

N° d'ordre : 12/2008-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène.
Faculté de Mathématiques.



Mémoire

Présenté pour l'obtention du Diplôme de MAGISTER

En : Mathématiques

Spécialité : *Recherche Opérationnelle : Mathématiques Discrète et Optimisation*

Présenté par :

Mlle AOUDIA Lamia

Approche polyédrale de problèmes de
sous graphes particuliers

Soutenu le 25 octobre 2008 devant le jury composé de :

A. SEMRI	Maître de Conférence.	U.S.T.H.B. Alger	Président du jury
M. AÏDER	Professeur	U.S.T.H.B. Alger	Directeur de thèse
I. BOUCHEMAKH	Professeur	U.S.T.H.B. Alger	Examinatrice
M. MOULAI	Maître de Conférence.	U.S.T.H.B. Alger	Examineur

A mon père et à ma mère
A mes frères et soeurs,
A Zohra.

Remerciements

Je souhaiterais exprimer ma sincère gratitude envers les personnes suivantes :

Mr. M. AÏDER pour m'avoir accordé l'honneur d'assurer la direction et le suivi scientifique et technique du présent mémoire. Je le remercie pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce travail, également pour s'être montré disponible, en dépit de ses nombreuses occupations.

Messieurs les membres de jury, qui ont bien voulu accepté de juger ce travail, en l'occurrence :

Mr. A. SEMRI, Maitre de Conference à l' U.S.T.H.B. Alger.

Mr. M. MOULAÏ, Maitre de Conference à l' U.S.T.H.B. Alger.

Mme. I. BOUCHEMAKH, Professeur à l' U.S.T.H.B. Alger.

Et enfin, A mes parents va l'expression de ma plus profonde reconnaissance pour leur soutien qu'ils m'apportent au quotidien et leur patience inépuisable.

Résumé

Dans notre travail, nous nous intéressons au problème du sous graphe 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés, défini par Baiou[4]. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et 2-arête connexe. Chaque arête et chaque sommet de G est muni d'un poids. Le problème du sous graphe 2-arête connexe de poids minimum dans G noté r -2ECSP, consiste à trouver un sous graphe 2-arête connexe de G tel que la somme des poids sur ses sommets et ses arêtes soit minimum. Ce problème, comme la plupart des problèmes d'optimisation combinatoire, est NP-dur [29]. Sa formulation par un programme linéaire en nombres entiers a été donnée par Baiou [4]. Nous étudions l'enveloppe convexe notée r -2ECSP(G), des vecteurs d'incidence des solutions du r -2ECSP.

D'abord, nous montrons que la relaxation de ce programme suffit pour caractériser le polytope r -2ECSP(G) dans les cactus et les multi-chaînes. Baiou et Correa [5] ont introduit une nouvelle classe d'inégalités valides pour r -2ECSP(G) que nous avons exploitée dans le cas des multi-cycles pour donner une sous classe définissant des facettes pour le polytope r -2ECSP(G). Enfin nous donnons la description complète de r -2ECSP(G) dans des cas particuliers de multi-cycles.

Mots clés : optimisation combinatoire, approche polyédrale, sous graphe 2-arête connexe, inégalités valides, faces et facettes.

Résumé

Our work focus on node weighted 2-edge connected subgraph problem defined by Baiou [4]. Given a graph $G = (V, E)$, a node $r \in V$ and cost (weight) function on nodes and edges, the r -2-edge connected subgraph problem consists on finding a 2-edge connected subgraph in G containing r whose total cost (weight) on both nodes and edges is minimized. We study a class of graphs for which the polytope associated to the r -2-edge connected subgraph problem is completely described by the trivial inequalities and the inequalities so called generalized cut inequalities. These graphs are called perfectly r -2-edge connected. We prove that cacti and multi-path graphs belong to this class.

key words : 2-edge connected subgraph, combinatorial optimization ,polyhedral description, faces and facets.

Table des matières

Table des Matières	v
Introduction	1
1 Optimisation combinatoire : Généralités	4
1.1 La problématique de l'optimisation combinatoire	4
1.2 Graphe et optimisation	5
1.3 Programmation linéaire	7
1.4 La théorie de la complexité	8
1.4.1 Notions de base	8
1.4.2 Les classes des problèmes \mathcal{P} et \mathcal{NP}	9
1.4.3 Problème \mathcal{NP} complet	10
1.4.4 Problèmes classiques d'optimisation combinatoire	11
1.5 Résolution des problèmes difficiles	15
1.5.1 Méthodes exactes	15
1.5.2 Méthodes approchées	18
1.6 Conclusion	19
2 Approche polyédrale	21
2.1 Rappels de géométrie	21
2.2 Structures polyedrales	24
2.2.1 Les polyèdres	24
2.2.2 Faces et facettes	25
2.3 Polyèdres entre la programmation linéaire et la programmation linéaire en nombres entiers	29
2.3.1 Génération d'une inégalité valide	29
2.3.2 Séparation	30

2.4	Polyèdre entier	32
2.4.1	Matrice totalement unimodulaire	32
2.4.2	Système totalement dual entier	32
3	Quelques problèmes de sous graphes particuliers	34
3.1	Problème de couplage	34
3.2	Problème du voyageur de commerce	37
3.2.1	Formulation du problème	37
3.2.2	Etude polyédrale du problème	38
3.3	Problème de sous graphe k -arête connexe	40
3.3.1	Formulation du problème	42
3.3.2	Etude polyédrale du Problème	43
3.4	Conclusion	47
4	Problème de sous graphes 2-arête connexe	49
4.1	Polytope de sous graphes Steiner 2-arête connexes	49
4.2	Problème du sous graphe 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés . .	51
4.2.1	Le polytope r -2ECSP	53
4.3	Les graphe parfaitement r-2-arête connexes	55
4.4	Caractérisations polyédrales	70
4.4.1	Le polytope r -2ECSP(G) dans les graphes Multi-Cycles sans Cordes	70
4.5	Conclusion	79
	Conclusion	81
	Bibliographie	83

Introduction

Plusieurs problèmes issus de domaines divers tels que l'industrie, le transport, l'économie... se ramènent à des problèmes d'optimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes linéaire avec des variables bivalentes. Ces problèmes sont dits d'optimisation combinatoire. Un problème d'optimisation combinatoire peut être défini comme étant celui de déterminer un plus petit ou un plus grand élément d'un ensemble fini. A première vue, un tel problème paraît facile à résoudre vu le caractère fini de l'ensemble de ses solutions. Mais en pratique, le nombre de ces solutions peut être exponentiel. Et dans ce cas, une méthode qui consisterait à énumérer toutes les solutions du problème ne peut être envisagée.

L'efficacité d'une méthode de résolution (algorithme) est généralement mesurée par le temps d'exécution. Si ce temps est borné par une fonction polynomiale en la taille du problème alors la méthode est dite efficace ou polynomiale. Pour un certain type de problèmes d'optimisation combinatoire on ne connaît pas d'algorithmes efficaces de résolution. Ces problèmes ont la propriété que s'il existe un algorithme polynomial pour l'un d'entre-eux alors il en existerait un pour chacun. Pour ces problèmes dits *NP*-durs il y a donc peu d'espoir de pouvoir trouver une méthode efficace.

Une approche qui s'est révélée efficace pour ce type de problèmes est l'approche dite polyédrale. Cette approche permet de ramener le problème à la résolution d'un programme linéaire par la description du polyèdre enveloppe convexe des solutions par un système linéaire. Une étape cruciale dans cette méthode concerne l'identification des contraintes de ce système.

Une caractérisation complète du polyèdre est généralement difficile à obtenir. Elle s'avère impossible dans le cas où le problème est *NP*-dur. Cependant, depuis la découverte de la méthode des ellipsoïde par Khachiyan, une description partielle du polyèdre des solutions

peut être suffisante pour résoudre le problème en temps polynomial. En effet en utilisant cette méthode Grotschel, Lovàsz et Schrijver [35] voir aussi Padberg et Rao [53] ont montré qu'il existe un algorithme polynomial pour résoudre un problème d'optimisation sur un polyèdre donné si et seulement si il existe un algorithme polynomial pour le problème de séparation associé à ce polyèdre, c'est-à-dire un algorithme qui permet de décider pour un point x donné si x appartient au polyèdre et dans le cas contraire de trouver un hyperplan qui sépare x du polyèdre.

En conséquence si pour un problème d'optimisation combinatoire on connaît un système de contraintes linéaires décrivant partiellement le polyèdre des solutions, et si le problème de séparation associé à ces contraintes est polynomial alors ce système peut être suffisant pour donner une solution optimale au problème en temps polynomial en utilisant une méthode de coupes. Une telle approche a été appliquée avec succès pour plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire comme le problème du voyageur de commerce et le problème de la coupe maximale.

Dans ce mémoire nous considérons cette approche pour des problèmes de sous graphes particuliers plus précisément le problème de sous graphes 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés. Un graphe G est dit 2-arête-connexe si entre chaque paire de sommets de G il existe au moins deux chaînes arête-disjointes. Si les arêtes et les sommets sont munies d'un système de poids le problème du sous graphe 2-arête-connexe de G est de déterminer un sous graphe 2-arête-connexe de poids minimum. Ce problème a des applications dans les domaines des télécommunications et de transport.

Ce mémoire est organisé comme suit. Dans le chapitre 1, nous donnons des notions généralisées de l'optimisation combinatoire. Nous commençons par la définition d'un problème d'optimisation combinatoire, ensuite nous parlons des outils nécessaires pour définir et résoudre un problème d'OC.

Dans le chapitre 2 nous présentons des généralités sur l'approche polyédrale. D'abord nous donnons un rappel de géométrie, ensuite nous abordons quelques définitions et propriétés de base utiles pour la suite de notre travail. Nous verrons donc des notions qui se rapportent à la théorie des polyèdres, celles des inégalités valides, faces et facettes, ... Nous terminons ce chapitre par le problème de séparation ainsi que le passage de la programmation linéaire en nombres entiers à la programmation linéaire, et sa relation avec les polyèdres.

Dans le chapitre 3 nous avons choisi trois problèmes dont l'approche polyédrale a donné

des résultats intéressants. D'abord, nous présentons le problème de couplage, un problème qui a vu naître l'approche polyédrale, car cette approche a été introduite par J. Edmonds dans le cadre des problèmes de couplage [26]. La caractérisation du polytope associé au problème est donnée par J. Edmonds [26]. Le deuxième problème que nous exposerons dans ce chapitre sera le problème de voyageur de commerce *TSP* de l'anglais *Traveling Salesman*. Le problème du *TSP*, consiste à trouver un cycle hamiltonien de longueur minimum dans un graphe pondéré. Nous nous intéressons à la caractérisation de celui-ci dans certaines classes de graphes. En dernier nous abordons le problème de sous graphes k -arête connexe, noté $kECSP$. Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -arête connexe (resp k -sommets-connexe) ($1 \leq |V| - 1$) si pour toute paire de sommets $i, j \in V$ il existe au moins k chaînes arête-disjointes (resp sommets-disjointes) disjointes reliant i et j dans G . Si G est muni d'une fonction coût sur les arêtes, le *problème de sous graphe k -arête connexe ($kECSP$)* est de trouver un sous graphe k -arête connexe de coût minimum. (Le coût d'un sous graphe est la somme des coûts de ses arêtes). Nous énumérerons les inégalités valides pour le polytope associé au problème $kECSP$.

Dans le chapitre 4 nous allons étudier le problème de sous graphe 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés. Nous commencerons par exposer le problème de sous graphe 2-arête connexe. Ensuite nous aborderons le problème quand le graphe est à sommets et arêtes pondérés introduit par Baiou [4] puis étudié par Baiou et Correa [5], en fixant un sommet r qui est considéré comme racine, on notera ce problème par $r-2ECSP$. Dans [4] Baiou donne la formulation du problème en programmation linéaire en nombre entier, et prouve que la relaxation (suppression des contraintes d'intégrités) de ce programme n'est pas à solutions entières même dans une classe particulière de graphes comme celle des graphes série parallèles. Ensuite Baiou et Corr ea [5] ont étudié la dimension du polytope associé au $r-2ECSP$, et ils ont introduit deux classes d'inégalités valides pour le polytope associé au $r-2ECSP$ que nous allons exploiter ici pour donner la caractérisation de ce polytope dans un triangle qui admet des arêtes multiples. Mais avant, nous étudierons le problème du $r-2ECSP$ sur la classe des graphes *cactus* et nous donnerons la preuve qu'ici la relaxation du programme donné par Baiou [4] suffit pour caractériser le polytope associé au problème $r - 2ECSP$ dans cette classe. Nous aurons le même résultat quand le graphe est une multi-chaîne.

Chapitre 1

Optimisation combinatoire : Généralités

L'optimisation combinatoire occupe une place très importante en recherche opérationnelle, en mathématiques discrètes et en informatique. Son importance se justifie d'une part par la grande difficulté des problèmes d'optimisation et d'autre part par de nombreuses applications pratiques pouvant être formulées sous la forme d'un problème d'optimisation combinatoire. Bien que les problèmes d'optimisation combinatoire soient souvent faciles à définir, ils sont généralement difficiles à résoudre. En effet, la plupart de ces problèmes appartiennent à la classe des problèmes NP-difficiles et ne possèdent donc pas à ce jour de solution algorithmique efficace valable pour toutes les données.

1.1 La problématique de l'optimisation combinatoire

Un problème d'optimisation est un problème qui consiste à *minimiser* ou *maximiser* une fonction f sur un ensemble donné A , tel que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On écrira le problème de minimisation comme suit :

$$\text{minimiser} \{f(x) : x \in A\}$$

Le problème de maximisation est défini de manière similaire.

Un problème d'optimisation combinatoire est un problème de la forme suivante : étant donné une famille \mathcal{F} de sous-ensembles d'un ensemble de base $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et un système de poids $w = \{w(e_1), w(e_2), \dots, w(e_n)\}$ associé aux éléments de E , trouver un ensemble $F \in \mathcal{F}$ de poids $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ minimum :

$$\text{min} \{w(F) : F \in \mathcal{F}\}.$$

Ici la famille \mathcal{F} est l'ensemble des solutions du problème, elle permet de représenter diverses structures combinatoires comme, par exemple, des chemins, des cycles, des arbres, \dots , dans les graphes.

Le problème de maximisation est défini de manière similaire.

L'optimisation combinatoire étant une des branches de l'informatique et des mathématiques appliquées, elle combine des techniques de la combinatoire, de la programmation linéaire et de la théorie des algorithmes afin de résoudre des problèmes d'optimisation ayant des structures discrètes (généralement un graphe).

1.2 Graphe et optimisation

La plupart des problèmes étudiés en optimisation combinatoire nécessitent des interprétation par des structures graphiques. De plus, des problèmes pratiques tels que les problèmes de télécommunications, VLSI, l'ordonnancement, \dots sont fructueusement modélisés par des graphes. Un graphe se compose d'un ensemble de sommets V qu'on représente par des points et un ensemble d'arêtes E qu'on représente par des traits. Il est noté $G = (V, E)$.

Définition 1.2.1. [25] Soient V et E deux ensembles vérifiant $E \subseteq V \times V$ (ensemble des sous-ensembles de deux éléments pris dans V), on appelle graphe simple non-orienté, le couple $G = (V; E)$. Les éléments de V sont appelés sommets ou noeuds et les éléments de E sont les arêtes de G

Définition 1.2.2. [25] Si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$ alors G'_0 est un sous-graphe de G . On note $G' \subseteq G$.

Si $G' \subseteq G$ et que G_0 contient toutes les arêtes uv de E où $u; v \in V'$ alors G' est appelé le graphe induit par V' . On note $G' = G[V']$.

Définition 1.2.3. Un *graphe partiel* de G engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$ dont les sommets sont des points de V et dont les arêtes sont ceux de V . Autrement dit, on élimine de G les arêtes de $U - V$.

Définition 1.2.4. [11] Un *sous graphe partiel* de G est sous graphe d'un graphe partiel de G .

Une chaîne dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence d'arêtes e_1, e_2, \dots, e_k telle que $e_1 = v_0v_1, e_2 = v_1v_2, \dots, e_k = v_{k-1}v_k$, où v_1, v_2, \dots, v_k sont des sommets de V .

Un *cycle* est une chaîne fermée.

Un cycle est dit hamiltonnien si il passe une fois et une seule fois par chacun des sommets de G .

Définition 1.2.5. [11] Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour toute paire de sommets u, v de V , il existe une chaîne reliant u et v .

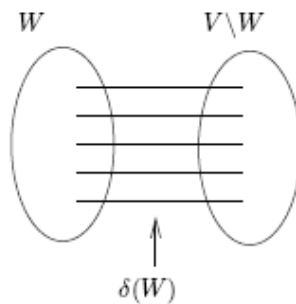


FIG. 1.1 – une coupe

Définition 1.2.6. Soit $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$, un sous ensemble de sommets de V . L'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre dans $V \setminus W$ est appelé coupe et noté $\delta(W)$. (voir la figure 1.1).

En posant $\overline{W} = V \setminus W$, nous avons $\delta(W) = \delta(\overline{W})$. Si W est réduit à un seul sommet on écrit $\delta(v)$ au lieu de $\delta(\{v\})$

Définition 1.2.7. [11] Étant donné un graphe simple $G = (E, V)$, on appelle un *couplage* un ensemble E_0 d'arêtes tel que deux quelconques des arêtes de E_0 sont non adjacentes.

Si E_0 est un couplage et $E_1 \subseteq E_0$, alors E_1 est aussi un couplage.

Définition 1.2.8. [11] Un graphe G est dit complet ses sommets sont deux à deux adjacentes dans G .

Définition 1.2.9. Une *clique* est un sous ensemble de sommets de $G = (V, E)$ induisant un graphe complet.

Définition 1.2.10. [11] Etant donné un graphe $G = (V, E)$, on appelle recouvrement une famille $F \subset E$ telle que tout sommet $x \in X$ soit l'extrémité d'au moins une arête de F .

Définition 1.2.11. [25] Un multi-graphe est un graphe non-orienté, pouvant admettre des boucles et plusieurs arêtes entre deux sommets.

1.3 Programmation linéaire

La programmation linéaire PL , concerne le problème de maximisation ou minimisation d'une fonction linéaire sur un polyèdre. Le problème est donné sous sa forme canonique comme suit :

$$(PL) \begin{cases} \max z = cx \\ \text{s.c } Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Où la fonction objectif est linéaire et A une matrice dans $\mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Tout problème d'optimisation combinatoire à fonction objectif séparée peut se ramener à la résolution d'un programme Linéaire.

Une solution d'un programme linéaire est une affectation de valeurs aux variables du problème. Une solution est réalisable si elle satisfait toutes les contraintes du problème : $x = (x_1, \dots, x_n)$ est une solution réalisable de (PL) si et seulement si $A \cdot x \leq b$ et $x \geq 0$. Une solution optimale est une solution réalisable, notée x pour laquelle la fonction objectif z prend sa valeur maximale z^*

Quand à la résolution des programmes linéaires on distingue deux méthodes célèbres :La méthode du simplexe et la méthode d'ellipsoïde.

La méthode du simplexe est une méthode décrite par G. B. Dantzig[23] aux Etats Unis en 1947. C'est une méthode pratique puisqu'elle permet de résoudre des programmes linéaires de grande taille en des termes de calcul relativement faibles. L'idée de base de l'algorithme de simplexe consiste à partir d'un point extrême x^0 de l'ensemble K des solutions admissibles et à se déplacer vers un point extrême voisin x^1 (Si on en trouve un) où la valeur de z est meilleure. On recommence à partir de x^1 et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait atteint un point extrême x^k meilleur ou jusqu'à ce qu'on ait pu établir que le problème n'admet pas de solutions optimales.

A noter que, l'algorithme de simplexe n'est pas polynomial.

La méthode d'ellipsoïde est un algorithme introduit par Khachiyan en 1976 dont la particularité est d'être polynomial. Cette méthode est basé sur la recherche d'une série d'ellipsoïde à volumes décroissants.

Khachiyan a montré que pour les problèmes de programmation linéaire la méthode d'ellipsoïde permet d'avoir des solutions exactes en un temps polynomial.

Théorème 1.3.1 (Théorème de Khachiyan[51]). *Les systèmes d'inégalités linéaires à coefficients fractionnaires, et les problèmes de programmation linéaire, peuvent être résolus en temps polynomial.*

1.4 La théorie de la complexité

La théorie de la complexité, née à la suite des travaux de Edmonds [26] puis de Cook et Karp, a pour objet de lier le nombre de calculs effectués lors de la résolution d'un problème au moyen d'un algorithme donné à la taille des données de ce problème. D'une autre manière, offre un cadre d'étude mathématique dans lequel les problèmes peuvent être classés en problèmes faciles ou difficiles. Ici on ne donnera que des généralités. Pour de plus amples informations sur la théorie de complexité, consulter le livre de Papadimitriou[54] et Le livre de Garey et Johnson [29]

1.4.1 Notions de base

On formalise la notion de *problème*, en le décomposant en un couple constitué de paramètres et d'une question (l'objectif).

Une *instance* \mathbf{I} est un ensemble de données attribuées aux paramètres. On peut attacher à l'instance \mathbf{I} un entier $\mu(\mathbf{I})$ qui mesure la longueur de ces données, (nombre de bits nécessaires pour la stocker).

Définition 1.4.1. Un algorithme est une suite d'opérations élémentaires qui, lorsqu'on lui fournit une instance d'un problème en entrée, s'arrête après execution de la dernière opération en nous renvoyant la solution.

Les deux paramètres les plus importants pour mesurer la qualité d'un algorithme sont le temps d'execution et l'espace mémoire qu'il utilise. D'où les notions de *complexité en temps* et *complexité en espace*.

Ce qu'on appelle la *complexité en temps* ou simplement *complexité* d'un algorithme correspond à une indication du temps qu'il prendra pour résoudre un problème d'une taille donnée.

La *complexité en espace* est une fonction qui associe, à la taille d'une instance d'un problème donné, un ordre de grandeur du nombre de cases mémoire utilisées pour les opérations nécessaires à la résolution du problème.

Définition 1.4.2. Un algorithme est dit d'ordre de $f(n)$ (noté $\circ(f(n))$) si il existe un scalaire c et un entier n_0 tel que son temps d'exécution est au plus $cf(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

Si le temps d'exécution d'un algorithme est borné par une fonction polynomiale en la taille du problème et des données du problème, alors l'algorithme sera dit *polynomial*

La définition de la complexité d'un algorithme peut facilement se transporter sur les problèmes. La *complexité* d'un problème est la complexité du meilleur algorithme qui le résout.

Définition 1.4.3. Un problème de décision est un énoncé auquel la réponse sera "oui" ou "non".

Exemple : Soit G un graphe non orienté, existe-t-il un cycle hamiltonien dans G ?

Les problèmes de décision sont divisés en deux : Les problèmes *décidables* et les problèmes *non décidables*. un problème *non décidable* est celui dont on a pas décrit un algorithme pour le résoudre.

Théorème 1.4.1. [57] Si le problème de décision associé à un problème d'optimisation combinatoire donné est difficile, le problème d'optimisation combinatoire lui même est difficile.

1.4.2 Les classes des problèmes \mathcal{P} et \mathcal{NP}

Définition 1.4.4 (La classe \mathcal{P}). Un problème \mathbf{P} est dit appartenir à la classe \mathcal{P} , si il existe un algorithme polynomial pour le résoudre.

Les problèmes de classe \mathcal{P} sont *faciles*. On peut citer comme exemple : le problème du plus court chemin, le problème du couplage. . .

Définition 1.4.5. Un algorithme non déterministe est un algorithme contenant une instance « choix » qui, opérant sur un ensemble fini, choisit un élément, sans spécifier comment ce choix est effectué. Il est caractérisé par le fait que s'il existe (au moins) une manière d'effectuer le choix qui conduit à la réponse oui, c'est suivant cette manière que le choix est fait.

Les algorithmes non déterministes permettent de définir la classe NP.

Définition 1.4.6 (La classe \mathcal{NP}). Soit \mathbf{P} un problème de décision et \mathbf{I} les instances de ce problème pour lesquelles la réponse est "oui". \mathbf{P} est dit \mathcal{NP} (Nondeterministic Polynomial) s'il existe un algorithme polynomial (non déterministe) qui permet de vérifier que la réponse est "oui" pour tout instance de \mathbf{I} .

Parmi les problèmes \mathcal{NP} nous distinguons les problèmes de classe \mathcal{P} , ainsi que les problèmes \mathcal{NP} complets.

Définition 1.4.7 (La classe $\text{Co-}\mathcal{NP}$). Soit \mathbf{P} un problème de décision et \mathbf{I} les instances de ce problème pour lesquelles la réponse est "non". \mathbf{P} est dit $\text{Co-}\mathcal{NP}$ s'il existe un algorithme polynomial qui permet de vérifier que la réponse est "non" pour tout instance de \mathbf{I} .

1.4.3 Problème \mathcal{NP} complet

La notion principale de la \mathcal{NP} -complétude est celle de la réduction polynomiale.

Définition 1.4.8. On dira que le problème \mathbf{P} se réduit à un problème \mathbf{P}' si :

1. Il existe un algorithme \mathbf{A} qui transforme les instances (données) \mathcal{I} de \mathbf{P} en instances \mathcal{I}' de \mathbf{P}' .
2. Il existe un algorithme \mathbf{A}' qui transforme les solutions S' de \mathbf{P}' (pour les données \mathcal{I}') en solutions S de \mathbf{P} .

Définition 1.4.9. On dira que le problème \mathbf{P} se réduit polynomialement au problème \mathbf{P}' si :

1. \mathbf{P} se réduit à \mathbf{P}'
2. Les algorithmes \mathbf{A} et \mathbf{A}' sont polynomiaux.

Définition 1.4.10 (La classe \mathcal{NP} -complet). Un problème de \mathcal{NP} est dit \mathcal{NP} -complet, si tout problème de \mathcal{NP} se réduit polynomialement à lui.

Pour démontrer qu'un problème \mathbf{P} est \mathcal{NP} -complet, il faudra montrer que : \mathbf{P} est dans la classe \mathcal{NP} , et qu'il existe un problème \mathbf{Q} connu pour être \mathcal{NP} -complet tel que $\mathbf{Q} \leq \mathbf{P}$.

Définition 1.4.11. Un problème de satisfaisabilité noté SAT est donné par :

- un ensemble de variables booléennes $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- une expression booléenne en terme de ces variables : $E = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ où chaque clause C_i ($i=1, \dots, m$) est une expression de $C_i = u_{j_1} \vee u_{j_2} \vee \dots, u_{j_k}$ et où chaque u_{j_q} est une variable de X .

Le problème consiste à chercher s'il existe une affectation de variables x_k pour $k = 1, \dots, n$ à 0 ou 1 telle que $E = 1$

Théorème 1.4.2. [21] Tout problème \mathcal{NP} se réduit polynomialement à SAT .

Cook a été le premier à montrer la \mathcal{NP} -complétude d'un problème [21], celui de la satisfaisabilité, noté problème *SAT*. La réduction employée (souvent appelée réduction générique) repose sur la théorie des langages rékursifs et les machines de Turing, pour plus d'approfondissement sur le concept des machines de Turing voir les travaux de Hopcroft et Ullman [40]

Remarque 1.4.1. *La question dans le cas des problème d'optimisation combinatoire n'appelle pas une réponse oui ou non, mais la valeur optimale d'une fonction.*

A tout problème d'optimisation correspond un problème de décision : si la question du problème d'optimisation est de décider de l'optimum d'une fonction f , on peut poser la question pour un entier positif quelconque k de l'existence d'une valeur de f inférieure ou égale à k .

Un problème d'optimisation est dit \mathcal{NP} -difficile si le problème de décision qui lui est associé est \mathcal{NP} -complet.

1.4.4 Problèmes classiques d'optimisation combinatoire

Nous présentons rapidement ici trois problèmes classiques d'optimisation combinatoire : le problème du sac-à-dos, le problème d'affectation, le problème du voyageur de commerce.

Le problème de sac à dos

"Le problème du sac-à-dos" est un problème de sélection qui consiste à maximiser un critère de qualité sous une contrainte linéaire de capacité de ressource. Il doit son nom à l'analogie qui peut être faite avec le problème qui se pose au randonneur au moment de remplir son sac-à-dos : il lui faut choisir les objets à emporter de façon à avoir un sac le plus "utile" possible, tout en respectant son volume.

Plus formellement, on peut le décrire de la façon suivante. Soit un ensemble de n éléments et une ressource disponible en quantité limitée, b . Pour $j = 1, \dots, n$, on note p_j le profit associé à la sélection de l'élément j et on note a_j la quantité de ressource que nécessite l'élément j , s'il est sélectionné. Les coefficients p_j et a_j prennent des valeurs positives pour tout $j = 1, \dots, n$. Le problème du sac-à-dos consiste à choisir un sous-ensemble des n éléments qui maximise le profit total obtenu, en respectant la quantité de ressource disponible.

On associe à chaque élément j une variable de sélection, x_j , binaire, égale à 1 si j est sélectionné, égale à 0 sinon. Le profit total obtenu peut alors s'écrire comme la somme :

$\sum_{j=1}^n p_j x_j$ et la quantité totale de ressource utilisée comme la somme : $\sum_{j=1}^n a_j x_j$. Le problème du sac-à-dos se modélise donc sous la forme :

$$\max \sum_{j=1}^n p_j x_j \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad (1.3)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.4)$$

Le problème du sac-à-dos a fait l'objet de différents travaux proposant des méthodes exactes de résolution. Les algorithmes proposés relèvent de trois principaux types de méthodes. Premièrement, des algorithmes de type séparation et évaluation, ont été proposés dans les années 70, permettant de traiter efficacement des instances de petites tailles. Ces performances ont par la suite été améliorées par l'adjonction de contraintes supplémentaires pour renforcer les bornes dans l'arbre de recherche. Deuxièmement, des algorithmes se basant sur l'identification d'une variable critique et d'un sous-ensemble associé de variables, sur lequel on applique une recherche arborescente tronquée, ont permis, à partir des années 80, d'augmenter la taille des instances pouvant être résolues (jusqu'à $n = 100000$). Troisièmement, des algorithmes efficaces de programmation dynamique ont été proposés. En particulier, la programmation dynamique est combinée avec l'identification d'une variable critique et l'utilisation de techniques de renforcement des bornes.

Le problème d'affectation

Le "problème d'affectation" consiste à établir des liens entre les éléments de deux ensembles distincts, de façon à minimiser un coût et en respectant des contraintes d'unicité de lien pour chaque élément.

On considère m tâches et n agents, avec $n \geq m$. Pour tout couple (i, j) tq : $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, l'affectation de la tâche i à j entraîne un coût de réalisation noté c_{ij} : ($c_{ij} \geq 0$). Chaque tâche doit être réalisée exactement une fois et chaque agent peut réaliser au plus une tâche. Le problème consiste à affecter les tâches aux agents, de façon à minimiser le coût total de réalisation et en respectant les contraintes de réalisation des tâches et de disponibilité des agents

À tout couple tâche/agent (i, j) , on associe une variable d'affectation, x_{ij} , binaire, qui prend la valeur 1 si la tâche i est affectée à l'agent j et 0 sinon. Le coût total de réalisation

des tâches s'exprime alors par la somme : $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$. Le nombre d'agents réalisant la tâche i est donné par : $\sum_{j=1}^n x_{ij}$, pour tout $i = 1, \dots, m$ et le nombre de tâches réalisées par l'agent j est donné par : $\sum_{i=1}^m x_{ij}$, pour tout $j = 1, \dots, n$. On peut donc modéliser le problème d'affectation sous la forme :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.8)$$

En théorie des graphes, on peut se ramener à un "problème de couplage dans un graphe biparti". On dit d'un graphe G qu'il est *biparti* si l'on peut diviser les sommets en deux ensembles X_1 et X_2 de telle sorte que toutes les arêtes dans le graphe joignent un sommet de X_1 à un sommet de X_2 .

En associant X_1 à l'ensemble des tâches, de cardinalité m et X_2 à l'ensemble des agents, de cardinalité n , une arête (i, j) dans le graphe G (avec $i \in X_1$ et $j \in X_2$) représente la possibilité d'affecter la tâche i à l'agent j ; on associe le poids c_{ij} à chaque arête (i, j) de G . Le poids d'un couplage étant défini comme la somme des poids de ses arêtes, le problème d'affectation revient alors à chercher un couplage de cardinalité m de poids minimal dans le graphe G .

Le cas particulier où X_1 et X_2 sont de même cardinalité (correspondant au cas $n = m$ pour le problème d'affectation) est fréquemment étudié; on s'intéresse alors à la recherche d'un couplage de cardinalité maximale. Si on considère des ensembles X_1 et X_2 de cardinalité n et s'il existe n^2 arêtes dans le graphe G (i.e, le graphe est biparti complet), alors le couplage maximal est de cardinalité n et il est appelé "*couplage parfait*". On peut étendre ce problème à celui de la recherche d'un couplage maximal de poids minimal dans G .

La "*méthode Hongroise*", proposée par Kuhn en 1955, est un algorithme dual qui s'appuie sur une modélisation du problème d'affectation sous forme d'un programme linéaire. Du fait de sa grande efficacité sur ce type de problème, c'est l'algorithme de référence en Recherche Opérationnelle pour résoudre le problème d'affectation. Son principe est basé

sur le fait que les couplages de poids minimal dans le graphe du problème primal sont exactement les couplages de cardinalité maximale dans le graphe du problème dual.

Le problème de voyageur de commerce

Le "problème du voyageur de commerce", ou *TSP* (pour Traveling Salesman Problem), est le suivant : un représentant de commerce ayant n villes à visiter souhaite établir une tournée qui lui permette de passer exactement une fois par chaque ville et de revenir à son point de départ pour un moindre coût, c'est-à-dire en parcourant la plus petite distance possible. C'est un des problèmes les plus anciennement et largement étudiés en optimisation combinatoire. Ses applications sont nombreuses. Par exemple, des problèmes de séquençement de processus de fabrication ou d'optimisation de parcours en robotique peuvent s'exprimer directement sous forme d'un *TSP* et certains problèmes, comme les problèmes de transport, sont plus complexes que le *TSP* mais présentent une structure sous-jacente de type *TSP*.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, avec $|V| = n$. Dans le problème du voyageur de commerce on cherche à trouver un cycle hamiltonien de longueur minimum. La modélisation du problème est donnée comme suit :

Soit d_e la longueur de $e \in E$, soit x_e la variable définie comme suit :

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ appartient à un cycle Hamiltonien} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Soit $S \subseteq V$, $E(S)$ représente les arêtes ayant les deux extrémités dans S . Généralement, les sommets du graphe se réfèrent aux *cités* et le cycle hamiltonien représente *une tournée*.

$$\text{minimiser } \sum_{e \in E} d_e x_e \quad (1.9)$$

$$\sum_{e: v \in e} x_e = 2 \quad \text{pour tout } v \in V \quad (1.10)$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \text{pour tout } \emptyset \neq S \subset V \quad (1.11)$$

$$x_e \in \{0, 1\} \quad \text{pour tout } e \in E \quad (1.12)$$

Pour résoudre le problème du voyageur de commerce on se ramène à la recherche d'un cycle hamiltonien de longueur minimum qui est un problème *NP*-difficile, ce qui induit que le problème de voyageur du commerce aussi est *NP*difficile.

1.5 Résolution des problèmes difficiles

Etant donnée l'importance des problèmes d'optimisation combinatoire, de nombreuses méthodes de résolution ont été développées en recherche opérationnelle et en intelligence artificielle. Ces méthodes peuvent être classées sommairement en deux grandes catégories : les méthodes exactes (complètes) qui garantissent la complétude de la résolution ; et les méthodes approchées (incomplètes) qui perdent la complétude pour gagner en efficacité.

1.5.1 Méthodes exactes

Méthode d'énumération implicite (Branch and Bound)

Soit IP un problème d'optimisation combinatoire dont l'ensemble des solutions admissibles est S . Les méthodes de (Branch and Bound) (séparation et d'évaluation) repose sur le principe "diviser pour régner". Plus précisément, on divise l'ensemble des solutions admissibles d'un problème d'optimisation combinatoire qu'on notera S en sous-ensembles de plus en plus petits afin d'isoler dans l'un de ses sous-ensembles une solution optimale. Le processus peut être représenté par un arbre (une arborescence) d'énumération : la racine correspond au problème de départ IP sur l'ensemble S , les fils représentent les sous-problèmes IP^i définis sur des sous-ensemble S_i de S . L'algorithme de Branch and Bound est donné comme suit :

Etape 1 : *Initialisation* : $L = \{IP\}$, $S^0 = S$, $\bar{z}^0 = \infty$, et $\underline{z}_{IP} = -\infty$.

Etape 2 : *le test d'arrêt* : Si $L = \emptyset$, alors la solution x^0 qui donne $\underline{z}_{IP} = cx^0$ optimale.

Etape 3 : *Sélection du problème et relaxation* : Sélectionner un problème IP^i puis le supprimer de L . Résoudre sa relaxation RP^i . Soit z_R^i la valeur optimale de la relaxation et soit x_R^i la solution optimale, si il en existe une.

Etape 4 : *L'élagage* :

- Si $z_R^i \leq \underline{z}_{IP}$, aller à l'étape 2.
- Si $x_R^i \notin S^i$, aller à l'étape 5.
- $x_R^i \in S^i$ et $cx_R^i > \underline{z}_{IP}$, soit $\underline{z}_{IP} = cx_R^i$. Supprimer tout les problèmes de L vérifiant $\bar{z}^i \leq \underline{z}_{IP}$. Si $cx_R^i = z_R^i$, aller à l'étape 2 ; sinon aller à l'étape 5.

Etape 5 : *Division* : Soit $\{S^{ij}\}_{j=1}^k$ une division de S^i . Ajouter les problèmes $\{IP^{ij}\}_{j=1}^k$ à la liste L , où $\bar{z}^{ij} = z_R^i$ pour tout $j = 1, \dots, k$. Aller à l'étape 2.

La méthode de "Branch and Bound" a été initialement proposée par Little et al. [44]

pour résoudre le problème du voyageur de commerce, puis, a été reprise par d'autres auteurs pour proposer différentes variantes. le principe est de partitionner l'ensemble des solutions du problème en deux sous-ensembles, en éliminant les partie ne contenant pas de solution entière réalisable (séparation). A chaque étape, on sélectionne, en utilisant une "stratégie de sélection", un sous ensemble prometteur qui conduit à une meilleure solution réalisable.

Choix de stratégies d'explorations

Soit L une liste de sous problèmes, autrement dit un arbre partiel de sommets actifs, une question s'impose : quelle est le sommet (noeud) qui doit être exploré en premier ? L'exploration des noeuds de l'arborescence obéit à une stratégie donnée. Dans la littérature, on distingue trois types de stratégies :

- **Profondeur d'abord** La stratégie "profondeur d'abord " sépare un noeud tant que c'est possible, ie, jusqu'au moment où on coupe sa branche, pour revenir après à une autre branche. A chaque étape, on change de niveau.
- **Largeur d'abord** cette stratégie résout d'abord les problèmes d'un même niveau, puis sépare tous les noeuds (séparables) pour résoudre après les problèmes du niveau suivant.
- **Meilleur d'abord** Contrairement aux stratégies citées ci-dessus, celle ci n'a pas un mode d'exploration bien établi. On sépare le noeud ayant la meilleure valeur de la fonction objectif. A partir d'une liste de sommets (noeuds) actifs L on choisit un noeud $i \in L$ qui maximise \bar{z}^i

Méthodes de coupes

On considère un problème d'optimisation combinatoire de la forme :

$$\max\{cx : x \in S\}, \text{ tel que } S = \{Ax \leq b, x \text{ entier}\}. \quad (1.13)$$

la méthode de coupe consiste à éliminer les contrainte d'intégrité, c'est à dire résoudre le problème relaxé

$$\max\{cx : x \in T\} \text{ avec } T = \{Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (1.14)$$

- Si la solution optimale x^0 du problème (1.14) est entière alors x^0 est aussi solution optimale du problème (1.13).
- Si la solution optimale du problème (1.14) n'est pas entière, il doit exister une contrainte (a', b') (qui soit vérifié par toute solution de (1.13)) qui n'est pas vérifié

par x^0 . Cette contrainte peut être ajoutée au système $Ax \leq b$ et cela nous permet d'obtenir une plus "forte" relaxation. Une telle contrainte est appelée une "coupe".

L'étape cruciale de la méthode est la génération de ces contraintes (contraintes vérifiées par toute solution de (1.13)). L'une des premières techniques pour identifier (générer) ces contraintes a été introduite par Gomory [33] et [34]. En se basant sur cette technique Chvátal [20] a développé une procédure générale pour générer ce genre de contraintes. La procédure est basée sur le fait que si p est entier et $p \leq q$, alors $p \leq \lfloor q \rfloor$.

La procédure de "Chvátal-Gomory" qui sera abordée dans le chapitre qui va suivre, est souvent utilisée pour identifier des inégalités valides pour le polytope associé à un problème d'optimisation combinatoire. Ces contraintes seront alors utilisées dans un *algorithme de coupe*. L'algorithme de coupe "élémentaire" peut être illustré comme suit.

Algorithme de coupe

Etape 1 : (*Initialisation.*) Résoudre le problème (1.14), soit x^* la solution de (1.14).

Aller à l'étape 2

Etape 2 : (*Test d'optimalité.*) Si la solution x^* est entière, stop. Sinon,

aller à l'étape 3

Etape 3 : (*Coupe et pivot.*) Générer une inégalité valide pour ILP par une des méthodes de génération d'inégalité. Et aller à l'étape 1.

Méthode de Branchements et coupes "Branch and cut"

Les algorithmes basés sur les techniques polyédrales sont généralement utilisés dans le cadre de méthodes arborescentes connues sous le nom d'algorithmes de *coupes et branchements* (*Branch and Cut algorithms*). L'idée générale de la méthode de coupes est de résoudre un programme en nombres entiers comme une séquence de programmes linéaires. On considère la relaxation linéaire du problème (le programme linéaire obtenu en relâchant les contraintes d'intégrité du problème). Si la solution optimale, disons x^* , de ce programme est entière, elle est alors optimale. Si ce n'est pas le cas, alors il doit exister une contrainte valide pour le problème qui soit violée par x^* . Une telle contrainte peut être rajoutée au programme pour couper une partie inutile du polyèdre de la relaxation contenant x^* . On détermine alors une (ou plusieurs) contraintes violées par x^* (coupes) que l'on rajoute au programme. Si la solution optimale du nouveau programme est entière, alors elle est optimale. Sinon, on détermine de nouvelles contraintes violées et ainsi de suite. Cette

procédure continue jusqu'à ce qu'on trouve une solution entière et donc optimale, ou alors il n'est plus possible de générer de contraintes violées. Dans ce cas, on utilise une technique de séparation et évaluation (Branch-and-Bound) pour déterminer une solution optimale. On choisit une variable fractionnaire x_i , et on divise le problème en deux sous-problèmes en fixant $x_i = 0$ pour l'un et $x_i = 1$ pour l'autre. On détermine une borne supérieure (inférieure) pour chaque sous-problème en résolvant la relaxation linéaire du problème. Si pour un des sous-problèmes, la solution optimale est entière, on arrête son exploration. Sinon, on choisit un des sous-problèmes encore explorables (une des feuilles de l'arbre de résolution) et on le sépare en deux sous-problèmes, et ainsi de suite. La procédure s'arrête lorsque toutes les feuilles de l'arbre ne sont plus exploitables. La meilleure solution trouvée sera optimale. Pour calculer une borne pour chaque sous-problème de l'arbre, on peut ajouter des contraintes violées. On peut ainsi améliorer la borne et accélérer davantage la résolution du problème. Un algorithme de coupes et branchements (Branch-and-Cut algorithm) est une technique de séparation et évaluation dans laquelle on applique l'algorithme de coupes pour calculer la borne de chaque sous-problème. Cette méthode introduite par Padberg et Rinaldi [52] pour le problème du voyageur de commerce s'est avérée très efficace, et est maintenant largement utilisée pour résoudre d'une manière exacte des problèmes d'optimisation combinatoire.

La programmation dynamique

La programmation dynamique, due à Richard Bellman[9], a été utilisée pour résoudre des problèmes de l'optimisation combinatoire complexe tel que le problème de sac à dos ... Le principe de cette méthode est la décomposition du problème initial en sous problème, cette approche a permis de mettre en évidence des algorithmes de résolution pour des problèmes combinatoires définis sur des graphes obtenus par composition. En général, la complexité de ces algorithmes est polynomiale en la taille du graphe.

1.5.2 Méthodes approchées

Les méthodes approchées constituent une alternative très intéressante pour traiter les problèmes d'optimisation de grande taille si l'optimalité n'est pas primordiale. En effet, ces méthodes sont utilisées depuis longtemps par de nombreux praticiens. On distingue les méthodes *heuristiques*, et les méthodes *α -approximation*

Les heuristiques

Une heuristique est un algorithme de résolution ne fournissant pas nécessairement une solution optimale pour un problème d'optimisation donné.

Outre les heuristiques spécifiques à un problème d'optimisation donné, il existe plusieurs *métaheuristiques* pouvant être adaptées à de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire. Une *métaheuristique* est constituée d'un ensemble de concepts fondamentaux (par exemple, la liste tabou et les mécanismes d'intensification et de diversification pour la métaheuristique tabou), qui permettent d'aider à la conception de méthodes. Ainsi les métaheuristiques sont adaptables et applicables à une large classe de problèmes. Elles sont représentées essentiellement par les méthodes de voisinage comme le recuit simulé et la recherche tabou, et les algorithmes évolutifs comme les algorithmes génétiques et les stratégies d'évolution. Grâce à ces méthodes, on peut proposer aujourd'hui des solutions approchées pour des problèmes d'optimisation classiques de plus grande taille et pour de très nombreuses applications qu'il était impossible de traiter auparavant.

Les méthodes α -approximations

Pour certaines heuristiques, il est possible d'assurer, pour n'importe quelle instance I du problème, une qualité minimale de la solution trouvée. On parle alors d'*approximations*. La qualité de la solution est mesurée par une performance qui peut être relative ou absolue. Notons, respectivement, $\Phi_H(I)$ et $\Phi^*(I)$ la valeur fournie par l'heuristique H et la valeur optimale du problème pour l'instance I . H a une performance absolue α si $\left| \frac{\Phi_H(I)}{\Phi^*(I)} \right| = \alpha$ pour toute instance I .

Une heuristique de performance absolue α est une *α -approximation*.

1.6 Conclusion

Plusieurs problèmes issus de domaines divers tel que l'industrie, le transport, l'économie et autre se ramènent à des problèmes d'optimisation combinatoire. Un problème d'optimisation combinatoire peut être défini comme étant celui de déterminer un plus petit (ou un plus grand) élément d'un ensemble fini. A première vue un tel problème paraît très facile à résoudre vu le caractère fini de ses solutions. Mais en pratique le nombre de ces solutions peut être exponentiel. Et dans ce cas, une méthode qui consisterait à énumérer toutes les solutions ne peut être envisagée. Plusieurs approches ont, par conséquent, été

développées pour ces problèmes comme la programmation linéaire, la programmation en nombres entiers et les approches polyédrales.

Une des méthodes récentes et puissantes pour résoudre ces problèmes est l'approche polyédrale. Une méthode introduite par J. Edmonds [26] pour le problème de couplage, cherche à décrire l'enveloppe convexe des solutions du problème par un système d'inégalités linéaires et donc se ramener à la résolution d'un programme linéaire. Dantzig a été le premier à avoir proposé un algorithme de résolution (méthode de simplexe [23]) pour résoudre ce type de programmes. Ce passage de l'optimisation sur un ensemble discret à l'optimisation sur un domaine convexe a permis un nouvel essor de l'optimisation combinatoire et a propulsé en puissance l'approche polyédrale.

Chapitre 2

Approche polyédrale

Ce chapitre est consacré aux notions de base de la théorie des polyèdres. D'abord nous donnons un rappel géométrie, ensuite nous abordons quelques définitions et propriétés de base permettant la bonne compréhension du sujet. Nous verrons donc des notions qui se rapportent à la théorie des polyèdres, celles des inégalités valides, faces et facettes, ... Par la suite nous aborderons le problème de séparation ainsi que le passage de la programmation linéaire en nombres entiers à la programmation linéaire, et sa relation avec les polyèdres. Nous terminons ce chapitre par évoquer des notions sur le polyèdre entier.

2.1 Rappels de géométrie

Définition 2.1.1. Si $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ alors le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ est dit combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_k

Définition 2.1.2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire de x_1, x_2, \dots, x_k (c'est à dire $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$) et de plus $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ alors x est dit combinaison affine des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_k .

Définition 2.1.3. Si $x \in \mathbb{R}^n$ est une combinaison affine de x_1, x_2, \dots, x_k (i.e $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$) et de plus $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, i = k$ alors x est dit combinaison convexe des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_k .

soit $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \neq \emptyset$, alors l'ensemble de toutes combinaisons linéaire (resp affine, convexe) de S est dite enveloppe linéaire (resp affine, convexe) de S et noté $Lin(S)$ (resp $aff(S), conv(S)$)

Remarque 2.1.1. Par convention, $Lin(\emptyset) = \{0\}$, $aff(\emptyset) = \emptyset$, $conv(\emptyset) = \emptyset$.

Définition 2.1.4. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$,

Si $Lin(S) = S$ alors S est dit sous espace linéaire.

Si $aff(S) = S$ alors S est dit sous espace affine.

Si $conv(S) = S$ alors S est dit sous espace convexe.

Définition 2.1.5. Un ensemble de points $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, est dit linéairement indépendant si l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$$

est $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

Définition 2.1.6. Un ensemble de points $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, est dit affinement indépendant si l'unique solution du système :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \end{cases}$$

est $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

Lemme 2.1.1. Un ensemble L est dit sous espace linéaire si et seulement si il existe une matrice $n \times m$ A tel que $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$

Remarque 2.1.2. Soit $F = \{x | Ax = b\}$ un sous-espace affine. On a : $dim(F) = n - rang(A)$.

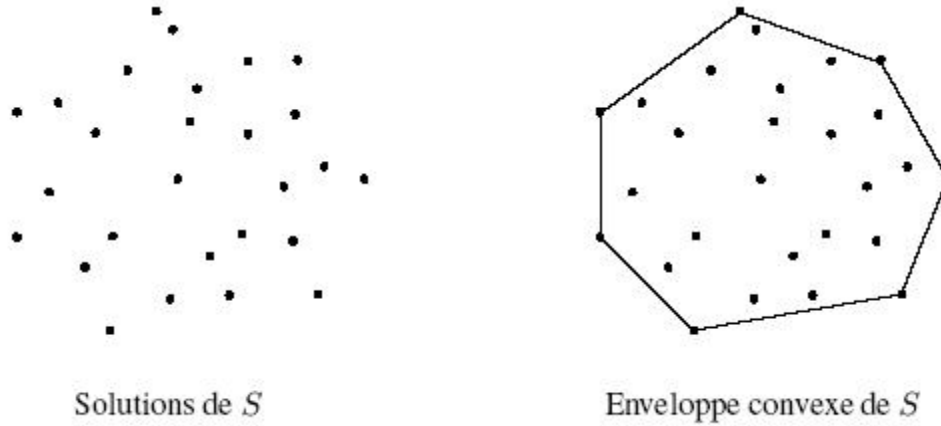
Le nombre maximal de points indépendants au sens affine de F est égal à $n + 1 - rang(A)$.

Définition 2.1.7. Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$, est dit convexe si il satisfait :

$$\forall x, y \in C \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$$

L'enveloppe convexe d'un ensemble de points S est le plus petit ensemble convexe contenant S . On le notera $conv(S)$. La dimension d'un ensemble convexe est définie comme la dimension de son enveloppe affine. En générale la dimension d'un ensemble est celle de son enveloppe affine.

La proposition suivante établit la relation entre l'optimisation sur S et l'optimisation sur $conv(S)$.

FIG. 2.1 – L'ensemble S et son enveloppe convexe

Proposition 2.1.1. [55] Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de points et w un vecteur de \mathbb{R}^n , alors :

$$\max\{wx : x \in S\} = \max\{wx : x \in \text{conv}(S)\}$$

Un cône convexe est un ensemble de point $C \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfaisant :

$$\forall x, y \in C \text{ et } \lambda, \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in C$$

La convexité est préservée sous certaines opérations, on cite quelques unes.

- Soient C_1, C_2 deux ensembles convexe et u_1, u_2 deux nombres réels, alors $u_1 C_1 + u_2 C_2$ est aussi un ensemble convexe.
- La fermeture d' un convexe est un convexe. La fermeture d' un cône est un cône
- L'intersection d'une famille (même infini) d'ensembles convexes est convexe.

Théorème 2.1.1 (Séparation d'ensembles convexes). Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide, convexe et fermé. Soit $p \notin C$. Alors il existe un vecteur $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ et un $\epsilon \geq 0$ telle que :

$$a^T x \leq a^T p - \epsilon \quad \forall x \in C$$

Théorème 2.1.2 (lemme de Farkas). Soit A une matrice et b un vecteur. Alors il existe un vecteur $x \geq 0$ avec $Ax = b$, si et seulement si $yb \geq 0$ pour tout vecteur ligne y avec $yA \geq 0$.

Preuve. La condition nécessaire et triviale, comme $yb = yAx \geq 0$ pour tout x et y avec $x \geq 0, yA \geq 0$, et $Ax = b$. Pour montrer la suffisance, on suppose qu'il n'existe aucun $x \geq 0$ avec $Ax = b$. Soient a_1, a_2, \dots, a_m les colonnes de A . Alors $b \notin \text{cone}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, et d'après le théorème précédent, $yb < 0$ pour certains y avec $yA \geq 0$. \square

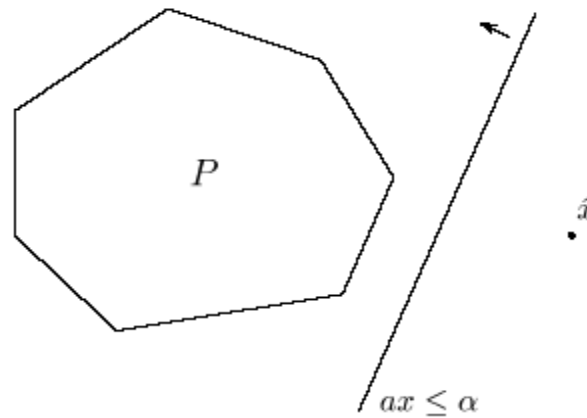


FIG. 2.2 – Séparation d'ensemble convexe

2.2 Structures polyedrales

2.2.1 Les polyèdres

Soient A une $m \times n$ matrice de $\mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, alors $Ax \leq b$ est dit système d'inégalités linéaire, et $Ax = b$ système d'égalités linéaires.

Définition 2.2.1. Soit $H \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit un *demi espace* si il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^n / 0$ et un scalaire $a_0 \in \mathbb{R}$ telle que $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq a_0\}$.

On appelle *Hyperplan* est l'ensemble $H^= = \{x \in \mathbb{R}^n : ax = a_0\}$

Définition 2.2.2. On appelle un *polyèdre* dans \mathbb{R}^n l'ensemble des points satisfaisant un nombre fini d'inégalités.

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

où A est une $m \times n$ matrice et b un m -vecteur. Autrement dit c'est l'intersection de m demi-espaces.

On notera $P = (A, b)$ un tel polyèdre et $P0 = (A, 0)$ le cone associé au polyèdre P . Un point non nul $r \in P0$ est appelé rayon de P .

On appelle polytope un polyèdre borné.

Un cône généré par des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_m est l'ensemble

$$\text{cone}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0\}.$$

C'est le plus petit cône convexe contenant x_1, x_2, \dots, x_m .

Définition 2.2.3. La dimension d'un polyèdre noté $\dim(P)$, est égale à k si le nombre maximum de points affinement indépendants dans P est $k + 1$.

Si P est un polyèdre de \mathbb{R}^n et $\dim(P) = n$ alors P est de pleine dimension.

Définition 2.2.4. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit combinaison linéaire des points x^1, \dots, x^k de \mathbb{R}^n s'il existe k scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$. Si de plus $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ (resp. $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, i = k$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$), alors x est dit combinaison affine (resp. combinaison convexe) de ces points.

Théorème 2.2.1. [51] Un ensemble de points $P \subseteq \mathbb{R}^n$ est un polytope si et seulement s'il existe un ensemble de points S telle que $P = \text{conv}(S)$.

Soit I l'ensemble des indices des lignes a^i de A . On note

$$I^= = \{i \in I : a^i x = b_i \forall x \in P\}$$

$$I^< = \{i \in I : \exists x \in P \text{ avec } a^i x < b_i\}$$

$$(A, b) = \begin{bmatrix} A^= & b^= \\ A^< & b^< \end{bmatrix}$$

On a cette notation pour le polyèdre :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : A^< x \leq b^<, A^= x = b^=\}$$

Définition 2.2.5. Un point $x^* \in P$ est dit point intérieur de P si

$$A_i^< x^* < b_i$$

pour $i = 1, \dots, m_1$.

Définition 2.2.6. [55] Un point x d'un polyèdre P est dit point extrême ou sommet de P s'il n'existe pas deux solutions x^1 et x^2 de P , $x^1 \neq x^2$, telles que $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.

2.2.2 Faces et facettes

Définition 2.2.7. Une inégalité linéaire $ax \leq \alpha$ est dite valide pour un polyèdre $P \in \mathbb{R}^n$ si elle est vérifiée par tout point de P , i.e, $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : ax \leq \alpha\}$.

Définition 2.2.8. Si $ax \leq \alpha$ est une inégalité valide, alors le polyèdre $F = \{x \in P \mid ax = \alpha\}$, est appelé face de P . On dit que F est définie par l'inégalité $ax \leq \alpha$.

Une face de P est dite propre si elle est non vide et différente de P .

Remarque 2.2.1.

1. $F = \{x \in P : cx = \delta\}$ est une face non vide de P , avec $P \subseteq \{x : cx \geq \delta\} \Rightarrow F = \{z \in P : cz = \min_{x \in P} cx\}$
2. $P \subseteq \{x : cx \geq \delta\}$, $c \neq \delta$, $F = \{x \in P : cx = \delta\} \neq \emptyset \Rightarrow cx = \delta$ est un hyperplan support de P

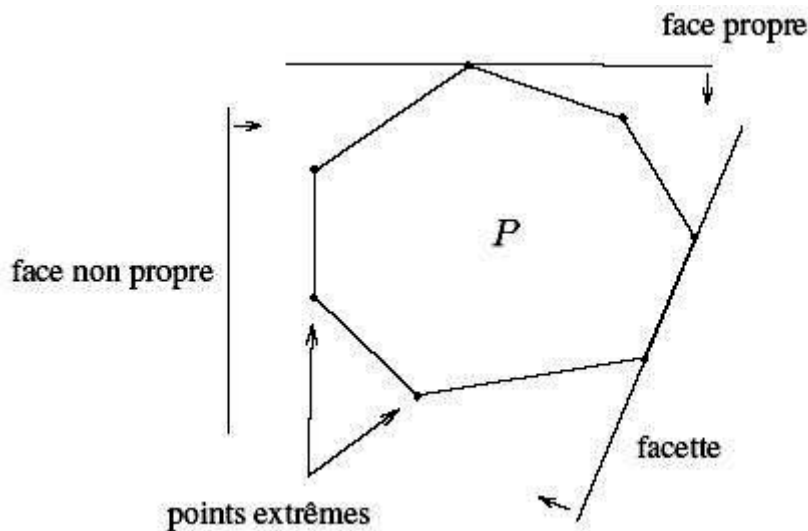


FIG. 2.3 – Face et facette d'un polyèdre convexe

Proposition 2.2.1. [55] *Un point extrême est une face de dimension 0.*

Les inégalités qui sont nécessaires dans la description de P sont celles qui définissent des faces maximales (au sens de l'inclusion).

Définition 2.2.9. Une face propre de P est dite facette si $\dim(F) = \dim(P) - 1$

Remarque 2.2.2. *Il y a cinq manières de définir les faces de P . Elles peuvent être déterminés par :*

1. *Les inégalités valides.*
2. *La programmation linéaire.*
3. *Les hyperplan support.*

4. Egalité des ensembles dans la représentation.

5. Comme Le sous ensemble extremal de P .

Théorème 2.2.2. *Si P est un polyèdre de pleine dimension, alors il existe un système linéaire minimal unique qui décrit P .*

Toute contrainte du système (système minimale) définit une facette distincte, de P .

Théorème 2.2.3. [51] *Si F est une facette de $P = (A, b)$, il existe au moins une inégalité $a^k x \leq b_k$, $k \in I^{\leq}$ qui la représente.*

Preuve. Soit P_F le polyèdre obtenu à partir de P en supprimant toutes les inégalités de $Ax \leq b$ qui représentent la facette F .

Nous montrons que $P_F/P \neq \emptyset$; Soit \hat{x} un point interne de F et soit $a^r x \leq b_r$ une inégalité représentant F .

Puisque a^r est indépendant de $A^=$, il résulte du lemme de Farkas l'existence de y tel que $A^=y = 0$ et $a^r y > 0$. Comme \hat{x} est un point interne de F , on a $a^r \hat{x} < b_r$ pour toutes les inégalités de I^{\leq} qui ne représentent pas F . On peut alors choisir α assez petit pour que $\hat{x} + \alpha y \in P_F/P$.

□

Théorème 2.2.4. [51] *Une inégalité de $ax \leq b$ qui ne représente pas une facette de P peut être supprimée de la description de P .*

Preuve. Soit $a^r x \leq b_r, r \in I^{\leq}$, une inégalité de la description de P qui représente une face de dimension $\dim(P) - k$ avec $k > 1$. Si cette inégalité ne peut être supprimée, il existe un point x^* tel que $a^i x^* = b_i$, si $i \in I^=$; $a^i x^* \leq b_i$, $i \in I^{\leq}/\{r\}$; $a^r x^* > b_r$.

Soit \hat{x} un point interne de P . Sur le segment $[x^*, \hat{x}]$ il existe un point z tel que : $a^i z = b_i$, $i \in I^=$; $a^i z < b_i$, $i \in I^{\leq}/\{r\}$; $a^r z = b_r$. Il en résulte que $I^=(F)$ contient au plus une ligne de plus que $I^=$ et donc que $\dim(F) \geq \dim(P) - 1$. Contradiction. □

Il résulte de ces deux propriétés (deux derniers théorèmes) que la description minimale d'un polyèdre P a la structure suivante :

$$P = \{x | A^=x = b^= \text{ et } A^{\leq}x \leq b^{\leq}\}$$

où

- les lignes de $A^=$ sont indépendantes,
- les inégalités de $A^{\leq}x \leq b^{\leq}$ représentent des facettes distinctes.

Définition 2.2.10. Soit $P^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$. Les points de $P^0 \setminus \{0\}$ sont appelés rayons de P .

Un rayon r est dit extrême s'il n'existe pas deux rayons $r^1, r^2 \in P^0, r^1 \neq r^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, tel que $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $r \in \mathbb{R}^n$ soit un rayon de P est que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\{y \in \mathbb{R}^n : y = x + \lambda r, \lambda \in \mathbb{R}_+\} \subseteq P$.

Théorème 2.2.5. [51] Pour tout point extrême x^* de P il existe $c \in \mathbb{Z}^n$ tel que x^* est la solution optimale unique du programme $\max\{cx : x \in P\}$.

Preuve. Soit $I = \{i \in \{1, \dots, m\} : A_i x^* = b_i\}$. Soit $c^* = \sum_{i \in I} A_i$. Puisque P est fractionnaire, il existe un entier $t > 0$ tel que $c = tc^* \in \mathbb{Z}^n$. Comme x^* est un point extrême de P , et comme x^* est une face de dimension 0, pour tout point $x \in P/\{x^*\}$, il existe $i \in I$ tel que $A_i x < b_i$. Donc pour $x \in P/\{x^*\}$, on a $cx = \sum_{i \in I} tA_i x < \sum_{i \in I} tb_i = \sum_{i \in I} tA_i x^* = cx^*$. \square

Théorème 2.2.6. [51] Soit P un polyèdre non vide tel que $\text{rang}(A) = n$. Si la valeur de $\max\{cx, tq : x \in P\}$ est finie, le maximum est atteint en un sommet de P .

Le théorème qui va suivre est considéré en tant que théorème fondamental de la géométrie des polyèdres, à savoir qu'un polyèdre quelconque est la "somme" de l'enveloppe convexe de ses sommets et de l'enveloppe conique de ses rayons extrêmes.

Théorème 2.2.7 (Minkovsky). [58] Soit P un polyèdre non vide tel que $\text{rang}(A) = n$. soit $S = \{s_1, \dots, s_K\}$ l'ensemble de ses sommets (ses points extrêmes) et soit $R = \{r_1, \dots, r_l\}$ l'ensemble de ses rayons extrêmes. On a $P = \{u + v | u \in \text{conv}(S), v \in \text{cone}(R)\}$

Dans l'approche polyédrale, on est concerné par la réciproque du théorème de Minkowski [58], à savoir la détermination d'une description polyédrale de l'enveloppe convexe $\text{conv}(S)$ d'un ensemble fini des solutions d'un problème. On veut dire le théorème de Weyl [58].

Avant d'introduire le théorème de Weyl, on énonce le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 (lemme). [58] La projection d'un polyèdre sur l'espace affine est un polyèdre.

Théorème 2.2.8 (Weyl). [58] Soit les ensembles de points $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. L'ensemble $E = \{x = u + v | u \in \text{conv}(A), v \in \text{cone}(B)\}$ est un polyèdre.

Le théorème qui va suivre, formulé par Grotschel et Padberg [39], nous offre deux méthodes pour montrer qu'une inégalité valide pour P définit une facette pour celui-ci.

Théorème 2.2.9. [39] Soit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polyèdre, et posons A une $m \times n$ matrice, $b \in \mathbb{R}^m$ telle que $\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b\}$. Soit F une face non vide de P alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. F est une facette de P .
2. F est une face maximale propre de P .
3. $\dim(F) = \dim(P) - 1$
4. Il existe une inégalité $c^T x \geq c_0$ valide pour P ayant ces trois propriétés :
 - (a) $F \subseteq \{x \in P, c^T x = c_0\}$
 - (b) Il existe x^* avec $c^T x^* < c_0$ i.e l'inégalité est propre.
 - (c) Si il existe une autre inégalité $d^T x \geq d_0$, valide pour P , satisfait $F \subseteq \{x \in P, d^T x = d_0\}$, alors il existe un scalaire $\alpha > 0$ et un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$, telle que : $d^T = \alpha c^T + \lambda^T A$ et $d_0^T = \alpha c_0^T + \lambda^T b$

Les condition (3), et (4) donnent deux méthode basique pour montrer qu'une inégalité donnée $c^T x \leq c_0$ définit une facette pour un polyèdre P . Dans les deux cas, il faut d'abord verifier si $c^T x \leq c_0$ est valide pour P et que P n'est pas contenu dans $\{x \in \mathbb{R}^n, c^T x = c_0\}$. Ceci est généralement trivial.

2.3 Polyèdres entre la programmation linéaire et la programmation linéaire en nombres entiers

D'après le résultat de Farkas, Weyl et Minkowsky (voir [58]), nous savons que l'enveloppe convexe des solutions réalisables d'un problème d'optimisation combinatoire peut être décrite par un système fini d'inégalités linéaires. Dans cette section nous exposons des outils et méthodes nous permettant l'obtention d'un tel système.

2.3.1 Génération d'une inégalité valide

Soit P un problème défini par $Ax \leq b$. Soit S l'ensemble de ses solutions entières. Nous savons que l'enveloppe convexe de S est dans P . On cherche des inégalités valides pour $\text{conv}(S)$. Soit $\lambda \geq 0$ un vecteur tel que λA soit un vecteur entier. Pour tout point entier de P , λAx est entier et $\lambda Ax \leq \lambda b$. Alors $\lambda Ax \leq \lfloor \lambda b \rfloor$ est une inégalité valide pour $\text{conv}(S)$. L'inégalité $\lambda Ax \leq \lfloor \lambda b \rfloor$ est appelée coupe de Chvatal-Gomory.

La procédure de Chvatal-Gomory

Soit S l'ensemble des points entiers du polyèdre $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$. Soit I un ensemble d'inégalités valides pour S décrit par $Cx \leq d$. Pour tout $\lambda \geq 0$, l'inégalité $\sum_{i=1}^n \lambda [C^i] x_j \leq \lfloor \lambda d \rfloor$ est aussi une inégalité valide pour S . L'ensemble de ces inégalités est noté $CG(I)$. Soit P un polyèdre dont S est l'ensemble des points entiers. Appliquons itérativement le processus d'arrondi :

I_0 est constitué des inégalités de P ;

$I_1 = I_0 \cup CG(I_0)$;

...

$I_p = I_{p-1} \cup CG(I_{p-1})$

Résultats de Chvatal :

1. Toute inégalité valide pour S appartient à un I_p ;
2. Le plus petit p pour lequel une inégalité valide pour S appartient à I_p est fini mais peut être exponentiel en la taille de I .

2.3.2 Séparation

Algorithme de séparation

Etant donné un point \hat{x} et un polyèdre P , un algorithme de séparation doit :

- décider si $\hat{x} \in P$,
- Sinon déterminer une inégalité $a\hat{x} \leq b$ valide pour P et non satisfaite par \hat{x} ($a\hat{x} \geq b$)

Méthode du plan sécant(de coupe)

Soit P un problème d'optimisation combinatoire, et soit $conv(S)$ le polytope des solutions de P . La résolution par la méthode dite du *plan coupant* utilise un algorithme de séparation dont l'énoncé est le suivant :

Trouver $P = (A, b)$ telle que $conv(S) \subseteq P$

Trouver la solution optimale $\hat{x} \in P$

tant que $\hat{x} \notin conv(S)$ faire

trouver une inégalité $ax \leq b$ qui sépare $conv(S)$ de \hat{x} ;

Ajouter l'inégalité $ax \leq b$ à la description de P ;

Trouver la solution optimale $\hat{x} \in P$;

fin tant que.

séparation et optimisation

Le problème de séparation : étant donné un polyèdre borné $P \in \mathbb{R}^n$, et un vecteur fractionnaire $v \in \mathbb{R}^n$, ou bien on conclue que v appartient à P , sinon déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ telle que $w^T x < w^T v$ pour tout $x \in P$.

le problème d'optimisation : étant donné un polyèdre borné $P \in \mathbb{R}^n$, et un vecteur fractionnaire (objectif) $w \in \mathbb{R}^n$, ou bien déterminer $x^* \in P$ qui maximise $w^T x$ pour tout $x \in P$, ou bien conclure que P est vide.

Théorème 2.3.1. [35] *Pour toute classe propre de polyèdres, la résolution du problème d'optimisation est polynomial si et seulement si la résolution du problème de séparation est polynômiale.*

Théorème 2.3.2. *Si l'algorithme SEP est polynomial, alors il existe un algorithme polynômial (que l'on sait décrire) pour maximiser une fonction linéaire sur le polyèdre P .*

Algorithme de Khachiyan

Soit $P = (A, b)$. l'algorithme décide si P est vide, sinon trouve $x \in P$.

Déterminer un ellipsoïde (de centre c_0) contenant P ;

tant que $x_k \notin \text{conv}(S)$ faire

trouver une inégalité $ax \leq b$ de (A, b) violée par c_k ;

En déduire un ellipsoïde E_{k+1} (de centre c_{k+1}) contenant $(E_k \cap \{x | ax \leq \alpha\})$ et tel que $\text{vol}(E_{k+1}) \leq 2^{\frac{-1}{2n+1}} \text{vol}(E_k)$

fin tant que.

Noter que $\text{vol}(E_{k+1})$ est le volume de l'ellipsoïde (E_{k+1}) .

Cette algorithme résout en temps polynomial le problème de la programmation linéaire continue :

Soit $P = (A, b)$, P est-il vide? Sinon, déterminer un point de P . Pour la programmation linéaire continue, l'algorithme de séparation consiste simplement à tester séquentiellement si chacune des inégalités de (A, b) est satisfaite ou non par le centre c_k .

Par contre, lorsque $P = \text{conv}(S)$ où S est l'ensemble des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire :

- on ne dispose pas explicitement de la description de P ,
- les facettes de P sont définies à partir d'une propriété structurelle combinatoire des solutions,
- le nombre de facettes est en général gigantesque.

2.4 Polyèdre entier

Définition 2.4.1. Un polyèdre est dit fractionnaire si tous ces points extrêmes sont des fractions.

Définition 2.4.2. [51] Un polyèdre non vide $P \in \mathbb{R}^n$ est dit **entier** si chacune de ces faces contient un point entier.

Proposition 2.4.1. [51] Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$ un polyèdre non vide avec $\text{rang}(A) = n$. P est dit entier si et seulement si tout ses points extrêmes sont entiers.

Théorème 2.4.1. [58] Un polytope P est entier si et seulement si pour tout vecteur entier w la valeur optimal de $\max\{w^T x : x \in P\}$ est un entier.

2.4.1 Matrice totalement unimodulaire

Définition 2.4.3. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est dite totalement unimodulaire TU si pour toute sous matrice M de A , $\det(M) \in \{-1, 0, 1\}$.

Théorème 2.4.2. [55] (Hoffman et Kruskal) Une matrice $m \times n$, A , est totalement unimodulaire si et seulement si pour tout vecteur entier $b \in \mathbb{R}^m$, le polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est entier.

Le théorème qui suit dû aussi à Hoffman et Kruskal donne une condition suffisante pour qu'un polyèdre soit entier.

Théorème 2.4.3. [55] Si A est une matrice $m \times n$ totalement unimodulaire TU et $b \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur entier, alors le polyèdre $Ax \leq b$ est entier.

2.4.2 Système totalement dual entier

Définition 2.4.4. Soit A une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Le système linéaire $Ax \leq b$ est dit totalement dual entier (TDE) si pour tout vecteur entier $w \in \mathbb{R}^m$ tel que le programme linéaire $\max\{wx : Ax \leq b\}$ admet une solution optimale, alors le programme dual correspondant possède une solution optimale entière.

Le théorème qui suit dû à (Edmonds et Giles) donne une condition suffisante pour qu'un polyèdre soit entier.

Théorème 2.4.4. *Si $Ax \leq b$ est un système TDE et b est un vecteur entier, alors le polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ est entier.*

Théorème 2.4.5. *Tout polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ peut être représenté par un système d'inégalités TDE*

Ce dernier théorème peut créer un lien entre les polyèdres entiers et le système totalement dual entier. Ceci peut être utilisé dans la procédure pour montrer l'intégrité d'un polyèdre :

- Déterminer un système approprié $Ax \leq b$, avec A et b des entiers.
- Démontrer que $Ax \leq b$ est totalement dual entiers.
- Utilisant le théorème qui précède, conclure que $\{x : Ax \leq b\}$ est polyèdre entier.

Chapitre 3

Quelques problèmes de sous graphes particuliers

Dans ce chapitre nous présentons un état de l'art de quelques problèmes de sous graphes particuliers, et des résultats polyédraux les concernant. Nous commençons par le problème du couplage qui est un sous graphe induit par les arêtes. Ensuite nous exposons le problème du voyageur du commerce ainsi que les contraintes valides pour le polytope des solutions de celui-ci. On termine ce chapitre par le problème de sous graphe k -arête connexe.

3.1 Problème de couplage

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, un sous ensemble d'arêtes de E , deux à deux adjacentes est appelé un couplage. Si chaque arête de G est muni d'un poids, le problème du couplage dans G est de déterminer un couplage dont le poids total des arêtes est maximum. Edmonds [26] a montré que ce problème peut être résolu en temps polynomial. Il a également donné un système linéaire qui décrit complètement le polytope associé.

Si $G = (V, E)$ un graphe, le polytope des couplages de G , noté $MP(G)$, est l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des couplages de G .

Le problème du couplage maximum peut être formulé en programme linéaire en nombres entiers comme suit :

$$\text{Maximiser } c^T x$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (3.1)$$

$$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E \quad (3.2)$$

$$x(e) \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \quad (3.3)$$

Soit $P^c(G)$ le polytope défini par les inégalités (3.1) et (3.2).

Notre but est de définir un $MP(G)$ par un système d'inégalité linéaire.

Question : Est ce que $P^c(G) = MP(G)$?

La réponse est non, quand G est quelconque. Mais vraie pour une certaine classe de graphes.

Théorème 3.1.1. [26] Si G est biparti alors : $P^c(G) = MP(G)$

Preuve. Pour montrer la nécessité, on suppose que G n'est pas biparti, soit \mathcal{C} un cycle de longueur impaire dans G . On définit $x(e) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } e \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors x satisfait les inégalités (3.1) et (3.2), mais $x \notin MP(G)$.

Pour montrer la suffisance, on pose G un graphe biparti, et x satisfait les inégalités (3.1) et (3.2). Soient G' et x' une copie de G et x , et on ajoute l'arête vv' où v' est la copie de $v \in V$. On pose $y(vv') = 1 - x(\delta(v))$. Alors x, x', y satisfont l'inégalité (3.2) et satisfont l'inégalité (3.2) à l'égalité, par rapport au nouveau graphe. Ils sont des combinaisons convexes des vecteurs d'incidence de couplage parfait. D'où x est une combinaison convexe de vecteurs d'incidence de couplages dans G . \square

Nous revenons maintenant au cas où le graphe est quelconque. Edmonds a introduit les inégalités suivantes qui sont valides pour $MP(G)$,

$$\sum_{e \in E(S)} x(e) \leq \frac{|S| - 1}{2} \quad \forall S \subset V, |S| \geq 3 \text{ et impair.} \quad (3.4)$$

Théorème 3.1.2. [26] Les inégalités (3.4) sont valides pour $MP(G)$

Preuve. Soit $S \subseteq V$ un ensemble de cardinalité impaire. Soient M un couplage de G et $M' = M \cap E(S)$. Puisque S est de cardinalité impaire, alors il existe un sommet qui n'est pas extrémité des arêtes de M' , alors la cardinalité maximale de M' est $\frac{|S|-1}{2}$. Ce qui fait que tout vecteur d'incidence x^M d'un couplage M de G vérifie (3.4). \square

Le résultat suivant établi par Edmonds [26], a été démontré par Lovasz [45].

Théorème 3.1.3. [58] Pour tout graphe $G = (V, E)$, le polytope des couplages $P^c(G)$ est donné par les inégalités (3.1), (3.2) et (3.4).

Preuve. Tout d'abord on vérifie que $MP(G)$ est de pleine dimension. En effet les ensembles $\{e\}$, $e \in E$ et l'ensemble vide forment une famille de $|E| + 1$ couplages dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants. Alors $\dim(MP(G)) = |E|$

Soit $ax \leq \alpha$ une contrainte qui définit une facette pour $MP(G)$, et soit \mathcal{C}_α l'ensemble des couplage de G dont les vecteurs d'incidences vérifie la contrainte $ax \leq \alpha$ à l'égalité. Nous allons montrer que $ax \leq \alpha$ est l'une des inégalités (3.1), (3.2), ou (3.4)

Supposons que $ax \leq \alpha$ différente des contraintes (3.1) et (3.2), nous allons montrer qu'elle est nécessairement du type (3.4).

Comme $ax \leq \alpha$ est différente des inégalités (3.1), alors $\alpha(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$. En effet, si $a(e) < 0$ pour une certaine arête, alors tout couplage dans \mathcal{C}_α ne contient pas e , et par conséquent, la face définie par $ax \leq \alpha$ est contenue dans la face $\{x \in MP(G) : x(e) = 0\}$. Mais ceci implique $ax \leq \alpha$ et $s(e) \geq 0$ induisent la même facette, et donc l'une est un multiple positif de l'autre, contradiction.

Soit G' le graphe induit par les arêtes $e \in E$ tel que $a(e) \geq 0$ et soit S l'ensemble de ses sommets. Notons que G' est connexe. Nous allons montrer que le vecteur d'incidence de tout couplage de \mathcal{C}_α vérifie

$$\sum_{e \in E(S)} x(e) = \frac{|S| - 1}{2} \quad (3.5)$$

ce qui implique la même facette que (3.4).

Supposons qu'il existe un couplage $M_1 \in \mathcal{C}_\alpha$ dont le vecteur d'incidence ne satisfait pas (3.5). Sans perte de généralités, on peut supposer que $a(e) > 0$ pour tout $e \in M_1$. (Si M_1 contient des arêtes telles que $a(e) = 0$ en supprimant ces arêtes, on obtient encore un couplage qui vérifie $ax \leq \alpha$ et qui ne satisfait pas (3.5). En conséquence, il doit exister deux sommets u et v de S qui ne sont incidents à aucune arête de M_1 . On peut supposer que M_1 est tel que la distance dans G' (par rapport aux poids $a(e), e \in E$) entre u et v est la plus courte possible. Puisque $a(e) > 0$ pour toute arête e de G' , les sommets u et v ne peuvent pas être adjacents dans G' . Alors il existe un sommet z différent de u et v dans la plus courte chaîne entre u et v . Comme $ax \leq \alpha$ est différente des contraintes (3.2), il doit exister un couplage $M_2 \in \mathcal{C}_\alpha$ qui ne couvre pas z . Sinon, tout couplage de \mathcal{C}_α couvrirait z , et, en conséquence, les contraintes $ax \leq \alpha$ et $\sum_{e \in \delta(z)} x(e) \leq 1$ induiraient la même face. Mais cela impliquerait que $ax \leq \alpha$ est un multiple positif de $\sum_{e \in \delta(z)} x(e) \leq 1$, une contradiction.

Par le choix de M_1 , M_2 doit couvrir les deux sommets u et v . Si M_2 ne couvre pas, par exemple u , alors u et z seraient deux sommets non couverts par M_2 . Comme la chaîne

entre u et z est plus courte que celle qui est entre u et v , cela contredit le choix de M_1 . Par des arguments similaires, M_1 doit couvrir z . Ainsi, dans le graphe formé par les arêtes de G^* formé par les arêtes de $M_1 \cup M_2$, les sommets u , v et z ont tous un degré 1. Sans perte de généralité, on peut supposer que la composante connexe de G^* contenant u consiste en une chaîne Q ne passant pas par z . Considérons les deux couplages :

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= (M_1 \setminus (M_1 \cap Q)) \cup (M_2 \cap Q) \\ \bar{M}_2 &= (M_2 \setminus (M_2 \cap Q)) \cup (M_1 \cap Q).\end{aligned}$$

Puisque $\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 = M_1 \cup M_2$, M_1 et M_2 sont dans \mathcal{C}_a . Mais \bar{M}_2 ne couvre ni u ni z ce qui contredit le choix de M_1 . □

3.2 Problème du voyageur de commerce

Soit $G = (V, E)$ un graphe complet, $|V| = n$. Dans le problème du voyageur, on cherche à trouver un cycle hamiltonien de longueur minimum. (Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par toutes les arêtes une seule fois).

Le problème de *TSP* à été largement étudié, et plusieurs méthodes de résolutions ont été proposées. Parmi elles, on cite pour des raisons historiques, l'algorithme de relaxation lagrangienne sur les arbres proposé par Held et Karp, et l'approche par la programmation dynamique qu'on trouve dans plusieurs ouvrages de programmation dynamique. Ces deux méthodes sont jusqu'à présent très limitées par rapport à la taille des problèmes qui peuvent être résolus à l'optimum. Belloni et Luccena ont re-visité l'approche lagrangienne de *TSP* et ils ont apporté des résultats prometteurs pour des instances pas assez grandes. Mais la seule méthode qui nous donne de bons résultats pour ne pas dire des résultats impressionnants, c'est *l'approche polyédrale*. La méthode appliquée aux problème du *TSP* apparaît dans les travaux de Dantzig, Fulkerson et Jonson.

3.2.1 Formulation du problème

Soit $G = (V, E)$ un graphe complet. Les sommets du graphe représentent les cités et le graphe hamiltonien la tournée. Posons d_e la longueur de chaque arête $e \in E$ et $E(S)$ représente l'ensemble des arêtes qui ont les deux extrémités dans S . Soit

$$x(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in T, T \text{ est une tournée} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $TSP(G) = conv(\{x^H \in \mathbb{R}^E \mid H \subseteq E \text{ un cycle hamiltonien (tournée) dans } G\})$

Notons que tout vecteur d'incidence d'une tournée vérifie :

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E. \quad (3.6)$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 2 \quad \forall v \in V. \quad (3.7)$$

Les solutions entieres du système (3.6), (3.7) sont les vecteurs d'incidence du problème d'un 2-couplage parfait. En d'autres termes ce sont les vecteurs d'incidence des unions disjointes de cycles où chaque sommet de G est considéré comme un cycle. Or un polytope définie par (3.6), (3.7) comprend des solutions non entieres, donc on ajoute au système l'inégalité qui va suivre pour couper les solutions non entieres.

$$x(E(W)) + x(T) \leq |W| + \frac{1}{2}(|T| - 1) \quad \forall W \subseteq V, T \subseteq \delta(W) \text{ avec } |T| \text{ impair} \quad (3.8)$$

Par l'ajout des égalité (3.8) au système (3.6), (3.7), on obtient l'enveloppe convexe de 2-couplage parfait de G . Pour obtenir le polytope associé au problème de voyageur de commerce, on doit couper les solutions de 2-couplage qui ne sont pas des tournées. C'est évident qu'un tel 2-couplage ne vérifie pas une des inégalités suivantes, appel e *contrainte d'élimination de sous tournée* :

$$x(\delta(W)) \geq 2 \quad \forall W \subseteq V \text{ avec } 2 \leq |W| \leq |V| - 2 \quad (3.9)$$

Soit $P_{TSP}(G) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ vérifie (3.6), (3.7), (3.8), (3.9)}\}$

Les solutions entieres du système (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) sont exactement les vecteurs d'incidences de tournées. Toutefois $P_{TSP}(G)$ possède des solutions non entieres. Ce qui est important en $P_{TSP}(G)$ est que le programme linéaire sur $P_{TSP}(G)$ peut ˆetre résolu en temps polynomial.

3.2.2 Etude polyédrale du problème

Soit S_{TSP} l'ensemble des solutions de TSP est $P(S_{TSP})$ l'enveloppe convexe de S_{TSP} .

Théorème 3.2.1. [51] $dim(P(S_{TSP})) = |E| - |V|$

Définition 3.2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un **peigne** dans G est une classe d'ensembles H et T_i ($i \leq k$), sous ensembles de V satisfaisant :

* $H \cap T_i$ est non vide pour tout $i = 1, \dots, k$.

- * $T_i \setminus H$ est non vide pour tout $i = 1, \dots, k$.
- * Les sous ensembles T_i pour tout $i \leq k$ sont deux à deux disjoints.
- * $k \geq 3$ est un nombre impair.

H est dit **manche** du peigne et T_i **dents** du peigne.

Considérons les inégalités suivante qui sont valides pour le TSP .

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) &= 2 & \forall v \in H \\ x(E[T_i]) &\leq |T_i| - 1 & \forall i = 1, \dots, k \\ x(E[T_i \setminus H]) &\leq |T_i \setminus H| - 1 & \forall i = 1, \dots, k \\ x(E[T_i \cap H]) &\leq |T_i \cap H| - 1 & \forall i = 1, \dots, k \\ -x(e) &\leq 0 & \forall e \in \delta(H) \setminus (\cup_i E[T_i]) \end{aligned}$$

Si on somme toutes ces inégalités et on divise par 2 on obtient l'inégalité suivante.

$$x(E[H]) + \sum_{i=1}^k x(E[T_i]) \leq |H| + \sum_{i=1}^k (|T_i| - 1) - k/2$$

Maintenant, en utilisant la méthode d'arrondi de Chvátal, on obtient l'inégalité de peigne suivante :

$$x(E[H]) + \sum_{i=1}^k x(E[T_i]) \leq |H| + \sum_{i=1}^k (|T_i| - 1) - (k + 1)/2 \tag{3.10}$$

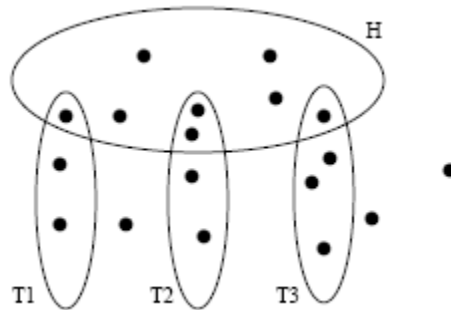


FIG. 3.1 – La configuration du peigne

Une description complète de $TSP(G)$ a été obtenue pour des classes particulières de graphes. Cornuéjols, Naddef et Pulleyblank décrivent le $TSP(G)$ pour les graphes de Halin.

(Un graphe de Halin est un graphe constitué d'un cycle et un arbre sans sommets de degré 2 dont les sommets pendants sont les sommets du cycle). Barahona et Grotschel [8] ont donné la caractérisation complète du $TSP(G)$ quand le graphe G n'est pas contractible à $K_5 \setminus \{e\}$. Aussi a-t-on donné la description complète du $TSP(G)$ quand le graphe est complet et n'ayant pas plus de 8 sommets. Le Verge [56] a donné la description complète pour un graphe sur 6 sommets. Boyd et Cunningham donnent la description sur 7 sommets, tandis que Christof, Junger et Reinelt [19] la donnent pour un graphe à 8 sommets. Baiou et Mahjoub ont étudié les problèmes de $St-TSP$ et $r-TSP$. Soit un graphe $G = (V, E)$, soit $w \in \mathbb{R}^{|E|}$, Soit $T \subseteq V$ un sous ensemble de sommets distincts. Le problème de voyageur de commerce Steiner $St-TSP$ est celui de déterminer un cycle de G couvrant T est dont le poids total sur les arêtes est minimum. Un tel cycle sera nommé *tournee de Steiner*. En affectant des poids sur les sommets du graphes c_v pour tout $v \in V$, les associant aux poids des arêtes de E , en fixant un sommet $r \in V$, le problème du $r-TSP$ consiste à chercher un cycle simple passant par r de manière à minimiser le poids total sur les sommets et les arêtes. Baiou et Mahjoub [7] ont donné une description complète des polytopes associés à ces deux problèmes quand le graphe est série parallèles.

3.3 Problème de sous graphe k -arête connexe

L'introduction de la technologie de la fibre optique a permis un développement considérable des réseaux de télécommunications. Grâce à ces nouvelles capacités de transmission, les offres de services se sont accrues et diversifiées, suscitant la création de nouvelles activités (comme le e-commerce) et le redéploiement des banques en ligne. L'importance économique des communications a ainsi entraîné l'exigence de réseaux fiables et sûrs. En effet, la défaillance d'une ou de plusieurs liaisons pourraient conduire à l'arrêt total des communications, ce qui aurait des conséquences dramatiques. Pour éviter ce problème, il faut mettre en place des topologies de réseaux suffisamment fiables dans le sens où si une ou plusieurs liaisons sont détruites, les communications continuent à être acheminées. Les conditions de fiabilité sont généralement exprimées en terme de connexité. Entre chaque paire de noeuds du réseau il doit exister un nombre minimum de chaînes arête disjointes pour assurer le routage en cas de panne. En général, ce nombre de chaînes est uniforme et égal à un entier k .

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -arête connexe (resp k -sommets-connexe) ($1 \leq |V| - 1$) si pour toute paire de sommets $i, j \in V$ il existe au moins k chaînes arête-disjointes (resp

sommet-disjointes) disjointes reliant i et j dans G . Si G est muni d'une fonction coût sur ses arêtes, le *problème du sous graphe k -arête connexe* noté ($kECSP$) consiste à trouver un sous graphe k -arête connexe de coût minimum. (Le coût d'un sous graphe est la somme des coût de ses arêtes).

Le problème de sous graphe k -arête connexe est \mathcal{NP} -complet dans le cas générale. En effet il a été montré par Eswaren et Tarjan [27] que le problème du cycle hamiltonien, qui est \mathcal{NP} -complet, peut être ramené au $2ECSP$, ce qui implique que ce dernier est \mathcal{NP} -complet.

Ce problème a été considéré plus tard par Grotschel et Monma [36] et Grotschel, Monma et Stoer [37] dans le cadre d'un modèle plus général. Ce modèle peut être présenté comme suit :

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Supposons qu'à chaque sommet v de V est associé un entier non-négatif $r(v)$ représentant un degré de connexité pour v . Soit un sous-graphe $H = (W, F)$ de G , on dit que H vérifie les conditions de fiabilité associées aux arêtes si pour toute paire de sommets distincts $s, t \in V$, H contient au moins

$$r(s, t) = \min\{r(s), r(t)\}$$

chaînes arête-disjointes reliant s , et t . On peut supposer sans perte de généralités, qu'il existe au moins deux sommets ayant un degré de connexité k où $k = \{r(v) : v \in V\}$. Supposons qu'à chaque arête e est associé un coût $c(e)$, et notons par $kECON$ le problème de déterminer un sous graphe de G de coût minimum vérifiant les condition de fiabilité aux arêtes. Soit

$$con(W) = \max\{r(s, t) : s \in W, t \in V/W\}$$

où $W \subseteq V$. On écrit $con_H(W)$ quand $con(W)$ est considéré par rapport à un graphe H différent de G . Alors le problème $kECON$ est équivalent au problème linéaire en nombres entiers suivants.

$$\text{minimiser } \sum_{e \in E} w_e x(e).$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &\geq con(W) \text{ pour tout } W \subset V, W \neq V \\ 0 &\leq x(e) \leq 1 \text{ pour tout } e \in E, \\ x(e) &\in \{0, 1\}, \text{ pour toute } e \in E. \end{aligned}$$

Le problème $kECSP$ correspond au problème $kECON$ dans le cas où $r(v) = k$ pour tout

$v \in V$.

Plusieurs cas particuliers du problème $kECON$ peuvent être résolus en temps polynomial :

- Le problème du plus court k -chemin étudié par Suurballe et Tarjan [60], $r(u) = 0$ pour tout $u \in V \setminus \{u, v\}$;
- Le problème de l'arbre couvrant de coût minimum voir Kruskal [42] et Mahjoub [47], $r(u) = 1$ pour tout $u \in V$.
- Le problème de l'arbre Steiner ($r(u) \in \{0, 1\}$ pour tout $u \in V$) quand le nombre de sommets terminaux ou de sommets Steiner est fixé, voir Lawler [43]

Le problème $KECSP$ à été largement étudié ces dernières années. Dans [13] Bienstock et al. ont établi des propriétés structurales pour la solution optimale de $KECSP$ quand la fonction coût satisfait les inégalités triangulaire ($c(e_1) \leq c(e_2) + c(e_3)$ pour tout triplet d'arêtes (e_1, e_2, e_3) formant un triangle dans G). Leur résultats généralisent des résultats obtenus par Frederickson et Jàjà ; Monma et al. pour $k = 2$. Ko et Monma ont élaboré des heuristiques pour le problème $KECSP$. Aussi Goemans et al ont introduit une Heuristique efficace pour le problème $KECSP$ quand $k = 1$. Khuller et Raghavachari ont donné un 1.85-algorithme d'approximation pour $KECSP$ quand toute les arêtes ont le même coût et G est un graphe quelconque.

Dans [16], Chopra a donné une caractérisation complète du polyèdre associé au problème $KECSP$ dans les graphes outer-planaires quand chaque arête peut être utilisé plusieurs fois et, ce pour k impaire. Didi Biha [14] a donné une caractérisation complète du polytope associé au problème $KECSP$ quand le graphe est série parallèle et dans une classe de graphe généralisant celle de Halin. Dans la même référence Didi Biha a donné la description complète du polytope des sous graphes Steiner k -arête connexes noté $kSECSP$ dans les graphes série parallèles quand k est pair. Le problème $kSECSP$ est un cas particulier du problème $kECON$, quand $r(v) \in \{0, k\}$ pour tout $v \in V$.

3.3.1 Formulation du problème

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $F \subseteq E$. Le vecteur $x^F \in \mathbb{R}^{|E|}$, où $x^F(e) = 1$ si $e \in F$ et $x^F(e) = 0$ sinon, est appelé vecteur d'incidence de F . Etant donné un point $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ et un sous ensemble d'arêtes $F \subseteq E$, on définit $x(F) = \sum_{e \in F} x(e)$.

Si (V, F) est un sous graphe k -arête connexe de G alors x^F satisfait les inégalités suivantes :

$$x(\delta(W)) \geq k \quad \text{pour tout } W \subset V, W \neq V, \quad (3.11)$$

$$x(e) \leq 1 \quad \text{pour tout } e \in E, \quad (3.12)$$

$$x(e) \geq 0, \quad \text{pour tout } e \in E. \quad (3.13)$$

Les inégalités (3.12), (3.13) sont appelées inégalités triviales et les inégalités (3.11), inégalités de coupes.

L'enveloppe convexe noté $kECSP(G)$ des vecteurs d'incidences des sous ensembles induisant des sous graphes k -arête connexes est appelé le polytope des sous graphes k -arête connexes de G , on écrit :

$$kECSP(G) = \text{conv}\{x^F \in \mathbb{R}^{|E|} \mid (V, F) \text{ est } k\text{-arête connexe}\}.$$

Le problème $kECSP$ est donc équivalent au programme linéaire

$$\{wx \mid x \in kECSP(G)\}.$$

Le problème $kECSP$ peut, par conséquent être ramené à la résolution d'un programme linéaire par la description du polytope $kECSP(G)$. Comme le problème $kECSP$ est \mathcal{NP} -dur, il y a peu d'espoir de trouver une caractérisation complète de $kECSP(G)$ par un système d'inégalités linéaires pour tout graphe G . Mais une description partielle de ce polytope peut être parfois suffisante pour résoudre le problème $kECSP$ à l'optimum. Aussi pour certaines classes de graphes, le polytope $kECSP(G)$ peut être décrit par quelque familles d'inégalités linéaires dont le problème de séparation est polynomial. Ainsi le problème $kECSP$ peut se résoudre en temps polynomial dans ces classes de graphes.

3.3.2 Etude polyédrale du Problème

Dans ce paragraphe nous décrivons certaines familles de contraintes valides pour le polytope $kECSP(G)$. Pour commencer, nous étudions la dimension du polytope $kECSP(G)$. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier $k \geq 1$, on dit qu'une arête $e \in E$ est *essentielle*, si le graphe $G - e$ n'est pas k -arête connexe. On note par E^* l'ensemble des arêtes essentielles de G . Le théorème suivant donne la dimension du polytope $kECSP(G)$

Théorème 3.3.1. [36] Soient $G = (V, E)$ un graphe et $k \geq 1$ un entier. Alors

$$\dim(kECSP(G)) = |E| - |E^*|.$$

Comme conséquence de ce théorème, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1. [36] *Le polytope $kECSP(G)$ est de pleine dimension si et seulement si G est $(k + 1)$ -arête connexe.*

Dans [36], Grotschel et Monma ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités (3.11)-(3.13) définissent des facettes de $kECSP(G)$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V . Dans [37] Grotschel et al. ont montré que les inégalités suivantes dite *inégalités de partitions* sont valides pour $kECSP(G)$

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \begin{cases} p - 1, & \text{si } k = 1; \\ \lceil \frac{kp}{2} \rceil, & \text{si } k \neq 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Il ont aussi donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalité (3.14) définissent des facettes de $kECSP(G)$.

Inégalité de SP-partition

Dans [16] Chopra a considéré le problème de $kECSP$ dans le cas où chaque arête peut être utilisée plus d'une fois.

Dans la même référence, il décrit les inégalités suivantes dites de SP-partition. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V , tel que $G(V_i)$ est connexe pour tout $i = 1, \dots, p$.

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1. \quad (3.15)$$

Didi Biha dans [14] à montré que les inégalités de SP -partition (3.15) sont valides pour $kECSP(G)$ quand G est série parallèle et k est impair. Il a aussi donné des conditions suffisantes pour que les inégalités (3.15) définissent des facettes pour le polytope $kECSP(G)$.

Inégalité de F-partition

Dans [46], Mahjoub a introduit une classe d'inégalités valides pour le polytope $2ECSP(G)$ comme suit : Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V et $F \subseteq \delta(V_0)$ avec $|F| = 2t + 1$. Soit $\Delta = \delta(V_0, V_1, \dots, V_p) \setminus F$.

$$x(\Delta) \geq p - t \quad (3.16)$$

Les inégalités du type (3.16) sont appelées contraintes de F -partition. Barahona et Mahjoub ont montré que les contraintes (3.16) avec les inégalités triviales et les inégalités de coupes

suffisent pour caractériser le polytope $2ECSP(G)$ dans la classe des graphes de *Halin*. (Un graphe $G = (V, T \cup C)$ est dit de Halin si T est un arbre ne contenant pas de sommets de degré deux et C est un cycle dont les sommets sont les sommets pendants de T).

Didi Biha [14] s'est intéressé la généralisation de cette classe d'inégalités pour k quelconque. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V et $F \subseteq \delta(V_0)$. Si $k = 2q, q \geq 1$ et $|F| = 2t + 1, t \geq 1$ (resp. $k = 2q + 1, q \geq 1$ et $|F| q$ est impair). Soit $\Delta = \delta(V_0, V_1, \dots, V_p) \setminus F$. Alors Didi Biha a montré que les inégalités :

$$x(\Delta) \geq qp - t \text{ (resp. } x(\Delta) \geq \frac{1}{2}[pk - |F|]) \tag{3.17}$$

sont valides pour $kECSP(G)$. Les inégalités (3.17) sont appelées inégalités de F -Partition. Si k est impair et $|F| p$ est pair, les contraintes (3.17) sont dominées par les contraintes de coupes.

Mahjoub [46] a introduit une classe d'inégalités définissant des facettes du polytope $2ECSP(G)$ appelées inégalités de *roue-impair*. Ces inégalités sont un cas particulier des contraintes de F -partition. Didi Biha [14] a donné une généralisation de cette classe comme suit : Soient un graphe $G = (V, E)$ et un entier $k = 2(2q + 1), q \geq 0$, une configuration de roue impaire généralisée (voir la figure 3.2) est définie par un entier l , des entiers p_i pour $i = 1, \dots, 2l + 1$, et une partition de l'ensemble des sommets V en V_i^s, V_0 , pour $i = 1, \dots, 2l + 1$ et $s = 0, \dots, p_i$.

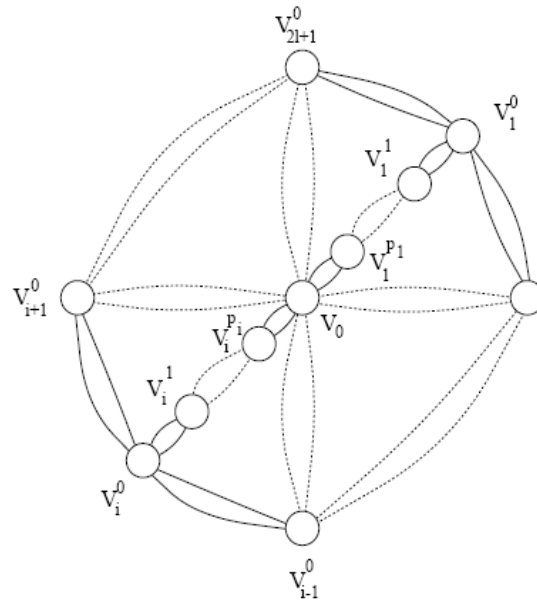


FIG. 3.2 – Configuration de la roue impaire généralisée

$$x(T) \geq (2q + 1) \sum_{i=1}^{2l+1} r_i + q(2l + 1) + l + 1 \quad (3.18)$$

Théorème 3.3.2. [14] *Les inégalités de roue impaire généralisées (3.18) définissent des facettes du polytope $kECSP(G)$.*

Inégalité de chaîne impaire

Dans [10], Bendali et al. ont présenté une nouvelle classe d'inégalités valides pour le polytope $kECSP(G)$. On définit d'abord la configuration de chaîne impaire (voir la figure 3.3) comme suit .

Soit $G = (V; E)$ un graphe $(k+1)$ -arête connexe. Soit $\pi = (W_1, W_2, V_1, \dots, V_{2p}), p \geq 2$, une partition de V . Soient $I_1 = \{4r, 4r + 1, r = 1, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1\}$ et $I_2 = \{2, \dots, 2p - 1\} \setminus I_1$. On dit que la partition $\pi = (W_1, W_2, V_1, \dots, V_{2p})$ induit une configuration de chaîne impaire si :

1. $|[V_i, W_j]| = k + 1$ pour $(i, j) \in (I_1, \{1\}) \cup (I_2, \{2\})$,
2. $|[W_1, W_2]| \leq k + 1$,
3. $\delta(V_i) = [V_i, W_1] \cup [V_{i-1}, V_i] \cup [V_i, W_{i+1}]$ (resp. $\delta(V_i) = [V_i, W_2] \cup [V_{i-1}, V_i] \cup [V_i, W_{i+1}]$) si $i \in I_1$ (resp. $i \in I_2$)

Soit $C = \bigcup_{i=1}^{2p-1} [V_i, V_{i+1}]$. Noter que C peut être vue comme une chaîne d'extrémités V_1 et V_{2p} , de longueur impaire dans le graphe G_π .

A une configuration de chaîne impaire on associe l'inégalité :

$$x(C) \geq p. \quad (3.19)$$

Les inégalités (3.19) sont appelées inégalités de chaîne impaire.

Théorème 3.3.3. [10] *Les inégalités de chaîne impaire (3.19) sont valide pour le polytope $kECSP(G)$.*

Après avoir exploré le domaine des inégalités valides, ainsi que les conditions sous lesquelles celles-ci définissent des facettes pour le polytope associé au problème $kECSP(G)$, nous nous intéressons à la caractérisation polyédrale du problème $kECSP$. On citera quelque classes de graphes où l'on a déjà donné la description complète du polytope associé au problème $kECSP$.

Tout d'abord, on considère la classe des graphes série-parallèles.

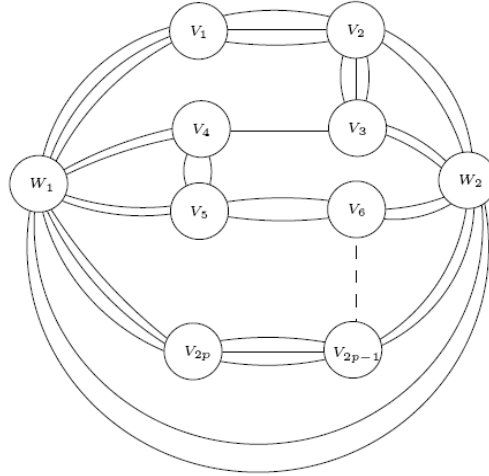


FIG. 3.3 – Configuration de chaine impaire

Définition 3.3.1. Un graphe G est dit contractible à un graphe H , si H est obtenu à partir de G par suppressions et/ou contractions de ses arêtes. Une contraction d'une arête consiste à identifier les extrémités de l'arête et à supprimer cette arête.

Définition 3.3.2. Un graphe est dit série parallèle si il n'est pas contractible à K_4 (graphe complet sur 4 sommets)

Didi Biha [14] a montré que si le graphe est série-parallèle et k est impair alors $kECSP(G)$ est complètement caractérisé par les inégalités triviales et les inégalités de SP -partition. Et si k est pair alors $kECSP(G)$ est décrit par les inégalités triviales et les inégalités de coupes.

Théorème 3.3.4. [14] Si $G = (V, E)$ un graphe série parallèle k -arête connexe et k pair (resp. impair), alors $kECSP(G)$ est complètement caractérisé par les inégalités (3.11), (3.12), (3.13) (resp. (3.15), (3.12), (3.13)).

Toujours dans la même référence, Didi Biha, a défini une classe de graphes qui généralise celle de Halin. Dans cette classe de graphes, il a montré que le polytope $kECSP(G)$ est donné par les contraintes triviales, les contraintes de coupes et les contraintes dites de r -recouvrement généralisées.

3.4 Conclusion

Nous avons passé en revue différents problèmes de sous graphes particuliers. Nous avons présenté certaines de leurs caractérisations (pour le problème de couplage), les contraintes

(inégalités ou classes d'inégalité) valides. En dernier, nous avons traité le problème du $kECSP$ comme introduction pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe.

Chapitre 4

Problème de sous graphes 2-arête connexe

Ce chapitre est consacré au problème de sous graphes 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés. Dans un premier temps, nous étudions les classes de graphes où le polytope associé au problème r -2ECSP(G) est défini par les inégalités triviales et les inégalités de coupe généralisés (les classe de graphes où l'on a $P(G) = r$ -2ECSP(G)). Nous appelons cette classe de graphes la classe des graphes parfaitement r -2-arête connexes. Nous montrons qu'un graphe, "dit cactus", appartient à cette classe de graphes. Nous aurons le même résultat pour les graphes dits "multi-chaines".

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la caractérisation complète du problème de sous graphe r -2-connexe dans la classe des graphes multi-cycles sans cordes. Nous montrerons que cette classe n'est pas parfaitement r -2-arête connexe. Ensuite nous introduirons des inégalités valides du type de celles introduites par Baiou et Corr ea [5]. Nous donnons les conditions pour que celles-ci définissent des facette dans cette classe de graphes. Nous donnons la description complète du r -2ECSP(G) dans le multitriangle. Nous terminerons par une autre formulation du problème r -2ECSP, propre aux graphes multi-cycles sans cordes.

4.1 Polytope de sous graphes Steiner 2-arête connexes

Définition 4.1.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Il est dit 2-arête-connexe (resp 2-sommet-connexe) si entre chaque paire de sommets v_i et $v_j \in V$, il existe au moins 2

chaînes arête-disjointes (resp sommet-disjointes) les reliant.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et un ensemble de sommets $S \subseteq V$, dit ensemble de terminaux. Soit $c(e)$ le coût associé à chaque arête de G . Le problème de sous graphe Steiner 2-arête connexe consiste à trouver un sous graphe $H = (U, F)$ de G couvrant S , de coût minimum tel qu'entre chaque paire de sommets de S il existe au moins 2 chaînes arête-disjointes. Ce problème est équivalent au problème de conception d'un réseau fiable quand les types de connexité prennent leur valeurs dans $\{0, 2\}$.

Le théorème de Menger établit une relation entre les chaînes arête-disjointes et les coupes dans un graphe.

Théorème 4.1.1 (Menger). *Dans un graphe $G = (V, E)$, il existe k chaînes arête-disjointes entre deux sommets s et t si et seulement si toute coupe de G déconnectant s et t contient au moins k arêtes.*

Le problème du sous graphe Steiner 2-arête connexe noté *StECSP* est formulé comme suit :

$$x(\delta(W)) \geq 2 \quad \text{pour tout } W \subset V, \emptyset \neq W \cap S \neq S \quad (4.1)$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \text{pour tout } e \in E, \quad (4.2)$$

$$x(e) \in \{0, 1\}, \quad \text{pour toute } e \in E. \quad (4.3)$$

$StECSP(G, S) = conv\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x \text{ satisfait (4.1), (4.2), (4.3)}\}$ est le polytope des sous graphes Steiner 2-arête connexes.

Le *StECSP* a été introduit par Monma, Munson et Pulleyblank [50]. Ils l'ont étudié dans le cas métrique c'est à dire quand le graphe $G = (V, E)$ est complet et la fonction des poids w_e satisfait les inégalités triangulaires (c'est à dire $w_{e_1} \leq w_{e_2} + w_{e_3}$ pour tout triplet d'arêtes (e_1, e_2, e_3) formant un triangle dans G). Le *StECSP*, est NP-dur même dans ce cas. Ils ont montré que dans ce cas le poids d'un sous-graphe 2-arête-connexe de coût minimum couvrant S et ne contenant pas de sommets de $V \setminus S$ est borné par $\frac{4}{3}Q$ (Q est le poids d'un sous-graphe 2-arête-connexe de coût minimum couvrant S). Dans le cas où $S = V$, ils ont donné des propriétés concernant la structure des solutions du problème et montré que le poids d'une solution optimale du problème de voyageur de commerce est borné par $\frac{4}{3}Q$. D'autres propriétés structurelles et d'analyse du pire des cas sont données dans Frederickson et JàJà [1] Bienstock, Brickell et Monma [12] et Goemans et Bertsimas [31].

Baiou et Mahjoub ont étudié le polytope associé au problème du sous graphe Steiner 2-arête connexe [6]. Ils ont montré que ce dernier est totalement décrit par les contraintes de coupe Steiner et les contraintes triviales dans la classe des graphes série parallèles. Baiou et Mahjoub ont étudié également ce problème lorsque la solution doit être elle-même 2-arête connexe. Pour cela ils ont introduit les inégalités suivantes :

$$x(\delta(W)) - 2x(e) \geq 0 \text{ pour tout } W \subset V, S \subseteq W, e \notin E(W). \quad (4.4)$$

Ils ont montré que le polytope associé au *StECSP* lorsque le graphe est série-parallèle et la solution est 2-arête connexe, est décrit par les contraintes (4.1), (1.11), (4.4). Par la suite, Baiou a étendu ces résultats au dominant du même polytope lorsque le graphe est série parallèle.

Winter avait déjà proposé un algorithme pouvant résoudre le problème dans la classe des graphes de Halin et pour les graphes outerplanaires (un graphe est dit outerplanaire s'il peut être représenté dans le plan de manière à ce que tous les sommets appartiennent à la face extérieure). Il a également présenté un algorithme pour résoudre ce problème pour les graphes série-parallèles dans les deux cas de 2-arête et 2-sommet connexité.

4.2 Problème du sous graphe 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés

Si P est un problème d'optimisation combinatoire et $Ax \leq b$ un système linéaire décrivant l'enveloppe convexe de ses solutions où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ ($m, n \in \mathbb{N}$), alors P est équivalent à un programme linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases} \quad (4.5)$$

Où $c^T \in \mathbb{R}^n$. Il est parfois pertinent d'ajouter des variables supplémentaires à la formulation (4.5). Ces variables peuvent réduire le nombre de contraintes du système et simplifier la structure de celle-ci. Ainsi on obtient une formulation ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \max cx \\ Bx + Dy \leq d \end{cases} \quad (4.6)$$

Où $y \in \mathbb{R}^{n'}$ ($n' \in \mathbb{N}$) est le vecteur des nouvelles variables, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times n'}$ et $d \in \mathbb{R}^m$. Une formulation de type (4.6) est appelée *Formulation étendue*.

Si une formulation étendue de P de la forme (4.6) est connue alors l'enveloppe convexe des solutions de P n'est rien d'autre que la projection du polyèdre $Bx + Dy \leq d$ sur x .

L'objectif est de donner une formulation étendue pour les problèmes de *StECSP*. Mais d'abord, nous allons discuter de certains exemples liés au problème de l'arbre de poids minimum, utilisant cette approche.

Dans [41] Junger et Pulleyblank ont donné une formulation étendue de $P(G)$ en associant des variables $y(v)$, $v \in V$ aux sommets de G . Ils ont montré que la projection du système, ci dessous, sur l'espace des variables x est $P(G)$. Le sommet r est un élément arbitraire de V :

$$\begin{cases} x(\delta(S)) + y(S) \geq 2 & \text{si } r \notin S, S \subset V, \\ x(\delta(S)) + y(S) \geq 0 & \text{si } r \in S, S \subset V \\ y(V) = 0. \end{cases}$$

Etant donnée un graphe $G = (V, E)$, un ensemble $S \subset V$ et un sommet $r \in V$ appelé racine, une fonction c définie sur E et une fonction w définie sur V .

Pour décrire le problème de sous graphes 2 arête connexe à sommets et arêtes pondérées noté du *2ECSP*, Baiou dans [4] a défini le problème *r-2ECSP*, en fixant un sommet $r \in V$ appelé racine. Ils ont considéré le problème qui définit un sous graphe 2-arête connexe de G contenant r dont le coût (poids) total sur les arêtes et les sommets est minimum. L'idée de fixer un sommet r était introduite initialement par Goemans dans [30]. Ce qui fait, résoudre le problème *2ECSP* revient à résoudre $|V|$ sous problème *r-2ECSP*.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Soit $F \subseteq E$ et $U \subseteq V$ alors : $(x^F, y^U) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ désigne un vecteur caractéristique d'incidence du sous-graphe partiel $G(U, F)$.

$$x^F(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in F \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad y^U(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in U \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En général, on note $x(F) = \sum_{e \in F} x_e$ (resp. $y(U) = \sum_{v \in U} y_v$). l'ensemble $E(W)$, $W \subseteq V$, désigne l'ensemble des arêtes ayant leur deux extrémités dans W , et l'ensemble $\delta(W)$ est l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans W , l'autre dans le complémentaire de W (une coupe). On notera, $\delta(v)$ au lieu de $\delta(\{v\})$ pour $v \in V$.

Soit $W \subset S \subseteq V$ l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre dans le complémentaire de W dans S est appelée une S -coupe, notée $\delta_S(W)$. Aussi, si A et B sont deux ensembles de sommets (A, B) désigne l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans A et l'autre dans B . On note le complémentaire d'un ensemble A par \bar{A} .

Avec ces notations, et le théorème de Menger 4.1.1, Baiou [4] a donné la formulation du problème r -2SECSPP en un programme linéaire en nombres entiers comme suit :

$$\text{minimiser } \sum_{e \in E} w_e x(e) + \sum_{v \in V} c_v y(v)$$

Sous les contraintes :

$$x(\delta(W)) - 2y(v) \geq 0 \text{ pour tout } W \subset V, r \in W, v \notin W \quad (4.7)$$

$$x(e) \leq y(v) \text{ pour tout } v \in V, e \in \delta(v), \quad (4.8)$$

$$x(e) \geq 0 \text{ pour tout } e \in E, \quad (4.9)$$

$$y(v) \leq 1 \text{ pour tout } v \in V, \quad (4.10)$$

$$x(e), y(v) \in \{0, 1\} \text{ pour tout } e \in E, v \in V. \quad (4.11)$$

soit $r - 2ECSP(G) = \text{conv}\{(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|} : (x, y) \text{ satisfait (4.7)-(4.11)}\}$; le polytope associé au problème $r - 2ECSP$.

La relaxation du problème précédent sera donnée par le système composé des inégalités (4.7), (4.8),(4.9) et (4.10).

Le polytope défini par ces inégalités sera noté $P(G)$. La projection de $P(G)$ sur l'espace des variables correspondant aux arêtes est donnée par :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x(e) \leq 1 \quad \text{pour tout } e \in E, \\ x(\delta(W)) \geq 2x(e) \quad \text{pour tout } W \subseteq V, r \in W, e \notin E(W), \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

Baiou et Mahjoub [6] ont montré que le polytope "la projection de $P(G)$ sur l'espace des variables arêtes" est un polyèdre entier quand le graphe $G = (V, E)$ est série parallèle.

On pourrait penser que ce serait pareil pour le polytope $P(G)$ mais ce n'est malheureusement pas le cas, un contre exemple est donné dans [5]. Soit $H = (V, E)$ un graphe série-parallèle où $V = \{r, v_1, v_2, v_3\}$. Soit $x_e^* = \frac{1}{2}$, pour tout $e \in E$, $y_r^* = y_{v_3}^* = 1$ et $y_{v_1}^* = y_{v_2}^* = \frac{1}{2}$. Il est clair que $(x^*, y^*) \in P(H)$.

4.2.1 Le polytope r -2ECSP

Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-arête-connexe. On appelle une 2-coupe une coupe contenant exactement deux arêtes, et soit

$$E_{2c} = \{e \in E : e \text{ appartient à une 2coupe de } G\}.$$

On définit la relation \mathfrak{R} entre 2- arêtes de E_{2c} comme suit :

$$e\mathfrak{R}f \Leftrightarrow \text{il existe une 2 coupes définies par e,f.}$$

Soit la partition $E_{2c} = E_{2c}^1 \cup E_{2c}^2 \cup \dots \cup E_{2c}^l$ en classes d'équivalence disjointes. Ôter un ensemble d'arêtes E_{2c}^i du graphe G le disjoint en $|E_{2c}^i|$ composantes 2-arête connexes. L'ensemble E_{2c}^i induit un cycle quand ces composantes 2-arête connexes sont contractées en points isolés. Soit R_i la composante qui contient r et soit $V_{2c}^i \subseteq V \setminus R_i$ i.e V_{2c}^i contient les extrémités des arêtes de E_{2c}^i qui n'appartiennent pas à R_i et peut aussi contenir d'autres sommets.

Dimension du r -2ECSP

Théorème 4.2.1. [5] *Le r -2ECSP est dit de plein rang si seulement si G est 3-arête connexe.*

Théorème 4.2.2. [5]

$$\dim(r\text{-}2\text{ECSP}(G)) = |E| + |V| - \sum_{i=1}^l [|E_{2c}^i| + |V_{2c}^i| - 1] = |E/E_{2c}| + |V/V_{2c}| + l.$$

Inégalités valides et facettes du polytope r -2ECSP

Lemme 4.2.1. [5] Soit $G = (V, E)$ un graphe et un sommet fixe $r \in V$ dit racine, si $\sum_{e \in E} \alpha_e x_e + \sum_{v \in V} \beta_v y_v = \gamma$ est une inégalité valide de r -2ECSP(G) alors :

- $\gamma = 0$.
- $\alpha_e = 0$ pour tout $e \notin E_{2c}$
- $\beta_v = 0$ pour tout $v \notin V_{2c}$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et r une racine, $r \in S \subseteq V$. Si $G(\bar{S})$ n'est pas connexe, on note par $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_k$ les composantes connexes de $G(\bar{S})$. Baiou et Correa [5] ont considéré les inégalités suivantes :

$$x(\delta_S(W)) + 2y(\bar{S}) - 2 \sum_{i=1}^k x(T_i) \geq 2y(v) \quad (4.13)$$

$$x(\delta_S(W)/\{e\}) + y(\bar{S}) - \sum_{i=1}^k x(T_i) \geq y(v) \quad (4.14)$$

Où $T_i \subseteq E(\bar{S}_i)$ est un arbre recouvrant \bar{S}_i . $i = 1, \dots, k$, $W \subset S \subseteq V$ est un sous ensemble propre de S , $v \in S \setminus W$ et $r \in W$.

Remarque 4.2.1. *Les inégalités (4.13) sont une généralisation des inégalités de coupe. Dans [46], Mahjoub a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités*

de coupes définissent des facettes pour le polytope associé au problème $StECSP$ dans le cas où $T = V$.

Baiou et Correa dans [5] ont tout d'abord montré la validité de ces inégalités par rapport au $r-2ECSP(G)$ en énonçant le lemme suivant :

Lemme 4.2.2. [5] Soit $G = (V, E)$ un graphe et r une racine pour tout $S \subseteq V$ et $r \in S$, les inégalités (4.13) et (4.14) sont valides pour le $r-2ECSP(G)$

Par la suite, ils ont donné des conditions pour que les inégalités (4.12) et (4.13) définissent des facettes du $r-2ECSP$. Nous donnons quelques notations dont nous aurons besoin dans ce qui va suivre.

Pour certaines valeurs de S, W , et $F = \bigcup_{i=1}^k T_i$ (F un arbre couvrant \bar{S}), on désignera les inégalités (4.13) par (S, W, v, F) et les inégalités (4.14) par (S, W, v, e, F)

Théorème 4.2.3. [5] Une inégalité de la forme $(S, W, v', e', \bigcup_{i=1}^k T_i)$ avec $|\delta_S(W)| \leq 1$ définit une facette de $r-2ECSP(G)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $G(S \cup \bar{S}_i)$ est 3-arête connexe, pour tout $i = 1, \dots, i = K$,
- au moins un des graphes $G(S_i \cup \{v'\})$, $i = 1, \dots, i = k$, est 2-arête connexe et,
- pour $i = 1, \dots, k$, T_i possède la propriété de 2-arête connexe par rapport à v' .

Lemme 4.2.3. [5] Soit $G = (V, E)$ un graphe et r un sommet fixe. Les inégalités (4.12) et (4.13) notées respectivement (S, W, v, F) et (S, w, v, e, F) , ($F = \bigcup_{i=1}^k T_i$) définissent des facettes de $r-2ECSP(G)$ seulement si :

- $G(W)$ est connexe et
- chaque sommet pendant de T_i , pour $i = 1, \dots, k$, est connexe à W et à la composante connexe de $G(S \setminus W)$ contenant v .

Ce théorème peut être utilisé pour démontrer que la relaxation du problème $r-2ECSP$ n'est pas suffisante pour la description du polytope $r-2ECSP$.

4.3 Les graphe parfaitement r-2-arête connexes

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Rappelons le lecteur que nous avons noté $P(G)$ le polytope donné par les contraintes triviales (4.8), (4.9), (4.10), et les contraintes de coupes généralisées (4.7),

$$P(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|} \mid (x, y) \text{ satisfait les inégalités (4.7) - (4.10)}\}$$

Dans cette section nous nous intéressons à la classe des graphes pour lesquels $r-2ECSP(G) = P(G)$. Le problème de séparation étant polynomial, le problème $r-2ECSP$ peut se résoudre en temps polynomial dans cette classe de graphes. Ceci est la motivation principale pour l'étude de cette classe. Mahjoub [47] a défini les graphes dit parfaitement 2-arête connexes. Un graphe est dit parfaitement 2-arête connexe si la caractérisation du problème de sous graphe 2-arête connexe [46] est donnée par les inégalités triviales et les inégalités de coupes. Didi Biha [14] a défini la classe des graphes parfaitement k -arête connexes. Didi Biha et Mahjoub [24] ont montré que les graphes série parallèles font partie de cette classe de graphes si k est pair. Dans [47], Mahjoub donne des conditions suffisantes pour qu'un graphe soit parfaitement 2-arête connexe. Il a aussi décrit certaines opérations qui préservent la propriété "parfaitement 2-arête connexe". Dans [28], Fonlupt et Mahjoub ont étudié les points extrêmes du polytope associé au problème du sous graphe couvrant 2-arête connexe $P(G, 2)$. Ils ont établi un ordre sur ces points et ils ont caractérisé les points extrêmes fractionnaires minimaux par rapport à cet ordre. Comme conséquence, ils ont obtenu une caractérisation des graphes parfaitement 2-arête connexes.

Dans le même cadre nous décrivons les graphes parfaitement r -2-arête connexes.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et r un sommet fixe dit *racine*. Un graphe sera dit *parfaitement r -2-arête connexe* (parfaitement $r-2EC$) si on a $P(G) = r-2ECSP(G)$, c'est à dire, si l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences solutions de $r-2ECSP$ est défini par les contraintes triviales et les contraintes de coupe généralisées.

Dans ce qui suit, nous allons décrire certaines opérations qui préservent la propriété : "parfaitement r -2-arête connexe". Ces opérations sont inspirées des opérations décrites par Mahjoub dans [47]. Ensuite nous décrirons certains graphes ayant la propriété "parfaitement r -2-arête connexe".

Réduction de graphes

Lemme 4.3.1. Soient $G = (V, E)$ un graphe et f une arête de G . Si G est *parfaitement r -2-arête connexe*, et $G - f$ est r -2-arête connexe alors $G - f$ est aussi *parfaitement r -2-arête connexe*.

Preuve. Supposons qu'il existe un point extrême fractionnaire (x', y') de $P(G - f)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ la solution donnée par :

$$x(e) = \begin{cases} x'(e) & \text{si } e \in E - f \\ 0 & \text{si } e = f \end{cases} \text{ et } y(v) = y'(v) \text{ pour tout } v \in V.$$

il est clair que (x, y) est un point extrême de $P(G)$. Puisque (x, y) est fractionnaire, ceci

contredit le fait que G est parfaitement r -2-arête connexe. \square

Lemme 4.3.2. Soient $G = (V, E)$ parfaitement r -2-arête connexe, et W un sous ensemble de V tel que $G[W]$ soit r -2-arête connexe. Alors G/W , le graphe obtenu à partir de G en contractant W , est parfaitement r -2-arête connexe.

Preuve. Supposons qu'il existe un point extrême fractionnaire (\bar{x}, \bar{y}) de $P(G/W)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ la solution donnée par :

$$x(e) = \begin{cases} \bar{x}(e) & \text{si } e \in E \setminus E(W) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad y(v) = \begin{cases} \bar{y}(v) & \text{si } v \in V \setminus W \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est clair que $(x, y) \in P(G)$, est aussi un point extrême de $P(G)$. En effet si ce n'est pas le cas, alors il existe deux solutions (x^1, y^1) et $(x^2, y^2) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ tel que : $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$ et $\bar{y} = \frac{1}{2}(y^1 + y^2)$. Nous avons aussi $x^1(e) = x^2(e) = 1 \forall e \in E(W)$ et $y^1(v) = y^2(v) = 1 \forall v \in W$. Soient $(\bar{x}^1, \bar{x}^2), (\bar{y}^1, \bar{y}^2) \in \mathbb{R}^{|E \setminus E(W)|+|V \setminus W|}$ tels que \bar{x}^1, \bar{x}^2 sont les restrictions x^1, x^2 respectivement sur $E \setminus E(W)$ et \bar{x}^1, \bar{x}^2 sont les restrictions x^1, x^2 respectivement sur $E \setminus E(W)$ et \bar{y}^1, \bar{y}^2 sont défini comme suit :

$$\bar{y}^1(v) = \begin{cases} y^1(v) & \text{si } v \in V \setminus W \\ 1 & \text{si } v = r \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{y}^2(v) = \begin{cases} y^2(v) & \text{si } v \in V \setminus W \\ 1 & \text{si } v = r \end{cases}.$$

Il est clair que $(\bar{x}^1, \bar{x}^2), (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$ appartenant à $P(G/W)$. De plus, nous avons $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x}^1 + \bar{x}^2)$ ce qui contredit le fait que (\bar{x}, \bar{y}) soit un point extrême de $P(G/W)$. Or (x, y) est un point extrême de $P(G)$. Puisque (x, y) est fractionnaire, ceci contredit le fait que G est parfaitement r -2-arête connexe. \square

Lemme 4.3.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit uv une arête de G tels que u et v sont de degré 2. Si G est parfaitement r -2EC alors $G/\{u, v\}$ est parfaitement r -2EC.

Preuve. Soient e_1, e_2 deux arêtes incidentes à u, v respectivement et différentes de uv . Si $G/\{u, v\}$ n'est pas parfaitement r -2EC alors il existe un point extrême fractionnaire (x, y) de $P(G/\{u, v\})$. Soit u^* le sommet résultant de la contraction de l'arête uv . Comme $\{e_1, e_2\}$ est une 2-coupe nous avons $y(u) = x(e_1) = x(e_2) = y(v) = y(u^*)$. Considérons la solution $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$

$$\text{donnée par : } \bar{x}(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \neq uv, \\ y(u^*) & \text{si } e = uv. \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{y}(v) = \begin{cases} y(v') & \text{si } v' \notin \{u, v\}, \\ y(u^*) & \text{si } v' \in \{u, v\}. \end{cases}$$

Il est clair que (\bar{x}, \bar{y}) est fractionnaire. De plus (\bar{x}, \bar{y}) définit un point extrême pour $P(G)$, d'où la contradiction. \square

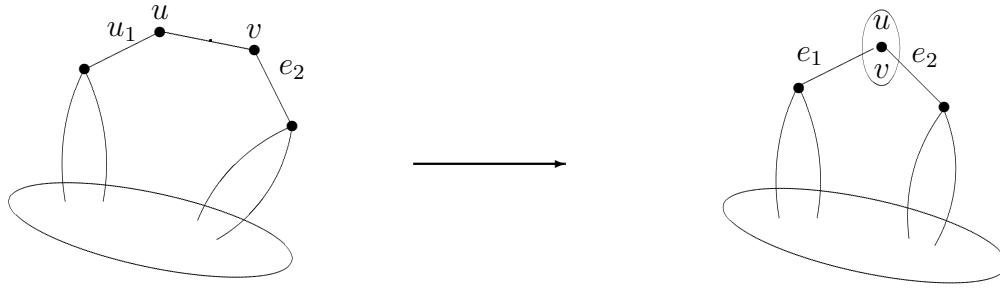


FIG. 4.1 – Contraction d’une arête

Lemme 4.3.4. Soient $G = (V, E)$ un graphe et H un graphe obtenu par subdivision d’une arête de G . Si G est parfaitement r -2EC alors H est parfaitement r -2EC.

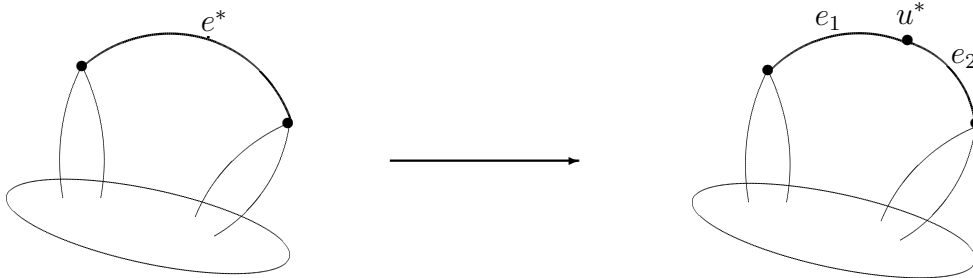


FIG. 4.2 – Subdivision d’une arête

Preuve. Soit $e^* \in E$ et soit u^* le sommet qui subdivise e^* en deux arêtes e_1, e_2 . On suppose que H n’est pas parfaitement r -2EC, alors il existe un point extrême fractionnaire dans $P(H)$, soit (x', y') . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ défini comme suit :

$$\bar{x}(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{e^*\} \\ y(u^*) & \text{si } e = e^*. \end{cases} \text{ et } y \text{ la restriction de } y' \text{ sur } V.$$

Il est clair que (x, y) est fractionnaire. Comme (x, y) est un point extrême de $P(G)$, d’où la contradiction. \square

Nous allons maintenant étudier deux classes de graphes, les *cactus*, et les *multi-chaînes* et nous montrons que ces graphes possèdent la propriété : *parfaitement r-2-arête connexité*.

Application aux Cactus

Avant d'entamer l'étude polyédrale du r -2ECSP dans les cactus, nous commençons par donner quelques notions et définitions dont nous aurons besoin.

Définition 4.3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Une arête est un isthme si sa suppression sépare le graphe en deux composantes connexes.

Définition 4.3.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un point d'articulation est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

Nous donnons à présent la définition d'un cactus.

Définition 4.3.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe. G est un cactus si chaque arête fait partie d'au plus un cycle élémentaire.

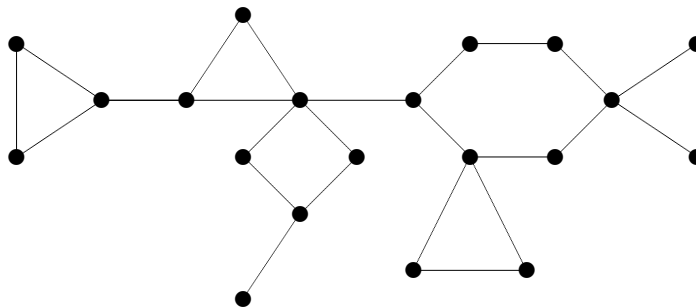


FIG. 4.3 – Un cactus

En d'autres termes, un cactus est composé exclusivement de cycles et d'isthmes et c'est précisément pour cela que cette classe de graphes est intéressante par rapport à la 2-connexité. En effet, étant donné que la description complète du problème du sous graphe 2-arête connexe est déjà connue dans les cycles, nous pouvons espérer trouver des résultats intéressants dans le cas des cactus. Nous nous intéressons en particulier aux cactus 2-arêtes-connexes. Afin de bien comprendre ce que nous entendons par ce terme, nous redéfinissons à présent la notion de graphe k -arêtes-connexe.

Définition 4.3.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. On dit que G est k -arêtes-connexe si pour le déconnecter, il faut enlever au moins k arêtes.

Un graphe sans isthme est donc 2-arêtes-connexe. Ainsi, un cactus 2-arêtes-connexes est un cactus qui est composé uniquement de cycles. Nous étudions ces cactus en particulier.

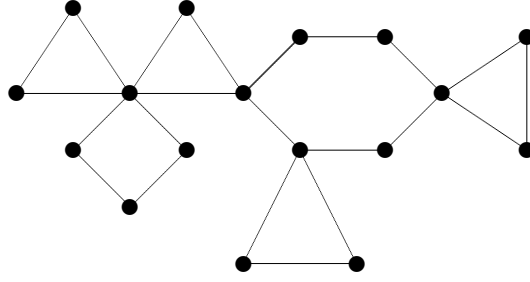


FIG. 4.4 – Cactus 2-arete connexe

r-2ECSP(*G*) dans les cactus

Avant d’aborder le polytope *r*-2ECSP(*G*) dans les cactus nous donnons cette remarque.

Proposition 4.3.1. *Si $G = (V, E)$ est un cycle élémentaire, r -2ECSP(G) = $P(G)$.*

Avant de donner la preuve de cette proposition nous définissons le problème du *r*-TSP étudié par Baiou et Mahjoub [7]. Le polytope associé au problème de *r*-TSP, noté *r*-TSP(*G*), est l’enveloppe convexe des vecteurs d’incidence des *r*-tournées de *G* :

$$r - TSP(G) = conv\{(x^F, y^U) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|} \mid (U, F) \text{ est une } r\text{-tournée de } G\}$$

Le *r*-TSP a été formulé en programme en nombre entier comme suit :

$$\text{minimiser } \sum_{e \in E} w_e x(e) + \sum_{v \in V} c_v y(v)$$

Sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(\delta(W)) - 2y(v) \geq 0 & \text{pour tout } W \subset V, r \in W, v \notin W \\ x(e) \leq y(v) & \text{pour tout } v \in V, e \in \delta(v) \\ x(\delta(r)) \leq y(r) & \\ x(\delta(v)) = y(v) & \text{pour tout } v \in V/r \\ x_e \geq 0, & \text{pour tout } e \in E \\ y(v) \leq 1 & \text{pour tout } v \in V, \\ x(e), y(v) \in \{0, 1\}, & \text{pour tout } e \in E, v \in V. \end{array} \right.$$

Soit $H(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}, (x, y) \text{ satisfait les contraintes : (4.7)-(4.10) et (4.15) et (4.16)}\}$.

Baiou et Mahjoub ont donné la description du *r*-TSP quand le graphe *G* est un graphe série parallèle, en établissant la preuve du résultat suivant :

Théorème 4.3.1 ([7]). *Si G est série parallèle, alors r -TSP(G) = $H(G)$*

Preuve de la proposition 4.3.1. La classe des cycles élémentaires est une sous-classe des graphes série parallèle.

Soit (x, y) est une solution de $P(G)$ (c'est à dire (x, y) vérifie les inégalité (4.7)-(4.10)). Comme $G = (V, E)$ est un cycle élémentaire, on peut remarquer que toute solution de $P(G)$ vérifie l'égalité suivante :

$$x(\delta(v)) = y(v) \quad \forall v \in V \setminus \{r\} \quad (4.15)$$

En considérant le vecteur d'incidence du r - $2ECSP(G)$ triviale nous aurons alors, toute solution de $P(G)$ vérifie l'inégalité

$$x(\delta(r)) \leq y(r) \quad (4.16)$$

On peut remarquer que les inégalités, (4.7)-(4.10) avec les inégalités : (4.15) et (4.16) forment les contraintes du problème r - TSP étudié par Baiou et Mahjoub cité ci-dessus. Aussi elles se confondent avec les inégalités définissant $H(G)$.

Quand le graphe G est un cycle élémentaire on a : $(x, y) \in P(G) \Rightarrow (x, y) \in H(G)$. D'après 4.3.1 on a, toute solution de $H(G)$ est entière. Et du fait que les cycles sont des graphes série-parallèles, on a toute solution de $P(G)$ est entière. \square

Soit $G = (V, E)$ un cactus 2-arête connexe, où l'ensemble E_{2C} (définie dans le paragraphe 4.2.1) contient au moins une classe d'équivalence. Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ le graphe induit par R_1 . Soit $G_2 = (V_2, E_2)$ le graphe obtenu de G par contraction de R_1 , et \bar{r} est le sommet résultant. (La contraction d'une arête uv consiste à identifier ces deux extrémités u et v , et supprimer l'arête)

Lemme 4.3.5. $Dim(r-2ECSP(G)) = Dim(r-2ECSP(G_1)) + Dim(\bar{r}-2ECSP(G_2)) - 1$

Preuve. Soit $\sum_{e \in E_1} \alpha_e^1 x_e + \sum_{v \in V_1} \beta_v^1 y_v = \gamma^2$ (resp. $\sum_{e \in E_2} \alpha_e^2 x_e + \sum_{v \in V_2} \beta_v^1 y_v = \gamma^2$) un hyperplan contenant $r-2ECSP(G_1)$ (resp. $r-2ECSP(G_2)$). Puisque $G(R_1)$ est 2-arête connexe, alors $\sum_{e \in E_1} \alpha_e^1 x_e + \sum_{v \in V_1} \beta_v^1 y_v = \gamma^2$ et $\sum_{e \in E_2} \alpha_e^2 x_e + \sum_{v \in V_2 \setminus \{\bar{r}\}} \beta_v^1 y_v = \gamma^2$ sont deux hyperplans contenant $r_2ECSP(G)$. D'où :

$$Dim(r-2ECSP(G)) \leq Dim(r-2ECSP(G_1)) + Dim(\bar{r}-2ECSP(G_2)) - 1$$

Soit \mathcal{C}_∞ (resp. \mathcal{C}_∞) l'ensemble de $dim(r-2ECSP(G_1))$ (resp. $dim(\bar{r}-2ECSP(G_2))$) de sous graphes r - $2ECSP$ (resp. \bar{r} - $2ECSP$) linéairement indépendant de G_1 (resp. de G_2).

Tout graphe H de \mathcal{C}_1 est un sous graphe r_2ECSP de G . Aussi, si H est sous graphe de \mathcal{C}_2 , on peut remplacer \bar{r} par $G(R_1)$ et nous obtenons un sous graphe $r-2ECSP$ de G . A présent, c'est facile de voir qu'il existe au moins $Dim(r-2ECSP(G_1)) + Dim(\bar{r}-2ECSP(G_2)) - 1$ sous graphes $r-2ECSP$ de G linéairement indépendant. \square

Soit $G = (V, E)$ un cactus 2-arête connexe. Soit ℓ le nombre de cycle qui compose G .

Remarque 4.3.1. $Dim(r-2ECSP(G)) = \ell + 1$

Preuve. Nous allons procéder par récurrence sur le nombre de cycles que contient notre graphe (cactus 2-arête connexe). Il est facile de voir que la propriété est vérifiée pour le cycle (Cactus avec $\ell = 1$), pareil pour un cactus à deux cycles.

Maintenant, nous supposons que la propriété est vérifiée pour un graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ à ℓ cycles, montrons qu'elle est vrai (vérifié) pour un graphe $G' = (V', E')$ à $\ell + 1$ cycles. G' peut s'obtenir par composition de $G_1 = (V_1, E_1)$ est un cycle $G_2 = (V_2, E_2)$ tel que $V_1 \cap V_2 = \{u_0\}$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Nous remarquons que les arêtes de G_2 forment un ensemble de 2-coupe, et la suppression des arêtes E_2 décompose le graphe G' en $|E_2|$ composantes 2-arête connexes ($\{v\}, \forall v \in V_2 \setminus \{u_0\}$, et V_2 , posons $V_2 = R$). Nous pouvons appliquer le lemme 4.3.5 et nous aurons :

$$Dim(r-2ECSP(G')) = Dim(r-2ECSP(G_1)) + Dim(\bar{r}-2ECSP(G_2)) = \ell + 2 - 1 = \ell + 1.$$

\square

Après l'étude de la dimension du polytope $r-2ECSP(G)$ dans le cas où G est un cactus, nous allons montrer que ceux-ci sont des graphes parfaitement $r-2$ -arête-connexes.

Théorème 4.3.2. *Soit G un cactus, alors, $r-2ECSP(G) = P(G)$*

Lemme 4.3.6. [7] $(x, y) \in H(G)$ et $(\delta(W'), v')$ $(\delta(W), v)$ sont toutes les deux des coupes serrées pour (x, y) alors on a :

(i) Si $v \in \overline{W \cup W'}$, alors $(\delta(W \cap W'), v')$ et $(\delta(W \cap W'), v)$ sont toutes les deux des coupes serrées pour (x, y) .

(ii) Si $v \in W' \setminus W$ et $v' \in W \setminus W'$ alors, $(\delta(\overline{W' \setminus W}))$ sont toutes les deux des coupes serrées pour (x, y) .

Lemme 4.3.7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ solution de $P(G)$ tel que $x(e) > 0$ alors si $(\delta(W), v)$ est serré pour (x, y) alors $G(\overline{W})$ et $G(W)$ sont connexes.

Preuve.

(i) $(\delta(W), v)$ est serré pour (x, y) alors $G(\overline{W})$ est connexe.

Cette assertion est triviale quand $\overline{W} = \{v\}$. Supposons que $|\overline{W}| \geq 2$ et que $\overline{W} = \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$ et $(\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous devons supposer que $v \in \overline{W}_1$. Comme G est connexe, alors $(W, \overline{W}_1) \neq \emptyset \neq (W, \overline{W}_2)$. D'après notre hypothèse $x(W, \overline{W}_1) > 0$. Comme $(\delta(W), v)$ est serrée pour (x, y) alors $x(\delta(W)) = x(W, \overline{W}_1) + x(W, \overline{W}_2) = 2y_v$. Ceci implique que $x(\delta(W \cup \overline{W}_2)) = x(W, \overline{W}_1) < 2y_v$. D'où la coupe généralisée $\delta(W \cup \overline{W}_2), v$ est violée par (x, y) . Mais ceci contredit le fait que $(x, y) \in P(G)$.

(ii) $(\delta(W), v)$ est serré pour (x, y) alors $G(W)$ est connexe.

Ceci est claire quand $W = \{r\}$. Supposons maintenant que $|W| \geq 2$ et que $W = W_1 \cup W_2$ et $(W_1 \cap W_2) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous devons supposer que $r \in W_1$. Comme G est connexe, alors $(W_1, \overline{W}) \neq \emptyset \neq (W_2, \overline{W})$. D'après notre hypothèse $x(W_1, \overline{W}) > 0$. Comme $(\delta(W), v)$ est serrée pour (x, y) alors $x(\delta(W)) = x(W_1, \overline{W}) + x(W_2, \overline{W}) = 2y_v$. Ceci implique que $x(\delta(W_1)) = x(W_1, \overline{W}) < 2y_v$. D'où la coupe généralisée $(\delta(W_1), v)$ est violée par (x, y) . Mais ceci contredit le fait que $(x, y) \in P(G)$. \square

Soit $G = (V, E)$ un cactus 2-arête connexe, et $C_i, i = 1 \dots \ell$ les cycles le composant. La remarque qui va suivre est vérifiée pour tout cycle de G .

Remarque 4.3.2. *Toute solution de $P(G)$ vérifie l'égalité :*

$$x(C_i) = |C_i| x(e), \forall e \in C_i$$

avec $x(C_i) = \sum_{e \in C_i} x(e)$

Remarque 4.3.3. *Pour $G = (V, E)$ qui est un cactus, $H = \{v \in V, v \text{ point d'articulation de } G\}$, toute solution de $P(G)$ vérifie l'égalité :*

$$x(\delta_{C_i}(v)) = 2y_v, \forall v \in C_i \setminus (H \cup \{r\}) \quad (4.17)$$

ainsi que l'inégalité suivante :

$$x(\delta_{C_i}(v)) \leq 2y_v \quad \forall v \in C_i \cap (H \cup \{r\}) \quad (4.18)$$

Preuve du théorème 4.3.2

Avant d'entamer la preuve de théorème 4.3.2, rappelons que nous avons défini le problème du *sous graphe Steiner 2-arête connexe* noté *StECSP*. On a noté le polytope

associé au problème $StECSP$ par $StECSP(G, S)$. On désigne par $P(G, S)$ le polytope défini comme suit :

$$P(G, S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|} \mid (x, y) \text{ satisfait les inégalités (4.1), (4.2), (4.4)}\}$$

Baiou et Mahjoub [6] ont donné le théorème suivant :

Théorème 4.3.3. [6] *Soit G un graphe série-parallèle, alors $StECSP(G) = P(G, S)$*

Pour une preuve détaillée du théorème voir [6].

Pour montrer le théorème 4.3.2, nous allons procéder par induction, sur le nombre d'arêtes. Le Théorème est vrai pour un graphe ayant au plus deux arêtes. Supposons qu'il est vrai pour un graphe cactus ayant au plus m arêtes. Pour un graphe cactus ayant $m + 1$ arêtes, nous supposons que $r-2ECSP(G) \neq H(G)$. Par ailleurs, soit (x, y) le point extrême fractionnaire de $H(G)$. Alors on a le lemme suivant :

Assertion 4.3.4. $\forall e \in E, \forall v \in V$, nous avons $x_e > 0$ et $y_v > 0$

Preuve. De l'inégalité (4.8), il découle qu'il suffit de montrer : $x_e > 0$ pour tout $e \in E$. Soit e_0 une arête telle que $x_{e_0} = 0$. Soit $x' \in \mathbb{R}^{|E|-1}$, $x'_e = x_e$ pour tout $e \in E \setminus \{e\}$. Il est clair que (x, y) appartient à $H(G')$, où G' est le graph obtenu par suppression d'une arête de G . De plus, (x', y) est un point extrême de $H(G)$. Comme (x', y) est fractionnaire et G' est un cactus, ce qui est une contradiction. \square

Noter que le fait de supprimer une arête ou un sommet d'un cactus, ne modifie pas sa propriété de cactus.

Assertion 4.3.5. *Si $(\delta(W), v)$ est une coupe serrée pour (x, y) avec $|W| \geq 2$ alors, $y_v = 1$*

Preuve. Supposons au contraire, que $y_v < 1$. Supposons également que $|W|$ est minimum. Pour toute coupe serrée $(\delta(W), w')$ avec $|W'| \geq 2$ et $|W'| < |W|$, nous avons $y_{w'} = 1$. Remarquons que par la contrainte (4.7), $y_v \geq y_{v'}$ pour tout $v' \in \bar{W}$. Comme $(\delta(W), v)$ est serrée pour (x, y) , donc, on a :

$$y_v \geq y_{v'} \tag{4.19}$$

Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu par contraction de \bar{W} de G . On note par \bar{w} le sommet résultant de cette contraction. Soit x' la restriction de x sur E' , et $y' \in \mathbb{R}^{|W|+1}$ tel que $y'(u) = \begin{cases} y(u) & \text{si } u \in W \\ y(v) & \text{si } u = \bar{w} \end{cases}$. Il est facile de voir que (x, y) est solution de $P(G')$. Comme

G' est un cactus et $|E'| < |E|$ d'après l'hypothèse de récurrence, $P(G')$ est entier. Par conséquent (x', y') est combinaison convexe de points extrêmes entiers de $P(G')$. D'où, il existe k points extrêmes de $P(G')$, soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} (x', y') = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i, y_i) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1. \end{cases}$$

Comme $y'(\bar{w}) = y_v < 1$ (par hypothèse), il doit exister une solution parmi $(x', y'), \dots, (x_k, y_k)$, soit (x'_1, y'_1) tel que $y'(\bar{w}) = 0$

$$\begin{cases} (x', y') = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i, y_i) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1. \end{cases}$$

Comme $y'(\bar{w}) = y_v < 1$ (par hypothèse), il doit exister une solution parmi $(x', y'), \dots, (x_k, y_k)$, soit (x'_1, y'_1) tel que $y'(\bar{w}) = 0$ d'après le lemme 4.4.2, $(\delta(W), w)$ est serrée pour (x, y) , alors $G(W)$ et $G(\overline{W})$ sont connexes. Il faut montrer que \bar{w} n'est pas un point d'articulation de $G = (V', E')$. Si \bar{w} était un point d'articulation de G' , il serait résultat de la contraction d'un ensemble d'arêtes $E(\overline{W})$, on aurait soit $G(W)$ ou bien $G(\overline{W})$ non connexe. Ce qui fait que $\bar{w} \in C_i$ dans G' tel que : $x'(\delta_{C_i}(\bar{w})) = 2y'_{\bar{w}}$. De l'égalité (4.16) associée à \bar{w} , on a :

$$x'_1(\delta(W)) = x'_1(\delta_{C_i}(W)) = x'_1(\delta_{C_i}(\overline{W})) = 2y'_{1\bar{w}}$$

Soit $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ la solution telle que

$$x^*(e) = \begin{cases} x'_1(e) & \text{si } e \in E(W) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y^*(v) = \begin{cases} y'_1(v) & \text{si } v \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce qui va suivre, nous montrons que toute contrainte de $H(G)$ qui est serrée pour (x, y) le serait aussi pour (x^*, y^*) , ce qui contredirait le fait que (x, y) soit un point extrême.

Tout d'abord, il est facile de voir que toute inégalité parmi (4.8) – (4.10) serrée pour (x, y) l'est aussi pour (x^*, y^*) . Considérons alors la coupe généralisée $(\delta(W'), v')$ serrée pour (x, y) avec $|\overline{W}'| \geq 2$.

• Supposons que $W' \subset W$:

- Si $v' \in W$, alors $(\delta(W'), v')$ est aussi une coupe généralisée de G' , et elle est également serrée pour (x', y') et (x'_1, y'_1) . D'où : $x^*(\delta(W')) = x'(\delta(W')) = 2y'_1(v)$

- Si $v \in \overline{W}$, alors $2y_v \leq x(\delta(W')) = 2y(v')$ et par l'inégalité (4.19), ceci implique que $y(v') = y(v) = y(\bar{w})$. On a alors $(\delta(W'), \bar{w})$ est une coupe généralisée serrée. D'où $x^*(\delta(W')) = x'_1(\delta W') = 2y'_1(\bar{w}) = 0 = 2y^*(v')$.

• Supposons que $W \subset W'$:

Par la définition de (x^*, y^*) nous avons $x^*(\delta(W')) = 2y^*(v')$.

• Alors, on peut supposer que $W \setminus W' \neq \emptyset \neq W' \setminus W$: On considère deux cas :

Cas 1 : $v \in \overline{W \cup W'}$. Du lemme 4.3.6, nous avons $(\delta(W, W'), v')$ est une coupe généralisée serrée pour (x, y) . Comme $(W \cap W') \subset W$ il s'ensuit que $(\delta(W \cap W'), v')$ est aussi serrée pour (x^*, y^*) , alors $x^*(\delta(W')) = x^*(\delta(W \cap W')) = 2y^*(v')$.

Cas 2 : $v \in W' \setminus W$. Alors $v' \notin \overline{W \cup W'}$, car sinon, par le lemme 4.3.6(i) en remplaçant v' par v , on aurait $(\delta(W \cup W'), v)$ doit être une coupe généralisée serrée pour (x, y) , ce qui contredirait la minimalité de $|W|$. Donc on suppose que $v' \in W \setminus W'$. Par le lemme 4.3.6(ii), $(\delta(\overline{W \setminus W'}), v')$ est une coupe généralisée serrée pour (x, y) . Comme $(\delta(\overline{W \setminus W'}), v')$ est aussi une coupe généralisée dans G' qui est aussi serrée pour (x', y') et aussi pour (x'_1, y'_1) . D'où

$$x^*(\delta(W')) = x'_1(\delta(\overline{W \setminus W'})) = 2y'_1(v') = 2y^*(v')$$

Donc on vient de démontrer que (x, y) n'est pas un point extrême si $y(v) < 1$. D'où la preuve de l'assertion 4.3.5. \square

Assertion 4.3.6. *Pour tout $v \in H$, il existe W tel que $(\delta(W), v)$ soit serrée pour (x, y)*

Preuve. soit $v \in H \cap C_i$, alors il existe $W \ni r$ tel que $x(\delta_{C_i}(v)) = x(\delta(W) = x(\delta_{C_i}(W)))$. Par l'inégalité 4.7 et l'inégalité 4.15 nous avons : $2y(v) \leq x(\delta(W) = x(\delta_{C_i}(v))) \leq 2y_v$ \square

Considérons $T = \{v \in V, y_v = 1\}$

Assertion 4.3.7. $|T| \geq 2$.

Preuve. D'après les assertions 4.3.6 et 4.3.5, on peut conclure que $H \subseteq T$, alors $|T| \geq |H|$ $|H| \geq 2$, alors $|T| \geq 2$. Montrons que $r \in T$

Si $r \notin H$ (r n'est pas un point d'articulation, posons $r \in C_j$) alors on a $x(\delta(r)) = x(\delta_{C_j}(r))$, et par l'inégalité (4.7) appliquée à $W = \{r\}$ et l'inégalité 4.18 on aura $y(v) \leq y(r)$ pour tout $v \in V$ d'où $y(r) = 1$.

Si $r \in H$. (r est un point d'articulation alors il existe k cycle comprenant r et on peut écrire $r \in \bigcap_{j=1}^k C_j$), soit W_i tel que $\delta_{C_i}(r) = \delta(W_i)$. Par l'inégalité (4.7) appliquée à W_i , et par l'inégalité (4.18) on conclut que $y(v) \leq y(r)$ pour tout $v \in \bigcup_{j=1}^k C_j$, mais si $v \notin \bigcup_{j=1}^k C_j$ alors $\exists u \in \bigcup_{j=1}^k C_j$ telle que $u \in H$ d'où $y(r) = 1$. On vient de montrer que si $|H| \geq 2$ alors $|T| \geq 2$ et $r \in T$.

$|H| \leq 1$:

$|H| = 1$, Si $r \notin H$ alors $H \cup \{r\} \subseteq T$, d'où $|T| \geq 2$. Si $r \in H$ on a $\{r\} = \bigcap_{j=1}^{\ell} C_j$.

On suppose le contraire ($|T| < 2$). Si $|T| = 1$ on a : $y(r) = 1$ et $y(v) < 1$ pour tout $v \in V \setminus \{r\}$. On a $x(\delta_{C_j}(r)) < 2$ pour tout cycle $C_i, i = 1, \dots, \ell$, (ceci est dû au fait que $|\delta_{C_j}(v)| = 2$ pour tout $v \in C_j$, et $j = 1, \dots, \ell$ et $x(e) < 1$). Si on considère le vecteur d'incidence du $r2ECSP$ trivial (ie (x', y') à composantes toutes nulles sauf $y'(r) = 1$), cet solution satisfait à l'égalité toutes les contraintes de $H(G)$ serrées pour (x, y) , ce qui contredit le fait que (x, y) soit un point extrême.

$|H| = 0$, donc notre graphe se réduit à un cycle. On suppose que $|T| \leq 1$. Par l'inégalité (4.8), on déduit $x(e) < 1$ pour tout $e \in E$. Par l'inégalité (4.7) appliquée à $W = \{r\}$ avec l'égalité (4.17), il s'ensuit que $y(v) < 1$ pour tout $v \in V \setminus \{r\}$. Si $T = \emptyset$ alors nous avons $y(r) < 1$. Par conséquent, la solution $(0, 0)$ satisfait à l'égalité toutes les contrainte de $H(G)$ serrées pour (x, y) . Mais ceci contredit le fait que (x, y) soit un point extrême.

Supposons que $|T| = 1$. D'où : $y(r) = 1$ et $y(v) < 1$ pour tout $v \in V \setminus \{r\}$. On a $x(\delta(r)) < 2$ car dans un cycle $|\delta(v) = 2|$ pour tout $v \in V$, et comme $x(e) < 1$, alors si on considère le vecteur d'incidence du $r2ECSP$ trivial (ie (x', y') à composantes toutes nulles sauf $y'(r) = 1$), cet solution satisfait à l'égalité toutes les contraintes de $H(G)$ serrées pour (x, y) , ce qui contredit le fait que (x, y) soit un point extrême. \square

Dans la suite, nous allons montrer que la projection de (x, y) sur $\mathbb{R}^{|E|}$, (x) , est un point extrême de $P(G, T)$. Il est clair que toute contrainte de $P(G, T)$ peut être obtenue par combinaison linéaire des contraintes de $P(G)$. Soit $x \in P(G, T)$, pour montrer que x est un point extrême $P(G, T)$ il suffit de trouver un système d'égalités de $P(G, T)$, où x est l'unique solution.

S'il existe une inégalité du type (4.8) qui soit serrée pour (x, y) avec $y(v) = 1$ alors cette inégalité correspond à une des inégalité $x(e) \leq 1$ de $P(G, T)$ qui soit serrée pour x . Notons cette inégalité (8'). Soit $(\delta(W), v)$ une coupe généralisée serrée pour x, y . Donc d'après le lemme 4.3.5 nous avons $y(v) = 1$ donc $v \in T$. Alors l'égalité qui découle de $(\delta(W), v)$ correspond à l'inégalité coupe de Steiner $\delta(W) \geq 2$ de $P(G, T)$ qui soit serrée

pour x . Notons ces égalités (9').

Maintenant, considérons l'égalité 4.17.

Si $y(v) = 1$ pour $v \neq r$, alors, comme précédemment, cette égalité correspond à l'inégalité de coupe Steiner pour $P(G, T)$ qui est serrée pour (x) . Si l'inégalité (4.18) est serrée pour (x, y) ce qui fait $x(\delta(r)) = 2$, alors, par le lemme 4.3.7, $|T| \geq 2$ et $r \in T$, cette égalité aussi correspond à la coupe Steiner serrée pour x dans $P(G, T)$. Nous la noterons aussi par (9'). Si $y(v) < 1$ et il existe $e \in \delta(v)$ tel que $x(e) = y(v)$, ceci induira la coupe Steiner gauche $x(\delta(v)) \geq 2x(e)$ serrée pour x . Nous noterons cette égalité (10').

Soit \mathcal{S} le système d'égalité défini par (8'), (9') et (10').

Nous allons montrer que x est l'unique solution de (\mathcal{S}) . Supposons qu'il existe une solution x' du système \mathcal{S} . Si on considère $y' \in \mathbb{R}^{|V|}$, tel que $y'(v) = \frac{1}{2}x'(\delta(v))$ pour tout $v \in V$, la solution (x', y') doit vérifier à l'égalité toutes les contraintes serrées pour (x, y) . Et comme $x' \neq x$ et (x, y) est un point extrême de $P(G)$, ce qui est impossible.

Comme les égalités de \mathcal{S} découlent des inégalité de $P(G, T)$, alors x est un point extrême de $P(G, T)$. Comme x est fractionnaire et G est un cactus qui est un graphe série parallèle, ceci contredirait le théorème 4.3.3. Ce qui achève la preuve du théorème 4.3.2. \diamond

Dans ce qui va suivre nous donnons une autre manière de prouver le théorème 4.3.2. Pour ce faire, nous allons étendre un théorème déjà appliqué au problème de r-arbre par Goémans [30] sur le problème du sous graphe r-2-arête connexe. Pour énoncer le théorème nous avons besoins d'une notation spécifique.

Soit $G = (V, E)$ un graphe cactus, et v un point d'articulation de G . Soient $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ tel que $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \{v\}, E = E_1 \cup E_2, E_1 \neq \emptyset \neq E_2, G_1 = G[V_1]$ et $G_2 = G[V_2]$. On dit que G_1 et G_2 forment une 1-séparation du graphe G au

point v . Soit $r_1 = \begin{cases} r & \text{si } r \in V_1 \\ v & \text{sinon} \end{cases}, r_2 = \begin{cases} r & \text{si } r \in V_2 \\ v & \text{sinon} \end{cases}$.

Si (x, y) est un vecteur de $\mathbb{R}^{|E|=|V|}$ alors soit (x^i, y^i) la restriction de (x, y) sur $G_i, (i \in 1, 2)$. Noter que (x^1, y^1) et (x^2, y^2) possède une seule composante en commun, y_v .

Théorème 4.3.8. *Si v est un point d'articulation du graphe $G = (V, E)$ alors, avec les notations précédente nous avons,*

$$\text{conv}(r\text{-}2\text{ECSP}(G)) = \{(x, y) : (x^1, y^1) \in \text{conv}(r_1\text{-}2\text{ECSP}(G_1)), (x^2, y^2) \in \text{conv}(r_2\text{-}2\text{ECSP}(G_2))\}$$

Preuve. Si (x, y) est un vecteur d'incidence d'un sous graphe r-2-arête connexe, alors (x^i, y^i)

est le vecteur d'incidence de sous graphe r_i -2-arête connexe. D'où :

$$\text{conv}(r\text{-}2\text{ECSP}(G)) \subseteq \{(x, y) : (x^1, y^1) \in \text{conv}(r_1\text{-}2\text{ECSP}(G_1)), \\ (x^2, y^2) \in \text{conv}(r_2\text{-}2\text{ECSP}(G_2))\}$$

Inversement, si (U_i, F_i) est un sous graphe r_i -2-arête connexe de $G_i (i = 1, 2)$, tel que $v \in U_1$ si et seulement si $v \in U_2$, alors $(U_1 \cup U_2, F_1, F_2)$ est un sous graphe r -2-arête connexe de G . Ceci découle de la définition de r_1, r_2 . Maintenant on considère (x, y) telle que $(x^1, y^1) \in \text{conv}(r_1\text{-}2\text{ECSP}(G_1))$ et $(x^2, y^2) \in \text{conv}(r_2\text{-}2\text{ECSP}(G_2))$. Alors (x^i, y^i) peut être une combinaison convexe des vecteurs d'incidences des sous graphes r_i -2-arête connexes de $G_i, (i = 1, 2)$. Comme, pour $i = 1$ ou $2, y_v$ est la composante commune des vecteurs d'incidence associés aux sous-graphes r_i -2-arête connexe qui contiennent v (point d'articulation). Ces sous graphes r_i -2-arête connexes peuvent être combinés pour donner des sous graphes r -2-arête connexes de G . Comme résultat, (x, y) peut être considéré comme combinaison convexe des vecteurs d'incidence des sous graphes r -2-arête connexes de G . \square

Remarque 4.3.4. *Du théorème 4.3.8 et de la proposition 4.3.1, nous pouvons déduire le résultat du théorème 4.3.2.*

Nous retrouvons des résultats similaires quand le graphe G est une multi-chaîne.

Application aux graphes Multi-Chaîne sans Cordes

Définition 4.3.5. Une multi-chaîne est une chaîne pouvant admettre plusieurs arêtes entre deux sommets adjacents.

Proposition 4.3.2. *Si G est une multi-chaîne alors $P(G) = r\text{-}2\text{ECSP}(G)$*

Preuve. Pour la preuve de cette proposition nous allons procéder par récurrence sur le nombre de sommets. Noter que le nombre d'arêtes entre chaque pair de sommet est quelconque. Il est facile de remarquer que la propriété " $P(G) = r\text{-}2\text{ECSP}(G)$ " est vrai pour une multi-chaîne sur deux sommets. Supposons que celle-ci est vrai pour une multi-chaîne sur n sommets. D'après le théorème 4.3.8, la propriété est vraie pour une multi-chaîne sur $n + 1$ sommets (Une multi-chaîne sur $n + 1$ sommets n'est autre que la concaténation d'une multi-chaîne sur n sommets et une multi-chaîne sur deux sommets). Ce qui achève la preuve. \square

En conclusion, les cactus et les multichaînes sont des graphes parfaitement r -2-arête connexe.

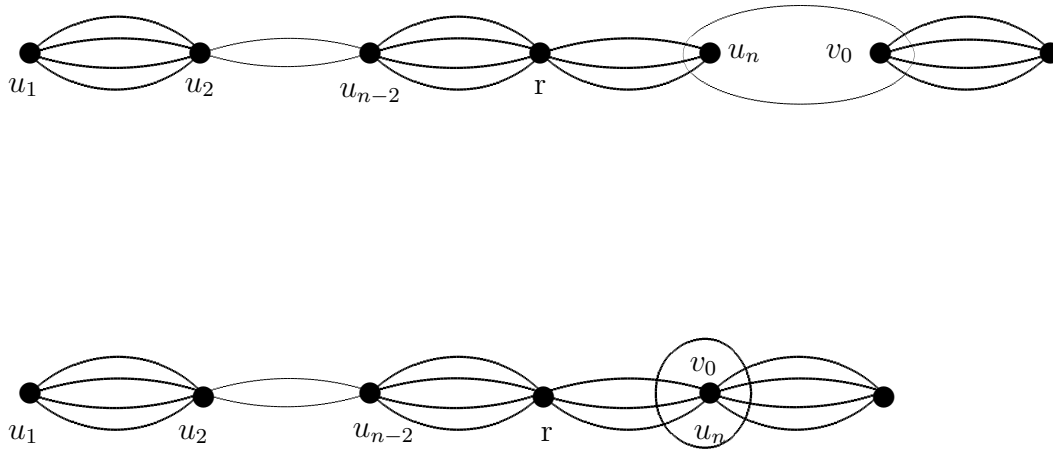


FIG. 4.5 – Exemple de concaténation de deux multichaînes

4.4 Caractérisations polyédrales

Dans cette partie, nous nous intéressons à la caractérisation complète du problème du sous graphe r -2-connexe dans la classe des graphes multi-cycles. Nous montrons que cette classe n'est pas parfaitement r -2-arête connexe. Ensuite, nous introduirons des inégalités valides parmi celles introduites par Baiou et Correa [5]. Nous donnons les conditions pour que celles-ci définissent des facettes dans cette classe de graphes. Par la suite, nous donnons la description complète du $r - 2ECSP(G)$ dans le multi-triangle. Nous terminons par une autre formulation du problème du sous graphe 2-arête connexe propre aux multi-cycle.

4.4.1 Le polytope $r-2ECSP(G)$ dans les graphes Multi-Cycles sans Cordes

Dans cette section nous nous intéressons à une certaine classe de graphes, celle des multi-cycles. La raison pour laquelle, nous avons choisi cette classe de graphe est que celle ci est une sous classe des graphes série-parallèles. Une autre raison est que nous connaissons la description complète du polytope $r-2ECSP(G)$ quand G est un cycle simple. Pour ce fait nous espérons retrouver les mêmes résultats.

Pour commencer, nous allons donner quelques définitions, et propriétés des multi-cycles.

Définition et propriétés des graphes multi-cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe, V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes.

Définition 4.4.1. [11] Une chaîne est une séquence d'arêtes telle que chaque arête ait une extrémité commune avec la suivante.

Un cycle est une chaîne qui contient au moins une arête, telle que toutes les arêtes de la séquence soient différentes et dont les extrémités coïncident.

Définition 4.4.2. [11] Un multi-graphe est un graphe non-orienté, pouvant admettre des boucles et plusieurs arêtes entre deux sommets.

Remarque 4.4.1. Soit $G = (V, E)$ un multi-graphe sans boucles. Un cycle dans un multi-graphe peut être de longueur 2.

Définition 4.4.3. [25] Une corde est une arête qui joint deux sommets d'un cycle mais qui n'appartient pas au cycle.

Définition 4.4.4. [25] Un cycle est dit sans corde si aucune des paires de sommets du cycle n'est relié par une arête.

Définition 4.4.5. Soit $G = (E, H)$ un graphe multi-cycle.

- Si entre 2 sommet u_i, u_{i+1} de G il existe une seule arête on dira que cette arête est une liaison simple.
- Si entre 2 sommets u_i, u_{i+1} de G il existe plus d'une arête on dira que la liaison entre u_i, u_{i+1} est multiple.

Définition 4.4.6. Un multi-cycle est un cycle sans corde pouvant admettre plusieurs arêtes entre deux sommets adjacents.

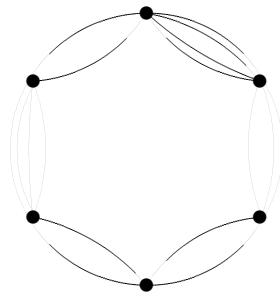


FIG. 4.6 – Un multi-cycle

Remarque 4.4.2. 1. Si G contient au plus une liaison simple alors G est 3-arête connexe.

2. Si G contient au plus une liaison simple alors G est 2-arête connexe. Dans ce cas $E_{2c} \neq \emptyset$, rappelons que $E_{2c} = \{e \in E, e \text{ appartient à une 2-coupe}\}$.

Remarque 4.4.3. Dans le cas des graphes multi-cycles sans cordes, la relation \mathcal{R} définie dans [5] induit une seule classe d'équivalence $E_{2c} = E_{2c}^1$.

Preuve. Supposons que $E_{2c} = E_{2c}^1 \cup E_{2c}^2$. D'après la définition de la relation \mathcal{R} dans [5], la suppression des arêtes de E_{2c}^1 décompose le graphe G en $|E_{2c}^1|$ composante 2-arête connexes (C_1, C_2, \dots, C_p) telle que $|E_{2c}^1| = p$.

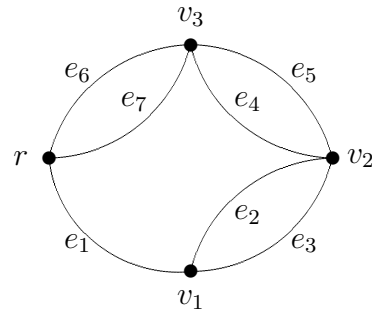
Si $E_{2c}^2 \neq \emptyset$ alors $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ telle que $E_{2c}^2 \subset C_i$.

Or C_i est une chaîne 2-arête connexe. Ce qui fait que C_i ne contient pas de liaison simple, sinon C_i ne serait pas 2-arête connexe. □

Question : Est ce que les inégalité (4.7)-(4.10) suffisent pour décrire complètement le polytope $r - 2ECSP(G)$ quand le graphe G est un multi-cycle ?

La réponse est malheureusement non ! Il suffit de voir cela sur l'exemple suivant. Soit $G = (V, E)$, $V = \{r, v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Voir la figure qui suit : Soit $y_r = y_{v_3} = x_7 = 1$, $y_{v_1} = y_{v_2} = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \frac{1}{2}$ soit $(r, v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ les coordonnées d'un point extrême du polytope. On remarque alors que $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ est un point extrême du polytope $r - 2ECSP(G)$. Pour montrer ceci il suffit de montrer qu'il est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_7 &= 2y_{v_3} \\ x_1 &= y_{v_1} \\ x_2 &= y_{v_1} \\ x_3 &= y_{v_1} \\ x_4 &= y_{v_1} \\ x_3 &= y_{v_2} \\ x_4 &= y_{v_2} \\ x_5 &= y_{v_2} \\ x_6 &= y_{v_2} \\ y_{v_3} &= y_r \\ y_r &= 1 \end{aligned}$$



- Exemple de multi-cycle où $P(G)$ n'est pas entier

P(G) dans les graphes multi-cycles

Dans cette section nous allons discuter du polytope $P(G)$ dans les graphes dits multi-cycles. Nous décrivons quelques propriétés structurelles des facettes de $P(G)$ quand G est un multi-cycle. Soit (x, y) le vecteur solution du problème précédent.

La question est de savoir si la solution du programme est entière. Rappelons que le graphe est un multi-cycle.

Dimension du polytope

D'après [5], la dimension du polytope associé au problème est donnée par la formule suivante :

$$\dim(r\text{-}2ECSP(G)) = |E \setminus E_{2c}| + |V \setminus V_{2c}| + l$$

l : le nombre de classes d'équivalences induites par \mathcal{R} .

Remarque 4.4.4. *Le polytope $(r\text{-}2ECSP(G))$ est de pleine dimension si et seulement si G possède au plus une seule liaison simple.*

Preuve. Nous rappelons que le graphe G est un multi-cycle sans cordes. D'après le théorème 2 de [5] le polytope $r\text{-}2ECSP(G)$ est de pleine dimension si et seulement si G est 3-arête connexe. On doit montrer que :

G est 3-arête connexe $\Rightarrow G$ possède au plus une seule liaison simple.

Supposons que G possède plus d'une liaison simple, soit deux. Alors il existe deux paires de sommets, chacune liée par une seule arête. Donc il est possible de composer le graphe en deux composantes 2-arête connexe, soient C_1, C_2 . De là, un sommet $v_1 \in C_1$ n'est relié à un sommet $v_2 \in C_2$ que par deux chemins arête disjoints. D'où, le graphe n'est pas 3-arête connexe.

G est 3-arête connexe $\Leftarrow G$ possède au plus une seule liaison simple.

- G possède une seule liaison simple. Ceci veut dire, qu'entre chaque paire de sommets successifs, il existe au moins deux arête, sauf pour une seule paire, soient (s_1, s_2) reliée par une seule arête. Soient v_i, v_j deux sommets dans V , on peut remarquer qu'il existe trois chemin de v_i à v_j : le chemin qui comprend l'arête s_1s_2 . un chemin qui ferme celui-ci (G est un cycle), il ne passe pas par l'arête s_1s_2 , donc y'a au moins un double chemin qui ne passe pas par l'arête s_1s_2 . En tout il y a au moins trois chemin arêtes disjoints de v_i à v_j

- Soit G ne possède aucune liaison simple. Dans ce cas le graphe est au moins 4-arête connexe.

□

Remarque 4.4.5. $\dim(r - 2ECSP(G)) = |E \setminus E_{2c}| + |V \setminus V_{2c}| + 1$

D'après le théorème 4 de [5] :

$$\dim(r - 2ECSP(G)) = |E \setminus E_{2c}| + |V/V_{2c}| + l$$

l : le nombre de classes d'équivalences induites par \mathcal{R} .

d'après la remarque 3, $l = 1$ donc :

$$\dim(r - 2ECSP(G)) = |E \setminus E_{2c}| + |V \setminus V_{2c}| + 1$$

Les facettes du polytope $\mathbf{P}(G)$

A partir du théorème 4 dans [5] cité par Baiou et Correa , on donne cette remarque.

Remarque 4.4.6. Une inégalité (S, W, v', e') , avec $\delta_S(W) \leq 1$ et G un multi-cycle sans corde, définit une facette pour le r -2ECSP(G) si les condition suivante sont établie :

1. G contient au plus une liaison simple.
2. $G(\bar{S} \cup \{v'\})$ est 2-arête connexe.
3. $|\bar{S}| = 1$

De la remarque 4.4.6 on peut conclure que l'inégalité suivante définit une facette pour le r -2ECSP(G) :

$$y(\bar{S}) \geq y_v \quad \forall W \subseteq S \subseteq V, |\delta_S(W)| \leq 1, v \in S \setminus W \quad (4.20)$$

Dans ce qui va suivre, nous allons donner la description complète du r -2ECSP(G) quand G est un multi-cycle défini sur trois sommets.

La description de r -2ECSP(G)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, r un sommet "racine" et $r \in S \subseteq V$. Considérons les inégalités suivantes :

$$x(\delta_S(W) \setminus \{e\}) + y(\bar{s}) \geq y(v) \quad S = V \setminus \{\bar{s}\}, \forall W \subseteq S, v \in S \setminus W, e \in \delta_S(W). \quad (4.21)$$

Remarque 4.4.7. Les inégalités (4.21) sont valides pour r -2ECSP(G).

Il n'est pas difficile de voir que les inégalités (4.21) présentent un cas particuliers des inégalités (4.14) définie par Baiou et Corréa [5]; il suffit de prendre $S = V \setminus \{\bar{s}\}$.
Soit l'inégalité :

$$y(r) \geq y(v) \quad \forall v \in V. \quad (4.22)$$

Proposition 4.4.1. L'inégalité (4.22) est valide pour r -2ECSP(G)

Preuve. De l'inégalité (4.8), nous avons : $\sum_{e \in \delta(r)} x(e) \leq |\delta(r)| y(r)$

d'où : $x(\delta(r)) \leq |\delta(r)| y(r)$

D'autre part : $x(\delta(r)) \geq 2y(v) \quad \forall v \in V$ (Inégalité (4.7)).

Nous aurons : $|\delta(r)| y(r) \geq 2y(v) \quad \forall v \in V$

Comme $y(v) \in \mathbb{N}$ nous avons : $\frac{|\delta(r)|}{|\delta(r)|} y(r) \geq \lceil \frac{2}{|\delta(r)|} \rceil y(v) \quad \forall v \in V$

d'où l'inégalité : $y(r) \geq y(v) \quad \forall v \in V$ est une inégalité de Chvatàl-Gomory donc valide pour le polytope $r - 2ECSP(G)$. □

$H(G) = conv\{(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|} | (x, y) \text{ satisfait les inégalités (4.7)- (4.10), (4.21) et (4.22)}\}$

Nous désignons par *multi-triangle*, un multi-cycle défini sur trois sommet.

Proposition 4.4.2. Si $G = (V, E)$ un multi-triangle, on a $H(G) = r$ -2ECSP(G)

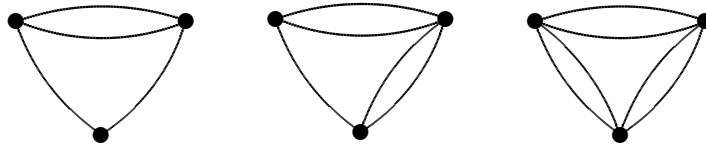


FIG. 4.7 – Multi-triangles

Avant de donner la preuve, nous avons besoin de quelques propriétés des points extrêmes de $H(G)$ que nous énonçons ci-après.

Lemme 4.4.1. [7] $(x, y) \in H(G)$ et $(\delta(W'), v')$ $(\delta(W), v)$ sont toutes les deux des coupes serrées pour (x, y) alors on a :

(i) Si $v \in \overline{W \cup W'}$, alors $(\delta(W \cap W'), v')$ et $(\delta(W \cap W'), v)$ sont toutes deux coupes serrées pour (x, y) .

(ii) Si $v \in W' \setminus W$ et $v' \in W \setminus W'$ alors, $(\delta(\overline{W' \setminus W}))$ sont toutes des coupes serrées pour (x, y) .

Un graphe G est dit contractible à un graphe H , si H est obtenu à partir de G par suppressions et/ou contractions d'arêtes. Une contraction d'une arête consiste à identifier les extrémité de l'arête et à supprimer celle-ci.

Lemme 4.4.2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|}$ solution de $P(G)$ tel que $x(e) > 0$ alors si $(\delta(W), v)$ est serré pour (x, y) alors $G(\overline{W})$ et $G(W)$ sont connexes.

Preuve.

$(\delta(W), v)$ est serré pour (x, y) alors $G(\overline{W})$ est connexe.

Cette assertion est triviale quand $\overline{W} = \{v\}$. Supposons que $|\overline{W}| \geq 2$ et que $\overline{W} = \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$ et $(\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous devons supposer que $v \in \overline{W}_1$. Comme G est connexe, alors $(W, \overline{W}_1) \neq \emptyset \neq (W, \overline{W}_2)$. D'après notre hypothèse $x(W, \overline{W}_1) > 0$. Comme $(\delta(W), v)$ est serrée pour (x, y) alors $x(\delta(W)) = x(W, \overline{W}_1) + x(W, \overline{W}_2) = 2y(v)$. Ceci implique que $x(\delta(W \cup \overline{W}_2)) = x(W, \overline{W}_1) < 2y_v$. D'où la coupe généralisée $\delta(W \cup \overline{W}_2), v$ est violée par (x, y) . Mais ceci contredit le fait que $(x, y) \in H(G)$.

$(\delta(W), v)$ est serré pour (x, y) alors $G(W)$ est connexe.

Ceci est évident lorsque $W = \{r\}$. Supposons maintenant que $|W| \geq 2$ et que $W = W_1 \cup W_2$ et $(W_1 \cap W_2) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous devons supposer que $r \in W_1$. Comme G est connexe, alors $(W_1, \overline{W}) \neq \emptyset \neq (W_2, \overline{W})$. D'après notre hypothèse $x(W_1, \overline{W}) > 0$. Comme $(\delta(W), v)$ est serrée pour (x, y) alors $x(\delta(W)) = x(W_1, \overline{W}) + x(W_2, \overline{W}) = 2y(v)$. Ceci implique que $x(\delta(W_1)) = x(W_1, \overline{W}) < 2y(v)$. D'où, la coupe généralisée $(\delta(W_1), v)$ est violée par (x, y) . Mais ceci contredit le fait que $(x, y) \in H(G)$. \square

Preuve de la proposition

Avant d'entamer la preuve de la proposition 4.4.2 nous définissons le problème du *sous graphe couvrant 2-arête connexe*. Soit $G = (V, E)$ un graphe, un sous graphe couvrant 2-arête connexe est le sous-graphe 2-arête connexe couvrant V . Notons par $TECSP(G)$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des sous graphes 2-arêtes connexe de G cou-

vrant V , et soit $P_{TEC}(G)$ le polytope donnée par les inégalités linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < x(e) < 1 & \quad \forall e \in E \\ x(\delta(W)) \geq 2 & \quad \forall W \subset V, W \neq \emptyset \end{aligned}$$

Dans [46] Mahjoub a donné le théorème suivant :

Théorème 4.4.1. [46] Soit G un graphe série-parallèle, alors $TECSP(G) = P_{TEC}(G)$

La preuve de la proposition 4.4.2 est par induction sur le nombre d'arêtes. Le théorème est vrai pour un triangle avec trois arêtes. On suppose qu'il est vrai pour tout multi-triangle avec m arêtes, supposons que G possède $m + 1$ arêtes. Donc $r - 2ECSP(G) \neq H(G)$, et soit (x, y) un point extrême fractionnaire de $H(G)$. Nous avons les assertions suivantes.

Assertion 4.4.2. $x(e) > 0$ et $y(v) > 0$ pour tout $e \in E$ et $v \in V$

Preuve. De l'inégalité (4.8), il suffit de montrer $x(e) > 0$ pour en déduire de même pour $y(v)$. Supposons qu'il existe $e_0 \in E$ tel que $x(e_0) = 0$. Soit $G' = (V, E')$, le graphe obtenu par la suppression de l'arête e_0 , soit $x' \in \mathbb{R}^{|E|-1}$. Il est clair que (x', y) appartient à $H(G')$, et encore, il est point extrême (fractionnaire) de $H(G')$.

Si e_0 est une arête simple, $G' = (V, E')$ est une multi-triangle. Or, sur les multi-chaînes le $r-2ECSP(G)$ est décrit par les inégalités (4.7)-(4.10), ce qui fait que (x', y) est entier d'où la contradiction.

Si e_0 n'est pas une arête simple, alors de sa suppression résulte un *multi-triangle* avec $|E| - 1$ arêtes, et par l'hypothèse d'induction $r-2ECSP(G') = H(G')$. Or (x', y) est fractionnaire d'où la contradiction. \square

Assertion 4.4.3. Si $(\delta(W), v)$ est serrée pour (x, y) avec $|\overline{W}| \geq 2$ alors $y(v) = 1$.

Preuve. Supposons, au contraire, que : $y(v) < 1$. Nous remarquons que $y(v) \geq y(v'), v' \in \overline{W}$. Soit

$$(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{|E|+|V|} \text{ telle que : } x^*(e) = 0 \text{ pour tout } e \in E \text{ et } y^*(v) = \begin{cases} y(v), & \text{si } v=r; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la suite nous montrons que toute contrainte serrée pour (x, y) est aussi serrée pour (x^*, y^*) , ce qui contredit l'extrémalité de (x, y)

Si $y(r) < 1$, considérons la solution $(0, 0)$, il est facile de voir que toute contrainte de $H(G)$ qui est serrée pour (x, y) est aussi serrée pour $(0, 0)$. Ce qui contredit l'extrémalité de (x, y)

Si $y(r) = 1$, considérons le vecteur associé à r -2ECSP(G) trivial. Nous avons aussi une solution qui vérifie à l'égalité toute contrainte serrée pour (x, y) . Se qui contredit aussi l'extrémalité de (x, y) . □

Assertion 4.4.4. *l'inégalité (4.21) est serrée pour (x, y) alors $y(v) = 1$*

Preuve. Soit (W, S, e, \bar{w}) la contrainte représentant (4.21) telle que $\bar{W} = \{r\}$, $\bar{S} = \{\bar{s}\}$. Supposons que $y(\bar{w}) < 1$ donc $y(\bar{s}) < 1$. Donc soit (x^*, y^*) une solution définie par $x^*(e) = 0$ pour tout $e \in E$, et $y^*(v) = \begin{cases} y(v), & \text{si } v = r, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

Toute contrainte serrée pour (x, y) est serrée pour (x^*, y^*) . □

Soit $T = \{v \in V \text{ tel que } : y(v) = 1\}$

Assertion 4.4.5. $T = V$

Preuve. La preuve du théorème découle des assertions 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4. □

D'après l'assertion 4.4.5 et les contrainte définissant le problème r -2ECSP, on remarque que le problème de r -2ECSP se confond au problème TECSP défini par Mahjoub[46]. Et d'après le théorème 4.4.1 dans le cas de graphes série parallèle les solutions du problème TECSP sont entières. Noter que le multi-triangle appartient à la classe des graphe série parallèle. Comme (x, y) est fractionnaire et $y = 1$ pour tout $v \in V$, nous avons x fractionnaire. D'où la contradiction. Ce qui achève la preuve de notre théorème. ◇

Une autre formulation du 2ECSP pour les multi-cycle

Soit $G = (V, E)$ un graphe multi-cycle, où $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $E = \cup_{i=1}^{n-1} [v_i, v_{i+1}] \cup [v_n, v_1]$. Dans ce qui suit, nous donnons une formulation propre au multi-cycles du problème r -2ECSP.

Posons $r = v_k$. Le problème r -2ECSP peut être formulé comme suit :

$$\text{minimiser } \sum_{e \in E} w_e x(e) + \sum_{v \in V} c_v y(v)$$

Sous les contraintes :

$$x([v_{k+i-1}, v_{k+i}]) + x([v_n, v_0]) \geq 2y(v_{k+i}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-k\} \quad (4.23)$$

$$x([v_{k-j}, v_{k-j-1}]) + x([v_n, v_0]) \geq 2y(v_{k-j-i}) \quad \forall j \in \{0, \dots, k-2\} \quad (4.24)$$

$$y(v_{k+i-1}) \geq y(v_{k+i}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-k\} \quad (4.25)$$

$$y(v_{k-j}) \geq y(v_{k-j-1}) \quad \forall j \in \{0, \dots, k-2\} \quad (4.26)$$

$$x(e) \leq y(v_{k+i}) \quad \forall e \in [v_{k+i-1}, v_{k+i}] \quad (4.27)$$

$$x(e) \leq y(k-j-1) \quad \forall e \in [v_{k-j}, v_{k-j-1}] \quad (4.28)$$

$$x(e), y(v) \in \{0, 1\} \quad \text{pour tout } e \in E \text{ } v \in V. \quad (4.29)$$

Cette formulation restreint le nombre de contraintes d'une manière assez considérable. Mais ce qui nous intéresse, ce n'est pas le nombre de contraintes mais plutôt les contraintes qui définissent des facettes. Ou encore la relaxation qui donne des solutions entières, peu importe le nombre de contraintes.

La question qui se pose est : est-ce que la solution du problème linéaire sans les contraintes d'intégrité est entière? Ou d'une autre manière, Est-ce que les contraintes (4.23)- (4.28) suffisent pour décrire le polyèdre r -2ECSP(G).

En effet, comme il a été démontré par Grötschel, Lovász et Schrijver (1981) [35], l'optimisation sur un polyèdre donné ne dépend pas du nombre de contraintes du système décrivant le polyèdre, mais plutôt du problème dit de séparation lié à ce système. Ce problème consiste, étant donné une solution x , à déterminer si x vérifie le système, et sinon à trouver une contrainte du système qui soit violée par x . Grötschel, Lovász et Schrijver ont montré qu'il existe un algorithme polynomial pour optimiser une fonction linéaire sur un polyèdre si et seulement s'il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème de séparation associé au système définissant le polyèdre.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème du sous graphe 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés noté r -2ECSP dans le cadre des approches polyédrales. Nous sommes intéressés à la caractérisation polyédrale de l'enveloppe convexe noté r -2ECSP(G) des solutions de ce problème.

Dans un premier temps nous avons étudié les classes de graphes où le polyèdre r -2ECSP(G) associé au problème r -2ECSP est défini par les inégalités triviales et les

inégalités de coupe généralisés. Nous avons appelé cette classe de graphes, la classe des graphes parfaitement r -2-arête connexe. Nous montrons que les cactus appartiennent à cette classe de graphes, ainsi que les multi-chaînes.

Par la suite nous nous sommes intéressés, à la caractérisation du problème r -2ECSP(G) dans la classe des graphes multi-cycles. Nous avons donné la description complète de r -2ECSP(G) quand le graphe est un multi-triangle.

Conclusion

Tout au long de cette présentation, notre intérêt a porté sur l'approche polyédrale de quelques problèmes de sous graphes. Nous avons considéré le problème des sous-graphes 2-arête connexes à sommets et arêtes pondérés noté r -2ECSP dont la formulation en programmation linéaire en nombres entiers a été introduite par Baiou [4]. Nous nous sommes intéressés à la caractérisation linéaire complète du polytope associé à ce problème. Nous avons montré que la relaxation linéaire suffirait pour décrire l'enveloppe convexe des solutions de r -2ECSP noté $(r$ -2ECSP(G)) dans certaines classes de graphes telles que celle des cactus et des multi-chaînes. Nous avons introduit la notion des graphes parfaitement r -2-arêtes connexes et donné quelques opérations qui préservent la propriété parfaitement r -2-arêtes connexe.

Par la suite, nous avons étudié le problème sur la classe des graphes multi-cycles. Nous avons montré que, dans cette classe de graphes, la relaxation linéaire ne suffit pas pour décrire le polytope "enveloppe convexe des solutions de r -2ECSP" noté r -2ECSP(G). Alors, nous avons exploité les inégalités valides introduites par Baiou et Corréa dans [5], pour introduire celles définissant des facettes pour le polytope r -2ECSP(G) dans cette classe de graphes. Des inégalités que nous avons utilisées pour donner la description complète du polytope r -2ECSP(G) dans certains graphes appartenant à la classe des multi-cycles. En dernier, nous avons donné une autre formulation du problème r -2ECSP propre aux graphes multi-cycles.

Plusieurs questions restent cependant sans réponses et méritent d'être étudiées.

Dans la première partie du chapitre 4 nous avons introduit la classe des graphes parfaitement r -2-arête connexes. Le problème du sous graphe r -2ECSP est polynomial dans cette classe de graphes. Une question importante est de caractériser la classe des graphes parfaitement r -2-arête connexes.

Dans la deuxième partie nous avons étudié le problème r -2ECSP dans les multi-cycle. Il serait intéressant d'obtenir la description complète du polytope r -2ECSP(G) dans cette classe de graphes.

Il serait également intéressant de montrer que la caractérisation complète du polytope r -2ECSP(G) quand G est un graphe série parallèle, est donnée par les inégalités triviales, les inégalités de coupes généralisés et les inégalités introduites par Baiou et Correa. Une telle caractérisation nous permettrait de résoudre polynomialement le problème du sous-graphe 2-arête connexe à sommets et arêtes pondérés pour cette classe de graphe. Comme il serait important d'étudier le problème de séparation des inégalités introduites par Baiou et Correa, quand le graphe est quelconque.

Bibliographie

- [1]
- [2] K. Aardal and S. V. Hoesel. Polyhedral techniques in combinatorial optimization I : Theory. Technical report, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, 2001.
- [3] K. Aardal and S. V. Hoesel. Polyhedral techniques in combinatorial optimization II : Applications and computations. Technical report, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, 2001.
- [4] M. Baiou. *Le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe : Approche polyédrale*. PhD thesis, Université Rennes 1, Rennes, 1996.
- [5] M. Baiou and J. R. Correa. The node-edge weighted 2-edge connected subgraph problem : linear relaxation, facets and separation. *Discrete Optimisation*, 10(3) :123–135, 2006.
- [6] M. Baiou and A. R. Mahjoub. Steiner 2-edge connected subgraph polytopes on series-parallel graphs. *Discrete Maths*, 10 :505–514, 1997.
- [7] M. Baiou and A. R. Mahjoub. The steiner traveling salesman polytope and related polyhedra. *SIAM Journal of Optimization*, 13 :498–507, 2002.
- [8] F. Barahona and M. Grotschel. The traveling salesman problem for graphs not contractible to $k_5 - e$. Technical report, Augsburg University, Mathematisches Institut, Memminger strabe 6, D8900 Augsburg, 1985.
- [9] R. Bellman. Some applications of the theory of dynamic programming : A review. *Journal of the Operational Research Society of America*, 2(3) :275–288, 1954.
- [10] F. Bendali, I. Diarassouba, M. Didi Biha, A.R. Mahjoub, and J. Mailfert. Un algorithme de coupe et branchement pour le problème de sous graphes k-arête connexes. Technical report, LIMOS, université de Clermont II, France, 2006.
- [11] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1970.

- [12] D. Bienstock, E. Brickell, and C. L. Monma. On the structure of minimum-weight k -connected spanning networks. *Mathematical programming*, 3 :320–329, 1990.
- [13] D. Bienstock, E. F. Brickell, and C. L. Monma. On the structure of minimum weight k -connected networks. *SIAM Journal on Discrete mathematics*, 3 :320–329, 1990.
- [14] M. Didi Biha. *Graphe k -arête connexes et polyèdres*. PhD thesis, Université Bretagne Occidentale, Bretagne Occidentale, 1998.
- [15] P. Bonami. *Étude et mise en oeuvre d’approches polyédriques pour la résolution de programmes en nombres entiers ou mixtes généraux*. PhD thesis, Université Paris 6, Paris 6, 2003.
- [16] S. Chopra. The k -edge connected spanning subgraph polyhedron. *SIAM Journal in Discret Mathematic*, 7 :245–259, 1994.
- [17] S. Chopra and M.R. Rao. The Steiner tree problem i :formulation, composition and extension of facets. *Mathematical Programming*, 64 :209–229, 1994.
- [18] S. Chopra and M.R. Rao. The Steiner tree problem ii :properties and classes of facets. *Mathematical Programming*, 64 :231–246, 1994.
- [19] T. Christof, M. Junger, and G. Reinelt. A complete description of the traveling salesman polytope on 8 nodes. *Operations Research Letters*, 10 :376–384, 1991.
- [20] V. Chvátal. Edmonds polytopes and hierarchy of combinatorial problems. *Discret Mathematics*, 4 :305–337, 1973.
- [21] S. A. Cook. The complexity of theoreme-proving procedures. *Proceedings of third annual ACM symposium on theory of computing*, 17, 1971.
- [22] G. Dahl. An introduction to convexity, polyhedral theory and combinatorial optimization. Technical report, University of Oslo, Institute of Informatics, P.O.Box 1080, Blindern, 0316 Oslo, Norway, 1997.
- [23] G. B. Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, 1963.
- [24] M. Didi-Biha and A. R. Mahjoub. k -edge connected polyhedra on series-parallel graphs. *Operation Research Letters*, 19 :71–78, 1996.
- [25] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer Verlag, New York, electronic edition, 2000.
- [26] J. Edmonds. Maximum matching and polyhedron with 0-1 vertices. *Journal of research of the national Bureau of Standards*, 69(B) :125–130, 1965.
- [27] K. P. Eswaren and R. E. Tarjan. Augmentation problems. *SIAM Journal on Computing*, 5 :653–665, 1976.

- [28] J. Fonlupt and A. R. Mahjoub. Critical extreme points of the 2-edge connected spanning subgraph polytope. *Mathematical programming*, 105 :289–310, 2006.
- [29] M. Garey and D. Johnson. *Computers and intractability : a Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, 1979.
- [30] M. X. Goemans. The steiner tree polytope and related polyhedra. *Mathematical programming*, 63 :157–182, 1994.
- [31] M. X. Goemans and D. J. Bertsimas. Survivable network, linear programming and the parcimonious property. *Mathematical Programming*, 60 :145–166, 1993.
- [32] M. X. Goemans and Y. S. Myung. A catalog of steiner tree formulations. *Networks*, 23 :19–28, 1993.
- [33] R. E. Gomory. Outline of an algorithm for integer solution to linear programs. *Bulletin of American Mathematical Society*, 64 :275–278, 1958.
- [34] R. E. Gomory. *Solving Linear Programming Problems in Integers*, volume 10, pages 211–216. American Mathamtical Society, 1960.
- [35] M. Grotschel, L. Lovàsz, and A. Shrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1(2) :169–197, 1981.
- [36] M. Grotschel and C. Monma. Integer polyhedra arising from certain network design problems with connectivity constraints. *SIAM Journal on Discrete mathematics*, 3(4) :502–523, 1990.
- [37] M. Grotschel, C. Monma, and M. Stoer. *Polyhedral approaches to network survivability*, volume 5 of *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 121–141. DIMACS, 1991.
- [38] M. Grotschel, C. L. Monma, and M. Stoer. Facets for polyhedra arising in the design of communication networks with low-connectivity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 2(3) :474–504, 1992.
- [39] M. Grotschel and M. W. Padberg. *Polyhedral theory*, pages 251–305. Discrete Mathematics. John Wiley and sons, 1985.
- [40] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, and C. H. Papadimitriou. *Introduction to automata theory, Languages and computation*. Addison-Wesley, 1979.
- [41] M. Junger and W.R. Pulleyblank. New primal and dual matching heuristics. Technical report, Universitat zu Koln, Institut fur Informatik, 1991.

- [42] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceeding of the American Mathematical Society*, 16 :48–50, 1956.
- [43] E. L. Lawler. *Combinatorial Optimisation : Network and Matroids*. Holt, Reinhart and Winston, New York, 1988.
- [44] J. D. Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney, and C. Karel. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operations Research*, 11 :972–989, 1963.
- [45] L. Lovasz. Graph theory and integer programming. *Discrete Optimisation*, 1(4) :146–158, 1979.
- [46] A. R. Mahjoub. Two connected spanning subgraphs and polyhedra. *Mathematical programming*, 64 :199–208, 1994.
- [47] A. R. Mahjoub. On perfectly two connected graphs. *Discret Mathematics*, 170 :153–172, 1997.
- [48] J. F. Maurras. Sous les facettes des polyèdres. *Investigacion Operativa*, 7(3) :29–68, 1999.
- [49] J. F. Maurras. *Programmation linéaire, Complexité "Séparation et optimisation"*. Springer, 2002.
- [50] C. L. Monma, B. S. Munson, and W. R. Pulleyblank. Minimum-weight two-connected spanning networks. *Mathematical programming*, 46 :153–171, 1990.
- [51] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey. *Integer and combinatorial Optimisation*. John Wiley and sons, New York, wiley interscience in discrete mathematics and optimization edition, 1988.
- [52] M. Padberg and G. Rinaldi. A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, 33 :60–100, 1991.
- [53] M. W. Padberg and M. R. Rao. The russian method for linear inequalities iii : Bounded integer programming. Technical report, New York University, New York, 1980.
- [54] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley Publishing company, 1994.
- [55] V. Paschos. *Optimisation Combinatoire I : Concepts fondamentaux*, chapter Approche polyédrale, pages 263–329. Informatique et Système d'Information. Hermes-Lavoisier, 2005.
- [56] E. Reinhardt and H. Le Verge. A complete and irredundant description of the asymmetric traveling salesman polytope on 6 nodes. Technical Report 1791, Université de Rennes 1, INRIA, 1992.

- [57] M. Sakarovitch. *Optimisation combinatoire*. HERMANN Enseignement des Sciences, Paris, 1984.
- [58] A. Schrijver. *Theory of linear Integer programming*. John Wiley and sons, New York, wiley interscience in discrete mathematics and optimization edition, 1986.
- [59] M. Stoer. Design of survivable networks. *Lecture Notes in Mathematics*, 31, 1992.
- [60] J. W. Suurballe and R. E. Tarjan. A quick methods for finding a shortest pairs of disjoint paths. *Networks*, 14 :325–336, 1984.
- [61] J.A. Wald and C.J. Colbourn. Steiner trees in outerplanar graphs. *Congressus Numeratum*, 36 :15–22, 1982.
- [62] P. Winter. Steiner problem in networks : A survey. *Networks*, 17 :129–167, 1987.