

N° d'ordre :14/2022-D/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIÈNE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES
Présentée pour l'obtention du grade de Docteur
en Mathématiques
Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

par

AOUDJIT Safia

Sujet :

**Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres
primoriels**

Soutenue publiquement, le 04/ 10 / 2022 devant le jury composé de :

M. REZAOUI Med Salem	Maître de conférence/A à l' USTHB	Président
M. BERKANE Djamel	Maître de conférence/A à l'Univ. Blida1	Directeur de thèse
M. LAISSAOUI Diffalah	Maître de conférence/A à l'Univ. Medea	Examineur
M. MECHIK Rachid	Maître de conférence/A à l'USTHB	Examineur
M. RAHMANI Mourad	Professeur à l' USTHB	Examineur
M. SADAOUI Boualem	Maître de conférence/A à l'Univ. Khemis	Examineur

Table des matières

Remerciements	iii
Notations	iv
Introduction	1
Abstract	8
1 Estimations explicites liées au $k^{\text{ème}}$ nombre premier	10
1.1 Généralités	11
1.1.1 Fonction arithmétique	11
1.1.2 Théorème des Nombres Premiers et conséquences	13
1.2 Motivation pour des résultats explicites	15
1.3 Nouvelles estimations explicites liées au k -ème nombre premier	17
2 Développement asymptotique pour la somme des inverses de la fonction de comptage des nombres primoriels	20
2.1 Préliminaire	21
2.2 Lemmes préparatoires	23
2.3 Démonstration du Théorème principal	25
2.4 Application à la fonction de comptage des primoriels	26
3 Bornes explicites pour la fonction qui compte les nombres primoriels	28
3.1 Encadrements sur des intervalles limités	29
3.2 Bornes supérieures	30

3.3	Bornes supérieures sous l'hypothèse de Riemann	32
3.4	Bornes inférieures	33
4	Une version effective d'une inégalité de Pósa	35
4.1	Inégalité de Pósa	36
4.2	Comparaisons explicites entre la fonction de comptage des premiers et celle des primoriels	38
4.3	Une version effective de l'inégalité de Pósa	40
5	Estimation des sommes sur les diviseurs premiers	43
5.1	Valeur du maximum de sommes sur les diviseurs premiers	44
5.2	Valeur du minimum de sommes sur les diviseurs premiers	47
6	Autour du critère de Robin pour l'hypothèse de Riemann	48
6.1	Nombre colossalement abondant	49
6.2	Introduction et exposé des résultats	49
6.3	Lemmes préliminaires	51
6.4	Démonstration du Théorème 6.1	54
6.5	Démonstration du Théorème 6.2	55
6.6	Eventuelle reformulation de RH	56
	Conclusions et perspectives	59

Remerciements

Je suis heureuse de pouvoir exprimer toute ma reconnaissance à mon Professeur et Directeur de thèse, Monsieur Djamel Berkane, pour m'avoir proposé ce thème de recherche et pour avoir patiemment dirigé mes travaux durant ces années. Sa disponibilité, son précieux aide scientifique, ses encouragements et son soutien moral, sans réserve, ont énormément contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie infiniment le professeur Mohammed Salem REZAOUI d'avoir bien voulu présider ce jury de thèse et de s'être intéressé à ce travail.

Je remercie aussi les Professeurs : Rachid MECHIK , Diffalah LAISSAOUI, Boualem SA-DAOUI, et Mourad RAHMANI pour s'être intéressé à ce travail et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie de mon Jury de soutenance.

Enfin, c'est avec une grande émotion que j'exprime ma profonde gratitude à ma famille, particulièrement mes chers parents, mon mari et mes frères et sœurs.

Notations

1. \mathbb{N} : L'ensemble des nombres entiers naturels.
2. \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.
3. $[a, b)$: Désigne l'ensemble des nombres réels x tel que $a \leq x < b$.
4. $:=$: L'égalité par définition (affectation).
5. p : Un nombre premier.
6. e : La constante de népère= $2.71 \dots$.
7. γ : La constante de Euler définie par :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

8. p_k : Le k ième nombre premier
9. N_k : Le nombre primoriel d'ordre ou d'indice k ,

$$N_k = \prod_{i=1}^{i=k} p_i$$

10. $P(n)$: La primorielle d'un nombre entier : $P(n) = n\#$.
11. $\theta(x)$: La première fonction de Chebyshev

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

12. $\psi(x)$: La deuxième fonction de Chebyshev

$$\psi(x) = \sum_{p^\mu \leq x} \log p$$

13. $\pi(x)$: La fonction qui compte les nombres premiers inférieurs ou égaux à x ,

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

14. $K(x)$: La fonction qui compte les nombres primoriels inférieurs ou égaux à x ,

$$K(x) = \sum_{N_k \leq x} 1$$

15. $\log x$: Le logarithme naturel.

16. $\log_i(x)$: Le i ième itéré du logarithme naturel, c'est-à-dire

$$\log_i(x) = \underbrace{\log \log \dots \log}_{i \text{ fois}}(x) \text{ et } \log_0(x) = x$$

17. $\text{li}(x)$: La fonction logarithme intégral

$$\begin{aligned} \text{li}(x) &= v.p \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right\} = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + \text{li}(2) \\ &= \frac{x}{\log x} \left(0! + \frac{1!}{\log x} + \dots + \frac{m!}{\log^m x} + O\left(\frac{1}{\log^{m+1} x}\right) \right) \end{aligned}$$

avec aussi : $\text{li}(2) = 1.04516$.

18. $\text{li}^{-1}(x)$: L'inverse de la fonction logarithme intégral.

19. $\text{Li}(x)$: La fonction d'écart logarithmique intégrale

$$\text{Li}(x) = \text{li}(x) - \text{li}(2)$$

20. $d(n)$: Le nombre de diviseurs de l'entier n .

21. $\sigma(n)$: La somme de diviseurs de l'entier n .

22. $\omega(n)$: Le nombre de diviseurs premiers de l'entier n .

23. $\varphi(n)$: Le nombre d'entiers inférieures et premiers avec l'entier n .

24. $\max(\dots)$: Le plus grand

25. $\min(\dots)$: Le plus petit

26. $\mathfrak{L}_f(q) := \sum_{p|q} f(p)$.

27. Pour une fonction réelle f , on a $o(f)$ et $O(f)$ désignent les notations de Vinogradov.

Introduction

«Le problème de la distinction entre nombres premiers et nombres composés, et celui de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers sont les plus importants et les plus utiles de toute l'arithmétique. [...]. L'honneur de la science semble exiger qu'on cultive avec zèle tout progrès dans la solution de ces élégantes et célèbres questions. »

Carl Friedrich GAUSS (1777 – 1855)

Lorsque l'homme a commencé à utiliser les nombres, il a créé la théorie des nombres. Cette branche des mathématiques qui étudiait les propriétés des nombres entiers s'est beaucoup développée. Il est parfois nécessaire de faire appel à des notions plus compliquées pour démontrer des résultats d'énoncés simples. L'une des notions les plus connues dans l'ensemble des nombres entiers est la propriété de primalité. Cette propriété peut s'étudier à partir du moment où la notion de multiple est acquise : un entier est premier s'il n'est multiple que du nombre 1 et de lui-même.

Euclide est le premier à avoir démontré qu'il existait une infinité de nombres premiers. En supposant qu'il existe un nombre fini : $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ de nombres premiers, Euclide utilise pour aboutir à la contradiction, la notion (sans la définir) de la primorielle du nombre p_k , définie par le produit $p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$.

En littérature, les primorielles sont construites comme les factorielles, mais en ne retenant que les nombres premiers successifs. Elle est notée $n\#$. Par exemple, la primorielle de 10 est $10\# = 7\# = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$. Ces nombres ont été ainsi nommés par le mathématicien Harvey Dubner [18].

Comme usuelle, soit $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Dans cette thèse, on s'intéresse aux primorielles des nombres premiers. Si p_k est le k ième nombre premier, on définit l'entier primoriel d'ordre (ou d'indice) k par :

$$N_k = p_k\# = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k.$$

Ces entiers sont les termes de la suite [A002110](#) dans *On-line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) [21], et jouent un rôle important en théorie des nombres depuis la démonstration d'Euclide de l'infinitude des nombres premiers aux remarquables équivalences à l'hypothèse de Riemann, à l'aide de fonctions arithmétiques, dues à Nicolas [32] et Robin [39]. Dans le chapitre 6 on est tenté aussi de formuler une éventuelle équivalence à l'hypothèse de Riemann, à l'aide de la fonction qui compte les nombres primoriels.

La liste suivante présente quelques nombres primoriels :

```

Primoriel(0) = 1
Primoriel(1) = 2
Primoriel(2) = 6
Primoriel(3) = 30
Primoriel(4) = 210
Primoriel(5) = 2310
Primoriel(6) = 30030
Primoriel(7) = 510510
Primoriel(8) = 9699690
Primoriel(9) = 223092870
Primoriel(10) possède 10 digits
Primoriel(100) possède 220 digits
Primoriel(1000) possède 3393 digits
Primoriel(10000) possède 45337 digits
Primoriel(100000) possède 563921 digits
Primoriel(1000000) possède 6722809 digits}

```

Les approximations liées aux N_k ont trouvé quelques applications inattendues dans divers domaines de la théorie des nombres ; voir par exemple les papiers de Betts [11], Planat et al. [31] et Zhang [44]. Cependant, les résultats les plus fréquemment utilisés concernent leur logarithme $\theta(p_k)$ où θ indique la première fonction de Chebyshev, ici nous citons les récents papiers de Axler [5] et Dusart [20].

Dans cette thèse, la question posée et se doit plus précise : il est évident qu'il existe une infinité de nombres primoriels, mais combien y en a-t-il parmi les entiers inférieurs à un nombre réel positif donné ? Pour cela introduisons la fonction $K(x)$ qui compte le nombre de

nombre premiers plus petits ou égaux à $x \geq 1$, c'est-à-dire :

$$K(x) = \sum_{N_k \leq x} 1.$$

Cette fonction $K(x)$ apparaît, souvent implicitement, comme une clé importante dans la démonstration de plusieurs résultats; voir, par exemple, Balazard [6] : dans son étude concernant quelques suite unimodales en théorie des nombres, et celui de Hassani [26] : dans son approximation d'une somme liée à la constante de Euler généralisée.

Cette fonction $K(x)$ est très proche de $\pi(x)$ (l'habituelle fonction de comptage des nombres premiers) puisqu'il sera montré dans le chapitre 4 que :

$$K(x) \simeq \pi(\log x).$$

Plus exactement, en utilisant des résultats moins précis que ceux employés par Balazard [6], on montre le résultat suivant donnant le développement asymptotique de $K(x)$:

Théorème 0.1 *Pour tout nombre réel $x \geq 2$ et tout entier $m \geq 0$, on a*

$$K(x) = \frac{\log x}{\log_2 x} \left(\sum_{j=0}^m \frac{j!}{\log_2^j x} + O\left(\frac{1}{\log_2^{m+1} x}\right) \right),$$

où

$$\log_i(x) = \underbrace{\log \log \dots \log}_{i \text{ fois}}(x) \text{ et } \log_0(x) = x$$

Ceci nous conduira directement aux travaux de Belbachir et Berkane [8] concernant leur étude des fonctions sommatoires qui possèdent un développement asymptotique lié aux itérés du logarithme, de la forme suivante :

$$\frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\log_{s+1}(n)} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_i}{\log_{s+1}^i(n)} + O\left(\frac{1}{\log_{s+1}^m(n)}\right) \right\}, \quad a_0 \neq 0, \quad s \geq 0.$$

où

$$\mathfrak{L}_s(x) := \prod_{i=0}^s \log_i(x).$$

Ainsi, dans le chapitre 2, on profitera de la formule asymptotique de $K(x)$ pour obtenir un développement asymptotique de la somme des inverses de la fonction $xK(x)$. On montre que :

Théorème 0.2 Pour tout nombre réel $x \geq 2$ et tout entier $m \geq 2$, on a

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{nK(n)} = \frac{1}{2} \log_2^2 x - \log_2 x - \log_3 x + C \\ + \frac{\delta_2}{\log_2 x} + \cdots + \frac{\delta_m}{(m-1) \log_2^{m-1} x} + O\left(\frac{1}{\log_2^m x}\right),$$

où C est une constante absolue, et $\{\delta_j\}_{j \geq 0}$ est la suite [A233824](#) dans OEIS [21] donnée par la relation de récurrence $\delta_n + 1!\delta_{n-1} + 2!\delta_{n-2} + \cdots + (n-1)!\delta_1 = n \cdot n!$.

Ensuite, Le chapitre 4 sera consacré à obtenir le maximum de bornes explicites du terme O , dans la formule asymptotique de $K(x)$, et les meilleurs qu'on a pu obtenir, sont

Théorème 0.3 On a, lorsque $x \geq 3$, l'inégalité suivante

$$K(x) \leq 1.3841 \frac{\log x}{\log_2 x}.$$

Théorème 0.4 On a, lorsque $x \geq 3$, l'inégalité suivante

$$K(x) \leq \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1.4575}{\log_2 x}\right).$$

Théorème 0.5 On a, lorsque $x \geq 3$, l'inégalité suivante

$$K(x) \leq \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{\log_2 x} + \frac{2.89726}{\log_2^2 x}\right).$$

et comme, minoration de $K(x)$, on montre que :

Théorème 0.6 On a, lorsque $x \geq 2310$

$$K(x) \geq \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{4 \log_2 x}\right).$$

De plus pour $x \geq 210$ on a

$$K(x) \geq \frac{\log x}{\log_2 x}.$$

Dans le même contexte, mais on se plaçant sous l'hypothèse de Riemann, on obtient aussi le théorème suivant

Théorème 0.7 Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a

$$K(x) \leq \text{li}(\log x) + 0.12\sqrt{\log x}, \quad \forall x \geq 42,$$

où li représente la fonction logarithme intégral.

Ces résultats explicites, spécialement le Théorème 0.6, viennent après quelques nouvelles estimations explicites liées au k -ème nombre premier et au k -ème nombre primoriel. On exposera ces résultats dans le chapitre 1, après un court historique concernant les estimations ultérieures. On cite ici le Lemme suivant :

Lemme 0.1 *Pour tout entier positif m , on a*

$$\prod_{k=1}^m N_k \leq N_{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Après ces étapes, on arrive au niveau de mettre cette fonction $K(x)$ en pratique. La première application est fournie dans le chapitre 4, ça concerne une très ancienne inégalité donnée par Pósa [36] (inspiré par la démonstration de l'infinitude des nombres premiers de Euclide) où il prouve que :

$$\forall n \geq 1, \exists k_n \geq 1, \forall k \geq k_n, N_k > p_{k+1}^n.$$

Etendre à des puissances de p_{k+1} et/ou rendre ce résultat effectif a été le but de plusieurs travaux, on cite ici, par exemple, les papiers de Berkane et Dusart [10], Iwata [28], Lázló [16] et récemment celui de Shichun [43]. Notre contribution est énoncée dans le théorème suivant :

Théorème 0.8 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un effectif réel $x_0(n) \geq 1$ tel que pour tous réels $x \geq x_0(n)$, on a*

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*, K(x) < k < \pi(\sqrt[n]{x})) \Rightarrow N_k > p_{k+1}^n.$$

de plus, si k vérifie $p_{k+1} \geq (\frac{5}{3})^n$, alors

$$\forall m \geq k, N_m > p_{m+1}^n.$$

Ce résultat est consolidé par un algorithme informatique en logiciel Maple 17, qui nous permettra de calculer pour tout $n \geq 1$, les k_n tels que $N_k > p_{k+1}^n$, pour tout k supérieur à k_n . Une table des premières valeurs de k_n est donnée à la fin du chapitre 4. Ce résultat effectif vient essentiellement des approximations ci-dessous, de l'équivalence $K(x) \simeq \pi(\log x)$

Lemme 0.2 *Pout tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel x_0 tel que*

$$\pi\left(\frac{\log x}{1 + \varepsilon}\right) \leq K(x)$$

pour tout $x \geq x_0$. En particulier, $\forall x \geq 1$ on a $\pi\left(\frac{\log x}{1.00000075}\right) \leq K(x)$.

et

Lemme 0.3 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel x_0 tel que*

$$\forall x \geq x_0, K(x) \leq \pi \left(\frac{\log x}{1 - \varepsilon} \right).$$

En particulier, pour $x \geq x_0$ on a

$$K(x) \leq \pi \left(\frac{\log x}{\log \alpha} \right),$$

pour les valeurs de la Table suivante :

α	1.7	2	2.1	2.2	2.5
x_0	3	32	3503	N_{11}	N_{50}

TABLE 1 – Quelques valeurs de x_0 .

La seconde application est une méthode permettant d'estimer le maximum des sommes sur les diviseurs premiers, des sommes de la forme :

$$\mathfrak{L}_f(q) = \sum_{p|q} f(p),$$

où f est une fonction décroissante et positive sur $(1, \infty)$, c'est-à-dire, on propose un moyen pour estimer la quantité suivante :

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}_f(q).$$

L'idée est exposée en montrant d'abord que

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}_f(q) = \mathfrak{L}_f(N_K) = \sum_{p \leq p_K} f(p).$$

où $K = K(x)$, puis, à travers le maximum des sommes

$$\mathfrak{L}(q) = \sum_{p|q} f(p),$$

lorsque $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$. On arrive à montrer le théorème suivant :

Théorème 0.9 *On a, lorsque $x \geq N_7$, l'inégalité suivante :*

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \leq \log K(x) + \log_2 K(x).$$

qui implique l'amélioration suivante d'un récent résultat de Hassani [26]

Corollaire 0.10 *On a, lorsque $x \geq 3$, l'inégalité suivante :*

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \leq \log_2 x + \frac{1.4575}{\log_2 x}.$$

La dernière application, qui s'avère plus intéressante (puisqu'elle est liée à la fameuse hypothèse de Riemann), est d'abord une nouvelle majoration plus fine du rapport $\frac{\sigma(n)}{n}$ que celle fournie par Robin [39], où $\sigma(n)$ représente la fonction somme de diviseurs de n . On obtient le théorème suivant :

Théorème 0.11 *Pour tout entier $n \geq 3$, on a*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \log_2 n + \frac{0.3741}{\log_2^2 n}.$$

L'idée utilisée nous conduira à examiner la conjecture suivante

Conjecture 0.1 *L'hypothèse de Riemann est équivalente à*

$$\forall n \geq 205, \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} \right).$$

On montre la condition suffisante et on propose seulement un heuristique pour la condition nécessaire.

Finalement, on pense qu'on a bien met en valeur la fonction $K(x)$ à travers une étude explicite de ses valeurs et surtout via les différentes applications qu'on a proposé en attendant d'autres horizons. Les résultats obtenus ont fait l'objet de deux articles publiés dans Notes on Number Theory and Discrete Mathematics [4] et Journal of Integer Sequences [3].

Abstract

This work is part of the field of analytic and probabilistic number theory, in relation to the distribution of prime numbers and the explicit estimate of the mean values of arithmetic functions. These are results concerning the function noted $K(x)$ that counts the number of primorial integers less than or equal to a given positive real number x . We obtained essentially, from a certain rank, the following explicit results :

$$\frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{4 \log_2 x} \right) \leq K(x) \leq \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{\log_2 x} + \frac{2.89726}{\log_2^2 x} \right),$$

and under the Riemann Hypothesis :

$$K(x) \leq \text{li}(\log x) + 0.12\sqrt{\log x},$$

where li is the logarithmic integral function. As first applications, we show that :

— For all integer $n \geq 1$, there exists $x_0(n) \geq 1$ such that for all $x \geq x_0(n)$,

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*, K(x) < k < \pi(\sqrt[n]{x})) \Rightarrow N_k > p_{k+1}^n.$$

Furthermore, if k verifies $p_{k+1} \geq (\frac{5}{3})^n$:

$$\forall m \geq k, N_m > p_{m+1}^n.$$

— For every positive decreasing function f on $(1, \infty)$, we have

$$\max_{1 < q \leq x} \sum_{p|q} f(p) = \mathfrak{L}_f(N_{K(x)}) = \sum_{p \leq p_{K(x)}} f(p).$$

In particular, we have

$$\max_{1 < q \leq x} \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1} \leq \log_2 x + \frac{1.4575}{\log_2 x}.$$

— In relation to Robin's criterion for the Riemann hypothesis, we have

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \log_2 n + \frac{0.3741}{\log_2^2 n},$$

where $\sigma(n)$ is the sum of the divisors of n , γ represents the Euler-Mascheroni constant. The idea employed will lead us to a possible new reformulation of the Riemann Hypothesis in terms of arithmetic functions. This leads us to examine the following conjecture : The Riemann Hypothesis is equivalent to

$$\forall n \geq 205, \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} \right).$$

We obtain the sufficient condition and we propose only a heuristic for the necessary condition.

Chapitre 1

Estimations explicites liées au $k^{\text{ème}}$ nombre premier

Résumé

Dans ce chapitre, nous donnons une synthèse des définitions et évaluations existantes concernant $\theta(p_k)$ et p_k qui serviront plus tard dans les chapitres qui suivent.

1.1 Généralités

1.1.1 Fonction arithmétique

En théorie des nombres, une fonction arithmétique est une fonction définie sur \mathbb{N}^* et à valeurs dans \mathbb{C} . C'est les fonctions qui utilisent les propriétés de division de l'entier donné. Les fonctions arithmétiques les plus étudiées sont :

- $\sigma(n)$: La somme de diviseurs de l'entier n .
- $d(n)$: le nombre de diviseurs de n .
- $\omega(n)$: Le nombre de diviseurs premiers de l'entier n .
- $\varphi(n)$: Le nombre d'entiers inférieures et premiers avec l'entier n .
- $\mu(n)$: fonction de mobius, définie par : $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n n'est pas un carré libre, et $\mu(n) = (-1)^k$ si $n = \prod_{i=1}^k p_i$.
- La fonction de Von Mangoldt, traditionnellement notée Λ , est définie par : $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^k$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon.

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction arithmétique. Alors :

- f est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si l'égalité $f(mn) = f(m)f(n)$ tient pour tous m, n premiers entre-eux.
- f est dite totalement multiplicative si $f(1) = 1$ et si l'égalité $f(mn) = f(m)f(n)$ tient plus généralement pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.
- f est dite additive si $f(1) = 0$ et si l'égalité $f(mn) = f(m) + f(n)$ tient pour tous m, n premiers entre-eux.

Etant données deux fonctions arithmétiques f et g , il est possible d'en construire une nouvelle ayant d'intéressantes propriétés : il s'agit de la convolution (de Dirichlet) des deux fonctions, la convolution de Dirichlet de f et g est la fonction arithmétique $f * g$ définie par :

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0,$$

où $\sum_{d|n}$ désigne la somme sur les diviseurs positifs d de n . Cette loi sur l'ensemble des fonctions arithmétiques est associative et commutative, et possède le neutre défini comme suit :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction arithmétique. Alors f possède un inverse pour la convolution $*$ si et seulement si $f(1) \neq 0$. De plus, si cet inverse existe, alors il est unique. L'inverse de la fonction arithmétique $f(n) = 1$, pour tout n , pour la convolution est la fonction μ de mûbius.

Étant donné une fonction arithmétique $f(n)$ dont on veut connaître l'allure générale pour les grandes valeurs de n , il est souvent plus commode d'étudier le comportement de

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)$$

cette dernière expression, appelée la fonction sommatoire de f , constitue une sorte de moyenne de la fonction f . C'est pourquoi si, pour une fonction f donnée, il existe une fonction $g : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) \sim g(x),$$

alors on dira que $g(x)$ est la valeur moyenne de f . Comme exemple récent d'évaluation explicite de fonctions sommatoires, on peut citer le papier de Berkane et al. [9] pour la fonction sommatoire de la fonction nombre de diviseurs, où ils montrent que :

$$\sum_{n \leq x} d(n) \leq x \ln x + (2\gamma - 1)x + 0.764x^{\frac{1}{3}} \log x, \quad \forall x \geq 5.$$

Toutefois, les fonctions sommatoires les plus étudiées sont :

La fonction qui compte les nombres premiers inférieurs à $x \geq 1$ est définie par :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

La première fonction θ de Chebyshev est définie pour $x > 0$ par :

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p)$$

La deuxième fonction ψ de Chebyshev est définie pour $x > 0$ par :

$$\psi(x) = \sum_{p^\alpha \leq x} \log(p)$$

Les fonctions θ et ψ sont liées par la relation

$$\psi(x) = \sum_{\alpha \leq \frac{\log x}{\log 2}} \theta(x^{\frac{1}{\alpha}})$$

La première fonction de Chebyshev est le logarithme de la primorielle de x , noté $x\#$:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p) = \log \prod_{p \leq x} p = \log x\#.$$

On prouve ainsi que le primoriel $x\#$ est asymptotiquement égal à $e^{(1+o(1))x}$, et avec le Théorème des Nombres Premiers, on peut déduire le comportement asymptotique de $p_n\#$.

1.1.2 Théorème des Nombres Premiers et conséquences

En 1792, Gauss a conjecturé que $\pi(x)$ est approximativement $\frac{x}{\log x}$. En 1896, Hadamard et de la Vallée-Poussin ont prouvé indépendamment la formule asymptotique

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x},$$

quand $x \rightarrow \infty$, connue sous le nom du Théorème des Nombres Premiers. En parallèle, l'étude a été reprise par Chebyshev qui montre en 1852 que

$$0.92 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1.11 \frac{x}{\log x}.$$

Soit p_n désigne le n -ième nombre premier. En conséquence du Théorème des Nombres Premiers, on obtient lorsque $n \rightarrow \infty$, l'expression asymptotique

$$p_n \sim n \log n$$

puisque $\pi(p_n) = n$. En 1902, Cipolla [15] a prouvé qu'il existait une unique suite de polynômes $T_1(x), \dots, T_m(x)$ à coefficients rationnels tels que $\deg(T_k) = k$ et qui vérifient :

$$p_n = n \left(\log n + \log_2 n - 1 + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1} T_k(\log_2 n)}{k \log^k n} \right) + O \left(\frac{n(\log_2 n)^{m+1}}{(\log n)^{m+1}} \right).$$

Les polynômes T_k peuvent être calculés explicitement. Les premières valeurs des polynômes $T_n(x)$ sont :

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x - 1, T_2(x) = x - 2, T_3(x) = -\frac{x^2 - 6x + 11}{2}.$$

Le calcul du n -ième nombre premier étant difficile pour n grand, nous nous intéressons aux estimations explicites pour p_n .

En 1938, J.Barkley Rosser [40] a montré que pour $n \geq 1$, on a

$$p_n > n \log n$$

et dans la littérature ce résultat est souvent appelé le Théorème de Rosser. Cette dernière estimation a été amélioré par Robin [38] :

$$n \geq 2, p_n > n(\log n + \log \log n - 1)$$

De plus, Rosser a montré que

$$p_n < n(\log n + \log \log n)$$

pour tout $n \geq 4$. En 1983, Robin [38] étudia explicitement les quantités $\theta(p_k)$ et p_k et montre que l'équivalence $\theta(p_k) \approx k \log k$ est plus faible que le Théorème des Nombres Premiers et que $\theta(p_k) > k \log k$ dès que $\theta(x) < ax$ pour x assez grand et ($a > 1$).

Les estimations de Robin [38] sont basées sur les théorèmes suivants :

Théorème 1.1 *Soit x un nombre réel strictement positif et k un entier naturel. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$
2. $\theta(x) \approx x$
3. $p_k \approx k \log k$
4. $\theta(p_k) \approx k(\log k + \log \log k + O(1))$

Théorème 1.2 *Les trois premières assertions suivantes sont équivalentes et entraînent la quatrième :*

1. $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$
2. $\theta(x) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$
3. $p_k = k(\log k + \log_2 k + O(1))$
4. $\theta(p_k) = k(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k}{\log k} + O(\frac{1}{\log k}))$

Théorème 1.3 *Les trois premières assertions suivantes sont équivalentes et entraînent la quatrième :*

1. $\pi(x) = \text{li}(x) + O(x^{1/2} \log x)$
2. $\theta(x) = x + O(x^{1/2} \log x)$
3. $p_k = \text{li}^{-1}(k) + O(k^{1/2} \log^{5/2} k)$
4. $\theta(p_k) = \text{li}^{-1}(k) + O(k^{1/2} \log^{3/2} k)$

Ainsi, on remarque que la suite $\log p_k$ possède le même développement asymptotique que sa moyenne de Cesàro $\frac{\theta(p_k)}{k}$, où les premiers termes sont :

$$\frac{\log N_k}{k} = \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} - \frac{\log_2^2 k - 6 \log_2 k + 11}{2 \log^2 k} + O\left(\frac{\log_2^3 k}{\log^3 k}\right).$$

1.2 Motivation pour des résultats explicites

En arithmétique, comme dans toute autre branche des mathématiques, les avancées proviennent essentiellement de résolutions de problèmes posés précédemment, parfois même plusieurs siècles auparavant, par des mathématiciens ayant une intuition géniale et/ou une grande expérience due à leurs recherches.

La preuve du Théorème des Nombres Premiers a dès le début posé le problème d'en obtenir une version explicite, alors que simultanément l'hypothèse de Riemann invitait beaucoup de chercheurs à calculer les premiers zéros de la fonction ζ de Riemann. Les premiers résultats entièrement explicites proviennent donc de ce champ, et hormis le calcul des zéros, il s'agit du calcul d'une région sans zéros pour ζ par de la Vallée-Poussin en 1899. Si les nombres premiers restent un sujet de prédilection dans ce type de problématique autour des années 1930, les techniques de la branche de la théorie analytique des nombres se sont rapidement complexifiées, ce qui a fait apparaître le problème de rendre complètement explicites des résultats devenus tous a priori asymptotiques.

Il est clair que de nombreux résultats dans la théorie des nombres, tels que la preuve de DE la Vallée Poussin du théorème des nombres premiers, sont énoncés avec l'utilisation de constantes implicites où l'on rencontre des qualificatifs tels que "suffisamment grands". Il y a, en effet, trois types de résultats que nous voyons dans la théorie des nombres :

1. Un résultat inefficace : montre qu'une assertion est vraie pour une constante C non spécifiée, mais on ne peut pas réellement déterminer la constante C en retravaillant la preuve et le suivi des termes d'erreur.
2. Un résultat effectif mais non explicite : montre qu'un énoncé est vrai pour une constante C non spécifiée avec le bonus que l'on pourrait effectivement déterminer une valeur appropriée pour C en retravaillant la preuve explicitement.
3. Un résultat explicite donne une valeur numérique pour C .

Cette thèse s'intéresse à l'établissement de résultats explicites dans la théorie des nombres premiers. Il est dit que dans ce domaine, on travaille souvent à travers la preuve originale d'un certain résultat tout en gardant les limites prudentes sur les termes d'erreur qui se posent. Cependant, dans certains cas, la preuve originale est inefficace et il faut donc d'abord proposer une nouvelle preuve efficace.

Dans un sens pur, certains énoncés en théorie des nombres peuvent sembler plus complets lorsqu'ils sont explicitement indiqués. Si l'on peut prouver, par exemple, que chaque entier suffisamment grand est doté d'une propriété d'intérêt, alors sûrement la prochaine étape pour renforcer un tel résultat, c'est supprimer la qualification d'être suffisamment grand.

Un obstacle immédiat à cela pourrait être que la preuve elle-même qu'elle est inefficace, ou que la preuve est trop difficile à faire soigneusement. Le goût personnel est clairement un facteur déterminant. Cependant, nous nous trouvons maintenant dans une ère où de tels résultats ne sont pas seulement plus faciles à obtenir, mais aussi plus précieux qu'auparavant.

Le domaine des méthodes explicites dans la théorie des nombres prend de l'élan dans le sillage du calcul à haute vitesse et un intérêt accru dans l'application des nombres premiers. Pour étoffer cette revendication avec un exemple, il est connu que certaines propriétés des nombres premiers nous permettent de construire des réseaux informatiques très efficaces. Cependant, si on sait seulement que ces propriétés tiennent pour des nombres premiers "suffisamment grands", alors on ne peut que garantir une connectivité élevée dans les réseaux avec un nombre "suffisant" d'ordinateurs. Il s'agit d'un obstacle à toute mesure d'assurance pratique. Un résultat explicite, d'autre part, nous permettra d'indiquer exactement comment détenir la propriété d'intérêt, et cela nous permet à son tour de construire de bons réseaux dans la pratique.

D'autres domaines des mathématiques, à certains moments, puiseront également sur les propriétés des nombres entiers, et donc le développement de résultats explicites dans la théorie des nombres trouve l'utilité dans la recherche de nature purement mathématique. Par exemple, un théoricien de groupe recherche des encadrements explicites sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe de symétrie de n lettre, il peut y parvenir par des moyens d'estimations explicites sur les nombres premiers.

Robin [38] et Dusart [19] ont obtenu des bornes totalement explicites pour p_k et $\theta(p_k)$, nous aurons rassemblé celles dont nous avons besoin dans le lemme suivant.

Lemme 1.1

$$\theta(p_k) > k \log k, \quad \forall k \geq 3, \tag{1.1}$$

$$\theta(p_k) \geq k(\log k + \log_2 k - a), \quad \forall k \geq 2, \text{ et } a = 1.0769, \tag{1.2}$$

$$\theta(p_k) \geq k(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2.1454}{\log k}), \quad \forall k \geq 3, \quad (1.3)$$

$$\theta(p_k) \leq k(\log k + \log_2 k - 0.9465), \quad \forall k \geq 14, \quad (1.4)$$

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - \frac{1}{2}), \quad \forall k \geq 20, \quad (1.5)$$

$$p_k \leq k \log p_k, \quad \forall k \geq 4. \quad (1.6)$$

On trouve aussi dans [10] des résultats explicites concernant $\pi(x)$ et $\theta(x)$:

Lemme 1.2 *Pour $x > x_k$, on a*

$$|\vartheta(x) - x| < \mu_k \frac{x}{\log^k x}, \quad \text{avec}$$

k	1	2	3	3
μ_k	0.001	0.05	0.78	0.68
x_k	908 994 923	122 568 683	158 822 621	$\exp(27.4)$

et

Lemme 1.3 *Pour $x \geq 2953652287$, on a*

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2.334}{\log^2 x} \right).$$

Pour $x > 110118914$, on a

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} + \frac{7.57}{\log^3 x} \right).$$

et encore

Lemme 1.4 *Pour tout réel $x \geq 3596143$, on a la borne inférieure suivante :*

$$\frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log^2 x} + \frac{5.2}{\log^3 x} \right) \leq \pi(x).$$

1.3 Nouvelles estimations explicites liées au k-ème nombre premier

Le lemme suivant donne directement une majoration de $\theta(p_{k+1})$ en fonction de k au lieu de $k+1$. Notons que $c = 1 - \log 2$ est une constante absolue.

Lemme 1.5 On a, pour $k \geq 2$:

$$\theta(p_{k+1}) \leq k \left(\log k + \log_2 k - c + \frac{\log_2 k + c}{\log k} \right). \quad (1.7)$$

Démonstration. De l'inégalité (1.5), en prenant le logarithme et en utilisant le fait que $\log(1+x) \leq x$ pour tout $x > 0$, nous obtenons facilement

$$\log p_k \leq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 0.5}{\log k}; \quad (1.8)$$

c'est valable même pour $k \geq 18$. En particulier, en remplaçant k par $2m-1$ et en utilisant l'inégalité $\log(2m-1) < \log(m) + \log(2)$, on obtient que pour tout $m \geq 2$:

$$\log p_{2m-1} \leq \log m + \log_2 m + \log 2 + \frac{\log_2 m + \log 2 - 0.5}{\log m} + \frac{\log 2}{\log^2 m}.$$

Puisque le membre droit est une fonction $M(m)$ strictement croissante, la somme de tout les $\log p_{2m-1}$ jusqu'à $k-1$ est bornée par $\int_2^k M(t)dt$, et on a

$$\sum_{m=1}^{k-1} \log p_{2m-1} \leq k \left(\log k + \log_2 k - c + \frac{\log_2 k + c}{\log k} \right) + D(k),$$

où

$$D(k) = \left(2 \log 2 - \frac{3}{2} \right) \text{li}(k) + \left(\frac{3}{2} - 2 \log 2 \right) \text{li}(2) - 3 \log 2 - 2 \log_2 2 + 4 - 2 \frac{\log_2 2}{\log 2} - \frac{2}{\log 2}.$$

Finalement, puisque la fonction $D(x)$ est négative pour $x \geq 11$, en appliquant le logarithme à l'inégalité obtenue dans le lemme 1.6 suivant, nous obtenons le résultat pour $k \geq 11$. Une vérification par ordinateur a été effectuée pour $2 \leq k \leq 11$. \square

Lemme 1.6 On a, pour $k \geq 11$:

$$N_{k+1} < \prod_{i=1}^{k-1} p_{2i-1}.$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur k . L'inégalité est vraie pour $k = 11$. Comme $k \geq 3$ implique $2k-1 \geq k+2$ et alors $p_{k+2} \leq p_{2k-1}$, le lemme suit du fait que

$$N_{k+2} < p_{k+2} \prod_{i=1}^{k-1} p_{2i-1} \leq \prod_{i=1}^k p_{2i-1}.$$

\square

Lemme 1.7 Pour tout $k \geq 1$, on a

$$p_{k+1} \leq \frac{5}{3}p_k,$$

et l'inégalité devient égalité pour $k = 2$.

Démonstration. Selon Dusart [?], l'intervalle $[x, x + \frac{x}{25 \log^2(x)}]$ contient au moins un nombre premier pour tout $x \geq 396738$. Comme 396833 est premier, on a que, pour

$$p_k \geq 396833 = p_{33609}$$

$$p_{k+1} \leq \left(1 + \frac{1}{25 \log^2(p_k)}\right)p_k < \frac{4001}{4000}p_k < \frac{5}{3}p_k.$$

Finalement, par ordinateur, la dernière inégalité est aussi vraie pour $2 \leq p_k \leq 396832$. \square

Lemme 1.8 Pour tout entier positif m , on a

$$\prod_{k=1}^m N_k \leq N_{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Démonstration. Posons $s := \sum_{k=1}^m k$. Nous voulons montrer que $\prod_{k=1}^m N_k$ est inférieur au nombre primoriel d'indice s . Cela est équivalent à

$$\sum_{k=1}^m \theta(p_k) \leq \theta(p_s).$$

D'après l'inégalité (1.2), on a

$$\begin{aligned} \theta(p_s) &\geq s(\log s + \log_2 s - a) \\ &\geq s \left(\log m + \log \left(\frac{m+1}{2} \right) + \log_2 m - a \right), \end{aligned}$$

qui implique pour $m \geq 14$ que

$$\theta(p_s) \geq s \left(\log m + \log_2 m + \log \frac{15}{2} - a \right). \quad (1.9)$$

D'un autre côté, d'après l'inégalité (1.4), il suit que pour $m \geq 14$:

$$\sum_{k=1}^m \theta(p_k) \leq s(\log m + \log_2 m - 0.9465) + \sum_{k=1}^{13} \theta(p_k). \quad (1.10)$$

Cependant, le terme gauche de la soustraction de l'inégalité (1.10) de l'inégalité (1.9) est une fonction décroissante en m , qui est déjà négative pour $m \geq 14$. En conséquence, notre inégalité est vraie lorsque $m \geq 14$. On examine à la main les valeurs $m \leq 13$ pour terminer la preuve. \square

Chapitre 2

Développement asymptotique pour la somme des inverses de la fonction de comptage des nombres primoriels

Résumé

Dans cette partie, on rappelle comment pour une certaine classe de fonctions arithmétiques liées aux itérés du logarithme, le développement asymptotique pour la somme de leurs inverses est calculé, ensuite on applique ce résultat sur la fonction de comptage des nombres primoriels.

2.1 Préliminaire

Soit $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers n'excédant pas x . En 1980, Jean-Marie De Koninck et Aleksandar Ivić [17] montrent que

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\pi(n)} = \frac{1}{2} \log^2(x) + O(\log(x)),$$

comme conséquence du théorème des nombres premiers.

En 2000, utilisant la formule asymptotique forte

$$\pi(x) = \frac{x}{\log(x)} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!}{\log^k(x)} + O\left(\frac{1}{\log^m(x)}\right) \right), \quad (2.1)$$

L. Panaitopol [34] prouve que

$$\frac{1}{\pi(x)} = \frac{1}{x} \left(\log(x) - 1 - \frac{k_1}{\log(x)} - \dots - \frac{k_m}{\log^m(x)} + O\left(\frac{1}{\log^{m+1}(x)}\right) \right),$$

où $m \geq 1$ et $\{k_j\}_j$ est une suite d'entiers naturels, donnée par la relation de récurrence suivante

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \dots + (n-1)!k_1 = n \cdot n!,$$

et en l'utilisant avec $m = 2$, il améliore le résultat de Koninck et Ivić à

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\pi(n)} = \frac{1}{2} \log^2(x) - \log(x) - \log \log x + O(1).$$

Deux ans après, A. Ivić [27] obtient encore

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\pi(n)} = \frac{1}{2} \log^2(x) - \log(x) - \log \log(x) + C + \frac{k_2}{\log(x)} + \dots + \frac{k_m}{(m-1) \log^{m-1}(x)} + O\left(\frac{1}{\log^m(x)}\right),$$

où C est une constante absolue, estimée récemment par Berkane et Dusart [10] où ils conjecturent que $C \approx 6.7$, grâce au théorème suivant

Théorème 2.1 *Pour tout réel $x \geq 150721071$, on a*

$$C_{lw} + \frac{6}{\sqrt[10]{\log^{11} x}} \leq \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\pi(n)} - \frac{1}{2} \log^2 x + \log x + \log_2 x \leq \frac{2}{\log x} + C_{up},$$

avec $C_{lw} = 6.68400420$ et $C_{up} = 6.78291066$.

En 2009, H. Belbachir et F. Bencherif [7] donne une formule asymptotique pour la somme des inverses d'une large classe de fonctions arithmétiques ayant le développement suivant

$$f(n) = \frac{n}{\log(n)} \left(a_0 + \frac{a_1}{\log(n)} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{\log^{m-1}(n)} + O\left(\frac{1}{\log^m(n)}\right) \right), \text{ avec } a_0 \neq 0,$$

ils obtiennent

$$\sum'_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{f(n)} = \frac{b_0}{2} \log^2(x) + b_1 \log(x) + b_2 \log \log(x) + C_0 - \frac{b_3}{\log(x)} - \cdots - \frac{b_{m+1}}{(m-1) \log^{m-1}(x)} + O\left(\frac{1}{\log^m(x)}\right),$$

où $\sum'_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{f(n)}$ est une somme restreinte aux entiers n , pour lesquels $f(n) \neq 0$; et $b_j = A_j(a_0, a_1, \dots, a_j)$ pour $0 \leq j \leq m+1$, avec

$$A_0(t_0) = \frac{1}{t_0},$$

$$A_1(t_0, t_1) = -\frac{t_1}{t_0^2},$$

$$A_n(t_0, t_1, \dots, t_n) = \frac{(-1)^n}{t_0^{n+1}} \cdot \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_n \\ t_0 & t_1 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ 0 & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_0 & t_1 \end{vmatrix}, \quad (n \geq 1).$$

Soit $s \geq 0$ un entier naturel. On définit la fonction

$$\mathfrak{L}_s(x) := \prod_{i=0}^s \log_i(x).$$

Pour $s = 2$, on par exemple :

$$\mathfrak{L}_2(x) = x \log(x) \log \log(x).$$

Soit f_s une fonction arithmétique admettant, pour tout $m \geq 1$, le développement asymptotique suivante

$$f_s(n) = \frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\log_{s+1}(n)} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_i}{\log_{s+1}^i(n)} + O\left(\frac{1}{\log_{s+1}^m(n)}\right) \right\}, \quad a_0 \neq 0. \quad (2.2)$$

Pour $s = 0$ et $a_i = i!$, on retrouve (2.1), qui correspond à $\pi(n)$.

En considérant le contexte ci-dessus, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Pour tous entiers naturels $m \geq 1$ et $s \geq 0$, on a*

$$\sum'_{n \leq x} \frac{1}{f_s(n)} = \frac{\delta_0}{2} \log_{s+1}^2(x) + \delta_1 \log_{s+1}(x) + \delta_2 \log_{s+2}(x) + C_s - \frac{\delta_3}{\log_{s+1}(x)} - \dots - \frac{\delta_{m+1}}{(m-1) \log_{s+1}^{m-1}(x)} + O\left(\frac{1}{\log_{s+1}^m(x)}\right),$$

où $\sum'_{n \leq x} \frac{1}{f_s(n)}$ est une somme restreinte aux entiers n , pour lesquels $e(s) < n \leq x$ et $f_s(n) \neq 0$, C_s est une constante absolue, $\{\delta_i\}_i$ est une suite d'entiers, donnée par la relation de récurrence suivante

$$a_0 \delta_n + a_1 \delta_{n-1} + \dots + a_n \delta_0 = 0, \quad a_0 \delta_0 = 1,$$

et $e(s) := \underbrace{\exp \exp \dots \exp}_{s \text{ fois}}(0)$.

Pour $a_i = i!$ et $s = 0$, on retrouve le résultat de A. Ivic [27].

2.2 Lemmes préparatoires

Soit $\{\delta_i\}_i$ une suite de nombres réels, définie en développant l'expression de la fonction rationnelle Λ . Pour $y > 0$ on considère

$$\Lambda(y) := \left(\sum_{i=0}^m \frac{a_i}{y^{i+1}} \right) \left(\sum_{i=0}^{m+1} \frac{\delta_i}{y^{i-1}} \right), \quad m \geq 1,$$

tel que $a_0 \delta_0 = 1$, et les coefficients des termes $\frac{1}{y^i}$, $1 \leq i \leq m$ s'annulent.

Alors, quand $y \rightarrow \infty$, on obtient

$$\Lambda = 1 + O\left(\frac{1}{y^{m+1}}\right) \tag{2.3}$$

Lemme 2.1 *Les coefficients δ_n , sont donnés par la relation*

$$\delta_n = \frac{1}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Démonstration. Suivant la définition de $\Lambda(y)$, on voit bien que le vecteur $\delta = (\delta_0, \dots, \delta_n)$, représente une solution du système linéaire triangulaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0\delta_n + a_1\delta_{n-1} + \dots + a_n\delta_0 = 0 \\ a_0\delta_{n-1} + \dots + a_{n-1}\delta_0 = 0 \\ \vdots \\ a_0\delta_1 + a_1\delta_0 = 0 \\ a_0\delta_0 = 1 \end{array} \right. .$$

Puisque a_0 est supposé non-nul, alors les δ_n sont déduits d'après les méthodes de résolutions des systèmes de Cramer. \square

Lemme 2.2 *Pour n suffisamment grand, on a*

$$f_s(n) = \frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\delta_0 \log_{s+1}(n) + \delta_1 + \varepsilon(n)},$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$.

Démonstration. D'abord, écrivons (2.2) comme

$$f_s(n) = \mathfrak{L}_s(n) \left(\sum_{j=0}^m \frac{a_j}{\log_{s+1}^{j+1}(n)} \right) + O\left(\frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\log_{s+1}^{m+2}(n)} \right), \quad (2.4)$$

donc il suit d'après (2.3) que

$$\sum_{j=0}^m \frac{a_j}{y^{j+1}} = \frac{1 + O\left(\frac{1}{y^{m+1}}\right)}{\delta_0 y + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\delta_j}{y^{j-1}}} = \frac{1}{\delta_0 y + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\delta_j}{y^{j-1}}} + O\left(\frac{1}{y^{m+2}}\right). \quad (2.5)$$

La substitution de $y = \log_{s+1}(n)$ dans (2.5) et la relation (2.4), donnent

$$\begin{aligned} f_s(n) &= \frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\delta_0 \log_{s+1}(n) + \delta_1 + \frac{\delta_2}{\log_{s+1}(n)} + \frac{\delta_3}{\log_{s+1}^2(n)} + \dots + \frac{\delta_{m+1}}{\log_{s+1}^m(n)}} \\ &+ O\left(\frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\log_{s+1}^{m+2}(n)} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Et ainsi, on déduit que

$$f_s(n) = \frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\delta_0 \log_{s+1}(n) + \delta_1 + \varepsilon(n)},$$

avec $\varepsilon(n) = O\left(\frac{1}{\log_{s+1}(n)}\right)$, dont il suit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$.

Le cas $s = 0$ et $a_i = i!$, donne l'approximation donnée par L. Panaitopol [34],

$$\pi(n) = \frac{n}{\log(n) - 1 - \varepsilon(n)}.$$

\square

2.3 Démonstration du Théorème principal

Démonstration. En simplifiant la formule (2.6), on peut écrire pour tout $m \geq 1$

$$f_s(n) = \frac{\mathfrak{L}_s(n)}{\delta_0 \log_{s+1}(n) + \delta_1 + \frac{\delta_2}{\log_{s+1}(n)} + \frac{\delta_3}{\log_{s+1}^2(n)} + \cdots + \frac{\delta_{m+1}(1+\varepsilon_m(n))}{\log_{s+1}^m(n)}},$$

avec

$$\varepsilon_m(n) \ll_m \frac{1}{\log_{s+1}(n)}.$$

Alors, pour tout $m \geq 1$ et tout $n \geq e(s)$, il vient

$$\frac{1}{f_s(n)} = \frac{1}{\mathfrak{L}_s(n)} \left(\delta_0 \log_{s+1}(n) + \delta_1 + \frac{\delta_2}{\log_{s+1}(n)} + \frac{\delta_3}{\log_{s+1}^2(n)} + \cdots + \frac{\delta_{m+1}(1+\varepsilon_m(n))}{\log_{s+1}^m(n)} \right),$$

et par sommation, on obtient,

$$\sum'_{n \leq x} \frac{1}{f_s(n)} = A_1 + A_2 + A_3 + \sum_{r=2}^m B_r + \sum_{e(s) < n \leq x} \frac{\delta_{m+1} \varepsilon_m(n)}{\mathfrak{L}_s(n) \log_{s+1}^m(n)}, \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{e(s) < n \leq x} \frac{\delta_0 \log_{s+1}(n)}{\mathfrak{L}_s(n)}, \\ A_2 &= \sum_{e(s) < n \leq x} \frac{\delta_1}{\mathfrak{L}_s(n)}, \\ A_3 &= \sum_{e(s) < n \leq x} \frac{\delta_2}{\mathfrak{L}_s(n) \log_{s+1}(n)}, \end{aligned}$$

et

$$B_r = \sum_{e(s) < n \leq x} \frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{L}_s(n) \log_{s+1}^r(n)}, \quad 2 \leq r \leq m.$$

Évaluons ces sommes. Premièrement, notons que les fonctions

$$\frac{\log_{s+1}(n)}{\mathfrak{L}_s(n)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathfrak{L}_s(n) \log_{s+1}^r(n)}, \quad 0 \leq r \leq m,$$

intervenant dans les sommes précédentes, sont toutes positives et décroissantes à partir d'une certaine constante réelle calculable $\omega \geq e(s)$.

Commençons avec A_1 . La formule de sommation d'Euler-MacLaurin, donne

$$\sum_{[\omega] < n \leq x} \frac{\log_{s+1}(n)}{\mathfrak{L}_s(n)} = \int_{[\omega]}^x \frac{\log_{s+1}(t)}{\mathfrak{L}_s(t)} dt + O\left(\frac{\log_{s+1}(x)}{\mathfrak{L}_s(x)}\right).$$

Ainsi, il existe une constante α_1 , qui inclut la somme $\sum_{n=2}^{[\omega]} \frac{\log_{s+1}(n)}{L_s(n)}$ telle que

$$A_1 = \frac{\delta_0}{2} \log_{s+1}^2(x) + \alpha_1 + O\left(\frac{\log_{s+1}(x)}{\mathfrak{L}_s(x)}\right).$$

En utilisant un argument similaire, on arrive aussi à

$$\begin{aligned} A_2 &= \delta_1 \log_{s+1}(x) + \alpha_2 + O\left(\frac{1}{\mathfrak{L}_s(x)}\right), \\ A_3 &= \delta_2 \log_{s+2}(x) + \alpha_3 + O\left(\frac{1}{\mathfrak{L}_s(x) \log_{s+1}(x)}\right), \\ B_r &= \frac{-\delta_{r+1}}{(r-1) \log_{s+1}^{r-1}(x)} + \beta_r + O\left(\frac{1}{\mathfrak{L}_s(x) \log_{s+1}^r(x)}\right). \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon_m(n)$ est borné et les series

$$\sum_{n > \varepsilon(s)} \frac{1}{\mathfrak{L}_s(n) \log_{s+1}^r(n)},$$

sont convergentes pour tout $r \geq 2$ (séries de Bertrand), avec des sommes notées S_m , on déduit que

$$\sum_{\varepsilon(s) < n \leq x} \frac{\delta_{m+1} \varepsilon_m(n)}{\mathfrak{L}_s(n) \log_{s+1}^m(n)} = S_m + O\left(\frac{1}{\log_{s+1}^m(x)}\right).$$

En rapportant ces expression dans (2.7), nous concluons que

$$\begin{aligned} \sum'_{n \leq x} \frac{1}{f_s(n)} &= \frac{\delta_0}{2} \log_{s+1}^2(x) + \delta_1 \log_{s+1}(x) + \delta_2 \log_{s+2}(x) \\ &\quad + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \sum_{r=2}^m \beta_r + S_m \\ &\quad - \frac{\delta_3}{\log_{s+1}(x)} - \dots - \frac{\delta_{m+1}}{(m-1) \log_{s+1}^{m-1}(x)} + O\left(\frac{1}{\log_{s+1}^m(x)}\right). \end{aligned}$$

En posant $C_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \sum_{r=2}^m \beta_r + S_m$, on trouve la formule mentionnée dans le Théorème principal. Cette dernière constante est indépendante de la valeur de m , car la différence entre deux développements de $\sum'_{n \leq x} \frac{1}{f_s(n)}$ est une quantité qui tend vers zéro, lorsque $x \rightarrow +\infty$. \square

2.4 Application à la fonction de comptage des primoriels

Montrons d'abord que la fonction $xK(x)$ possède un développement asymptotique similaire à 2.2.

La résolution en k de l'inégalité

$$p_1 p_2 \dots p_k \leq x,$$

donne la fonction $K(x) = K$, où

$$K = \max \{k \in \mathbb{N}^* \mid p_1 p_2 \dots p_k \leq x\},$$

et K est aussi défini par l'encadrement

$$\vartheta(p_K) \leq \log x < \vartheta(p_{K+1}),$$

avec $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$, désigne la première fonction de Chebyshev.

En utilisant, le Théorème des Nombres Premiers sous les formes

$$\vartheta(y) = y + O_\varepsilon \left(y \exp \left(-(\log y)^{\frac{3}{5}-\varepsilon} \right) \right) \quad (\varepsilon > 0),$$

et

$$\pi(y) = \text{li}(y) + O_\varepsilon \left(y \exp \left(-(\log y)^{\frac{3}{5}-\varepsilon} \right) \right) \quad (\varepsilon > 0),$$

obtient successivement, pour tout ε positif

$$p_K = \log x + O_\varepsilon \left(\log x \cdot \exp \left(-(\log_2 x)^{\frac{3}{5}-\varepsilon} \right) \right),$$

et

$$K(x) = \pi(p_K) = \text{li}(\log x) + O_\varepsilon \left(\log x \cdot \exp \left(-(\log_2 x)^{\frac{3}{5}-\varepsilon} \right) \right).$$

En particulier, pour tout entier m positif ou nul :

$$K(x) = \frac{\log(x)}{\log_2(x)} \left(\sum_{j=0}^m \frac{j!}{[\log_2(x)]^j} + O \left(\frac{1}{[\log_2(x)]^{m+1}} \right) \right),$$

puisque il est connu que la fonction $\text{li}(x)$ admet le développement asymptotique suivant :

$$\text{li}(x) = \frac{x}{\log x} \left(0! + \frac{1!}{\log x} + \dots + \frac{m!}{\log^m x} + O \left(\frac{1}{\log^{m+1} x} \right) \right)$$

Donc, on voit que la fonction $xK(x)$ possède un développement asymptotique similaire à celui décrit en (2.2), avec $s = 1$ et $a_i = i!$. On déduit, alors que

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{nK(n)} = \frac{1}{2} \log^2 \log(x) - \log_2(x) - \log_3(x) + C_{K(x)} + \frac{k_2}{\log_2(x)} + \dots + \frac{k_m}{(m-1) \log^{m-1} \log(x)} + O \left(\frac{1}{\log^m \log(x)} \right),$$

avec

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \dots + (n-1)!k_1 = n \cdot n! \quad , \quad k_1 = 1.$$

Chapitre 3

Bornes explicites pour la fonction qui compte les nombres primoriels

Résumé

Dans cette partie, on produit quelques encadrements explicites de la fonction qui compte les nombres primoriels.

3.1 Encadrements sur des intervalles limités

Commençons par étudier la fonction qui compte les nombres primoriels sur des intervalles limités, afin de les utilisées plus tard dans la vérification des résultats sur les petites valeurs qui restent.

On a le théorème suivant :

Théorème 3.1 (i) - Pour tout $1 < x \leq \exp(10^{19})$, on a $\pi(\log x) \leq K(x)$.

(ii) - Pour $2310 \leq x \leq \exp(10^{19})$, $\frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{4 \log_2 x}\right) \leq K(x)$.

(iii) - Pour $210 \leq x \leq \exp(10^{19})$, on a $\frac{\log x}{\log_2} \leq K(x)$.

Démonstration. Soit $0 < \log x \leq 10^{19}$. D'après Büthe [13], les nombres premiers p_k inférieurs à $\log x$ vérifient que

$$\theta(p_k) < p_k.$$

Donc, pour tout $1 < x \leq \exp(10^{19})$ on obtient successivement que :

$$\begin{aligned} \pi(\log x) &= \max \{k \in \mathbb{N}^*, p_k \leq \log x\} \\ &\leq \max \{k \in \mathbb{N}^*, \theta(p_k) \leq \log x\} = K(x). \end{aligned}$$

Les deux dernières bornes inférieures (i) et (ii) sont dérivées du premier résultat (i) conjugué avec les bornes inférieures de $\pi(x)$, à savoir :

$$\frac{x}{\log x} \leq \pi(x),$$

pour $x \geq 17$, et

$$\frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{1}{\log x}\right) \leq \pi(x),$$

pour $x \geq 599$. Les résultats finaux sont obtenus après vérification, à l'ordinateur, des petites valeurs. □

3.2 Bornes supérieures

Maintenant, en utilisant une méthode classique, donnons quelques bornes supérieures pour $K(x)$. Nous utiliserons les bornes de $\theta(p_k)$, essentiellement les formules (1.1) et (1.2), tout en profitant du fait que $K(x)$ est une fonction constante sur les intervalles $[N_k, N_{k+1})$.

Heureusement, avec le lemme suivant, on retrouve les estimations données par Robin [38] des grandes valeurs de $\omega(n)$.

Lemme 3.1 *Pour tout nombre réel $x \geq 1$, on a*

$$K(x) = \max_{1 \leq n \leq x} \omega(n).$$

De plus, si $K(x) = K$, alors pour tous entiers $n \leq x$ avec $\omega(n) = K$, on a $n \geq N_K$.

En d'autres termes, $N_{K(x)}$ est le plus petit entier inférieur à x et dont la décomposition en nombre premier est la plus longue. Ainsi, la suite $(K(n))_{n \geq 1}$ est la suite [A111972](#), indiquée dans OEIS [21].

Démonstration. Comme $N_k \leq n \leq x < N_{k+1}$ signifie que $\omega(n) \leq k$ et $K(n) = k$, on voit que $\omega(n) \leq K(n)$ sur tout intervalle $[N_k, N_{k+1})$, ce qui implique que

$$\max_{1 \leq n \leq x} \omega(n) = \max_{1 \leq n < N_{K+1}} \omega(n) = K.$$

Soit $q_1 q_2 \cdots q_K$ un entier inférieur à x tel que $q_1 < q_2 < \dots < q_K$ sont des nombres premiers. Pour $K = 1$ il est évident que $q_1 \geq p_1$. D'autre part, en supposant que $q_i \geq p_i$ pour $i < K$, il est nécessaire que $q_K \geq p_K$ sinon $q_K < q_{K-1}$. \square

Pour démontrer notre première borne supérieure, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2 *Pour tout grand nombre réel $A > 0$, si $\kappa(A)$ est une racine de l'équation $t \log t = A$, alors*

$$\kappa(A) = \frac{A}{\log A} (1 + o(1)),$$

de plus, pour $A > e$:

$$\frac{A}{\log A} < \kappa(A) \leq \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{A}{\log A}.$$

Démonstration. Voir Olver [33, Theorem 5.1, Ex. 5.7]. \square

Théorème 3.2 *On a, pour $x \geq N_{13}$:*

$$K(x) \leq \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{\log x}{\log_2 x},$$

et

$$K(x) \leq 1.3841 \frac{\log x}{\log_2 x}, \text{ pour } x \geq 3.$$

Démonstration. De l'inégalité (1.1), on déduit facilement que, pour $x \geq N_{13}$:

$$K(x) \leq \max \{k \in \mathbb{N}^*, k \log k \leq \log x\},$$

cependant, ce dernier ensemble n'est qu'une partie de l'ensemble des racines de l'inégalité $t \log t \leq \log x$. Alors, d'après le Lemme 3.2, on obtient bien que

$$K(x) \leq \kappa(\log x) \leq \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{\log x}{\log_2 x}, \quad \forall x \geq N_{13}.$$

Maintenant, comme la fonction $F_0(x) = \frac{K(x) \log_2 x}{\log x}$ est décroissante sur chaque intervalle $[N_k, N_{k+1})$ une fois $k \geq 3$, alors, une vérification sur ordinateur doit se faire que sur les primoriels N_k où $3 \leq k \leq 12$.

Cette vérification montre que le maximum est atteint sur N_9 et c'est aussi vraie pour tous les nombres réels $x < N_3$ avec $F_0(N_9) \leq 1.3841$, ce qui conclut la preuve. \square

Théorème 3.3 *On a, pour $x \geq 3$, l'inégalité*

$$K(x) \leq \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1.4575}{\log_2 x}\right).$$

Démonstration. Pour $x \geq 2$, on considère la fonction

$$F_1(x) = \frac{K(x)(\log_2 x)^2}{\log x} - \log_2 x.$$

La fonction F_1 est décroissante sur chaque intervalle $[N_k, N_{k+1})$ tant que $k \geq 5$, puisque $-\log_2 x$ est décroissante et la fonction

$$\frac{K(x)(\log_2 x)^2}{\log x}$$

décroit dès que $x \geq 1619$. Ainsi, F_1 atteint son maximum en un entier N_{k_0} où $k_0 \geq 5$.

Par contre, pour $k \geq 6$, en utilisant l'inégalité (1.2) et la décroissance de $\frac{(\log(x))^2}{x}$ valable pour $x \geq 8$ avec le fait que $\log(1+x) < x$ et $\frac{1}{1+x} \leq 1$, on obtient après un long développement que

$$F_1(N_k) = \frac{k(\log \theta(p_k))^2}{\theta(k)} - \log \theta(p_k) \leq G(k),$$

où

$$G(k) = a + \frac{\log_2 k - a}{\log k} + \frac{1}{\log k} \left(\frac{\log_2 k - a}{\log k}\right)^2 + \frac{2a}{\log k} \left(\frac{\log_2 k - a}{\log k}\right) + \frac{a^2}{\log k}.$$

La fonction G est décroissante et inférieure à 1.3832444 lorsque $k \geq \exp(\exp(a+1)) \simeq 2922$. Alors, $F_1(N_k) \leq 1.3833$ pour $k \geq 2922$.

Finalement, pour $5 \leq k \leq 2921$, on conclut par vérification par ordinateur sur les intervalles $[N_k, N_{k+1})$ que, le maximum de $F_1(x)$ est atteint en N_{47} avec $F_1(N_{47}) \leq 1.4575$ et notre borne supérieure est également valable pour $x < N_5$ comme voulu. \square

Avec les techniques utilisées ci-dessus, l'inégalité dans le théorème suivant nécessite une estimation plus étendue de $\theta(p_k)$. Néanmoins, pour ce dernier tour, nous utiliserons une forte relation entre $\pi(x)$ et $\theta(x)$ fournie par Robin [38], à savoir :

$$\forall x \geq 2, \quad \frac{\pi(x) \log \theta(x)}{\theta(x)} \leq 1 + \frac{1}{\log \theta(x)} + \frac{2.89726}{\log^2 \theta(x)}. \quad (3.1)$$

Théorème 3.4 *On a, pour $x \geq 3$, l'inégalité*

$$K(x) \leq \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{\log_2 x} + \frac{2.89726}{\log_2^2 x} \right).$$

Démonstration. De manière similaire, on examine $F_2(N_k)$ qui correspond à la fonction

$$F_2(x) = \frac{K(x)(\log_2 x)^3}{\log x} - (\log_2 x)^2 - \log_2 x, \quad \text{when } k \geq 10.$$

Comme $\pi(p_k) = K(N_k) = k$, la formule (3.1) garantit que

$$F_2(N_k) \leq 2.89726, \quad \forall k \geq 10$$

Donc, nous devons seulement vérifier que notre inégalité est valide pour $x < N_{10}$.

Pour $x \geq 863$, soit M la fonction strictement croissante qui apparaît sur le côté droit de notre borne supérieure. Une vérification par ordinateur sur les intervalles $[N_k, N_{k+1})$, avec $5 \leq k \leq 9$, montre que $M(x)$ est toujours supérieur à $K(x)$, par une différence d'au moins 1.5. Les calculs montrent également que la borne supérieure est vraie pour $x < N_5$, ce qui conclut la démonstration. \square

3.3 Bornes supérieures sous l'hypothèse de Riemann

Théorème 3.5 *Sous l'hypothèse de Riemann, on a*

$$K(x) \leq \text{li}(\log x) + 0.12\sqrt{\log x}, \quad \forall x \geq 42, \quad (3.2)$$

où li est la fonction logarithme intégral.

Démonstration. D'après Robin [38], pour $k \geq 5$, on a

$$\theta(p_k) > \text{li}^{-1}(k) - 0.12\sqrt{k \log^3 k},$$

et comme $\text{li}(x)$ est une fonction croissante, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} k &\leq \text{li}(\theta(p_k)) + \int_{\theta(p_k)}^{\theta(p_k)+0.12\sqrt{k \log^3 k}} \frac{dx}{\log x} \\ &\leq \text{li}(\theta(p_k)) + 0.12 \frac{\sqrt{k \log^3 k}}{\log \theta(p_k)}. \end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité (1.1), on aboutit à

$$k \leq \text{li}(\theta(p_k)) + 0.12 \frac{\sqrt{\theta(p_k)} \log k}{\log \theta(p_k)} \leq \text{li}(\theta(p_k)) + 0.12\sqrt{\theta(p_k)}, \quad \forall k \geq 5,$$

qui est équivalent à

$$K(N_k) \leq \text{li}(\log N_k) + 0.12\sqrt{\log N_k}, \quad \forall k \geq 5.$$

Simplement, le terme de membre de droite est une fonction croissante en k , qui donne que

$$K(x) \leq \text{li}(\log x) + 0.12\sqrt{\log x}, \quad \forall x \geq N_5.$$

Finalement, avec vérification par ordinateur, nous étendons le résultat pour $x \geq 42$. □

3.4 Bornes inférieures

Théorème 3.6 *On a, pour $x \geq 2310$*

$$K(x) \geq \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{4 \log_2 x} \right).$$

De plus, pour $x \geq 210$

$$K(x) \geq \frac{\log x}{\log_2 x}.$$

Démonstration. Soit

$$\kappa(x) = \frac{\log x}{\log_2 x} \left(1 + \frac{1}{4 \log_2 x} \right) \quad \text{et} \quad f_a(x) = k(\log k + \log_2 k - a).$$

Comme la fonction $\frac{\log_2 x - c}{\log x}$ est décroissante pour $x \geq 8$, l'inégalité (1.7) implique que

$$\theta(p_{k+1}) \leq f(k) = k(\log k + \log_2 k - c + 0.006389), \quad \text{pour } x \geq 10^{500}.$$

Donc, pour $x \geq 10^{500}$, la fonction $K(x)$ est plus grand que le minimum de l'ensemble des entiers positifs solutions de l'inégalité $f_a(k) > \log x$, ou $a = c - 0.006389 \leq 0.30046382$.

Maintenant, montrons que la fonction $\kappa(x) = \frac{\log x}{\log_2 x} (1 + \frac{1}{4 \log_2 x})$ n'est pas dans l'ensemble décrit ci-dessus. En effet, pour $x \geq 10^{500}$

$$\begin{aligned} \log \kappa(x) &\leq \log_2 x - \log_3 x + \frac{0.25}{\log_2 x}, \quad \log_2 \kappa(x) \leq \log_3 x, \\ \log \kappa(x) + \log_2 \kappa(x) &\leq \log_2 x + \frac{0.25}{\log_2 x} \leq \log_2 x + \frac{0.25}{\log_2 x}, \end{aligned}$$

donc, nous obtenons

$$f_a(\kappa(x)) \leq \log x \left(1 + \frac{1}{4 \log_2 x}\right) \left(1 + \frac{1}{4 \log_2^2 x} - \frac{a}{\log_2 x}\right) < \log x.$$

Supposons à présent que $f(k) > \log x$. Alors $x \rightarrow \infty$ implique $k \rightarrow \infty$, puisque f est borné sur tout sous ensemble borné de l'ensemble de tous les entiers positifs. Par conséquent, pour $x \geq 10^{500}$, on a $f(k) \leq f_a(k)$ et, puisque $f_a(k)$ est croissante sur k , nous avons aussi $f_a(k) \leq f_a(\kappa(x))$ si $k < \kappa(x)$, tel que

$$f(k) \leq f_a(k) \leq f_a(\kappa(x)) < \log x,$$

qui signifie que, si $x \geq 10^{500}$ et $f(k) \geq \log x$, alors $k \geq \kappa(x)$ et donc $K(x) \geq \kappa(x)$.

Pour les valeurs de $x < 10^{500}$, on utilise le Théorème 3.1 puisque $10^{500} < \exp 10^{19}$. La dernière borne inférieure est en partie due au fait que

$$\frac{\log x}{4 \log_2^2 x} \geq 1,$$

lorsque $x \geq 1.7 \cdot 10^{30}$ et encore au Théorème 3.1-(iii). □

Chapitre 4

Une version effective d'une inégalité de Pósa

Résumé

Dans cette partie, on examine explicitement l'équivalence $\pi(\log x) \simeq K(x)$, pour en déduire ensuite une version effective d'une inégalité connue par l'inégalité de Pósa.

4.1 Inégalité de Pósa

L'inégalité de Pósa est énoncée dans le Théorème suivant

Théorème 4.1 (Pósa) *Pour tout entier $k > 1$, il existe un entier $n_k \geq 1$ tel que*

$$p_{n+1}^k < p_1 p_2 \cdots p_n$$

pour tout $n > n_k$.

Ce résultat offre une comparaison entre le nombre primoriel N_k et le plus petit nombre premier p_{k+1} qui ne figure pas dans sa décomposition. L'origine de ce résultat est la démonstration de l'infinitude des nombres premiers de Euclide, et spécialement aux inégalités de Bonse [37].

En 1907, Bonse a prouvé deux inégalités intéressantes qui indiquent que :

$$\prod_{i=1}^n p_i > p_{n+1}^2, \quad \forall n \geq 4,$$

et pour tout $n \geq 5$:

$$\prod_{i=1}^n p_i > p_{n+1}^3.$$

Ensuite, l'inégalité de Pósa a lancée un grand nombre de travaux. En 2007, Betts [11] a obtenu l'inégalité suivante

$$p_{k+1} - p_k < p_k \frac{(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})}{p_{k+1} - p_k}.$$

En 1962, Mamangakis a montré que pour tout $n \geq 11$,

$$\prod_{i=1}^n p_i > p_{4n}$$

et pour $n \geq 46$,

$$\prod_{i=1}^{4n-9} p_i > p_{4n}^4$$

En 1971, Reich [33] a montré que pour tout entier naturel k , il existe un entier naturel $N(k)$ tel que :

$$\prod_{i=1}^n p_i > p_{n+k}^2$$

pour tout $n \geq N(k)$.

En 1988, Sandor [42] a montré que pour $n \geq 3$

$$\prod_{i=1}^n p_i \geq \prod_{i=1}^{n-1} p_i + p_n + p_{p_n-2}$$

et pour $n \geq 24$,

$$\prod_{i=1}^n p_i \geq p_{n+5}^2 + p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^2$$

et pour $n \geq 63$

$$\prod_{i=1}^n p_i \geq p_{n+3}^3 + p_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}^6$$

En 2000, en utilisant les estimations de Rosser et de Schoenfeld [40], Panaitopol [34] a montré que

$$\prod_{i=1}^n p_i > p_{n+1}^{n-\pi(n)}$$

pour tout $n \geq 2$, où $\pi(n)$ la fonction qui compte les nombres premiers. Il a aussi déduit les nouvelles inégalités suivantes : pour r entier, $r \geq 20$, on a

$$p_{r+1}^{r-\pi(r)} > 2^{p_r+1}$$

et pour $1 \leq r < 20$,

$$p_{r+1}^{r-\pi(r)} < 2^{p_r+1}$$

pour les entiers $r \geq 10$,

$$\prod_{i=1}^r p_i > 2^{p_r+1}$$

Pour les entiers $0 < r < 10$ avec $r \neq 8$

$$\prod_{i=1}^r p_i < 2^{p_r+1}$$

En 2006, Hassani [25] a montré que

$$\prod_{i=1}^n p_i > p_{n+1}^{(1-\frac{1}{\log n})(n-\pi(n))}$$

pour $n \geq 101$.

Ce qui montre qu'un grand nombre de chercheurs s'intéressent aux inégalités liées aux nombres primoriels et préfère encore plus que ces inégalités soient effectives.

4.2 Comparaisons explicites entre la fonction de comptage des premiers et celle des primoriels

Nous commençons par donner des formulations explicites de l'équivalence

$$K(x) \approx \pi(\log x)$$

Lemme 4.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel x_0 tel que*

$$\pi\left(\frac{\log x}{1 + \varepsilon}\right) \leq K(x)$$

pour tout $x \geq x_0$. En particulier, $\forall x \geq 1$ nous avons $\pi\left(\frac{\log x}{1.00000075}\right) \leq K(x)$.

Démonstration. Premièrement, une forme du théorème des nombres premiers affirme qu'il existe une suite décroissante vers zéro de nombres réels positifs $(\delta_n)_{n \geq 0}$ et une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que $|\theta(x) - x| < \delta_n x$ pour tout $x \geq u_n$. Ce qui implique que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que $|\theta(x) - x| < \varepsilon x$ pour tout $x \geq u_{n_0}$.

Donc, pour un ε donné

$$\theta(x) < (1 + \varepsilon)x$$

et on a successivement :

$$\begin{aligned} K(x) &= \max \{k \in \mathbb{N}^*, N_k \leq x\} = \max \{k \in \mathbb{N}^*, \theta(p_k) \leq \log x\} \\ &\geq \max \{k \in \mathbb{N}^*, p_k \geq u_{n_0}, (1 + \varepsilon)p_k \leq \log x\} \\ &\geq \max \{k \in \mathbb{N}^*, (1 + \varepsilon)p_k \leq \log x\}. \end{aligned}$$

Cependant, le maximum dans la dernière inégalité est juste

$$\pi(\log x / (1 + \varepsilon)).$$

En particulier, d'après Platt and Trudgian [35], nous avons $\theta(x) < 1.00000075x$ pour tout $x > 0$. Alors, pour tout $x \geq 8$ et ensuite par ordinateur pour $x \geq 1$, on en déduit que

$$K(x) \geq \pi\left(\frac{\log x}{1.00000075}\right).$$

□

Lemme 4.2 Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel x_0 te que

$$\forall x \geq x_0, K(x) \leq \pi \left(\frac{\log x}{1 - \varepsilon} \right).$$

En particulier, pour $x \geq x_0$ on a

$$K(x) \leq \pi \left(\frac{\log x}{\log \alpha} \right),$$

pour les valeurs dans table 4.1.

α	1.7	2	2.1	2.2	2.5
x_0	3	32	3503	N_{11}	N_{50}

TABLE 4.1 – Quelques valeurs de x_0 .

Démonstration. De manière similaire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ te que $|\theta(x) - x| < \varepsilon x$ pour tout $x \geq u_{n_0}$. Donc, pour ε donné on a

$$\theta(x) > (1 - \varepsilon)x$$

ce qui implique aisément que

$$\begin{aligned} K(x) &\leq \max \{k \in \mathbb{N}^*, p_k \geq u_{n_0}, (1 - \varepsilon)p_k \leq \log x\} \\ &\leq \max \{k \in \mathbb{N}^*, (1 - \varepsilon)p_k \leq \log x\}. \end{aligned}$$

Cependant, le maximum dans la dernière inégalité est juste

$$\pi(\log x / (1 - \varepsilon)).$$

Pour les bornes effectives supérieures, l'idée est de regarder les meilleures valeurs pratiques de $\alpha > 1$ et $k_0(\alpha)$ tels que

$$N_{k_0} > \alpha^{p_{k_0}}$$

car cela induit comme résultat que $K(x)$ n'est pas supérieur à $\pi(\log x / \log \alpha)$ pour tout $x \geq N_{k_0}$.

En utilisant l'inégalité (1.3) combinée avec l'inégalité (1.8), le problème se réduit à trouver $\alpha > 1$ et k_0 tels que

$$\left(\log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k}{\log k} \right) (1 - \log \alpha) \geq 1 + \frac{2.1454}{\log k} - \frac{0.5 \log \alpha}{\log k}, \forall k \geq k_0.$$

A partir d'un certain $k_0(\alpha)$, la fonction de droite est plus grande que celle de gauche tant que $1 < \alpha < e$. Après vérification des petites valeurs, nous obtenons les résultats dans le tableau 4.2.

α	1.7	2	2.1	2.2	2.5
k_0	2	4	6	11	50

TABLE 4.2 – Quelques valeurs de k_0 .

Les valeurs de x_0 données dans le tableau 4.1 sont les minimums possibles sauf pour $\alpha = 2.2$ et $\alpha = 2.5$, où les calculs ont montré que $K(x)$ est plus petit que $\pi(\log x / \log \alpha)$ pour $x = N_{10}$ et $x = N_{49}$. \square

4.3 Une version effective de l'inégalité de Pósa

Par une méthode élémentaire, la dernière proposition de la section précédente permet d'obtenir une version effective de l'inégalité prouvée par Pósa [36].

Théorème 4.2 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_0(n) \geq 1$ tel que pour tout $x \geq x_0(n)$,*

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*, K(x) < k < \pi(\sqrt[n]{x})) \Rightarrow N_k > p_{k+1}^n.$$

De plus, si k vérifie $p_{k+1} \geq (\frac{5}{3})^n$:

$$\forall m \geq k, N_m > p_{m+1}^n.$$

Démonstration. Pour $n \geq 1$ et

$$x_0(n) = \frac{n^{2n}}{(\log 1.7)^{2n}}$$

on peut montrer facilement que

$$\frac{\log x}{\log 1.7} \leq \sqrt[n]{x}$$

est vraie tant que $x \geq x_0(n)$. Donc, nous obtenons que $N_k > x \geq p_{k+1}^n$ pour tout k qui satisfait l'inégalité

$$K(x) < k < \pi(\sqrt[n]{x}), \quad x \geq x_0(n).$$

De plus, si k remplit les inégalités précédentes avec $p_{k+1} \geq (5/3)^n$, cela implique par récurrence sur k que $N_m > p_{m+1}^n$ pour tout $m > k$.

En effet, d'après le Lemme 1.7, on a

$$p_{m+2}^n \leq (5/3)^n p_{m+1}^n < (5/3)^n N_m \leq p_{m+1} N_m = N_{m+1}$$

En pratique, en utilisant l'algorithme en Maple ci-dessous, les calculs des valeurs de k_n listées dans la Table 4.2, montrent que le premier choix $x_0(n)$ pour $n \leq 30$ est suffisant.

```
// Algorithm1 Computation of K(x).
```

```
restart; with(numtheory);
K := proc (L) local s, k;
s := 2; for k from 2 do
if s <= L then s := s*ithprime(k)
else return k-2 end
if end do end proc
```

```
// Algorithm2 Computation of kn.
```

```
posa := proc (n) local x0, x, k, R, m, s, i, t;
x0 := floor((n/ln(1.7))^(4*n)); R := (5/3)^n;
for x from x0 to x0+5 do
for k from K(x)+1 to pi(floor(x^(1/n)))-1 do
if R <= ithprime(k+1) then m := k end if end do
end do; for s to m do
if ithprime(s+1)^n < product(ithprime(i), i = 1 .. s) then t := s;
return t end if
end do end proc
```

□

Dans le tableau 4.3 suivant, nous donnons les valeurs de $K(10^n)$ et les termes de la suite

$$k_n = \min\{k, p_1 \cdots p_k > p_{k+1}^n\}$$

pour $n \leq 30$.

n	$K(10^n)$	k_n	n	$K(10^n)$	k_n	n	$K(10^n)$	k_n
1	2	2	11	10	16	21	16	29
2	3	4	12	11	18	22	17	30
3	4	5	13	12	19	23	17	32
4	5	7	14	12	20	24	18	33
5	6	8	15	13	21	25	19	34
6	7	10	16	13	23	26	19	35
7	8	11	17	14	24	27	20	36
8	8	13	18	15	25	28	20	38
9	9	14	19	15	26	29	21	39
10	10	15	20	16	28	30	21	40

TABLE 4.3 – quelques valeurs de $K(10^n)$ et $k_n = \min\{k, p_1 \cdots p_k > p_{k+1}^n\}$.

nous pouvons aussi donner $K(10^{40}) = 26$, $K(10^{50}) = 31$, $K(10^{60}) = 36$, $K(10^{100}) = 53$, $K(10^{200}) = 92$, $K(10^{300}) = 128$, $K(10^{10^3}) = 350$ and, $K(10^{10^4}) = 2584$.

Nous retrouvons ainsi les résultats d'Euclide : $N_k > p_{k+1}$ for $k \geq 1$ et ceux de Bonse [37] : $N_k > p_{k+1}^2$ for $k \geq 4$ et $N_k > p_{k+1}^3$ pour $k \geq 5$. La suite $(k_n)_{n \geq 1}$ est en fait la suite réportoriée [A056127](#) dans OEIS [21].

Chapitre 5

Estimation des sommes sur les diviseurs premiers

Résumé

Dans cette partie, on produit quelques encadrements explicites de la fonction qui compte les nombres primoriels.

5.1 Valeur du maximum de sommes sur les diviseurs premiers

Les sommes sur les nombres premiers et leurs évaluations sont l'une des principaux sujets de la théorie multiplicative des nombres . A travers un cas particulier, il s'agit dans cette section de donner une idée permettant d'estimer la valeur maximale de la somme de type :

$$\mathfrak{L}_f(q) = \sum_{p|q} f(p),$$

pour une fonction f décroissante et positive sur $(1, \infty)$, lorsque q parcourt tous les entiers q ne dépassant pas x .

Ce type de somme apparaît sans estimation dans plusieurs articles, comme dans les travaux de Gordon et Rogers [22] où ils dérivent des formes raffinées des sommes de la fonction nombre de diviseur ; et dans les travaux de Lehmer [30] où il a étudié une généralisation de la constante d'Euler.

Notre idée peut se résumer comme suit. Comme f est une fonction décroissante et positive, alors :

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}_f(q)$$

est atteint sur le plus petit entier $q(x)$ inférieur à x et parmi ceux ayant la plus longue décomposition en nombres premiers. Cependant, d'après le lemme 3.1, on peut clairement spécifier que ce $q(x)$ n'est rien d'autre que : $N_{K(x)}$.

Finalement, pour un réel donné $x \geq 1$, si $K(x) = K$, on en déduit ce qui suit. Pour toute fonction décroissante et positive f sur $(1, \infty)$ on a

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}_f(q) = \mathfrak{L}_f(N_K) = \sum_{p \leq p_K} f(p).$$

En particulier, il existe une approximation de la valeur maximale de la somme :

$$\mathfrak{L}(q) = \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1}.$$

Pour une constante C , Hassani [26] a montré le résultat suivant

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \leq \log_2 x + C \text{ et } \mathfrak{L}(q) \geq \frac{\log q}{q-1} \text{ pour } q \geq 2.$$

Nous proposons les améliorations suivantes :

Théorème 5.1 *On a, pour $x \geq N_7$, l'inégalité*

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \leq \log K(x) + \log_2 K(x).$$

Démonstration. Comme dans Hassani [26], nous commençons l'estimation du maximum comme suit :

$$\begin{aligned} \max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) &= \sum_{p \leq p_K} \frac{\log p}{p} + \sum_{p > p_K} \frac{\log p}{p(p-1)} \\ &= \sum_{p \leq p_K} \frac{\log p}{p} + \sum_{p > 1} \frac{\log p}{p(p-1)} - \sum_{p > p_K} \frac{\log p}{p(p-1)}. \end{aligned}$$

Cependant, Rosser and Shoenfeld [41] ont prouvé que :

$$\forall t \geq 32, \sum_{p \leq t} \frac{\log p}{p} \leq \log t + E + \frac{1}{\log t} \text{ and } \sum_{p > 1} \frac{\log p}{p(p-1)} + E \approx -0.58.$$

Alors, en rappelant que

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k),$$

une fois que $k \geq 6$, on déduit que $K \geq 331$ ($p_K \geq 32$ et $\log_2 K / \log K < 0.3$) ce qui conduit après vérification à la main pour $K \geq 7$ que

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq p_K} \frac{\log p}{p} + \sum_{p > 1} \frac{\log p}{p(p-1)} &\leq \log K + \log_2 K + \frac{\log_2 K}{\log K} + \frac{1}{\log p_{12}} - 0.58 \\ &\leq \log K + \log_2 K. \end{aligned}$$

Donc, pour $x \geq N_7$, nous obtenons

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \leq \log K(x) + \log_2 K(x). \quad (5.1)$$

Enfin, une vérification par ordinateur montre que l'inégalité 5.1 n'est pas vraie pour les entiers plus petits que N_7 . \square

Corollaire 5.2 *On a, pour $x \geq 3$, l'inégalité*

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \leq \log_2 x + \frac{1.4575}{\log_2 x}.$$

Démonstration. En utilisant les bornes supérieures de théorème 3.3, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \log K(x) &\leq \log_2 x - \log_3 x + \frac{1.4575}{\log_2 x} \\ \log_2 K(x) &\leq \log_3 x + \log\left(1 - \frac{\log_3 x}{\log_2 x} + \frac{1.4575}{\log_2^2 x}\right) \\ \log K(x) + \log_2 K(x) &\leq \log_2 x + \frac{1.4575}{\log_2 x}, \quad x \geq 2219. \end{aligned}$$

En combinant cela avec l'inégalité (5.1), cela donne le résultat pour $x \geq N_7$. Nous concluons la preuve à l'aide d'une vérification par ordinateur sur les petites valeurs. \square

Corollaire 5.3 *On a, pour $x \geq 43$, l'inégalité*

$$\max_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \leq \log_2 x + \log(1.3841).$$

Démonstration. Avec le même procédé utilisé dans la preuve précédente, mais en utilisant la deuxième borne supérieure du théorème 6.1, nous obtenons, pour $x \geq 3$

$$\log K(x) \leq \log_2 x - \log_3 x + \log(1.3841).$$

Et comme $K(x) \leq \log x$ par définition, nous obtenons que

$$\log_2 K(x) \leq \log_3 x.$$

Donc, en utilisant (5.1) on a le résultat pour $x \geq N_7$; ensuite par vérification par ordinateur on obtient le résultat pour $x \geq 43$. \square

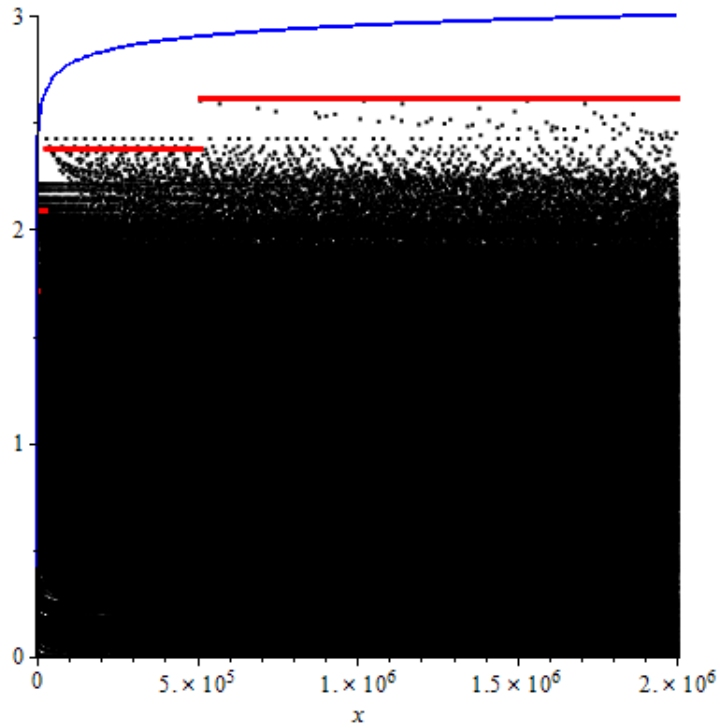


FIGURE 5.1 – Graphe des points $(q, \mathfrak{L}(q))$ pour $1 \leq q \leq 2 \cdot 10^6$. La majoration du Théorème 5.1 (resp., Corollaire 5.3) est montré en rouge (resp., en bleu).

5.2 Valeur du minimum de sommes sur les diviseurs premiers

Soit $l(x) = \frac{\log x}{x-1}$. Concernant

$$\min_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q),$$

nous obtenons l'inégalité optimale suivante :

$$\forall x \geq 2, \min_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) \geq l(x).$$

En effet, comme la valeur minimale de $\mathfrak{L}(q)$ est atteinte sur le plus grand nombre de nombres premiers inférieur à x , on peut déduire que, si $\pi(x) = r$, alors

$$\min_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) = l(p_r) \geq l(x),$$

puisque l est une fonction décroissante. D'après la démonstration de lemme 1.7, cette minoration est la meilleure qu'on peut avoir, puisque pour x déjà non suffisamment grand (≥ 396833) on a

$$x < p_{r+1} \Leftrightarrow \frac{p_r}{x} > \frac{p_r}{p_{r+1}} \geq \frac{4000}{4001},$$

qui implique que

$$l(x) \leq \min_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}(q) < l\left(\frac{4000}{4001}x\right).$$

De manière analogue, on peut aussi déduire que :

$$f(x) \leq \min_{1 < q \leq x} \mathfrak{L}_f(q) < f\left(\frac{4000}{4001}x\right),$$

pour toute fonction f décroissante et positive sur $(1, \infty)$.

Chapitre 6

Autour du critère de Robin pour l'hypothèse de Riemann

Résumé

Le critère de Robin montre que l'hypothèse de Riemann est équivalente à

$$\forall n \geq 5041, \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \log_2 n$$

où $\sigma(n)$ est la fonction somme des diviseurs de n , γ représente la constante de Euler-Mascheroni. Dans cette partie, nous obtenons l'estimation explicite suivante :

$$\forall n \geq 3, \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \log_2 n + \frac{0.3741}{\log_2^2 n}.$$

L'idée employée nous conduira à une possible nouvelle reformulation de l'hypothèse de Riemann en termes de fonctions arithmétiques.

6.1 Nombre colossalement abondant

En mathématiques, un nombre colossalement abondant est un entier naturel qui, en un sens mathématique précis, possède un grand nombre de diviseurs. Plus formellement, un nombre n est dit colossalement abondant s'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \geq \frac{\sigma(k)}{k^{1+\varepsilon}}, \quad \forall k > 1.$$

La suite des nombres colossalement abondants croît très rapidement. Les huit premiers sont 2, 6, 12, 60, 120, 360, 2520, 5040. Les nombres colossalement abondants ont d'abord été étudiés par Ramanujan. Ses travaux étaient destinés à être inclus dans son article de 1915 traitant des nombres hautement composés. Malheureusement, l'éditeur du journal auquel Ramanujan avait soumis son travail, la revue de la London Mathematical Society, était en difficulté financière à cette époque, et Ramanujan accepta de laisser de côté une partie de son travail, dans l'idée de diminuer le coût d'impression. Ses recherches étaient en grande partie soumises à la véracité de l'hypothèse de Riemann, et l'acceptation de cette dernière comme vraie lui permit de trouver un encadrement de la taille des nombres colossalement abondants, et de prouver que ce qui est de nos jours appelé l'inégalité de Robin (voir ci-dessous) est vrai pour tout n suffisamment grand. Cette catégorie de nombres fut réexplorée en 1944, dans une forme plus forte, par Leonidas Alaoglu et Paul Erdos, qui tentèrent d'approfondir et de généraliser les résultats de Ramanujan.

6.2 Introduction et exposé des résultats

L'hypothèse de Riemann (RH) affirme que les zéros non triviaux de la fonction zeta

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$$

sont situés sur la ligne critique $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{2}$.

Plusieurs formulations équivalentes de RH sont apparues, mais celle qui nous intéresse ici est celle qui est en termes de fonctions arithmétiques, nous citons ici les premiers papiers de Gronwall [23], Nicolas [32] et Robin [39], suivis par, par exemple, Akbary [1], Caveney et coll. [14] et Lagarias [29].

Dans les années 1980, Guy Robin, étudiant de thèse de Jean-Louis Nicolas, a montré dans son article [39] que l'RH est équivalente à

$$\forall n \geq 5041, \quad \sigma(n) \leq e^\gamma n \log_2 n, \tag{6.1}$$

avec $\sigma(n)$ la fonction somme de diviseurs, γ la constante de Euler-Mascheroni. Une assertion basée sur l'ordre maximal connu (voir [24, Chap.18]), pour n suffisamment grand :

$$\frac{\sigma(n)}{n} = (1 + o(1))e^\gamma \log_2 n. \quad (6.2)$$

Dans ce chapitre, nous avons l'intention de nous joindre aux auteurs qui ont tenté de déterminer de près le terme o dans la formule de Robin (6.2). La meilleure majoration de la fonction normalisée de la somme des diviseurs est également donnée par Robin [39], qui a prouvé, sans condition, que

$$\forall n \geq 3, \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \log_2 n + \frac{0.6483}{\log_2 n}.$$

Nous proposons l'amélioration suivante :

Théorème 6.1 *Pour tout entier $n \geq 3$, on a*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \log_2 n + \frac{0.3741}{\log_2^2 n}.$$

Cela améliore considérablement la borne supérieure de Robin. En parallèle, nous étudions une autre forme de majoration que celle exposée dans le théorème ci-dessus, puisque nous exprimons le tout en termes de $K(x)$, la fonction de comptage des nombres primoriels qui, on rappelle que, est approximativement $\frac{\log x}{\log_2 x}$. Nous concluons à

Théorème 6.2 *Si $K(n)$ est le nombre de primoriels inférieurs à n , alors*

$$\forall n \geq 30, \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} + \frac{1}{20 \log_2^2 K(n)} \right).$$

Cela nous amène à examiner la conjecture suivante :

Conjecture 6.1 *L'hypothèse de Riemann est équivalente à*

$$\forall n \geq 205, \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} \right).$$

Voir la section 6.6 pour plus d'informations sur cette conjecture. L'ingrédient principal de ces résultats est la version récente de la borne supérieure du produit sur les nombres premiers

$$\prod_{p \leq x} \frac{p}{p-1}$$

grâce au récent papier de Dusart [20], conséquence des nouvelles estimations des fonctions sommatoires de Chebyshev également exposées dans [20]. Bien qu'il y ait quelques mises à jour, ces améliorations ont une influence négligeable sur les résultats finaux. Enfin, nous indiquons que avec cette technique, l'obtention de meilleures approximations est étroitement liée aux progrès sur l'extension de la région connue zéro-libre de la fonction zêta de Riemann.

6.3 Lemmes préliminaires

On aura besoin dans ce chapitre d'énoncer quelques faibles encadrements de $K(x)$. On utilisera seulement des méthodes très élémentaires.

Lemme 6.1 *On a, lorsque $x \geq 8$, les inégalités suivantes :*

$$\log_2 x < K(x) \leq \log x.$$

Démonstration. D'après la définition de la fonction de comptage $K(x)$ (voir chapitre 2), en prenant le logarithme, on peut aussi écrire ce qui suit :

$$K(x) = \max \{k \in \mathbb{N}^*, \theta(p_k) \leq \log x\}, \quad (6.3)$$

Ainsi, en rappelant l'inégalité

$$\theta(p_k) \geq k$$

donnée dans Robin [38], valide une fois $k \geq 3$, on en déduit facilement que

$$K(x) \leq \max \{k \in \mathbb{N}^*, k \leq \log x\} \leq \log x, \quad \forall x \geq N_3.$$

Ce qui est également valable pour $8 \leq x < N_3$. Pour la seconde, une courte démonstration par récurrence sur k est nécessaire. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$N_k < e^{e^{k-1}}.$$

En effet, le cas $k = 1$ est évident, et le fait que

$$\forall k \geq 1, p_{k+1} < N_k$$

(conformément à la démonstration de l'infinitude des nombres premiers de Euclide) implique que

$$N_{k+1} = N_k p_{k+1} < e^{e^{k-1}} N_k < e^{2e^{k-1}} < e^{ee^{k-1}} = e^{e^k}.$$

Donc, en prenant le logarithme, on obtient que pour tout $x \geq e$:

$$\log_2 x < \log_2 N_{K+1} < K(x).$$

Nous concluons la preuve en utilisant des vérifications à l'ordinateur pour les petites valeurs. Par rapport à $\pi(x)$ la fonction de comptage des nombres premiers, on peut aussi mentionner que

$$\log_2 x < K(x) \leq \log x < \pi(x).$$

□

Le résultat suivant est un peu faible à celui énoncé dans le Lemme 3.6

Lemme 6.2 Soit $\delta = 1.000081$. On a, lorsque $x \geq 210$:

$$K(x) \geq \frac{1 \log x}{\delta \log_2 x}.$$

Démonstration. En rappelant les estimations suivantes données dans [40] :

$$\theta(x) < \delta x, \forall x > 1 \text{ and } \pi(x) \geq \frac{x}{\log x}, \forall x \geq 17,$$

on obtient successivement, que pour tout réel $x \geq e^{17\delta}$, que

$$K(x) \geq \max \{k \in \mathbb{N}^*, \delta p_k \leq \log x\} = \pi \left(\frac{\log x}{\delta} \right) \geq \frac{1 \log x}{\delta \log_2 x}.$$

Enfin, une vérification à la machine permet de traiter les cas $210 \leq x < e^{17\delta}$. □

Pour f une fonction décroissante et supérieure à 1 sur $(1, \infty)$, nous considérons la suite suivante :

$$\mathfrak{L}(n) = \prod_{p|n} f(p)$$

$\forall n > 1$ On a, ainsi, le lemme suivant :

Lemme 6.3 Pour chaque réel $x \geq 2$, l'égalité suivante :

$$\max_{1 < n \leq x} \mathfrak{L}(n) = \prod_{p \leq p_{K(x)}} f(p)$$

tient.

Démonstration. Pour déterminer le maximum de $\mathfrak{L}(n)$, lorsque n parcourt tous les entiers inférieurs ou égales à x , nous utiliserons d'abord le fait que f est supérieur à 1 puisque cela place le maximum à la classe des entiers dont le nombre de diviseurs est le plus grand. Ensuite, comme f est aussi strictement décroissante, alors, le maximum doit avoir les plus petits nombres premiers dans sa décomposition. Cependant, d'après les lemmes précédents, on peut préciser clairement que, ce n'est vrai que pour $N_{K(x)}$, c'est à dire

$$\max_{1 < n \leq x} \mathfrak{L}(n) = \mathfrak{L}(N_{K(x)})$$

Enfin, comme $p|N_k$ est équivalent à $p \leq p_k$, le lemme s'ensuit. □

Remarque 6.3 Lorsque f est strictement croissante, le maximum de $\mathfrak{L}(n)$ est atteint en un entier $q_1 q_2 \dots q_K$, où au moins un des q_i est un nombre premier supérieur à p_i .

Maintenant, grâce à une preuve plus simple, on donne un résultat concernant l'ordre de la fonction Euler (voir [24, Chap.18]), sachant que, le terme $\mathfrak{L}(n)$ pour la fonction $f(x) = \frac{x}{x-1}$ est seulement

$$\frac{n}{\varphi(n)}$$

où $\varphi(n)$ désigne la fonction d'Euler. Et correspond à

$$\frac{\Psi_t(n)}{n}$$

lorsque $f(x) = 1 + 1/x + \dots + 1/x^{t-1}$, $t \geq 2$, avec $\Psi_t(n)$ est la fonction Dedekind généralisée.

Lemme 6.4 *On a*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^\gamma \varphi(n) \log_2 n} = 1.$$

Démonstration. D'après l'étude donnée dans le chapitre 5 concernant le calcul du maximum de sommes sur les nombres premiers, et de la définition de $K(n)$, on déduit que :

$$\frac{\mathfrak{L}(n)}{\log_2 n} \leq \frac{\mathfrak{L}(N_{K(n)})}{\log_2 N_{K(n)}}.$$

Notre limite devient donc la suivante :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}(n)}{e^\gamma n \log_2 n} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}(N_k)}{e^\gamma N_k \log_2 N_k}.$$

En particulier, lorsque $f(x) = \frac{x}{x-1}$, on obtient selon le théorème de Mertens que

$$\mathfrak{L}(N_k) = \prod_{p \leq p_k} \frac{p}{p-1} \sim e^\gamma \log p_k,$$

comme $k \rightarrow +\infty$. Ainsi, le lemme suit en rappelant que :

$$\log_2 N_k = \log(\theta(p_k)) \sim \log p_k,$$

et en utilisant le théorème des nombres premiers. □

Comme toute preuve qui donne des résultats explicites appelle à un moment ou à un autre une vérification numérique de la propriété obtenue sur le nombre fini de cas qui restent. Dans notre cas, nous devons calculer les valeurs de

$$\frac{\sigma(n)}{e^\gamma n \log_2 n}$$

pour n assez grand. Nous utiliserons le résultat de Briggs [12], où il a vérifié l'inégalité de Robin jusqu'à $10^{10^{10}}$.

Lemme 6.5 (Briggs) *Le critère de Robin tient, pour $5040 < n \leq 10^{10}$.*

Nous terminons cette section en mentionnant les limites explicites suivantes de $\theta(x)$ et du produit

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

dont on sait, voir Rosser [40], que :

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = e^\gamma \log x \left(1 + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)\right)$$

Lemme 6.6 (Dusart)

$$\theta(x) \geq x \left(1 - \frac{0.01}{\log^3 x}\right), \text{ aussitôt que } x \geq 7232121212. \quad (6.4)$$

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq e^\gamma \log x \left(1 + \frac{0.2}{\log^3 x}\right), \text{ lorsque } x \geq 2278382. \quad (6.5)$$

$$\theta(p_k) \geq k \left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2.050735}{\log k}\right), \text{ lorsque } p_k \geq 10^{11}. \quad (6.6)$$

$$p_k \leq k \left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1.95}{\log k}\right), \text{ lorsque } k \geq 178974. \quad (6.7)$$

6.4 Démonstration du Théorème 6.1

Pour commencer, pour n vérifiant $K := K(n) \geq K_1 = 164607$ on a $p_K \geq 2228382$. Cela implique d'après les lemmes [6.3, 6.6] que

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq \prod_{p \leq p_K} \frac{p}{p-1} \leq e^\gamma \log p_K \left(1 + \frac{0.2}{\log^3 p_K}\right). \quad (6.8)$$

D'autre part, selon l'inégalité (6.4), une fois $K \geq K_2 = 7232121212$, il s'ensuit que

$$\log_2 N_K = \log \theta(p_K) \geq \log p_K - \frac{0.01}{\log^3 p_K}. \quad (6.9)$$

Maintenant, avec un peu de soin, on peut écrire pour $K \geq K_2$ ce qui suit

$$\begin{aligned} e^\gamma \log p_K \left(1 + \frac{0.2}{\log^3 p_K}\right) &= e^\gamma \log p_K + \frac{0.2e^\gamma}{\log^2 p_K} \\ &= e^\gamma \log p_K \left(1 - \frac{0.01}{\log^2 p_K}\right) + \frac{(0.2 + 0.01)e^\gamma}{\log^2 p_K} \\ &= e^\gamma \log p_K \left(1 - \frac{0.01}{\log^3 p_K}\right) + \frac{0.3741}{\log^2 p_K}. \end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu du fait que la fonction $e^\gamma t + \frac{0.3741}{t^2}$ est croissante lorsque $t \geq 1$, on déduit facilement de l'inégalité (6.9) que

$$e^\gamma \left(\log p_K - \frac{0.01}{\log^2 p_K} \right) + \frac{0.3741}{\log^2 p_K} < e^\gamma \log_2 N_K + \frac{0.3741}{\log_2^2 N_K},$$

et alors

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^\gamma \log_2 N_K + \frac{0.3741}{\log_2^2 N_K}, \quad \forall K \geq K_2.$$

Par ordinateur, la dernière inégalité est également valable lorsque $2 \leq K < K_2$. Par conséquent, en invoquant à nouveau la croissance de la fonction $e^\gamma t + \frac{0.3741}{t^2}$, on obtient pour $n \geq N_2$, puis pour $n \geq 3$, que

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^\gamma \log_2 n + \frac{0.3741}{\log_2^2 n}.$$

Enfin, comme l'inégalité $\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{n}{\varphi(n)}$ est vraie (voir [39, page 193]) pour $n \geq 1$, le théorème suit.

La conséquence directe suivante rejoint les bornes supérieures de $\frac{\sigma(n)}{n}$ de la forme

$$(1 + \epsilon)e^\gamma \log_2 n$$

données dans [2] pour différentes valeurs de ϵ . La valeur $\epsilon = 0.0000123$ obtenu ci-dessous, une fois $n \geq 5041$, reste stable jusqu'à la meilleure valeur $\epsilon = 0.005558981 \dots$ obtenu dans [2], dès que $n \geq 2521$.

Corollaire 6.4 *Pour tout entier $n \geq 5041$, on a*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq (1.0000123)e^\gamma \log_2 n.$$

Démonstration. L'idée est de prendre le terme $\frac{0.3741}{\log_2^2 n}$ depuis le théorème 6.1, le diviser par $e^\gamma \log_2 n$, ensuite calculer l'image de $10^{10^{10}}$. Le reste est garanti par le Lemme 6.5. \square

6.5 Démonstration du Théorème 6.2

Via l'inégalité (6.5) on en déduit que pour chaque $k \geq K_1 = 164607$:

$$\frac{N_k}{\varphi(N_k)} = \prod_{p \leq p_k} \frac{p}{p-1} \leq e^\gamma \log p_k \left(1 + \frac{0.2}{\log^3 p_k} \right).$$

Cependant ; voir [38], on a

$$k \log k \leq p_k \leq k(\log k + \log_2 k),$$

une fois $k \geq 6$. Ainsi, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$2 \log_2 k \leq \log p_k \leq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k}{\log k}, \forall k \geq 6,$$

ce qui implique successivement pour $k \geq K_1$:

$$\begin{aligned} \frac{N_k}{\varphi(N_k)} &\leq e^\gamma \left(\log p_k + \frac{0.2}{\log^2 p_k} \right) \\ &\leq e^\gamma \left(\log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k}{\log k} + \frac{0.2}{4 \log_2^2 k} \right). \end{aligned}$$

Ensuite, il vient par ordinateur que la dernière borne supérieure est également valable pour $k \geq 10$. Par conséquent, on obtient pour tout $n \geq N_{10}$, selon le Lemme 6.3, que

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} + \frac{0.2}{4 \log_2^2 K(n)} \right). \quad (6.10)$$

Maintenant, revenons au rapport $\frac{\sigma(n)}{n}$. D'après [39], cette quantité prend des valeurs maximales sur ce qu'on appelle *les nombres colossalement abondants* (CA), et si l'inégalité de Robin est vraie sur deux nombres CA consécutifs CA_i et CA_{i+1} alors c'est aussi vrai pour tout entier $n \in [CA_i, CA_{i+1}]$. On dit que n est colossalement abondant si il existe un ϵ pour lequel on a :

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\epsilon}} \geq \frac{\sigma(k)}{k^{1+\epsilon}}, \quad \forall k > 1.$$

Ainsi, pour compléter notre démonstration, il suffit de vérifier l'inégalité (6.10) pour $\frac{\sigma(n)}{n}$ seulement sur les nombres colossalement abondants inférieurs à N_{10} , à savoir : 2, 6, 12, 60, 120, 360, 2520, 5040, 55440, 720720, 1441440, 4324320, 21621600, 367567200 and 6983776800.

6.6 Eventuelle reformulation de RH

Ensuite, cela nous amène à discuter d'une possible reformulation de l'RH en termes de fonctions arithmétiques. Tout d'abord, nous observons la proposition suivante

Proposition 6.1 *On a, lorsque $205 \leq n \leq CA_{160}$, l'inégalité suivante :*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} \right),$$

où $CA_{160} > 10^{326}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier la liste des termes de la suite enregistrée comme [A004490](#) des nombres colossalement abondants dans OEIS [21]. Ceci, étend l'inégalité à tous les entiers entre 205 et CA_{160} . \square

Le tableau suivant montre une partie des calculs, où $e^\gamma A(n)$ est la borne supérieure de la proposition 6.1.

n	$\sigma(n)/n$	$K(n)$	$e^\gamma A(n) - \sigma(n)/n$
$CA_{150} = N_{121}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.570817	127	0.44727552
$CA_{151} = N_{122}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.588010	128	0.44658941
$CA_{152} = N_{123}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.605127	129	0.44584657
$CA_{153} = N_{124}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.622118	130	0.44509823
$CA_{154} = N_{125}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.638937	131	0.44439327
$CA_{155} = N_{126}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.655541	132	0.44377752
$CA_{156} = N_{127}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.671980	133	0.44320089
$CA_{157} = N_{128}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.688214	134	0.44270719
$CA_{158} = N_{129}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.704291	135	0.44224879
$CA_{159} = N_{130}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.720259	136	0.44178089
$CA_{160} = N_{131}N_{11}N_5N_3N_2^3N_1^4$	11.736118	137	0.44130365

Compte tenu de ces expériences numériques, la question naturelle est la suivante :

Question 6.5 *est-il vrai que*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} \right),$$

pour tout $n \geq 205$?

Une réponse à cette question est liée à l'RH par la proposition suivante :

Proposition 6.2 *Si l'hypothèse de Riemann tient, nous avons pour chaque entier $n \geq 205$:*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} \right).$$

Démonstration. Ceci est déduit du critère de Robin et essentiellement au fait que

$$A(n) \geq \log_2 n$$

, pour tout $n \geq 10^{322}$. En effet, on obtient du Lemme 6.2 que :

$$\log K(x) \geq \log_2 x - \log_3 x - \log \delta, \quad \forall x \geq 3, \quad (6.11)$$

$$\log_2 K(x) \geq \log_3 x + \log \left(1 - \frac{\log_3 x + \log \delta}{\log_2 x} \right), \quad \forall x \geq 3, \quad (6.12)$$

et depuis le Lemme 6.1 ce qui suit

$$\frac{\log_2 K(x)}{\log K(x)} \geq \frac{\log_4 x}{\log_3 x}, \quad \forall x \geq 15. \quad (6.13)$$

Ainsi, les inégalités (6.11), (6.12) et (6.13) nous donnent pour $x \geq 15$:

$$A(x) \geq \log_2 x + \frac{\log_4 x}{\log_3 x} + \log \left(1 - \frac{\log_3 x + \log \delta}{\log_2 x} \right) - \log \delta.$$

En posant $\log_2 x = t$, l'étude de la fonction suivante :

$$\frac{\log_4 x}{\log_3 x} + \log \left(1 - \frac{\log_3 x + \log \delta}{\log_2 x} \right) - \log \delta$$

devient moins compliqué, et révèle que cette fonction est croissante et positif dès que $x \geq 10^{322}$. cela implique que

$$A(x) \geq \log_2 x, \quad \forall x \geq 10^{322}.$$

Enfin, si l'hypothèse de Riemann tient, nous avons d'abord du critère de Robin que

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma A(n)$$

pour tout $n \geq 10^{322}$, et grâce aux calculs de la proposition 6.1 pour les valeurs restantes. \square

A ce niveau, une partie de la conjecture 6.1 est prouvée et la question persistante est :

Question 6.6 *Est-il vrai que si RH est fausse, l'inégalité*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^\gamma \left(\log K(n) + \log_2 K(n) + \frac{\log_2 K(n)}{\log K(n)} \right)$$

n'est pas vérifiée par une infinité d'entier $n \geq N_3$?

Une motivation heuristique se déroule comme suit :

$$\begin{aligned} K(n) \approx \log n / \log_2 n &\xrightarrow{\log n / \log_2 n \rightarrow 1} \log K(n) \approx \log_2 n - \log_3 n \approx \log_2 n \\ &\implies \log K(n) + \log_2 K(n) \approx \log_2 n \\ &\implies A(n) \approx \log_2 n. \end{aligned}$$

Par conséquent, selon le critère de Robin, puisque $\frac{\sigma(n)}{n} > e^\gamma \log_2 n$ infiniment souvent si l'hypothèse de Riemann est fausse, comme $A(n) \approx \log_2 n$ il peut exister un nombre infini d'entier n tel que

$$\frac{\sigma(n)}{n} > e^\gamma A(n).$$

Conclusions et perspectives

La fonction qui compte les nombres primoriels n'est pas connue en littérature, mais en examinons quelques sujets d'actualités concernant les grandes valeurs de quelques fonctions arithmétiques multiplicatives, l'encadrement explicite de fonctions sommatoires, et encore l'évaluation de sommes et produit sur les nombres premiers, on s'aperçoit à chaque fois l'intervention implicite de cette fonction comme une clé indispensable dans les résultats finaux. Pour cela, ce travail vient pour mettre en lumière cette fonction, à travers une étude asymptotique et explicite de ses valeurs. Plus encore, mettre cette fonction en pratique, via un certain nombre d'applications.

Dans un premier lieu, nous avons produit un certain nombre de nouvelles estimations liées au k -ème nombre premier et au k -ème nombre primoriel.

Dans la deuxième partie, on a proposé une étude asymptotique de cette fonction et de la somme de ses inverses.

Dans la troisième partie, on a proposé des encadrements très explicites de cette fonction, sans conditions ou sous l'hypothèse de Riemann.

Dans les parties (4), (5) et (6), on a donné les premières applications qu'on a pu constater.

Enfin, Nous présentons ici quelques idées qui pourront faire suite aux résultats obtenus dans ce travail :

- Etudier explicitement d'autres formes d'inégalités impliquant les nombres primoriels.
- Evaluer la constante absolue qui intervient dans la somme des inverses des fonctions qui possèdent un développement asymptotique similaire à la fonction de comptage des nombres primoriels.
- Montrer la conjecture qu'on a proposé dans la sixième partie.

Bibliographie

- [1] A. Akbary and F. J. Francis. Euler’s function on products of primes in a fixed arithmetic progression. *Math. Comput.*, 89(322) :993–1026, 2020.
- [2] A. Akbary and Z. Friggstad. Superabundant numbers and the Riemann hypothesis. *Am. Math. Mon.*, 116(3) :273–275, 2009.
- [3] S. Aoudjit, D. Berkane, and P. Dusart. Explicit estimates involving the primorial integers and applications. *J. Integer Seq.*, 24(7) :article 21.7.8, 18, 2021.
- [4] S. Aoudjit, D. Berkane, and P. Dusart. On Robin’s criterion for the Riemann hypothesis. *Notes Number Theory Discrete Math.*, 27(4) :article 21., 2021.
- [5] C. Axler. New estimates for the n th prime number. *J. Integer Sequences*, 22(Article 19.4.2), 2019.
- [6] M. Balazard. Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d’un entier. *Ann. Inst. Fourier*, 02 :255–270, 1990.
- [7] H. Belbachir and F. Bencherif. Développement asymptotique de la somme des inverses d’une fonction arithmétique. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 16(1) :93–99, 2009.
- [8] H. Belbachir and D. Berkane. Asymptotic expansion for the sum of inverses of arithmetical functions involving iterated logarithms. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 05 :80–86, 2011.
- [9] D. Berkane, O. Bordellès, and O. Ramaré. Explicit upper bounds for the remainder term in the divisor problem. *Math. Comput.*, 81(278) :1025–1051, 2012.
- [10] D. Berkane and P. Dusart. On a constant related to the prime counting function. *Mediterr. J. Math.*, 13(3) :929–938, 2016.
- [11] R. J. Betts. Using bonse’s inequality to find upper bounds on prime gaps. *J. Integer Sequences*, 10 :Article 07.3.8, 2007.
- [12] K. Briggs. Abundant numbers and the Riemann hypothesis. *Exp. Math.*, 15(2) :251–256, 2006.

- [13] J. Büthe. An analytic method for bounding $\psi(x)$. *Math. Comput.*, 87 :1991–2009, 2018.
- [14] G. Caveney, J.-L. Nicolas, and J. Sondow. Robin’s theorem, primes, and a new elementary reformulation of the Riemann hypothesis. *Integers*, 11(6) :753–763, a33, 2011.
- [15] M. Cipolla. La determinazione assintotica dell’ n^{imo} numero primo. *Napoli Rend. (3)*, 8 :132–166, 1902.
- [16] L. Cseh. Generalized integers and Bonse’s theorem. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.*, 34(1) :3–6, 1989.
- [17] J.-M. De Koninck and A. Ivić. *Topics in arithmetical functions*, volume 43. Elsevier, Amsterdam, 1980.
- [18] H. Dubner. The size of prime-factorials. *J. Recreat. Math.*, 19(1) :38–40, 1987.
- [19] P. Dusart. Inégalités explicites pour $\psi(x), \theta(x), \pi(x)$ et les nombres premiers. *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, 21 :53–59, 1999.
- [20] P. Dusart. Estimates of the k th prime under the riemann hypothesis. *Ramanujan J.*, 47 :141–154, 2018.
- [21] N. J. A. S. et al. The on-line encyclopedia of integer sequences. <https://oeis.org>, 2021.
- [22] B. Gordon and K. Rogers. Sums of the divisor function. *Can. J. Math.*, 16 :151–158, 1964.
- [23] T. H. Gronwall. Some asymptotic expressions in the theory of numbers. *Trans. Am. Math. Soc.*, 14 :113–122, 1913.
- [24] G. H. Hardy and E. M. Wright. An introduction to the theory of numbers. 4th ed. Oxford : At the Clarendon Press. xvi, 421 p. (1960)., 1960.
- [25] M. Hassani. A remark on the mandl’s inequality. *Octagon Mathematical Magazine*, 15 :567–572, 2007.
- [26] M. Hassani. On a function associated with the generalized euler constant for an arithmetic progression. *J. Math. Inequal.*, 06 :249–252, 2012.
- [27] A. Ivić. On a sum involving the prime counting function $\pi(x)$. *Publ. Elektroteh. Fak., Univ. Beogr., Ser. Mat.*, 13 :85–88, 2002.
- [28] H. Iwata. On Bonse’s theorem. *Math. Rep., Toyama Univ.*, 7 :115–117, 1984.
- [29] J. C. Lagarias. An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis. *Am. Math. Mon.*, 109(6) :534–543, 2002.

- [30] D. H. Lehmer. Euler constants for arithmetic progressions. *Acta Arith.*, 27 :125–142, 1975.
- [31] P. S. M. Planat and S. Omar. Riemann hypothesis and quantum mechanics. *J. Phys. A. Math. Theor.*, 44 :145203, 2011.
- [32] J. L. Nicolas. Petites valeurs de la fonction d’euler. *J. Number Theory*, 17 :375–388, 1983.
- [33] F. W. J. Olver. Asymptotics and special functions. *Academic Press*, 1974.
- [34] L. Panaitopol. A formula for $\pi(x)$ applied to a result of Koninck-Ivić. *Nieuw Arch. Wiskd. (5)*, 1(1) :55–56, 2000.
- [35] D. J. Platt and T. Trudgian. On the first sign change of $\theta(x) - x$. *Math. Comput.*, 85 :1539–1547, 2016.
- [36] L. Pósa. Über eine eigenschaft der primzahlen (hungarian). *Mat. Lapok.*, 11 :124–129, 1960.
- [37] H. Rademacher and O. Toeplitz. The enjoyment of mathematics. *Princeton Univ. Press*, 1957.
- [38] G. Robin. Estimation de la fonction de tchebychef θ sur le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et grande valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de n . *Acta Arith.*, 42 :367–389, 1983.
- [39] G. Robin. Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de riemann. *J. Math. Pures Appl.*, 63 :187–213, 1984.
- [40] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Ill. J. Math.*, 6 :64–94, 1962.
- [41] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Ill. J. Math.*, 06 :64–94, 1962.
- [42] J. Sándor. Über die folge der primzahlen. *Mathematica (Cluj)*, 30 :67–74, 1988.
- [43] S. Yang and Q. Liao. On the product of continuous prime numbers. *J. Math. Inequal.*, 15(1) :239–247, 2021.
- [44] S. Zhang. La conjecture de goldbach et le plus petit nombre premier dans une progression arithmétique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348 :241–242, 2010.