

N° d'ordre : 44/2012-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : **PHYSIQUE**

Spécialité : **Electronique Quantique**

Par : **BENTOUHAMI Billel**

Sujet

**Etude de la transformation du champ par une succession de diaphragmes
en simple propagation**

Soutenu publiquement le 27 - 06 - 2012, devant le jury composé de :

M. H.DJELOUAH	<i>Professeur</i>	USTHB Alger	<i>Président</i>
Mme Z.DERRAR KADDOUR	<i>Maitre de Conférences</i>	USTHB Alger	<i>Directrice de Mémoire</i>
M.M.DJEBLI	<i>Professeur</i>	USTHB Alger	Examineur
M. A.KELLOU	<i>Professeur</i>	USTHB Alger	Examineur
M. O.ZIANE	<i>Professeur</i>	USTHB Alger	Examineur

A ma mère

Remerciements

La première personne que je tiens à remercier est Mme Z. Derrar Kaddour, ma Directrice de thèse, qui a su me laisser la liberté nécessaire pour l'aboutissement de mes travaux tout en gardant un œil critique et prudent. Nos continuelles oppositions, contradictions et confrontations ont sûrement été la clé de notre travail commun.

Je remercie également le Professeur H. Djelouah de m'avoir fait l'honneur d'être Président de ce jury.

Je tiens à remercier les Professeurs A.Kellou, O.Ziane et M.Djebli pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury. Leurs remarques et commentaires m'ont permis de vérifier, clarifier et corriger certains points de ce manuscrit.

J'adresse aussi mes remerciements à mes enseignants A.Taleb, M.Nemouchi, Tahraoui, Kerdja et Louhibi.

Je tiens à remercier Dr. M.Chalal, Dr. S.Ayadi et S.Terniche. Je les remercie pour leurs encouragements. Je remercie également l'ensemble des membres du laboratoire d'électronique quantique de la faculté de physique de l'USTHB.

Je remercie pour leur aide mes amis Lotfi, Lallouani, Fahima et Yanis.

Mes remerciements vont aussi à ma famille qui, avec cette demande récurrente : «quand est-ce que tu la soutiens cette thèse?», bien qu'inquiétante en périodes fréquentes de doutes, m'a permis de ne jamais m'écarter de mon objectif final.

"Make things as simple as possible but not simpler"

Albert Einstein

Résumé

L'étude de la transformation du champ au cours de sa propagation est très importante en optique et est d'un grand intérêt pour assurer une bonne qualité des faisceaux lumineux.

Le champ électrique caractérise l'onde lumineuse. Nous avons donc d'abord étudié, dans le cadre de l'optique paraxiale, les transformations du champ dans différents systèmes optiques en incluant le cas particulier du diaphragme et ce par différentes approches.

L'approche par le modèle gaussien s'avère très utile pour la description des faisceaux lasers. Nous nous sommes alors familiarisés avec les modes gaussiens: les paramètres associés, les différentes familles définies selon le type de symétrie ou la nature de l'argument, les mécanismes de transformation que ce soit via le formalisme ABCD ou la conversion de modes.

Notre choix s'est porté sur la technique de conversion de modes, au vu de ses performances, pour traiter du problème d'un diaphragme. Nous avons par la suite démontré son efficacité pour le cas d'une succession de diaphragmes.

La simulation numérique montre que trois paramètres qui sont: la taille et le nombre d'ouvertures ainsi que l'écart entre ces ouvertures ont un impact important sur le profil du champ. Le choix particulier d'une cascade d'ouvertures peut conduire à des profils spécifiques pouvant être exploités dans différentes applications.

De chaque côté de l'ouverture, le formalisme ABCD reste toujours en vigueur et simple d'utilisation. La technique de conversion de modes associée à ce dernier formalisme, offre un outil très efficace pour étudier les transformations du champ non seulement dans le cadre d'une succession de diaphragmes en simple propagation mais aussi dans les systèmes optiques diaphragmés.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : FAISCEAUX GAUSSIENS DANS LE CADRE DE L’OPTIQUE GEOMETRIQUE	
I. INTRODUCTION	4
II. LES EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU FAISCEAU GAUSSIEN	4
III. PLANS DE REFERENCES D’UN SYSTEME OPTIQUE	6
IV. TRANSFORMATION DES FAISCEAUX GAUSSIENS	7
IV. 1. Lentille mince	7
IV.1.1. Nouveaux paramètres w et R	7
IV.1.2. Focalisation	8
IV.2. Transformation d’un faisceau Gaussien par un télescope	11
IV.3. Faisceau Gaussien dans un résonateur	12
V. PHASE DE GOUY	15
VI. INTRODUCTION DES MATRICES ABCD POUR LES BESOINS DE L’OPTIQUE GEOMETRIQUE	15
VII. CONCLUSION	16
CHAPITRE II: FORMALISME ABCD ET FAISCEAUX GAUSSIENS	
I. INTRODUCTION	17
II. INTRODUCTION DU RAYON DE COURBURE COMPLEXE q	17
III. MATRICES DE TRANSFERT DE QUELQUES STRUCTURES OPTIQUES ELEMENTAIRES	18
IV. LOI ABCD OU TRANSFORMATION DE KOGELNIK	20
V. INTRODUCTION DU PARAMETRE COMPLEXE DE GOUY q_G POUR LE CALCUL DE LA PHASE DE GOUY	20
VI. TRANSFORMATION DU FAISCEAU GAUSSIEN PAR UNE LENTILLE MINCE	21
VII. TRANSFORMATION DU FAISCEAU GAUSSIEN PAR UN MILIEU QUADRATIQUE	21

VIII. ADAPTATION DES FAISCEAUX GAUSSIENS	23
IX. APPLICATION DE LA LOI ABCD A L'ETUDE DU CHAMP DANS UN RESONATEUR STABLE	24
X. CONCLUSION	25

CHAPITRE III : FAMILLES DE SOLUTIONS GAUSSIENNES

I. INTRODUCTION	26
II. MODES D'ORDRES SUPERIEURS	26
II.1. Modes d'Hermite-Gauss	26
II.2. Modes de Laguerre-Gauss	28
II.3. Modes d'Ince-Gauss	30
II.3.1. Etablissement des modes d'Ince-Gauss (IGB)	31
II.3.2. Propriétés des IGB	32
II.3.3. Relations entre les modes IGB et les modes HGB et LGB	33
III. FAISCEAUX GAUSSIENS A ARGUMENT COMPLEXE	33
III.1. Une forme plus symétrique pour les modes d'Hermite-Gauss	33
III.2. Propagation des modes complexes d'Hermite-Gauss	35
IV. CONCLUSION	36

CHAPITRE IV : TRAVERSEE D'UNE SECCESION DE DIAPHRAGMES

I. INTRODUCTION	37
II. DIFFRACTION DE FRESNEL	37
II.1. Intégrale de diffraction	37
II.2. Approximations de Fresnel	38
II.3. Intégrale de diffraction en fonction des éléments A, B, C, et D	39
III. APPLICATION DE L'INTEGRALE DE DIFFRACTION AU CAS DU DIAPHRAGME	39
IV. CONVERSION DE MODES	40
IV.1. Conversion de modes dans un plan infini	40
IV.2. Conversion de modes dans un plan fini (cas d'une ouverture circulaire)	41
IV.3. Calcul des coefficients de couplage par la formule de récurrence	42

V. APPLICATION DE LA CONVERSION DE MODES AU CAS D'UNE OUVERTURE CIRCULAIRE	44
VI. RESULTATS ET DISCUSSION	47
VI.1. Empilements d'ouvertures	47
VI.2. Succession de diaphragmes	49
VI.2.1. Transformation du mode fondamental TEM_{00}	49
VI.2.2. Transformation du mode d'ordre supérieur TEM_{100}	54
VI.3. Profils particuliers	55
VII. IMPACT DES PARAMETRES : ECART, TAILLE ET NOMBRE D'OUVERTURES SUR LE PROFIL DU CHAMP	56
VIII. APPLICATIONS ET EXPLOITATION DES EFFETS DIFFRACTIFS D'UNE SUCCESSION DE DIAPHRAGMES.	57
IX. TRANSFORMATION DU CHAMP DANS LES SYSTEMES OPTIQUES DIAPHRAGMES	59
X. CONCLUSION	60
 CONCLUSION GENERALE	 61
 ANNEXE	 62
Annexe A : Approche comparative TGP-GGP	63
Annexe B : Description de la propagation des faisceaux Gaussiens au moyen de la transformée de Fourier fractionnaire	
 REFERENCES	 67

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

Avec l'intervention du laser dans de nombreux domaines tels que la médecine, la recherche scientifique, l'industrie...etc., la parfaite maîtrise de cet outil devient essentielle.

Il est bien connu qu'il est toujours possible de développer une onde au moyen des ondes planes. Pour le rayonnement laser, les modes Gaussiens s'avèrent mieux adaptés car la distribution de l'intensité n'y est pas uniforme [1-3].

Le faisceau Gaussien est caractérisé par un terme Gaussien. Nous distinguons le mode fondamental qui présente un profil Gaussien et les modes d'ordres supérieurs. Ce type de faisceaux présente un pincement au plan d'étranglement qui lui confère le caractère de confinement nécessaire pour permettre de traduire efficacement le champ émis par un laser [1-2].

En pratique, l'utilisateur du laser dispose d'un faisceau Gaussien issu d'une cavité laser. Ce dernier va traverser des systèmes optiques différents afin de répondre à des besoins particuliers nécessitant souvent une forte focalisation ; en effet, un spot de taille réduite permet de mieux cibler les points d'impact. C'est par exemple le cas des faisceaux utilisés pour l'enregistrement ou la lecture de données sur les CD-ROM, le perçage des métaux, le traitement de tissus humains ou encore dans la résolution des problèmes d'adaptations entre systèmes optiques.

Dans les sujets d'études tels que l'holographie et les résonateurs optiques, il est nécessaire de considérer des termes de phase dans les calculs. Dans d'autres domaines, tel que le filtrage spatial optique, il est d'intérêt d'avoir des expressions analytiques pour les champs électromagnétiques associés.

Pour toutes ces applications, l'expression analytique du champ devient une priorité. L'étude de la transformation du champ en propagation simple à travers un système optique multi-diaphragmé s'inscrit dans cette optique.

La condition de Kirchhoff exprime que le champ transmis par une ouverture est le même que le champ incident à l'intérieur du trou et qu'il s'annule en dehors [4]. Elle permet d'établir ainsi, à une frontière donnée, un lien entre le champ avant et après cette limite : de l'espace libre à l'espace libre ou d'un guide d'onde à l'espace libre par exemple. Cette exigence a été utilisée en tant que réalité physique dans de nombreuses études [1,5-9]. L'étude actuelle, de même que celle qui a éveillé l'intérêt que nous portons à la succession de diaphragmes [10,11] présentent la particularité d'exploiter cette réalité physique pour démontrer la précision d'un calcul d'intégrale. Cette confrontation à l'ouverture n'a jamais été utilisée auparavant pour répondre à une telle préoccupation. De plus, l'exigence de vérifier au préalable que la condition de Kirchhoff est bien réalisée permet de suivre scrupuleusement la transformation du champ étape par étape.

La technique d'intégration basée sur des moyens matériels numériques modestes peut se suffire de techniques d'intégration élémentaires telles que la méthode des trapèzes. Différentes autres formules de quadrature, plus sophistiquées et plus précises, telles que

celles de Gauss Legendre, Chebychev, Gauss Lobatto ou celles incluses dans des logiciels ont été testées. Elles nécessitent un temps de calcul très long et annulent par conséquent l'intérêt de leur utilisation [10,11]. Il y a lieu de signaler que les méthodes basiques d'intégration peuvent conduire à des résultats satisfaisants à condition que soient ciblées des zones où le champ évolue peu.

La vérification de la condition de Kirchhoff au vue de l'excellente concordance à l'ouverture entre champs incident et transmis est rendu possible grâce à la méthode d'intégration dite pseudo-analytique développée [10,11]. Par ailleurs, les résultats atteints, pour une base de développement tronquée, bons à 40 modes et d'une très grande précision à 60, démontrent la robustesse de notre approche.

Le premier chapitre de ce travail établit, à partir de l'équation d'onde paraxiale, l'expression analytique du mode fondamental Gaussien TEM_{00} . Les transformations du champ, par quelques systèmes optiques, sont données dans le cadre de l'optique géométrique. Cette démarche n'est pas aisée pour des structures optiques élaborées.

Le deuxième chapitre donne une idée explicite du formalisme $ABCD$. L'étude exhaustive de la propagation des faisceaux Gaussiens est simplifiée à l'aide de ce formalisme qui permet le calcul des paramètres du faisceau tout en évitant l'utilisation de l'intégrale de diffraction. Enfin, l'étude par cet outil de la transformation des faisceaux Gaussiens à travers les lentilles, les milieux quadratiques et dans les résonateurs stables ainsi que leur adaptation est réalisée.

Le troisième chapitre établit les expressions analytiques des modes d'ordres supérieurs du faisceau Gaussien. Il rappelle également la formulation des modes à arguments complexes qui permettent une forme généralisée plus symétrique des modes Gaussiens [12].

Le quatrième chapitre est consacré à la diffraction par une ou plusieurs ouvertures tout en évitant l'utilisation de l'intégrale de diffraction. Pour étudier le champ qui traverse une ouverture, nous avons opté pour la conversion de modes puis nous avons généralisé cette méthode efficace à une succession de diaphragmes. L'analyse des systèmes diaphragmés nécessite l'association de cette approche et du formalisme $ABCD$.

La simulation numérique a permis d'obtenir la distribution axiale et transverse du champ issu de différentes successions. Nous avons constaté, d'une façon générale, que cette distribution dépend essentiellement du rayon et du nombre de diaphragmes ainsi que des distances qui les séparent. L'impact de ces paramètres peut conduire à des profils particuliers pouvant être exploités dans de nombreuses applications.

Pour montrer l'importance et l'utilité des systèmes diffractifs, nous avons illustré notre étude par des exemples où la succession de diaphragmes joue un rôle crucial tels que les CAFS (*Cascaded-Apertures Focusing Systems*) [13], les sources laser multipoints, le découpage, la soudure, le marquage ou le durcissement des alliages.

Cette étude a permis de confirmer que l'association de la conversion de modes et du formalisme $ABCD$ offre un outil puissant qui permet, dans le cadre de l'optique paraxiale, l'étude de la transformation du champ dans les systèmes optiques diaphragmés.

Chapitre I : Faisceaux Gaussiens dans le cadre de l'optique géométrique

I. INTRODUCTION

Le rayonnement laser possède des propriétés optiques différentes de celles des faisceaux lumineux conventionnels issus de sources naturelles ou artificielles. Pour sa description, le modèle du faisceau Gaussien est très utile.

L'équation d'onde paraxiale [1, 2, 12,13], dérivée des équations de Maxwell, exprime les changements spatio-temporels du champ associé à l'onde lumineuse. Elle permet l'étude, par l'approche différentielle, de la propagation des ondes électromagnétiques. Le modèle du faisceau Gaussien est une solution mathématique de cette équation.

Ce chapitre présente l'établissement, par l'approche différentielle, de l'expression analytique du mode fondamental d'un faisceau Gaussien ainsi que ses transformations dans le cadre de l'optique géométrique.

II. EXPRESSION ANALYTIQUE DU MODE FONDAMENTAL D'UN FAISCEAU GAUSSIEN

A partir des équations de Maxwell, nous pouvons aisément déduire qu'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu linéaire, isotrope et homogène doit vérifier l'équation de propagation d'Helmholtz [1, 2, 12,13]:

$$(\nabla^2 + k^2)E(x, y, z) = 0 \quad (I. 1)$$

E: désigne le champ électrique de l'onde électromagnétique et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde.

La solution de cette équation prend la forme suivante [1, 2] :

$$E(x, y, z) = u(x, y, z) e^{-jkz} \quad (I. 2)$$

où $u(x, y, z)$ est une fonction complexe qui décrit le profil transverse du champ.

En remplaçant cette solution dans l'équation d'Helmholtz et en adoptant l'approximation de l'optique paraxiale soit : $|\frac{\partial u}{\partial z}| \ll |u|$ et $|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}| \ll 2k|\frac{\partial u}{\partial z}|$ qui exprime que la variation longitudinale du champ est négligeable devant la variation transversale, nous pouvons réécrire l'équation d'onde sous la forme [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (I. 3)$$

Le faisceau Gaussien est caractérisé par un lieu d'étranglement où son extension transverse est réduite à son minimum (waist). Pour l'ensemble de cette étude, nous considérerons un waist positionné en $z=0$. Nous pouvons alors vérifier qu'une fonction de la forme [1]:

$$E(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\exp[-jkz + j\psi(z)]}{w(z)} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} - jk\frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right] \quad (I.4)$$

est solution de l'équation (I.3). L'expression est celle du mode fondamental normalisé qui donne la distribution de champ pour la position z .

Avec w_0 le rayon du faisceau à son lieu d'étranglement (waist), $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ la longueur de Rayleigh et λ la longueur d'onde, définissons les paramètres du faisceau :

- **$R(z)$** : le rayon de courbure du front d'onde

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (I.5)$$

- **$w(z)$** : le rayon du faisceau

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (I.6)$$

- **$\psi(z)$** : la phase de Gouy

$$\psi(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (I.7)$$

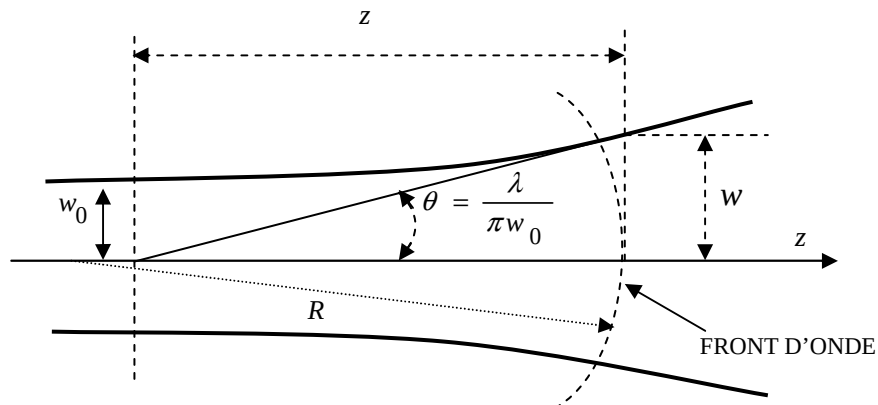


Figure 1 : Contours d'un faisceau Gaussien

III. PLANS DE REFERENCES D'UN SYSTEME OPTIQUE

Les règles de l'optique géométrique constituaient le premier outil des opticiens pour suivre la transformation, dans différents systèmes optiques, des rayons lumineux [12].

L'étude par cette approche nécessite la connaissance des plans de références du système optique. Ces derniers sont composés des plans principaux et des plans focaux.

Les plans principaux d'un système optique sont des plans conjugués pour lesquels le grandissement vaut 1. Les plans focaux sont des ensembles de points de convergence ou de génération de faisceaux parallèles.

Un rayon paraxial, dans une section transversale donnée ($z=const$) d'un système optique, est caractérisé par sa distance r à l'axe optique et par sa pente r' , supposée faible, par rapport à cet axe. Les paramètres à la sortie d'une structure, r_2 et r'_2 , dépendent des propriétés optiques de cette dernière et des conditions d'entrée i.e. la position r_1 et la pente r'_1 (Figure 2) [1,2,14].

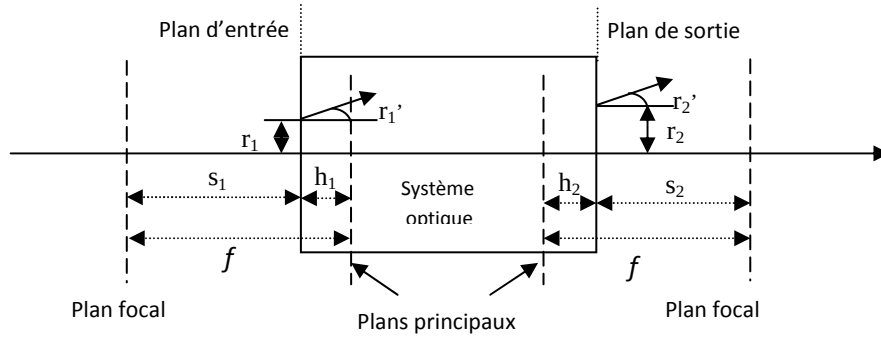


Figure 2 : Plans de références d'un système optique.

La distance s_1 du plan focal, côté entrée, au plan d'entrée et la distance s_2 du plan focal côté sortie, au plan de sortie sont données par les relations (I.8) et (I.9) respectivement [12]:

$$s_1 = \frac{r_1}{r'_1} \Big|_{r'_2=0} \quad (I.8)$$

$$s_2 = \frac{r_2}{r'_2} \Big|_{r'_1=0} \quad (I.9)$$

Pour la localisation des plans principaux, nous avons:

$$h_1 = \frac{r_2 - r_1}{r'_1} \Big|_{r'_2=0} \quad (I.10)$$

$$h_2 = \frac{r_2 - r_1}{r'_2} \Big|_{r'_1=0} \quad (I.11)$$

La distance focale du système est alors donnée par

$$f = s_1 + h_1 = s_2 + h_2 = \frac{r_2}{r'_1} \Big|_{r'_2=0} = -\frac{r_1}{r'_2} \Big|_{r'_1=0} \quad (\text{I. 12})$$

IV. TRANSFORMATION DES FAISCEAUX GAUSSIENS

La connaissance des plans de référence d'un système vont à présent nous permettre d'illustrer quelques transformations du faisceau Gaussien à travers des exemples simples.

IV. 1. LENTILLE MINCE

IV.1.1. Nouveaux paramètres w et R

On supposera une propagation vers la droite. A une distance d_1 à gauche de la lentille, le faisceau possédait un rayon au waist w_{01} . Après traversée de la lentille, un nouveau waist, de rayon w_{02} , se forme à une distance d_2 (Figure 3) [12].

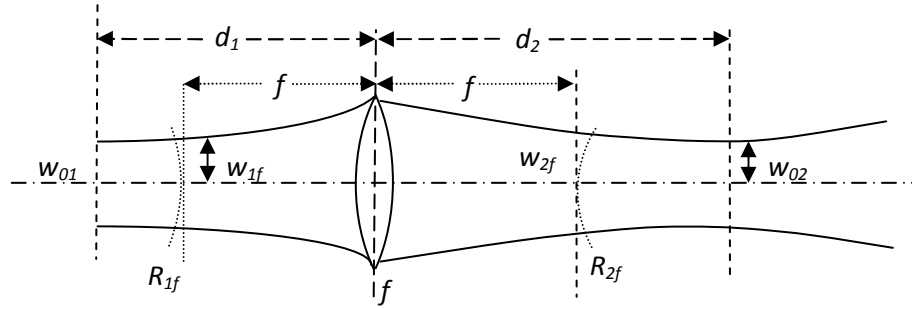


Figure 3 : Transformation d'un faisceau Gaussien par une lentille.

L'équation (I. 13) donne les rayons w_{1f} et w_{2f} ainsi que les rayons de courbure du front d'onde R_{1f} et R_{2f} des faisceaux pour les plans focaux de la lentille (voir figure 3) [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{1f} = f \theta_2 = \frac{\lambda f}{\pi w_{02}} \end{array} \right. \quad (\text{I. 13. a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{2f} = f \theta_1 = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}} \end{array} \right. \quad (\text{I. 13. b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1f} = \frac{f^2}{d_2 - f} \end{array} \right. \quad (\text{I. 13. c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{2f} = \frac{f^2}{d_1 - f} \end{array} \right. \quad (\text{I. 13. d})$$

Où les angles en champ lointain θ_1 et θ_2 des deux faisceaux d'entrée et de sortie respectivement sont données par :

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\lambda}{\pi w_{01}} \\ \theta_2 = \frac{\lambda}{\pi w_{02}} \end{cases} \quad (\text{I. 14})$$

On exprime w_{02} en fonction de w_{01} par la relation donnée par Goubau [12] :

$$\frac{1}{w_{02}^2} = \frac{1}{w_{01}^2} \left(1 - \frac{d_1}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\pi w_{01}}{\lambda}\right)^2 \quad (\text{I. 15})$$

La distance d_2 entre la lentille et le waist w_{02} est donnée par [12] :

$$d_2 - f = (d_1 - f) \frac{f^2}{(d_1 - f)^2 + \left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2} \quad (\text{I. 16})$$

IV.1.2. FOCALISATION

En pratique, l'utilisateur du laser dispose d'un faisceau Gaussien issu d'une cavité laser. Ce dernier va traverser des systèmes optiques différents afin de répondre à des besoins particuliers nécessitant souvent une forte focalisation ; en effet, un spot de taille réduite permet de mieux cibler les points d'impact. C'est par exemple le cas des faisceaux utilisés pour l'enregistrement ou la lecture de données sur les CD-ROM, le perçage des métaux, le traitement de tissus humains, l'ophtalmologie ou encore dans la résolution des problèmes d'adaptations entre systèmes optiques.

Le défi est alors de déterminer les intensités laser réalisables et les dimensions transverses possibles à partir d'un faisceau Gaussien.

- **Dimensions transverses d'un faisceau après focalisation**

La situation habituelle de focalisation d'un faisceau Gaussien par une lentille de distance focale f , est montrée sur la figure 4.

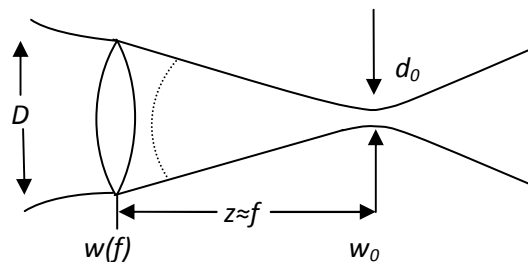


Figure 4: Focalisation d'un faisceau Gaussien.

Soit $w(f)$ le rayon du faisceau incident sur une lentille de distance focale f . La traversée de cet élément conduit à un étranglement en un lieu appelé waist dont la dimension transverse est de rayon w_0 . La relation qui existe entre w_0 et $w(f)$ est donnée par [1, 12] :

$$w_0 \times w(f) = \frac{f\lambda}{\pi} \quad (\text{I. 17})$$

Il paraît évident, dans des problèmes de focalisation, qu'un faisceau Gaussien incident devrait traverser l'ouverture de la lentille pour atteindre la position désirée tout en évitant une grande perte de puissance liée aux effets de bords [1].

Un critère raisonnable, pour des applications pratiques, serait d'adopter $D = \pi w(f)$ pour le diamètre de la lentille pour une perte inférieure à 1% de l'énergie incidente [1]. Nous désignerons par $d_0 = 2w_0$ le diamètre de l'étendue transverse de la tache au plan de focalisation qui contient 86% de l'énergie [1].

En tenant compte du critère précédent et de l'équation (I. 17), nous obtenons $d_0 \approx \frac{2f\lambda}{D}$ pour le diamètre de la tache focale [1].

L'ouverture relative désigne le nombre $f^\#$ d'une lentille définie par [1].

$$f^\# \equiv \frac{f}{D} \quad (\text{I. 18})$$

Moyennant ce dernier terme, la nouvelle expression du diamètre de la tache focale est :

$$d_0 = 2f^\#\lambda \quad (\text{I. 19})$$

Soit un faisceau Gaussien de puissance totale P , focalisé par une lentille de distance focale f et de diamètre D . L'intensité maximale au centre de la tache focale sera donnée par [1]:

$$I_0 = \frac{2P}{\pi w_0^2} \approx \frac{P}{2(f^\#\lambda)^2} \quad (\text{I. 20})$$

Nous pouvons alors dire que l'énergie est concentrée dans un cercle de surface égale à $2(f^\#\lambda)^2$ et de diamètre $\mathfrak{D}$ égal à [1] :

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} f^\#\lambda \approx 1.6f^\#\lambda \quad (\text{I. 21})$$

- **Influence du nombre $f^\#$ et du nombre de Fresnel N_f**

Quelle que soit la définition utilisée pour le diamètre, il est évident qu'un faisceau Gaussien idéal est focalisé en une tache focale d'un diamètre à peu près égal à deux fois la longueur d'onde multipliée par le nombre $f^\#$ [1].

Les spécialistes en optique font également référence, pour caractériser les lentilles minces de diamètre $D=2a$ et de distance focale f , au nombre de Fresnel N_f donné par [1] :

$$N_f \equiv \frac{a^2}{f\lambda} \quad (I.22)$$

Ainsi, le diamètre de la tache focale et le diamètre de la lentille sont alors reliés par [1] :

$$\frac{d_0}{D} \approx \frac{1}{2N_f} \quad (I.23)$$

Une forte focalisation, conduisant à des taches focales de dimensions faibles par rapport au diamètre de la lentille, exige une lentille avec un nombre de Fresnel N_f élevé [1].

- **Profondeur de focalisation et déviation de la tache focale**

La profondeur de focalisation d'un faisceau Gaussien est définie par la longueur de Rayleigh z_R , ou $2z_R$. Si nous utilisons $D = \pi w(f)$, pour le diamètre de la lentille, la profondeur de focalisation s'écrit alors [1] :

$$\text{Profondeur de focalisation} = 2z_R \approx 2\pi f^{\#2} \lambda \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{d_0}{\lambda} \right)^2 \lambda \quad (I.24)$$

La position du foyer géométrique de la lentille et la position z du waist du faisceau Gaussien focalisé sont distants de Δf donné par (Figure 5) :

$$\Delta f \equiv f - z = \frac{z_R^2}{z} \approx \frac{z_R^2}{f} \quad (I.25)$$

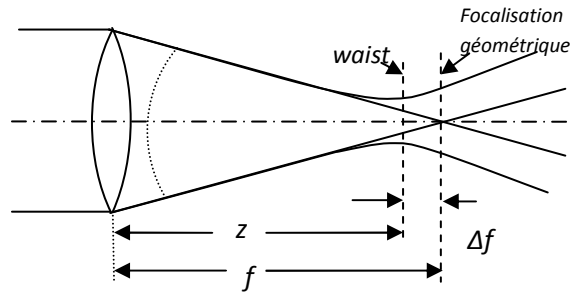


Figure 5: Ecart entre la position du foyer géométrique de la lentille et la position du waist d'un faisceau Gaussien focalisé.

En terme pratique, cette différence est négligeable [1]. Toutefois, des applications de grande précision, pourraient nécessiter la prise en compte de cet écart.

IV.2. Transformation d'un faisceau Gaussien par un télescope

Le télescope est la combinaison de deux lentilles de longueurs focales f_1 et f_2 espacées d'une distance $d = f_1 + f_2 - \Delta d$; Δd est la distance, supposée petite, de réglage du télescope qui représente l'incertitude sur d .

La longueur focale et les positions des plans principaux du télescope sont données par [12] :

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta d} \quad (I.26)$$

$$h_1 = \frac{f_1 d}{\Delta d} \quad (I.27)$$

$$h_2 = \frac{f_2 d}{\Delta d} \quad (I.28)$$

Nous considérons un faisceau Gaussien de waist w_{01} , positionné à une distance s_1 de la première lentille, qui traverse un télescope (Figure 6).

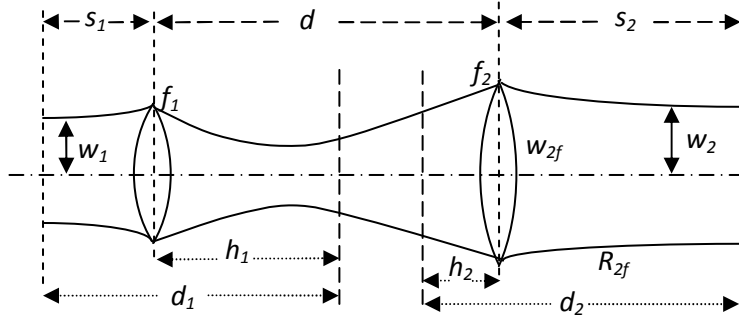


Figure 6 : Passage d'un faisceau Gaussien à travers un télescope.

Les distances des waists aux plans principaux correspondants sont données par:

$$\begin{cases} d_1 = s_1 + h_1 \\ d_2 = s_2 + h_2 \end{cases} \quad (I.29)$$

Grâce aux équations (I.26) , (I.27) et (I.29) et comme $d = f_1 + f_2 - \Delta d$ nous trouvons:

$$\frac{d_1}{f} - 1 = \frac{f_1}{f_2} + \frac{\Delta d}{f_2} \left(\frac{s_1}{f_1} - 1 \right) \quad (I.30)$$

En utilisant (I. 26) et (I. 30) dans (I. 15), nous obtenons pour le rayon du faisceau w_{02} :

$$w_{02} = w_{01} \frac{f_2}{f_1} \left[1 + \frac{\Delta d}{f_1} \left(1 - \frac{s_1}{f_1} \right) \right] \quad (\text{I. 31})$$

Pour $\Delta d \rightarrow 0$ la relation précédente s'écrit :

$$w_{02} \approx w_{01} \frac{f_2}{f_1} \quad (\text{I. 32})$$

Cette équation montre que le rapport des rayons des faisceaux aux waists est proche de celui des distances focales des deux lentilles.

Pour localiser le nouveau waist, utilisons l'expression suivante [12] :

$$\frac{s_1 - f_1}{f_1^2} + \frac{s_2 - f_2}{f_2^2} = \frac{\Delta d}{f_1^4} \left[(s_1 - f_1)^2 - \left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (\text{I. 33})$$

Pour un télescope bien ajusté $\Delta d = 0$, la relation (I. 33) s'écrit alors :

$$\frac{s_1 - f_1}{f_1^2} = \frac{f_2 - s_2}{f_2^2} \quad (\text{I. 34})$$

IV.3. FAISCEAU GAUSSIEN DANS UN RESONATEUR

Soit un résonateur de longueur L constitué de deux miroirs d'ouvertures suffisamment grandes, localisés en d_1 et d_2 , $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont les rayons de courbure du miroir de gauche et de droite respectivement (voir figure 7).

Considérons un faisceau Gaussien se propageant à partir du plan d'étranglement $\mathcal{P}$ dans le sens positif (ou négatif) de l'axe z (Figure 7). Les rayons lumineux sont désignés par des lignes orientées et le rayon du faisceau w_0 dans le plan d'étranglement est supposé donné.

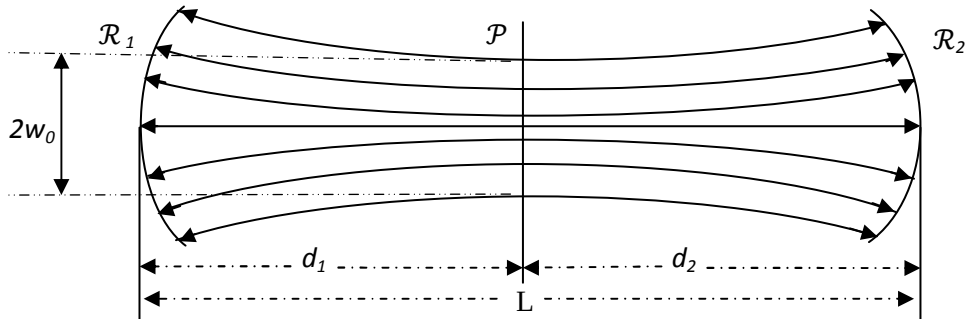


Figure 7 : Faisceau Gaussien dans un résonateur.

A l'aide d'un miroir sphérique concave, d'ouverture suffisamment grande, le faisceau lumineux est réfléchi sur lui même après réflexion.

Supposons que le miroir soit placé à une distance d_2 du plan d'étranglement $\mathcal{P}$. Comme : $R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]$ donc $R(d_2) = d_2 \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]$.

Le miroir doit avoir un rayon de courbure $\mathcal{R}_2$, exactement égal à cette valeur pour que le faisceau lumineux se reproduise à la réflexion, de valeur [3] :

$$\mathcal{R}_2 = R(d_2) = d_2 \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (\text{I. 35})$$

On peut réécrire cette relation sous la forme :

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 d_2 (\mathcal{R}_2 - d_2) \quad (\text{I. 36})$$

Ce résultat est valable pour le miroir de gauche (voir figures 7):

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 d_1 (\mathcal{R}_1 - d_1) \quad (\text{I. 37})$$

Ainsi, après chaque réflexion, le faisceau s'auto-reproduit en obéissant aux conditions aux limites imposées par les miroirs. Nous parlons alors de modes du résonateur.

En utilisant la valeur de la longueur de cavité et en tenant compte des relations (I. 36) et (I. 37) nous établissons le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} L = d_1 + d_2 \\ d_1 (\mathcal{R}_1 - d_1) = d_2 (\mathcal{R}_2 - d_2) \end{cases} \quad (\text{I. 38})$$

Eliminons d_2 , il vient :

$$d_1 (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2L) = L(\mathcal{R}_2 - L) \quad (\text{I. 39})$$

En supposant $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2L \neq 0$, l'équation (I. 38) donne alors :

$$d_1 = L(\mathcal{R}_2 - L)(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2L) \quad (\text{I. 40})$$

De la même façon, nous obtenons :

Nous aboutissons ainsi à w_0 , expression du rayon au plan d'étranglement, en fonction des rayons de courbure des miroirs et de la longueur de cavité :

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{L(\mathcal{R}_1 - L)(\mathcal{R}_2 - L)(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - L)}{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2L)^2} \quad (\text{I. 42})$$

Pour déterminer le rayon du faisceau sur les miroirs du résonateur (w_1 pour le miroir de gauche et w_2 pour celui de droite), nous utilisons le rapport des équations (I. 5) et (I. 6):

$$w^2 w_0^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 R z \quad (\text{I. 43})$$

Qui prend alors, pour chaque miroir i , la forme :

$$w_0^2 w_i^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \mathcal{R}_i d_i \quad \text{avec } i = 1, 2. \quad (\text{I. 44})$$

En se servant de l'expression (I. 42), nous aboutissons à :

$$\begin{cases} w_1^2 = \frac{\lambda \mathcal{R}_1}{\pi} \sqrt{\frac{L(\mathcal{R}_2 - L)}{(r_1 - L)(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - L)}} \\ w_2^2 = \frac{\lambda \mathcal{R}_2}{\pi} \sqrt{\frac{L(\mathcal{R}_1 - L)}{(\mathcal{R}_2 - L)(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - L)}} \end{cases} \quad (\text{I. 45})$$

Pour un résonateur symétrique ($\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$), la position du plan d'étranglement est localisée au milieu du résonateur et nous obtenons:

$$\begin{cases} d_1 = d_2 = \frac{L}{2} \\ w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 L(2\mathcal{R} - L) \\ w_1^2 = w_2^2 = \frac{\lambda \mathcal{R}}{\pi} \sqrt{\frac{L}{2\mathcal{R} - L}} \end{cases} \quad (\text{I. 46})$$

Avec le paramètre g donné par $g = 1 - L/\mathcal{R}$, l'expression de w_0^4 devient :

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda L}{2\pi}\right)^2 (1 + g)(1 - g) \quad (\text{I. 47})$$

Cette relation montre que le paramètre g doit satisfaire à la condition $-1 < g < 1$ car w_0^4 est positif.

Pour le cas particulier ($\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = L$), le plan d'étranglement n'est plus centré et la relation (I. 37) devient :

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 d_1(\mathcal{R}_1 - d_1) \quad (\text{I. 48})$$

V. PHASE DE GOUY

La phase de Gouy ψ (Gouy et non Guoy [15]), est une caractéristique axiale qui affecte la propagation du faisceau Gaussien [1, 16]. Elle résulte d'un confinement spatial transverse du champ [16]. L'annexe A rapporte une description via la transformée de Fourier fractionnaire pour cette grandeur telle que donnée par Erden et Ozaktas [17].

Avec z la longueur de propagation à partir d'un waist et z_R la longueur de Rayleigh, la phase de Gouy est donnée par $\arctan(z/z_R)$. Cette expression Traditionnelle de la Phase de Gouy TGP [10, 18] n'est pas adaptée pour l'étude des structures optiques distinctes de l'espace libre. En effet, elle peut faire appel à plusieurs waists intermédiaires. Par conséquent, l'évaluation de cette grandeur pour chaque étape d'un système s'impose [10, 18]. C'est pourquoi l'intégrale de diffraction [1, 19, 20] restait le choix le plus favorable pour s'affranchir de cette difficulté [10, 18].

VI. Introduction des matrices $ABCD$ pour les besoins de l'optique géométrique

L'introduction des matrices $ABCD$ en optique géométrique a permis d'enregistrer des progrès considérables dans ce domaine. Les grandeurs de sortie r_2 et r_2' d'un système optique dépendent linéairement de celles d'entrée r_1 et r_1' (Figure.8) ; c'est pourquoi, la transformation des rayons paraxiaux peut être décrite par des matrices de transfert [1, 2, 14]. Ceci conduit à l'écriture commode suivante [1, 2, 14]:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} \quad (I.49)$$

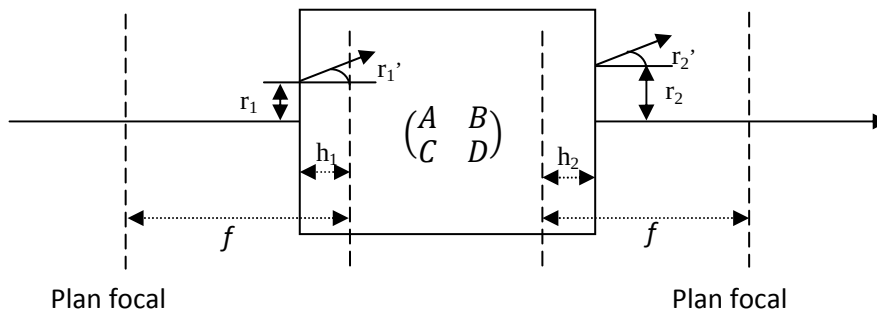


Figure 8 : Système optique.

La matrice $ABCD$ est appelée matrice de transfert des rayons [1-3]. Ses éléments s'expriment, en fonction des paramètres du système, grâce aux relations suivantes [12]:

$$A = 1 - \left(\frac{h_2}{f}\right) \quad (I.50)$$

$$B = h_1 + h_2 \left(\frac{h_1 h_2}{f}\right) \quad (I.51)$$

$$C = -\left(\frac{1}{f}\right) \quad (I.52)$$

$$D = 1 - \left(\frac{h_1}{f}\right) \quad (I.53)$$

VII. CONCLUSION

L'équation d'onde paraxiale admet le modèle Gaussien comme solution. Ses paramètres sont : le rayon w , le rayon de courbure du front d'onde R et la phase de Gouy ψ . Sa transformation peut être effectuée par les règles de l'optique géométrique. Cependant, cette démarche n'est pas aisée dans l'étude de la propagation du champ dans des structures optiques élaborées. L'objectif visé par ce premier chapitre était de démontrer que l'approche géométrique, ici utilisée, avait permis de faire évoluer l'optique des faisceaux Gaussiens. Cependant, les prochains chapitres apporteront un complément qui simplifiera leur étude.

Chapitre II : Formalisme $ABCD$ et Faisceaux Gaussiens

I. INTRODUCTION

Les matrices $ABCD$ ont été introduites pour traduire le passage d'un rayon lumineux à travers un système optique. Une analogie intéressante entre l'optique des faisceaux Gaussiens et l'optique géométrique existe qui permet ainsi l'exploitation de ce formalisme dans l'étude de la transformation des faisceaux Gaussiens.

Nous avons vu que trois paramètres qui sont : le rayon du faisceau w , le rayon de courbure du front d'onde R et la phase de Gouy ψ définissent totalement le faisceau Gaussien. Le formalisme $ABCD$ offre ainsi un outil puissant, applicable à ce type de faisceaux, qui permet le calcul de ces paramètres importants. Cette approche nous permettra d'éviter l'utilisation de l'intégrale de diffraction [1, 19, 20].

Dans ce chapitre, nous allons donner une idée explicite de ce formalisme et traiter quelques exemples sur la base de cet outil.

II. INTRODUCTION DU RAYON DE COURBURE COMPLEXE q

En introduisant le paramètre complexe q , qui remplace w et R , Kogelnik a apporté une première simplification à l'étude des faisceaux Gaussiens [12].

q est appelé rayon de courbure complexe du faisceau et est donné par [1,2] :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (\text{II. 1})$$

Pour ce paramètre, les lois de propagation et de transformation sont particulièrement simples et permettent de décrire les faisceaux Gaussiens dans des structures optiques complexes.

A partir du waist, une propagation sur une longueur z dans l'espace libre s'exprime grâce à ce complexe de la manière suivante [1, 12] :

$$q(z) = z + q_o = z + jz_R \quad (\text{II. 2})$$

où $q_o = q(0) = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = jz_R$ avec z_R la longueur de Rayleigh et λ est la longueur d'onde.

En raison de la linéarité de l'équation précédente, les paramètres complexes q_1 et q_2 de deux sections transversales arbitraires, distantes de d , sont reliés par :

$$q_2 = q_1 + d \quad (\text{II. 3})$$

A l'aide de ce paramètre complexe, l'expression du mode Gaussien fondamental normalisé qui donne la distribution de champ pour la position z devient :

$$E(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{q_0}{w_0 q(z)} \exp \left[-jkz - jk \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right] \quad (\text{II. 4})$$

III. MATRICES DE TRANSFERT DE QUELQUES STRUCTURES OPTIQUES ELEMENTAIRES

Le tableau suivant donne les matrices de transfert pour quelques structures optiques [2].

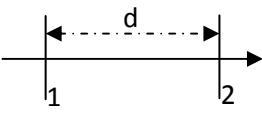
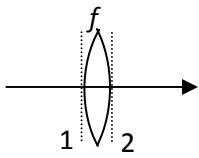
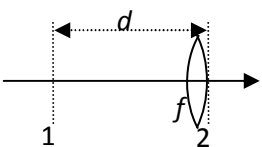
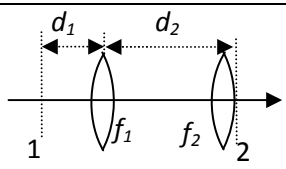
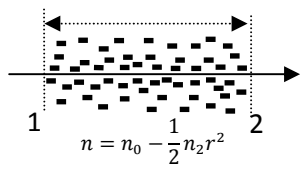
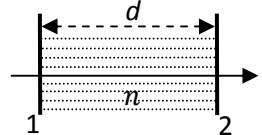
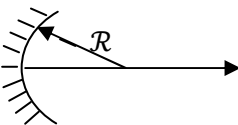
Système optique	Matrice
	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f_1} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f_1} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_1} - \frac{d_2}{f_2} - \frac{d_1}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \frac{1}{\sqrt{n_0 n_2}} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \\ -\sqrt{n_0 n_2} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$

Tableau 1 : Matrices de transfert pour quelques systèmes optiques.

Les matrices de transfert associées aux systèmes optiques du tableau 1 correspondent à :

- ◆ Matrice 1 : propagation sur une distance d dans l'espace libre.
- ◆ Matrice 2 : traversée d'une lentille mince de longueur focale f . Les plans d'entrée et de sortie sont placés immédiatement à gauche et à droite de la lentille.
- ◆ Matrice 3 : combinaison des deux précédents systèmes optiques. Elle régit une propagation libre sur une distance d suivie d'une lentille mince.
- ◆ Matrice 4 : description de deux structures de type 3.
- ◆ Matrice 5 : description d'un milieu quadratique de longueur d . Dans ce milieu, l'indice de réfraction varie quadratiquement avec r selon la loi $n = n_0 - \frac{1}{2}n_2r^2$. Une telle variation d'indice peut se produire dans le milieu amplificateur d'un laser.
- ◆ Matrice 6 : description d'un matériel diélectrique d'indice n et de longueur d .
- ◆ Matrice 7 : description de la réflexion par un miroir sphérique de rayon de courbure $\mathcal{R}$

• Succession de systèmes

La matrice de transfert d'un chemin optique composé de différents systèmes, chacun caractérisé par sa matrice de transfert, est donnée par le produit de ces matrices élémentaires dans l'ordre inverse des éléments optiques traversés (Figure1).

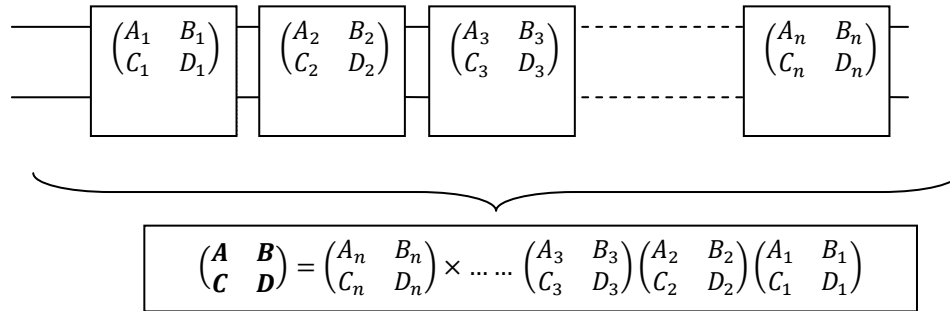


Figure 1: Matrice équivalente à une succession de systèmes.

• Succession de systèmes identiques

Chaque élément simple de cet ensemble est caractérisé par la matrice $ABCD$. La traversée de n éléments consécutifs est donnée par la puissance nième de cette matrice. Elle peut être évaluée au moyen du théorème de Sylvester [2, 12] :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^n = \frac{1}{\sin \theta} \begin{vmatrix} A \sin n\theta - \sin(n-1)\theta & B \sin n\theta \\ C \sin n\theta & D \sin n\theta - \sin(n-1)\theta \end{vmatrix} \quad (\text{II.5})$$

avec $\cos \theta = \frac{1}{2} (A + D)$.

IV. LOI $ABCD$ OU TRANSFORMATION DE KOGELNIK

Soient q_1 et q_2 les paramètres d'entrée et de sortie d'un faisceau à travers un système optique élémentaire ou composé. La loi $ABCD$ permet de raccorder ces paramètres par une transformation bilinéaire donnée par [1-3] :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{II. 6})$$

A , B , C et D sont les éléments de la matrice de transfert décrivant le système.

V. INTRODUCTION DU PARAMETRE COMPLEXE DE GOUY q_G POUR LE CALCUL DE LA PHASE DE GOUY

Le troisième paramètre essentiel pour la description du faisceau Gaussien est la phase de Gouy ψ . On distingue deux écritures différentes pour l'exprimer : la TGP (Traditional Gouy Phase) description mathématique très usitée donnée au premier chapitre, et la GGP (Generalized Gouy Phase) [1, 18].

La GGP donne l'écart en phase accumulé par le faisceau Gaussien lors de sa propagation. La description mathématique en est donnée par Siegman [1]. Résultat déduit en identifiant les résultats obtenus par l'emploi de l'intégrale généralisée d'Huygens d'avec ceux obtenus par l'emploi d'une approche directe utilisant la notion de phase de Gouy. Il a alors donné l'expression suivante [1] :

$$\frac{A + \frac{B}{q_1}}{\left| A + \frac{B}{q_1} \right|} = \exp(j\psi) \quad (\text{II. 7})$$

La relation exacte comme recalculé ultérieurement [10, 18]

$$\frac{A + \frac{B}{q_e}}{\left| A + \frac{B}{q_e} \right|} = \exp(-j\psi_s) \quad (\text{II. 8})$$

où A et B sont les deux premiers éléments de la matrice $ABCD$ caractérisant le système optique traversé. q_e est le rayon de courbure complexe au plan d'entrée et ψ_s la phase de Gouy généralisée.

Afin de donner une expression explicite à la phase de Gouy généralisée, un nouveau paramètre complexe de Gouy q_G a été introduit [10, 18] d'expression :

$$q_G = A + \frac{B}{q_e} \quad (\text{II. 9})$$

L'équation (II. 8) devient :

$$\frac{q_G}{|q_G|} = \exp(-j\psi_s) \quad (\text{II. 10})$$

Soit:

$$q_G = |q_G| \exp(-j \psi_s) \quad (\text{II. 11})$$

D'où :

$$\psi_s = \tan^{-1} \left(\frac{-\text{Im}(q_G)}{\text{Re}(q_G)} \right) \quad (\text{II. 12})$$

Re et Im désignent les parties réelle et imaginaire respectivement.

Une approche comparative entre la TGP et la GGP [10, 18, Annexe A] montre l'efficacité de la GGP qui offre de nombreux avantages. En plus de l'indépendance des différents waists générés par l'application de la TGP , elle fait uniquement appel à la matrice $ABCD$ globale du système optique. D'autre part, l'utilisation de la GGP permet d'éviter l'emploi de l'intégrale de diffraction d'Huygens Fresnel.

VI. TRANSFORMATION DU FAISCEAU GAUSSIEN PAR UNE LENTILLE MINCE

En utilisant la loi $ABCD$, le paramètre complexe q_2 de sortie en fonction de celui d'entrée q_1 est donné par :

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{II. 13})$$

Avec : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$.

Soit :

$$q_2 = \frac{1q_1 + 0}{-\frac{1}{f}q_1 + 1} \quad (\text{II. 14})$$

D'où

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (\text{II. 15})$$

VII. TRANSFORMATION DU FAISCEAU GAUSSIEN PAR UN MILIEU QUADRATIQUE

L'indice de réfraction d'un milieu quadratique varie, dans la direction perpendiculaire à l'axe optique, suivant la loi (Figure 2) [2, 3, 12] :

$$n = n_0 \left(1 - 2 \frac{r^2}{b^2} \right) \quad (\text{II. 16})$$

Où : n_0 est constante, r est la distance à l'axe optique, b mesure le degré de variation de n .

La matrice associée, décrivant ce milieu de longueur d est de la forme [2, 3] :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2\frac{z}{b} & \frac{b}{2} \sin 2\frac{z}{b} \\ -\frac{2}{b} \sin 2\frac{z}{b} & \cos 2\frac{z}{b} \end{vmatrix} \quad (\text{II. 17})$$

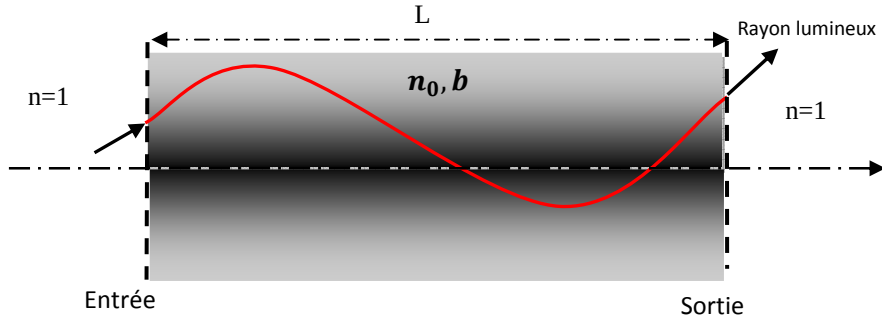


Figure 2 : Traversée d'un milieu quadratique.

En utilisant la loi $ABCD$ nous trouvons [12] :

$$q_2 = \frac{q_1 \cos 2\frac{z}{b} + \frac{b}{2} \sin 2\frac{z}{b}}{-q_1 \frac{2}{b} \sin 2\frac{z}{b} + \cos 2\frac{z}{b}} \quad (\text{II. 18})$$

Dans le cas simple d'un faisceau entrant avec un front d'onde plan ($R \rightarrow \infty$) et un waist w_{01} le paramètre complexe s'écrit :

$$\frac{1}{q_1} = -j \frac{\lambda}{\pi w_1^2} \quad (\text{II. 19})$$

Pour un waist $w_0^2 = \frac{\lambda b}{2\pi}$ Insérant l'équation (II.19) dans la relation (II.18) nous obtenons :

$$\frac{1}{q_2} = -\frac{\lambda}{\pi w_0^2} \frac{\sin 2\frac{z}{b} + j \frac{w_0^2}{w_1^2} \cos 2\frac{z}{b}}{\cos 2\frac{z}{b} - j \frac{w_0^2}{w_1^2} \sin 2\frac{z}{b}} \quad (\text{II. 20})$$

En identifiant les parties imaginaires dans cette expression nous obtenons :

$$w_2^2 = w_1^2 \left(\cos^2 2\frac{z}{b} + \frac{w_0^4}{w_1^4} \sin^2 2\frac{z}{b} \right) \quad (\text{II. 21})$$

De même, l'identification des parties réelles donne l'expression du rayon de courbure R du front d'onde.

VIII. ADAPTATION DES FAISCEAUX GAUSSIENS

Dans de nombreuses situations pratiques, l'expérimentateur dispose d'un faisceau Gaussien issu d'une cavité laser. Le mode d'un résonateur ou d'un guide d'onde qu'il souhaite exciter avec cette source n'est pas susceptible d'être de la même forme que celui de la source. Nous parlons, dans ce cas, de dispositifs non adaptés. Il y a donc lieu de transformer un faisceau de rayon w_{01} en un autre de rayon w_{02} . Ceci peut être réalisé en choisissant une lentille appropriée et en ajustant correctement les espacements d_1 et d_2 des waists (Figure 3) [12, 14].

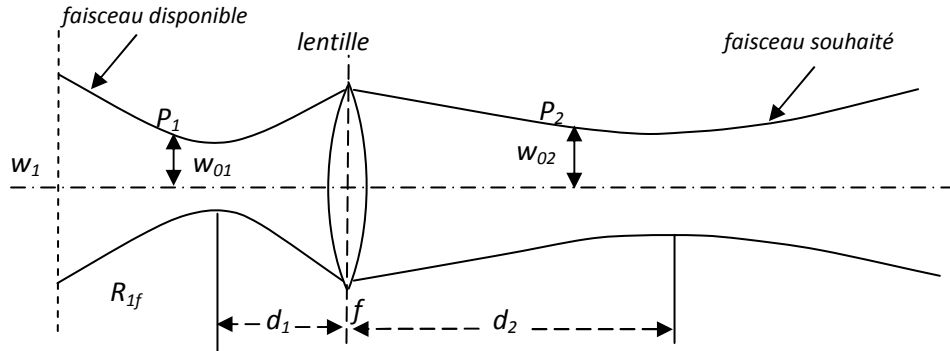


Figure 3 : Adaptation d'un faisceau Gaussien à l'aide d'une lentille mince.

Aux waists, les paramètres complexes des faisceaux s'écrivent :

$$\begin{cases} q_{01} = \frac{j\pi w_{01}^2}{\lambda} = jb_1 \\ q_{02} = \frac{j\pi w_{02}^2}{\lambda} = jb_2 \end{cases} \quad (\text{II. 22})$$

La loi ABCD pour ces deux paramètres s'écrit donc :

$$q_{02} = \frac{Aq_{01} + B}{Cq_{01} + D} \quad (\text{II. 23})$$

La matrice ABCD associée à cette transformation est donnée par [21]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix} \quad (\text{II. 24})$$

Séparons le paramètre complexe en parties réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$\begin{cases} B + b_1 b_2 C = 0 \\ b_1 A - b_2 D = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 25})$$

Avec $f_0 = \pi \left(\frac{w_{01}w_{02}}{\lambda} \right)$, la résolution de ce système conduit à :

$$\begin{cases} d_1 = f \pm \frac{w_{01}}{w_{02}} \sqrt{f^2 - f_0^2} \\ d_2 = f \pm \frac{w_{02}}{w_{01}} \sqrt{f^2 - f_0^2} \end{cases} \quad (\text{II. 26})$$

Pour être une solution du système, il faut considérer chaque fois le même signe dans l'équation (II. 26). La seule exigence, pour la longueur focale f de la lentille d'adaptation, est $f \geq f_0$ [21]. Dans le cas où : $f = f_0$ alors $d_1 = d_2 = f = f_0$ [12].

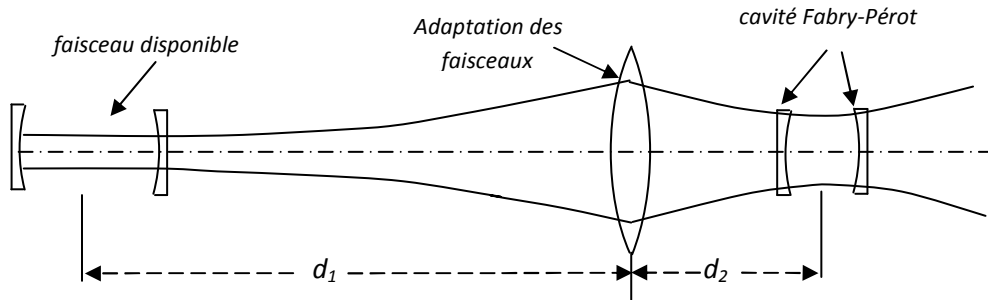


Figure 4 : Adaptation des faisceaux Gaussiens.

L'adaptation des faisceaux est particulièrement utile dans le cas de l'interféromètre à balayage de Fabry-Pérot, qui est un système semblable à une cavité laser. Il est généralement employé pour déterminer les fréquences d'un laser à plusieurs modes de fonctionnement (Figure 4) [21].

IX. APPLICATION DE LA LOI $ABCD$ A L'ETUDE DU CHAMP DANS UN RESONATEUR STABLE

Soit q le paramètre complexe d'un faisceau Gaussien sur un plan de référence $\mathcal{P}$ choisi à l'intérieur du résonateur. La transformation subie par le faisceau, lors de sa propagation du miroir de gauche au plan $\mathcal{P}$, est décrite par la matrice $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$. Sa transformation sur le trajet du plan $\mathcal{P}$ au miroir de droite est décrite par la matrice $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ (Figure 5).

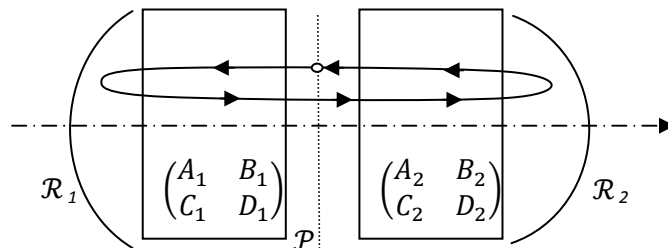


Figure 5: Aller-retour dans un résonateur à partir d'un plan de référence arbitraire.

La matrice $ABCD$ globale, décrivant un aller-retour dans la cavité (Figure 5), est donnée par le produit [3]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \quad (\text{II. 27})$$

Une cavité est stable si la trace $(A+D)$ obéit à l'inégalité suivante [2] :

$$-1 < \frac{1}{2} (A + D) < +1 \quad (\text{II. 28})$$

L'auto-consistance s'exprime par l'égalité du paramètre complexe q après un aller-retour dans la cavité. En appliquant la loi $ABCD$, nous obtenons :

$$q = \frac{(Aq + B)}{(Cq + D)} \quad (\text{II. 29})$$

L'équation (II. 29) conduit à :

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0 \quad (\text{II. 30})$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} \pm \frac{j}{2B} \sqrt{4 - (A + D)^2} \quad (\text{II. 31})$$

Ainsi, R et w sont alors obtenus :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{2B}{D - A} \end{array} \right. \quad (\text{II. 32. a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w^2 = \frac{\lambda}{\pi} B \left(1 - \left(\frac{D + A}{2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (\text{II. 32. b})$$

X. CONCLUSION

L'étude exhaustive de la propagation des faisceaux Gaussiens est simplifiée à l'aide du formalisme $ABCD$. Le rayon du faisceau w et le rayon de courbure du front d'onde R découlent de la loi $ABCD$ tandis que la phase de Gouy ψ s'obtient sans difficultés grâce à la notion de GGP .

Pour montrer la puissance du formalisme $ABCD$, nous avons donné quelques exemples de transformations de ces faisceaux à travers les lentilles, les milieux quadratiques et dans les résonateurs stables ainsi que leur adaptation.

Chapitre III : Familles de solutions Gaussiennes

I. INTRODUCTION

Nous avons considéré, dans les chapitres précédents, une seule solution de l'équation d'onde paraxiale à savoir le mode fondamental. Il existe pourtant toute une famille de solutions pour cette équation composée du mode fondamental et des modes d'ordres supérieurs [24,25]. Les solutions relatives aux coordonnées cartésiennes, liées à une géométrie rectangulaire, prennent la forme des fonctions d'Hermite-Gauss tandis que celles liées à une géométrie cylindrique celles des fonctions de Laguerre-Gauss. Enfin, les modes d'Ince-Gauss sont associés à la géométrie elliptique. Pour chaque symétrie, l'ensemble de ces modes, appelés modes de propagation, forme une base complète et orthogonale [1, 2] qui permet dans le cadre de l'optique paraxiale le développement de tout champ électrique.

Dans ce chapitre, nous allons établir les expressions analytiques de ces modes d'ordres supérieurs. Nous rappellerons également les expressions analytiques des faisceaux Gaussiens à argument complexe [1, 22] qui sont une forme généralisée plus symétrique des modes Gaussiens.

Un mode optique de propagation ou faisceau Gaussien est considéré comme une onde TEM (Transverse Electromagnétique), avec un front d'onde sphérique et une distribution transversale du champ, décrite par les fonctions de Laguerre-Gauss ou d'Hermite-Gauss [12]. La citation précédente vise à empêcher que ne soit reproduite l'erreur, communément commise, qui consiste à réduire le faisceau Gaussien au mode fondamental.

II. Modes d'ordres supérieurs

II.1. Modes d'Hermite-Gauss

Le mode fondamental, pour cette géométrie rectangulaire, est identique à celui donné par l'équation (I. 4) du premier chapitre.

Les modes d'ordres supérieurs sont repérés par les indices m et n . Le terme de base, produit de deux solutions indépendantes identiques de l'équation d'onde paraxiale à variables cartésiennes x et y séparées, est donné par:

$$u_{mn}(x, y, z) = u_m(x, z) \times u_n(y, z) \quad (\text{III. 1})$$

u_m et u_n possèdent la même forme mathématique. Ainsi, la solution de l'équation d'onde paraxiale pour la variable transversale x s'écrit [1]:

$$u_m(x, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n! w_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q_0}{q(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{q_0 q^*(z)}{q_0^* q(z)}\right]^{\frac{n}{2}} \\ \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right) \exp\left[-jkz - j\frac{kx^2}{2q(z)}\right] \quad (\text{III. 2})$$

Cette fonction peut également prendre la forme suivante [1] :

$$u_m(x, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\exp[j(2m+1)(\psi(z))]}{2^m m! w(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right) \exp\left[-jkz - j\frac{kx^2}{2R(z)} - \frac{x^2}{w^2(z)}\right] \quad (\text{III. 3})$$

$q(z)$ et $w(z)$ possèdent la même signification physique que celle donnée pour le mode fondamental.

H_n représente le polynôme d'Hermite d'ordre n défini par [13, 23]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \quad (\text{III. 4})$$

Les quatre premiers termes sont donnés par:

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_1(x) = 2x \\ H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ H_3(x) = 8x^3 - 12x \end{cases} \quad (\text{III. 5})$$

Ces polynômes obéissent à la relation de récurrence suivante:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{III. 6})$$

La variation transverse de quelques uns de ces modes est donnée sur la figure 1. Ils accumulent, après une propagation du plan d'étranglement vers un plan z , une phase de Gouy de valeur $\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi(z)$ et ce pour chaque coordonnée [1]. Cette différence de phase de Gouy entre modes est très importante car elle permet d'expliquer, par exemple, les différentes fréquences d'oscillation dans une cavité laser ou encore la forme des distributions du champ [1].

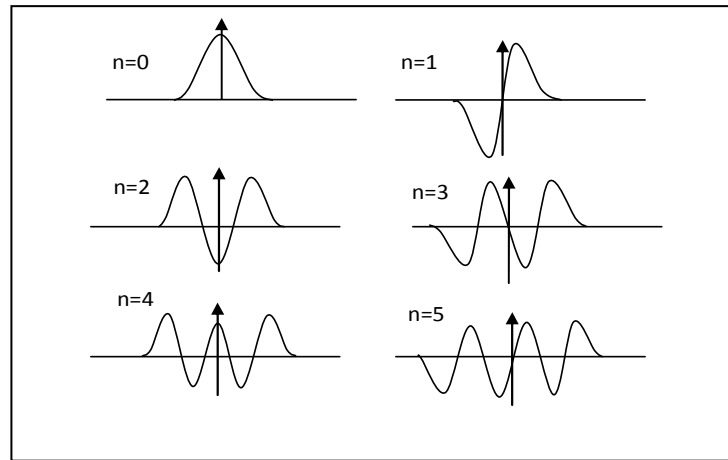


Figure 1: Profils d'amplitude des premiers modes d'Hermite-Gauss.

Dans les lasers réels, des lames à incidence de Brewster sont fréquemment utilisées pour polariser la lumière rectilignement. D'autres objets, sélectifs en longueur d'onde, peuvent également être insérés dans un résonateur. Ces éléments imposent aux ondes des conditions qui différentient fortement la direction x et la direction y . Ce contexte constitue un exemple d'utilisation des modes d'Hermite-Gauss [13].

Les deux premiers paramètres Gaussiens, de ces modes d'ordres supérieurs, qui sont le rayon $w(z)$ et le rayon de courbure du front d'onde $R(z)$ présentent la même variation en fonction de la coordonnée longitudinale z que ceux du mode fondamental Gaussien [13]. La discrimination concerne uniquement la phase de Gouy. Ainsi, pour un mode TEM_{nm} quelconque, la phase est donnée par [2, 13] :

$$\psi_{nm}(z) = (n + m + 1)\psi(z) = (n + m + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (\text{III. 7})$$

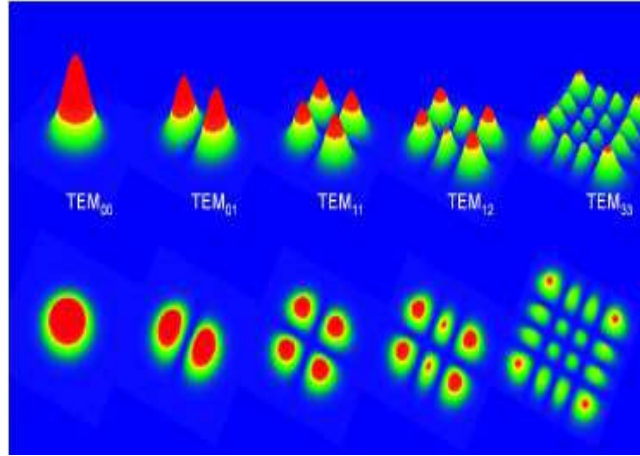


Figure 2 : Répartition spatiale d'énergie pour quelques modes d'Hermite-Gauss.

II.2. Modes de Laguerre-Gauss

Pour la symétrie cylindrique, les modes de Laguerre-Gauss s'expriment à l'aide du rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et de l'angle azimutal θ dans le plan de l'onde ; ils s'écrivent [1]:

$$u_{pm}(r, \theta, z) = \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0l})\pi(l + p)!}} \frac{\exp j(2p + l + 1)\psi(z)}{w(z)} \times \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^l L_p^l\left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right) \exp\left[-jk \frac{r^2}{2q(z)} + il\theta\right] \quad (\text{III. 8})$$

Les entiers $p \geq 0$ et l sont les indices radial et azimutal respectivement.

L_p^l représentent les polynômes de Laguerre associés donnés par [23] :

$$L_p^l(r) = \frac{e^r r^{-l}}{p!} \frac{d^p}{dr^p} [e^{-r} r^{l+p}] \quad (\text{III. 9})$$

Les quatre premiers termes sont donnés par:

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_1(x) = -x + 1 \\ L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\ L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 - 9x^2 - 18x + 6) \end{cases} \quad (\text{III. 10})$$

Ces polynômes obéissent à la relation de récurrence suivante:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (\text{III. 11})$$

De même que pour la symétrie rectangulaire, la phase de Gouy pour ces modes d'ordres supérieurs est quantifiée en multiples de celle du mode Gaussien fondamental $\psi(z)$. Elle est donnée par [2, 13]:

$$\psi_{pl}(z) = (2p+l+1) \psi(z) \quad (\text{III. 12})$$

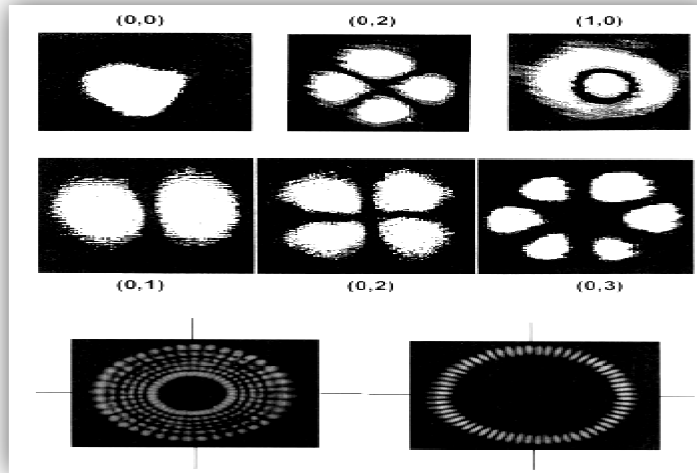


Figure 3: Modes de Laguerre-Gauss observés expérimentalement à la sortie d'un Laser à CO₂ [13].

Les modes de Laguerre-Gauss sont utiles dans la résolution des problèmes à symétrie cylindrique. Dans les lasers réels, les fenêtres de Brewster et toutes autres surfaces inclinées ou décalés par rapport à l'axe optique brisent le caractère cylindrique. Par conséquent, le choix des modes d'Hermite-Gauss est plus naturel pour les lasers réels [1]. Il y a cependant des expériences réalisées avec soin qui autorisent les modes de Laguerre-Gauss.

II.3. Modes d'Ince-Gauss

Les fonctions d'Hermite-Gauss et de Laguerre-Gauss sont des solutions exactes bien connues de l'équation d'ondes paraxiale en coordonnées cartésiennes et cylindriques respectivement. Leur importance théorique et pratique a été établie principalement parce qu'ils forment deux bases complètes orthogonales de modes sous lesquels tout champ paraxial peut être développé. De plus, ce sont des modes résonnants naturels pour les résonateurs lasers stables.

Le problème de trouver des solutions analytiques exactes à l'équation d'onde paraxiale en coordonnées elliptiques a conduit à établir une nouvelle base complète et orthogonale. Nous parlons alors des modes d'Ince-Gauss [24,25]. Ces derniers forment la troisième famille complète de solutions exactes de l'équation d'onde paraxiale. Là encore, une distribution du champ à caractère paraxial peut être mise sous la forme d'une superposition linéaire de ces modes. La distribution transversale de ces champs est décrite par les polynômes d'Ince qui présentent une symétrie elliptique inhérente [24,25].

En tenant compte d'une propagation vers les z positifs, l'expression générale des modes d'Ince-Gauss est donnée par [24] :

$$IG_{p,m}^e(r) = \frac{D w_0}{w(z)} C_p^m(j\xi, \varepsilon) C_p^m(\eta, \varepsilon) \exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \times \exp\left[-jkz - j\frac{kr^2}{2R(z)} + j(p+1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right] \quad (\text{III.13})$$

D est une constante de normalisation. L'indice supérieur e fait référence aux modes pairs. Nous obtenons les modes impairs $IG_{p,m}^o(r)$, en substituant C_p^m par S_p^m dans l'équation (III.13).

$C_p^m(\eta, \varepsilon)$: est le polynôme d'Ince d'ordre p et de degré m . ε est le paramètre d'ellipticité.

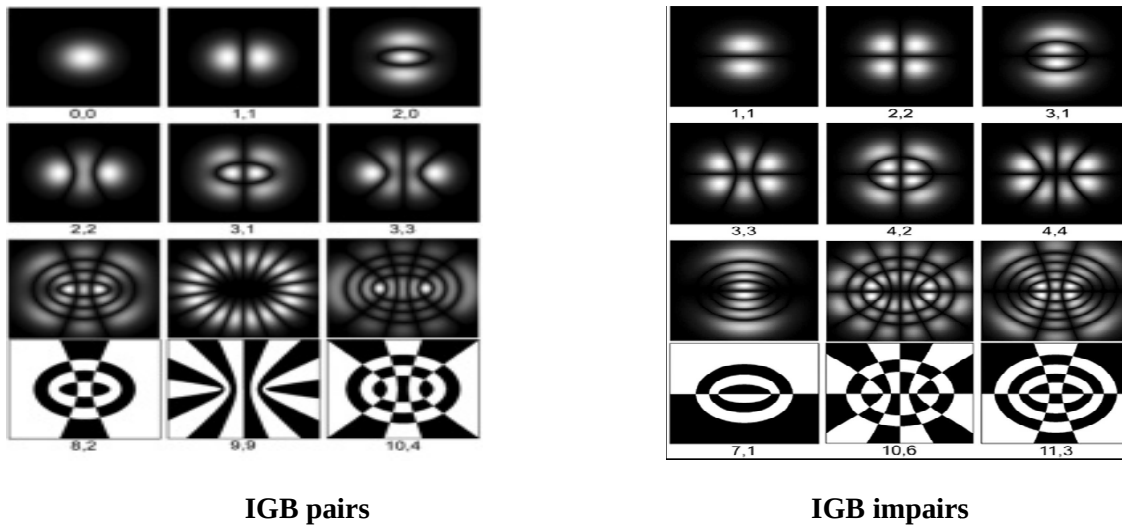


Figure 4 : Distributions transversales de quelques modes d'Ince-Gauss accompagnées des phases correspondantes pour $\varepsilon = 2$ [24].

Les modes d'Ince-Gauss forment eux aussi un ensemble de modes propres pour les résonateurs. Ils constituent les modes de transition exacte et continue entre les modes de Laguerre-Gauss et ceux d' Hermite-Gauss [13].

Le caractère général de ces modes et le fait qu'ils ne soient pas encore très connus, justifient l'intérêt particulier que nous allons leur accorder ici.

II.3.1. Etablissement des modes d'Ince-gauss

Soit $\Psi(r)$ l'enveloppe complexe lentement variable d'un champ qui satisfait l'équation d'onde paraxiale. [24,25] :

$$(\nabla_t^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z})E(r) = 0 \quad (\text{III. 14}).$$

où ∇_t^2 est le Laplacien transversal et k le nombre d'onde.

Le mode Gaussien fondamental est donné par :

$$E_G(r) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w^2(z)} + \frac{jkr^2}{2R(z)} - j\psi\right) \quad (\text{III. 15})$$

Soit une onde dont l'enveloppe complexe est donnée par [24]:

$$IG(r) = \mathcal{M}(\xi) N(\eta) \exp[jZ(z)] \Psi_G(r) \quad (\text{III. 16})$$

avec IG pour Ince Gaussien et $\mathcal{M}$, N , et Z des fonctions réelles.

Soient $\eta \in [0, 2\pi]$ et $\xi \in [0, \infty]$ les variables elliptiques radiale et angulaire respectivement et f la séparation semi-focale. f présente le même comportement que w avec $f_0=f(z=0)$ [24].

Dans un plan transversal z , les coordonnées elliptiques sont définies de la manière suivante:

$$\begin{cases} x = f(z) \cosh \xi \cos \eta \\ y = f(z) \sinh \xi \sin \eta \end{cases} \quad (\text{III. 17})$$

Insérant la solution donnée par (III.16) dans l'équation d'onde paraxiale et compte tenu du fait que $\Psi_G(r)$ satisfait déjà cette équation, il vient :

$$\frac{d^2 \mathcal{M}}{d\xi^2} - \varepsilon \sinh 2\xi \frac{d\mathcal{M}}{d\xi} - (a - p \varepsilon \cosh 2\xi) \mathcal{M} = 0 \quad (\text{III. 18})$$

$$\frac{d^2 N}{d\eta^2} + \varepsilon \sin 2\eta \frac{dN}{d\eta} + (a - p \varepsilon \cos 2\eta) N = 0 \quad (\text{III. 19})$$

$$-\left(\frac{z^2 + z_R^2}{z_R}\right) \frac{dZ}{dz} = p \quad (\text{III. 20})$$

p et a sont des constantes de séparation et $\mathcal{E} = \frac{2f_0^2}{w_0^2}$ le paramètre d'ellipticité.

Le terme de phase $Z(z) = -p \arctan \frac{z}{z_R}$ est solution de l'équation (III.20).

En écrivant η à la place de $j\xi$ les équations (III.18) et (III.19) se résolvent de la même manière. Cette relation réciproque est importante parce qu'il est possible d'obtenir la solution radiale E à partir la solution angulaire N en rendant l'argument imaginaire.

L'équation (III.18) est un cas particulier de l'équation de Hill connue sous le nom d'équation d'Ince [24, 25]. Ses Solutions sont les polynômes pairs et impairs d'Ince d'ordre p et de degré m notés $C_p^m(\eta, \mathcal{E})$ et $S_p^m(\eta, \mathcal{E})$ respectivement. Les indices m et p possèdent la même parité avec $0 \leq m \leq p$ pour les pairs et $1 \leq m \leq p$ pour les impairs.

Les polynômes d'Ince à argument réel η sont des fonctions 2π périodiques orthogonales avec m zéros dans l'intervalle $0 \leq \eta \leq \pi$ pour toutes les valeurs de $\mathcal{E}$.

Avec des fonctions de même parité pour ξ et η , la solution physiquement acceptable et normalisée s'écrit [24, 25] :

$$IG_{p,m}^e(r) = \frac{Dw_0}{w(z)} C_p^m(j\xi, \mathcal{E}) C_p^m(\eta, \mathcal{E}) \exp \left[\frac{-r^2}{w^2(z)} \right] \times \exp \left[-jkz - j \frac{kr^2}{2R(z)} + j(p+1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right] \quad (\text{III. 21})$$

II.3.2. Propriétés des IGBs

- m correspond au nombre de lignes nodales hyperboliques tandis que $\frac{(p-m)}{2}$ est le nombre de lignes nodales elliptiques en excluant la ligne nodale centrale en $\xi = 0$ des modes impairs.
- Indépendamment des indices, la largeur du faisceau dépend uniquement de $w(z)$. Ainsi, lorsque z augmente, la distribution transversale est affectée par le facteur $\frac{w_0}{w(z)}$ mais conserve son profil.
- Le rayon de courbure $R(z)$ est le même pour tous les IGBs. , Ils ont donc le même front d'onde et la même divergence angulaire que celle du faisceau Gaussien.
- La phase de Gouy, cependant, est une fonction de l'ordre p donnée par $\psi_{IG}(z) = (p+1) \psi(z)$.
- Les modes d'Hermite-Gauss et de Laguerre-Gauss sont des cas particuliers donnés pour $\mathcal{E} = \infty$ et $\mathcal{E} = 0$ respectivement.

II.3.3. Relations entre les modes IGB et les modes HGB et LGB

La transition des modes $IG_{p,m}^{e,o}$ vers les modes $LG_{n,l}^{e,o}$, se produit lorsque les coordonnées elliptiques tendent vers les coordonnées cylindriques i.e. quand $f_0 \rightarrow 0$. Pour cette limite, les indices des deux modes sont donnés par: $l = m$ et $n = \frac{(p-m)}{2}$ [24].

La transition des modes $IG_{p,m}^{e,o}$, vers les modes $HG_{n_x n_y}$, se produit pour $f_0 \rightarrow \infty$ avec les indices: $n_x = m$ et $n_y = p - m$ pour IGB pair et $n_x = m - 1$ et $n_y = p - m + 1$ pour IGB impair [24].

La figure 5 montre la transition d'un mode $IG_{5,3}^e$ vers le mode $LG_{1,3}^e$ ou vers le mode $HG_{3,2}$ pour les deux limites zéro ou infini respectivement. Elle montre aussi la reconstruction d'un mode IGB pair $IG_{5,3}^e = 0.79 LG_{0,5}^e - 0.35 LG_{1,3}^e - 0.5 LG_{2,1}^e$.

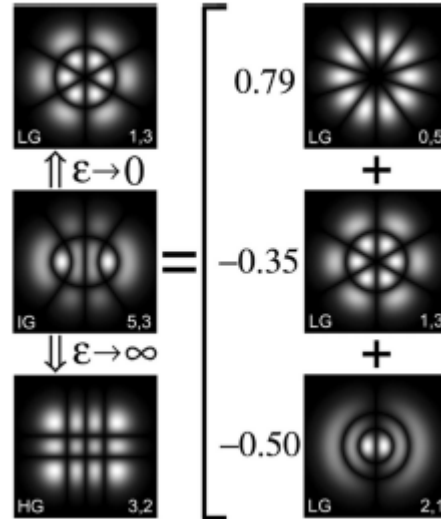


Figure 5 : Gauche : transition d'un mode IGB vers un mode LGB ou HGB
Droite : reconstruction d'un mode IGB pair par des modes LGB.

III. FAISCEAUX GAUSSIENS A ARGUMENT COMPLEXE

III.1. Une forme plus symétrique pour les modes d'Hermite-Gauss

Les modes d'Hermite-Gauss possèdent la même forme pour les coordonnées x et y . Rappelons que les modes d'Hermite sont donnés en fonction de la coordonnée transversale x par :

$$E_n(x, z) = \left(\frac{1}{w(z)} \right)^{\frac{1}{2}} H_n \left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)} x \right) e^{-\left[\frac{ik}{2q(z)} \right] x^2} e^{i \left(n + \frac{1}{2} \right) \psi(z)} \quad (\text{III. 22})$$

Ces solutions conventionnelles montrent un manque inélégant de symétrie entre l'argument complexe de la fonction Gaussienne et l'argument purement réel de la fonction d'Hermite.

Il est possible d'obtenir un ensemble de solutions qui satisfont d'une part l'équation d'onde paraxiale et qui présentent d'autre part une forme plus-symétrique.

Siegman [22] donne, dans ce cadre, une forme alternative d'arguments complexes aux fonctions d'Hermite-Gauss qui s'écrivent par suite:

$$\hat{E}_n(x, z) = A(q) H_n \left(\sqrt{\frac{ik}{2q}} x \right) e^{-\left[\frac{ik}{2q(z)} \right] x^2} \quad (\text{III. 23})$$

Signalons qu'une expression équivalente, pour les polynômes de Laguerre-Gauss, est également possible [22].

La dépendance en z est entièrement contenue dans le paramètre complexe $q(z)$ qui conserve son expression. De plus, l'amplitude complexe $A(q)$, qui est l'analogue du facteur $\left(\frac{1}{w(z)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(n+\frac{1}{2})\psi(z)}$ (relation III.22), possède une forme particulièrement simple.

Si on pose $c = c(z) = \frac{ik}{2q(z)}$, alors la relation précédente s'écrit [22]:

$$\hat{E}_n(x, z) = A(q) H_n(\sqrt{c}x) e^{-cx^2} \quad (\text{III. 24})$$

En substituant cette dernière expression dans l'équation d'onde paraxiale, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} H_n''(\sqrt{c}x) - 2\sqrt{c}x H_n'(\sqrt{c}x) + 2n H_n(\sqrt{c}x) = 0 & (\text{III. 25. a}) \\ \frac{q}{A} \frac{dA}{dq} = -\frac{n+1}{2} & (\text{III. 25. b}) \end{cases}$$

En utilisant les équations (III.1.4a) et (III.1.4b), l'équation (III.1.1) s'écrit [22]:

$$\hat{E}_n(x, z) = \left(\frac{q_0}{q(z)} \right)^{(n+1)/2} H_n(\sqrt{c}x) e^{-cx^2} \quad (\text{III. 26})$$

Les nouvelles solutions données par (III.23), (III.26) ne sont pas les mêmes que les solutions conventionnelles données par (III.22). Au waist par exemple, où le paramètre q est donné par $q_0 = \frac{i\pi w_0^2}{\lambda}$, les solutions conventionnelles obéissent à (III.27): Tandis que les solutions à argument complexe se réduisent à (III. 28):

$$\hat{E}_n(x) = H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) e^{-\frac{x^2}{w^2}} \quad (\text{III. 27})$$

$$\hat{E}_n(x) = H_n\left(\frac{x}{w}\right) e^{\frac{-x^2}{w^2}} \quad (\text{III. 28})$$

Les équations différentielles (III.29) et (III.30) possèdent comme solutions : les fonctions d'Hermite-Gauss conventionnelles et les fonctions d'Hermite-Gauss à argument complexe respectivement:

$$\frac{d^2 \hat{E}_n}{dx^2} + (2n + 1 - x^2) \hat{E}_n = 0 \quad (\text{III. 29})$$

$$\frac{d^2 \hat{E}_n}{dx^2} + 2cx \frac{d \hat{E}_n}{dx} + 2(n + 1)c \hat{E}_n = 0 \quad (\text{III. 30})$$

L'équation (III.30) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L} \hat{E} = \lambda_n \hat{E}_n \quad (\text{III. 31})$$

Avec $\mathcal{L}$ l'opérateur défini par :

$$\mathcal{L} \equiv \left[\frac{d^2}{dx^2} + 2cx \frac{d}{dx} \right] \quad (\text{III. 32})$$

Les valeurs propres de cet opérateur sont :

$$\lambda_n = -2(n + 1)c \quad (\text{III. 33})$$

III.2. Propagation des modes complexes d'Hermite-Gauss :

Les modes d'Hermite-Gauss à argument complexe d'ordre n peuvent s'écrire sous une forme plus générale donnée par [1]:

$$\tilde{E}_n(x) = \tilde{\alpha}_n \tilde{v}^n H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\tilde{v}}\right) e^{-\frac{ik}{2q}x^2} \quad (\text{III. 34})$$

$\tilde{\alpha}_n$ est l'amplitude complexe du mode n .

$\tilde{v}$: un nouveau paramètre complexe indépendant qui représente une généralisation du rayon w du faisceau Gaussien.

La propagation de ce type de modes à travers un système paraxial complexe (caractérisé par une matrice de transfert $ABCD$ complexe) donne le même mode d'Hermite-Gauss mais avec de nouveaux paramètres q , $\tilde{\alpha}_n$ et $\tilde{v}^n$.

✓ Le paramètre complexe q , obéit à la loi $ABCD$ [1-3]:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{III. 35})$$

- ✓ Les amplitudes $\tilde{\alpha}_{1n}$ et $\tilde{\alpha}_{2n}$ initial et final respectivement sont reliées par [1] :

$$\frac{\tilde{\alpha}_{2n}}{\tilde{\alpha}_{1n}} = \left(\frac{1}{A + B/q_1} \right)^{n + 1/2} \quad (\text{III. 36})$$

- ✓ Le paramètre $\tilde{v}$ obéit à la règle de passage donnée par [1]:

$$\tilde{v}_2^2 = \left(A + \frac{B}{q_1} \right)^2 \times \tilde{v}_1^2 + i \frac{4B}{k_1} \left(A + \frac{B}{q_1} \right) \quad (\text{III. 37})$$

Ces trois règles de transformation (III.35), (III.36) et (III.37) et les modes d'Hermite-Gauss à argument complexe sont une généralisation permettant l'étude de la propagation à travers un système optique complexe paraxial.

Le terme axial $\exp[-ik(z_2 - z_1)]$ n'est pas inclus dans cette transformation mais est le même pour tous les modes.

Ces fonctions d'Hermite Gauss à argument complexe ne constituent pas une base appropriée pour analyser les résonateurs optiques stables à miroir sphérique car les fronts d'onde de leurs modes supérieurs ($n > 1$) ne sont pas sphériques [22].

Cependant, ces nouvelles fonctions à arguments complexe avec leur plus grande simplicité peuvent être utiles dans d'autres problèmes de résonateurs optiques, dans l'espace libre ou lorsque des variations de phase plus générales sont impliquées [22].

IV. CONCLUSION

Pour chaque symétrie, l'équation d'onde paraxiale admet une famille de solutions infinie complète et orthogonale. Pour les trois symétries considérées, chaque famille est composée du mode fondamental et des modes d'ordres supérieurs permettant de développer tout champ dans le cadre de l'optique paraxiale. Les faisceaux Gaussiens à argument complexe donnent une forme plus symétrique à ces modes et permettent l'étude de la propagation dans les systèmes non réels ou complexes.

Chapitre IV : Traversée d'une succession de diaphragmes

I. INTRODUCTION

Le passage d'un faisceau Gaussien à travers un diaphragme n'obéit pas au formalisme *ABCD*. Ce problème doit donc faire l'objet d'un traitement particulier.

Dépendamment de la symétrie d'un problème : rectangulaire, cylindrique ou elliptique, nous avons répertorié trois familles de modes Gaussiens qui sont : les modes d'Hermite-Gauss, de Laguerre-Gauss et ceux d'Ince-Gauss respectivement. Chacune d'elle représentant une base complète et orthogonale.

Le concept de conversion de modes, a été introduit par Kogelnik [5]. En préservant la symétrie initiale, Kogelnik a exprimé, dans un plan de référence infini, le passage d'une ancienne base à une nouvelle base, pour les symétries rectangulaire et cylindrique.

Ce principe de conversion de modes a été appliqué au cas d'un plan fini représentant la surface d'une ouverture [10, 11]. Nous allons en donner ici quelques illustrations pour une ouverture unique puis généraliser cette approche à une succession de diaphragmes.

En conclusion, nous confirmerons, dans le cadre de l'optique paraxiale, la possibilité de s'affranchir de la difficulté posée par l'emploi de l'intégrale de diffraction [1, 4, 21, 26].

II. THEORIE DE LA DIFFRACTION DE FRESNEL

Le principe d'Huygens exprime que chaque point atteint par une onde se comporte comme une source secondaire [4] tandis que le principe de Fresnel stipule que les sources secondaires interfèrent mutuellement [4, 26]. La théorie de la diffraction est la résultante de ces deux fondements connue sous le principe d'Huygens-Fresnel.

II.1. Intégrale de diffraction

Considérons l'ouverture Σ dans un plan (η, ξ) de la figure 1. Le champ en un point d'observation P_0 d'un plan (x, y) , parallèle au plan de l'ouverture et situé à une distance z de ce plan, est égal à la somme des champs issus des point P_1 de cette ouverture.

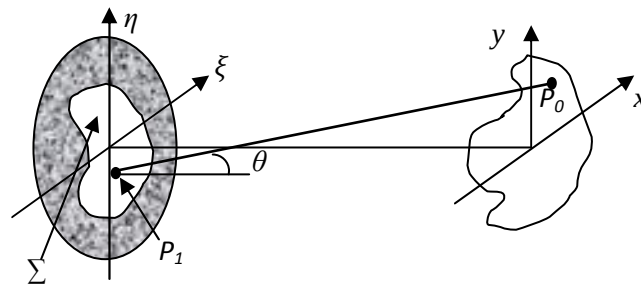


Figure1 : Eléments de la diffraction.

Le principe d'Huygens-Fresnel notifie que le champ produit au point P_0 vaut [26] :

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(p_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos \theta . ds \quad (IV.1)$$

r_0 est la distance entre P_0 et P_1 et $\cos \theta$ est le facteur d'obliquité.

Comme $\cos \theta = \frac{z}{r_{01}}$, l'expression précédente de l'intégrale d'Huygens-Fresnel devient :

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(jk r_{01})}{r_{01}^2} . d\xi . d\eta \quad (IV.2)$$

II.2. Approximations de Fresnel

La distance r_{01} est donnée par :

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (IV.3)$$

Le développement limité de la racine carrée s'écrit :

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \quad (VI.4)$$

L'équation (IV.3) et (IV.4) conduisent à :

$$r_{01} = z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right] \quad (IV.5)$$

Dans l'expression (IV.2) l'approximation $r_{01} \approx z$ pour le dénominateur est raisonnable car cette substitution affecte peu le résultat. Cependant, les deux premiers termes du développement doivent être considérés dans le terme de phase.

L'expression (IV.2) de l'intégrale de diffraction s'écrit donc [26] :

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ j \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta \quad (IV.6)$$

- **Condition de Kirchhoff**

La condition de Kirchhoff indique que pour une ouverture circulaire de rayon a_0 , le champ électrique juste après l'ouverture ou champ diffracté, noté E_s , doit vérifier la condition suivante [4]:

$$E_s = \begin{cases} E_e & r < a_0 \\ 0 & r > a_0 \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

E_e représente le champ juste avant l'ouverture.

II.3. L'intégrale de diffraction en fonction des éléments A , B , C , et D de la matrice de transfert

Soient E_e , E_s , les champs à l'entrée et à la sortie d'un système optique respectivement. En coordonnées cylindriques, l'intégrale de diffraction d'Huygens-Fresnel généralisée, exprimant la transformation du champ par ce système, s'écrit [20]:

$$E_s(r, \theta, z) = \frac{jk}{2\pi B} \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} E_e(r_0, \theta_0, z_0) \exp \left\{ -\frac{jk}{2B} [Ar_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + Dr^2] \right\} r_0 dr_0 d\theta_0 \quad (\text{IV.8})$$

Cette expression, donnée par Collins [20], exprime l'intégrale de diffraction en fonction des éléments A , B , C , et D de la matrice $ABCD$ décrivant le système optique.

III. APPLICATION DE L'INTEGRALE DE DIFFRACTION AU CAS D'UNE SUCCESSION DE DIAPHRAGMES

L'évaluation du champ diffracté, associant grande précision et temps de calcul réduit, est assez ardue. C'est la raison pour laquelle ce calcul, pour un nombre arbitraire de diaphragmes, demeure toujours difficile.

L'intégrale de diffraction est une construction mathématique relativement simple qui permet de résoudre des problèmes de diffraction sans prêter attention à la réalité des détails physiques qui se produisent aux bords de l'ouverture [26]. Aussi, le résultat de la diffraction, par une succession de diaphragmes, peut être obtenu par l'application itérative de cette intégrale [27-29]. Ce processus est toutefois inélégant et devient de plus en plus complexe avec l'accroissement du nombre d'ouvertures [30, 31]. Ainsi, le champ diffracté par une succession de trois ouvertures est déjà difficile à obtenir par cette approche [22]. Lorsque les ouvertures sont peu écartées, l'intégrale de diffraction d'Huygens-Fresnel devient inapplicable [27].

L'expression (IV.8), donnée par Collins [20] exprimant l'intégrale de diffraction en fonction des éléments A , B , C et D , n'est pas toujours concluante à cause du terme B au dénominateur. En effet, proche du diaphragme, la solution via l'intégrale de diffraction finit par diverger.

Afin d'éviter l'utilisation de l'intégrale de diffraction, les auteurs [2, 15,16, 18, 25] ont appliqué la " Boundary Diffraction Wave Theory " (BDW) où le problème de diffraction est ramené à un problème d'interférence [25]. L'onde diffractée considérée résulte de la superposition de l'onde issue de l'ouverture en tenant compte des effets de bords. Cette approche nécessite beaucoup de simplifications et ne donne pas de solution précise [15].

Kleinhans [3] a estimé le champ diffracté par une succession de trois ouvertures circulaires à l'aide de la théorie géométrique de la diffraction; cette approche se complique lorsque le nombre d'ouvertures augmente.

Kazumasa et al. [22] ont employé une méthode de développement du champ pour estimer le champ diffracté par trois ouvertures. Ils ont obtenu de bons résultats à la condition que chaque ouverture se situe dans la région de Fraunhofer par rapport à la précédente.

Nous allons montrer que le principe de conversion de modes, appliqué au cas d'un plan fini, est efficace pour l'étude de la traversée d'une succession de diaphragmes. Ce fondement, associé au formalisme $ABCD$, offre un outil puissant pour l'étude d'un système diaphragmé.

IV. CONVERSION DE MODES

L'expression des modes normalisés de Laguerre Gauss s'écrivent en symétrie cylindrique (r, φ, z) [5]:

$$TEM_{pl} = \left(\frac{2}{w\sqrt{1 + \delta_{0l}}} \sqrt{\frac{p!}{\pi(l+p)!}} \right) \left(\frac{r}{w} \sqrt{2} \right)^l L_p^l \left(2 \frac{r^2}{w^2} \right) \exp \left\{ -\frac{r^2}{w^2} - j \frac{kr^2}{2R} \right\} \begin{cases} \cos(l\varphi) \\ \sin(l\varphi) \end{cases} \quad (IV.9)$$

L_p^l sont les polynômes de Laguerre associés et l et p sont les indices radial et azimutal respectivement.

R et w représentent le rayon de courbure du front d'onde et le rayon du faisceau respectivement.

IV.1. Conversion de modes dans un plan infini

La conversion de mode est un concept introduit par H. Kogelnik [5]. Elle indique qu'un mode $TEM_{\bar{p}\bar{l}}$, provenant d'un premier système optique, va exciter, au niveau d'un plan de référence infini, un ensemble de modes d'un deuxième système avec une contribution $C_{\bar{p}\bar{l}pl} TEM_{pl}$. Les termes $C_{\bar{p}\bar{l}pl}$ sont appelés coefficients de couplage (Figure 2).

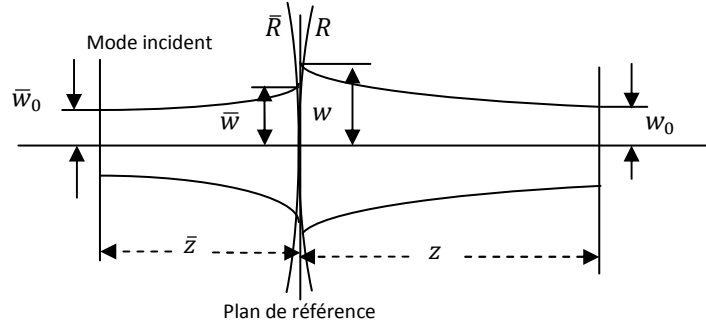


Figure 2 : Conversion de modes à un plan de référence infini.

L'égalisation du champ incident et du champ transmis, au plan de référence, permet l'évaluation de ces coefficients [5].

$$TEM_{\bar{p}\bar{l}} = \sum_p \sum_l C_{\bar{p}\bar{l}pl} TEM_{pl} \quad (IV.10)$$

Il n'y a pas de couplage entre les modes de nombres angulaires distincts du fait de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques. La notation précédente, pour les coefficients de couplage, peut alors être simplifiée en écrivant :

$$C_{\bar{p}\bar{l}pl} = C_{\bar{p}p,l} \text{ pour } \bar{l} = l \quad (IV.11)$$

Les coefficients de couplage sont donnés par l'expression suivante [5]:

$$C_{\bar{p}pl} = \left(\frac{2}{\bar{w}w} \right)^{l+1} \sqrt{\frac{\bar{p}! p!}{(1+\bar{p})! (1+p)!}} \int_0^\infty dr^2 L_{\bar{p}}^l(\alpha' r^2) L_p^l(\beta' r^2) r^{2l} \exp(-Q' r^2) \quad (IV.12)$$

avec $\alpha' = \frac{2}{\bar{w}}, \beta' = \frac{2}{w} \text{ et } Q' = \frac{1}{\bar{w}^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{jk}{2} \left(\frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R} \right)$

IV.2. Conversion de modes dans un plan fini : cas d'une ouverture circulaire

Kogelnik [5] introduisit l'idée de conversion de modes pour le cas d'un plan infini. Son application a été étendue au cas d'un diaphragme [10, 11]. Cette démarche nécessite le changement de la borne supérieure infinie de l'intégrale donnée par l'expression (IV.12) en une borne finie incluant le rayon a_0 de l'ouverture.

Pour la suite de ce travail, seule la symétrie circulaire ($l = 0$) sera considérée. La nouvelle variable $X = \frac{r^2}{a_0^2}$, et les paramètres $\alpha = \alpha' a_0^2$, $\beta = \beta' a_0^2$ et $Q = Q' a_0^2$ conduisent à l'écriture suivante pour les coefficients de couplage [10, 11]:

$$c_{\bar{p}pl} = \left(\frac{2\pi a_0^2}{\bar{w}w} \right) \int_0^1 dX L_{\bar{p}}(\alpha X) L_p(\beta X) \exp(-QX) \quad (\text{IV. 13})$$

Cette intégrale présente une complexité liée au caractère triplement oscillant du produit qui la compose formé de deux polynômes de Laguerre et d'une fonction exponentielle complexe. Ce type d'intégrale est souvent difficile à calculer par les méthodes numériques d'intégration usuelles ou même spécifiques. La formule de récurrence offre un outil mathématique efficace pour lever cette difficulté [10, 11].

• IV.3. Calcul des coefficients de couplage par la formule de récurrence

La formule de récurrence ne donne pas un résultat analytique explicite à l'intégrale considérée mais plutôt un résultat pseudo-analytique. Chaque résultat dépendant de solutions précédentes pour des polynômes de Laguerre de degré moindre [10,11].

Nous reprenons ici la formule de récurrence telle que donnée dans les références [10, 11], pour le cas $l = 0$ et un intervalle d'intégration compris entre 0 et 1.

Nous utilisons la notation $I(\bar{p}, p)$ pour l'intégrale $\int_0^1 dX L_{\bar{p}}(\alpha X) L_p(\beta X) \exp(-QX)$.

$$I(1,1) = \frac{1}{Q} (1 - \exp(-Q)) \quad (\text{IV. 14. a})$$

$$I(1,2) = \frac{1}{Q} \left[\left(1 - \frac{\beta}{Q}\right) (1 - \exp(-Q)) + \beta \exp(-Q) \right] \quad (\text{IV. 14. b})$$

$$I(1,2) = \frac{1}{Q} \left[\left(1 - \frac{\beta}{Q}\right) (1 - \exp(-Q)) + \beta \exp(-Q) \right] \quad (\text{IV. 14. c})$$

Pour $p \geq 3$

$$\begin{aligned} I(1,p) = & \left[\left(\frac{2p-3}{p-1} \right) - \frac{\beta}{Q} \right] I(1,p-1) + \left(\frac{p-2}{p-1} \right) \left(\frac{\beta}{Q} - 1 \right) I(1,p-2) \\ & + \left(\frac{\beta}{p-1} \right) \left(\frac{\exp(-Q)}{Q} \right) L_{p-1}(\beta X) \Big|_{x=1} \end{aligned} \quad (\text{IV. 14. d})$$

Pour $p \geq 2$

$$I(2, p) = \left(1 - \frac{\alpha p}{Q}\right) I(1, p) + \alpha \left(\frac{p-1}{Q}\right) I(1, p-1) + \alpha \left(\frac{\exp(-Q)}{Q}\right) L_p(\beta x) \Big|_{x=1} \quad (\text{IV. 14. e})$$

Pour $\bar{p}, p \geq 3$

$$I(\bar{p}, p) = \left(\frac{1}{\bar{p}-1}\right) \left[\left(\frac{\alpha}{Q}\right) L_{\bar{p}-1}(\alpha x) \Big|_{x=1} L_p(\beta x) \Big|_{x=1} \exp(-Q) + 2\bar{p}-3 - \frac{\alpha}{Q} (\bar{p}+p-2) I(\bar{p}-1, p) + (\bar{p}-2) \left(\frac{\alpha}{Q}-1\right) I(\bar{p}-2, p) + \left(\frac{\alpha}{Q}\right) (p-1) I(\bar{p}-1, p-1) \right] \quad (\text{IV. 14. f})$$

Des résultats symétriques sont déduits pour $I(\bar{p}, 1)$ et $I(\bar{p}, 2)$. L'intégration à l'aide de cette formule peut être généralisée à un intervalle arbitraire et au cas où $l \neq 0$ [10, 11].

Pour terminer ce point, nous attirons l'attention sur le fait que cette procédure permet la vérification de la condition de Kirchhoff, au niveau du plan d'ouverture, non seulement pour le cas $\alpha = \beta$ mais aussi pour le cas $\alpha \neq \beta$.

- **Matrice $C_{\bar{p}p}$**

Le calcul par la formule de récurrence se fait par couches. Les coefficients de couplage d'indices élevés requièrent les résultats donnés par ceux d'indices plus petits. C'est pourquoi, une bonne précision dans les calculs est nécessaire [10]. Le logiciel MAPLE [32] est un compilateur très efficace pour ce type de calculs.

En règle générale, la conversion de modes nécessite le calcul d'une matrice dont le nombre de ligne est égal au nombre de modes de l'ancienne base (base utilisée dans le développement du faisceau incident sur le plan du diaphragme), et dont le nombre de colonnes est égal au nombre de modes de la nouvelle base (base relative au faisceau transmis).

$$G_{\bar{p}p} \equiv \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,p} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{\bar{p},1} & & & C_{\bar{p},p} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

V. APPLICATION DE LA CONVERSION DE MODES AU CAS D'UNE OUVERTURE CIRCULAIRE

Grâce à la technique d'intégration utilisée [10,11], une base constituée de 60 ou même de 40 modes permet une bonne reconstruction du champ transmis tout en permettant une exécution rapide.

Les coefficients de couplage $C_{\bar{p},p}$ dépendent de quatre paramètres : $\bar{w}$, $\bar{s}$ du faisceau incident et w , s du faisceau transmis. A l'ouverture, la réalisation de la condition de Kirchhoff doit être vérifiée. Elle nécessite le bon choix des paramètres w et s , nous sommes alors devant un problème d'optimisation des paramètres.

Il existe plusieurs procédures d'optimisation telles que les algorithmes génétiques, les algorithmes de mouches, les essaims d'oiseaux, les réseaux de neurones...etc. Les algorithmes génétiques semblent les mieux adaptés à notre problème.

• Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques [33] sont des procédures qui s'inspirent des mécanismes de sélection naturelle et des phénomènes génétiques.

L'individu, point de l'espace d'état que l'on associe à la valeur du critère à optimiser, est composé d'un ou plusieurs chromosomes qui sont eux-mêmes constitués de gènes qui contiennent les caractères héréditaires de l'individu. L'algorithme génétique génère de façon itérative des populations d'individus sur lesquelles on applique des processus de sélection, de croisement et de mutation. La sélection a pour but de favoriser les meilleurs éléments de la population, tandis que le croisement et la mutation assurent une exploration efficace de l'espace d'état.

✓ Principe général d'un algorithme génétique

L'organigramme donné sur la figure 3 montre les étapes essentielles dans la construction d'une procédure d'optimisation basée sur les algorithmes génétiques.

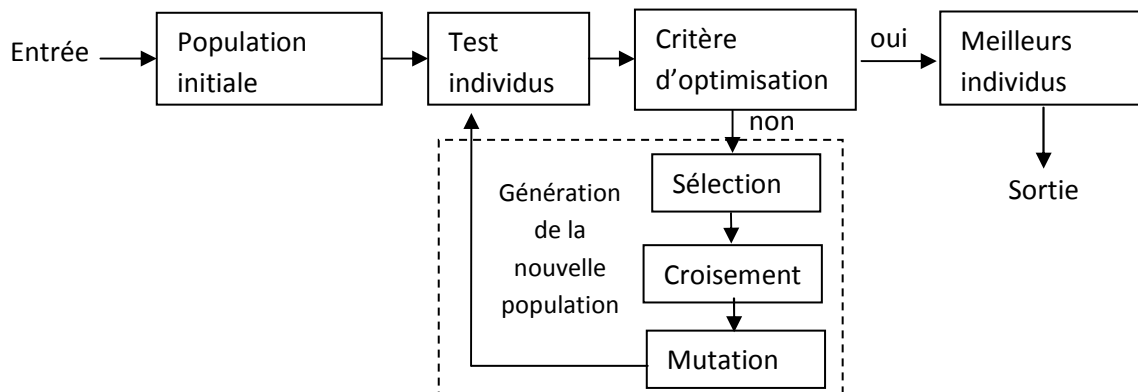


Figure 3 : Procédure d'un algorithme génétique.

Le mécanisme consiste à faire évoluer, à partir d'un tirage initial, un ensemble de points de l'espace vers le ou les optima d'un problème d'optimisation. Par analogie avec la génétique, on parle alors de générations successives. L'ensemble du processus s'effectue à taille de population constante. Afin de faire évoluer ces populations de la génération k à la génération $k+1$, trois opérations sont effectuées pour tous les individus de la génération k :

- Une sélection d'individus de la génération k est effectuée en fonction du critère à optimiser ou plus généralement du critère d'adaptation au problème (fitness)[33] ; on cherche ainsi à privilégier la reproduction des « bons » éléments au détriment des « mauvais ». Des opérateurs d'exploration de l'espace sont ensuite utilisés pour « élargir » la population et introduire de la nouveauté d'une génération sur l'autre.
- L'opérateur de croisement est appliqué avec une probabilité P_c à deux éléments de la génération k (parents) qui sont alors transformés en deux nouveaux éléments (les enfants) destinés à les remplacer dans la génération $k+1$.
- Certaines composantes (les gènes) parmi ces individus peuvent ensuite être modifiées avec une probabilité P_m par l'opérateur de mutation. Cette procédure vise à introduire de la nouveauté dans la population.

Cette procédure en trois points est ensuite renouvelée, à taille de population constante, jusqu'à l'arrêt du processus d'optimisation. Les critères d'arrêts sont de deux natures :

- ✓ Arrêt après un nombre de générations fixé a priori. C'est la solution que nous avons retenue.
- ✓ Arrêt lorsque la population cesse d'évoluer ou n'évolue plus suffisamment rapidement. On est alors en présence d'une population homogène dont on peut penser qu'elle se situe à proximité du ou des optimums.

Il est à noter qu'à ce stade, aucune certitude concernant la bonne convergence de l'algorithme n'est assurée. Comme dans toute procédure d'optimisation l'arrêt est arbitraire, et la solution « en temps fini » ne constitue qu'une approximation de l'optimum.

Pour utiliser un algorithme génétique sur un problème particulier on doit disposer des cinq éléments suivants :

- 1) Un principe de codage des éléments de l'espace admissible du problème, en éléments sur lesquels peuvent s'appliquer les trois opérateurs présentés ci-dessus. Ce codage intervient après une phase indispensable de modélisation mathématique du problème. Le choix du codage des données dépend du problème traité et conditionne l'efficacité (vitesse de convergence, précision,...) de l'algorithme génétique.
- 2) Un mécanisme de génération de la population initiale. Cette population initiale, qui sert de base aux générations futures, doit être la plus hétérogène possible.
- 3) Une fonction d'adaptation f , permettant de calculer l'adaptation de chaque élément (chromosome) au problème. Ce critère retourne une valeur de R^+ appelée fitness (adaptation).
- 4) Des opérateurs permettant de diversifier et d'améliorer la population d'une génération sur l'autre ainsi que d'explorer le plus largement possible l'espace admissible.
- 5) Des paramètres dimensionnels : taille de la population, critère d'arrêt, probabilités de croisement (P_c) et de mutation (P_m).

Il s'agit donc d'un « algorithme stochastique itératif » qui opère sur des ensembles de points codés, à partir d'une population initiale, et qui est bâti à l'aide de trois opérateurs : croisement, mutation, sélection. Les deux premiers sont des opérateurs d'exploration de l'espace tandis que le dernier fait évoluer la population vers les optima du problème.

Paramètres utilisés

Population initiale : composée de 100 chromosomes, chaque chromosome est composé de deux gènes présentant les deux paramètres w et R de taille 50 bit pour chaque gène.

Probabilité de croisement : $P_c = 0.7\%$.

Probabilité de mutation : $P_m = 0.01\%$.

Critère de sélection : la sélection des chromosomes est basée sur l'écart en intensité normalisée entre l'ancienne base et la nouvelle base, les bons chromosomes sont ceux qui donnent l'écart le plus réduit entre le champ incident et le champ transmis.

Critère d'arrêt : Nous arrêtons la procédure pour un écart $\varepsilon = 0.001$ entre l'ancienne base et la nouvelle base.

La figure 4 montre la réalisation de la condition en appliquant la conversion de modes pour différents modes de Laguerre-Gauss avec les paramètres $\bar{w} = 0.5 \text{ mm}$ et $\bar{s} = 0 \text{ m}^{-1}$ et un rayon d'ouverture $a_0 = 0.4 \text{ mm}$.

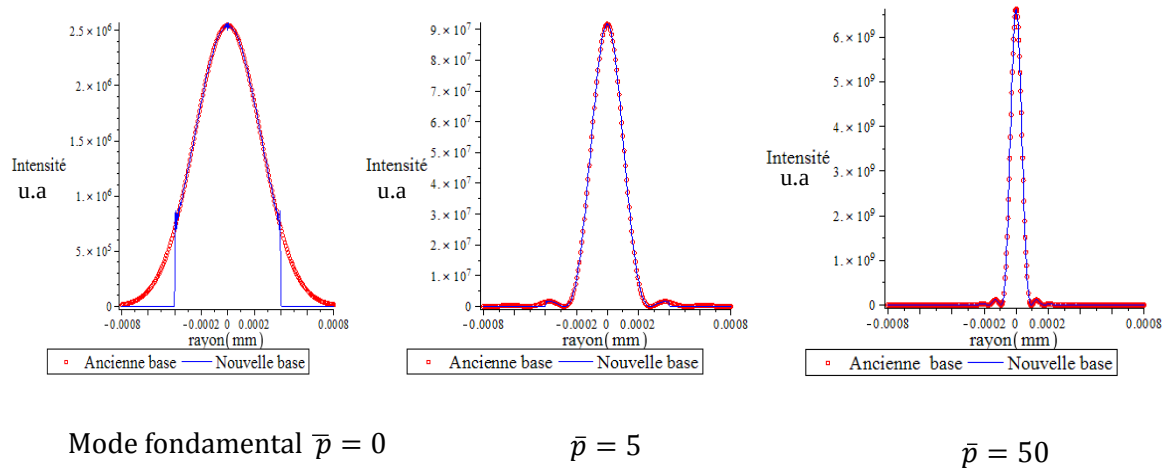


Figure 4 : Conversion de modes dans le plan de l'ouverture pour différents modes.

VI. RESULTATS ET DISCUSSION

Le formalisme *ABCD* offre un outil simple mais efficace pour étudier la propagation du faisceau à travers des éléments optiques tels que le vide, la lentille ou encore le télescope.

La conversion de modes, qui nécessite le calcul d'une matrice dont les éléments sont les coefficients de couplage, est appliquée au diaphragme.

Nous commencerons par donner un ensemble de résultats pour le cas d'un empilement de diaphragmes (écarts nuls entre ouvertures).

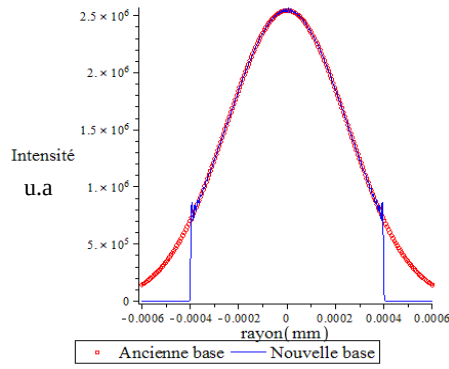
Pour l'ensemble des distributions axiales, le point $z=0$ correspond à la dernière ouverture utilisée.

Les rayons d'ouvertures sont choisis en se basant sur ce que nous avons trouvé dans la littérature [29,31, 34-36]. Ils sont réalisables expérimentalement.

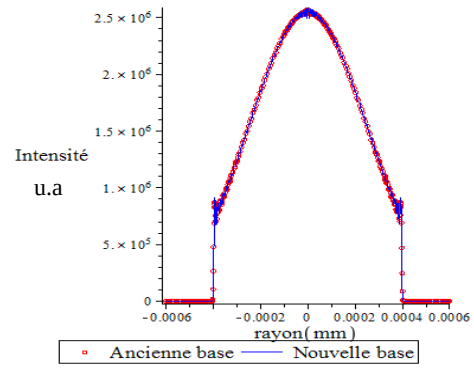
VI.1. Empilements d'ouvertures

- **Diaphragmes de même rayon**

La figure 5 donne les profils transverses et axiaux issus d'un empilement de plusieurs diaphragmes de même rayon ($a_0 = 0.4 \text{ mm}$) illuminés par le mode fondamental avec $\bar{w} = 0.5 \text{ mm}$ et $\bar{s} = 0 \text{ m}^{-1}$.

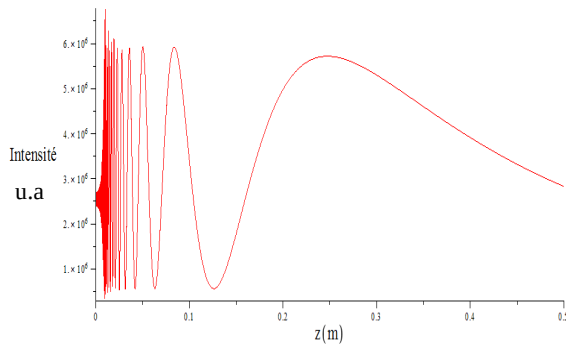


Conversion de modes à la première ouverture

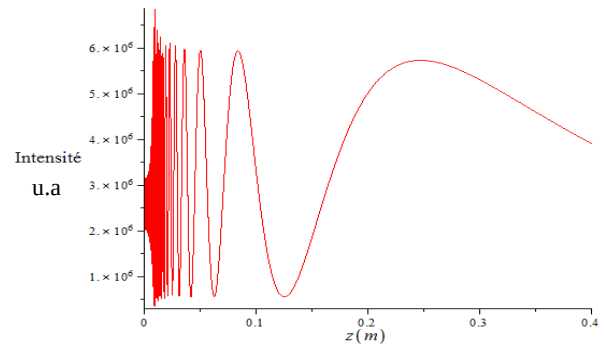


Conversion de modes à la deuxième ouverture

a. Profils transverses pour un empilement de deux ouvertures.



b. Profil axial issu d'un empilement de deux ouvertures de même rayon $a_0=0.4$ mm



c. Profil axial issu d'un empilement de huit ouvertures de même rayon $a_0=0.4$ mm

Figure 5 : Profils issus d'empilements de même rayon.

• Diaphragmes de rayons différents

Les figures 7 et 9 donnent les profils axiaux issus de différents empilements illuminés par le mode fondamental.

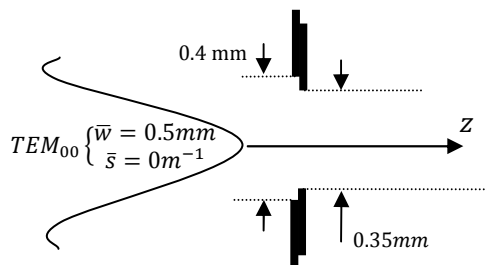


Figure 6. Empilement de deux ouvertures de rayons différents.

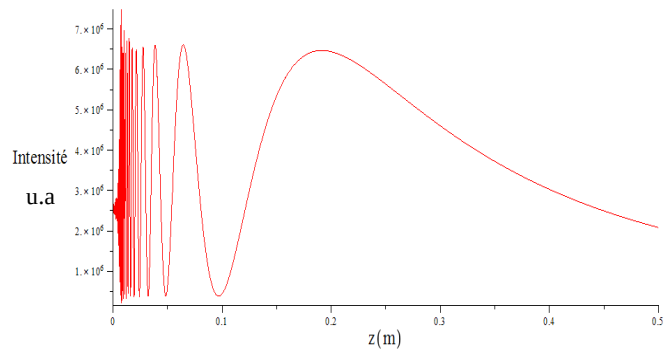


Figure 7. Profil axial associé à la figure 6.

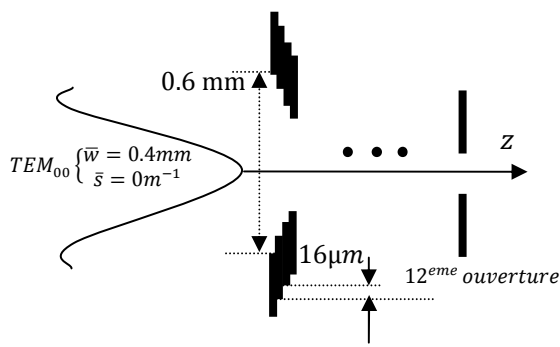


Figure 8. Empilement de 12 ouvertures de rayons différents.

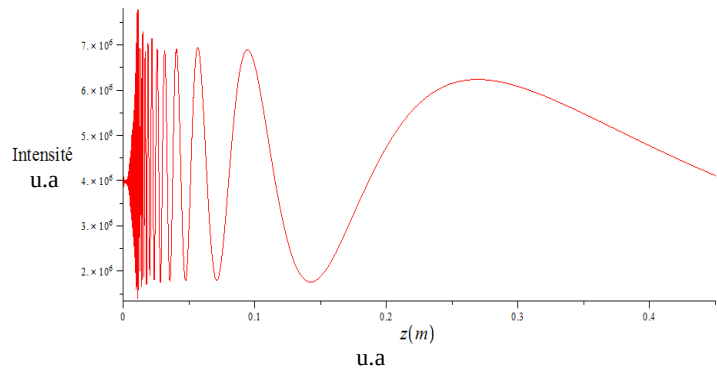


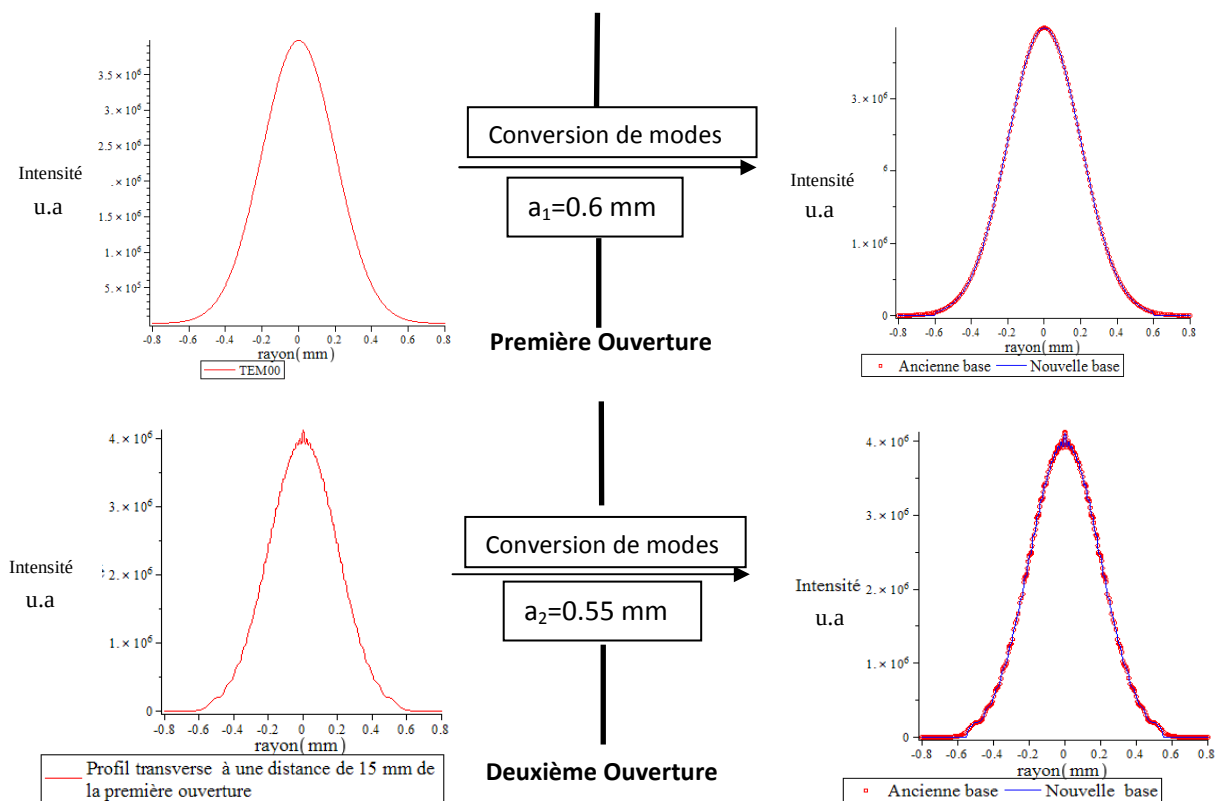
Figure 9. Profil axial associé à la figure 8.

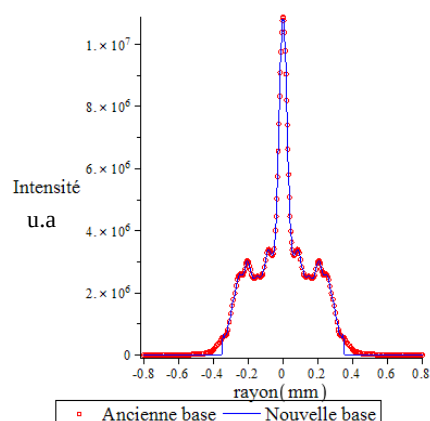
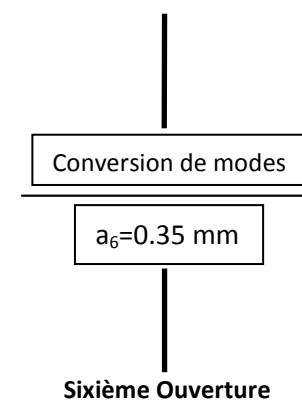
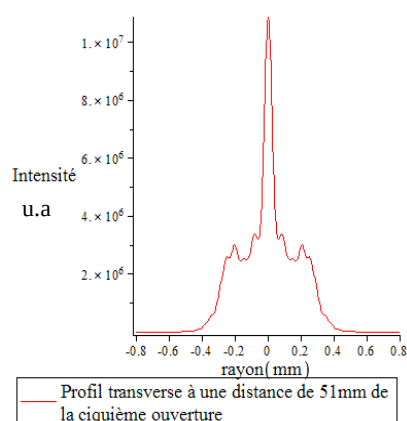
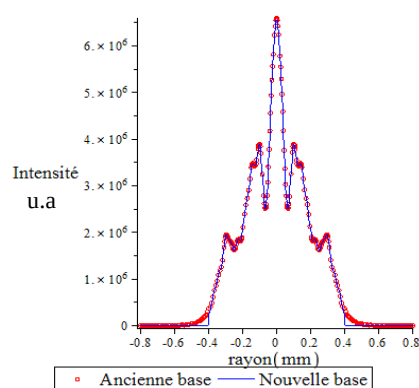
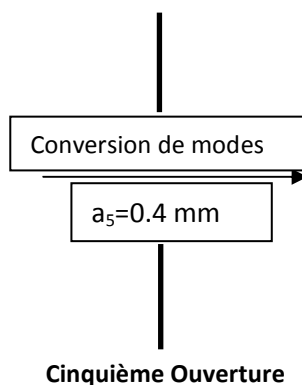
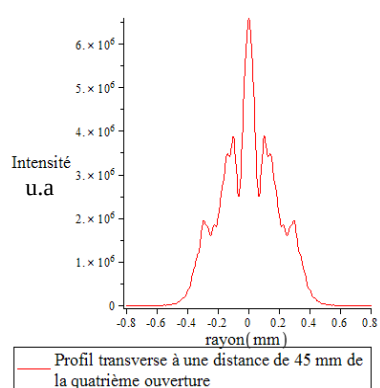
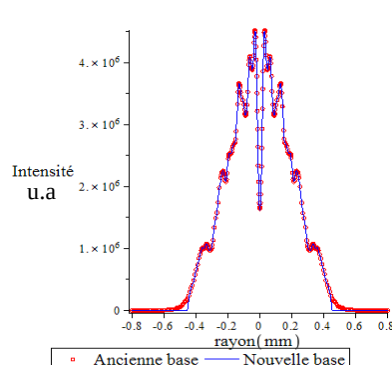
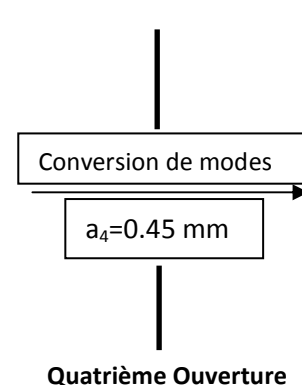
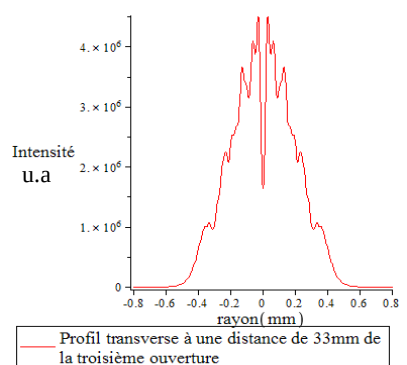
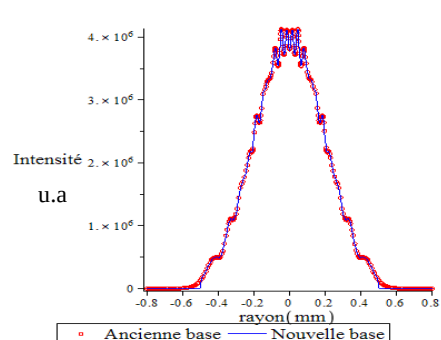
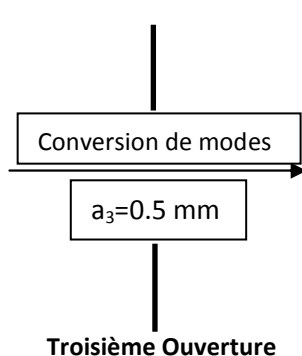
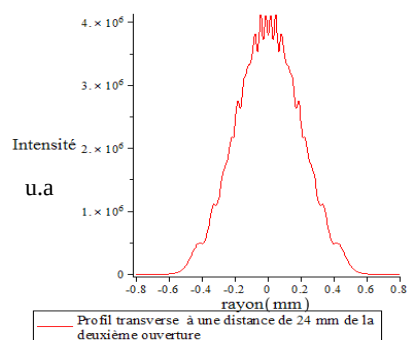
VI.2. Successions de diaphragmes

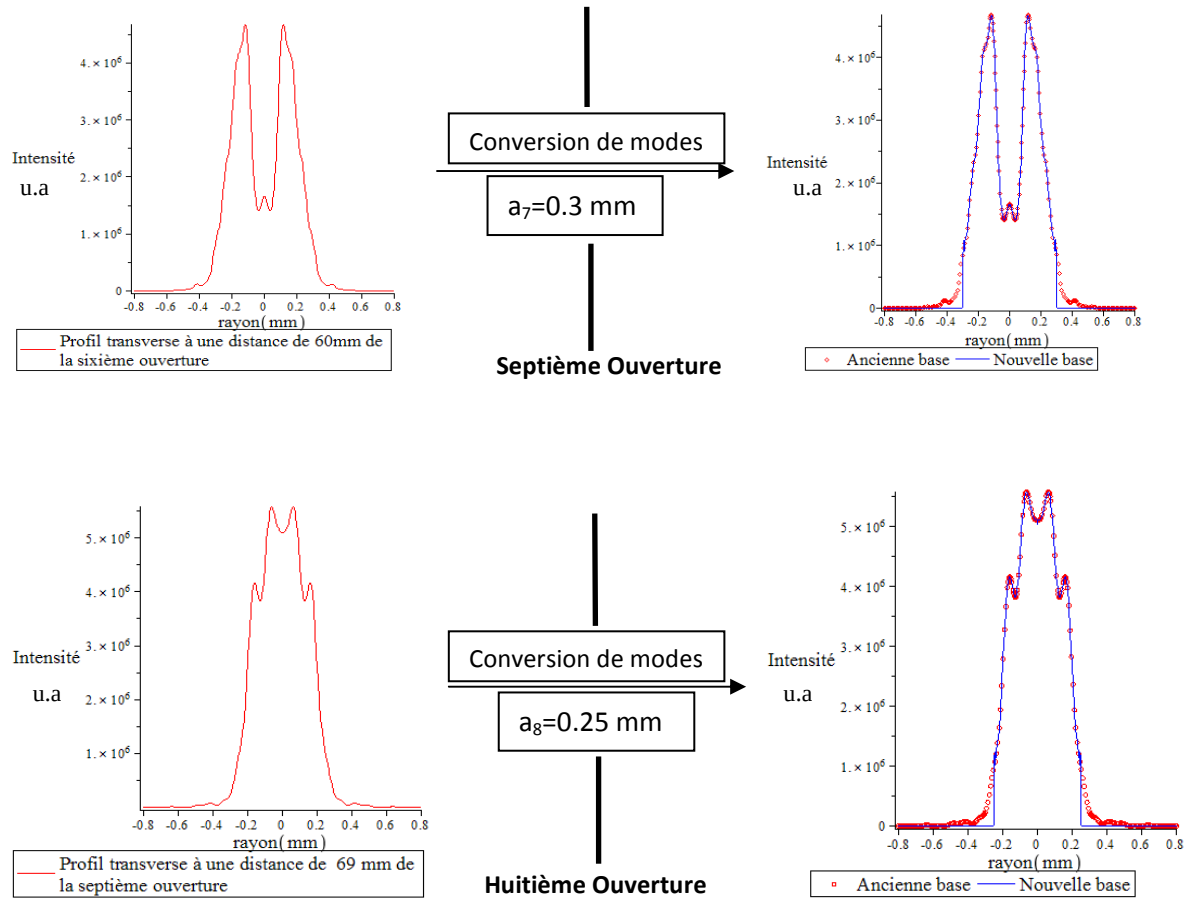
VI.2.1. Transformation du mode fondamental TEM_{00}

- Succession de huit ouvertures

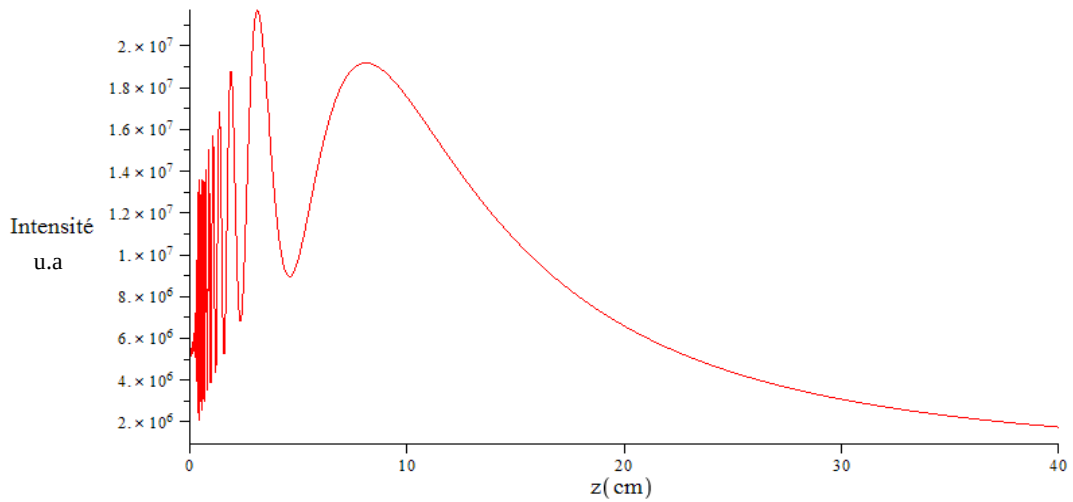
Les diaphragmes utilisés possèdent des rayons différents et sont séparés par des distances inégales (Figure 10).







a) Profils transverses.



b) Profil axial.

Figure 10: Transformation du champ par une succession de 8 ouvertures.

- **Succession de 45 ouvertures**

Les ouvertures sont écartées comme indiqué sur la figure 11; le rayon de la nième ouverture est donnée par la relation $a_n = a_{n-1} - 0.012\text{mm}$ avec $a_0 = 0.6\text{mm}$. Cette configuration est illuminée par le mode fondamental TEM_{00} avec $\bar{w} = 0.4\text{mm}$ et $\bar{s} = 0\text{m}^{-1}$.

La figure 12 montre le profil axial du champ issu de cette configuration tandis que la figure 13 montre les profils transverses pour les positions $z = 1.1, 1.8$ et 5mm .

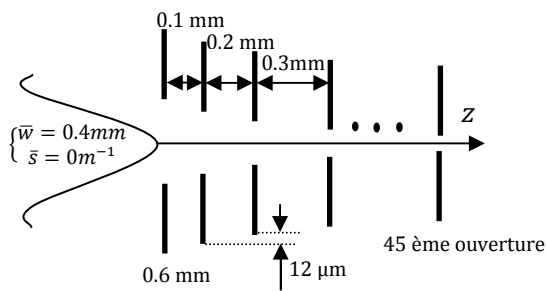


Figure 11. Succession de 45 ouvertures

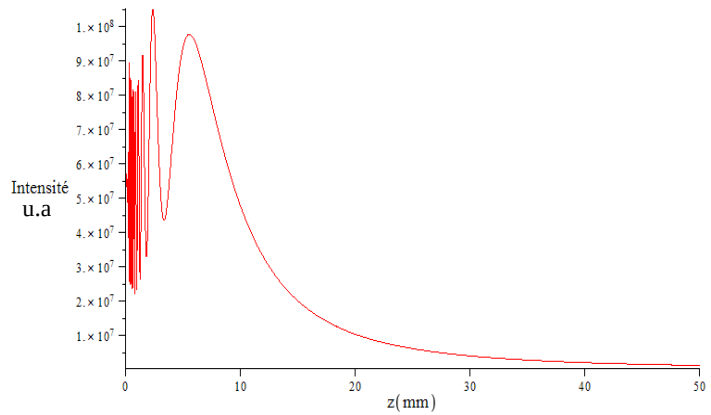


Figure 12. Profil axial associé à la figure 11

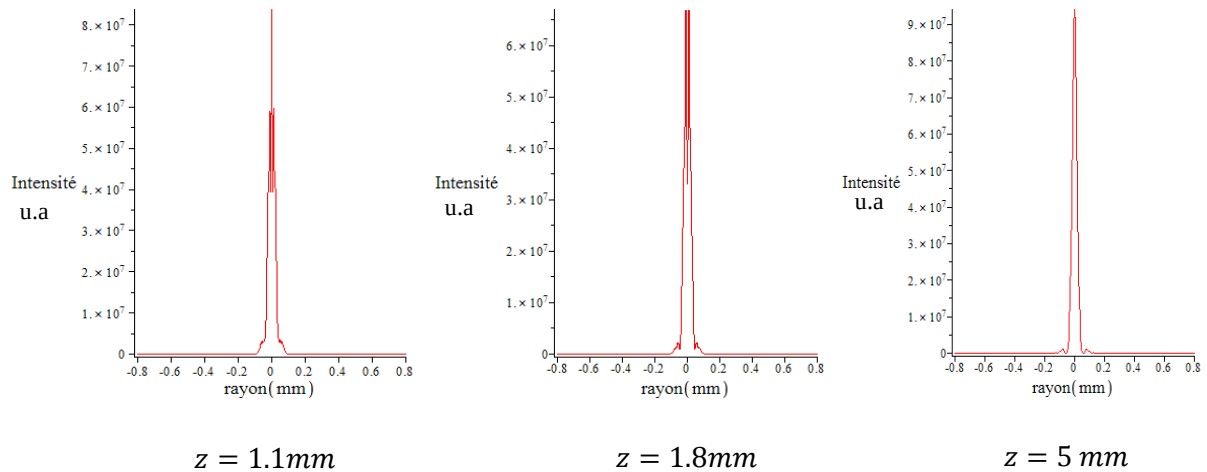


Figure13. Profils transverses.

- **Succession de 80 ouvertures**

Les diaphragmes sont écartés de $20\ \mu\text{m}$ l'un par rapport à l'autre. Le rayon de la $n^{\text{ième}}$ ouverture est donnée par la relation $a_n = a_{n-1} + 10\ \mu\text{m}$ pour $n \leq 41$ et $a_n = a_{n-1} - 10\ \mu\text{m}$ pour $n > 41$ avec $a_0 = 0.15\text{mm}$ (figure 14). Cette configuration est éclairée par le mode fondamental avec $\bar{w} = 0.38\text{mm}$ et $\bar{s} = 0\text{ m}^{-1}$.

La figure 15 présente la distribution transverse au niveau de la dernière ouverture, tandis que la figure 16 donne le profil axial.

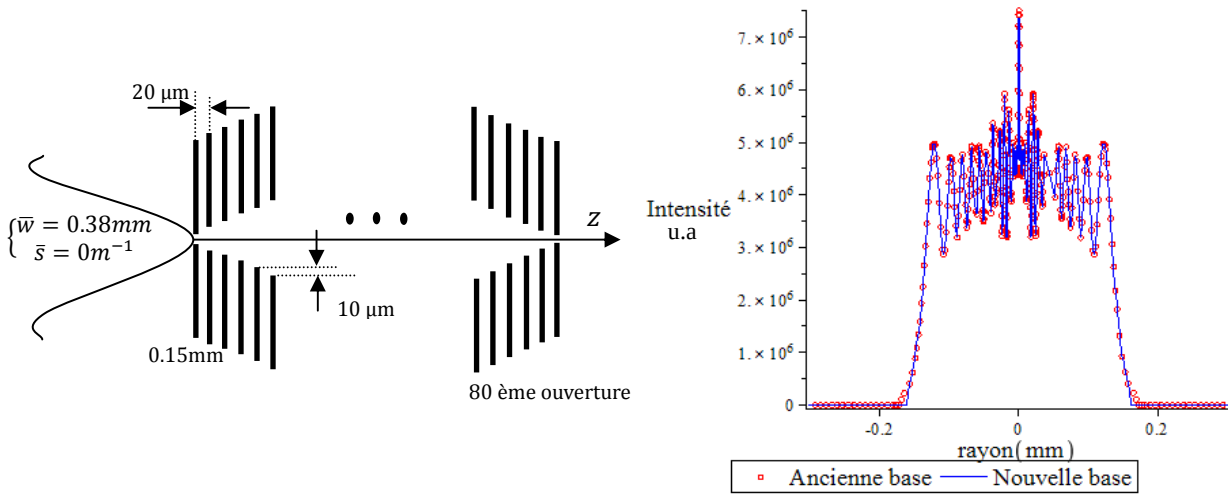


Figure 14 : Succession de 80 ouvertures.

Figure 15: Conversion de modes au niveau de la 80ème ouverture.

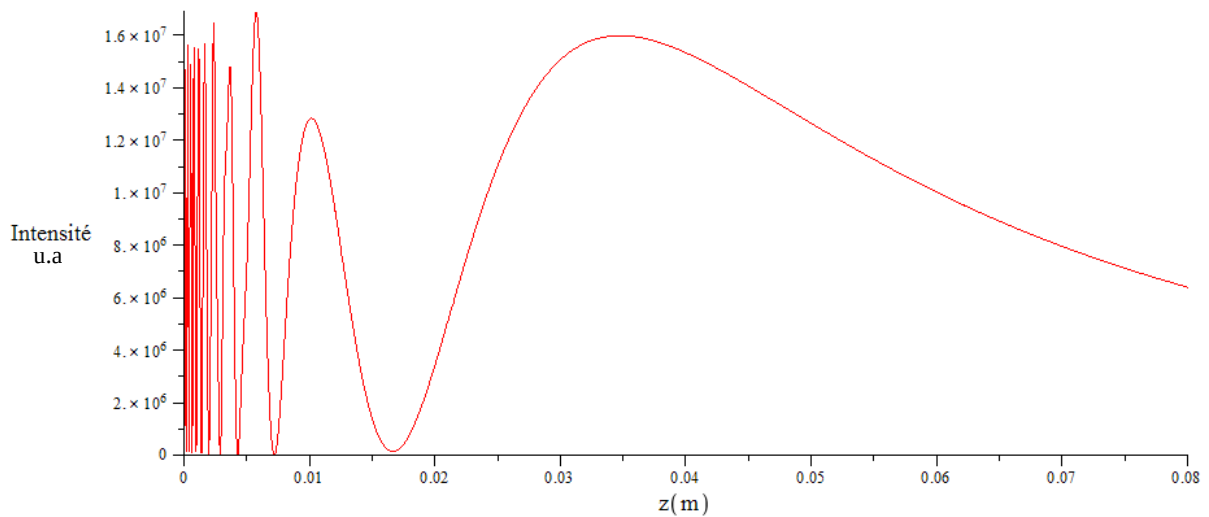


Figure 16 : Profil axial

VI.2.2. Transformation du mode TEM₁₀₀

Nous éclairons une succession de 10 ouvertures par le mode TEM₁₀₀ avec $\bar{w}=0.55\text{mm}$ et $\bar{s}=0\text{ m}^{-1}$. La figure 17 montre les profils transverses pour différentes positions tandis que la figure 18 donne le profil axial du champ issu de cette configuration.

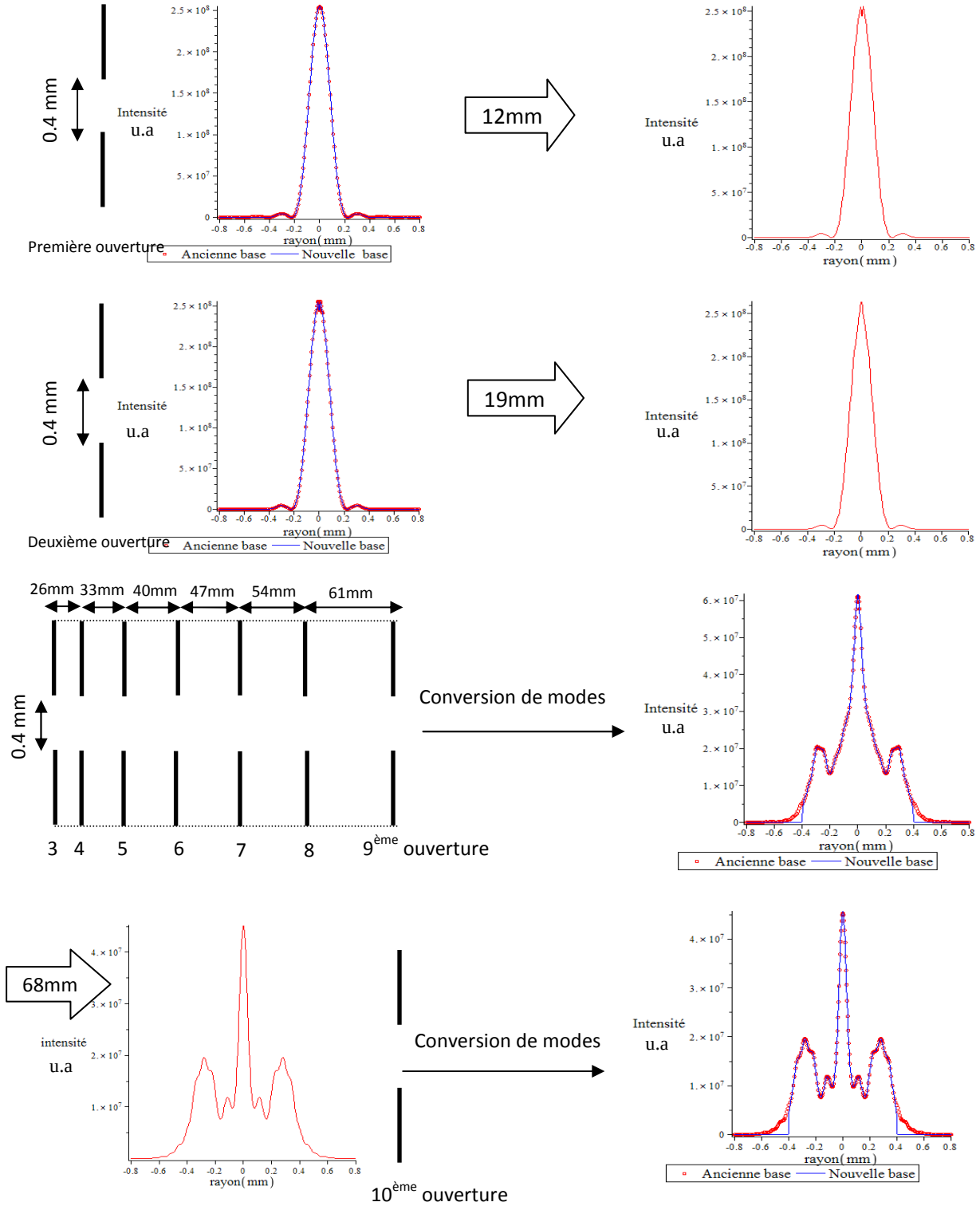


Figure 17: Profils transverses pour une succession de 10 ouvertures.

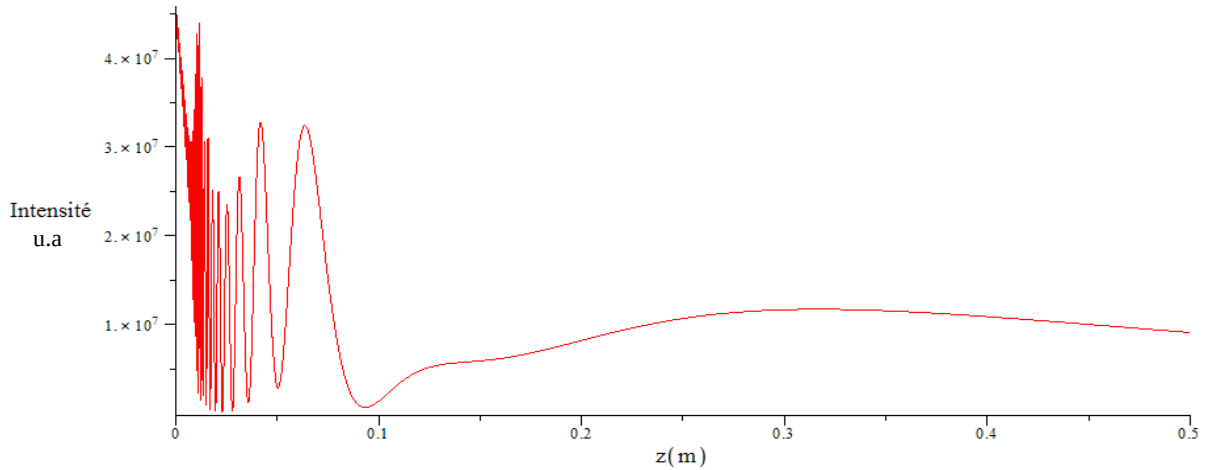


Figure 18 : Profil axial.

VI.3. PROFILS PARTICULIERS

Il est possible de réaliser une infinité de configurations pour les successions de diaphragmes. En règle générale, la distribution du champ diffracté dépend de trois paramètres : le rayon de chaque ouverture, la distance entre ouvertures et le nombre d'ouvertures composant la succession considérée. Pour certaines valeurs de ces paramètres, nous obtenons des profils particuliers et intéressants pour de nombreuses applications. Nous donnons ici, les profils du champ pour deux configurations différentes.

- **Exemple 1**

La figure 20 présente le profil transverse du champ à une distance de 15 μm de la dernière ouverture d'une succession de 56 ouvertures arrangées comme indiqué sur la figure 19.

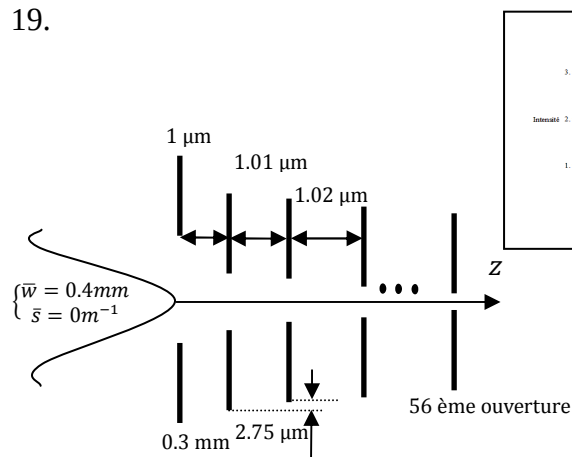


Figure 19 : Succession de 56 ouvertures

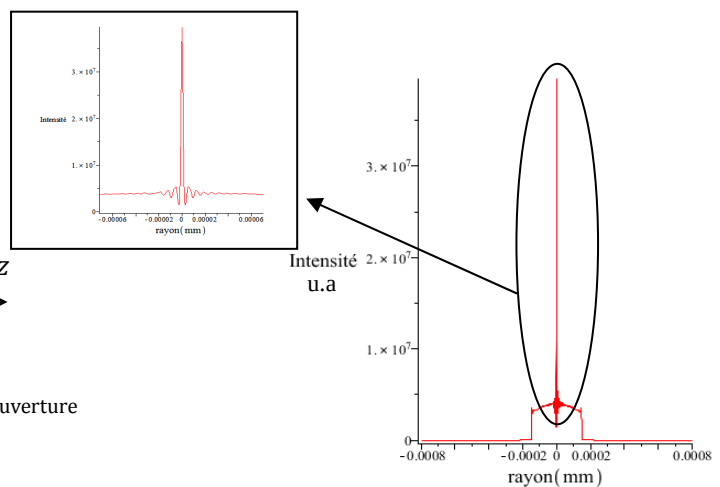


Figure 20 : Profil transverse.

La particularité de ce profil est liée à sa forme très étroite au voisinage de son axe de propagation d'une part et à sa valeur axiale ($r=0$) qui a été multipliée par un facteur 3. Ce type de profil est très utile pour l'insertion des faisceaux laser dans les fibres optiques par exemple ou pour réaliser des taches ponctuelles.

• Exemple 2

La figure 22 présente le profil transverse du champ à une position $z=5.81\text{mm}$ d'une succession de 45 ouvertures disposées comme indiqué sur la figure 21.

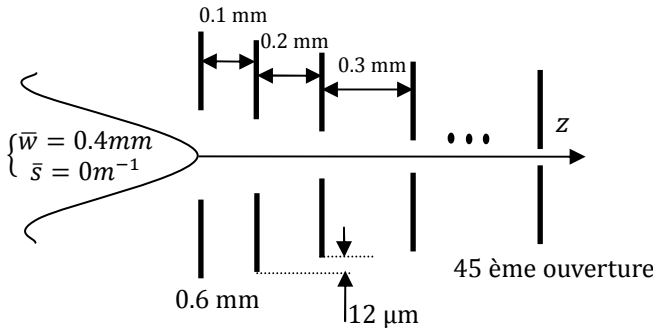


Figure 21 : Succession de 45 ouvertures.

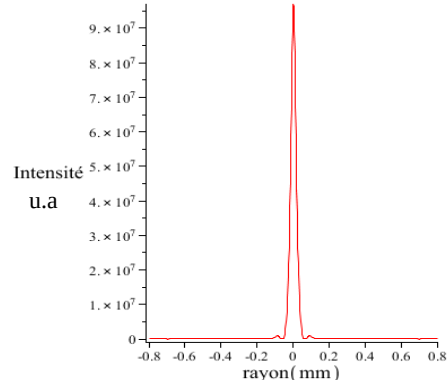


Figure 22. Profil transverse.

La particularité de ce profil est due à sa valeur axiale qui a été multipliée par 5 par rapport au champ incident.

VII. IMPACT DES PARAMETRES : ECART, RAYON ET NOMBRE D'OUVERTURES SUR LE PROFIL DU CHAMP

La simulation numérique nous permet de conclure d'une manière générale que :

- Les plus grandes variations du champ diffracté par une ouverture circulaire sont localisées autour de l'axe de propagation. Ce résultat a déjà été observé par G. Otis [10].
- La perturbation du champ par le phénomène de diffraction est inversement proportionnelle au rayon de l'ouverture.
- On distingue deux intervalles sur l'axe de propagation, celui du champ proche, $z \leq \frac{a_n^2}{\lambda}$ où a_n est le rayon de la dernière ouverture. Ce résultat caractérise le phénomène de diffraction par une ouverture. En champ lointain, $z \geq \frac{a_n^2}{\lambda}$, le champ reprend, au cours de sa propagation, la forme d'une gaussienne.
- Au cours de sa propagation à travers les ouvertures, le phénomène de diffraction s'accroît. Il est donc plus prononcé lorsque le nombre de diaphragmes augmente.

- Des diaphragmes très rapprochés conduisent à une augmentation considérable de l'amplitude du champ.

VIII. APPLICATIONS ET EXPLOITATION DES EFFETS DIFFRACTIFS D'UNE SUCCESSION DE DIAPHRAGMES

Les successions de diaphragmes peuvent produire des effets diffractifs intéressants pour certains problèmes scientifiques et techniques et pour l'optique en général [27,30, 37, 31, 38, 39].

Ces systèmes diffractifs, basés sur des arrangements d'ouvertures, s'appliquent au rayonnement de base ou de haute puissance. Leur fabrication relève d'une technologie simple [37].

- **Focalisation des faisceaux laser**

La méthode présentée dans ce travail peut être d'un grand intérêt dans la fabrication des CAFS "*Cascaded-Apertures Focusing Systems*" introduits par G. Otis [30].

- **Découpage, soudure, marquage, et durcissement des alliages**

Les configurations illustrées par les figures 19 et 21 ont permis d'augmenter considérablement l'intensité produite par le laser. Ces profils sont utiles pour le découpage, la soudure ainsi que le marquage des alliages.

- **Création de sources laser multipoints**

Au lieu d'utiliser plusieurs sources laser, on peut créer une source laser "multi-points" dont la distribution du champ comporte plusieurs sommets comme le montre la figure 24. Un profil à trois sommets très intenses à $z=3.34$ mm est issu de la configuration illustrée par la figure 23.

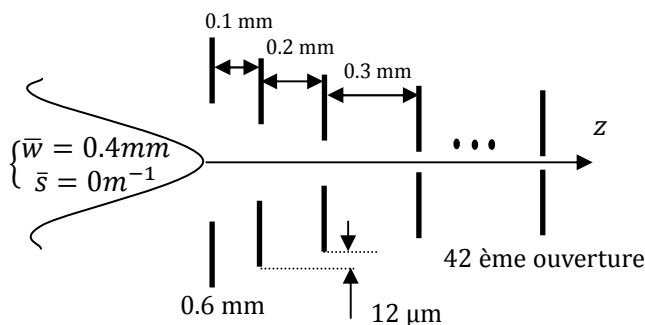


Figure 23 : Succession de 22 ouvertures.

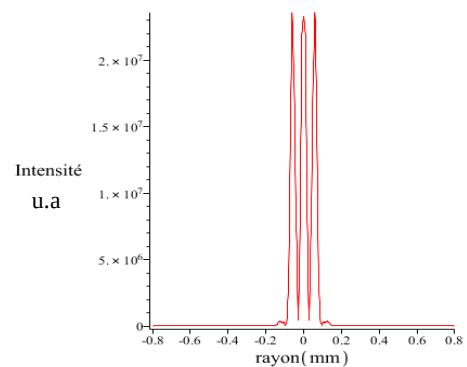


Figure 24. Profil transverse.

- **Amélioration des sources lasers**

Le besoin d'une distribution particulière du champ peut se faire sentir. Il peut alors être avantageux de tirer profit des atouts des systèmes diffractifs pour transformer le champ issu d'une source laser. Cette modification peut alors permettre ou améliorer certains processus. Taghizadeh et al. [27] ont illustré quelques exemples qui montrent l'intérêt d'insérer des éléments optiques diffractifs dans certains dispositifs optiques (Fig.25).

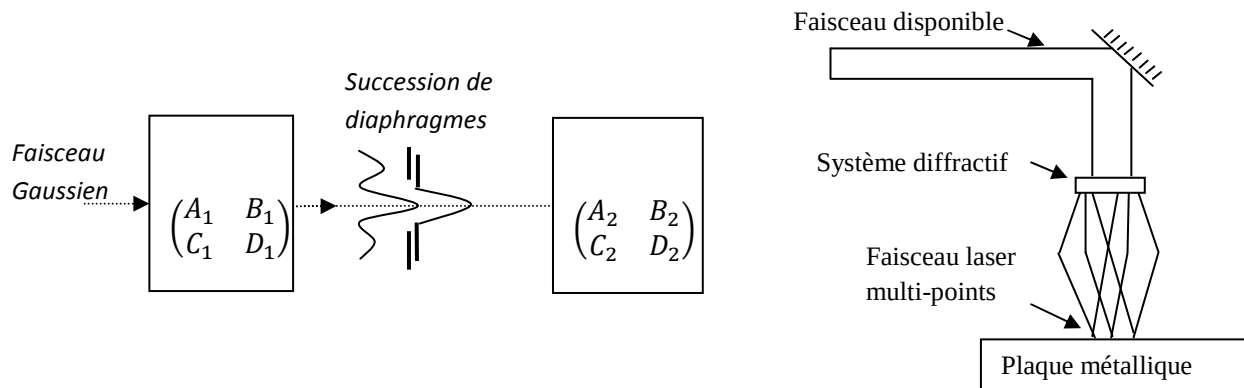


Figure25. Insertion de systèmes diffractifs dans des dispositifs laser.

- **Déclenchement des lasers de haute puissance et des amplificateurs laser par un rayonnement de puissance externe par un doublet d'ouvertures**

Letfullin et Igoshin [38] ont proposé une conception spécifique pour un amplificateur pulsé de haute puissance basé sur une réaction chimique HF (Hydrogène-Fluor) : une cavité télescopique instable avec une un doublet d'ouvertures devant le miroir d'entrée. Des paramètres géométriques adaptés améliorent le fonctionnement de cette conception.

Ajoutons que des sources très focalisées comme celles des figures 20 et 22 peuvent améliorer la résolution microscopique. Pour conclure, soulignons que ce type de dispositifs peut également trouver sa place en mécanique quantique ou en physique moderne pour la manipulation des faisceaux atomiques et moléculaires aux propriétés ondulatoires reconnues [37].

IX. TRANSFORMATION DU CHAMP PAR LES SYSTEMES OPTIQUES DIAPHRAGMES

Les systèmes optiques diaphragmés sont des systèmes contenant en plus des diaphragmes, des éléments optiques tels que les lentilles, les prismes ou encore les miroirs.

L'insertion de ces éléments dans une succession d'ouvertures change le profil du champ. Le formalisme $ABCD$ offre un outil puissant pour traiter la propagation des faisceaux Gaussiens à travers ces éléments tandis que la conversion de modes offre une solution efficace pour le traitement du passage à travers les ouvertures.

Les figures 27 et 28 donnent les distributions transverse et axiale respectivement pour la configuration indiquée sur la figure 26.

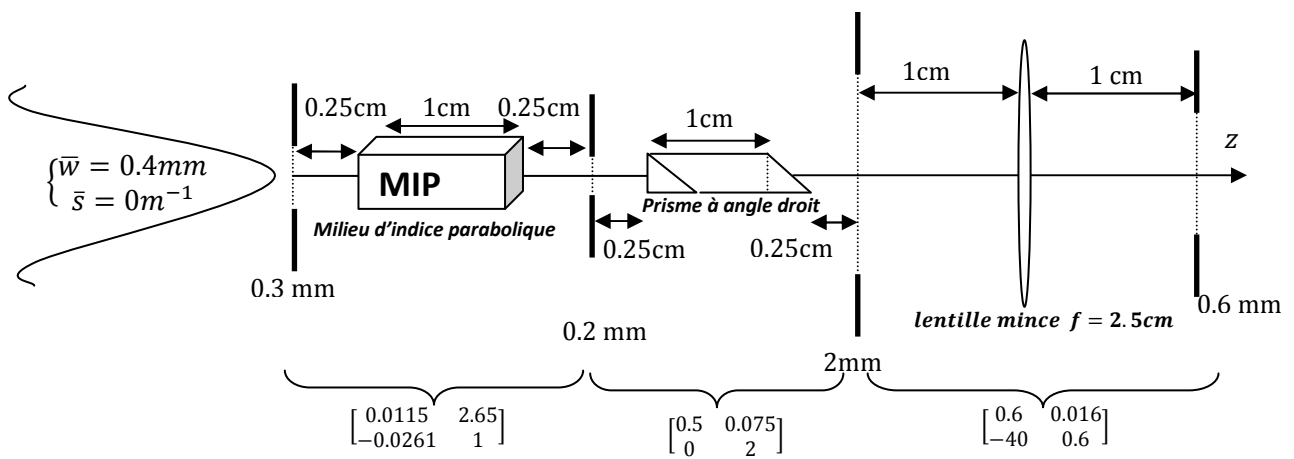


Figure 26 : Configuration d'un système optique diaphragmé.

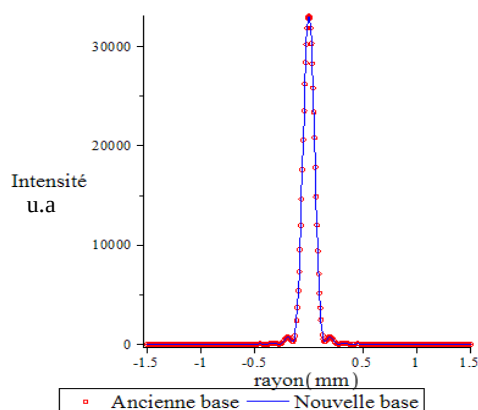


Figure 27: Conversion de modes à la dernière ouverture.

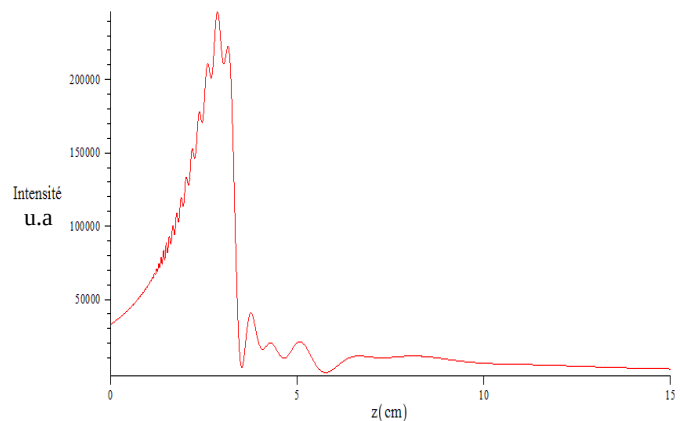


Figure 28 : Profil axial du champ issu d'un système optique diaphragmé.

X.CONCLUSION

La transformation des faisceaux Gaussiens à travers une succession d'ouvertures circulaires a été traitée. Une nouvelle approche a été utilisée qui consiste à exploiter le principe de conversion de modes appliqué au cas du diaphragme. Cette technique nécessite le calcul d'une matrice dont les éléments sont les coefficients de couplage, obtenus au moyen de l'application d'un outil performant : la formule de récurrence.

De chaque côté de l'ouverture, le formalisme *ABCD* reste toujours valable. Ce formalisme associé à la conversion de modes offre un moyen efficace pour l'étude de la transformation du champ à travers des successions de diaphragmes aussi bien que dans les systèmes optiques diaphragmés.

La simulation numérique permet de constater que le profil du champ est essentiellement dépendant de trois paramètres qui sont : le rayon et le nombre d'ouvertures ainsi que l'écart entre ouvertures. Par conséquent, la variation de chacun de ces paramètres peut conduire à des profils spécifiques de la distribution spatiale du champ pouvant répondre à des besoins particuliers dans le domaine de la technologie.

Conclusion Générale

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Ce travail a permis l'étude de la transformation du champ, caractérisant l'onde électromagnétique, par une succession de diaphragmes en simple propagation.

Nous avons retenu, dans la cadre de l'optique paraxiale, le modèle Gaussien pour la description des faisceaux lasers. Nous avons montré l'efficacité et la simplicité du formalisme *ABCD* dans l'étude de la propagation du champ à travers les structures optiques traitées par ce formalisme. L'absence de matrice *ABCD*, pour le cas du diaphragme, nous a conduits à opter pour l'approche par la conversion de modes. Cette technique a été associée au formalisme *ABCD* pour l'étude des systèmes optiques diaphragmés.

La simulation numérique a montré que trois paramètres qui sont: le rayon et le nombre d'ouvertures ainsi que l'écart entre ces ouvertures ont un impact important sur le profil du champ. Nous avons montré que le choix particulier d'une cascade d'ouvertures peut conduire à des profils intéressants pouvant être exploités en technologie.

Nous attirons l'attention sur le fait que les successions de diaphragmes montées sur des lasers simples peuvent remplacer efficacement de grandes structures optiques et cela est d'un grand intérêt. En effet, à partir d'un modeste laser, nous pouvons augmenter l'intensité laser produite de manière considérable. Par ailleurs, certaines optiques peuvent se dégrader sous l'effet de rayonnements intenses mais les successions de diaphragmes plus robustes peuvent les remplacer avantageusement.

L'embarquement des lasers dans les systèmes médicaux, informatiques ou de télécommunication se généralise. D'un point de vue pratique, cet embarquement n'est pas toujours possible. La compacité et la robustesse d'une cascade d'ouvertures peut simplifier l'intégration des lasers dans plusieurs domaines.

Notre étude met à la disposition de l'utilisateur du laser un outil efficace de modélisation qui lui permet d'avoir une vue précise sur ce qu'il peut obtenir en matière de distributions du champ. En effet, l'étude des successions de diaphragmes donne les profils axiaux et transverses ainsi que les termes de phase en tous points de l'axe de propagation d'un système optique diaphragmé.

Comme perspective technique à ce travail, nous allons tenter de remplacer des structures optiques par des systèmes basés sur des arrangements de diaphragmes afin d'améliorer les performances d'un dispositif technique.

Nous souhaitons construire des systèmes optiques flexibles, basés sur les cascades d'ouvertures, qui permettront aux manipulateurs l'adaptation désirée du faisceau laser.

Sur le plan théorique, nous allons appliquer cette approche à d'autres types d'ouvertures et de distributions et même étendre l'étude à un cadre plus général.

ANNEXE A

APPROCHE COMPARATIVE TGP-GGP

Le tableau suivant synthétise les résultats comparatifs obtenus au moyen de la TGP et de la GGP. Par les deux approches, deux configurations différentes sont considérées. La première donne le cas de l'espace libre tandis que la deuxième traite de la succession espace libre- lentille mince- espace libre [6, 10, 18].

Chemin	ψ au moyen de la Phase de Gouy Traditionnelle <i>TGP</i>	Matrice <i>ABCD</i>	ψ au moyen de la Phase de Gouy Généralisée <i>GGP</i>
Section espace libre z	$\psi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\psi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)$
Espace libre z , lentille mince f , espace libre z	$\psi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{z+z'}{z'_R}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{z'}{z'_R}\right)$ avec $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ $z'_R = \frac{w_0^2}{\lambda} = \frac{z_R f^2}{(f-z)^2 + z_R^2}$ $z' = f \frac{z(f-z) - z_R^2}{(f-z)^2 + z_R^2}$	$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{f} & z + z\left(1 - \frac{z}{f}\right) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{z}{f} \end{pmatrix}$	$\psi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z + z\left(1 - \frac{z}{f}\right)}{z_R\left(1 - \frac{z}{f}\right)}\right)$ $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$

ANNEXE B**DESCRIPTION DE LA PROPAGATION DES FAISCEAUX GAUSSIENS AU
MOYEN DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER FRACTIONNAIRE****I. Transformée de Fourier Fractionnaire**

L'histoire des mathématiques montre le passage du calcul de puissances d'ordres entiers au calcul de puissances d'ordres fractionnaires [40, 41]. En effet, il n'est pas évident à partir de la définition habituelle de la puissance cubique de 5 donnée par $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ de calculer $5^{1,5}$.

Il a fallu du temps avant que la définition $5^{1,5} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$ émerge. De même, la dérivée d'ordre 1 de la fonction $f(x)$ est définie par $\frac{df}{dx}$, la dérivée d'ordre 2 de $f(x)$ est d^2f/dx^2 mais comment peut-on trouver, à partir de cette définition, la dérivée d'ordre fractionnaire 1,5 de $f(x)$?

Soit $F(v)$ la Transformée de Fourier ordinaire TF ($f(x)$). La transformée de Fourier de la dérivée entière d'ordre n de $f(x)$ est donnée par [26] :

$$TF(d^n f(x)/dx^n) = (j2\pi v)^n F(v) \quad (\text{B. 1})$$

La Transformée de Fourier inverse de $(j2\pi v)^\alpha F(v)$ est $d^\alpha f(x)/dx^\alpha$. C'est la dérivée d'ordre α de $f(x)$ mais avec un ordre fractionnaire possible pour le nombre α .

Bracewell [40] donne un exemple d'application de la dérivée fractionnaire pour l'analyse des discontinuités de fonctions. C'est dans cette philosophie que s'inscrit la transformation de Fourier d'ordre fractionnaire. Ainsi, cet outil mathématique trouve son application dans de nombreux domaines tels que le traitement des signaux, l'étude de la propagation des faisceaux et des résonateurs. Il permet de déterminer également la solution de quelques équations différentielles.

Les fondements de cette transformation débutent par la propriété suivante [15]: Les fonctions d'Hermite-Gauss normalisées, notées $\Phi_n(x)$ où $n \in \mathbb{N}$ est l'ordre de la fonction, sont des fonctions propres de la TF associées aux valeurs propres $\exp\left(jn\frac{\pi}{2}\right)$ telles que :

$$F[\Phi_n(x)](w) = \exp\left(-jn\frac{\pi}{2}\right) \Phi_n(w) \quad (\text{B. 2})$$

F est l'opérateur Transformation de Fourier classique définie par :

$$F[f(x)](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-jwx) dx \quad (\text{B.3})$$

avec
$$\Phi_n(x) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (\text{B.4})$$

La fonction $H(x)$ représente le polynôme d'Hermite d'ordre n .

$$H_n(x) = -1^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \quad (\text{B.5})$$

Les fonctions d'Hermite-Gauss sont des fonctions réelles et oscillantes. L'ordre n indique le nombre de racines du polynôme $H_n(x)$. Comme la phase des valeurs propres dans l'équation (B.2) est proportionnelle à $\frac{\pi}{2}$, Namias [40] a nommé l'opérateur de Fourier $F_{\frac{\pi}{2}}$. Il a ensuite généralisé cet opérateur à tout ordre fractionnaire $\alpha = p \pi/2 \in \mathbb{R}$. Tel que :

$$F_\alpha[\Phi_n(x)](w) = \exp(-jn\alpha) \Phi_n(w) \quad (\text{B.6})$$

L'opérateur F_α prend ainsi le nom de transformation de Fourier fractionnaire d'ordre α .

Rappelons que les fonctions d'Hermite-Gauss forment une base orthonormée. Toute fonction f de carré intégrable peut être décomposée sur cette base de la manière suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \quad (\text{B.7})$$

Avec : $a_n = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) f(x) dx$ les coefficients de décomposition.

En tenant compte de l'équation (B.6), une première définition de la transformée de Fourier Fractionnaire (*TFF*) de $f(x)$ est donnée par :

$$F_\alpha[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-jn\alpha) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) \quad (\text{B.8})$$

Le calcul théorique de la *TFF* d'une fonction au moyen d'une série n'est pas simple. En pratique, il est plus commode de considérer cet opérateur sous sa forme intégrale ; pour $0 < |p| < 2$, on le définit de la manière suivante [42]:

$$F_\alpha[f](x) = \frac{\exp\left[j\left(\frac{\pi\tilde{\alpha}}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\sqrt{|\sin\alpha|}} \exp\left(-\frac{j}{2}x^2 \cot\alpha\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{j}{2}x'^2 \cot\alpha\right) \exp\left(\frac{jxx'}{\sin\alpha}\right) f(x') dx' \quad (B.9)$$

Différentes notations sont utilisées pour la TFF données par : $F_\alpha[f](x)$, $F^{(p)}[f](x)$, $f_p(x)$. avec $\tilde{\alpha} = \text{sgn}(\sin\alpha)$

$$\text{Pour } p=0 \quad F^{(0)}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')f(x')dx' = f(x) \quad (B.10)$$

$$\text{Pour } p=2 \quad F^{(2)}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+x')f(x')dx' = f(-x) \quad (B.11)$$

F_0 est donc l'opérateur identité I ; F_1 est la transformée de Fourier conventionnelle, $F_{-\alpha}$ est la TF inverse, et F_2 est l'opérateur de parité P .

II. Etude de la propagation des faisceaux Gaussiens au moyen de la TFF

Notons par $E_0(x)$ la distribution d'amplitude complexe à une dimension d'un faisceau Gaussien en $z=0$. Le développement de ce champ en fonction d'Hermite-Gauss s'écrit [43]:

$$E_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{s_0} \Phi_n\left(\frac{x}{s_0}\right) \quad (B.12)$$

Avec :

$$C_n = \int E_0(x) \frac{1}{s_0} \Phi_n\left(\frac{x}{s_0}\right) dx, \quad s_0 = \sqrt{\pi}w_0$$

En considérant une propagation vers la droite, la distribution d'amplitude $E_z(x)$, en un plan arbitraire z , s'écrit :

$$E_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{s_0}{s_n} \Phi_n\left(\frac{x}{s_0}\right) \exp\left[jkz + \frac{jkx^2}{2R(z)} - j\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi(z)\right] \quad (B.13)$$

En utilisant $F^{a(z)}[E_z(x)](u)$, la TFF d'ordre $a(z)$ de $E_z(x)$, l'équation (VII.2.2) prend une forme particulièrement simple donnée par [43, 44] :

$$E_z(x) = \frac{s_0}{s_n} \mathbf{F}^{a(z)}[E_0(u)] \exp\left[jkz + \frac{jkx^2}{2R(z)} - i\psi(z)\right] \quad (B.14)$$

$\psi(z)$ est relié à l'ordre $a(z)$ de la TFF par [43, 44] :

$$a(z) = \frac{2}{\pi} \psi(z) \quad (B.15)$$

Et donc :

$$\psi(z) = \frac{\pi}{2} a(z) \quad (\text{B. 16})$$

Nous voyons que l'ordre angulaire α de la *TFF* est simplement égal à l'écart en phase de Gouy accumulé lors d'une propagation de 0 à z .

Ce résultat peut être généralisé pour décrire la propagation entre deux surfaces sphériques de rayons R_1 et R_2 , positionnés en z_1 et z_2 respectivement. La relation entre ces deux surfaces en terme de *TFF* d'ordre a es donnée par la relation [43, 44] :

$$a_{(z_1 \rightarrow z_2)} = \frac{\psi(z_2) - \psi(z_1)}{\pi/2} \quad (\text{B. 17})$$

Références

Références

- [1] A. E. Siegman, “Lasers”, University Science Books Mill Valley, California, 1986.
- [2] H. Kogelnik et T. Li, “Laser Beams and Resonators”, Appl Opt, vol. 5, No. 10, pp.1550-1567, Octobre 1966.
- [3] L. Tarassov, “Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent”. Traduit du russe par V. Koliméev. Editions Mir ,1985.
- [4] M.Born and E.Wolf, “ Principales of Optics ”, 7th expended edition. Cambridge University Press. United Kingdom, 1999.
- [5] H. Kogelnik, “Coupling and conversion coefficients for optical modes”, presented at the symposium on quasi-optics, polytechnic institute of Brooklyn, 333; 8, 9 et10juin 1964.
- [6] C. A. Hill and D. R. Hall, “Coupling loss theory of single-mode waveguide resonators”, Appl Opt, vol. 24, no. 9, pp.1283-1290, 1985.
- [7] G. Stephan, M. Trümper, Physical review A 28, (1983) 2344.
- [8] A. Kellouet Guy Stephan, APPLIED OPTICS / Vol. 26, No. 1 / 1 January 1987
- [9] K. Ait-Ameur, H. Ladjouze, J. Phys. D. Appl. Phys. 21 (1988) 1566.
- [10] Z. Derrar Kaddour, “Contribution a l’optique diffractive : Inhibition des effets de lentilles thermiques par l’emploi d’un guide d’onde”, Thèse de doctorat d’état en physique, USTHB, décembre 2007.
- [11] Z. Derrar Kaddour, A. Taleb, K. Ait-Ameur, G. Martel, A. Cagniot, “Alternative model for computing intensity patterns through apertured ABCDsystems”, Opt. Comm, 281, pp.1384-1395, 2008.
- [12] H. Kogelnik, “Imaging of Optical Modes-Resonators with Internal Lenses”, The Bell System Technical Journal, vol. 44, pp. 455-494, mars 1965.
- [13] B. Cagnac et J.P Faroux, “Lasers: Interaction lumière-atomes”, EDP Sciences, CNRS éditions, 2002.
- [14] M. Bertolotti, “Matrix Representation of geometrical properties of laser cavities”. Ilnuovo Cimento , vol. Xxxii, no.5, pp. 1242-1257, 1964.
- [15] Lee W.Casperson, “Portland state university. How do you spell gouy? Letter to the editor”, Optics and phonitics news, septembre 2000.
- [16] S. Feng, H. G. Winful, “Physical origin of the Gouy phase shift”, Opt Lett, vol. 26, no. 8, pp.485-487, 15 avril 2001.
- [17] M. F. Erden, H. M. Ozaktas, “Accumulated Gouy phase shift in Gaussian beam propagation through first-order optical systems”, J. Opt. Soc. Am. A, vol. 14, no. 9, pp. 2190-2194, septembre1997.
- [18] Z. Derrar Kaddour, A. Taleb, K. Ait-Ameur, G. Martel, “ Revisiting Gouy phase”, Opt.Comm, 280, pp.256–263, 2007.

- [19] H. Liu, D. Zhao, H.Mao, S. Wang, F. Jing, Q. Zhu, X. Wei, X. Zhang; “studies of beam propagation characteristics on aperture fractional Fourier transforming systems”. Chinese optics letters, vol.2, no. 4, pp. 206-209, avril 2004.
- [20] S. A. COLLINS, J R. “Lens-System Diffraction Integral Written in Terms of Matrix Optics”, J. Opt. Soc. Am, vol. 60, no. 9, pp.1168-1177, Septembre 1970.
- [21] D. Marcuse. “Light Transmission Optics”. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1982.
- [22] A. E. Siegman, “Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical-beam Eigenfunctions”, J. Opt. Soc. Am, vol. 63, no. 9, pp.1093-1094, septembre 1973.
- [23] <http://mathworld.wolfram.com>.
- [24] M. A. Bandres et J. C. G. Vega, “Ince–Gaussian beams”, Opt. Lett, vol. 29, no. 2, pp. 144-146 , 15 Janvier 2004.
- [25] M. A. Bandres, “Elegant Ince –Gaussian beams, Opt.Lett”, vol. 29, no.15, pp.1724-1726, 1 août 2004.
- [26] Joseph W. Goodman. “Introduction to Fourier Optics”. Second Edition .Stanford University.McGraw-Hill Companies, Edition 1996.
- [27] M.R. Taghizadeh, P. Blair, K. Balluder, A.J. Waddie, P. Rudman, N. Ross. “Design and fabrication of diffractive elements for laser material processing applications ”. Optics and Lasers in Engineering 34, pp.289-307, (2000).
- [28]A. G. Fox and T. Li, “Resonant modes in maser interferometer”, Bell System Technical Journal, 40, 453-488, 1961.
- [29] K.M. Abedin, S.M.Rahman, “Computer simulation of Fresnel diffraction from double rectangular apertures in one and two dimensions using the iterative Fresnel integrals method”, Optics & Laser Technology, 44, pp.394-402, 2012.
- [30] G. Otis, J.-L. Lachambre, and P. Lavigne, “Focusing of laser beams by a sequence of irises ”. Appl. Opt ,vol. 18, no.6, pp.875-883, Mars 1979.
- [31] Kazumasa Tanaka, K Youshida, M Taguchi, “Analytical and experimental investigations of the diffraction field of a Gaussian beam through a sequence of apertures: applicability of the beam mode expansion method”, Appl Opt, vol. 27, no. 7, pp.1310-1312, avril 1988.
- [32] [http:// www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com).
- [33] Y. J. Cao and Q. H. Wu, “Teaching genetic algorithm using Matlab” Int. J. Elect. Enging. Educ., Vol. 36, pp. 139–153. Manchester U.P., 1999.
- [34] S. Ganci, “Diffracted wave field by an arbitrary aperture from Maggi–Rubinowicz transformation: Fraunhofer approximation”. Optik 119, pp.41-45, 2008.
- [35] G. Otis, “Application of the boundary-diffraction-wave theory to Gaussian beams”. J. Opt. Soc. Am, vol.64, no. 11, pp.1545-1550, novembre1974.

- [36] W. A. Kleinmans, "Diffraction from a sequence of apertures and disks", Journal of Optical Society of America, Vol. 65, No. 12, pp. 1451-1455, 1975.
- [37] R. R. Letfullin and O. A. Zayakin. T. F. George "Theoretical and experimental investigations of the effect of diffractive multifocal focusing of radiation". Journal of Russian Laser Research, vo 40, no 13, pp. 2138-2147, mai 2002.
- [38] V.I. Igoshin, R. R. " Letfullin. High-power laser amplifier based on an auto-wave photon-branched chain reaction in an unstable telescopic cavity". Quantum Electronics, 27(6) pp.487-491,1997.
- [39]R. R. Letfullin and T. F. George. " Diffractive Multifocal Focusing of Gaussian Beams". Fiber and Integrated Optics, 21, pp. 145-161, 2002.
- [40] F. Nicolas, "Holographie numérique femto seconde : Modélisation et restitution par transformation de Fourier fractionnaire ". Thèse de doctorat, Université de Rouen, May2007.
- [41] S. Coëtmellec, "Application de la Transformation de Fourier Fractionnaire à la restitution numérique des hologrammes de particules", Thèse de doctorat, Université de Rouen, May 2002.
- [42] E. Cousin and Y. Torres, Implémentation digitale de la transformée de Fourier d'ordre fractionnaire, (A compléter).
- [43] H. M. Ozaktas and M. A. Kutay, D. Mendlovic, "Introduction to the Fractional Fourier Transform and its Applications", (A compléter).
- [44] H. M. Ozaktas, D. Mendlovic, "Fractional Fourier transform as a tool for analyzing beam propagation and spherical mirror resonators", Opt Lett, vol 19, no.21, pp. 1678-1680, (1994).