	5	3,05	70	100
XLVI	88	40,2	45549	19731	525,5	67,1	0,38	1	0,38	70	90
XLVIII	89	31,8	45518	19649	525	64,3	0,32	3,7	1,18	70	90

ANNEXE 2

Fonctions et abaques du schéma sphérique donnant
les variances d'estimation

7 - FORMULES ET ABQUES POUR LE SCHEMA SPHERIQUE

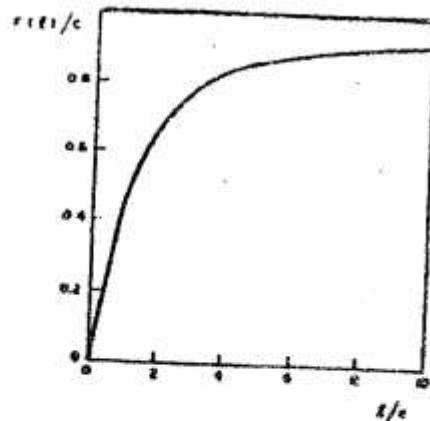
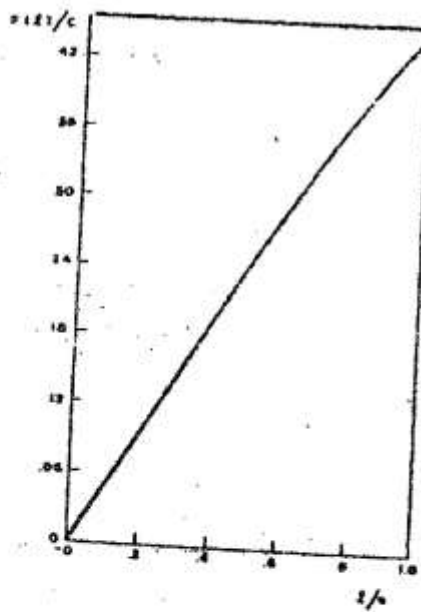
7.1 Variogramme sphérique (portée a, palier c = 1)

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^3 & , h \leq a \\ 1 & , h > a \end{cases}$$

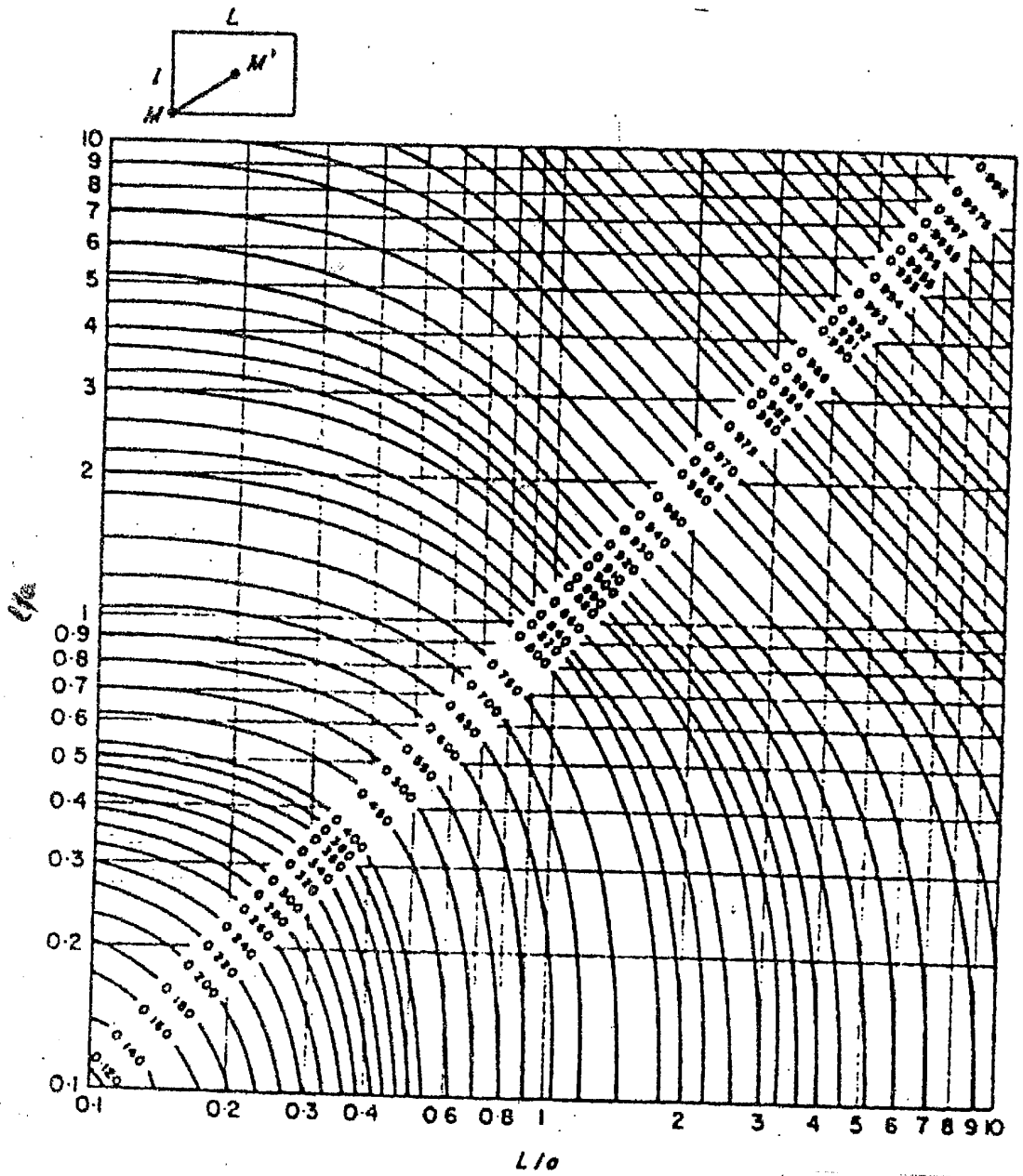
$$\chi(\ell) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{\ell}{a} - \frac{1}{8} \left(\frac{\ell}{a}\right)^3 & , \ell \leq a \\ 1 - \frac{3}{8} \frac{a}{\ell} & , \ell > a \end{cases}$$

$$F(\ell) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\ell}{a} - \frac{1}{20} \left(\frac{\ell}{a}\right)^3 & , \ell \leq a \\ 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{\ell} + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 & , \ell > a \end{cases}$$

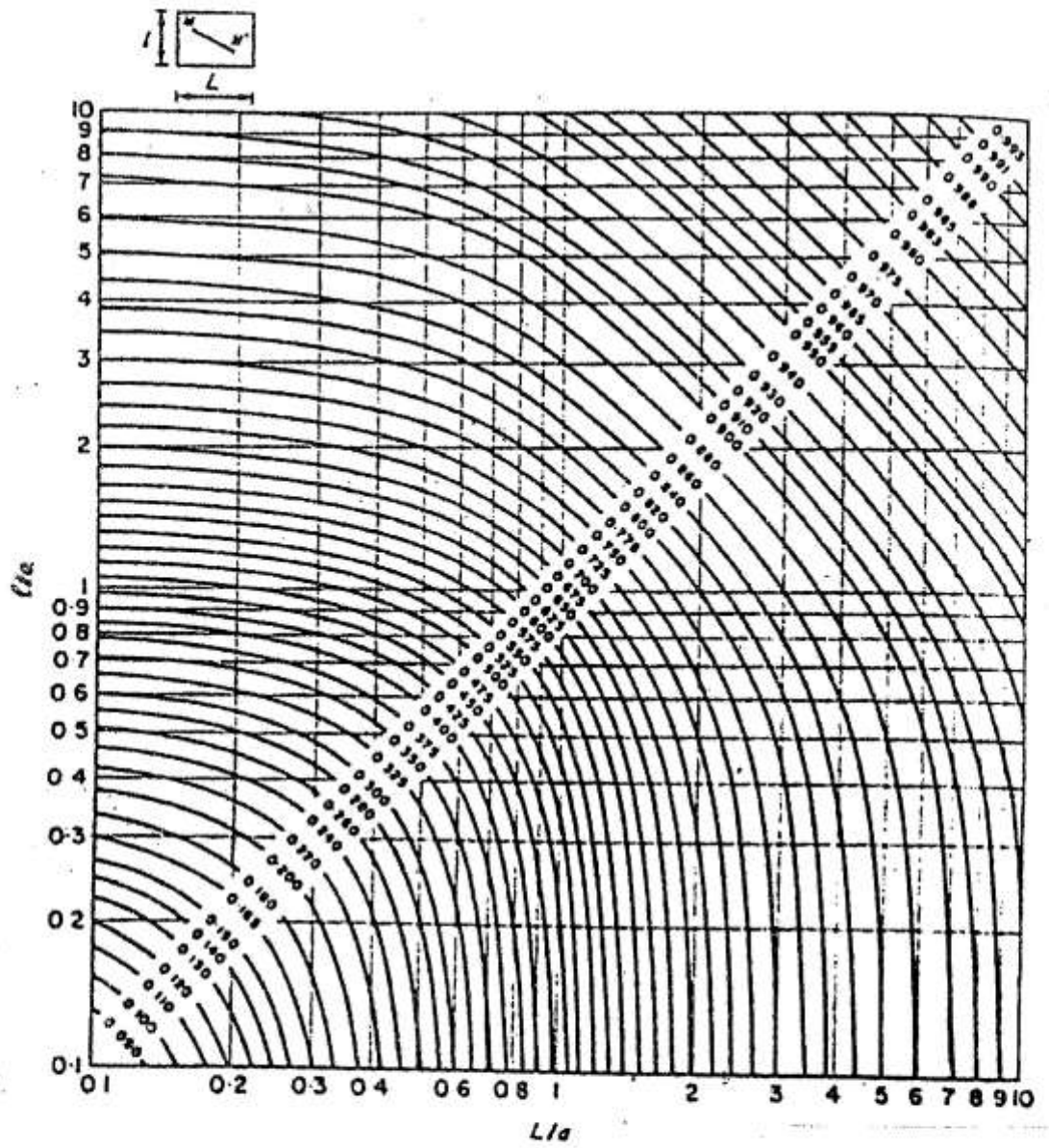
7.2 Abaques pour le schéma sphérique



F(ℓ)



Spherical model. Function $H(L; I)$.



Spherical model. Function $F(L; l)$