

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTE DE GENIE CIVIL



**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En GENIE CIVIL

Spécialité: Géotechnique

Par

**KACEM Khaled**

***SUJET***

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT  
DES PIEUX SOUMIS A DES CHARGES  
HORIZONTALES ET DYNAMIQUES**

Soutenu publiquement, le 04 / 03/ 2010 devant le jury composé de:

M. BENOUAR Djillali	Professeur, USTHB	Président
M. KAOUA Farid	Maître de conférence/A, USTHB	Directeur de mémoire
M. BAHAR Ramdane	Professeur, UMMTO	Examineur
M. NECHNECH Ammar	Maître de conférence/A, USTHB	Examineur
M. AKCHICHE Mustapha	Maître de conférence/A, USTHB	Examineur

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens tout d'abord à remercier le bon dieu de m'avoir mené jusque là, de m'avoir donné la force et le courage pour pousser mes études jusqu'au magister.

Je remercie mon directeur de thèse Monsieur KAOUA Farid maître de conférence à l'USTHB et Doyen de la faculté de génie civile pour sa disponibilité, sa générosité, sa gentillesse, et d'avoir facilité mon travail malgré ses multiples obligations.

Je tiens à remercier Monsieur BENOUAR Djillali, Professeur à l'USTHB pour l'honneur qu'il fait en acceptant d'être le président de jury, qu'il trouve ici l'expression de mon plus profond respect.

Je remercie mes honorables membres de jury Messieurs BAHAR Ramdane Professeur à l'UMMTO, NECHNECH Ammar et AKCHICHE Mustapha Maîtres de conférence à l'USTHB pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être examinateurs de thèse, qu'ils trouvent ici l'expression de ma plus grande considération.

.Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



## Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à :*

*A ma mère décédée, ma réussite te doit beaucoup*

*A mon père*

*A mes enfants*

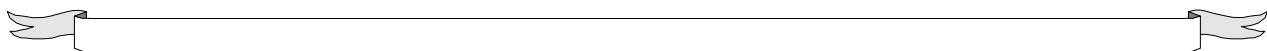
*A ma femme*

*A mes frères*

*A mes sœurs*

*A mes neveux*

*A tous mes amis*



## ملخص

بصفة عامة، فإن المحك هو المطلوب إما عن طريق الجهد الحيوي كما هو الحال بالنسبة لتأثير الموجات على المنصات البحرية وأرصفة الميناء، سواء عن طريق التهجير التي تفرضها التربة في حالة الحركة الزلزالية

الأدب غنية مع مجموعة كبيرة من البحوث والمنشورات حول هذا الموضوع ، وبالتالي الحاجة إلى توليف لتوليد بسيطة وعملية ، على أساس المعايير التي تحددها بسهولة اختبارات روتينية ويسمح المهندس لحجم أساسا يمكن أن تصمد تحميل الديناميكي.

---

## Abstract

In general, the pile is solicited or by a dynamic effort as it is the case of the effect of the heave in sea on flat forms and quays of harbor, or by a displacement imposed by the soil in the case of a seismic movement

Literature is rich in an important mass of researches and publications on subject, where from necessity to do a job of synthesis to clear a simple, practical method based on easy parameters to be determined by common tries and which allows to the engineer to size a foundation that can resist to dynamic solicitations.

---

## Résumé

En général, le pieu est sollicité soit par un effort dynamique comme c'est le cas de l'effet de la houle en mer sur les plates formes et les quais de port, soit par un déplacement imposé par le sol dans le cas d'un mouvement sismique.

La littérature est riche d'une masse importante des recherches et publications sur le sujet, d'où la nécessité de faire un travail de synthèse pour dégager une méthode simple, pratique basée sur des paramètres faciles à déterminer par des essais courants et qui permet à l'ingénieur de dimensionner une fondation pouvant résister à des sollicitations dynamiques.

## TABLE DES ILLUSTRATIONS

Fig. I.1 : Fondations profondes et superficielles.....	02
Fig. I.2 : Type de Fondations en fonction de l'ancrage D .....	03
Fig. I.3 : Pieu Métal battu .....	04
Fig. I.4 : Pieu battu pilonné .....	05
Fig. I.5 : Pieu battu moulé .....	05
Fig. I.6 : Pieu vissé moulé .....	06
Fig. I.7 : Pieu foré simple .....	07
Fig. I.8 : Pieu foré à la boue et barrette .....	07
Fig. I.9 : Pieu foré tubé .....	08
Fig. I.10 : Pieu à la tarière creuse .....	08
Fig. I.11 : Micro Pieux .....	09
Fig. I.12 : Modes de fonctionnement des pieux .....	11
Fig. I.13 : Pieu sollicité horizontalement .....	13
Fig. I.14 : Modèle de calcul .....	14
Fig. II.1 : Exemples de charges statiques et dynamiques .....	16
Fig. II.2 : Distinction fondamentale entre une charge statique et une charge dynamique.....	16
(a) : Chargement statique ; (b) : chargement dynamique	
Fig. II.3 : Exemples de chargements dynamiques : (a) harmonique simple ; (b) périodique ; (c) impulsif ; (d) de longue durée .....	17
Fig . II.4 : différent type de failles	
(a) : Faille latérale.....	19
(b) : Faille Normale .....	20
(c) : Faille Inverse .....	20
Fig. II.5 : Différents types d'ondes	
(a) Ondes P .....	21
(b) : Ondes S .....	21
(c) : Ondes Rayleigh .....	21
(d) : Ondes de love .....	21
Fig. II.6 : Enregistrements d'accélération .....	26
Fig. II.7 : Temps de propagation des ondes (P et S) par rapport à la distance de l'épicentre .....	22

Fig. II.8 : Déformations du sol près de la surface causées par les ondes sismiques .....	24
Fig. III.1 : Sol homogène sur substratum rocheux .....	29
Fig. III.2 : Modèle de calcul .....	31
Fig. III.3 : Déformée du pieu, ligne de charge et courbe des moments dans le cas d'un seisme.....	31
Fig. III.4 : Déformée d'un pieu parfaitement encasté dans le substratum rocheux et d'un pieu articulé en pied .....	32
Fig. III.5 : Modèle de calcul .....	32
Fig. III.6 : Cas d'un pieu ne descendant pas jusqu'au sol rocheux (pieu flottant) .....	34
Fig. III.7 : Sol constitué de plusieurs couches homogènes .....	35
Fig. III.8 : Pieu sollicité par un effort horizontal : déformée, courbes des moments, courbe des efforts tranchant .....	38
Fig. III.9 Schéma de calcul du système dynamique .....	40
Fig. III.10 Limites d'intégration de l'énergie cinétique du système .....	44
Fig. IV.1 : Pieu à pointe encastée soumis à une charge horizontal .....	56
Fig. IV.2 : Efforts développés par un pieu sous l'effet de son chargement .....	56
Fig. IV.3 : Pieu à pointe articulée soumis à une charge horizontal .....	79
Fig. IV.4 : Pieu à tête et pointe encastée soumis à une charge horizontal .....	82
Fig. IV.5 : Pieu à tête encastée et pointe articulée soumis à une charge horizontal.....	75

## LISTE DES NOTATIONS ET ABREVIATIONS

SPT	: Standard Pénétration Test
C	: Le coefficient de proportionnalité
Q	: La pression en kg / cm <sup>2</sup> (bars)
y	: Le déplacement en tête du pieu
E	: Module d'élasticité du matériau appelé aussi module d'Young
b	: Le diamètre du pieu
I	: Inertie de la section
$\alpha, l_0$	: Longueur de transfert
M	: Le moment de flexion
N	: Effort tranchant
T	: La constante de Lamé
$\nu$	: Coefficient de poisson
$\rho$	: Densité du sol ou de la roche
G	: Module de cisaillement
V	: Vitesse de l'onde de cisaillement
$V_P$	: Vitesses primaires
$V_S$	: Vitesses secondaires
$\omega$	: Pulsation appelée aussi Fréquence fondamentale de vibration
X	: La déformée
d	: Déplacement
a	: Accélération en champ libre
$\delta$	: Déplacement de la tête du pieu
K	: Coefficient de réaction latéral du sol
P	: Réaction du sol
U	: Déplacement du sol
D	: Facteur d'amortissement
$\lambda$	: Coefficient de flexibilité des pieux
$E_s$	: Module de réaction du sol
P (z,t)	: Les charges du sol ou les pressions

- $H_n(t)$  : Force harmonique et horizontale
- $Y(z,t)$  : Coordonnées géométriques
- $g_n(z)$  : Mode propre associée à la pulsation  $\omega_n$
- $M_n$  : Masse généralisée
- $K_p$  : Raideur du pieu
- $M_p$  : Masse du pieu
- $\bar{\omega}$  : Pulsation de la force harmonique
- $F_n(t)$  : Coordonnées principales
- $\beta_n = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}$  : Constante

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

## Chapitre 01

### Généralités sur les Fondations profondes

1. Introduction.....	2
2. Définitions.....	2
3. Définition d'un pieu.....	3
4. Classification des pieux.....	3
4.1 Pieu refoulant le sol à la mise en place.....	3
4.2 Pieu ne refoulant pas par le sol à la mise en place.....	6
4.3 Pieux particuliers.....	9
5. Domaine d'utilisation des pieux.....	9
5.1 Pieu battu.....	9
5.2 Pieux forés moulés.....	10
6. Mode de fonctionnement des pieux.....	10
6.1 Pieu colonne (effort de pointe).....	10
6.2 Pieu colonne (effort de pointe et frottement latéral).....	10
6.3 Pieu flottant (par frottement latéral seul).....	10
7. Principes de calculs des pieux.....	11
8. Contrôle d'une fondation profonde.....	11

## Chapitre 02

### Les différents Chargements des pieux

1. Chargement dynamique du à la structure.....	12
1.1 Raison du calcul dynamique.....	12
1.2 Types de chargements.....	13
2. Chargement dû au séisme.....	14
2.1 Introduction.....	14
2.2 Origine des séismes.....	14
2.3 Théorie des plaques tectoniques.....	15
2.4 Mécanismes de ruptures des failles terrestres.....	15
2.5 Terminologie et définitions des ondes sismiques.....	16
2.6 Amplitudes des ondes.....	18
2.7 Description des paramètres sismiques.....	19
3. Pieux sollicités horizontalement « statique ».....	20
3.1 Généralités.....	20
3.2 Méthode de calcul.....	20
3.3 Calcul des moments.....	21
3.4 Calcul des déplacements.....	22
4. Effet sismique sur les pieux.....	23

4.1 Introduction.....	23
4.2 Le comportement du pieu durant le séisme .....	23
4.3 Analyse de l'interaction sol – pieu – structure.....	24
4.4 Résistance du pieu .....	25
4.5 Résistance latérale .....	25
4.6 Conclusion .....	25

## **Chapitre 03**

### **Les Méthodes de Calcul des Pieux Sous Charges Dynamiques et Sismiques**

1. Introduction.....	26
2. Méthode de SOULOUMIAC .....	26
2.1 Les arguments de la méthode.....	27
2.2 Principe de la méthode.....	27
2.3 Les différentes étapes.....	27
2.3.1 Profil de sol homogène sur substratum rocheux.....	28
2.3.2 Profil de sol constitué de plusieurs couches homogènes .....	35
3. Méthode de W.CICHY.....	39
3.1. Sollicitations cycliques : .....	39
3.2. Sollicitations dynamiques et harmoniques : .....	39
3.2.1 Sollicitations en termes de forces : .....	39
3.2.2 Sollicitations en termes de déplacement.....	39
3.3. Formulations de la méthode.....	40
3.3.1 Discussion du schéma de calcul .....	40
3.3.2 Discussion de l'équation du mouvement du système constitué par une fondation sur pieux et un sol.....	41
3.4. Matrice d'inertie du système « masse équivalente du sol ».....	44
3.4.1 Hypothèses du modèle de calcul.....	44
3.5. Matrice de rigidité du système.....	47
3.5.1 Coefficient de rigidité latéral du sol .....	47
3.5.2 Méthode de calcul du coefficient de réaction latérale du sol.....	48
3.6. Matrice d'amortissement du système.....	50
3.6.1 L'amortissement géométrique (radial) du sol.....	50
3.6.2 Comparaison des résultats du calcul avec les résultats expérimentaux .....	53

## **Chapitre 04**

### **Comportement dynamique d'un pieu isolé sous un chargement horizontal**

1. Introduction .....	55
2. Mise en équation générale .....	55
2.1 Pieu à pointe encastrée.....	56
2.1.1 Ecriture de l'équation de la déformée du pieu : .....	56
3. Etude du système en vibration libre .....	58
3.1 Conditions aux limites .....	58
3.2 Orthogonalité des modes de vibrations.....	61

3.3 Etude du système forcé .....	61
3.3.1 Méthode de superposition des modes .....	61
3.3.2 Principe de HAMILTON .....	66
4. Détermination des réponses dynamiques .....	73
4.1 Détermination de la réponse en déplacement : .....	73
4.2 Détermination des rotations dynamiques : .....	73
4.3 Détermination des moments dynamiques : .....	73
4.4 Détermination des efforts tranchants dynamiques : .....	74
4.5 Détermination des pressions dynamiques : .....	74
4.6. Détermination de la réponse dynamique dans le cas d'un chargement échelon : .....	74
5. Détermination de la réponse sismique.....	75
6. Calcul statique : .....	78
7. Pieu à pointe articulée : .....	78
7.1 Conditions aux limites : .....	79
8. Pieu à tête encastrée : .....	81
8.1 Pointe encastrée : .....	81
8.2 Conditions aux limites : .....	82
8.3 Calcul de la masse généralisée : .....	83
9. Pointe articulée : .....	84
9.1 Conditions aux limites : .....	84
9.2 Calcul de la masse généralisée : .....	85
Conclusion et perspectives : .....	88

## INTRODUCTION GENERALE

Les fondations profondes sur pieux, très largement utilisées dans la construction des ouvrages, connaissent un développement croissant. Les progrès réalisés dans les méthodes de dimensionnement, les innovations technologiques dans la réalisation des pieux, la qualité de plus en plus médiocre des terrains laissés aux constructeurs et les dimensions importantes des ouvrages sont à l'origine de ce développement. Les approches théoriques sont, à l'heure actuelle, insuffisantes pour tenir compte de tous les paramètres d'interaction sol-pieu. Par exemple, les méthodes existantes ne prennent pas toutes en compte le cisaillement à l'interface des couches du sol.

En état de cause, les problèmes posés par le comportement des pieux, sous les différentes natures de charges sont complexes, et il n'est pas facile de définir une méthode simple et précise de dimensionnement d'une fondation sur pieux.

En général, le pieu est sollicité soit par un effort dynamique comme c'est le cas de l'effet de la houle en mer sur les plates formes et les quais de port, soit par un déplacement imposé par le sol dans le cas d'un mouvement sismique.

Le phénomène est une interaction sol / pieu dépendant à la fois des caractéristiques de fondation et celles du sol. L'étude n'est pas facile, du fait de la difficulté de la mise au point d'un modèle de comportement dynamique du sol, décrivant correctement la réalité du phénomène.

Mon travail présente quelques méthodes choisies après une étude bibliographique, concernant la stabilité des pieux soumis à des forces dynamiques et sismiques.

Le mémoire est subdivisé en quatre (04) chapitres :

Le premier chapitre a pour but de présenter les différents types des fondations profondes et la classification des pieux ;

Le deuxième chapitre consiste à présenter les différents chargements des pieux ;

Le troisième chapitre présente les méthodes de calcul des pieux en zone sismique « Méthode de SOULOUMIAC » et la Méthode de W. CICHY ;

Le troisième chapitre présente la méthode de calcul des pieux sous un chargement dynamique et sismique.

Le quatrième chapitre c'est la méthode proposée qui consiste à mettre en œuvre une approche simplifiée et rapide, basée sur des paramètres faciles à déterminer par des essais courants, et qui permet à l'ingénieur de dimensionner une fondation pouvant résister à des sollicitations dynamiques, sismiques et statiques.

Ce modeste travail est terminé par une conclusion générale résumant les trois méthodes mises à la disposition de l'ingénieur qui permettent de déterminer la réponse dynamique et statique, dans des différents cas de chargement soit un séisme, soit un effort dynamique et horizontal, et ce dans des différentes nature de sol.

## Chapitre 01

### Généralités sur les Fondations profondes

#### 1. Introduction

Les fondations profondes sont en général plus coûteuses que les fondations superficielles, mais elles sont très utilisées dans les domaines de construction telle que le bâtiment, les ouvrages hydrauliques, les ouvrages d'art et les travaux maritimes. Parmi les raisons qui poussent à utiliser ce type de fondation, on note :

- La présence des couches superficielles de caractéristiques médiocres
- Le risque d'interférence des contraintes à cause de la proximité d'un ouvrage ancien
- L'instabilité des terrains superficiels (affouillement, glissement)
- Le Bâtiment chargé de façon irrégulière

#### 2. Définitions

Les fondations profondes permettent de rapporter les chargements dus à l'ouvrage qu'elles supportent sur des couches situées depuis la surface jusqu'à une profondeur variant de quelques mètres à plusieurs dizaines de mètres, lorsque le sol en surface n'a pas une résistance suffisante pour supporter ces charges par l'intermédiaire de fondations superficielles.

Pour le calcul, les deux types de fondations se différencient essentiellement par la prise en compte d'un frottement sur les parois latérales de la fondation.

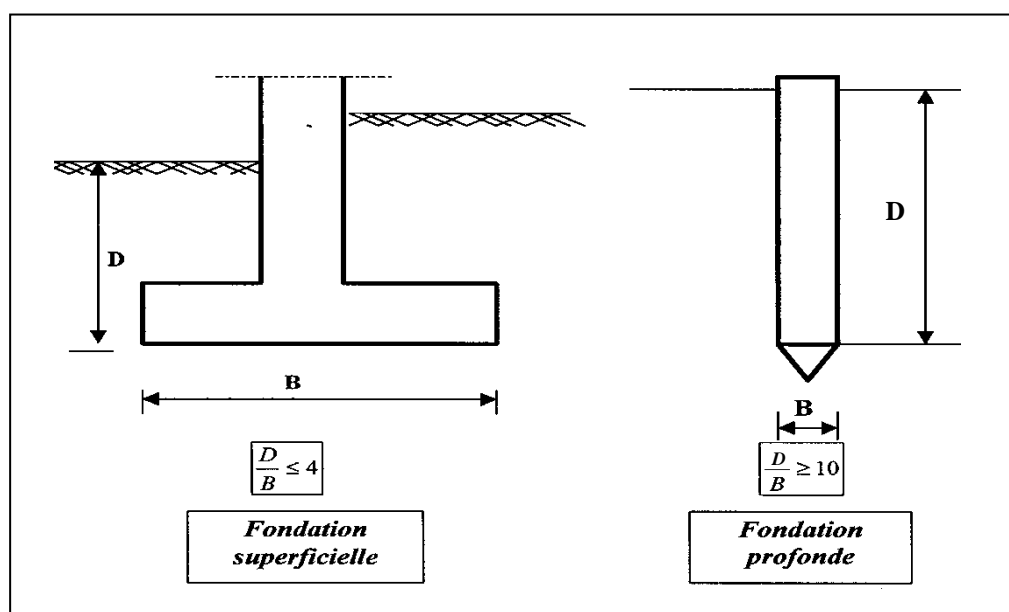


Fig. I.1: Fondations profondes et superficielles.

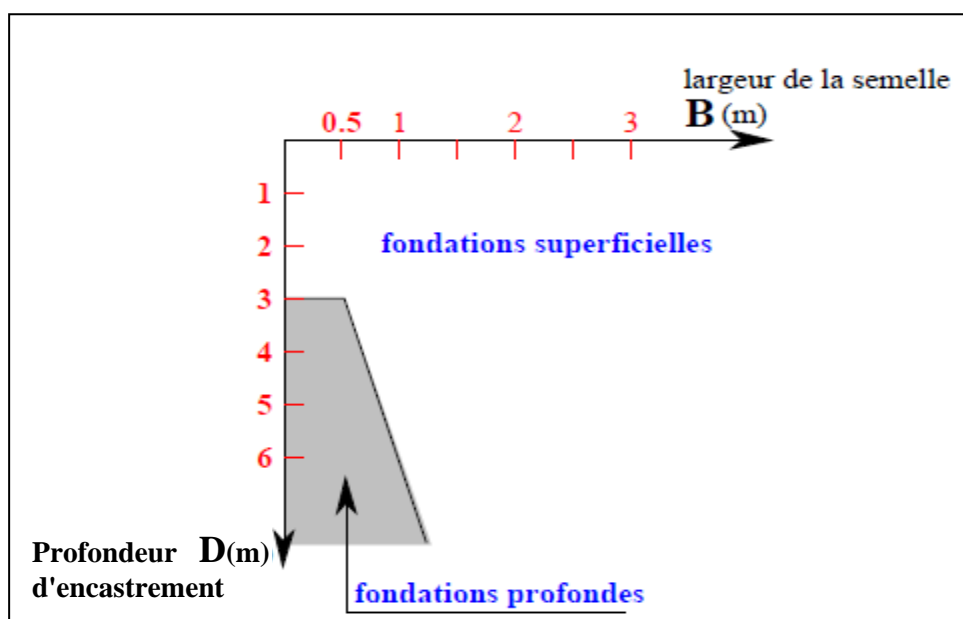


Fig. I.2 : Type de Fondations en fonction de l'ancrage D

On appelle aussi fondation profonde, une fondation descendue à une profondeur supérieure à sa profondeur critique, celle-ci étant définie, dans le cas d'un sol homogène, comme étant le niveau au-dessous duquel, la résistance sous la base n'augmente plus avec la profondeur.

Les fondations profondes, ayant leur base située au-dessous de cette profondeur critique : ce sont les pieux, les puits, et les barrettes (parois moulées porteuses). Cette profondeur critique varie en fonction du type de chargement du sol, de la résistance du sol et du diamètre du pieu.

### 3. Définition d'un pieu

Le pieu est un élément porteur ayant les dimensions transversales négligeables devant sa longueur et est destiné à transférer les charges sur une grande profondeur vers un bon sol. Il existe des pieux travaillant au frottement uniquement et des pieux travaillant en pointe et au frottement.

### 4. Classification des pieux

Les pieux sont classés suivant les critères ci-dessous :

- La nature du matériau constitutif tel que, bois, métal, béton.
- Le mode d'introduction dans le sol ( battus ou forés ).

Pour l'évaluation de la force portante, notamment, il est plus important de considérer le type de sollicitation imposée au sol par la mise en place du pieu. C'est ainsi que l'on distingue :

- Pieu refoulant le sol à la mise en place.
- Pieu ne refoulant pas le sol à la mise en place.

#### 4.1 Pieu refoulant le sol à la mise en place

Les principaux types de pieux entrant dans ce groupe sont les suivants :

#### 4.1.1 Pieu battu préfabriqué

Ces pieux, préfabriqué en béton armé ou précontraint sont fichés dans le sol par battage ou vibrofonçage.

#### 4.1.2 Pieu métallique battu:

Ils sont fichés dans le sol par battage, ces pieux sont entièrement métalliques. Les sections sont:

- En forme de H,
- En forme d'anneau (Tube ),
- De formes quelconques (palpieux)

Ils ne sont classés dans ce groupe que si leur base est obturée. Sinon, ils font partie des pieux particuliers. « Fig. I.3 »

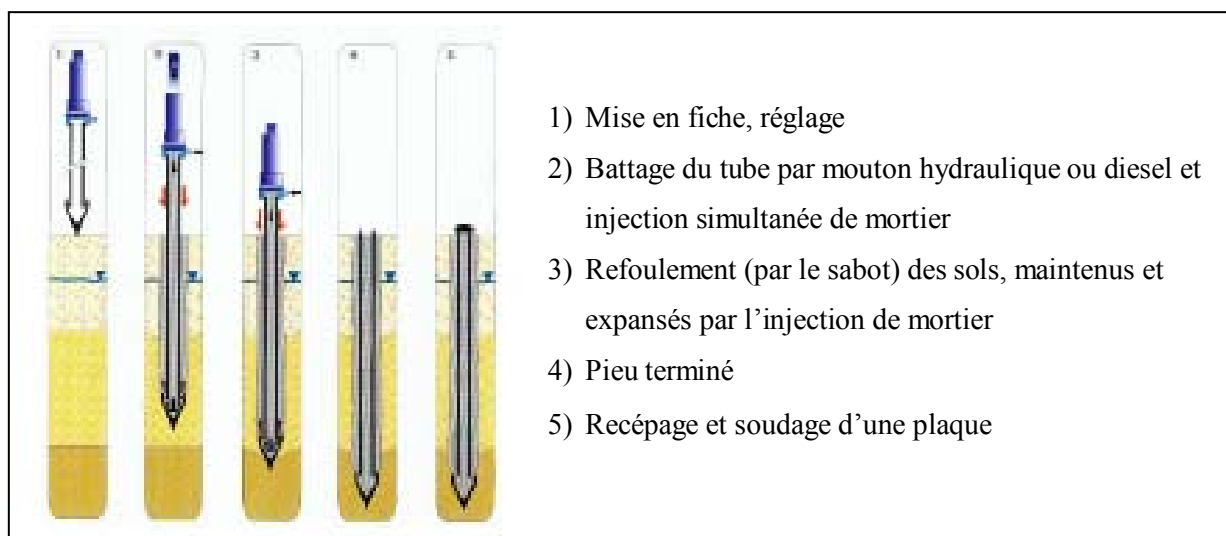


Fig. I.3 : Pieu Métallique battu

#### 4.1.3 Pieu en béton foncé

Ces pieux sont constitués d'éléments cylindriques en béton armée, préfabriqué ou coffrés à l'avancement, de 0.50 à 2.50 m de longueur et de 30 à 60 cm de diamètre. Ces éléments sont foncés dans le sol à l'aide d'un vérin qui prend appui sous un massif de réaction.

#### 4.1.4 Pieu en métal foncé

Ces pieux, entièrement métalliques, sont constitués d'acier E24-2 ou similaire avec addition éventuelle de cuivre (0.2 à 0.5%). Ils sont foncés dans le sol à l'aide d'un vérin qui prend appui sous un massif de réaction.

#### 4.1.5 Pieu battu pilonné

Un tube, muni à sa base d'un bouchon de béton ferme, est enfoncé par battage sur le bouchon. En phase finale, le béton ferme est introduit dans le tube par petites quantités, successivement pilonnées à l'aide du mouton de battage au fur et à mesure de l'extraction du tube. Suivant les cas, les pieux peuvent être armés. « Fig. I.4 »

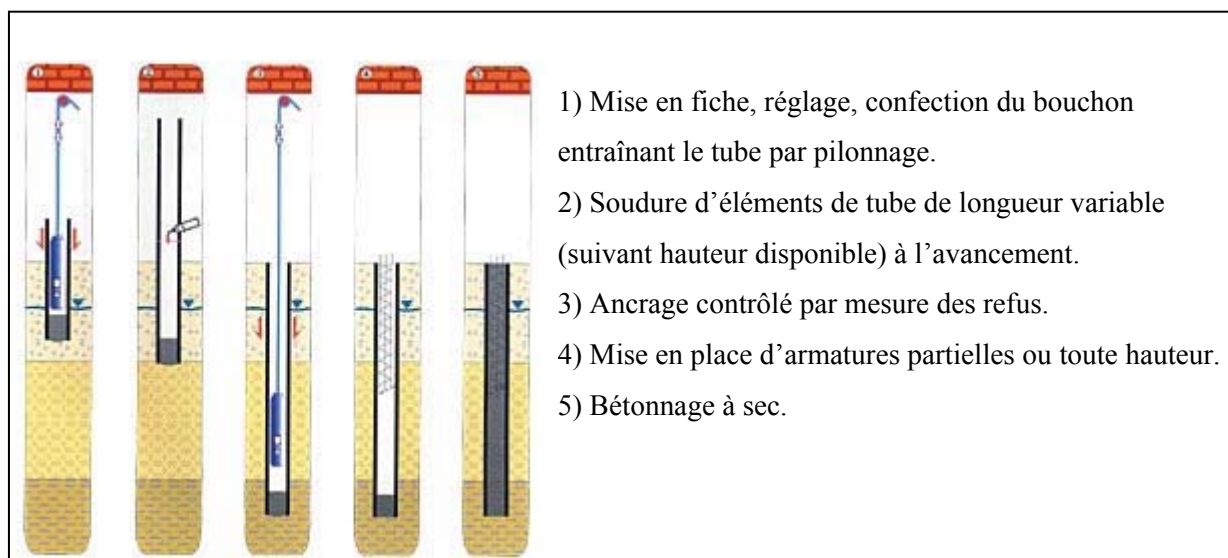


Fig. I.4 : Pieu battu pilonné

#### 4.1.6 Pieu battu moulé

Un tube, muni à sa base d'une pointe métallique ou en béton armé, ou d'une plaque métallique raidie ou d'un bouchon de béton, est enfoncé par battage sur un casque placé en tête du tube. Le tube est ensuite rempli totalement de béton d'ouvrabilité moyenne, avant son extraction. « Fig. I.5 »

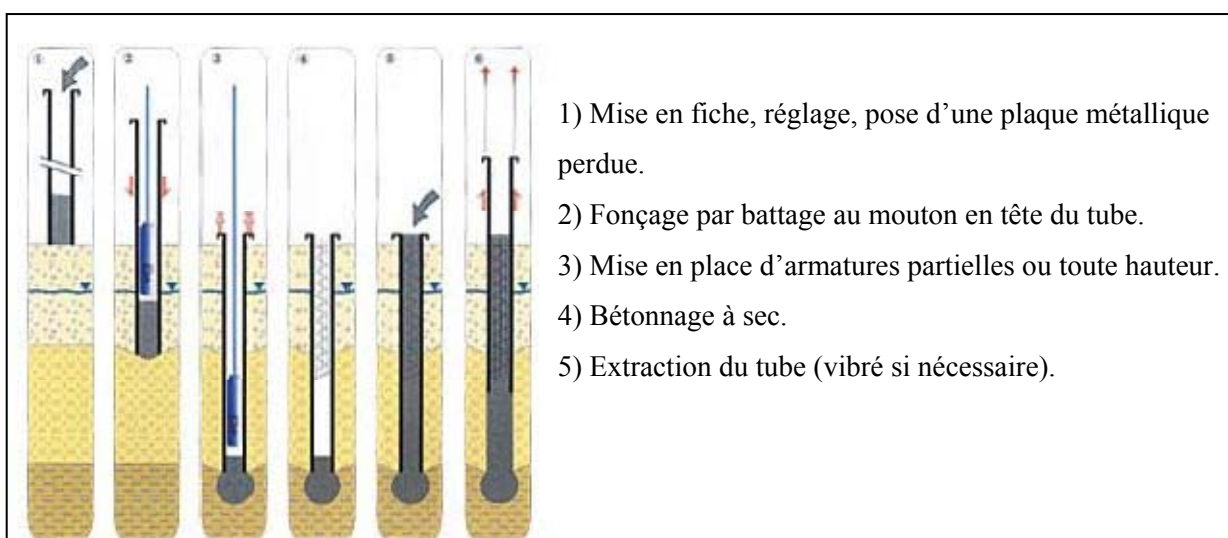


Fig. I.5 : Pieu battu moulé

#### 4.1.7 Pieu battu enrobé

Ce type de pieux à âme métallique est constitué :

- De tubes d'acier de 150 à 500 mm de diamètre extérieur,
- De profilés H,
- De caissons formés de profils ou de palplanches à 2,3 ou 4 éléments

L'enrobage du métal du fût du pieu est assuré par un sabot débordant à la base du pieu.

### 4.1.8 Pieu tubulaire précontraint

Ce type de pieux est constitué d'éléments tubulaires en béton légèrement armé, assemblés par précontrainte, antérieurement au battage.

La mise en œuvre est normalement faite par battage avec base ouverte.

### 4.1.9 Pieu vissé moulé

Ce procédé ne s'applique pas aux sols sableux sans cohésion situés sous la nappe en raison des éboulements importants qu'il risquerait de provoquer, consiste à pénétrer dans le sol, par rotation et fonçage. « Fig. I.6 »

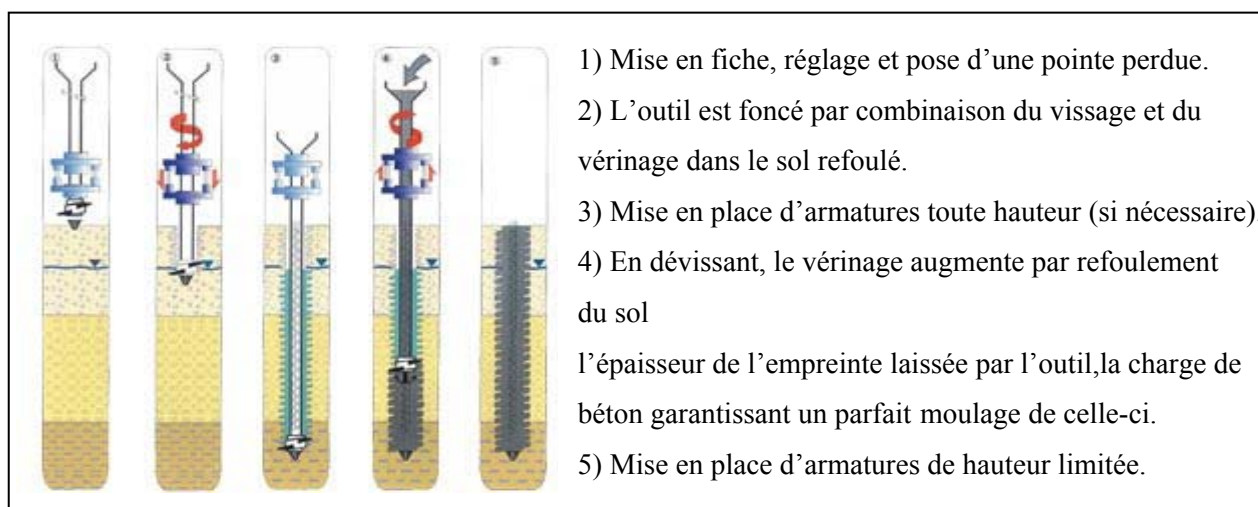


Fig. I.6 : Pieu vissé moulé

## 4.2 Pieu ne refoulant pas par le sol à la mise en place

### 4.2.1 Pieu foré simple

Mise en œuvre à partir d'un forage exécuté dans le sol par des moyens mécaniques tels que tarière, benne, etc. Ce procédé, qui n'utilise pas le soutènement de parois, ne s'applique que dans les sols suffisamment cohérents et situés au-dessus des nappes phréatiques. « Fig. I.7 »

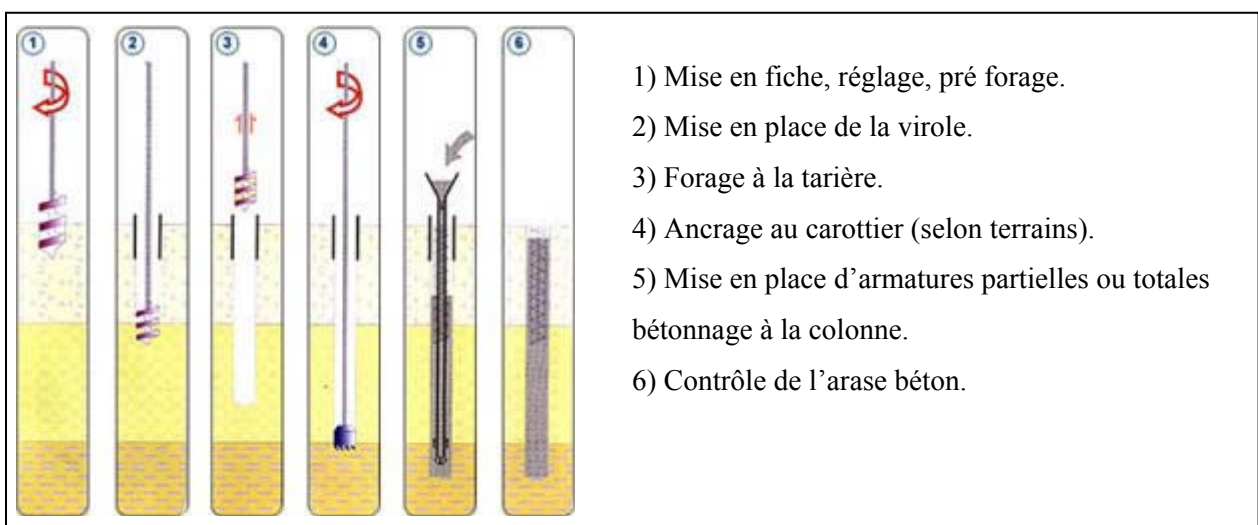


Fig. I.7 : Pieu foré simple

### 4.2.2 Pieu foré à la boue et barrette

La mise en œuvre se fait de la même manière que le pieu foré simple, sous protection d'une boue de forage. Le forage est rempli de béton de grande ouvrabilité sous la boue, en utilisant une colonne de bétonnage. « Fig. I.8 »

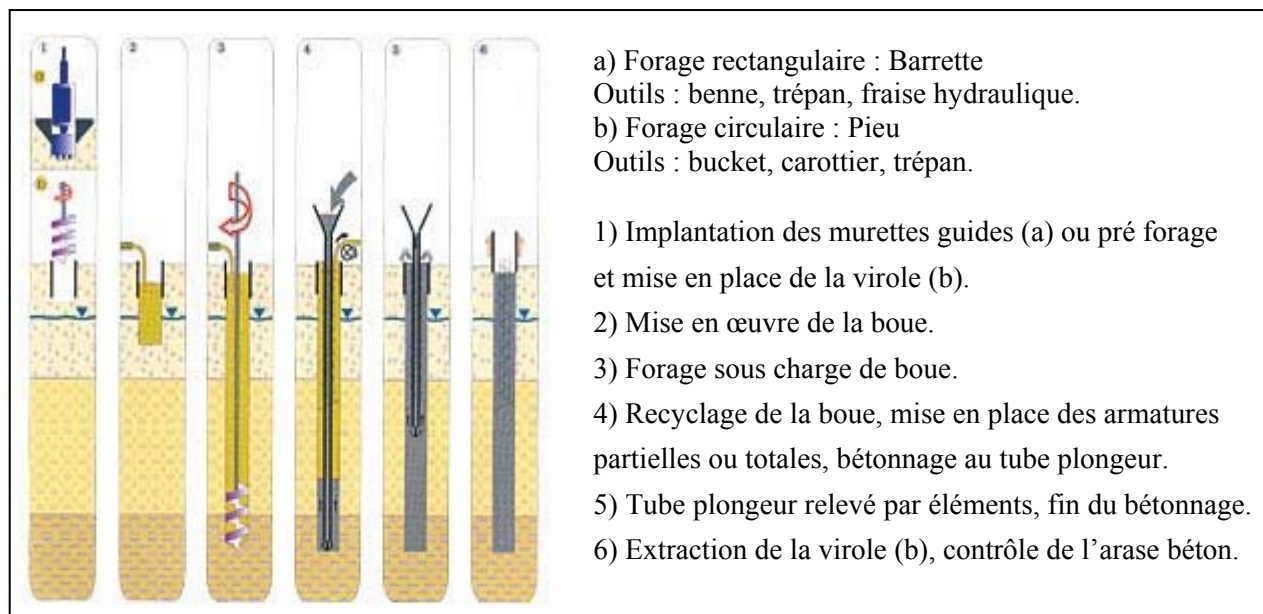


Fig. I.8 : Pieu foré à la boue et barrette

### 4.2.3 Pieu foré tubé

Même procédé que le précédent, mais seulement sous protection d'un tubage dans la base est toujours située au-dessous du fond de forage. Le forage est rempli partiellement ou totalement d'un béton de grande ouvrabilité, puis le tubage est extrait sans que le pied du tubage puisse se trouver à moins de 1 m sous le niveau du béton. « Fig. I.9 »

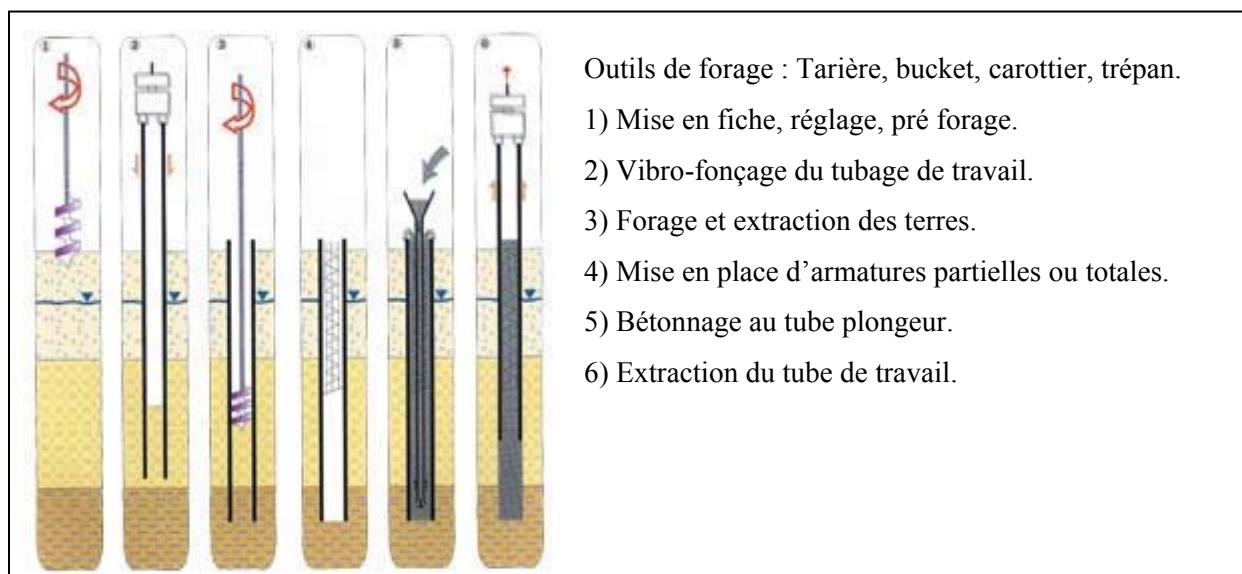


Fig. I.9 : Pieu foré tubé

#### 4.2.4 Puits

Un puits de fondation est une fouille ayant des dimensions transversales comparables à sa longueur remplie ensuite de béton ; peut être exécuté soit à la main, soit à la machine. Les parois du forage sont soutenues par un blindage.

#### 4.2.5 Pieu à la tarière creuse

La mise en œuvre avec une tarière à axe creux, d'une longueur totale au moins égale à la profondeur des pieux à exécuter, vissée dans le sol sans extraction notable de terrain. La tarière est extraite du sol sans tourner pendant que, simultanément, du béton est injecté dans l'axe creux de la tarière, prenant la place du sol extrait. « Fig. I.10 »

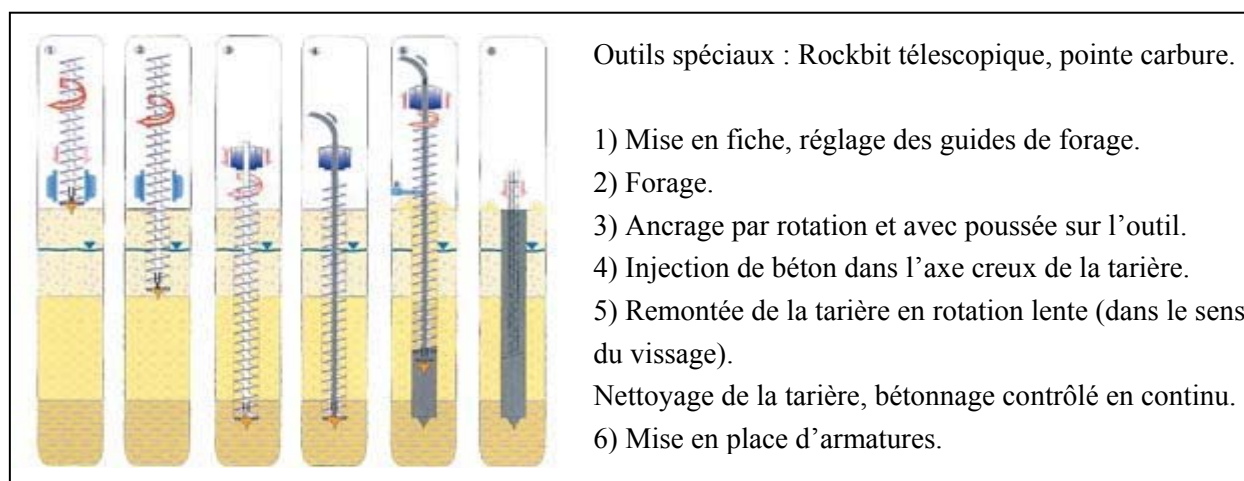


Fig. I.10 : Pieu à la tarière creuse

#### 4.2.6 Micro Pieux

Il est parfois intéressant de consolider une couche de mauvais terrain par densification c'est-à-dire par serrage du sol. La création de micro-pieu par refoulement du terrain permet d'atteindre cet objectif. Signalons également que ce procédé peut être employé pour des travaux confortatifs de fondations défectueuses. Dans les cas courants on utilise ce type de fondation pour améliorer la couche porteuse située sous l'assise d'une fondation par radier, ou sous une dalle au sol destinée à reprendre des charges verticales importantes (dallages industrielles). « Fig. I.11 »

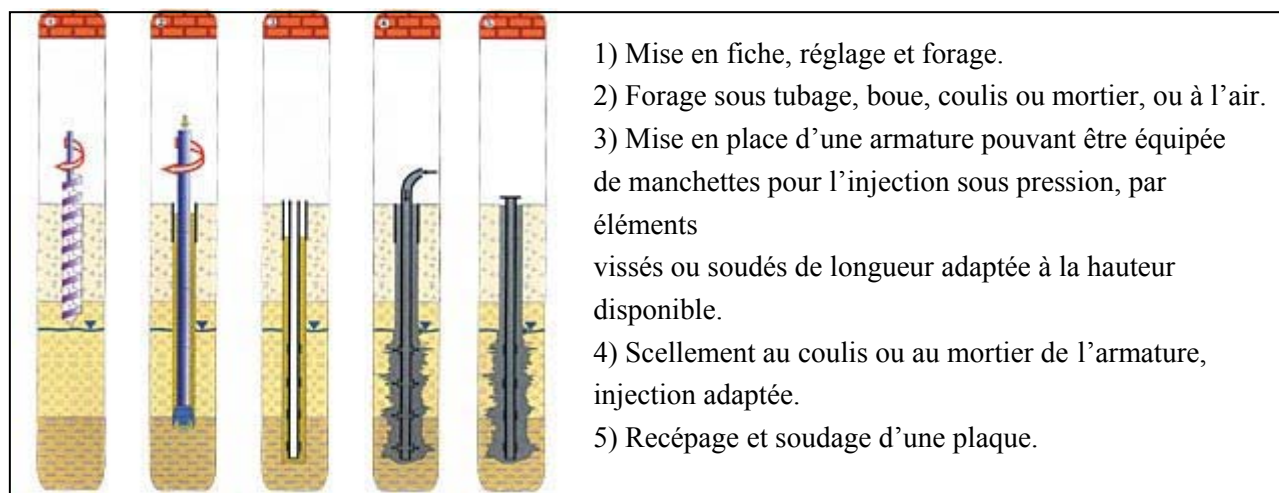


Fig. I.11: Micro Pieux

On distingue quatre (04) types de micro pieux :

#### **A / Micro Pieu type 1**

C'est un pieu foré tubé, de diamètre inférieur à 250 mm. Le forage est équipé ou non d'armatures et rempli d'un mortier de ciment au moyen d'un tube plongeur. Le tubage est récupéré en l'obturant en tête et en le mettant sous pression au-dessus du mortier.

Ces micro-pieux ne sont pas utilisés pour les ouvrages de génie civil.

#### **B / Micro Pieu type 2**

De même procédé que 1, mais seulement le forage est équipé d'une armature et rempli d'un coulis ou de mortier de scellement par gravité ou sous une très faible pression au moyen d'un tube plongeur.

#### **C / Micro Pieu type 3**

C'est un pieu foré, de diamètre inférieur à 250 mm. Le forage est équipé d'armatures et d'un système d'injection qui est un tube à manchettes mis en place dans un coulis de gaine.

L'injection est faite en tête à une pression supérieure ou égale à 1 MPa. Elle est globale et unitaire.

#### **D / Micro Pieu type 4**

C'est un pieu foré, de diamètre inférieur à 250 mm. Le forage est équipé d'armatures et d'un système d'injection qui est un tube à manchettes mis en place dans un coulis de gaine.

On procède à l'injection à l'obturateur simple ou double d'un coulis ou mortier de scellement à une pression d'injection supérieure ou égale à 1 MPa. L'injection est répétitive et sélective.

### **4.3 Pieux particuliers**

Il s'agit des pieux métalliques (H, tubes, pal pieux), qui sont battus sans obturation de la base. Leur section réelle en pointe est faible par rapport à l'encombrement extérieur du pieu. Pour le calcul de la force portance, ils feront l'objet de recommandations particulières.

## **5. Domaine d'utilisation des pieux**

### **5.1 Pieu battu**

Pour des raisons d'économie on utilisera de préférence des pieux battus aux pieux forés moulés qui coûtent de 50 à 70 % plus cher.

Trois (03) causes peuvent empêcher l'utilisation des pieux battus :

#### **5.1.1 Le diamètre :**

Dans le cas de fortes charges ou si les caractéristiques mécaniques du sol sont particulièrement faibles, il ne sera pas possible d'exécuter des pieux moulés battu.

### **5.1.2 Le site :**

En site urbain et à proximité d'une construction existante (respectés une distance d'une quinzaine de mètres environ) il est préférable de ne pas prévoir de pieux battus afin d'éviter les effets nocifs sur les constructions existantes de l'onde de choc due à la chute du mouton.

### **5.1.3 Le terrain :**

Dans les terrains très argileux, il est souhaitable d'éviter des fondations par pieux battus, car les terrains non consolidés sont très peu compressibles sous l'effet de contraintes même élevées appliquées pendant une très courte durée, ainsi la chute du mouton provoque une remontée du terrain autour du pieu, d'où chute de résistance.

## **5.2 Pieux forés moulés**

Le domaine d'emploi des pieux forés moulés s'impose en site urbain en offrant l'assurance d'une bonne sécurité. La force portance unitaire peut être comprise entre 50 T et 1000T.

### **Remarque**

Il ne faut pas oublier que le battage peut modifier de façon très sensible les caractéristiques mécaniques du sol.

## **6. Mode de fonctionnement des pieux**

Le principe consiste à traverser les formations compressibles pour venir s'appuyer sur une couche suffisamment résistante (substratum).

Les fondations profondes mobilisent le sol :

### **6.1 Pieu colonne (effort de pointe)**

Par l'effort de pointe proportionnellement à leur section lorsqu'elles reposent directement sur le substratum.

### **6.2 Pieu colonne (effort de pointe et frottement latéral)**

Par frottement latéral et par effort de pointe lorsqu'il est impossible de descendre sur une couche suffisamment résistante.

### **6.3 Pieu flottant (par frottement latéral seul)**

Par frottement latéral seul dans le cas de pieux fichés dans une couche cohérente: argile par exemple.

On appelle pieu flottant, un pieu qui ne descend pas jusqu'à un substratum (bed-rock).

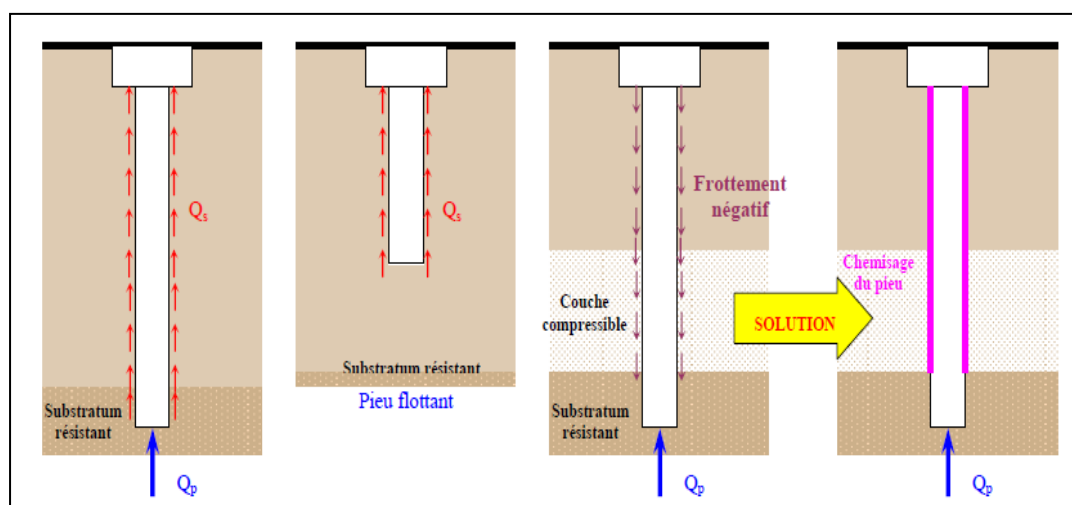


Fig. I.12: Modes de fonctionnement des pieux.

## 7. Principes de calculs des pieux

Les essais en place (ou in situ) de mécanique des sols les plus courants sont les essais réalisés au pénétromètre (statique ou dynamique y compris l'essai de pénétration au carottier dit SPT), et les essais au scissomètre de chantier.

Les essais de pénétration et les essais pressiométriques sont à recommander pour la reconnaissance des sols en vue du dimensionnement des fondations. A des degrés divers ils permettent de chiffrer les propriétés des sols en place et, par suite, soit d'orienter l'étude au stade de l'avant-projet, soit de dimensionner définitivement les fondations.

En règle générale, ils conduisent à des dimensionnements plus proches de la réalité que ceux déduits des essais classiques réalisés au laboratoire.

On peut arbitrairement subdiviser les essais in situ en deux grandes familles :

- Les pénétromètres statiques et dynamiques : sont des essais qui donnent une caractéristique de sol à la limite (ou à la rupture).
- Le pressiometre et le scissomètre : Sont des essais qui donnent en plus une relation contraintes-déformations.

## 8. Contrôle d'une fondation profonde

La réalisation des fondations profondes est confiée à des spécialistes qui offrent, a priori, une garantie de bons résultats, cependant la vérification de la qualité des travaux effectués fait appel souvent à des méthodes de contrôles non destructives (ex. le carottage sonique, l'impédance mécanique).

## Chapitre 02

### Les différents Chargements des pieux

#### 1. Chargement dynamique du à la structure

##### 1.1 Raison du calcul dynamique

De façon routinière, la majorité des sollicitations (charges) qui s'exercent sur une structure de génie civil sont considérées comme charges statiques.

Une charge statique est une charge pour laquelle son amplitude, sa direction, et son point d'application, ne varient pas avec le temps de sorte que les effets d'inerties peuvent être négligés.

Une charge dynamique est une charge pour laquelle son amplitude et / ou sa direction et / ou son point d'application varient avec le temps de sorte que des effets d'inerties sont engendrés.

Des exemples de charges statiques et dynamiques sont montés à la Fig.II.1 et Fig. II.2

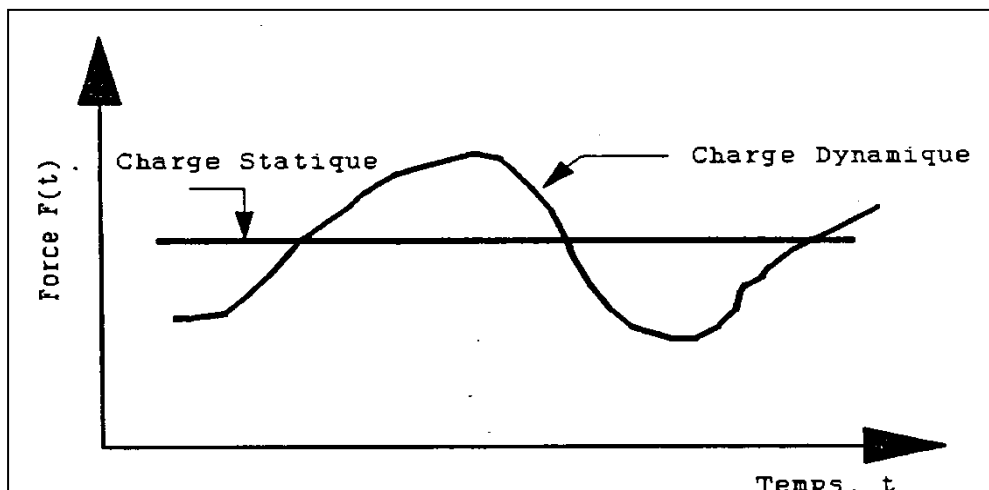


Fig. II.1: Exemples de charges statiques et dynamiques

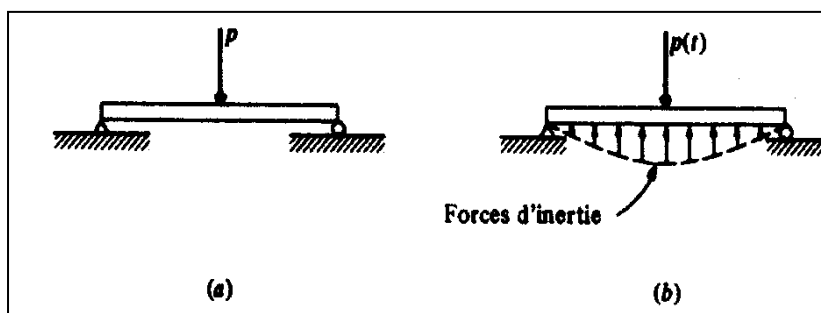


Fig. II.2: Distinction fondamentale entre une charge statique et une charge dynamique  
(a) : Chargement statique ; (b) : chargement dynamique

Le premier but de la dynamique est de déterminer les variations dans le temps des contraintes et déformations engendrées par un chargement dynamique quelconque.

Dans ce contexte, l'analyse statique des structures est un cas particulier de l'analyse dynamique.

## 1.2 Types de chargements

Pratiquement n'importe quelle structure est susceptible de subir pendant sa durée de vie un chargement dynamique sous une forme ou une autre. D'un point de vue analytique, on peut subdiviser les chargements donnés en deux grandes catégories : périodiques et non périodiques.

Fig. II.3

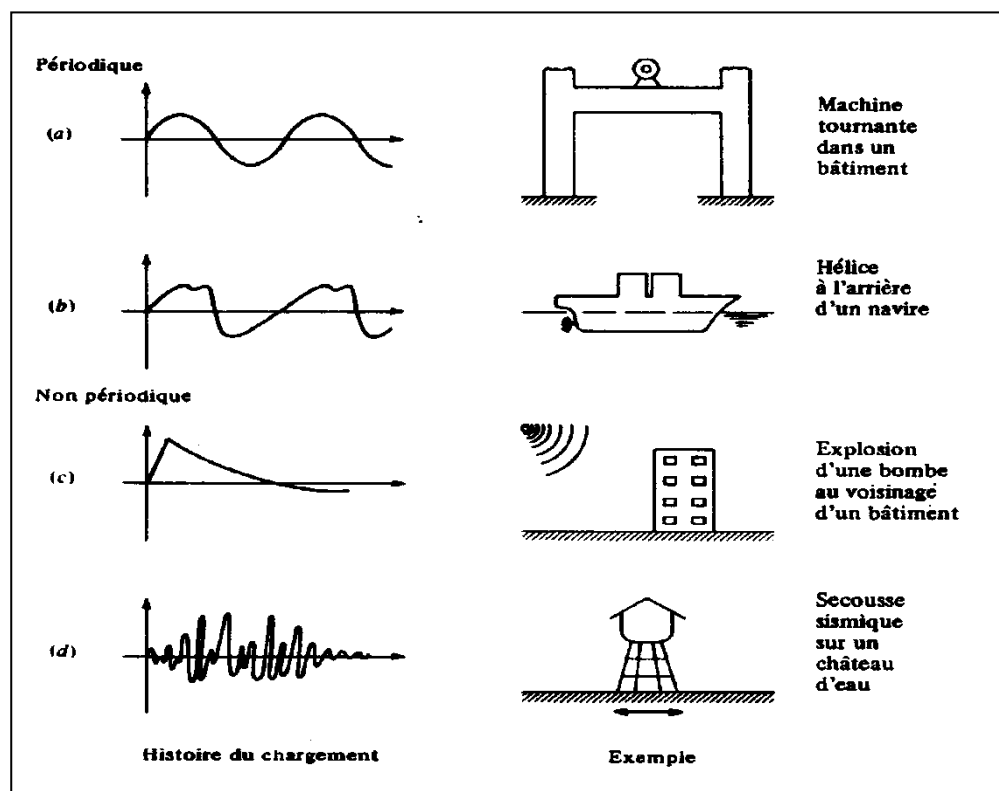


Fig. II.3: Exemples de chargements dynamiques : (a) harmonique simple ; (b) périodique ; (c) impulsif ; (d) de longue durée

### 1.2.1 Les chargements périodiques

Les chargements périodiques sont constitués de charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles. Le chargement périodique le plus simple est de forme sinusoïdale, on l'appelle harmonique simple ; ce genre de chargement est caractéristique des efforts de balourd dans les machines tournantes. Les autres formes de chargements périodiques, par exemple ceux qui proviennent des pressions hydrodynamiques engendrées par l'hélice à l'arrière d'un navire ou des effets d'inertie des machines alternatives, sont souvent plus complexes. Mais une analyse de Fourier permet de représenter un chargement périodique quelconque sous la forme d'une superposition d'harmoniques simples ; le calcul de la réponse à un chargement périodique quelconque peut donc en principe se conduire selon une procédure générale unique.

### 1.2.2 Les chargements non périodiques

Sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de forme quelconque. Des chocs, des explosions sont des sources courantes de chargements impulsifs ; pour ces efforts de courte durée on peut utiliser des formes d'analyse simplifiées. En revanche, un chargement quelconque de longue durée, comme peut en provoquer une secousse sismique, ne peut être traité que par des méthodes d'analyse dynamique complètement générales.

## 2. Chargement dû au séisme

### 2.1 Introduction

Les tremblements de terres malheureusement ne sont plus une exception, ils sont souvent responsables de la destruction des villes entières, la cause des millions de morts et avec des conséquences économiques pourra être très lourde.

### 2.2 Origine des séismes

La quasi-totalité des séismes trouve son explication à l'échelle macroscopique dans la « Théorie des plaques » : La partie superficielle de la terre, la lithosphère (environ 130 km d'épaisseur) apparaît comme un ensemble de plaques stables, flottant sur une couche épaisse d'environ 100 km, l'asthénosphère, animée de mouvements convectifs.

Le mouvement des plaques, les une par rapport aux autres, peut se résumer à deux phénomènes principaux :

- D'une part certaines plaques s'éloignent les une des autres, par la création à leur frontière commune d'une dorsale constituée de magma rejeté par l'asthénosphère. les dorsales sont le siège de séismes d'énergie relativement faible (dorsale atlantique).
- D'autre part, et de façon corollaire, certaines repoussées par des dorsales entrent en contact et se chevauchent, constituant des montagnes et des fosses océaniques. La progression de ce chevauchement se fait par à-coups, comme on peut s'y attendre pour un phénomène de frottement. Le mécanisme permet d'emmagasiner une énergie considérable qui en se libérant provoque des séismes très importants.

On distingue six (06) plaques principales : Pacifique, Amérique, Afrique, Eurasie, Inde, Antarctique. Le modèle peut être affiné par la considération de plaques plus petites. On retrouve les contours de ces grandes plaques sur une carte de séismicité du globe.

La majorité des séismes se produisent dans deux régions particulières du globe :

- La ceinture du feu (Circum Pacific Belt) : Amérique du sud, côté Californienne, Alaska, Japon, Formose, Phillipine, Nouvelle-Zélande.

- La ceinture Alpide ( Alpide Belt ) : Méditerranée, Nord de l'Inde, Indonésie.

Les dommages causés par un séisme peuvent provenir de deux sources :

- Le mouvement de faille (unidimensionnel)
- Les vibrations du sol causées par la propagation des ondes sismiques (tridimensionnel).

Presque la totalité des dommages aux structures sont causées par les vibrations du sol.

### 2.3 Théorie des plaques tectoniques

Cette théorie suppose que tous les continents étaient reliés à l'origine et ont commencé à se déplacer il y a 200 millions d'années.

Ces plaques ont un mouvement qui se situe entre 1 et 15 cm par année. En général, on peut classer trois (03) types de mouvement :

- Mouvement latéral : une plaque se déplace latéralement par rapport à une autre.
- Mouvement divergent : une plaque s'éloigne d'une autre ce qui force une tranchée océanique.
- Mouvement de subduction : deux plaques convergent ce qui force l'une à s'enfoncer sous l'autre.

Selon cette théorie, les séismes sont localisés principalement aux frontières de ces plaques, et se produisent lorsque la résistance du roc est dépassée (fracture).

La théorie des plaques tectoniques se justifie pour les séismes le long des plaques terrestres.

### 2.4 Mécanismes de ruptures des failles terrestres

Il existe trois (03) grands mécanismes de ruptures des failles terrestres:

- Faille de glissement latérale appelée aussi Faille décrochante (strike-slip fault): Ce mécanisme de rupture est causé par le mouvement latéral des plaques.

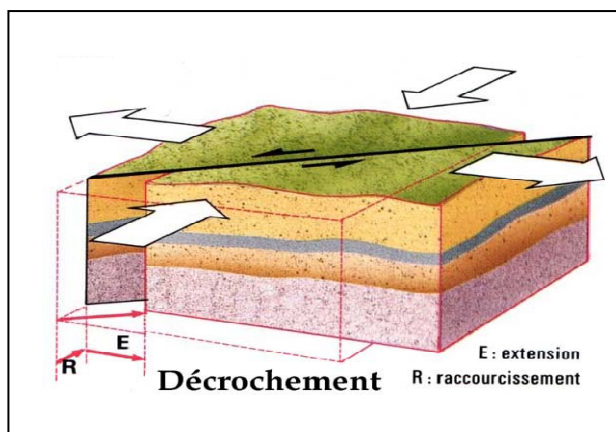
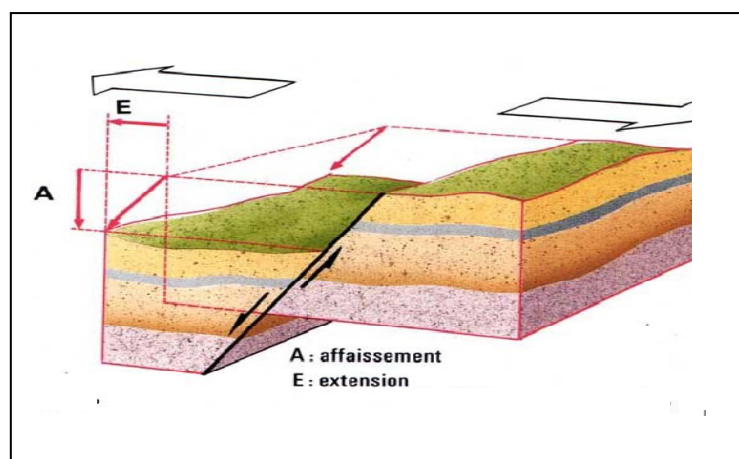


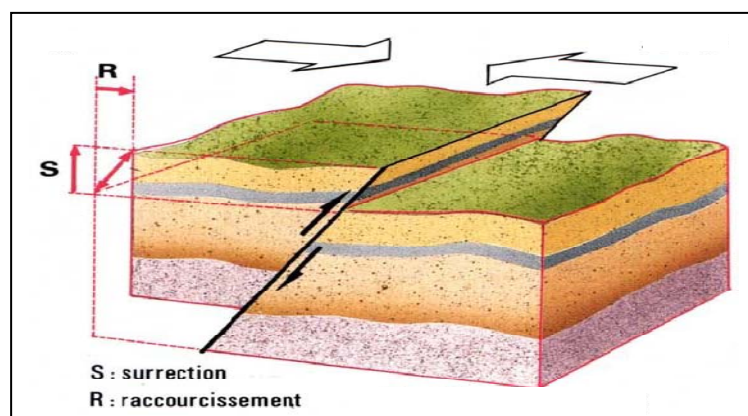
Fig . II.4 : différent type de failles (a) : Faille latérale

- Failles normale (normal fault): Ce mécanisme de rupture est causé par le mouvement divergent des plaques.



(b) : Faille Normale

- Faille inverse (reverse or underthrust fault) : Ce mécanisme de rupture est causé par le mouvement de subduction des plaques.



(c) : Faille Inverse

## 2.5 Terminologie et définitions des ondes sismiques

Les ondes qui se propagent dans la croûte terrestre sont appelées des **ondes de corps** et les ondes se propageant à la surface du sol sont appelées des **ondes de surface**.

Les ondes libérées par un séisme sont de quatre types « Fig. II.5 (a, b, c et d) »:

- **Ondes primaires ou ondes-P** : appelées aussi ondes de compression ou ondes longitudinales. Le déplacement du sol qui accompagne leur passage se fait par des dilatations et des compressions successives. Ces déplacements du sol sont parallèles à la direction de propagation de l'onde. Ce sont les plus rapides (6 km.s<sup>-1</sup> près de la surface) et donc les premières à être enregistrées sur les sismogrammes. Elles sont responsables du grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre.

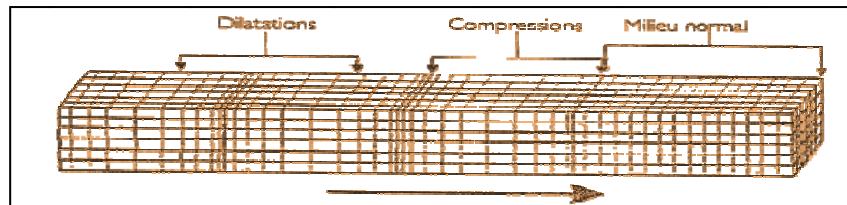
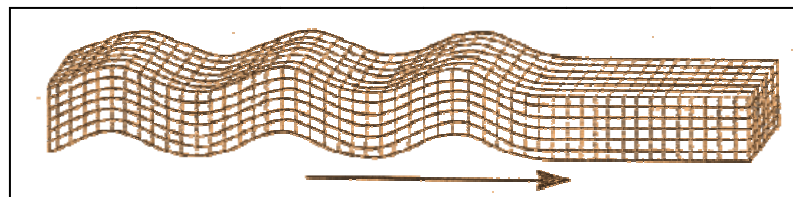


Fig. II.5: différents types d'ondes

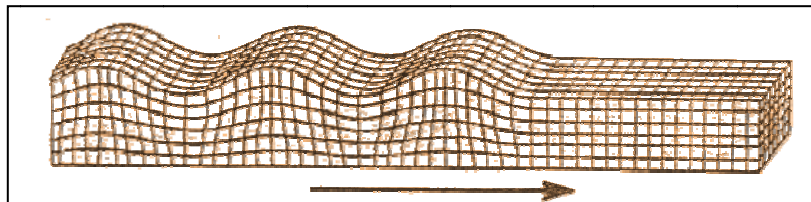
(a) Ondes P

➤ **Ondes secondaires ou ondes-S** : Appelés aussi ondes de cisaillement ou ondes transversales. À leur passage, les mouvements du sol s'effectuent perpendiculairement au sens de propagation de l'onde. Ces ondes ne se propagent pas dans les milieux liquides, elles sont en particulier arrêtées par le noyau externe de la Terre. Leur vitesse est de  $4,06 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Elles apparaissent en second sur les sismogrammes.



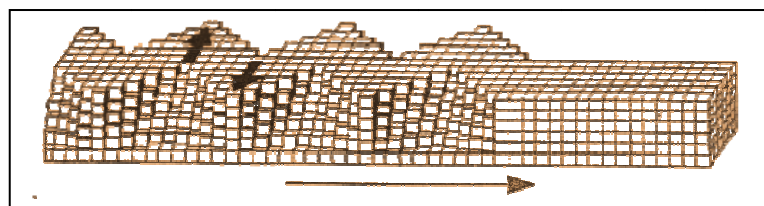
(b) : Ondes S

➤ **Ondes de Rayleigh** : Elle a été découverte par John William Strutt Rayleigh en 1885. Son déplacement est complexe, assez semblable à celui d'une poussière portée par une vague, constituant un mouvement à la fois horizontal et vertical.



(c) : Ondes Rayleigh

➤ **Ondes de Love**: C'est un anglais Augustus Edward Hough Love qui a découvert son existence en 1911. Son déplacement est comparable à celui des ondes S sans le mouvement vertical. Les ondes de Love provoquent un ébranlement horizontal qui est la cause de nombreux dégâts aux fondations d'un édifice qui n'est pas une construction parasismique. Les ondes de Love se propagent à environ  $4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$



(d) : Ondes de love

Ondes de Rayleigh et ondes de Love, sont des ondes de surface.

Les ondes primaires sont généralement à hautes fréquences et sont les premiers à atteindre une structure.

Les ondes secondaires sont à plus basses fréquences mais possèdent de plus grandes amplitudes et sont responsables pour la grande majorité des dommages aux bâtiments.

## 2.6 Amplitudes des ondes

- L'amplitude des ondes de corps (primaires et secondaires) se dissipe proportionnellement à  $1/d$ , où  $d$  est la distance de l'hypocentre.
- L'amplitude des ondes de surface (Rayleigh et Love se dissipe proportionnellement à  $1/\sqrt{d}$ . Ces ondes se propagent sur une plus grande distance

Des enregistrements d'accélération (accélérogrammes) typiques pour des sites près et éloignés de l'épicentre sont montrés à la Fig. II.6

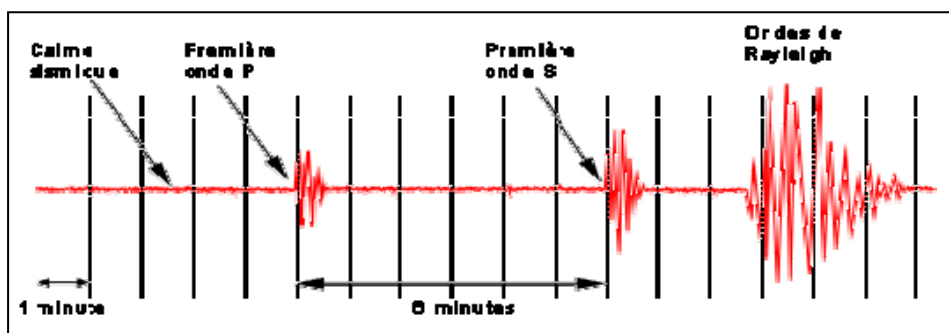


Fig. II.6 : Enregistrements d'accélération

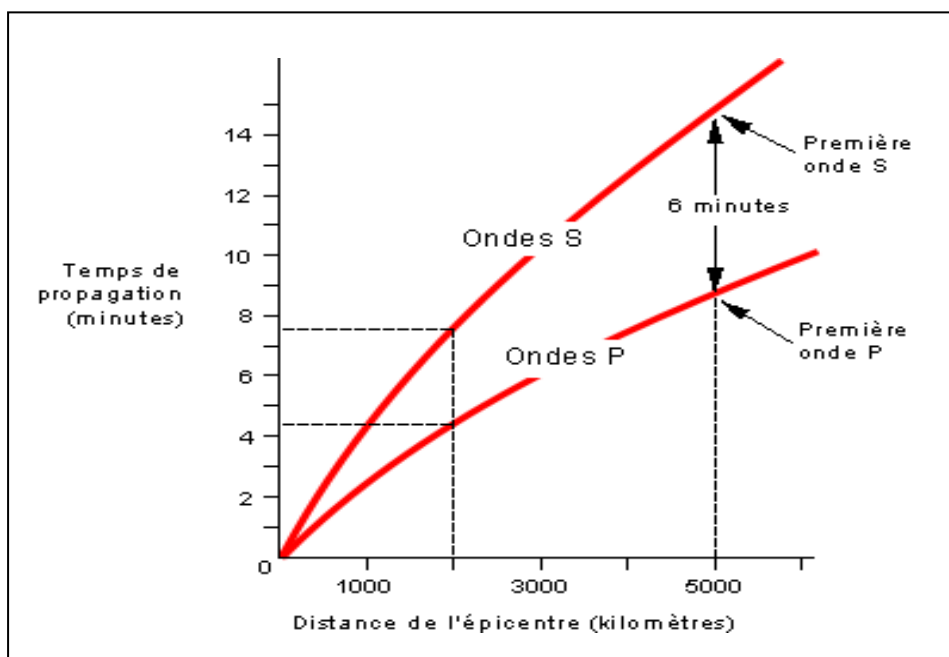


Fig. II.7 : Temps de propagation des ondes (P et S) par rapport à la distance de l'épicentre

## 2.7 Description des paramètres sismiques

La théorie de propagation des ondes élastiques permet de démontrer les relations suivantes exprimant les vitesses en fonction des paramètres usuels des sols ou des roches.

La constante de Lamé est définie par :

$$\Gamma = \frac{\nu E}{[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]}$$

où:

E: module d'Young

$\nu$ : Coefficient de poisson

$\rho$ : la densité du sol ou de la roche

Le module de cisaillement par:

$$G = \frac{E}{[2(1 + \nu)]}$$

Les vitesses primaires et secondaires sont définies par:

$$V_p = \left[ \frac{(\Gamma + 2G)}{\rho} \right]^{0.5}$$

$$V_s = \left[ \frac{G}{\rho} \right]^{0.5}$$

L'intensité d'un séisme est quantifiée par deux échelles principales:

- **L'échelle de Mercalli** (modifiée en 1931 par Wood et Neumann) : il n'existe pas de mesure basée sur des observations après le séisme.
- **L'échelle de Richter** : basée sur les différents types d'ondes, ou des fréquences particulières, générées par un séisme.

### 3. Pieux sollicités horizontalement « statique »

#### 3.1 Généralités

D'une façon générale chaque pied de poteau ou élément porteur transmet à l'élément de fondation un ensemble de sollicitations parmi lesquelles peuvent figurer des efforts horizontaux :

- Réduction des efforts du vent dans les bâtiments de grande hauteur.
- Efforts horizontaux dans le cas de fondations de pylônes etc....

La méthode ci-après permet de calculer les pieux sollicités en flexion.

#### 3.2 Méthode de calcul

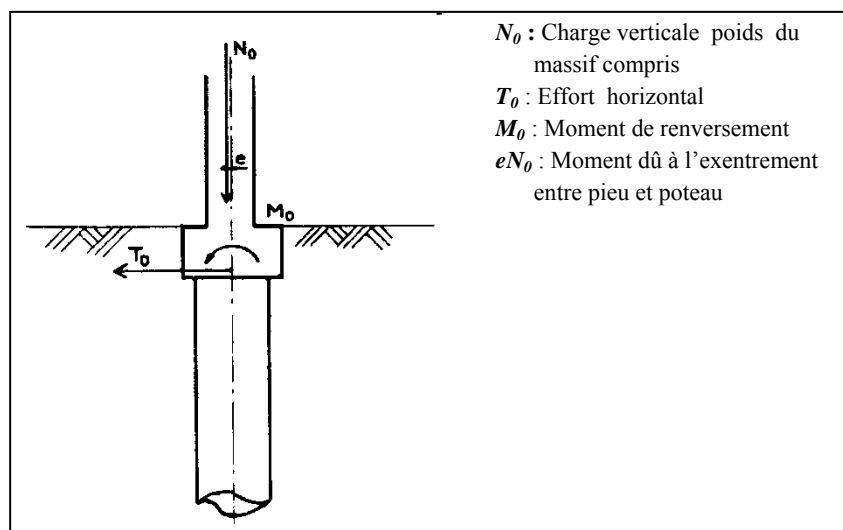


Fig. I.13 : Pieu sollicité horizontalement

Un pieu isolé soumis à un effort normal, un effort tranchant et un moment fléchissant résiste en fléchissant c'est-à-dire en se déplaçant en tête ce qui provoque une réaction du terrain  $Q$  est proportionnelle au déplacement  $y$ .

$$Q = C.y$$

Où :

$C$  : est le coefficient de proportionnalité « exprimé en bars/cm ».

$Q$  : est la pression en (bars)

$y$  : est le déplacement correspondant en cm

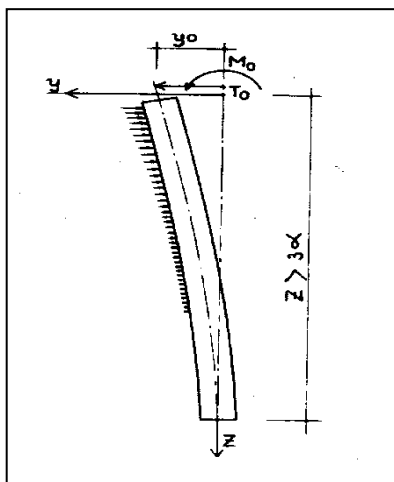


Fig. I.14 : Modèle de calcul

Le comportement d'un élément flexible dans le sol peut s'exprimer mathématiquement à l'aide de l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre :

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + C.b.y = 0$$

Dans laquelle :

b : est le diamètre du pieu

I : inertie de la section

E : module d'élasticité du matériau

La résolution de cette équation différentielle met en évidence un coefficient constant  $\alpha$  appelé « longueur élastique » « ou encore longueur de transfert »

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4.EI}{C.b}}$$

Pratiquement on constate que la partie du pieu située à la profondeur  $z > 3\alpha$  n'est quasiment pas sollicitée à la flexion due à l'effort horizontal en tête et aux moments de flexion, le déplacement étant à peu près nul.

### 3.3 Calcul des moments

Le moment de flexion à la cote z dû à un effort tranchant  $T_0$  et dû à un moment de flexion  $M_0$  est donné par l'expression :

$$M(z) = T_0 \cdot \alpha \cdot A + M_0 \cdot B$$

$$M(z) = T_0 \cdot \alpha \left( A + \frac{M_0}{T_0 \cdot \alpha} B \right)$$

$$M(z) = T_0 \cdot \alpha \cdot C_1$$

Avec :

$$A = e^{-\frac{z}{\alpha}} \cdot \sin \frac{z}{\alpha} \quad , \quad B = e^{-\frac{z}{\alpha}} \cdot \left( \sin \frac{z}{\alpha} + \cos \frac{z}{\alpha} \right)$$

En posant :

$$C_1 = e^{-\frac{z}{\alpha}} \cdot \left( \sin \frac{z}{\alpha} + \frac{M_0}{T_0 \alpha} \left( \sin \frac{z}{\alpha} + \cos \frac{z}{\alpha} \right) \right)$$

et

$$\beta = \frac{M_0}{T_0 \alpha}$$

On obtient :

$$M(z) = T_0 \cdot \alpha \cdot e^{-\frac{z}{\alpha}} \cdot \left( \sin \frac{z}{\alpha} + \beta \cdot \left( \sin \frac{z}{\alpha} + \cos \frac{z}{\alpha} \right) \right)$$

Et

$$T(z) = \frac{dM(z)}{dz}$$

$$T(z) = T_0 \cdot e^{-\frac{z}{\alpha}} \cdot \left( \cos \frac{z}{\alpha} - (1 + 2\beta) \cdot \sin \frac{z}{\alpha} \right)$$

Le moment maximum se situant à la cote z d'effort tranchant nul

$$T(z) = 0$$

$$\cos \frac{z}{\alpha} = (1 + 2\beta) \cdot \sin \frac{z}{\alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{z}{\alpha} = \frac{1}{(1 + 2\beta)}$$

### 3.4 Calcul des déplacements

Sous l'action combinée de  $T_0$  et  $M_0$  le déplacement en tête du pieu pour  $z = 0$  est égale à :

$$y_0(T, M) = \frac{2T_0}{\alpha \cdot C \cdot b'} + \frac{2M_0}{\alpha^2 \cdot C \cdot b'}$$

$$y_0(T, M) = \frac{2}{\alpha \cdot C \cdot b'} \left( T_0 + \frac{M_0}{\alpha} \right)$$

Avec :

$b'$  : Largeur apparente du pieu, elle est de l'ordre de 1.5 fois le diamètre réel ( $b' = 1.5 \cdot b$ ) du pieu dans le cas d'un pieu circulaire.

## 4. Effet sismique sur les pieux « Hirochi Tajimi 1977 »

### 4.1 Introduction

En 1969 Mr NAIR présenta un résumé portant sur le thème « forces dynamiques et sismiques affectant les fondations profondes », depuis que des superstructures fondées sur pieux et ayant fait l'objet de sérieux dommages, il n'y a qu'un faible pourcentage de dommages dus directement au mouvement du sol. De fait de nombreuses études concernant le présent sujet ont tenté d'obtenir les effets de la présence de pieux sur le comportement dynamique d'une structure et cela d'un point de vue interaction sol structure.

Cette tendance est tout à fait différente de celle des études relatives au chargement latéral des pieux dû à des surcharges.

Le présent modèle du pieu est principalement dû à la méthode statique utilisant la capacité portante des pieux pour résister au chargement vertical, effort horizontal et au moment de flexion dû à la superstructure.

La détermination des contraintes et des déplacements développés dans des pieux lors d'un séisme est un problème dynamique.

### 4.2 Le comportement du pieu durant le séisme

En consultant les expériences passées, les réponses des structures fondées sur pieu lors des séismes sont fortement dépendantes de la rigidité des fondations. Les principales caractéristiques seront vues dans le rapport entre le déplacement maximum  $U_b$  de la fondation à la surface du sol et le déplacement maximum du mouvement du sol au champ libre au voisinage de la fondation.

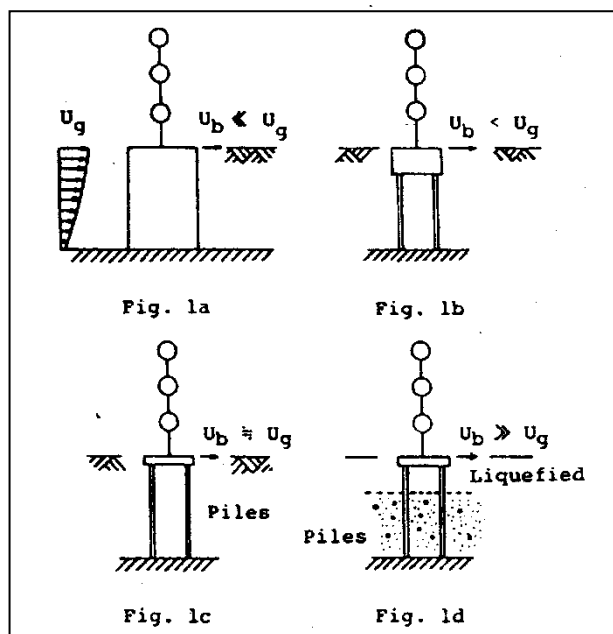


Fig. II.8 comportement du pieu sous l'effet d'onde sismique « Hirochi Tajimi »

- a) Fondation rigide comme celle utilisée pour supporter les centrales nucléaires complètement en mouvement ou en déplacement imposé par le sol environnant relative au mouvement du substratum.
- b) Les constructions à une profondeur importante, l'effort tranchant à la base peut être absorbé dans une grande part par les forces de contacts sol – sous bassement, la résistance latérale des pieux ne serait pas suffisamment mobilisée.
- c) Les constructions sans sous sol, si les forces de contact « sol – fondation » ne peuvent pas être espérées à causes du lâche contact avec le sol ou séparation sol – fondation causé par un tassement du sol, la résistance latérale au sommet des pieux doit résister à l'effort de cisaillement à la base de la superstructure.
- d) Si la liquéfaction se reproduit lors d'un séisme ça pourrait causer une chute considérable de la résistance du sol.

Il est important de prévenir ou pré estimer les déplacements maximums du sol dans les différentes conditions du sol.

### 4.3 Analyse de l'interaction sol – pieu – structure

Les méthodes d'analyse de l'interaction sol – pieu – structure sont fondamentalement classées dans les groupes suivants :

- Méthode des fondations sur sol élastique
- Méthode de la poutre sur appui élastique « modèle de WINKLER »
- Méthode des éléments finis
- Méthodes analytiques tri dimensionnelle

Les pieux chargés latéralement sont classés comme suit :

- Pieux courts – rigides
- Pieux intermédiaires
- Pieux longs et flexibles

Notons que les pieux longs sont définis comme des pieux dont la déflexion à la surface du sol est indépendante de sa longueur, ainsi les modes de translations des structures « fondées sur pieux » voir leurs périodes naturelles ne sont pas effectuées par la longueur du pieu et pour ce faire on a intérêt à vérifier :

$$\lambda > 5.0 \quad \text{ou} \quad \lambda > (\beta L)^4 \text{ « Hirochi Tajimi »}$$

Avec :

$\lambda$  : Coefficient de flexibilité des pieux

$$\beta = \left( \frac{K_h B}{4 E_p I_p} \right)^{\frac{1}{4}}$$

La méthode est de remplacer les pieux par des fondations élastiques c'est-à-dire par des ressorts oscillants vibrants. Les avantages de la méthode sont :

- Il est possible d'assembler ces raideurs individuelles et construire les ressorts oscillatoires en un ensemble.
- Le pieu long prend la forme de la déformée du sol

Le modèle des contraintes des pieux serait déterminé par l'addition des contraintes induites par la réponse du système sol – pieu et celle produites par la réponse de la superstructure.

#### 4.4 Résistance du pieu

Pour l'analyse dynamique du système pieu – sol, sujet à un mouvement de sol, il est essentiel de trouver la méthode pour évaluer le rapport non linéaire entre la réaction du sol au pieu et son déplacement compatible avec le comportement non linéaire apparent dans la réponse du sol environnant.

#### 4.5 Résistance latérale

La plus simple méthode pour estimer la résistance latérale des pieux est d'utiliser l'hypothèse de WINKLER . L'équation régissant le mouvement du système sol – pieu et ayant le module de réaction constant avec la profondeur est :

$$E_p I_p \frac{d^4 y}{dz^4} + K_h B (y - u) = 0$$

#### 4.6 Conclusion

Les fondations sur pieu subissant un séisme se comportent comme des éléments flexibles dont le comportement dépend de la nature du sol environnant. Beaucoup de modèles rationnels de pieux doivent prêter une attention spéciale à la réponse sismique des couches du sol.

Les méthodes souvent utilisées pour ce genre de problèmes d'interaction sont celle de WINKLER ou celle d'une poutre sur sol élastique.

Lorsque le sol est jugé sensiblement liquéfiable une importante réduction de la résistance latérale doit être considérée dans le calcul.

## **Chapitre 03**

### **Les Méthodes de Calcul des Pieux Sous Charges Dynamiques et Sismiques**

#### **1. Introduction**

Les fondations sur pieux soumis à des forces dynamiques et horizontales peuvent être un exemple de ces systèmes. Dans la pratique on peut rencontrer par exemple : des fondations sur pieux de machines, de plate-forme pétrolières, des quais et moles, des phares, des supports de pont et des fondations de pylônes électriques.

Le développement des méthodes numériques en dynamique des structures permet maintenant l'analyse de problèmes de fondations compliqués, qui en raison même de leur complexité n'avaient pu être traités auparavant que de manière approximative. A cette classe de problèmes appartient l'analyse des systèmes dynamiques à grand nombre de degrés de liberté.

La littérature est riche d'une masse importante des recherches et publications sur le sujet, d'où la nécessité de faire un travail de synthèse de quelques méthodes existantes tels que ; la méthode simplifiée de calcul des pieux en zone sismique « Méthode de SOULOUMIAC » et la méthode de calcul des fondations sur pieux sollicités par des forces horizontales et dynamiques « Méthode de W. CICHY »

#### **2. Méthode de SOULOUMIAC**

Cette méthode simplifiée consiste à déterminer la déformée d'un profil de sol sous action sismique, et à calculer les pieux en admettant que leur déformée propre est identique a celle du profil de sol considéré. Dans une telle approche, on néglige la réaction du sol, se qui va dans le sens de la sécurité ; on néglige aussi les forces d'inertie apportées par la structure au cours du séisme, ce qui va cette fois en sens inverse du conservatisme ; toute fois le calcul aux éléments finis de fondation profondes faisant intervenir le module de réaction du sol et l'interaction sol-structure a montré que le résultat globale différait peu de celui donné par la méthode simplifiée, sauf peut être dans le cas des sols anormalement compressibles, Type Mexico.

La méthode simplifiée proposée consiste à définir l'équation de la déformée du profil du sol étudié correspondant au mode fondamental d'oscillations libres de la colonne de sol. Au passage, il sera utile de calculer la période de ce mode de vibration, permettant d'une part de déterminer le déplacement maximal du sol pour une accélération en champ libre donnée, d'autre part de comparer cette période de vibration à celle de la structure supportée, pour déceler s'il n'y a pas mise en résonance de l'ensemble sol-structure.

## 2.1 Les arguments de la méthode

La rupture par cisaillement des pieux courts et rigides causés par les déplacements imposés lors d'un séisme a fait penser à la conception d'un élément flexible et long.

L'importance des déplacements du sol au champ libre constatée dans les sols lâches. Ce type de sol vu leur liaison intergranulaire non rigides constitue un filtre pour les perturbations de haute fréquence « expliqué par le fait que les grains rentrent en vibration propre (de fréquence variant entre 0.40 s et 1 s ) » et ce même type de sol accentue les perturbations de petite fréquence (0.4 et 1s) que l'on peut expliquer par le phénomène de résonance, mais à l'inverse des fréquences, les déplacements et les vitesses restent grandes.

Les dépouillements faits par SEED et NEWMARK augmentent l'hypothèse de la méthode « la flexibilité de l'élément de fondation ».

## 2.2 Principe de la méthode

- Déterminer la déformée de la colonne sol.
  - Au passage déterminer la pulsation du mode fondamentale.
  - En déduire le déplacement maximal pour une accélération donnée.
- Calcul des efforts internes du pieu flexible.

### Remarque

Le sol présentant une multicouche homogène nécessite le calcul de la période fondamentale équivalente par des méthodes vues ultérieurement.

## 2.3 Les différentes étapes

- Mesurer les déplacements ou les caractéristiques physiques et mécaniques notamment :
  - La masse volumique du sol
  - Le module de cisaillement

On déduit la vitesse de l'onde :

$$V^2 = \frac{G}{\rho}$$

- Détermination de l'équation de la déformée

A partir des conditions aux limites, calculons la pulsation propre du mode fondamental et en déduire la période et le déplacement.

En dépit de la flexibilité du pieu, le chargement sera sinusoïdal et les efforts internes seront ainsi facilement déterminés et qui ne dépendent finalement que de paramètres connus.

De ce fait on a traité deux cas de profil sur substratum rocheux :

- Profil de sol homogène
- Profil de sol constitué de plusieurs couches homogènes

### 2.3.1 Profil de sol homogène sur substratum rocheux

#### 2.3.1.1 Etablissement de l'équation fondamentale de la déformée du sol

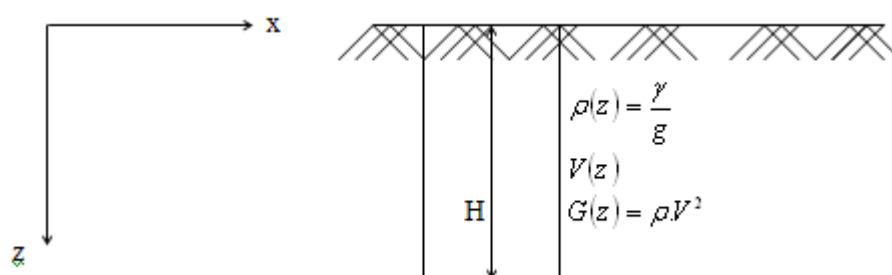


Fig. III.1 : Sol homogène sur substratum rocheux

Les paramètres géotechniques nécessaires pour la détermination de la déformée correspondant au mode fondamental de vibration du profil sont : la densité  $\rho$ , la vitesse de l'onde de cisaillement  $V$  et l'épaisseur  $H$  de la couche de sol ; si on introduit dans les calculs le module de cisaillement :  $G = \rho \cdot V^2$ , l'équation du mouvement des ondes de cisaillement qui voyagent de bas en haut du profil sera « Fig.III.1 » :

$$\rho = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( G \frac{\partial x}{\partial z} \right) \quad (1)$$

La solution générale de  $X(z, t)$  satisfaisant à l'équation (1) est une série illimitée ; si le sol vibre librement sur le premier mode à la fréquence fondamentale  $\omega$ , seul le premier terme de la série sera pris en compte ; dans ce cas tous les points du sol vibrent en phase à la fréquence  $\omega$  et :

$$X(z, t) = X(z) e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2)$$

Dans cette expression,  $X(z)$  représente la forme du premier mode, et on substituant (2) dans (1), on obtient l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dz} \frac{dX}{dz} + \frac{\rho \omega^2}{G} = 0} \quad (3)$$

Deux conditions aux limites sont nécessaires pour résoudre cette équation : déplacement relatif nul à l'interface rocher/sol, et contrainte de cisaillement nulle à la surface du sol.

$$X(H) = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{dX}{dz} \right)_{z=0} = 0$$

Pour une couche unique de sol homogène on considère :

- $V = \text{constante}$
- $\rho = \text{constante}$

L'équation (3) devient :

$$\boxed{\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{\omega^2}{V^2} X = 0} \quad (4)$$

La déformée correspond au premier mode de vibration est la sinusoïde d'équation :

$$\boxed{X = \cos \frac{\omega}{V} z} \quad (5)$$

A partir des conditions aux limites, la pulsation  $\omega$  aura pour expression :

$$\boxed{\omega = \frac{\pi V}{2 H}} \quad (6)$$

L'équation de la déformée correspond au premier mode devient :

$$\boxed{X = \cos \frac{\pi z}{2 H}} \quad (7)$$

La période du mode fondamentale de vibration a pour valeur :

$$\boxed{T = \frac{4H}{V}} \quad (8)$$

2.3.1.2 Détermination des efforts dans un pieu

a) Pieu colonne « pieu encastré en tête et articulé en pied »

En prenant l'hypothèse fondamentale selon laquelle le pieu est suffisamment long et flexible pour suivre la déformée du sol (Fig. III.2- III.3).

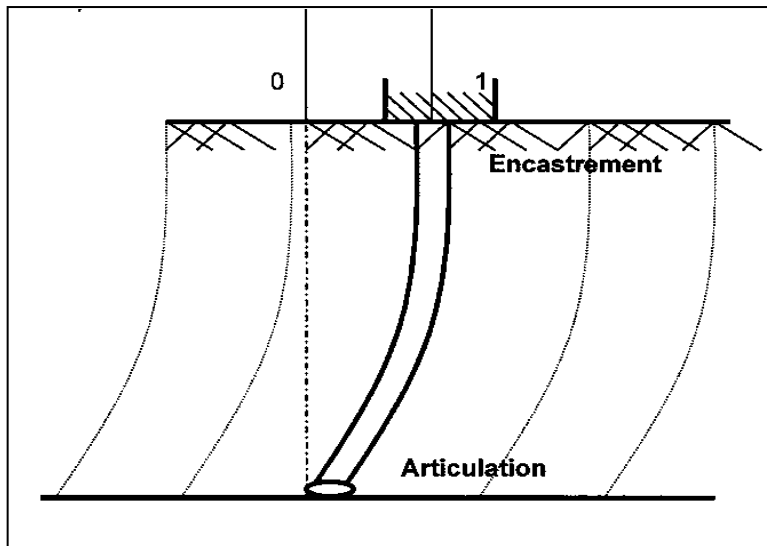


Fig. III.2 : Modèle de calcul

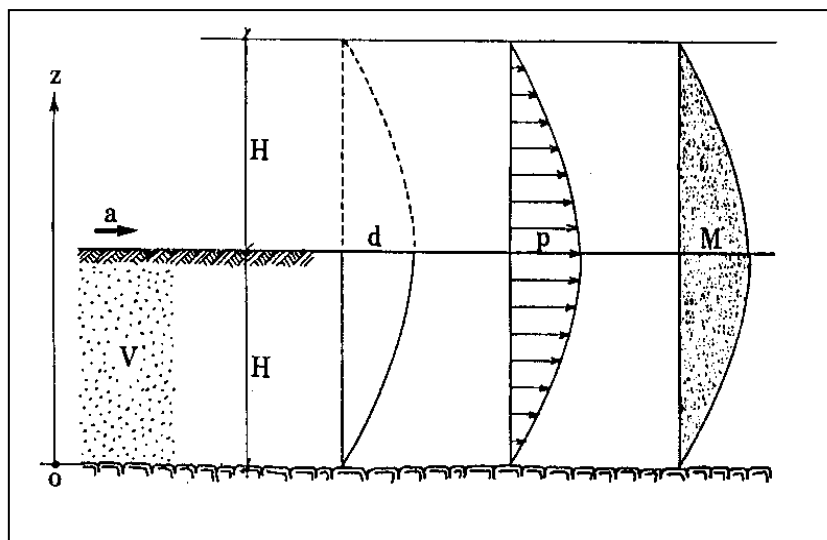


Fig.III.3 Déformée du pieu, ligne de charge et courbe des moments dans le cas d'un seisme

Considérons la ligne de charge à une équation sinusoïdale :

$$p(z) = p \cdot \sin \frac{\pi z}{2H}$$

(9)

Equation de l'effort tranchant :

$$N(z) = \frac{2pH}{\pi} \cos \frac{\pi z}{2H} \quad (10)$$

Equation du moment fléchissant :

$$M(z) = \frac{4pH^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{2H} = \frac{4H^2}{\pi^2} p(z) \quad (11)$$

Equation de la déformée :

$$EI.d(z) = \frac{16pH^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi z}{2H} = \frac{16H^4}{\pi^4} p(z) \quad (12)$$

En éliminant  $p(z)$  :

$$M(z) = \frac{\pi^2}{4H^2} EI.d(z) \quad (13)$$

Le moment maximal et la flèche maximale étant obtenus à la surface du sol ( $z = H$ )

On en déduit le déplacement maximal et le moment maximal :

$$d = \frac{a}{\omega^2} = \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (14)$$

$$M_{\max} = \frac{EI}{V^2} a \quad (15)$$

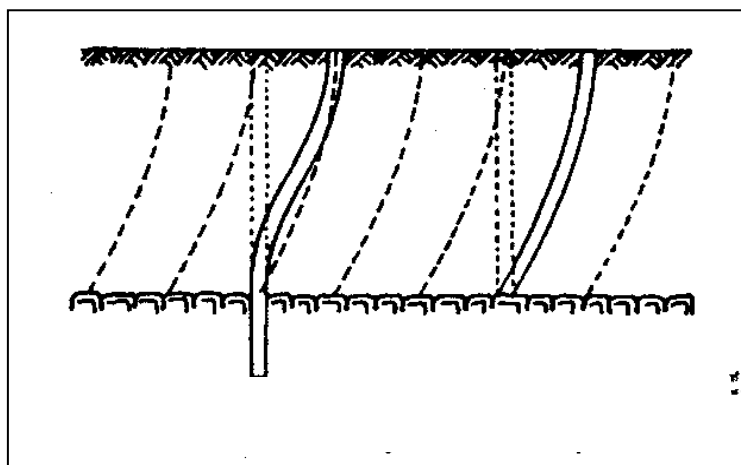
En concluant la charge maximale  $p$  en fonction de  $d$

$$p = \left( \frac{\pi}{2H} \right)^3 EI.d \quad (16)$$

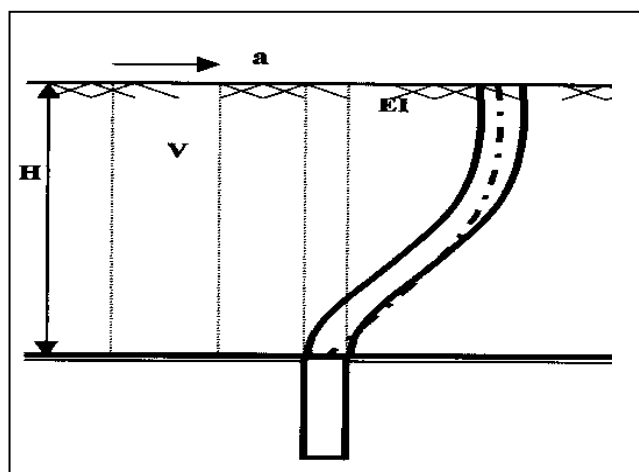
On en déduit la valeur maximale de l'effort tranchant :

$$N_{\max} = \frac{\pi}{2V^2 H} EI.a \quad (17)$$

b) Pieu colonne « pieu encastré en tête et encastré en pied »



(a)



(b)

Fig. III.4 Déformée d'un pieu parfaitement encastré dans le substratum rocheux et d'un pieu articulé en pied

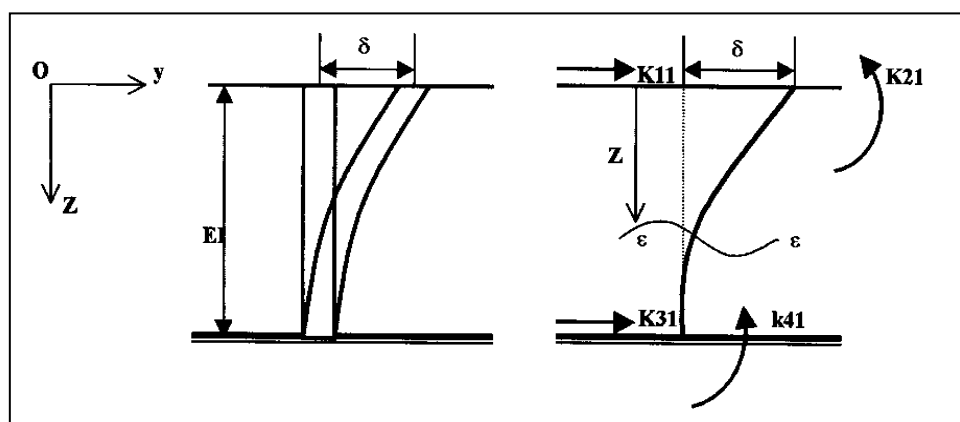


Fig. III.5 : Modèle de calcul

- $M(z) = K_{11} \cdot z - K_{21}$
- $EI \cdot y' = K_{11} \cdot \frac{z^2}{2} - K_{21} \cdot z + C_1$  avec :  $M(z) = EI \cdot y''(z)$
- $EI \cdot y = K_{11} \cdot \frac{z^3}{6} - K_{21} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 \cdot z + C_2$  (18)

### Conditions aux limites

- $z = 0 \Rightarrow y(0) = \delta$  (1)
- $z = 0 \Rightarrow y'(0) = 0$  (2) (19)
- $z = L \Rightarrow y(L) = 0$  (3)
- $z = L \Rightarrow y'(L) = 0$  (4)

Ce qui donne :

- $C_1 = 0$  (20)

- $C_2 = EI$

- $K_{11} = \frac{12EI}{L^3}$  (21)

- $K_{21} = \frac{6EI}{L^2}$  (22)

On remplace ces valeurs dans les équations (17) et (18), on obtient :

- $y(z) = \delta \left[ 1 - 3 \left( \frac{z}{L} \right)^2 + 2 \left( \frac{z}{L} \right)^3 \right]$  (23)

Vu que le déplacement maximal  $\delta$  du sol étant lié à l'accélération en champ libre  $a$  par la relation suivante :

$$\delta = \frac{a}{\omega^2}$$

On en déduit l'équation du moment :

- $M(z) = \frac{12EI}{L^3} \left( z - \frac{L}{2} \right) \frac{a}{\omega^2}$  (24)

On calculant le moment maximal en fonction de  $a$  :

$$M_{\max} = M(z = L)$$

$$\bullet \quad M_{\max} = \frac{3}{2} \left( \frac{T}{\pi L} \right)^2 EI.a \quad (25)$$

On en déduit la valeur maximale de l'effort tranchant :

$$\bullet \quad T_{\max} = \frac{3}{\pi^2} \frac{T^2}{L^3} EI.a \quad (26)$$

### c) Pieu flottant

On parle d'un pieu flottant lorsque celui-ci ne descend pas jusqu'au substratum rocheux.

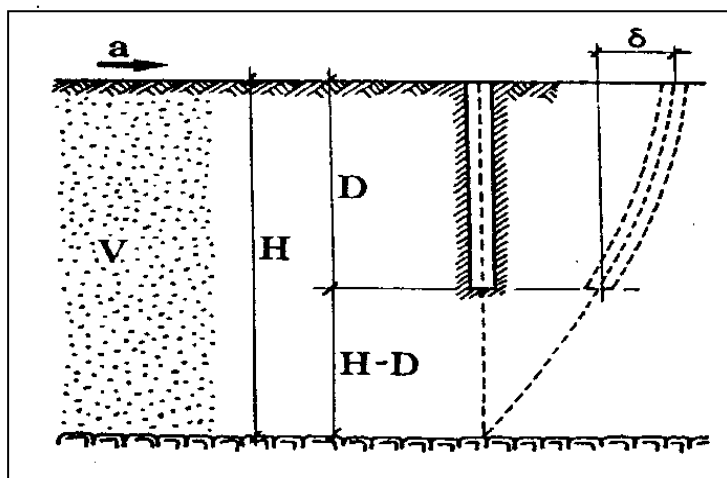


Fig. III.6 Cas d'un pieu ne descendant pas jusqu'au sol rocheux (pieu flottant)

La période de vibration du mode fondamentale de la couche homogène se calcule comme précédemment :

$$\bullet \quad T = \frac{4H}{V}$$

Le déplacement relatif de la tête du pieu a pour valeur :

$$\bullet \quad \delta = \frac{T^2}{4\pi^2} a \left( 1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{H-d}{H} \right) \quad (27)$$

On en déduit la valeur maximale du moment :

$$\bullet \quad M_{\max} = \frac{T^2}{16H^2} EI.a \left( 1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{H-d}{H} \right) \quad (28)$$

On en déduit la valeur maximale de l'effort tranchant :

$$\bullet \quad N_{\max} = \frac{\pi T^2}{32H^3} EI.a \left( 1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{H-d}{H} \right) \quad (29)$$

### 2.3.2 Profil de sol constitué de plusieurs couches homogènes

La détermination du déplacement relatif de la colonne sol hétérogène revient à évaluer la période équivalente du premier mode de vibration d'un profil multicouche.

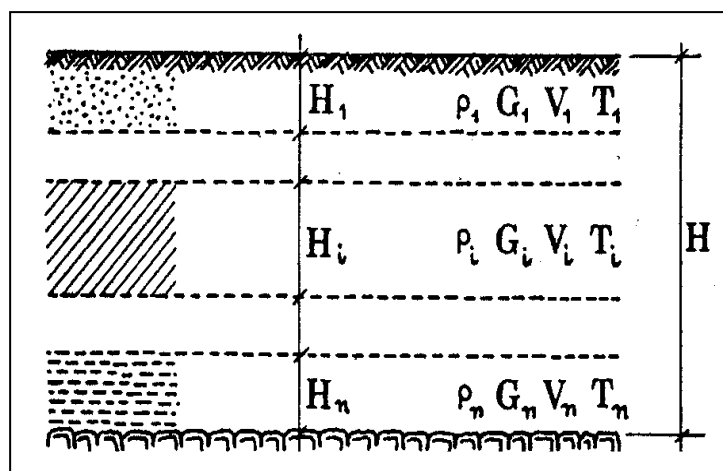


Fig. III.7 Sol constitué de plusieurs couches homogènes

Pour ce faire il existe plusieurs méthodes de calcul de périodes :

#### 2.3.2.1 Méthodes de calcul de la période fondamentale équivalente :

##### a) Méthode de SHIMA

⇒ Somme des périodes élémentaires

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{4H_i}{V_i} \quad \text{avec : } T_i = \frac{4H_i}{V_i}$$

##### b) Méthode de MADERA

⇒ Moyenne pondérée des vitesses

$$T = \frac{4H^2}{\sum_{i=1}^n V_i H_i} \quad \text{ou} \quad T = \frac{4 \left( \sum_{i=1}^n H_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n V_i H_i}$$

##### c) Méthode d'AMBRASEYS

⇒ Moyenne pondérée des modules

$$T = \frac{4H}{\sqrt{\frac{\sum G_i H}{\sum \rho H_{ii}}}}$$

**d) Méthode de MADERA**

⇒ Application successive de la méthode bicouche

**d.1 ) Sans pondération des densités**

Une faible variation des densités des couches adjacentes

$$\text{Si } \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{H_2}{H_1} \approx \frac{H_2}{H_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{H_2}{H_1} = \text{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_1}{T} \cdot \text{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_2}{T}}$$

**d.2 ) Avec pondération des densités**

$$\text{Si } \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{H_2}{H_1} \neq \frac{H_2}{H_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{H_2}{H_1} = \text{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_1}{T} \cdot \text{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_2}{T}}$$

Pour n couches, l'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_n}{\rho_i} \cdot \frac{H_n}{H_i} \cdot \frac{T_{n-1}^*}{T_n} = \text{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_{n-1}^*}{T} \cdot \text{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_n}{T}}$$

Où :  $T_i^*$  = La période équivalente de i couche.

**e) Méthode de RAYLEIGH**

⇒ La déformation du sol est d'une forme linéaire du mode fondamental au lieu de sinusoidal, donne l'expression suivante de la pulsation :

$$\boxed{\omega^2 = 3 \cdot \frac{\sum V_i \cdot H_i}{H^3}}$$

⇒ L'énergie potentielle du système vibrant au champ libre dans le mode fondamental est :

$$\boxed{V = \omega^2 \int_0^H \rho \cdot X^2 \cdot dz}$$

⇒ L'énergie cinétique T est :

$$\boxed{T = \int_0^H \rho \cdot V^2 \left( \frac{dX}{dz} \right)^2 \cdot dz}$$

Et comme le système est libre, on applique le théorème de la conservation d'énergie ( $T = V$ )

On obtient :

$$\omega^2 = \frac{\int_0^H \rho \cdot V^2 \left( \frac{dX}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^H \rho \cdot X^2 dz}$$

⇒ Hypothèses : -  $\rho = \text{constante}$   
- variation linéaire de la déformée

d'où :

$$\omega^2 = \frac{4 \cdot \sum_1^n \left( \frac{H - z_i}{V_i} \right)^2 \cdot H_i}{\sum_1^n (X_i + X_{i+1})^2 \cdot H_i}$$

### Conclusion

On choisit parmi les six (06) méthodes celle de MADERA et celle de RAYLEIGH (procédé simplifié).

Ce choix est justifié par le fait que les résultats donnés par ces deux (02) méthodes ne sont pas influencés par le changement brusque des caractéristiques de la couche ( $V_i, G_i, \rho_i$ ).

L'exactitude de ces deux méthodes donne des erreurs inférieures à 10% pour tous les profils envisagés par M. DOBREY.

En fin, on sélectionne celle de RAYLEIGH, car elle a une résolution itérative à convergence rapide, facilement programmable.

**Remarque** : Flexibilité du pieu.

Selon POULOS, on définit la rigidité relative sol – pieu par :

- $K_r = \frac{E_p \cdot I_p}{E_s \cdot D^4}$  « pour un module de réaction constant avec la profondeur »
- $K_r \rightarrow \infty \Rightarrow$  Pieu rigide
- $K_r \rightarrow 0 \Rightarrow$  Pieu souple « flexible »

Selon CASSAN, on considère un pieu infiniment souple lorsque :

- $D > 3l_o$   
avec :  $l_o = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E_p \cdot I_p}{E_s}}$
- $K_r < \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^4 = 3.1 \times 10^{-3}$

**Commentaires**

L'auteur a pu déterminer les efforts internes  $M$  et  $T$  dans le pieu en passant d'un état complexe à un état simple (une poutre isostatique chargée de la forme sinusoïdale) et à partir des caractéristiques facilement mesurables en laboratoire.

Les efforts internes développés ne s'opposent plus aux forces d'inerties (les seuls qui caractérisent la solution à un problème dynamique) rendant le problème plus proche de la statique que de la dynamique.

Pour admettre une vitesse de propagation constante le long de la couche, il faut que cette dernière soit unique et moins épaisse.

Isoler le pieu de la superstructure en tenant compte des conditions d'appuis. Ceci revient à négliger toutes les forces horizontales et dynamiques développées à la base de la structure lors d'un séisme.

Les grands déplacements enregistrés sur champ libre 1.60 m en zone du sol lâche (MEXICO), mettre en cause les hypothèses des petites déformations afin d'établir l'équation du mouvement de l'onde de cisaillement (déduite de la théorie d'élasticité parfaite).

**Autres remarques :**

Il convient de signaler qu'il y a une différence entre un effort sismique où c'est le sol qui provoque la déformation du pieu, et un effort dynamique et horizontal, où c'est le pieu qui déforme le sol « Fig. III.8 »

Nous attirons l'attention du lecteur que la méthode simplifiée de calcul des pieux sous un effort sismiques établit par l'Ingénieur SOULOUMIAC a été sujet à un développement et pour tenir compte :

- On a un encastrement parfait en pointe et on a déterminé les valeurs de  $M(z)$  et  $N(z)$ .
- On a la flexibilité du pieu.

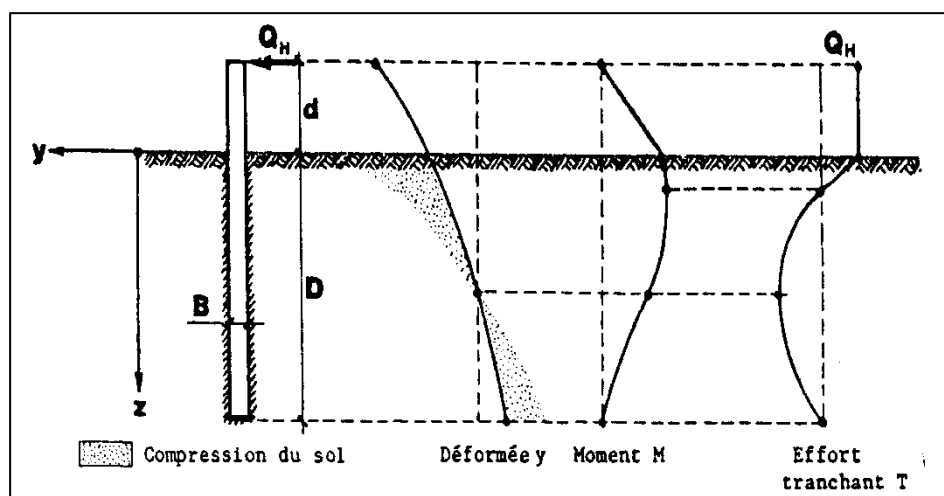


Fig. III.8 Pieu sollicité par un effort horizontal : déformée, courbes des moments, courbe des efforts tranchant

### 3. Méthode de W.CICHY « 1980 »

C'est la méthode de calcul des fondations sur pieux sollicités par des forces horizontales et dynamiques.

Les constructions peuvent être soumises à des sollicitations cycliques ou dynamiques. La frontière entre ces deux genres de sollicitations est très difficile à déterminer précisément. Malgré cela, on peut supposer que les sollicitations cycliques sont des sollicitations ayant des fréquences inférieures à 1 Hz. Nous n'occuperons pas de ces sollicitations cycliques qui sont traitées comme quasi-statiques. Nous tournerons notre attention vers les sollicitations dynamiques harmoniques et horizontales, qui constituent le sujet du présent article. On peut classer les sollicitations horizontales, dynamiques, agissant sur des fondations sur pieux en sollicitations en termes de forces (sollicitations des machines et du vent ; forces de Benard-Karman) et sollicitations en termes de déplacements (tremblement de terre).

Il convient ici de souligner clairement les différences entre les calculs statiques ou quasi-statiques et les calculs dynamiques. On peut bien expliquer cela en considérant l'équation du mouvement fondamental des systèmes dynamiques.

#### 3.1. Sollicitations cycliques :

Elles sont traitées comme quasi-statique, et en plus les sollicitations cycliques sont supposées correspondantes à des fréquences inférieures à 1 HZ.

#### 3.2. Sollicitations dynamiques et harmoniques :

Nous pouvons classer ce type de sollicitations en deux (02) catégories :

##### 3.2.1 Sollicitations en termes de forces :

Se sont des sollicitations des :

- Machines, du vent
- Forces de Bernard-Karman

##### 3.2.2 Sollicitations en termes de déplacement

**Tremblement de terre :** Le mouvement de la terre est transmis au pieu sous forme d'un déplacement déterminé qui peut être calculé à partir à partir des accelogrammes.

Il existe plusieurs méthodes concernant la statique des fondations sur pieux soumis à des forces dynamiques et horizontales ; parmi ces méthodes on peut citer :

- Les méthodes utilisant le schéma classique de la console encastrée dans le sol, avec une masse concentrée en tête.
- Les méthodes utilisant la solution d'une poutre en vibration sur appuis élastiques
- Les méthodes faisant l'analyse du mouvement d'un système dynamique en état limite.
- Les méthodes utilisant des solutions de poutres sur demi-espace élastique.

### 3.3. Formulations de la méthode

L'auteur a remplacé le pieu par des éléments finis rigides de longueur  $l$  ; ces éléments comportent un ressort et un amortisseur, qui jugeront les éléments entre eux, et qui représente la rigidité du pieu à la flexion, le milieu sol a été remplacé par des éléments elasto-amortissant, le système est sollicité par une force horizontale, harmonique  $H(t)$ .

$$H(t) = H_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

Où :

- $H_0$  : Amplitude de la force
- $\omega$  : La pulsation
- $\varphi$  : La phase

#### 3.3.1 Discussion du schéma de calcul

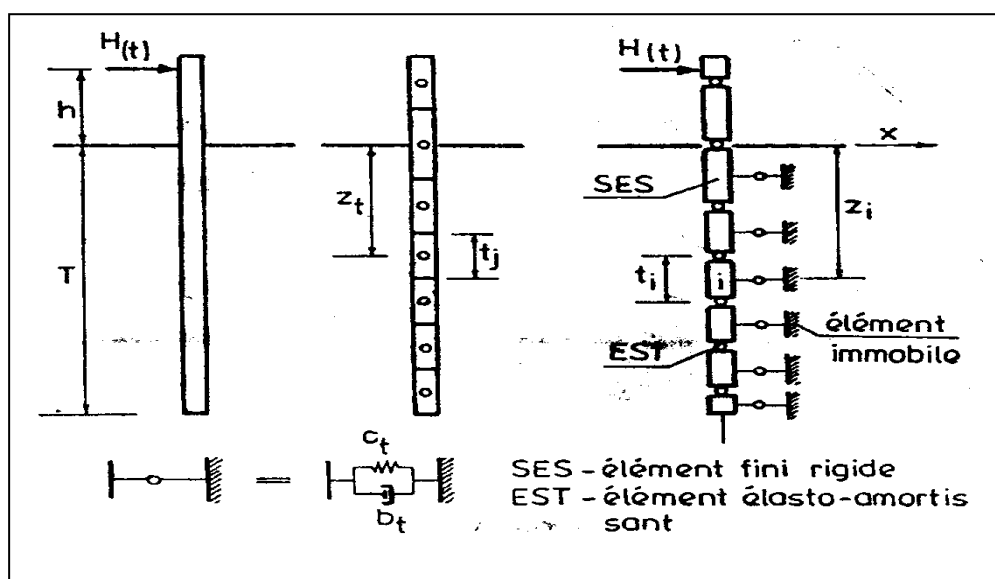


Fig. III.9 Schéma de calcul du système dynamique

Chaque élément à deux (02) degrés de liberté :

Un déplacement en direction de la force dynamique et une rotation par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du mouvement. Le nombre total de degrés de liberté sera donc égales au double du nombre d'éléments rigides. Le calcul comparatif relatif à la division du pieu en un nombre fini d'éléments, a montré que le nombre optimal d'éléments est de l'ordre de 10 à 15 éléments tout dépend de la précision de la fréquence de vibration propre.

### 3.3.2 Discussion de l'équation du mouvement du système constitué par une fondation sur pieux et un sol

On peut décrire le mouvement du système dynamique (pieu sol) en partant de l'équation matricielle de Lagrange.

$$\boxed{M\ddot{q} + L\dot{q} + Kq = h} \quad (2)$$

où :

- M : représente la matrice des masses
- L : représente la matrice d'amortissement
- K : représente la matrice de rigidité
- Q : vecteur des coordonnées généralisées du système
- h : vecteur des sollicitations réduites du système

$$\boxed{h = p - K''z - L''\dot{z}} \quad (3)$$

- p : vecteur des forces réduites sollicitant le système
- z : vecteur des coordonnées réduites des éléments soumis aux sollicitations en terme de déplacement c.à.d le mouvement du sol qui sera transmis au pieu sous forme de déplacement.
- K'' : matrice de rigidité de l'ensemble des éléments elasto-amortissant
- L'' : matrice d'amortissement des mêmes éléments

#### 3.3.2.1 Comparaison entre la solution dynamique et la solution statique

La différence entre la solution statique et la solution dynamique repose sur la prise en compte dans ces derniers cas ; des forces d'inertie et d'amortissement du système pendant les sollicitations dynamiques.

- Dans le cas de solution statique ou quasi-statique, l'équation du mouvement se réduit à la forme :

$$\boxed{Kq = h} \quad (4)$$

- Dans le cas de solution dynamique avec un modèle de KELVIN –VOIGE pour des éléments elasto-amort (l'élément comporte un ressort et un amortisseur), il est nécessaire de faire les hypothèses :

- ✓ d'une interaction linéaire élastique du pieu et du sol
- ✓ d'un amortisseur visco-linéaire

Seul le vecteur h des sollicitations réduites du système change, pour les sollicitations en termes des forces :

$$\boxed{h = p} \quad (5)$$

### 3.3.2.2 Vibrations libres non-amorties du système

Vibrations libres c.à.d les sollicitations extérieures sont nulles, en plus l'amortissement n'influe pas sur les résultats du calcul des vibrations libres, donc on peut le négliger, et l'équation devient :

$$\boxed{M\ddot{q} + Kq = 0} \quad (6)$$

En multipliant cette équation par la matrice  $M^{-1/2}$  on obtient :

$$M^{-1/2}M\ddot{q} + M^{-1/2}Kq = 0$$

D'où :

$$M^{1/2}\ddot{q} + (M^{-1/2}KM^{-1/2})M^{1/2}q = 0$$

Parce que :

$$M^{-1/2}M = M^{1/2} \quad \text{et} \quad M^{-1/2}M^{1/2} = I$$

En introduisant les substitutions :

$$\xi = M^{1/2}q \quad \text{et} \quad A = M^{-1/2}KM^{1/2}$$

où :

A : est la matrice de rigidité transformée

Donc on obtient l'équation transformée suivante :

$$\boxed{\ddot{\xi} + A\xi = 0} \quad (7)$$

La solution de cette équation sous forme harmonique est :

$$\boxed{\xi = \xi_o \sin(\omega t + \varphi)} \quad (8)$$

D'où l'équation des vibrations libres :

$$(A - I\omega_o^2)\xi_o = 0 \quad (9)$$

D'après la règle de CRAMMER, la solution de ce système d'équations simultanées est de la forme :

$$\xi = \frac{0}{\|A - I\omega_o^2\|} \quad (10)$$

Une solution non triviale n'est donc possible que si :

$$\boxed{\|A - I\omega_o^2\| = 0} \quad (11)$$

En développant ce déterminant ; on obtient une équation polynomiale de degré « n » en  $(\omega_{oi}^2)$  pour un système à « n » degré de liberté, les valeurs propres de la matrice « A » sont égales aux carrés des fréquences propres du système  $(\omega_{oi}^2)$ , dans « n » modes de vibrations possibles, le mode correspondant à la plus basse, est appelé le premier mode (ou mode fondamental).

D'où :

$$f_i = \frac{\omega_{oi}}{2\pi} \quad (12)$$

A chaque valeur propre de la matrice A correspond un vecteur propre  $\xi_{oi}$ , ce qui permettra d'obtenir les vecteurs modes de vibrations :

$$q = M^{-1/2} \xi \quad (13)$$

### 3.3.2.3 Vibrations entretenues amorties du système

L'équation fondamentale a la forme suivante :

$$M\ddot{q} + L\dot{q} + Kq = h \quad (14)$$

Et dans le cas d'une force harmonique :

$$h = \text{col}\{h_{oi} \sin(\omega t + \varphi_i)\} \quad (\text{matrice colonne}) \quad (15)$$

Pour la résolution de cette équation, nous avons utilisé la transformation de Fourier :

$$G(j\omega) = [K - M\omega^2 + j\omega L]^{-1} \quad (16)$$

d'où :

$$q(j\omega) = G(j\omega)h(j\omega) \quad (17)$$

où :

$$h(j\omega) = (K - M\omega^2 + j\omega L)q(j\omega) \quad (18)$$

Donc le déplacement peut s'écrire à l'aide du vecteur complexe :

$$q(j\omega) = \text{Re}q(j\omega) + j \text{Im}q(j\omega) \quad (19)$$

Et on peut calculer l'amplitude et la phase de coordonnées généralisées:

$$q_{oi} = \sqrt{[\text{Re}q_i(j\omega)]^2 + [\text{Im}q_i(j\omega)]^2} \quad \text{et} \quad \arctg \frac{\text{Im}q_i(j\omega)}{\text{Re}q_i(j\omega)} \quad (20)$$

En connaissant maintenant les amplitudes des coordonnées généralisées, on peut déterminer le vecteur de déplacement en fonction du temps :

$$q(t) = \text{col}\{q_{oi} \sin(\omega t + \varphi_i)\} \quad \text{avec : } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (21)$$

### 3.4. Matrice d'inertie du système « masse équivalente du sol »

La matrice d'inertie du système est une matrice diagonale, la seule difficulté c'est la détermination de la matrice d'inertie du système, c'est comment évaluer la masse du sol participant au mouvement vibratoire du système.

Les masses et les moments d'inerties massiques sont déterminés grâce à des formules simples de résistance des matériaux.

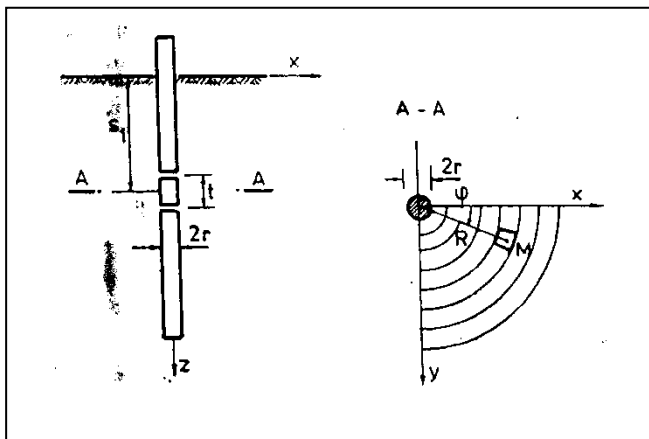


Fig. III.10 Limites d'intégration de l'énergie cinétique du système

#### 3.4.1 Hypothèses du modèle de calcul

On fixe la masse équivalente du sol, en utilisant la condition d'égalité d'énergie cinétique du système des masses réparties du sol, et d'énergie cinétique d'une masse concentrée du sol.

Soit la formule suivante, qui détermine l'énergie cinétique d'une masse concentrée du sol :

$$K_s = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad (22)$$

où :

$m_p$  : masse équivalente de sol

$v$  : vitesse de déplacement du centre de la masse concentrée du sol

$u$  : déplacement du centre de la masse concentrée de sol

L'énergie cinétique du système des masses réparties de sol compris dans le volume  $V$  est décrite par la relation suivante :

$$K_r = \frac{1}{2} \int \rho v_i^2 dV = \frac{1}{2} \rho \int_{s_1-0.5t}^{s_1+0.5t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dx dy dz \quad (23)$$

$$K_r = \frac{1}{2} \rho \int_{s_1-0.5t}^{s_1+0.5t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz \quad (24)$$

Où :

$\rho$  : La densité du sol

$v_x, v_y, v_z$  : Composantes du vecteur de la vitesse de déplacement du point courant du demi-espace élastique.

$u_x, u_y, u_z$  : Composantes du vecteur de déplacement du point courant du demi-espace élastique, déterminées par les équations de Mindlin pour une force concentrée horizontale, appliquée à l'intérieur d'un demi-espace élastique.

On peut exprimer les déplacements des points du demi-espace élastique à un instant donné, en fonction des coordonnées et du temps.

D'où :

$$u = u(x, y, z) \cdot \phi(t) \quad (25)$$

donc à partir de  $K_s = K_r$  on a :

$$m_p \left[ u(x, y, z) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right]^2 = \rho \int_{s_1-0.5t}^{s_1+0.5t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ u_x(x, y, z) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right]^2 + \left[ u_y(x, y, z) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right]^2 + \left[ u_z(x, y, z) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right]^2 \right\} dx dy dz \quad (26)$$

On suppose :  $u(x, y, z) = 1$

On obtient la force  $P$  qui, sollicitant le demi-espace élastique à un instant donné :

$$P = C_t u(x, y, z) = C_t \quad (\text{KN}) \quad (27)$$

où :

$C_t$  : est la constante de rigidité du sol

On utilisant les formules de MINDLIN, déterminant les déplacements élastiques du point matériel du demi-espace élastique excité par la force horizontale  $P = C_t$  appliquée à la profondeur  $S_1$  à partir de la surface du terrain.

L'équation devient :

$$u_{x\phi} = \frac{C_t}{16\pi G(1-\vartheta)} \left[ \frac{3-4\vartheta}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{R^2 \cos^2 \phi}{R_1^3} + \frac{(3-4\vartheta)R^3 \cos^2 \phi}{R_2} + \frac{2S_1 z}{R_2} \left( 1 - \frac{3R^2 \cos^2 \phi}{R_2^2} \right) \right] + \frac{4(1-\vartheta)(1-2\vartheta)}{R_2 + z + S_1} \left[ 1 - \frac{R^2 \cos^2 \phi}{R_2(R_2 + z + S_1)} \right] \quad (28)$$

$$u_{y\phi} = \frac{C_t R^2 \sin \phi \cos \phi}{16\pi G(1-\vartheta)} \left[ \frac{3-4\vartheta}{R_1^3} + \frac{1}{R_2^3} - \frac{6S_1 z}{R_2^5} + \frac{4(1-\vartheta)(1-2\vartheta)}{R(R_2 + z + S_1)^2} \right] \quad (29)$$

$$u_{z\phi} = \frac{C_t R \cos \phi}{16\pi G(1-\vartheta)} \left[ \frac{z - S_1}{R_1^3} + \frac{(3-4\vartheta)(z - S_1)}{R_2^3} - \frac{6S_1 z(z + S_1)}{R_2^5} + \frac{4(1-\vartheta)(1-2\vartheta)}{R_2(R_2 + z + S_1)} \right] \quad (30)$$

où :

$$R_1^2 = R^2 + (z - S_1)^2 \quad , \quad R_2^2 = R^2 + (z + S_1)^2 \quad (31)$$

Après transformations, on obtient la formule suivante, d'après laquelle on peut calculer la masse équivalente du sol :

$$m_p = 4\rho \left[ \frac{C_t}{16\pi G(1-\vartheta)} \right]^2 \int_{s_2-0.5}^{s_1+0.5} \int_0^{2\pi} \left( A^2 + ABR^2 + \frac{1}{2}BR^4 + \frac{1}{2}G^2R^2 \right) dRdz + 2\pi\rho \left[ \frac{C_t}{16\pi G(1-\vartheta)} \right]^2 \int_{s_1-0.5}^{s_1+0.5} \int_r^\infty \left\{ \left[ \frac{3-4\vartheta}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2S_1 z}{R_2^3} + \frac{4(1-\vartheta)(1-2\vartheta)}{R_2 + z + S_1} \right]^2 + \right. \\ \left. + R^2 \left[ \frac{3-4\vartheta}{R} + \frac{1}{R_2} + 2\frac{S_1 z}{R^3} + 4\frac{(1-\vartheta)(1-2\vartheta)}{R_2 + z + S_1} \right] \left[ \frac{1}{R_1^3} + \frac{3-4\vartheta}{R_2^3} - \frac{6S_1 z}{R_2^5} - \frac{4(1-\vartheta)}{R_2(R_2 + z + S_1)} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2}R^4 \left[ \frac{1}{R_4^3} + \frac{3-4\vartheta}{R_2^3} - \frac{6S_1 z}{R_2^5} - \frac{4(1-\vartheta)(1-2\vartheta)}{R_2(R_2 + z + S_1)^2} \right]^2 + \frac{1}{2}R^2 \left\{ \left[ \frac{z - S_1}{R_1^3} + \frac{(3-4\vartheta)(z - S_1)}{R_2^3} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{6S_1 z(z + S_1)}{R_2^5} + \frac{4(1-\vartheta)(1-2\vartheta)}{R_2(R_2 + z + S_1)} \right\}^2 \right\} \quad (32)$$

avec :

$$G = \frac{E_0}{2(1+\vartheta)} \quad R_1^2 = R^2 + [z - S_1]^2 \quad R_2 = R^2 + (z + S_1) \quad (33) \\ R^2 = x^2 + y^2 \quad x = R \cos \phi \quad y = R \sin \phi$$

où :

$E_0$  = module d'élasticité dynamique du sol

$\nu$  = coefficient de poisson dynamique du sol

$t, r, S1$  = les dimensions géométriques des éléments du pieu

Si on suppose que la densité du sol est constante, la valeur de l'énergie cinétique du système répartie dépend du champ de déplacement des points matériels du milieu sol. Le champ de déplacements s'étend théoriquement jusqu'à l'infini, c'est pourquoi, on admet des limites d'intégrations infinies. Cependant dans la pratique, les valeurs des déplacements diminuent avec la distance au point d'application de la sollicitation.

D'après l'exemple, la masse équivalente du sol diminue avec la profondeur du pieu.

### 3.5. Matrice de rigidité du système

La valeur de l'analyse dynamique du système (pieu sol) dépend de la déformation convenable de la rigidité du sol au déplacement horizontal et à la rotation, c.à.d, dépend de l'interaction pieu sol.

#### 3.5.1 Coefficient de rigidité latéral du sol

La formule suivante montre que la réaction du sol (ou la pression sur le pieu ), et le déplacement du sol est linéaire :

$$\boxed{K = \frac{P}{u}} \quad (34)$$

où :

$K$  = coefficient de réaction latéral du sol (N/m<sup>3</sup>)

$P$  = réaction du sol

$U$  = déplacement du sol

L'hypothèse fondamentale pour la résolution des équations précédentes, que le déplacement du sol à une profondeur donnée est égale à la flexion du pieu c.à.d une flexion linéaire.

La résolution d'une équation du mouvement pour une sollicitation (en calcul dynamique) harmonique n'est possible qu'en raison des coefficients constants (avec le temps).

Ces coefficients peuvent se déterminer à partir des essais courants de mécaniques des sols, tels que, le préssiomètre ou le triaxial.

En général, on peut dire que le coefficient de réaction latérale du sol dépend de plusieurs facteurs :

- Les propriétés du sol (densité, degré de sur consolidation, teneur en eau, ...)
- Les dimensions des fondations sur pieux
- La nature et l'ampleur des sollicitations
- Le mode de mise en place des pieux (foncés ou forés)

En présence de sollicitations dynamiques de hautes fréquences de vibration (fondations de machines), il peut apparaître en supplément le phénomène de la liquéfaction du sol autour du pieu, c.à.d sous forme d'une chute contraintes effective dans les grains, donc une chute brutale de la résistance mécanique du sol.

### 3.5.2 Méthode de calcul du coefficient de réaction latérale du sol

La méthode est basée sur la solution de MINDLIN (W. Cichy), qui détermine le champ de déplacements dans le demi-espace sollicité par une force centrée horizontalement appliquée à l'intérieur de ce demi-espace.

En utilisant l'intégrale de la solution de MINDLIN, on obtient :

$$K = \frac{8\pi G(1-\nu)}{r} \frac{1}{B(s_1, z)} \quad (\text{N/m}^3) \quad (35)$$

calcul de  $B(s_1, z)$

$$B(s_1, z) = \left\{ \begin{aligned} & - (3-4\nu) \left( \arcsin h \frac{z-s_1-0.5t}{r} - \arcsin h \frac{z-s_1+0.5t}{r} \right) \\ & + (1+2(1-\nu)(1-2\nu)) \left( \arcsin h \frac{z+s_1+0.5t}{r} - \arcsin h \frac{z+s_1-0.5t}{r} \right) \\ & + \frac{2(z-s_1-0.5t)}{3[r^2+(z-s_1-0.5t)^2]^{3/2}} + \frac{2(z-s_1+0.5t)}{3[r^2+(z-s_1+0.5t)^2]^{3/2}} \\ & + \frac{2r^2(3-4\nu)(z+s_1+0.5t)[r+(z+s_1+0.5t)^2]}{3r^2[r^2+(z+s_1+0.5t)^2]^{3/2}} \\ & - \frac{2z[r^4+3r^2(s_1+0.5t)(z+s_1+0.5t)-z(z+s_1+0.5t)^3]}{3r^2[r^2+(z+s_1+0.5t)^2]^{3/2}} \\ & - \frac{2r^2(3-4\nu)(z+s_1-0.5t)[r+(z+s_1-0.5t)^2]}{3r^2[r^2+(z+s_1-0.5t)^2]^{3/2}} \\ & - \frac{2z[r^4+3r^2(s_1-0.5t)(z+s_1-0.5t)-z(z+s_1-0.5t)^3]}{3r^2[r^2+(z+s_1-0.5t)^2]^{3/2}} \\ & + \frac{2}{3r^2}(1-\nu)(1-2\nu)(z+s_1+0.5t) \left[ (z+s_1+0.5t) - [r^2+(z+s_1+0.5t)^2]^{1/2} \right] \\ & - \frac{2}{3r^2}(1-\nu)(1-2\nu)(z+s_1-0.5t) \left[ (z+s_1-0.5t) - [r^2+(z+s_1-0.5t)^2]^{1/2} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$G = \frac{E_0}{2(1+\nu)}$$

Avec :

$k$  : coefficient de réaction latéral du sol,

$G$  : module d'élasticité transversale du sol,

$E_0$  : module d'élasticité dynamique du sol,

$\nu$  : coefficient de poisson dynamique de sol,

$r$  : rayon de la demi-largeur du pieu,

$t$  : hauteur de l'élément fini rigide du pieu,

$z$  : profondeur du ressort équivalent, pour lequel nous déterminons le coefficient de réaction latérale du sol.

$s_1$  : profondeur du centre de l'intervalle sur lequel on calcule le coefficient de réaction latéral du sol.

A partir de cette formule, on peut constater que les valeurs des coefficients de réaction latérale du sol dépendent des dimensions des éléments pour lesquels, on a devisé le pieu ; les valeurs de ces coefficients sont plus grandes lorsque les dimensions des éléments sont petites, et en plus l'équation présentée ci dessus donne une valeur constante avec la profondeur, tandis que des expériences montrent que le coefficient de réaction du sol augmente avec la profondeur du pieu, surtout dans les sols pulvérulents.

Cependant, pour le calcul dans un sol cohérent, on prend un module de Young constant. C'est pour cette raison qu'on utilise dans la solution une variation linéaire du coefficient de réaction du sol avec la profondeur :

$$\boxed{K_t = K \frac{z}{T}} \quad (\text{N/m}^3) \quad (36)$$

où :

$T$  : profondeur du pieu

$Z$  : profondeur sur laquelle on détermine le coefficient de réaction.

$K$  : valeur maximale du coefficient de réaction latérale du sol.

On peut alors calculer la rigidité latérale de l'élément de sol en termes de déplacements par la formule suivante :

$$c_t = k_t F = k_t \cdot 2r \cdot t \quad (\text{N/m}) \quad (37)$$

On calcul la rigidité latérale de l'élément de sol en termes de rotation par la formule suivante :

$$c_r = k_r I_y \quad (\text{N/m}) \quad (38)$$

où :

F ; section latérale

$K_r$  : coefficient de réaction latérale de sol en termes de rotation d'élément

$I_y$  : moment d'inertie de la surface en contact d'élément par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du mouvement calculé d'après les formules suivantes :

$$I_y = \frac{2.r.t^3}{12} \quad (\text{m}^4)$$

$$k_r = w_r.k_t \quad (\text{N/m}^3) \quad (39)$$

$w_r$  : coefficient de proportionnalité déterminant le rapport du coefficient de réaction en termes de poussée en rotation au coefficient de réaction en termes de poussée en translation (déterminé expérimentalement).

On peut admettre les valeurs du coefficient  $w_r$  d'après le tableau suivant par rapport à l'index de souplesse  $\alpha$ .

$\alpha = l/2r$	5	10	15	20	25
$w_r$	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2

### 3.6. Matrice d'amortissement du système

L'amortissement du système (fondation sur pieu et sol) se compose de l'amortissement du matériau de fondation et de l'amortissement dû à la géométrie du sol.

#### 3.6.1 L'amortissement géométrique (radial) du sol

Elle repose sur la dispersion de l'énergie dans un train d'ondes, résultant des vibrations de la fondation.

Les ondes, se produisant dans un voisinage de la fondation (pieu), se propagent vers l'extérieur et ne sont jamais réfléchies vers cette zone.

L'amortissement matériel du sol s'exprime par la perte d'énergie causée par le frottement entre les grains du sol. On peut caractériser les propriétés amortissantes du sol à l'aide des constantes matérielles suivantes :

➤ Le décrément logarithmique de l'amortissement

$$\delta = \Delta = \mathcal{G} = Ln \frac{A_i}{A_{i+1}} \quad (40)$$

$A_i$  et  $A_{i+1}$  désignant deux amplitudes consécutives de la vibration libre amortie.

- Le facteur d'amortissement

$$D = \xi = \zeta = \lambda_n = \frac{b}{b_c} = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (41)$$

où :

$b$  : coefficient d'amortissement effectif (Ns m<sup>-1</sup>)

$b_c$  : coefficient d'amortissement critique (Ns m<sup>-1</sup>)

$k$  : constante d'élasticité du sol (N1s m<sup>-1</sup>)

$m$  : masse du sol

- Le coefficient de pertes

$$\gamma = Q^{-1} = \phi\omega \quad (42)$$

avec :

$\phi$  : module d'amortissement

$\omega$  : fréquence de vibration libre du système

- la capacité d'amortissement

$$\psi = \frac{\Delta w}{w} \quad (43)$$

où :

$\Delta w$  : perte relative d'énergie par cycle

$w$  : énergie de vibration par cycle

Pour la détermination de la matrice d'amortissement, on utilise les méthodes indirectes :

- la méthode locale (la méthode de Rayleigh et la méthode simplifiée de Rayleigh)
- la méthode Modale de la formation de la matrice d'amortissement

### 3.6.1.1 La méthode locale

Elle repose sur la détermination des sous-matrices pour chaque élément séparément et sur la construction ultérieure grâce à ces sous-matrices de la matrice globale du système, on peut citer :

#### a - La méthode de Rayleigh

$$L = \alpha M + \beta K \quad (44)$$

où :

$\alpha, \beta$  : coefficients de proportionnalité

$M$  : matrice d'inertie du système

$K$  : matrice de rigidité du système

Ces coefficients sont liés au facteur d'amortissement par les relations suivantes :

$$D = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_n}{\omega_{\min}} + \frac{\omega_{\min}}{\omega_n} \right) D_{\min} \quad (45)$$

d'où :

$$\alpha = D_{\min} \omega_{\min} \quad , \quad \beta = \beta_{\min} / \omega_{\min} \quad (46)$$

où :

$D$  : facteur d'amortissement pour la n-ième fréquence de vibration libre du système.

$D_{\min}$  : facteur d'amortissement pour fréquence la plus basse de vibration libre du système.

$\omega_n$  : n-ième fréquence de vibration propre du système

$\omega_{\min}$  : fréquence la plus basse de vibration propre du système.

### b - La méthode simplifiée de Rayleigh

Dans le cas du système composé d'un matériau homogène, il est plus commode d'utiliser la formule suivante :

$$L = \frac{\gamma}{\omega} K \quad \text{ou} \quad L = \phi K \quad (47)$$

avec :

$L$  : matrice d'amortissement du système

$K$  : matrice de rigidité du système

$\gamma$  : coefficient de pertes

$\omega$  : fréquence de vibration propre du système

#### 3.6.1.2 La méthode modale

Elle repose sur le choix délibéré d'une matrice globale d'amortissement avec, comme données, les modes de vibrations propres du système. Dans cette méthode, on suppose que les modes de vibrations, ne varient pas de manière significative.

Soit  $Q$  la matrice de modes de vibration propres du système :

$$Q = [q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0] \quad (48)$$

où :

$q_i^0$  est le i-ème mode de vibration ayant n composantes (n : nombre de degré de liberté du système )

La matrice  $Q$  est une matrice orthogonale par rapport aux matrices  $M$  et  $K$ .

d'où :

$$\begin{aligned} Q^t M Q &= I, \\ Q^t K Q &= \Omega^2 \end{aligned} \quad (49)$$

Où :

I : matrice unitaire

$\Omega$  : diag[ $\omega_{oi}$ ] : matrice spectrale du système

$\omega_{oi}$  : i-ème fréquence de vibration libre du système

On suppose, dans la méthode modale, qu'on peut aussi réduire la matrice d'amortissement à la forme diagonale à l'aide de la matrice de modes

$$\boxed{R = Q^t L Q = 2Z\Omega} \quad (50)$$

où :

Z : diag[ $D_i$ ] : matrice diagonale des facteurs d'amortissement

$D_i$  : facteur d'amortissement pour le i-ème mode de vibration propre

D'où :

$$\boxed{L = \overline{Q} R \overline{Q}^t} \quad (51)$$

où :

$$\boxed{\overline{Q} = Q M} \quad (52)$$

### 3.6.2 Comparaison des résultats du calcul avec les résultats expérimentaux

L'auteur a vérifié la méthode proposée à l'aide des essais en modèle réduits de pieux de longueur 30 et 40 cm, foncés dans un sol pulvérulent. Le modèle réduit du pieu a été réalisé avec un petit tuyau d'aluminium de 25 mm de diamètre et de  $EJ = 65700$  Mpa.

La force harmonique est exercée par un vibreur et transmise au pieu à l'aide d'une tige en acier.

La comparaison des résultats de calcul avec les résultats expérimentaux est représentée sur le tableau suivant :

Modèle réduit ( cm )	Sol (g/cm <sup>3</sup> )	Amplitude de la force H <sub>0</sub> (N)	Fréquence de vibration propre				Rapport entre les fréquences calculées et les fréquences expérimentales	
			expérimentales		Calculées		$\omega^0_1/\omega_1$	$\omega^0_2/\omega_2$
			$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega^0_1$	$\omega^0_2$		
30	1.59	1.96	38	87	117	436	3.08	5.01
30	1.675	1.96	57	88	138	517	2.42	5.87
30	1.675	4.17	77	130	138	517	1.79	3.98
40	1.59	1.96	108	/	139	372	1.29	/
40	1.59	7.35	120	/	139	372	1.16	/

Tableau de comparaison des résultats du calcul avec les résultats expérimentaux « W. Cichy »

### **Conclusion**

Ces résultats montrent que, plus le modèle est grand, plus les concordances sont meilleures.

Les résultats de calcul donnent toujours des amplitudes de déplacements de la tête du pieu plus fortes que dans les expériences, ce qui va dans le sens de la sécurité.

## Chapitre 04

### Comportement dynamique d'un pieu isolé sous un chargement horizontal

#### 1. Introduction

Devant la complexité du problème liée à la multitude des facteurs entrant en jeu d'une part, et la rhéologie mal connue des sols d'autre part, les méthodes numériques actuelles de dimensionnement des fondations profondes sous chargement dynamique se basent sur des hypothèses simplificatrices qui ne représentent pas le comportement réel de la fondation comme exemple les deux méthodes analysées.

La nature du chargement latéral provenant de la structure est variée. Le chargement peut être statique, comme l'effet de la poussée de terres sur une culée de pont. Il peut être cyclique, comme l'effet de la houle sur les plateformes « off shore ».

Aussi, le chargement peut être sous forme d'un choc, comme l'accostage des navires sur un quai ou un duc d'albe.

Nous avons vu aux chapitres précédents les limites de la méthode de SOULOUMIAC et les grandes performances de la méthode de CICHY néanmoins, cette dernière reste très complexe pour une utilisation pratique. Aussi, nous essayons dans ce qui suit de développer une méthode proche de celle de CICHY mais utilisant des paramètres facile à déterminer, ce qui la rend facilement utilisable par les Ingénieurs dans les bureaux d'études.

La méthode proposée consiste à définir l'équation de la déformée du profil du sol étudié, permettant d'une part de déterminer les réponses dynamiques et statiques dans un sol homogène, d'autre part de comparer ces réponses à celle des méthodes existantes et ce quelques soit les conditions d'appuis.

#### 2. Mise en équation générale

Pour la mise en équation générale du système, on a mis un certains nombres d'hypothèses énumérées ci-dessous et ce quelques que soit les conditions aux limites.

- 1- Pieu infiniment long
- 2- Sol à module de réaction constant avec la profondeur « sol homogène et linéaire »  
 $\Rightarrow E_s(z) = \text{Cste.}$
- 3- Sol à comportement élastique et linéaire  $\Rightarrow E_s(t) = \text{Cste.}$   $\sigma = E_s \cdot \varepsilon$
- 4- Pieu élastique en petits déplacements
- 5- Hypothèse de NAVIER-STOCKES pour les poutres :  $M(z) = EI \cdot \frac{d^2 y}{dz^2}$
- 6- L'énergie cinétique de rotation de la section est négligée :  $\sum M/\varepsilon = 0$
- 7- Hypothèse de WINKLER :  $P(t,z) = E_s \cdot y(z,t)$

## 2.1 Pieu à pointe encastrée

On considère un pieu traversant une couche de sol homogène et encastré dans un substratum rocheux et en fonction des hypothèses de base citées précédemment, le pieu est suffisamment flexible pour suivre la déformée du sol « Fig. IV.1 ».

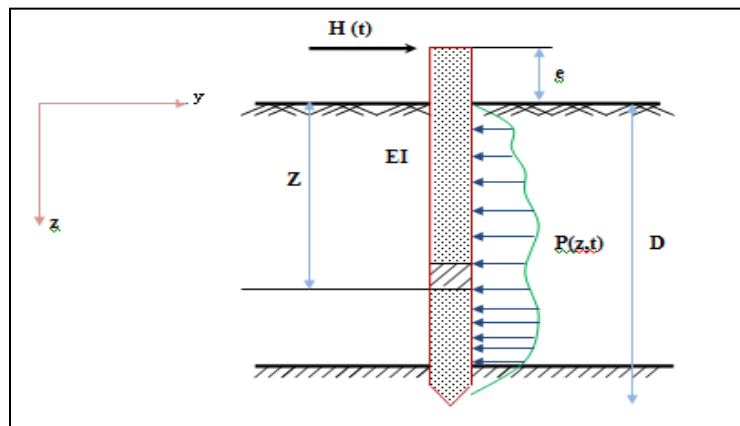


Fig. IV.1 Pieu à pointe encastrée soumis à une charge horizontal

### 2.1.1 Ecriture de l'équation de la déformée du pieu :

Soit un élément du pieu ( $dz$ ) soumis à des charges  $P(z,t)$ , créant au sein de ce dernier des efforts tranchant  $T$  et des moment fléchissant  $M$  aux extrémités « Fig. IV.2 »

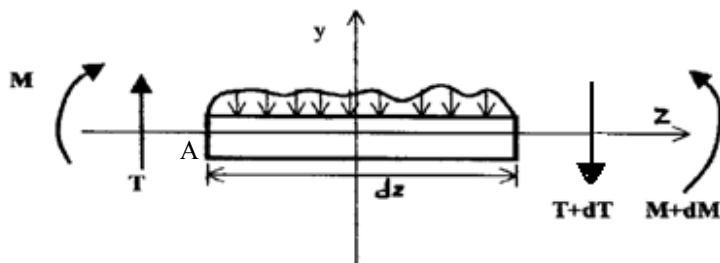


Fig. IV.2 Efforts développés par un pieu sous l'effet de son chargement

Pour trouver l'équation de la déformée on a :

$$\text{➤ } \Sigma M/A = 0 \Rightarrow -M + (M + dM) - (T + dT)dz = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{dM}{dz}} \quad (01)$$

$$\text{➤ } \Sigma F_y = m\gamma = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho \cdot S \cdot dz \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -P \cdot dz - T + (T + dT).$$

$$\Rightarrow -P - \frac{dT}{dz} = \rho \cdot S \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{avec : } P = P(t, z) \cdot B$$

$$\Rightarrow -\frac{dT}{dz} = \rho \cdot S \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + P = -\frac{d^2 M}{dz^2} = -EI \cdot \frac{d^4 y}{dz^4}$$

En équivalence on a : 
$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + E_s \cdot y + \rho \cdot S \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (02)$$

On pose :

$$\alpha = \frac{\rho \cdot S}{EI} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{E_s}{EI}$$

On obtient :

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{E_s}{EI} \cdot y + \frac{\rho \cdot S}{EI} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \beta \cdot y + \alpha \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

D'où on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta \cdot y = 0 \quad (03)$$

On peut pour résoudre cette équation, choisir de limiter le champ des investigations aux solutions possibles qui présentent la forme dite séparable suivante :

$$y(z,t) = g(z) \cdot f(t) \quad (04)$$

On obtient :

$$f \cdot \frac{d^4 g}{dz^4} + \alpha \cdot g \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} + \beta \cdot g \cdot f = 0 \quad (05)$$

Et on divise l'équation (05) par  $f \cdot g$ , on trouve la séparation souhaitée :

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{d^4 g}{dz^4} + \frac{\alpha}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} + \beta = 0 \quad (06)$$

Comme le premier terme n'est fonction que de  $z$ , et le second terme n'est fonction que de  $t$ , l'équation à une solution pour  $z$  et  $t$  arbitraires que si chacune de ces deux termes est constante.

$$\Rightarrow \frac{1}{g} \cdot \frac{d^4 g}{dz^4} = -\frac{\alpha}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} - \beta = Cste = c^4 \quad (07)$$

$$1) \quad \frac{1}{g} \cdot \frac{d^4 g}{dz^4} - c^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 g}{dz^4} - c^4 \cdot g = 0$$

2) hypothèse des petits déplacements  $\Rightarrow f(t)$  petite  $\Rightarrow f$  est une Cste harmonique

$$\frac{\alpha}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} + \beta + c^4 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{f}{\alpha} (\beta + c^4) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{f} + \omega^2 \cdot f = 0} \quad \text{avec : } \boxed{\omega^2 = \frac{1}{\alpha} (\beta + c^4)} \quad (08)$$

La solution générale est :

$$\boxed{g(z) = a.chcz + b.shcz + e.\sin cz + d.\cos cz} \quad (09)$$

### 3. Etude du système en vibration libre

L'Equation des ondes de déflexion est :

$$\boxed{\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta \cdot y = 0} \quad (10)$$

#### 3.1 Conditions aux limites

Etant donné que le pieu est encasté en pointe et libre en tête, on a le déplacement et la rotation qui sont nul, de même pour l'effort tranchant et le moment fléchissant et cela quelque soit t.

- pointe encastée  $\Rightarrow y(D) = 0 \quad \forall t \quad (1)$

$$\Rightarrow y'(D) = 0 \quad \forall t \quad (2)$$

- tête libre  $\Rightarrow T = 0 \quad \forall t \quad (3)$

$$\Rightarrow M = 0 \quad \forall t \quad (4)$$

L'équation du moment devient :  $EI \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0$

$$EI \cdot C^2 [a.chcz + b.shcz - e.\sin cz + d.\cos cz] = 0$$

L'équation de l'effort tranchant devient :  $EI \cdot \frac{d^3 y}{dz^3} \Big|_{z=0} = 0$

$$EI \cdot C^3 [a.sh cz + b.ch cz - e.\cos cz + d.\sin cz] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = d \\ b = e \end{matrix}} \quad (11)$$

$$(1) \rightarrow a.ch cD + b.sh cD + e.\sin cD + d.\cos cD = 0$$

$$(2) \rightarrow a.sh cD + b.ch cD + e.\cos cD - d.\sin cD = 0$$

D'où :

- $a (\operatorname{ch} cD + \cos cD) + b (\operatorname{sh} cD + \sin cD) = 0$
- $c [ a (\operatorname{sh} cD - \sin cD) + b (\operatorname{ch} cD + \cos cD) ] = 0$

L'Equation sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \operatorname{ch} cD + \cos cD & \operatorname{sh} cD + \sin cD \\ \operatorname{sh} cD - \sin cD & \operatorname{ch} cD + \cos cD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Deux cas sont envisagés :

- ✓ pas de déplacement (position d'équilibre)  $\Rightarrow a = b = 0$
- ✓ il existe un déplacement  $\Rightarrow a \neq 0$  et  $b \neq 0 \Rightarrow \text{déterminant} = 0$

D'où l'équation aux fréquences :

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch} cD + \cos cD)^2 - (\operatorname{sh} cD - \sin cD)(\operatorname{sh} cD + \sin cD) = 0 \\ \Rightarrow & \operatorname{ch}^2 cD + \cos^2 cD + 2 \operatorname{ch} cD \cdot \cos cD - \operatorname{sh}^2 cD + \sin^2 cD = 0 \\ \Rightarrow & \boxed{2 \operatorname{ch} cD \cdot \cos cD + 2 = 0} \\ \Rightarrow & \boxed{\cos cD = -\frac{1}{\operatorname{ch} cD}} \end{aligned} \quad (13)$$

Les racines de cette équation sont tabulées comme suit :

N° de racine	1	2	3	4	5	6
$C_n D$	1.8751	4.6941	7.8547	10.9955	14.1371	17.2780
$\frac{C_n D}{\pi/2}$	1.19	2.9883	5	7	9	11

On remarque :

- pour  $n = 1 \rightarrow C_1 D = 1.19 \pi / 2$
- pour  $n \geq 2 \rightarrow C_n D = (2n-1) \pi / 2$  (14)

A partir de (12) on tire  $b_n$  en fonction de  $a_n$  :

$$b_n = \frac{\operatorname{ch} c_n D + \cos c_n D}{\operatorname{sh} c_n D + \sin c_n D} \quad (15)$$

D'où :

$$g_n(z) = a_n \left[ chc_n z + \cos c_n z - \frac{chc_n D + \cos c_n D}{shc_n D + \sin c_n D} (shc_n z + \sin c_n z) \right] \quad (16)$$

On posant :

$$\chi_n = \frac{chc_n D + \cos c_n D}{shc_n D + \sin c_n D} \quad (17)$$

L'équation (16) devient :

$$g_n(z) = a_n [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)] \quad (18)$$

Avec :

$g_n(z)$  : le mode propre associé à la pulsation  $\omega_n$

Et on a :

$$\omega_n^2 = \frac{1}{\alpha} (\beta + C^4)$$

$$\omega_n^2 \cdot D^4 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot D^4 + \frac{1}{\alpha} C_n^4 \cdot D^4$$

$$\omega_n^2 \cdot D^4 = \frac{E_s}{\rho \cdot S} \cdot D^4 + \frac{EI}{\rho \cdot S} C_n^4$$

Donc :

- pour  $n = 1 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{E_s}{\rho \cdot S} + [1.8751]^4 \frac{K_p}{M_p}}$  (19)

- pour  $n \geq 2 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{E_s}{\rho \cdot S} + [2n-1]^4 \cdot \frac{\pi^4}{16} \frac{K_p}{M_p}}$  (20)

### Cas particulier : « cas d'une console $E_s = 0$ »

- pour  $n = 1 \rightarrow \omega_1 = (1.8751)^2 \cdot \sqrt{\frac{K_p}{M_p}}$  (21)

- pour  $n \geq 2 \rightarrow \omega_n = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{K_p}{M_p}}$  (22)

Où :

$K_p = EI/D^3$  : raideur du pieu

$M_p = \rho \cdot S \cdot D$  : masse du pieu

### 3.2 Orthogonalité des modes de vibrations

Les modes de vibrations des systèmes à caractéristiques réparties possèdent les propriétés d'orthogonalité équivalente à celles rencontrées dans le cas des systèmes discret, elles se démontrent de la même manière, par application de la loi de BETTI.

La condition d'orthogonalité, qui fait intervenir la rigidité du pieu, permet d'écrire l'équation des vibrations suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 y}{dt^2} + E_s \cdot y = 0} \quad (23)$$

En écrivant le n-ième mode comme :

$$\boxed{y_n(z, t) = g_n(z) \cdot f_n(t) = g_n(z) \cdot f_n \cdot \sin \omega_n t} \quad (24)$$

Le second terme de l'équation (23) devient :

$$\boxed{\rho \cdot S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\rho \cdot S \cdot \omega_n \cdot g_n(z) \cdot f_n \cdot \sin \omega_n t} \quad (25)$$

L'équation (23) devient donc :

$$\boxed{f_n \cdot \sin \omega_n t \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left( EI \cdot \frac{d^2 y_n(z)}{dz^2} \right) + E_s y_n(z) \cdot f_n \cdot \sin \omega_n t = \rho \cdot S \cdot \omega_n^2 g_n(z) \cdot f_n \cdot \sin \omega_n t} \quad (26)$$

On obtient l'équation finale suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{d^2 g_n(z)}{dz^2} \right) + E_s g_n(z) = \rho \cdot S \cdot g_n(z)} \quad (27)$$

### 3.3 Etude du système forcé (CLOUGH R.W. & PENZIEN J., 1982)

On peut appliquer deux méthodes différentes :

- méthode de superposition des modes
- principe de HAMILTON

#### 3.3.1 Méthode de superposition des modes

Cette méthode permet de remplacer un système de N équations couplées par un système de N équations découplées.

L'opération essentielle de l'étude par superposition des modes est la transformation à partir des coordonnées géométriques de déplacement vers les coordonnées qui représentent les amplitudes modales.

On peut exprimer cette transformation dans le cas d'un milieu continue unidimensionnel comme :

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^n g_i(z).f_i(z) \quad (28)$$

Ce qui signifie simplement que l'on peut construire n'importe qu'elle forme de déplacement admissible en superposant les modes de la structure avec des amplitudes adéquates.

Le procédé est de passer par les étapes suivantes :

- **1 Etape** : Equation du mouvement :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \alpha \frac{\partial^2 y}{dt^2} + \beta \cdot y = H(t) \quad (29)$$

- **2 Etape** : Détermination des fréquences et des modes propres à partir de (19) et (20)

On a :

- pour  $n = 1 \rightarrow \omega_1 = (1.8751)^2 \cdot \sqrt{\frac{K_p}{M_p}}$
- pour  $n \geq 2 \rightarrow \omega_n = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{K_p}{M_p}}$

- **3 Etape** : Détermination de la masse et le chargement généralisé :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot EI \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 y}{dt^2} + E_s \cdot y = H(t,z) \quad (30)$$

On substitue (28) dans (30) on aura :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dz^2} \left[ EI \cdot \frac{d^2 g_i(z)}{dz^2} \right] \cdot f_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho \cdot S \cdot g_i(z) \cdot \ddot{f}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} E_s \cdot g_i(z) \cdot f_i(t) = H(z,t) \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho \cdot S \cdot g_i(z) \cdot \ddot{f}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dz^2} \left[ EI \cdot \frac{d^2 g_i(z)}{dz^2} \right] \cdot f_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} E_s \cdot g_i(z) \cdot f_i(t) = H(z,t) \quad (32)$$

On multipliant (32) par  $g_n(z)$  et on intégrant :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \ddot{f}_i(t) \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_i(z) \cdot g_n(z) dz + \sum_{i=1}^n f_i(t) \int_0^D \frac{d^2}{dz^2} \left( EI \cdot \frac{d^2 g_i(z)}{dz^2} \right) g_n(z) dz + \sum_{i=1}^n f_i(t) \int_0^D E_s \cdot g_i(z) \cdot g_n(z) dz = \int_0^D H(z, t) \cdot g_n(z) dz} \quad (33)$$

On applique les conditions aux 03 premiers termes, il est évident que tous les termes s'annulent sauf le nième d'où :

$$\boxed{\ddot{f}_n(t) \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2(z) dz + f_n(t) \int_0^D g_n(z) \frac{d^2}{dz^2} \left( EI \cdot \frac{d^2 g_n(z)}{dz^2} \right) dz + f_n(t) \int_0^D E_s \cdot g_n^2(z) dz = \int_0^D H(z, t) \cdot g_n(z) dz} \quad (34)$$

$$\boxed{\ddot{f}_n(t) \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2(z) dz + f_n(t) \int_0^D \left[ g_n(z) \frac{d^2}{dz^2} \left( EI \cdot \frac{d^2 g_n(z)}{dz^2} \right) + E_s \cdot g_n^2(z) \right] dz = \int_0^D H(z, t) \cdot g_n(z) dz} \quad (35)$$

On peut établir la relation entre les deux premiers intégraux de l'équation (35), en multipliant l'équation (27) par  $g_n(z)$  et en intégrant d'où :

$$\boxed{\int_0^D g_n(z) \cdot \frac{d}{dz} \left( EI \cdot \frac{d^2 g_n(z)}{dz^2} \right) + E_s \cdot g_n^2(z) dz = \omega_n^2 \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n(z) dz} \quad (36)$$

Donc l'équation (35) devient :

$$\boxed{\ddot{f}_n(t) \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2(z) dz + \omega_n^2 \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2(z) dz = \int_0^D H(z, t) \cdot g_n(z) dz} \quad (37)$$

On remarque que :

1.  $\int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2(z) dz =$  est la masse généralisée du pieu correspondant au Mode  $g_n(z)$  et que l'on note :  $\mathbf{M}_n$

2.  $\int_0^D H(z, t) \cdot g_n(z) dz$  = est la charge généralisée correspondant au Mode  $g_n(z)$  et que l'on note :  $H_n(t)$ .

Donc :

$$M_n = \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2(z) dz \quad (38)$$

$$H_n(t) = \int_0^D H(z, t) \cdot g_n(z) dz \quad (39)$$

D'où l'équation (37) devient :

$$M_n \cdot \ddot{f}_n(t) + M_n \cdot \omega_n^2 \cdot f_n(t) = H_n(t) \quad (40)$$

➤ **4 Etape :** Equations découplées du mouvement :

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 \cdot f_n(t) = \frac{H_n(t)}{M_n} \quad (41)$$

➤ **5 Etape :** Résolution de l'équation de la réponse en coordonnées normales :

L'expression de l'intégrale de DUHAMEL donne :

$$f_n(t) = \frac{1}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \cdot \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (42)$$

Avec :

$$H_n(t) = \int_0^D H(z, t) \cdot g_n(z) dz$$

$$H_n(t) = H_0 \sin \bar{\omega} t \cdot \int_0^D g_n(z=0) dz$$

$$H_n(t) = 2 \cdot H_0 \sin \bar{\omega} t \quad (43)$$

$$f_n(t) = \frac{1}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^t 2 \cdot H_0 \cdot \sin \bar{\omega} t \cdot \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{2 \cdot H_0}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^t \sin \bar{\omega} t \cdot \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (44)$$

$$f_n(t) = \frac{2.H_0}{M_n.\omega_n} \int_0^t [\cos(\bar{\omega}\tau - \omega_n(t-\tau)) - \cos(\bar{\omega}\tau + \omega_n(t-\tau))] d\tau$$

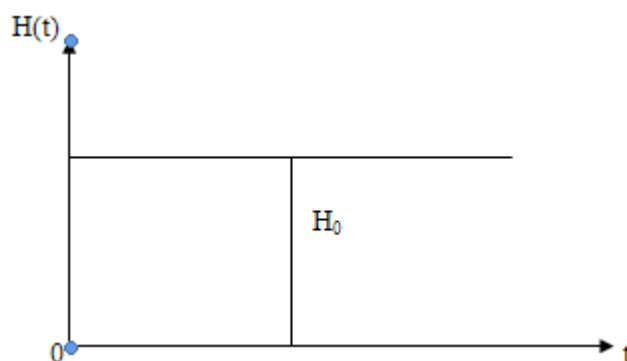
$$f_n(t) = \frac{H_0}{M_n.\omega_n} \left[ \frac{1}{\omega + \bar{\omega}} \sin((\bar{\omega} + \omega)\tau - \omega_n t) - \frac{1}{\bar{\omega} - \omega} \sin((\bar{\omega} - \omega)\tau + \omega_n t) \right]_0^t$$

$$f_n(t) = \frac{2.H_0}{M_n.\omega_n(\bar{\omega}^2 - \omega_n^2)} [\bar{\omega} \sin \omega_n t - \omega_n \sin \bar{\omega} t] \quad (45)$$

$$f_n(t) = \frac{2.H_0}{M_n.\omega_n(\bar{\omega}^2 - \omega_n^2)} [\beta_n \sin \omega_n t - \sin \bar{\omega} t] \quad (46)$$

Avec :  $\beta_n = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}$

**Cas particulier :** si on prend  $H(t) = H_0$



$$H_n(t) = \int_0^D H(z,t).g_n(z) dz = H_0 g_n(z=0) = 2.H_0$$

$$f_n(t) = \frac{2.H_0}{M_n.\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (47)$$

$$f_n(t) = \frac{2.H_0}{M_n.\omega_n^2} [1 - \cos \omega_n t] \quad (48)$$

➤ **6 Etape : Réponse en coordonnées géométriques :**

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_n(z).f_n(z)$$

Où :

$f_n(t)$  : Coordonnées principales (ou normales)

$y(z,t)$  : Coordonnées géométriques.

On trouve :

$$f_n(t) = \frac{2.H_0}{M_n.\omega_n(\bar{\omega}^2 - \omega_n^2)} [\beta_n \sin \omega_n t - \sin \bar{\omega} t] \quad (48')$$

### 3.3.2 Principe de HAMILTON

Cette méthode permet d'éviter les problèmes de détermination des équations vectorielles de l'équilibre, consiste à utiliser les grandeurs énergétiques scalaires sous une forme variationnelle.

Le principe variationnel, le plus applicable est le principe de HAMILTON, que l'on exprime comme :

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \Delta W_{ext} . dt = 0 \quad (49)$$

Où :

**T** : énergie cinétique totale du système

**V** : énergie potentielle du système, comprenant à la fois l'énergie de déformation et le potentiel de toutes les forces conservatrices extérieures.

**Δ** : Variation subie pendant l'intervalle de temps considéré.

**W<sub>ext</sub>** : travail effectué par les forces non conservatrices agissant sur le système, c'est-à-dire l'amortissement et toutes les autres charges extérieures arbitraires.

Le principe de HAMILTON exprime que la somme de la variation d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatrices, prise pendant un intervalle de temps quelconque  $t_1$  et  $t_2$ , est identiquement nulle.

$$T = \frac{1}{2} \int \rho.S \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 . dz \quad (50)$$

Énergie potentielle de déformations du pieu est donnée par :

$$V_f = \frac{E_p I_p}{2} \int_0^D \left( \frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 . dz \quad (51)$$

Énergie potentielle de déformations du sol est donnée par :

$$V_s = \frac{1}{2} \int_0^D y^2 . dz \quad (52)$$

Poids propre du pieu :

$$V_N = -\frac{1}{2} \int_0^D N(z) \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 dz \quad (53)$$

$$\Delta T = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^D \rho \cdot S \left( \frac{dy}{dz} \right) \cdot \Delta \left( \frac{dy}{dz} \right) dz$$

$$\Delta V = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot E_p \cdot I_p \int_0^D \left( \frac{d^2 y}{dz^2} \right) \cdot \Delta \left( \frac{d^2 y}{dz^2} \right) dz - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^D N(z) \left( \frac{dy}{dz} \right) \cdot \Delta \left( \frac{dy}{dz} \right) dz + 2 \cdot \frac{E_s}{2} \int_0^D y \cdot \Delta y \cdot dz$$

$$\begin{aligned} y'' &= g'' \cdot f & , & & y' &= f \cdot g' & , & & \dot{y} &= g \cdot \dot{f} \\ \Delta y'' &= \Delta f \cdot g'' & , & & \Delta y' &= \Delta f \cdot g' & , & & \Delta \dot{y} &= g \cdot \Delta \dot{f} \end{aligned}$$

Et

$$y(z, t) = \sum f_n(t) \cdot g_n(z)$$

$$g_n(z=0) = 2 \cdot a_n \Rightarrow y_n(t, 0) = 2 \cdot a_n \cdot f_n(t)$$

$$\Delta W_{ext} = H(t) \sum \Delta f_n(t) \cdot 2a_n$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^D \rho \cdot S \sum_{n \geq 1} g_n \cdot f_n \cdot \Delta \dot{f}_n \cdot dz - E_p \cdot I_p \sum_{n \geq 1} f_n \cdot g_n'' \cdot g_n'' \cdot \Delta f_n \cdot dz + N(z) \sum_{n \geq 1} f_n \cdot g_n' \cdot g_n' \cdot \Delta f_n \cdot dz - E_s \sum_{n \geq 1} f_n \cdot g_n \cdot \Delta f_n \cdot dz + 2H(t) \sum_{n \geq 1} \Delta f_n \right] dt \quad (54)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{n \geq 1} \dot{f}_n \cdot \Delta \dot{f}_n \cdot dz \left( \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2 \cdot dz \right) - E_p \cdot I_p \sum_{n \geq 1} f_n \cdot \Delta f_n \left( \int_0^D g_n^2 \cdot dz \right) + \sum_{n \geq 1} f_n \cdot \Delta f_n \left( \int N(z) \cdot g_n'^2 \cdot dz \right) - E_s \sum_{n \geq 1} f_n \cdot \Delta f_n \cdot \left( \int g_n^2 \cdot dz + \sum_{n \geq 1} \Delta f_n \cdot 2H(t) \right) \right) dt \quad (55)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \dot{f}_n \cdot \Delta \dot{f}_n \left( \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2 \cdot dz \right) \right] dt = \left[ \int_0^D \rho \cdot S \cdot g_n^2 \cdot dz \right]_{t_1}^{t_2} \cdot \dot{f}_n \cdot \Delta \dot{f}_n \cdot dt \quad (56)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{f}_n \cdot \Delta \dot{f}_n \cdot dt = \left( \dot{f}_n \cdot \Delta \dot{f}_n \right)_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{f}_n \cdot \Delta f_n \cdot dt \quad (57)$$

**Hypothèse de Hamilton**

$\Delta f_n$  s'annule aux bornes d'intégration  $t_1$  et  $t_2$

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \rho.S.g^2_n.\ddot{f}_n - E_p.I_p.f_n.\int_0^D g_n'' dz + f_n \int_0^D N(z).g_n'^2 dz + H[t] \right) \Delta f_n - E_s \int_0^D g_n dz.f_n \right] dt = 0 \quad (58)$$

-  $\Delta f_n$  arbitraire  $\Rightarrow$  le terme entre crochet doit s'annuler  $\forall n$ .

-  $m^* = \int_0^D \rho.S.g^2_n dz \Rightarrow$  la masse généralisée du pieu

-  $K^* = \int_0^D E_p.I_p.g_n'' dz \Rightarrow$  la raideur généralisée du pieu

-  $K^*_G = \int_0^D N(z).g_n'^2 dz \Rightarrow$  la rigidité géométrique

-  $K^*_K = E_s \int_0^D E_s.g_n dz \Rightarrow$  la raideur généralisée du sol

-  $P^* = 2.a_n.H(t)$

on pose  $a_n = 1$ , car  $a_n$  sera simplifiée par la suite dans l'expression de  $y(z,t)$

On aura donc :

$$\ddot{f}_n + \left( \frac{K^*}{m^*} + \frac{K^*_r}{m^*} \right) f_n = \frac{P^*}{m^*} \quad (59)$$

On négligeant le poids du pieu :  $\Rightarrow K_G = 0$

On obtient :

$$\frac{K^*}{m^*} = \frac{E_p I_p \int_0^D g_n'' dz}{\rho.S \int_0^D g_n^2 dz} = \frac{1}{\alpha} \frac{\int_0^D g_n'' dz}{\int_0^D g_n^2 dz}$$

$$\frac{K^*}{m^*} = \frac{E_s}{\rho.S} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{P^*}{m^*} = \frac{2.H(t)}{\rho.S \int_0^D g_n^2 dz}$$

Avec :

$$g(z) = a.chcz + b.shcz + e.\sin cz + d.\cos cz$$

$$\text{On montre que : } \int_0^D g_n^2(z) dz = \frac{D}{2} (a_n^2 - b_n^2 + e_n^2 + d_n^2) \quad (60)$$

Dans ce premier cas, on a :  $a_n = d_n$  et  $b_n = e_n$

$$\text{Donc : } \int_0^D g_n^2(z) dz = a_n^2 \cdot D = D \quad (a_n = 1)$$

(61)

$$g'(z) = c_n (a_n.shcz + b_n.chcz + e_n.\cos cz - d_n.\sin cz)$$

$$g''(z) = c_n^2 (a_n.chcz + b_n.shcz - e_n.\sin cz - d_n.\cos cz)$$

$$\int_0^D g_n''^2(z) dz = c_n^4 \cdot \frac{D}{2} (a_n^2 - b_n^2 + d_n^2 + e_n^2)$$

$$\int_0^D g_n''^2(z) dz = c_n^4 \cdot a_n^2 \cdot D = c_n^4 \cdot D \quad (62)$$

Donc :

$$\frac{K^*}{m^*} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{c_n^4 \cdot D}{D} = \frac{c_n^4}{\alpha}$$

$$\ddot{f}_n + \frac{c_n^4}{\alpha} f_n = \frac{P^*}{m^*} \quad (63)$$

Or :

$$\omega_n^2 = \frac{c_n^4}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} (c_n^4 + \beta) \quad (64)$$

On aura donc :

$$\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n = \frac{P^*}{m^*} \quad (65)$$

Avec :

$$\frac{P^*}{m^*} = \frac{2H_0 \sin \varpi t}{\rho \cdot S \cdot D}$$

La solution de la dernière équation (65) est comme suit :

- Solution homogène :  $f_n^h = \xi_n \sin \omega_n t + \chi_n \cos \omega_n t$
- Solution particulière :  $f_n^p = \theta_n \sin \varpi t$

$$\Rightarrow -\theta_n \cdot \varpi^2 \cdot \sin \varpi t + \omega_n^2 \cdot \theta_n \cdot \sin \varpi t = 2H_0 \cdot \frac{\sin \varpi t}{\rho \cdot S \cdot D}$$

Pour  $\varpi \neq \omega$ , on a :

$$\boxed{f_n = f_n^h + f_n^p = \xi_n \sin \omega_n t + \chi_n \cos \omega_n t + \theta_n \sin \varpi t} \quad (66)$$

Position de repos :  $t = 0 \Rightarrow f_n(0) = \dot{f}_n(0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_n = 0}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_n &= \omega_n \cdot \xi_n \cdot \cos \omega_n t - \chi_n \sin \omega_n t + \theta_n \cdot \varpi \cdot \cos \varpi t \\ \omega_n \cdot \xi_n &= -\theta_n \cdot \varpi \Rightarrow \xi_n = -a_n \cdot \beta_n \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{f_n(t) = \frac{2H_0}{\rho \cdot S \cdot D \cdot \omega_n^2 (1 - \beta_n^2)} (\sin \varpi t - \beta_n \sin \omega_n t)}$$

### 3.3.2.1 Calcul de la masse généralisée : « cas général »

$$g_n(z) = a \cdot ch c_n z + b \cdot sh c_n z + e \cdot \cos c_n z + f \cdot \sin c_n z$$

$$M_n = \int_0^L m(z) \cdot g_n^2(z) dz = \rho \cdot S \int_0^L g_n^2(z) dz$$

$$g_n^2(z) = (a \cdot ch c_n z + b \cdot sh c_n z + e \cdot \cos c_n z + f \cdot \sin c_n z)^2$$

$$g_n^2(z) = (a \cdot ch c_n z + b \cdot sh c_n z)^2 + (e \cdot \cos c_n z + f \cdot \sin c_n z)^2 + 2 \cdot (a \cdot ch c_n z + b \cdot sh c_n z) \cdot (e \cdot \cos c_n z + f \cdot \sin c_n z)$$

$$\boxed{g_n^2(z) = a^2 \cdot ch^2 c_n z + b^2 \cdot sh^2 c_n z + 2 \cdot a \cdot b \cdot ch c_n z \cdot sh c_n z + e^2 \cdot \cos^2 c_n z + f^2 \cdot \sin^2 c_n z + 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos c_n z \cdot \sin c_n z + 2 \cdot \left( \begin{aligned} &a \cdot e \cdot ch c_n z \cdot \cos c_n z + a \cdot f \cdot ch c_n z \cdot \sin c_n z \\ &+ b \cdot e \cdot sh c_n z \cdot \cos c_n z + b \cdot f \cdot sh c_n z \cdot \sin c_n z \end{aligned} \right)} \quad (1')$$

On pose :

- $A = \int_0^L ch c_n z \cdot \cos c_n z \cdot dz$  (on applique l'intégrale par partie)

$$U = ch c_n z \quad \rightarrow \quad U' = c_n \cdot sh c_n z \cdot dz$$

$$V' = \cos c_n z \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{c_n} \sin c_n z$$

Après tout calcul fais on a :

$$\boxed{A = \frac{1}{2 \cdot c_n} (ch c_n z \cdot \sin c_n z + sh c_n z \cdot \cos c_n z)_0^L} \quad (2')$$

- $B = \int_0^L ch c_n z \cdot \sin c_n z dz$  on applique l'intégrale par partie, on obtient :

$$B = \frac{1}{2.c_n} (sh c_n z \cdot \sin c_n z - ch c_n z \cdot \cos c_n z)_0^L \quad (3')$$

- $C = \int_0^L sh c_n z \cdot \cos c_n z dz$

$$C = \frac{1}{2.c_n} (sh c_n z \cdot \sin c_n z + ch c_n z \cdot \cos c_n z)_0^L \quad (4')$$

- $D = \int_0^L sh c_n z \cdot \sin c_n z dz$

$$B = \frac{1}{2.c_n} (ch c_n z \cdot \sin c_n z - sh c_n z \cdot \cos c_n z)_0^L \quad (5')$$

- $E = \int_0^L ch^2 c_n z \cdot dz = \frac{1}{2} \int_0^L (1 + ch 2c_n z) dz$

$$E = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{2c_n} sh 2c_n z \right)_0^L \quad (6')$$

- $F = \int_0^L sh^2 c_n z \cdot dz = \frac{1}{2} \int_0^L (ch 2c_n z - 1) dz$

$$F = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2c_n} sh 2c_n z - z \right)_0^L \quad (7')$$

- $G = \int_0^L ch c_n z \cdot sh c_n z \cdot dz = \int_0^L sh 2c_n z \cdot dz$

$$G = \frac{1}{2c_n} (ch 2c_n z)_0^L \quad (8')$$

- $H = \int_0^L \cos^2 c_n z \cdot dz = \frac{1}{2} \int_0^L (1 + \cos 2c_n z) dz$

$$H = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{2c_n} \sin 2.c_n z \right)_0^L \quad (9')$$

- $I = \int_0^L \sin^2 c_n z \cdot dz = \frac{1}{2} \int_0^L (1 - \cos 2c_n z) dz$

$$I = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{2c_n} \sin 2.c_n z \right)_0^L \quad (10')$$

$$\bullet \quad J = \int_0^L 2 \cdot \cos c_n z \cdot \sin c_n z \cdot dz = \int_0^L \sin 2c_n z \cdot dz$$

$$J = \left( -\frac{1}{2c_n} \cos 2c_n z \right)_0^L \quad (11')$$

$$\Rightarrow \int_0^L g_n^2(z) dz = A + B + C + D + E + F + G + H + I + J$$

$$\int_0^L g_n^2(z) dz = \frac{a^2}{2} (a^2 - b^2 + e^2 + f^2) + \frac{1}{4c_n} sh 2c_n L (a^2 + b^2) + \frac{1}{2c_n} ch 2c_n L (a^2 - b^2) + \frac{1}{4c_n} \sin 2c_n L (e^2 - f^2) + \frac{1}{2c_n} \cos 2c_n L (-e \cdot f) + \frac{1}{c_n} \left[ \begin{array}{l} ch c_n L \cdot \sin c_n L (a \cdot e + b \cdot f) \\ + sh c_n L \cdot \cos c_n L (a \cdot e - b \cdot f) \\ + sh c_n L \cdot \sin c_n L (a \cdot f + b \cdot e) \\ + ch c_n L \cdot \cos c_n L (b \cdot e - a \cdot f) \end{array} \right] + \frac{1}{2c_n} (e \cdot f - a \cdot b) + \frac{1}{c_n} (a \cdot f - b \cdot e) \quad (12')$$

Avec :

$$M_n = \rho \cdot S \int_0^L g_n^2(z) dz \quad (13')$$

### 3.3.2.2 Calcul de la masse généralisée selon les conditions aux limites :

#### a- Cas d'un pieu libre en tête et encasté à la pointe

Dans le cas où  $a = d$  et  $b = e$  l'équation (13') devient :

$$M_n = \rho \cdot S \cdot a_n^2 \left[ \begin{array}{l} L + \frac{1}{4c_n} (1 + \chi_n^2) (sh 2c_n L + 4ch c_n L \cdot \sin c_n L) + \\ \frac{\chi_n}{2c_n} (\cos 2c_n L - ch 2c_n L - 4sh c_n L \cdot \sin c_n L) + \\ (1 - \chi_n^2) \frac{1}{4c_n} (4sh c_n L \cdot \cos c_n L + \sin 2c_n L) \end{array} \right]$$

#### b- Cas d'un pieu libre en tête et articulé à la pointe

Dans le cas où  $a = d$  et  $b = e$  l'équation (13') devient :

$$M_n = \rho.S.a_n^2 \begin{bmatrix} L + \frac{1}{4c_n} (1 + \chi_n^2) (sh2c_n L + 4chc_n L \sin c_n L) + \\ \frac{\chi_n}{2c_n} (\cos 2c_n L - ch2c_n L - 4shc_n L \sin c_n L) + \\ (1 - \chi_n^2) \frac{1}{4c_n} (4shc_n L \cos c_n L + \sin 2c_n L) \end{bmatrix}$$

### c- Cas d'un pieu encastré sur les deux extrémités

Dans le cas où  $b = e = 0$  l'équation (13') devient :

$$M_n = \rho.S.a_n^2 \left[ (1 + \chi_n^2) \frac{L}{2} + \frac{\chi_n^2}{4c_n} (sh2c_n L + \sin 2c_n L) + \frac{\chi_n}{c_n} (chc_n L \sin c_n L + shc_n L \cos c_n L) \right]$$

### d- Cas d'un pieu encastré en tête et articulé à la pointe

Dans le cas où  $b = e = 0$  l'équation (13') devient :

$$M_n = \rho.S.a_n^2 \left[ (1 + \chi_n^2) \frac{L}{2} + \frac{\chi_n^2}{4c_n} (sh2c_n L + \sin 2c_n L) + \frac{\chi_n}{c_n} (chc_n L \sin c_n L + shc_n L \cos c_n L) \right]$$

## 4. Détermination des réponses dynamiques

### 4.1 Détermination de la réponse en déplacement :

Pour  $\varpi \neq \omega$  : de l'équation (28) on obtient :

$$y(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \xi_n t}{\omega_n^2 (1 - \beta^2)} [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)] \quad (67)$$

### 4.2 Détermination des rotations dynamiques :

$$\theta(z,t) = \frac{\partial y(z,t)}{\partial z}$$

$$\theta(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{c_n \cdot \sin \bar{\omega} t - \beta \sin \xi_n t}{\omega_n^2 (1 - \beta^2)} [shc_n z - \sin c_n z - \chi_n (chc_n z + \cos c_n z)] \quad (68)$$

### 4.3 Détermination des moments dynamiques :

On utilise la loi de NAVIER,  $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EI}$

$$M(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{EI.c_n^2 \cdot \sin \bar{\omega}t - \beta \sin \xi_n t}{\omega_n^2 (1 - \beta^2)} [chc_n z - \cos c_n z - \chi_n (shc_n z - \sin c_n z)] \quad (69)$$

#### 4.4 Détermination des efforts tranchants dynamiques :

$$T(z,t) = \frac{dM(z,t)}{dz}$$

$$T(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{EI.c_n^3 \cdot \sin \bar{\omega}t - \beta \sin \xi_n t}{\omega_n^2 (1 - \beta^2)} [shc_n z + \sin c_n z - \chi_n (chc_n z - \cos c_n z)] \quad (70)$$

#### 4.5 Détermination des pressions dynamiques :

$$P(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{EI.c_n^4 \cdot \sin \bar{\omega}t - \beta \sin \xi_n t}{\omega_n^2 (1 - \beta^2)} [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)] \quad (71)$$

#### 4.6. Détermination de la réponse dynamique dans le cas d'un chargement échelon :

$$f_n(t) = \frac{2.H_0}{M_n \cdot \omega_n^2} [1 - \cos \omega_n t]$$

##### 4.6.1 Déplacement :

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_n(z) \cdot f_n(z)$$

$$y(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2.H_0}{M_n \cdot \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)] \quad (72)$$

$$y(z,t) = \frac{32.H_0}{\pi^4} \cdot \frac{M_p}{K_p} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{M_n (2n-1)^4} (1 - \cos \omega_n t) [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)] \quad (73)$$

$$y(z,t) = 2 \cdot \gamma \cdot H_0 \cdot \rho \cdot S \cdot \left[ \frac{(1 - \cos \omega_n t)}{M_1 (\gamma \cdot E_s + 2)} \left( ch \frac{1.19\pi}{2D} z + \cos \frac{1.19\pi}{2D} z - \chi_n \left( sh \frac{1.19\pi}{2D} z + \sin \frac{1.19\pi}{2D} z \right) \right) \right] + \sum_{n \geq 2} \frac{(1 - \cos \omega_n t)}{M_n (\gamma \cdot E_s \cdot (2n-1)^4)} [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)] \quad (74)$$

Avec :

$$\gamma = \frac{16.D^4}{\pi^4 \cdot EI} \quad , \quad K_p = \frac{EI}{D^3} \quad , \quad M_p = \rho \cdot S \cdot D$$

##### 4.6.2 Rotation :

$$\theta(z,t) = \frac{M_p}{K_p} \frac{16.H_0}{D \pi^3} \left[ \frac{(1 - \cos \omega_n t)}{M_1 (\gamma \cdot E_s + 2)} \left( sh \frac{1.19\pi}{2D} z - \sin \frac{1.19\pi}{2D} z - \chi_n \left( ch \frac{1.19\pi}{2D} z + \cos \frac{1.19\pi}{2D} z \right) \right) \right] + \sum_{n \geq 2} \frac{(2n-1)^2 (1 - \cos \omega_n t)}{M_n (\gamma \cdot E_s \cdot (2n-1)^4)} [shc_n z - \sin c_n z - \chi_n (chc_n z + \cos c_n z)] \quad (75)$$

**4.6.3 Moment :**

$$M(z,t) = \frac{8.M_p.H_0.D}{\pi^2} \left[ \frac{1.42(1-\cos\omega_n t)}{M_1(\gamma.E_s+2)} \left( ch\frac{1.19\pi}{2D}z - \cos\frac{1.19\pi}{2D}z - \chi_n \left( sh\frac{1.19\pi}{2D}z - \sin\frac{1.19\pi}{2D}z \right) \right) \right] + \sum_{n \geq 2} \frac{(2n-1)^2.(1-\cos\omega_n t)}{M_n(\gamma.E_s.(2n-1)^4)} [chc_n z - \text{cosc}_n z - \chi_n (shc_n z - \text{sinc}_n z)] \quad (76)$$

**4.6.4 Effort tranchant :**

$$T(z,t) = \frac{4.M_p.H_0}{\pi} \left[ \frac{1.69(1-\cos\omega_n t)}{M_1(\gamma.E_s+2)} \left( sh\frac{1.19\pi}{2D}z + \sin\frac{1.19\pi}{2D}z - \chi_n \left( ch\frac{1.19\pi}{2D}z - \cos\frac{1.19\pi}{2D}z \right) \right) \right] + \sum_{n \geq 2} \frac{(2n-1)^3.(1-\cos\omega_n t)}{M_n(\gamma.E_s.(2n-1)^4)} [shc_n z + \text{sinc}_n z - \chi_n (chc_n z - \text{cosc}_n z)] \quad (77)$$

**4.6.5 Pression :**

$$P(z,t) = 2.H_0.\rho.S \left[ \frac{2(1-\cos\omega_n t)}{M_1(\gamma.E_s+2)} \left( ch\frac{1.19\pi}{2D}z + \cos\frac{1.19\pi}{2D}z - \chi_n \left( sh\frac{1.19\pi}{2D}z + \sin\frac{1.19\pi}{2D}z \right) \right) \right] + \sum_{n \geq 2} \frac{(2n-1)^4.(1-\cos\omega_n t)}{M_n(\gamma.E_s.(2n-1)^4)} [chc_n z + \text{cosc}_n z - \chi_n (shc_n z + \text{sinc}_n z)] \quad (78)$$

**5. Détermination de la réponse sismique**

Il existe une autre forme d'excitation de grande importance dans la pratique, autre que celle due à un chargement extérieur dont les variations, selon la position et le temps, sont arbitraires.

Il s'agit d'un déplacement imposé au niveau des appuis, c'est le cas de l'effet du séisme sur un pieu foncé dans un sol.

Dans ce cas, il suffit de remplacer la charge généralisée correspondante au mode gn (z) par le chargement total effectif est donné par l'équation suivante :

$$P_{nr}(t) = \int_0^L g_n(z).P_{eff.r}(x,t)dx$$

$$P_{nr}(t) = -\ddot{\delta}_v(t) \cdot \int_0^L m(x).g_n(z).\phi_r(x)dx$$

Avec :

$\ddot{\delta}_v(t)$  : l'accélération au champ libre

$\phi_r(x)$  : les allures des déplacements, avec les indices appropriés pour chaque mouvement d'appui.

Dans le cas d'un séisme, on impose un déplacement en tête du pieu.

$$\text{D'où } \phi_r(x) = \phi_1(x) = 1$$

Et on prend  $\delta_r(t) = a \sin \omega_s t$

Donc :

$$P_{nr}(t) = - \int_0^L \rho \cdot s \cdot \ddot{\delta}(t) \cdot g_n(z) \cdot \phi_r(x) dz$$

$$P_{nr}(t) = -2 \rho \cdot s \cdot a \cdot \sin \omega_s t$$

D'où

$$f_n(t) = \frac{1}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^t P_n(\zeta) \cdot \sin \omega_n (t - \zeta) d\zeta$$

$$f_n(t) = - \frac{1}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^t 2 \cdot \rho \cdot s \cdot a \cdot \sin \omega_s t \cdot \sin \omega_n (t - \zeta) d\zeta$$

$$f_n(t) = - \frac{2 \cdot \rho \cdot \delta \cdot a}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^t \sin \omega_s t \cdot \sin \omega_n (t - \zeta) d\zeta$$

Ce qui donne :

$$f_n(t) = - \frac{2 \cdot \rho \cdot \delta \cdot a}{M_n \cdot \omega_n (\omega_s^2 - \omega_n^2)} [\omega_s \cdot \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_s t]$$

On pose :

$$\beta = \frac{\omega_s}{\omega_n}$$

$$f_n(t) = - \frac{2 \cdot \rho \cdot \delta \cdot a}{M_n \cdot \omega_n^2 (\beta^2 - 1)} [\beta \cdot \sin \omega_n t - \sin \omega_s t]$$

Cas d'un chargement échelon :

$$\ddot{\delta}_v(t) = a$$

$$P_{eff} = - \sum_{r=1}^n m \zeta_r(x) \cdot \ddot{\delta}_r(t)$$

Ex : cas d'un séisme :

$$P_{eff} = - m(x) \cdot \ddot{\delta}_1(t)$$

$$P_{nr}(t) = \int_0^L g_n(x) \cdot P_{eff}(x,t) \cdot dx = - \delta_r(t) \int_0^L m(x) \cdot g_n(x) \cdot \zeta(x) dx$$

$$P_{n1}(t) = - \delta(t) \int_0^L m(x) \cdot g_n(x) dx$$

$$P_{nr}(t) = - 2 \delta(t) \cdot \rho \cdot s = - 2 \cdot \rho \cdot s \cdot a$$

$$f_n(t) = \frac{1}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^L P_n(t) \cdot \sin \omega_s t \cdot \sin \omega_n(t - \zeta) d\zeta$$

$$f_n(t) = - \frac{2 \cdot \rho \cdot s \cdot a}{M_n \cdot \omega_n} \int_0^L \sin \omega_n(t - \zeta) d\zeta$$

$$f_n(t) = - \frac{2 \cdot \rho \cdot s \cdot a}{M_n \cdot \omega_n} (1 - \cos \omega_n t)$$

Pour déterminer les réponses au séisme, la méthode est la même que pour la réponse dynamique.

Ex : la réponse en termes de déplacement :

$$y(z,t) = \sum_{n \geq 1} f_n(t) \cdot g_n(z)$$

$$y(z,t) = \sum_{n \geq 1} - \frac{2 \cdot \rho \cdot s \cdot a}{M_n \cdot \omega_n} (1 - \cos \omega_n t) \cdot g_n(z)$$

$$y(z,t) = - 2 \cdot \rho \cdot s \cdot a \sum_{n \geq 1} - \frac{(1 - \cos \omega_n t)}{M_n \cdot \omega_n} [ch c_n z + \cos c_n z - \chi_n (sh c_n z + \sin c_n z)]$$

## 6. Calcul statique

Un chargement statique n'est qu'un cas particulier du chargement dynamique, donc il est possible d'utiliser la superposition des modes pour obtenir la solution d'un problème statique.

Si on prend comme exemple un chargement échelon pour la détermination d'une réponse statique, il suffit d'annuler le terme  $\cos \omega_n t$ , donc on aura les résultats statiques suivants :

### 6.1 Déplacement :

$$y(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2.H_0}{M_n \cdot \omega_n^2} [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)] \quad (79)$$

### 6.2 Rotation :

$$\theta(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2.H_0 \cdot c_n}{M_n \cdot \omega_n^2} [shc_n z - \sin c_n z - \chi_n (chc_n z + \cos c_n z)] \quad (80)$$

### 6.3 Moment :

$$M(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2.EI.H_0 \cdot c_n^2}{M_n \cdot \omega_n^2} [chc_n z - \cos c_n z - \chi_n (shc_n z - \sin c_n z)] \quad (81)$$

### 6.4 Effort tranchant :

$$T(z,t) = \sum_{n \geq 1} \frac{2.EI.H_0 \cdot c_n^3}{M_n \cdot \omega_n^2} [shc_n z + \sin c_n z - \chi_n (chc_n z - \cos c_n z)] \quad (82)$$

## 7. Pieu à pointe articulée

C'est le même principe et les mêmes hypothèses que le 1<sup>er</sup> cas (pointe encastree), seulement les conditions aux limites changent..

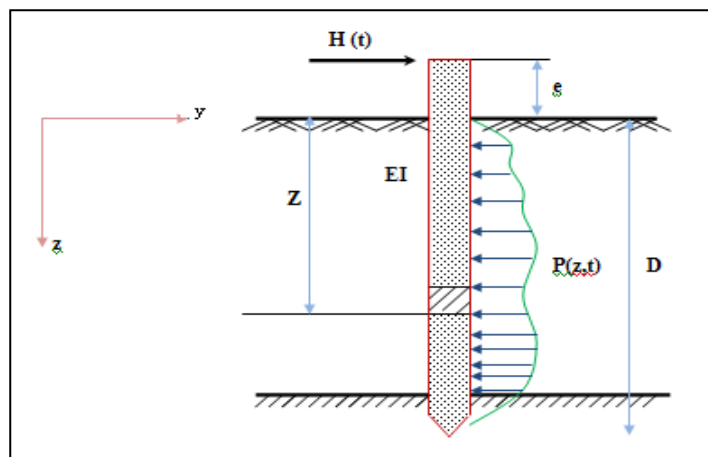


Fig. IV.3 Pieu à pointe articulée soumis à une charge horizontale

### 7.1 Conditions aux limites :

Etant donné que le pieu est articulé en pointe et libre en tête, aura un déplacement et une rotation nuls, de même pour l'effort tranchant et le moment fléchissant et cela quelque soit t.

- pointe articulée  $\Rightarrow y(D) = 0 \quad \forall t \quad (1)$

$$\Rightarrow y'(D) = 0 \quad \forall t \quad (2)$$

- tête libre  $\Rightarrow T = 0 \quad \forall t \quad (3)$

$$\Rightarrow M = 0 \quad \forall t \quad (4)$$

L'équation du moment devient :  $EI \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0$

$$EI \cdot f \cdot C^2 [a \cdot chcz + b \cdot shcz - e \cdot \sin cz + d \cdot \cos cz] = 0$$

L'équation de l'effort tranchant devient :  $EI \cdot \frac{d^3 y}{dz^3} \Big|_{z=0} = 0$

$$EI \cdot f \cdot C^3 [a \cdot shcz + b \cdot chcz - e \cdot \cos cz + d \cdot \sin cz] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = d \\ b = e \end{matrix}} \quad (83)$$

$$(1) \rightarrow a \cdot chcD + b \cdot shcD + e \cdot \sin cD + d \cdot \cos cD = 0$$

$$(2) \rightarrow a \cdot chcD + b \cdot shcD - e \cdot \cos cD - d \cdot \sin cD = 0$$

D'où :

- $a (\operatorname{ch} cD + \cos cD) + b (\operatorname{sh} cD + \sin cD) = 0$

- $a (\operatorname{ch} cD - \cos cD) + b (\operatorname{sh} cD - \sin cD) = 0 \quad (84)$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} chc_n D + \cos c_n D & shc_n D + \sin c_n D \\ chc_n D - \cos c_n D & shc_n D - \sin c_n D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deux cas :

➤ pas de déplacement (position d'équilibre)  $\Rightarrow a = b = 0$

➤ il existe un déplacement  $\Rightarrow a \neq 0$  et  $b \neq 0 \Rightarrow \text{déterminant} = 0$

D'où l'équation aux fréquences :

$$(chc_n D + \cos c_n D)(shc_n D - \sin c_n D) - (chc_n D - \cos c_n D)(shc_n D + \sin c_n D) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-2.chc_n D . \sin c_n D + 2shc_n D . \cos c_n D = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{tg c_n D = \frac{shc_n D}{chc_n D}} \quad (85)$$

Les racines de cette équation sont tabulées comme suit :

N° de racine	1	2	3	4
$C_n D$	0	3.91878	7.08629	10.2132
$\frac{C_n D}{\pi}$	0	1.25	2.25	3.25

On remarque que :

$$\boxed{c_n . D = \frac{(4n + 1)}{4} . \pi} \quad (86)$$

A partir de (84) on tire  $b_n$  en fonction de  $a_n$  :

$$\boxed{b_n = -a_n . \frac{chc_n D}{shc_n D}} \quad (87)$$

D'où :

$$g_n(z) = a_n \left[ chc_n z + \cos c_n z - \frac{chc_n D + \cos c_n D}{shc_n D + \sin c_n D} (shc_n z + \sin c_n z) \right]$$

On pose :

$$\boxed{\chi_n = \frac{chc_n D}{shc_n D}} \quad (88)$$

L'équation (16) devient :

$$\boxed{g_n(z) = a_n [chc_n z + \cos c_n z - \chi_n (shc_n z + \sin c_n z)]} \quad (89)$$

Avec :  $g_n(z)$  est le mode propre associé à la pulsation  $\omega_n$

Et on a :

$$\omega_n^2 . D^4 = \frac{E_s}{\rho . S} . D^4 + \frac{EI}{\rho . S} C_n^4$$

On obtient :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E_s}{\rho \cdot S} + \frac{(4n+1)^4}{4^4} \pi^4 \cdot \frac{K_p}{M_p}} \tag{90}$$

Par la suite c'est le même raisonnement que la 1<sup>er</sup> partie (pointe encastree)

**Calcul de la masse généralisée :**

Dans ce cas : a = d

b = e

L'expression (13') sera :

$$M_n = \rho \cdot S \cdot a_n^2 \left[ \begin{aligned} &L + \frac{1}{4c_n} (1 + \chi_n^2) (sh 2c_n L + 4ch c_n L \cdot \sin c_n L) + \\ &\frac{\chi_n}{2c_n} (\cos 2c_n L - ch 2c_n L - 4sh c_n L \cdot \sin c_n L) + \\ &(1 - \chi_n^2) \frac{1}{4c_n} (4sh c_n L \cdot \cos c_n L + \sin 2c_n L) \end{aligned} \right] \tag{74}$$

**8. Pieu à tête encastree :**

C'est le même principe et les mêmes hypothèses que le 1<sup>er</sup> cas (pointe encastree), seulement les conditions aux limites qui changent :

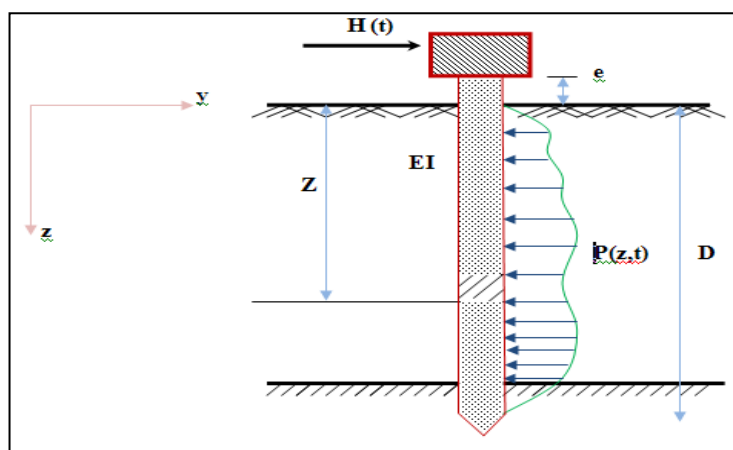


Fig. IV.4 Pieu à tête et pointe encastree soumis à une charge horizontale

**8.1 Pointe encastree :**

Equations des ondes de deflexion est :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta \cdot y = 0$$

## 8.2 Conditions aux limites :

Etant donné que le pieu est encastré en pointe et encastré en tête, aura un déplacement et une rotation nuls, de même pour l'effort tranchant et le moment fléchissant et cela quelque soit t.

- Tête encastrée  $\Rightarrow y''''(0) = 0 \quad \forall t \quad (1)$

$$\Rightarrow y'(0) = 0 \quad \forall t \quad (2)$$

- Pointe encastrée  $\Rightarrow y'(D) = 0 \quad \forall t \quad (3)$

$$\Rightarrow y(D) = 0 \quad \forall t \quad (4)$$

$$(1) \rightarrow b - e = 0$$

Ce qui donne  $\boxed{b = e = 0}$  (91)

$$(2) \rightarrow b + e = 0$$

$$(3) \rightarrow \boxed{a \cdot shc_n D - d \cdot sinc_n D = 0}$$

(92)

$$(4) \rightarrow \boxed{a \cdot chc_n D + d \cdot cosc_n D = 0}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} chc_n D & \cos c_n D \\ shc_n D & -\sin c_n D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où l'équation aux fréquences :

$$\Rightarrow -chc_n D \cdot \sin c_n D - shc_n D \cdot \cos c_n D = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{tgc_n D = -\frac{shc_n D}{chc_n D}} \quad (93)$$

A partir de (80) on tire  $d_n$  en fonction de  $a_n$  :

$$\boxed{d_n = a_n \cdot \frac{shc_n D}{\sin c_n D}} \quad (94)$$

On pose :

$$\boxed{\chi_n = \frac{chc_n D}{shc_n D}} \quad (95)$$

Les racines de cette équation sont tabulées comme suit :

N° de racine	1	2	3	4	5	6	7
$C_n D$	0	2.33502	5.51607	8.62942	11.8789	14.904	18.15
$\frac{C_n D}{\pi}$	0	0.75	1.75	2.75	3.75	4.75	5.75

On remarque que :

$$c_n \cdot D = (4n-1) \frac{\pi}{4} \quad (96)$$

$$\omega_n^2 \cdot D^4 = \frac{E_s}{\rho \cdot S} \cdot D^4 + \frac{EI}{\rho \cdot S} c_n^4$$

Donc :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E_s}{\rho \cdot S} + \frac{(4n-1)^4}{4^4} \pi^4 \cdot \frac{K_p}{M_p}} \quad (97)$$

Et le mode propre associé à la pulsation  $\omega_n$  sera :

$$g_n(z) = a_n [chc_n z + \chi_n \cdot \cosc_n z] \quad (98)$$

Par la suite c'est le même raisonnement que la 1<sup>er</sup> partie (pointe encastree)

### 8.3 Calcul de la masse généralisée :

Dans ce cas :  $b = e = 0$

D'où l'expression (13') sera :

$$M_n = \rho \cdot S \cdot a_n^2 \left[ \left(1 + \chi_n^2\right) \frac{L}{2} + \frac{\chi_n^2}{4c_n} (sh2c_n L + \sin 2c_n L) + \frac{\chi_n}{c_n} (chc_n L \cdot \sin c_n L + shc_n L \cdot \cosc_n L) \right] \quad (99)$$

**9. Pointe articulée :**

C'est le même principe et les mêmes hypothèses que le 1<sup>er</sup> cas (pointe encastree), seulement les conditions aux limites qui changent :

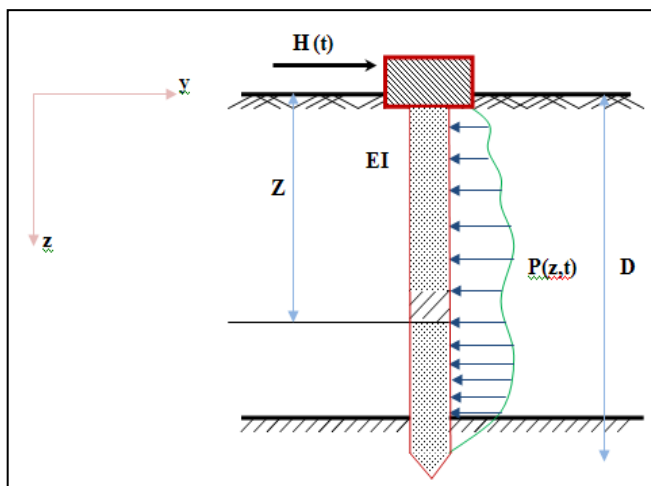


Fig. IV.5 Pieu à tête encastree et pointe articulée soumis à une charge horizontale

Equations des ondes de deflexion est :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta \cdot y = 0$$

**9.1 Conditions aux limites :**

Etant donné que le pieu est articulé en pointe et encastree en tête, aura un déplacement et une rotation nuls, de même pour l'effort tranchant et le moment fléchissant et cela quelque soit t.

- Tête encastree  $\Rightarrow y'''(0) = 0 \quad \forall t \quad (1)$
- $\Rightarrow y'(0) = 0 \quad \forall t \quad (2)$
- Pointe articulée  $\Rightarrow y(D) = 0 \quad \forall t \quad (3)$
- $\Rightarrow y''(D) = 0 \quad \forall t \quad (4)$

$$(1) \rightarrow b + e = 0 \quad \boxed{b = e = 0} \quad (100)$$

$$(2) \rightarrow b - e = 0$$

$$(3) \rightarrow \boxed{a_n \cdot chcD + d_n \cdot coscD = 0} \quad (101)$$

$$(4) \rightarrow \boxed{a_n \cdot chcD - d_n \cdot coscD = 0}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} chc_n D & \cos c_n D \\ chc_n D & -\cos c_n D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où l'équation aux fréquences :

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -.chc_n D.\cos c_n D - chc_n D.\cos c_n D = 0 \\ \Rightarrow & -2.chc_n D.\cos c_n D = 0 \end{aligned} \quad \boxed{\cos c_n D = 0} \quad (102)$$

On remarque que :

$$\boxed{c_n \cdot D = (2n-1)\frac{\pi}{2}} \quad (103)$$

On pose :

$$\boxed{\chi_n = \frac{chc_n D}{\cos c_n D}} \quad (104)$$

A partir de (101) on tire  $d_n$  en fonction de  $a_n$  :

$$\boxed{d_n = a_n \cdot \frac{chc_n D}{\cos c_n D}} \quad (105)$$

Donc :

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{E_s}{\rho \cdot S} + \frac{(2n-1)^4}{2^4} \pi^4 \cdot \frac{K_p}{M_p}}} \quad (106)$$

Et le mode propre associé à la pulsation  $\omega_n$  sera :

$$\boxed{g_n(z) = a_n [chc_n z + \chi_n \cdot \cos c_n z]} \quad (107)$$

Par la suite c'est le même raisonnement que la 1<sup>er</sup> partie (pointe encastree)

## 9.2 Calcul de la masse généralisée :

Dans ce cas :  $b = e = 0$

D'où l'expression (13') sera :

$$\boxed{M_n = \rho \cdot S \cdot a_n^2 \left[ \left(1 + \chi_n^2\right) \frac{L}{2} + \frac{\chi_n^2}{4c_n} (sh 2c_n L + \sin 2c_n L) + \frac{\chi_n}{c_n} (chc_n L \cdot \sin c_n L + shc_n L \cdot \cos c_n L) \right]} \quad (108)$$

**Applications****Application n° 01**

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont :

- $EI = 56,37 \cdot 10^6 \text{ N.m}^2$
- $E_s = 20 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$
- $H_0 = 200 \text{ Kn}$
- $\bar{\omega} = 0.15$  ,  $t = 10.4719$
- $\bar{\omega} t = \pi/2$
- $D = 5 \text{ m}$
- $\rho = 2\,500 \text{ kg/m}^3$  ,  $\text{Section} = 0.5 \text{ m}^2$

On obtient les résultants suivants :

**A / Pieu libre en tête et encastré à la base**

- Méthode proposée a donnée :

$$y_{0 \text{ dyn}} = 10,77 \text{ mm}$$

$$y_{0 \text{ stat}} = 10,914 \text{ mm}$$

- Méthode de chargement statique « Philipponnat » a donnée :

$$y(0) = \frac{2.H_0}{E_s.l_0} \quad \text{avec} \quad l_0 = \frac{4EI}{E_s}$$

$$y(0) = 10,910 \text{ mm}$$

La comparaison entre les deux déplacements en terme statique a donnée :

$$\text{Ratio } r = \frac{y(0)}{y_0} = 1, \quad \text{soit un écart de } 0,04 \%$$

**B / Console chargée statiquement à son extrémité**

- Méthode proposée avec  $E_s = 0$  a donnée :

$$y_{0 \text{ stat}} = 147,79 \text{ mm}$$

- Méthode R.D.M a donnée :

$$y_0 = \frac{PD^3}{3.EI} = \frac{200.10^3.5^3}{3.56,37.10^6} = 147.832 \text{ mm}$$

La comparaison entre les deux résultats a donnée :

$$\text{Ratio } r = \frac{y(0)}{y_{0 \text{ stat}}} = 1, \quad \text{soit un écart de } 0,03 \%$$

La différence obtenue par les deux méthodes utilisées varie entre 0.03 et 0.04 %

**Application n° 02**

Soit une centrale hydrotechnique, construite sur un sol argileux homogène sur une grande profondeur.

Le pieu isolé est chargé par une force harmonique avec :  $H(t) = H_0 \cdot \sin \bar{\omega} t$

Ce pieu est encastré en tête dans la semelle « le radier ».

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont :

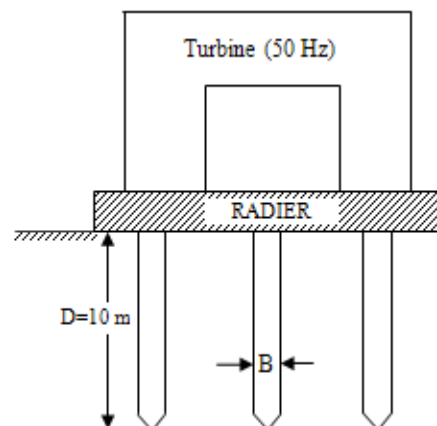
- $N = 50 \text{ Hz}$        $\bar{\omega} = 2 \pi N$
- $H_0 = 15 \text{ tonne}$
- $E_s = 60 \text{ bars}$  (Argile)
- Diamètre du pieu  $B = 0.5 \text{ m}$
- Profondeur d'ancrage  $D = 10 \text{ m}$
- $F_{c28} = 20 \text{ MPa}$
- $E_{ij} = 1200 [1.1 \times f_{c28}]^{1/3} = 33\,625 \text{ MPa}$
- $I = \frac{\pi}{64} \times B^4 = 3.06 \times 10^6 \text{ MNm}^2$

$$\text{Pour } B < 0.6 \text{ m} : E_s = E_M \frac{18}{4 (2.65)^\alpha + 3.0}$$

$E_M$  : Module pressiométrique standard

$\alpha$  : Coefficient rhéologique dépendant de la nature du sol et du rapport  $E/PI$

« Technique de l'ingénieur C 248-27 »



Les résultats obtenus sont :

– Méthode proposée :

$$\begin{aligned} \text{Pour } z=0 \quad y_{0 \text{ dyn}} &= 6.1 \times 10^{-7} \text{ m} \\ y_{0 \text{ stat}} &= 12.6 \times 10^{-5} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } z=10 \quad M_{\text{dyn}} &= 15\,004.39 \text{ KN.m} \\ M_{\text{stat}} &= 15\,009.08 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

– Pieu sous charge statique « Philipponnat » :

$$\begin{aligned} \text{Pour } z = 0 \quad y(0) &= \frac{H_0}{E_s \cdot l_0} \quad \text{avec} \quad l_0 = \sqrt[4]{\frac{4EI}{E_s}} \\ y_{0 \text{ stat}} &= 8.68 \times 10^{-5} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{Pour } z = 10 \quad M_D = 14\,797.74 \text{ KN.m}$$

Les résultats obtenus pour les déplacements en tête du pieu et les moments fléchissant en pied du pieu, à partir les différentes méthodes classiques existantes, sont très proches. L'écart varie de 0.03 à 0.04 % ce qui est pratiquement négligeable et confirme la fiabilité des résultats de la méthode proposée.

### **Conclusion et perspectives**

On a mis à la disposition de l'ingénieur deux méthodes en plus de celle de W.Cichy qui permettent de déterminer les réponses dynamiques et statiques, dans les différents cas de chargement soit un séisme, soit un effort dynamique-horizontal, et ce, quelque soit la nature du sol.

La méthode de R.SOULOUMIAC permet de déterminer les efforts internes et les déformations d'un pieu sous l'action sismique dans un sol soit homogène, soit hétérogène (multicouches). Cette dernière et pour des considérations pratiques a été sujet d'un développement pour la prise en charge des conditions d'appuis d'un pieu bi-encasté.
















Notre modèle permet de calculer les réponses dynamiques et statiques basées sur les résultats des essais géotechniques courants dans un sol homogène, pour les conditions d'appuis suivantes:

















- Pieu bi-encasté;
- Pieu encasté en tête et articulé à la pointe;
- Pieu libre en tête et encasté à la pointe;
- Pieu libre en tête et articulé à la pointe.













En perspective du travail élaboré, il est constaté qu'à partir des réponses dynamiques trouvées, il serait intéressant d'établir des abaques pour le calcul du ferrailage des pieux.

Ce sujet de recherche mérite aussi une étude plus approfondie pour des considérations pratiques et économiques en tenant compte de plusieurs paramètres tels que ; l'hétérogénéité du sol, la variation des caractéristiques des sols (système non linéaire), l'inclinaison du pieu et le comportement d'un pieu à l'interface de deux couches adjacentes dans le cas d'un sol hétérogène.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

-  **Aide mémoire de l'étudiant en analyse mathématique, 1990**, Editeur : El- khezna ; 29p
-  **ALBERT FUENTES, 1983** : Calcul pratique des ossatures de bâtiment en béton armé (bâtiments courants – bâtiments de grandes hauteurs), Éditions Eyrolles (paris), 262p.
-  **ALBERT FUENTES 1998** : Bâtiments en zone sismique, Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées (ENPC) p. 15-36, p. 183-213
-  **ANDRE FILIATRAUT, 1996** : Elément du génie parasismique et de calcul dynamique des structures ; 1<sup>ère</sup> Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal (E.E.P.M), 478 p.
-  **ANDRE FILIATRAUT, 1996** : Génie sismique CIV. 6510, 1<sup>ère</sup> Edition de l'Ecole Polytechnique de Montréal (E.E.P.M), p. 2 – 85
-  **Association Française du Génie parasismique (AFPS), 2003** : Guide de la conception parasismique des bâtiments, Edition : Eyrolles p. 105-112
-  **BENAISSA A. , 1993** : Eléments de mécanique des sols, Éditeur : Office des Publications Universitaires, 117p.
-  **BETBEDER J. – MATIBET, 2003** : Génie parasismique : prévention parasismique (V3), 1ère édition Eyrolles, p. 123-165
-  **BETBEDER J. – MATIBET, 2003** : Génie parasismique : Risque et Aléa sismique, 1ère édition, Editeur : Hermès p. 56-63
-  **CAMBEFORT H. , 1972** : Géotechnique de l'ingénieur, reconnaissances des sols, éditions EYROLLES « en édition ancienne ou neuve », p. 85-147
-  **CHELLIS R.D. 1961**: Fondations profondes, Edition Mc Graw-Hill, US, 2<sup>ème</sup> Edition 704p
-  **CLOUGH R.W. & PENZIEN J. , 1982** : Dynamiques des structures, Student Edition, Formuler un problème de dynamique des structures mêlant Résistance des matériaux (éléments barres et poutres) et Mécanique des milieux continus, le tout pour des comportements linéaires.
-  **Collectif d'auteurs, 1993** : Renforcement des sols expérimentation en varie grandeurs des années 90 Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées (ENPC) page 663-690
-  **D.T.R B.C .2.33.2** : Méthodes de calcul des fondations profondes, Editeur : Centre National de Recherche Appliquée en génie Parasismique « C.G.S » Approuvé par arrêté ministériel du 14 Août 1994, 55p.
-  **D.T.R B .C. 2-41** : Règle de conception et de calcul des structures en Béton Armé « C.B.A 93 », Editeur : Centre National de Recherche Appliquée en génie Parasismique « C.G.S » Approuvé par arrêté ministériel du 29 Décembre 1993 p.165-167

-  **D.T.R.BE 1.32** : Travaux des fondations profondes, Editeur : Centre National de Recherche Appliquée en génie Parasismique « C.G.S » Approuvé par arrêté ministériel du 29 Décembre 1993, 63p.
-  **FAURE R.M. , PICARELLI L. , SEVE G. , GRESS J.C. , PLOTTO P. , LEROUEIL, LOCAT J. , MAGNAN J.P. , 2000**: Cours de l'E.N.T.P.E Lyon / France « Stabilité des pentes et Glissements des terrains , chapitre 5 : Séisme ».
-  **FRANCOIS BOURGES & ROGER, 1995** : Fondations profondes « Technique de l'ingénieur » C 248
-  **GALABRU P. , 1963** : Les fondations et les souterrains « Cours de l'Ecole nationale des ponts et chaussées ». Editions Eyrolles (Paris) ; p. 3 – 52
-  **GIROUD J.P. –NHIEM T.V. –OBIN J.P. , 1973** : Mécaniques des sols ; table pour le calcul des fondations / T3, Edition Dunod, Paris, 470p.
-  **HIROSHI, TAJIMI, 1977** : Seismic Effets on Piles, Preliminary State-of-the-Art Report (2), Speciality Session 10. IX ICSMFE.
-  **JACQUES V. – ROISIN V. – NUYENS J. , 1971** : Applications à la mécanique des sols ; Edité par DUNOD VANDER, p. 273 – 485
-  **LEONARD G. A. , 1968** : Les fondations ; Edition Dunod ; 1106p
-  **LAROZE S. , 2005** : Mécaniques des structures, tome 3. , Edition : Cépaduès, 1ère édition, p. 161 ; 236p.
-  **MARCEL FORNI, 1981** : Fondations spéciales et reprises en sous œuvre, Edition Eyrolles, 171p.
-  **MAURICE CASSAN, 1978** : Les essais in situ en mécanique des sols, T1 réalisations et interprétation, Edition Eyrolles 458p.
-  **MAURICE CASSAN, 1978** : Les essais in situ en mécanique des sols, T2 applications et méthodes de calcul, Edition Eyrolles, 331p.
-  **MENZIES B. –SIMONS N. , 1979** : Problèmes de mécanique des sols et de techniques de fondations ; Edition Eyrolles, p. 55 – 83
-  **Milan Zacek, 1996** : Construire parasismique : risques sismique – conception parasismique du bâtiment réglementation, 1ère édition Eyrolles, p. 145-172
-  **PIERRE ALAIS ET MICHEL HULIN 1980** : **Rappels** et compléments mathématiques. 5<sup>ème</sup> éd, Editeur : A. Colin;
-  **PUTATTI J. , 1979** : Technologie de la construction des bâtiments – Fondations, soutènements ; Edition Eyrolles ; 324p

-  **PHILIPPONNAT G. & HUBERT B., 2003** : Fondations et ouvrages en terre, édition Eyrolles 548p.
-  **Règles techniques de conception et de calcul des fondations des ouvrages génie civil 1999** ; Fascicule N° 62, 1ère édition Eyrolles, 188 p.
-  **RICHARD SOULOUMIAC, 1986** : Les Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics N° 441 ; Série : Théorie et méthode de calcul 280.  
« Méthode simplifiée de calcul des pieux en zones sismiques ».
-  **ROBERT BERTIN – CLAUDE GASC, 1971** : Traité du bâtiment ; les fondations et reprises en sous œuvre ; Edition Eyrolles ; 267p
-  **ROGER FRANK, 1995** : Fondations profondes «Technique de l'ingénieur» p. C 248-1 - C248-44
-  **ROGER FRANK, 1999**: Calcul des fondations superficielles et profondes « Chapitre 3 : Fondations Profondes » édition : technique de l'ingénieur, Editeur : Presse de l'Ecole des Ponts et Chaussées, 141p.
-  **SAMUEL AMAR, 1998** : Propriétés mécaniques des sols déterminées en place « Technique de l'ingénieur » p. C 220-1 - C 220-24.
-  **SANGLERAT G. & COSTET J., 1982** : Cours pratiques de mécanique des sols Tome 2 ; calcul des ouvrages, Edition Dunod,
-  **THOMAS GMUR, 2009** : Dynamique des structures ; analyse modale numérique, Editeur : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), 574p.
-  **TIMOSHENKO S., 1968** : Résistance des matériaux (Tome 2) ; Edition : Dunod, p. 1–52
-  **WLODZIMIERS CICHY, 1980** : Fondation sur pieux sollicités par des forces Horizontales et dynamiques, Studia Géotechnica et Mécanica, Vol. 11, N°3.
-  **Wolfgang JALIL , 2005** : Règles de construction parasismique : règles Ps applicables aux bâtiments PS 92 : Norme NF P 06-013, édition Eyrolles, 311p