

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE (USTHB)- ALGER.  
FACULTE DE PHYSIQUE.**



**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de**

**MAGISTER en PHYSIQUE**

**Spécialité : ELECTRONIQUE QUANTIQUE**

**Par : Rekia BELHOUCIF**

**SUJET**

**Etude de la distribution du champ résonant dans une  
cavité laser à CO<sub>2</sub>**

Soutenu le 29 / 09 / 2004, devant le jury composé de :

<b>Mr. A. DJELOUAH</b>	<b>Professeur à l'USTHB</b>	<b>Président</b>
<b>Mme. F. CHAFA</b>	<b>Maître de Conférences à l'USTHB.</b>	<b>Examinatrice</b>
<b>Mr. O. ZIANE</b>	<b>Maître de Conférences à l'USTHB.</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. D. LOUHIBI</b>	<b>Maître de Recherches au CDTA.</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. A. KELLOU</b>	<b>Professeur à l'USTHB.</b>	<b>Directeur de thèse</b>

## REMERCIEMENTS

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon Directeur de thèse, Monsieur A.KELLOU, Professeur à l'Université de l'USTHB, pour m'avoir accueillie dans son laboratoire et prodigué sans relâche, des conseils efficaces et une aide amicale tout au long de ce travail.*

*Je suis très reconnaissante à Monsieur A.DJELLOUAH, Professeur à l'USTHB, pour l'honneur qu'il me témoigne en acceptant de présider le jury.*

*Je remercie vivement Madame F.CHAFA, Maître de conférences à l'USTHB d'avoir accepté de faire partie du jury.*

*Je tiens à remercier infiniment Monsieur D.LOUHIBI, Maître de Recherches au CDTA pour avoir bien voulu accepter d'être membre de ce jury.*

*Je remercie également Monsieur O.ZIANE, Maître de conférences à l'USTHB, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma haute considération.*

*Sans oublier l'aide des techniciens de l'atelier de mécanique et la verrerie et en particulier Monsieur O.DAHMANI Maître de conférences à l'USTHB, et Monsieur H.BERKANI, qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.*

*J'aimerais aussi exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs K.BATTOU, M.TRAICHE, M.TATAH, R.SIFODIL, N.HENDAOU, O.ZIZI, Z.DERRAR, D.GHEZAZ, S.AYADI, F.HAMADACHE, M.CHALLAL, D.MALEK, S.ZAIBA, et S.CHOULI, pour leurs aides précieuses, leur compréhension et leur gentillesse.*

*De plus, que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin soient remerciés, sans oublier l'administration de la faculté de physique de l'USTHB pour leur sympathie collaboration.*

# Sommaire

Introduction générale.....	1
<b>Chapitre I Description du laser moléculaire à CO<sub>2</sub></b>	
I.1 Introduction.....	4
I.2 Le Laser à CO <sub>2</sub> .....	4
I.3 Description du dispositif expérimental.....	7
I.3.1 Le système de pompage.....	9
I.3.2 Le remplissage.....	10
I.3.3 La cavité optique.....	10
I.3.4 Le tube à décharge.....	11
I.3.5 L'extraction du faisceau laser.....	12
I.3.6 La détection du rayonnement.....	12
I.4 Caractérisation du laser.....	12
I.4.1 Influence du courant de décharge.....	13
I.4.2 Influence de la pression.....	13
I.4.3 Variation temporelle de la puissance laser.....	14
I.5 Distributions transverses de l'intensité laser.....	16
I.5.1 Influence de l'épaisseur de la lame séparatrice.....	17
I.5.2 Influence du gain sur la distribution radiale de l'intensité.....	25
I.5.3 Influence de l'alignement sur la distribution radiale de l'intensité.....	25
I.6 Conclusion.....	26
<b>Chapitre II Méthodes d'obtention du champ résonant dans une cavité laser</b>	
II.1 Introduction.....	27
II.2 Méthode basée sur la décomposition du champ.....	27
II.3 Cas d'une géométrie cylindrique.....	28
II.4 Résultats théoriques et discussion.....	33
II.4.1 Effet du nombre de polynômes sur la distribution transversale de l'intensité.....	34
II.4.2 Effet de l'ouverture du tube à décharge sur la distribution transversale de l'intensité.....	38
II.5 Confrontation avec l'expérience.....	41
II.6 Application de la méthode de décomposition du champ dans une géométrie rectangulaire.....	42
II.6.1 Représentation à deux dimensions.....	43
II.6.2 Représentation à une dimension.....	45

II.7	Résultats avec une géométrie rectangulaire.....	47
II.8	Confrontation avec l'expérience.....	47

### **Chapitre III Faisceau réel**

III	Les faisceaux réels.....	50
III.1	Introduction.....	50
	1) Moment d'ordre 1.....	50
	2) Moment d'ordre 2.....	51
III.2	Divergence minimale d'un faisceau.....	53
III.3	Résultats pour un faisceau réel.....	57
III.4	Confrontation avec l'expérience.....	59
	Conclusion générale.....	62
	Perspectives.....	64
Annexe A/	Modes propres de la cavité laser.....	65
Annexe B/	Equation intégrale.....	84
Annexe C/	Effet de désalignement sur les modes laser.....	88
Annexe D/	Analyse numérique.....	94
	Références.....	97

## Introduction générale

L'un des constituants essentiels du laser qui détermine le mode d'oscillation, en plus du milieu actif, c'est la cavité optique. Afin d'obtenir l'oscillation laser, il est nécessaire d'assurer par une inversion de population du milieu actif, une amplification supérieure aux pertes totales dans la cavité. Ainsi le processus d'oscillation est contrôlé par le niveau et le caractère des pertes dans la cavité. Suivant les caractéristiques spécifiques de la cavité utilisée, le laser émet un rayonnement dont le champ possède une structure spectrale et spatio-temporelle déterminée.

Dans la plupart des applications, on cherche à sélectionner le mode fondamental, car il possède une structure gaussienne qui se caractérise par les plus faibles pertes par diffraction. Ces dernières augmentent fortement à mesure que l'indice transversal ( $i$ ,  $e$  le nombre de modes) augmente.

Le procédé de sélection le plus simple et le plus efficace dans les résonateurs stables consiste à diaphragmer le faisceau en insérant un diaphragme à l'intérieur du résonateur. Ce qui explique pourquoi la plupart des travaux expérimentaux ont été consacrés à l'étude des modes dans une cavité laser diaphragmée. Ils ont étudié l'influence de la diffraction résonante sur les caractéristiques des modes transverses d'un laser [Ait.93,thèse], évalué la répartition des pertes entre modes [Ait.93] et aussi fait l'étude de la dissymétrie de la forme de raie [Kel.87]. Cependant, la présence du diaphragme entraîne une perturbation du mode fondamental et modifie ses paramètres : distribution spatiale, fréquence de résonance, divergence en champ lointain, volume du mode, ...etc. Le problème de la distribution du champ reste toujours posé : quelle est la structure réelle du champ résonant dans une cavité laser quand il n'y a pas de diaphragme?

Pour répondre à la question posée, nous avons d'abord entrepris une étude expérimentale, où l'avons menée en réalisant un laser à CO<sub>2</sub>. Cette étude expérimentale, nous l'avons complétée par une étude théorique. Contrairement à l'aspect expérimental, l'aspect théorique foisonne de méthodes pour la détermination de la distribution résonante du champ dans les résonateurs laser.

Différentes approches théoriques ont été utilisées parmi lesquelles on peut citer: les solutions basées sur le modèle d'onde plane non linéaire [Pas.93], les modèles discrets [Per.94], et en particulier l'expansion sur les modes d'une cavité passive sans influence du milieu amplificateur [Bra.91].

L'idée principale derrière cette dernière approche est de décomposer le champ laser sur la base des modes de la cavité passive. En effet le résonateur passif permet d'obtenir, en première approximation, une image parfaitement réelle des processus de formation du champ lumineux dans une cavité laser. L'étude des résonateurs passifs permet, de mettre en évidence les modes qui se caractérisent par les pertes les plus faibles ( modes à haute surtension), et de déterminer la structure de leurs champs. On peut en outre évaluer les effets dus à la présence d'ouvertures.

En présence d'un milieu amplificateur, ce sont précisément les modes à haute surtension qui sont amplifiés en premier lieu. La présence d'un milieu actif influe sur le processus de formation du champ dans le résonateur [Osc.96]. Il convient de signaler avant tout la compétition entre modes qui conduit à une redistribution de la puissance produite entre les différents modes. Cette redistribution s'effectue aussi bien suivant l'échelle de fréquences (entre les modes longitudinaux) que dans l'espace (entre les modes transverses).

La première approche consiste à raisonner en termes de modes propres de la cavité. Existe-t'il des modes propres pour la cavité active ? Si oui, sont-ils les mêmes que ceux de la cavité vide ?

En premier lieu, il est impossible de savoir à priori combien de modes vont être actifs dans un résonateur laser sauf dans des cas particuliers [Osc.96]. Cependant, en première approximation lorsque les valeurs du gain d'amplification sont faibles, un résonateur actif se caractérise pratiquement par les mêmes répartitions d'amplitude et de phase du champ et par les mêmes pertes dues aux effets de diffraction qu'un résonateur passif. Alors les résultats obtenus pour les résonateurs passifs se trouvent applicables aux lasers au voisinage du seuil d'oscillation.

La plupart des méthodes analytiques développées pour les résonateurs passifs peuvent alors être utilisées pour la résolution du problème relatif aux résonateurs actifs.

Plusieurs méthodes sont possibles. La plus évidente est celle qui utilise les solutions des équations de Maxwell [Kog.66] qui représentent des modes compatibles avec le résonateur : faisceaux étroits avec des fronts d'onde qui rencontrent perpendiculairement les miroirs (en tout point, la surface du miroir est perpendiculaire à la direction locale de propagation). On est sûr comme cela que l'onde se réfléchit exactement sur elle-même. On obtient ainsi la condition d'autoreproduction nécessaire à l'existence du mode.

Une autre méthode consiste à utiliser le principe de Huygens [Fox.61]. On calcule le champ, créé sur un miroir, par la source constituée par l'autre miroir éclairé. Le champ retour est alors calculé et doit être, à une constante près, égal au champ initial.

Les solutions obtenues, généralement numériques, permettent de connaître les modes propres de la cavité mais aussi leurs pertes par diffraction.

En 1983, une nouvelle méthode basée sur une formulation mathématique rigoureuse a été proposée par Stéphan et Trumper pour caractériser la distribution du champ et la phase du front d'onde dans un laser à gaz [Sté.83]. Cette méthode diffère de celle basée sur l'intégrale de Kirchhoff-Fresnel [Fox.61] par une matrice développée sur la base des fonctions de Laguerre-Gauss. Elle trouve son application dans une étude des propriétés du champ tant à l'intérieur qu'à l'extérieur d'un laser [Kel.87], [Ait.88]. Une expérimentation effectuée par Kellou et Stéphan a ensuite confirmé sa validité [Kel.87]. L'avantage de cette méthode se trouve dans la facilité de calculer les formes du champ et de sa phase en n'importe quel point du laser avec un gain considérable en temps de calcul.

Dans ces dernières études, l'attention était concentrée sur le mode fondamental et sur le cas d'une cavité diaphragmée. Une partie de notre travail théorique consiste à élargir et approfondir cette investigation au cas d'une cavité non diaphragmée, en tenant compte de la brisure de symétrie provoquée par des éléments optiques présents dans la cavité.

Notre travail est structuré de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on rappelle les principes de fonctionnement du laser à gaz moléculaire CO<sub>2</sub>. On décrit le dispositif expérimental réalisé pour l'étude des modes transverses le long de la cavité non diaphragmée. Les résultats expérimentaux sont obtenus avec deux lames séparatrices permettant ainsi d'étudier l'influence de ces dernières sur les modes. Ainsi on montre l'effet du gain et de désalignement sur la distribution des modes.

On s'intéresse dans le deuxième chapitre aux différentes méthodes de calcul du champ dans une cavité laser. On insistera en particulier sur la méthode de décomposition du champ. Nous l'avons utilisée et généralisée au cas d'une cavité concave-concave non diaphragmée et ce pour les deux géométries que peut présenter une cavité laser, cylindrique et rectangulaire.

Dans le dernier chapitre, nous corrigeons les expressions données par le modèle gaussien en tenant compte du moment d'ordre deux [Ald.01] pour le faisceau réel.

Pour chaque étude théorique nous avons comparé ses résultats avec ceux obtenus expérimentalement pour juger de l'accord théorie-expérience. A chaque étape nous avons amélioré cet accord.

## I.1 Introduction

La distribution transverse de l'intensité du champ dans la cavité laser sans ouvertures diffractantes n'a pas à priori, suscité l'intérêt des chercheurs en raison de l'hypothèse que les modes oscillants pour une cavité vide sont très peu perturbés par la présence du milieu amplificateur. Par conséquent ils représentent une description rigoureuse du faisceau réel. Cette hypothèse n'est vraie, comme nous allons le voir, que pour certaines conditions précises, au seuil d'oscillation et en négligeant l'effet perturbatif du milieu amplificateur et des bords du tube.

Notre étude expérimentale donne un aperçu réel sur le comportement spatial du faisceau laser dans une cavité non diaphragmée. Ainsi il est possible d'accéder aux ondes aller et retour en insérant simplement une lame transparente au rayonnement à l'intérieur de la cavité, et on suppose dans une première approximation, que cette lame n'influe pas sur la distribution transversale du faisceau laser. Le déplacement transverse d'un détecteur de faible surface placé sur le trajet des faisceaux aller et retour issus de la lame permettra ainsi de reconstituer les profils transverses de l'intensité du champ des deux ondes aller et retour.

Cette étude expérimentale a été effectuée avec un laser à CO<sub>2</sub> monomode fonctionnant à faible pression. Dans une première étape, nous faisons la caractérisation du laser que nous avons réalisé en fonction de ses différents paramètres. Cela permettra de déterminer les conditions optimales d'un fonctionnement monoraie, monomode longitudinale que l'on doit s'imposer, pour la validation de nos modèles théoriques. Dans une deuxième étape nous faisons une étude radiale de l'intensité en différentes positions choisies dans la cavité laser.

## I.2 Le Laser à CO<sub>2</sub>

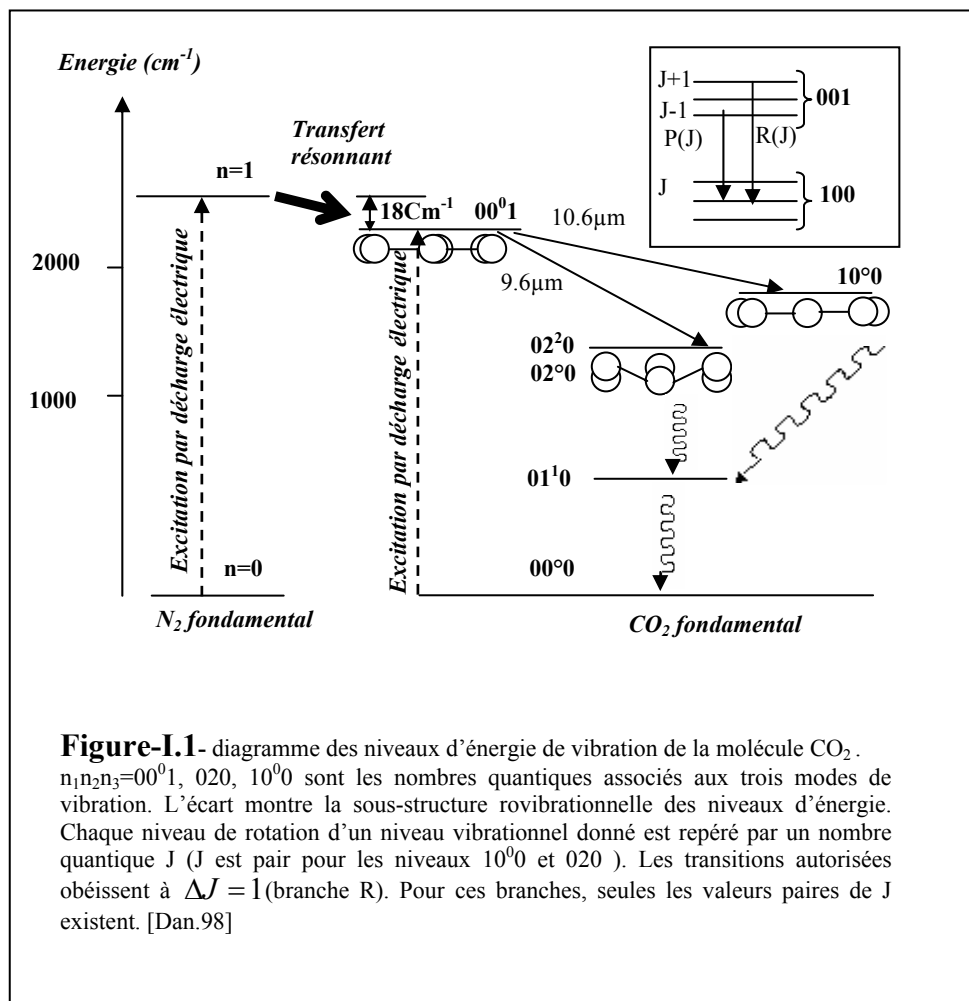
Par ses applications industrielles, médicales et scientifiques, le laser au dioxyde de carbone (CO<sub>2</sub>) est certainement le plus important des lasers à gaz. Les transitions entre niveaux rotationnels-vibrationnels de la molécule de CO<sub>2</sub> [Pat.64], correspondent à de nombreuses émissions infrarouges à des longueurs d'ondes comprises entre 9 et 11 micromètres. Le laser CO<sub>2</sub> peut fournir des puissances continues s'étalant de la fraction de Watt pour les applications scientifiques, à des dizaines de kiloWatts pour le travail des matériaux, et ceci avec des rendements remarquables (jusqu'à 30%). Il peut aussi fournir des impulsions intenses très brèves de quelques millijoules pour la télémétrie I.R., à quelques kilojoules pour des applications de recherche dans la fusion nucléaire contrôlée. Cette diversité provient du

fait qu'il existe plusieurs types distincts de lasers CO<sub>2</sub> qui partagent naturellement le même milieu actif mais qui diffèrent profondément dans leur structure interne, et surtout dans leurs caractéristiques fonctionnelles.

Le milieu actif d'un laser CO<sub>2</sub> est généralement constitué d'un mélange de Dioxyde de Carbone, d'Azote et d'Hélium. Chacun de ces trois constituants joue un rôle crucial, bien que ce type de laser peut fonctionner en utilisant uniquement le CO<sub>2</sub>, mais un avec rendement faible.

La molécule linéaire de CO<sub>2</sub> possède trois modes de vibrations : le mode symétrique  $\nu_1(10^00)$ , le mode de flexion  $\nu_2(02^00, 02^20)$  et le mode asymétrique  $\nu_3(00^01)$  [Pat.64].

Chacun de ces modes est quantifié et leurs premiers niveaux excités sont respectivement situés à  $1337\text{ cm}^{-1}$ ,  $667\text{ cm}^{-1}$  et  $2349\text{ cm}^{-1}$  par rapport au niveau fondamental. Chacun de ces niveaux est lui-même subdivisé en sous niveaux correspondants à la quantification de l'énergie de rotation de la molécule. Les niveaux d'énergie vibrationnels mis en jeu sont succinctement présentés sur le diagramme d'énergie du système CO<sub>2</sub>-N<sub>2</sub> de la figure -I.1-.



Lorsqu'une décharge électrique est établie dans le mélange gazeux, les molécules de CO<sub>2</sub> sont excitées préférentiellement dans le niveau 00°1 du mode asymétrique, tandis que les molécules d'Azote sont excitées (avec une plus forte probabilité) dans leur premier état de vibration, l'état métastable  $v=1$ . Du fait de la faible différence d'énergie ( $18 \text{ cm}^{-1}$ ) entre ces niveaux, les collisions résonantes d'échange entre les molécules N<sub>2</sub> ( $v=1$ ) et les molécules de CO<sub>2</sub> dans leur état fondamental, canalisent continûment et avec efficacité les molécules de CO<sub>2</sub> vers le niveau 00°1. Lorsque l'inversion de population est établie, l'émission stimulée s'effectue suivant deux canaux, soit vers le niveau 10°0 du mode symétrique ( $10.6 \mu\text{m}$ ), soit vers le niveau 02°0 du mode de flexion ( $9.6 \mu\text{m}$ ). Ces états métastables ont une durée de vie d'environ  $2.10^{-3}$  secondes à une pression de quelques torrs. La subdivision en sous-niveaux de rotation entraîne l'existence de deux familles nombreuses de raies d'émission dans chacune des bandes à 10 micromètres et à 9 micromètres mais la raie la plus intense correspond à  $10.6 \mu\text{m}$  [Kar.88].

La désexcitation des niveaux inférieurs se fait par cascade du niveau 02°0 vers le 01°0, puis vers le fondamental. La présence de N<sub>2</sub>, grâce à son rôle de réservoir d'énergie, améliore considérablement le fonctionnement du laser CO<sub>2</sub>.

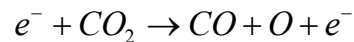
La présence de l'Hélium améliore la désexcitation des niveaux inférieurs, particulièrement le 01°0, et empêche ainsi l'accumulation des molécules de CO<sub>2</sub> sur ce niveau, ce qui détruirait à terme l'inversion de population. Cette désexcitation s'effectue par collisions entre les molécules de CO<sub>2</sub> et les atomes d'Hélium. Du fait de leur grande vitesse thermique, ils thermalisent efficacement les populations de ces niveaux inférieurs [Bru.02].

Il convient de souligner également que l'hélium facilite l'allumage et l'entretien de la décharge luminescente [Kar.88].

La composition optimale du mélange (CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, He) et la pression de fonctionnement varient considérablement d'un dispositif à un autre. Dans un laser typique en flux, les pressions peuvent être de 10 à 50 Torr et les concentrations de 15% pour le CO<sub>2</sub> et N<sub>2</sub>, et 70% pour l'He [Mai.90]. Dans le cas d'un laser scellé, la pression du mélange gazeux est beaucoup plus faible et dépend de la longueur du tube. Son milieu actif est constitué d'un mélange CO<sub>2</sub>/N<sub>2</sub>/He dans les proportions typiques : 1/1/4. Ce choix suggéré par Patel [Pat.74] a été vérifié dans la plupart des lasers réalisés au laboratoire [Sif.83], [Akr.89]. En fait la présence de grandes quantités d'Hélium dans le mélange empêche la dissociation de la molécule CO<sub>2</sub> qui reste l'inconvénient majeur dans les lasers scellés.

En général, le fonctionnement continu s'effectue à basse pression, mais les lasers impulsionnels peuvent également utiliser des décharges à pression atmosphérique.

La version scellée est limitée par la dissociation de la molécule CO<sub>2</sub>. En fait, l'interaction des électrons énergétiques de la décharge avec les molécules de CO<sub>2</sub> produit une décomposition du gaz moléculaire qui se dissocie progressivement en créant du monoxyde de carbone CO et de l'oxygène O<sub>2</sub>, selon la réaction chimique: [Bat.94]



Cet effet est plus important dans le mélange CO<sub>2</sub>-N<sub>2</sub> que dans le mélange CO<sub>2</sub>-He. Cela est dû essentiellement au fait que le potentiel d'ionisation de l'Azote (15.58 eV) est inférieur à celui de l'Hélium (24.47 eV).

Pour effectuer la 'catalyse inverse' qui régénère le CO<sub>2</sub>, plusieurs solutions ont été proposées: l'addition de trace d'hydrogène ou de vapeur d'eau au mélange, l'emploi de cathodes dont le revêtement chauffé à une température appropriée devient un catalyseur ou encore l'emploi de poudres actives qui stimulent la réaction de recombinaison [Mai.90].

Le laser à CO<sub>2</sub> scellé fait partie de la famille des lasers à haut rendement du principalement à la faible différence d'énergie entre les niveaux pompes et les niveaux de transitions laser.

Sa puissance de sortie est généralement limitée à quelques watts. Cette limitation est due au mode de refroidissement du mélange gazeux (diffusion vers les parois du tube). Le paramètre d'échelle est alors la puissance par unité de longueur. Les meilleurs lasers CO<sub>2</sub> scellés au jour d'aujourd'hui peuvent réaliser 0.3 W/cm à 0.4 W/cm. Ce qui, pour des raisons d'encombrement, limite pratiquement la puissance de ces lasers à la barre 30-40 Watts, même avec un refroidissement efficace [Mai.90]. Dans des conditions expérimentales telles que les nôtres, le laser ne pourra fournir que quelques watts.

### **I.3 Description du dispositif expérimental**

La figure –I.2- représente le schéma détaillé du dispositif expérimental que nous avons réalisé au laboratoire. Il est constitué des trois systèmes suivants:

Le système de pompage- remplissage, le générateur de rayonnement et le banc de détection.

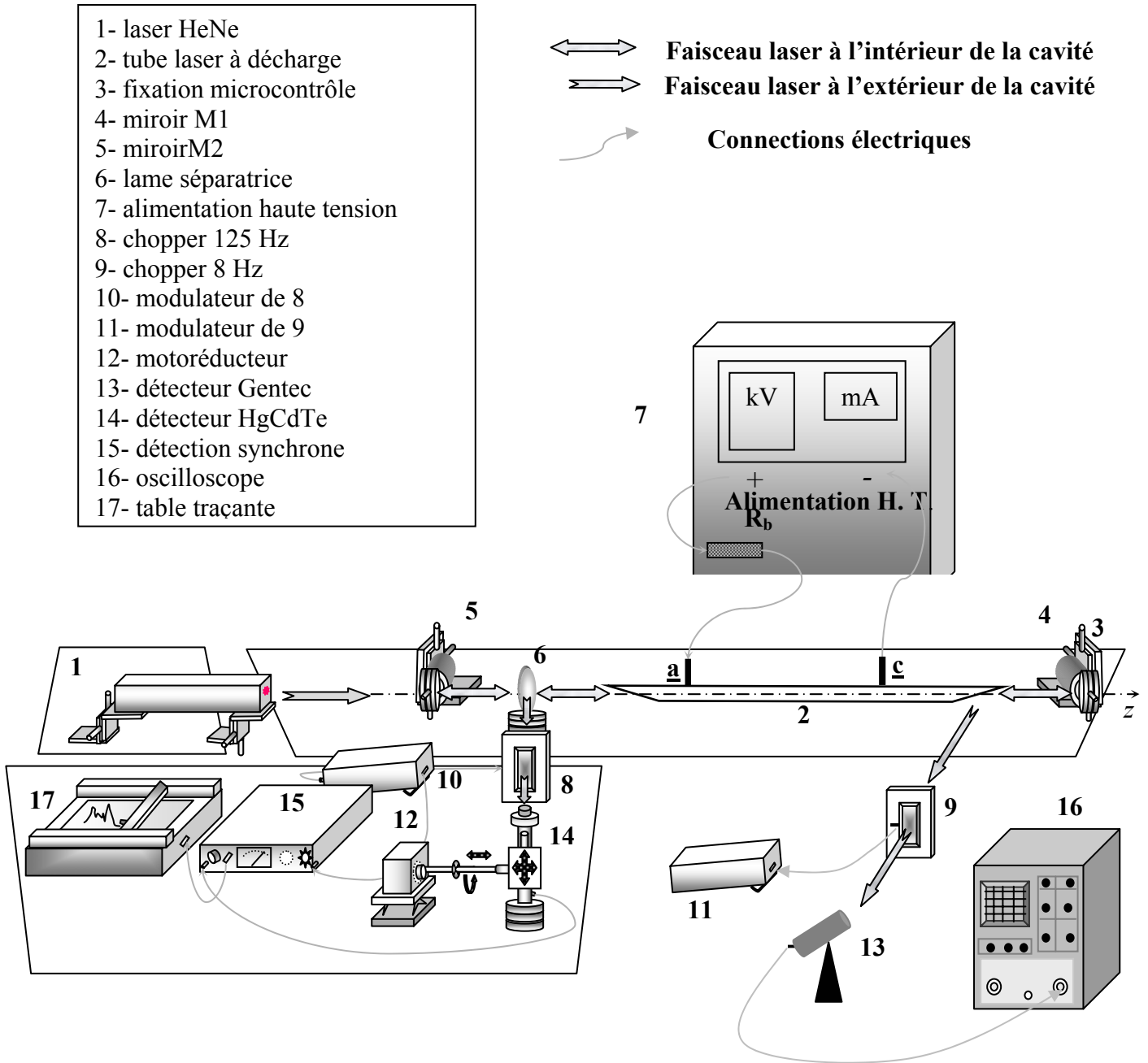


Figure -I.2- Dispositif expérimental

### I.3.1 Le système de pompage

Pour effectuer le vide dans le tube à décharge avant son remplissage, on associe deux pompes en série : une pompe primaire et une pompe secondaire.

- ❖ La pompe mécanique primaire à palettes d'une puissance de 375 Watts et d'une capacité d'évacuation de 15 m<sup>3</sup>/h, sert à réaliser un vide primaire de 10<sup>-3</sup> mbar. Son refroidissement est assuré par une circulation d'air.

Le choix d'une pompe mécanique pour évacuer une enceinte d'un volume donné à une pression donnée, n'est pas simple. Il faut, en effet, faire intervenir des notions complexes telles que la conductance des vannes et canalisations qui relient la pompe à l'enceinte, les taux de dégazage des parois et du contenu de l'enceinte ( nature des matériaux et propriétés), et la composition des gaz à évacuer.

- ❖ La pompe secondaire à diffusion d'huile est principalement utilisée pour obtenir un vide secondaire poussé (10<sup>-7</sup> mbar). Elle est d'une puissance de chauffage de 500 Watts et refroidie à l'aide d'une circulation d'eau. Elle fonctionne en portant à ébullition une huile minérale par l'intermédiaire d'une résistance chauffante.

Les vapeurs d'huile fixent les molécules. Grâce à un refroidissement à l'eau les vapeurs se condensent et l'huile redescend vers la partie chaude. Puisque le chauffage est continu, l'huile se vaporise encore une fois et libère les molécules fixées, qui sont évacuées par la pompe primaire.

En réalité, les pompes à diffusion ont quelques inconvénients :

- Le mécanisme de pompage dépend de l'huile portée à ébullition. Le moindre défaut d'étanchéité ( composants, joints) mène à une détérioration du vide. L'huile en se répartissant sur chaque surface interne rend le nettoyage coûteux et long.
- Le temps de préchauffage et de refroidissement est long (1 à 2 heures).

#### ❖ Mesure du vide

Nous avons contrôlé le vide primaire à l'aide d'une jauge Pirani et le vide secondaire par une jauge Penning [Asc.78] qui est capable de mesurer un vide poussé de l'ordre de 1.10<sup>-2</sup> à 1.10<sup>-7</sup> mbar avec un temps de réponse de 0.3 s.

Nous terminons notre description du système de pompage et la réalisation du vide dans notre dispositif par faire remarquer que la plus grande difficulté souvent rencontrée avec les lasers à gaz est la présence de micro-fuites. Il est donc important de savoir les chercher et les détecter pour pouvoir les éliminer et maintenir la qualité de vide voulu dans le tube à décharge durant le temps de la manipulation.

La détection de fuites dans un groupe à vide peut être longue et fastidieuse ; aussi ne faut-il chercher à détecter une fuite que lorsqu'on est certain de son existence. Tant qu'un groupe de pompage atteint sa pression normale de travail, il n'y a pas lieu de s'inquiéter de l'existence de fuites. Si, par contre, le temps de descente en vide dans le tube paraît anormalement long, cela est une indication que des gaz ou vapeurs sont libérés dans le volume à vider. Il y a trois origines possibles pour ces gaz :

1. Des fuites à partir de l'atmosphère au travers des parois de l'enceinte à vide (fuites réelles).
2. Des dégazages dus à des matériaux à l'intérieur de l'enceinte.
3. Des libérations de gaz piégés ( fuites virtuelles).

Les techniques de détection de micro-fuites mises au point au laboratoire, nous permettent d'une manière générale de pallier à ces inconvénients et de réaliser des vides primaires et secondaires suffisamment bons pour avoir des temps de fonctionnement du laser qui dépassent la journée, avant que la dégradation du mélange gazeux due à la dissociation de la molécule CO<sub>2</sub> ou aux dégazages des électrodes ne rendent ce fonctionnement du laser médiocre (signal faible noyé dans le bruit, ... etc.)

### **I.3.2 Le remplissage**

Le remplissage du tube se fait par l'intermédiaire d'une bouteille préalablement remplie avec des volumes des gaz (CO<sub>2</sub> : N<sub>2</sub>: He) dont les proportions (1 :1 :4).

Le remplissage de la bouteille se fait par le biais d'un banc de remplissage réalisé au sein de notre laboratoire. Celui-ci est composé d'un bâti de pompage comprenant une pompe primaire et une pompe secondaire pour faire le vide. A ce bâti sont associées trois bouteilles contenant chacune un des trois gaz CO<sub>2</sub>, He, N<sub>2</sub>. Un manomètre en U sert à mesurer les pressions partielles des différents gaz. Le choix des proportions des gaz dépendant de la longueur du tube à décharge [Lev.71].

### I.3.3 La cavité optique

Le résonateur utilisé est ouvert de type Fabry-Perot. Il est constitué de deux miroirs sphériques en cuivre recouvert d'une mince couche d'or, pour réfléchir le rayonnement laser à 10.6  $\mu\text{m}$ . Les deux miroirs sont totalement réfléchissants (98%), séparés par une distance  $L=194$  cm. Leurs rayons de courbure  $R_1=8$  m,  $R_2=4$  m, permettent d'avoir un bon confinement du faisceau laser.

Le résonateur est en régime stable puisque la relation de stabilité des résonateurs [Kog.66] :

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1 \text{ est vérifiée.}$$

Les deux miroirs sont montés sur des supports munis de déplacements micrométriques possédant trois degrés de liberté facilitant le réglage et l'alignement de la cavité avec le tube à décharge.

Le choix des paramètres d'une cavité est fait de telle façon que le volume occupé par le faisceau laser soit maximum pour tirer profit de tout le volume de gaz excité. Ce qui impose au tube laser d'avoir un diamètre intérieur supérieur à celui du faisceau à l'intérieur de la cavité pour réduire les pertes par diffraction dans le tube.

### I.3.4 Le tube à décharge

Le tube à décharge est un tube en Pyrex. Sa nature Pyrex est avantageuse du fait que l'Hélium diffuse moins à travers ce matériau. Il a une longueur totale de 138 cm, d'un diamètre intérieur de 1 cm et d'une épaisseur de 1 mm. Il est doté de deux électrodes en Aluminium distantes de 130 cm. La colonne positive dans ce cas occupe la quasi-totalité du milieu amplificateur. Les deux extrémités du tube sont fermées par des lames de ZnSe qui présentent l'avantage d'être non hygroscopiques ainsi que translucides [Khe.80]. Ces fenêtres sont collées sur des terminaisons en Duralium emmanchées aux extrémités du tube par l'intermédiaire de deux joints. Pour minimiser les pertes par réflexion et assurer au rayonnement émis une polarisation fixe, ces lames sont inclinées à l'angle de Brewster.

Le tube est alimenté par une décharge électrique d'environ une dizaine de kV. Cette dernière est assurée par une alimentation haute tension. Une résistance ballast de 300  $k\Omega$  placée en série avec le tube permet d'une part de ramener l'impédance globale à une valeur positive, et d'autre part de travailler à des courants assez faibles variant de 0 à 25 mA.

Le système produit un dégagement de chaleur significatif. Par conséquent le tube est entouré par une double enveloppe dans laquelle circule de l'eau froide. Des ventilateurs sont utilisés pour pallier aux échauffements de la cathode et des terminaisons en Duralumin qui supportent les fenêtres de ZnSe.

### I.3.5 L'extraction du faisceau laser

Afin d'extraire le faisceau laser de l'intérieur de la cavité, nous avons utilisé une lame en NaCl. Au début nous avons opéré avec une lame d'épaisseur 5.5 mm. Son coefficient d'absorption est de  $0.005 \text{ cm}^{-1}$  et son coefficient de réflexion est de 0.036. Les résultats expérimentaux obtenus montrent un effet d'interférence sur cette lame. Pour éviter cet effet, nous avons utilisé une autre lame d'épaisseur 7.8 mm. Son coefficient de réflexion, son épaisseur et son inclinaison ont été choisies de façon à minimiser la recombinaison des faisceaux issus des différentes réflexions. Celle-ci est convenablement placée le long de la cavité, sur une tourelle microcontrôle graduée en degrés et en minutes qui peut être tournée de  $90^\circ$  afin de prélever l'onde aller et l'onde retour.

### I.3.6 La détection du rayonnement

Nous avons utilisé deux types de détecteur :

- ◆ Un joulemètre pyroélectrique de type **Gentec** nous sert à optimiser le fonctionnement du laser.
- ◆ Un détecteur quantique de type **HgCdTe** d'une surface quasi ponctuelle, pour mesurer le profil radial de l'intensité du mode.

Le faisceau extrait par la lame séparatrice passe par un chopper modulé à 125 Hz avant d'atteindre le détecteur HgCdTe. Ce détecteur est monté sur un support micro contrôle entraîné au moyen d'un moteur pas à pas. La sortie du détecteur est reliée à un amplificateur à détection synchrone P.A.R. L'intérêt de cette détection, réside dans la possibilité de mesurer des signaux faibles qui pourraient être noyés dans le bruit. Elle est ensuite couplée à un enregistreur PHILIPS (voir figure-I.2-).

## I.4 Caractérisation du laser

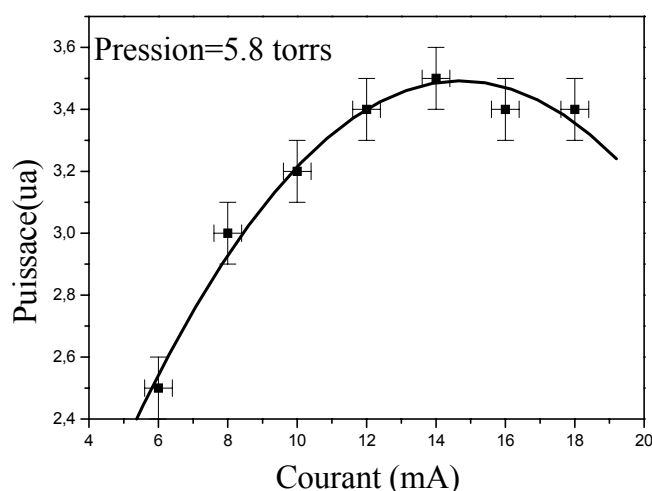
Avant de procéder aux relevés des profils transverses de l'intensité, il est important de déterminer les conditions optimales de fonctionnement du laser. Il s'agit de déterminer les

valeurs optimales et les valeurs du seuil de déclenchement du laser. Pour cela, le détecteur thermique Gentec suffit pour faire l'étude de la puissance laser en fonction non seulement de la pression du mélange gazeux et du courant de décharge mais également sa variation dans le temps.

#### I.4.1 Influence du courant de décharge

Pour une valeur de pression donnée, nous avons tracé la puissance laser en fonction du courant de décharge, voir figure –I.3-. Elle montre une puissance optimale pour  $I=14$  mA.

La décroissance de la puissance, à partir de sa valeur maximale, est liée à une augmentation de la température du mélange qui est préjudiciable au maintien de l'inversion de population des transitions laser. A ceci s'ajoute la diminution des centres actifs de la molécule CO<sub>2</sub> suite au processus de la dissociation de celle-ci. L'erreur estimée sur la lecture des valeurs du courant est de 0.4 mA.

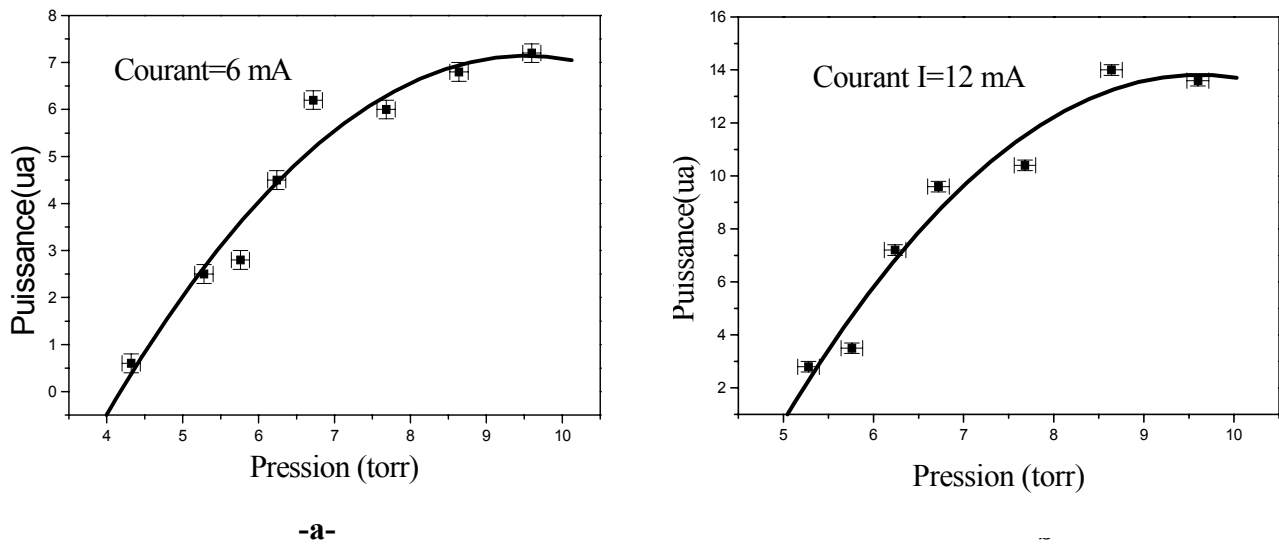


**Figure-I.3-** variation de la puissance laser en fonction du courant de décharge

#### I.4.2 Influence de la pression

Nous avons mesuré la variation de la puissance laser en faisant augmenter la pression du gaz depuis son amorçage. L'enregistrement complet de l'évolution de la puissance laser en fonction de la pression est illustré en figure –I.4-. Nous avons relevé la valeur optimale de la

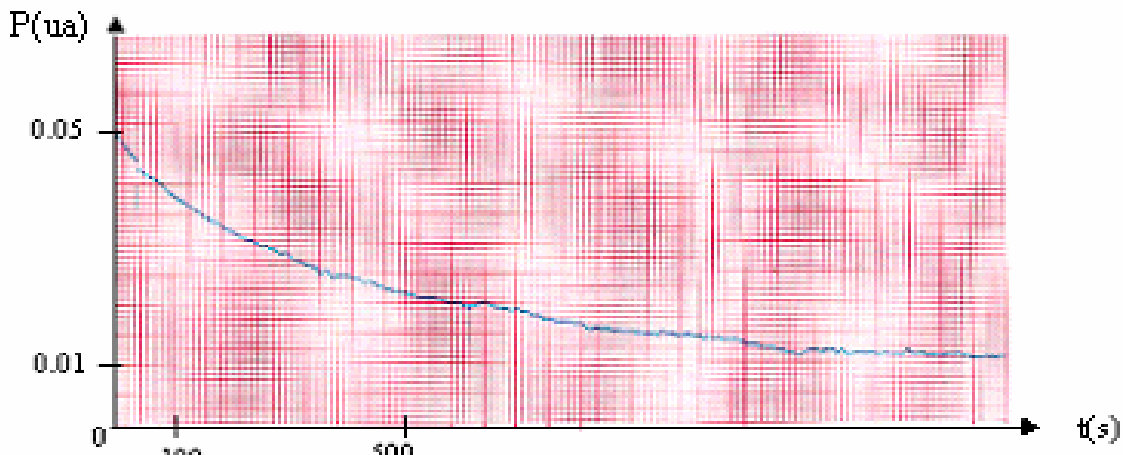
pression pour un courant seuil ( voir figure-I.4-a-) et un courant optimal (voir figure-I.4-b-). On remarque que la puissance émise augmente avec la pression avant d'atteindre une valeur maximale à une pression de voisine 10 torrs. A des pressions supérieures nous observons un effet de saturation qui s'explique par la diminution du nombre d'électrons susceptibles d'exciter les molécules N<sub>2</sub> partenaire des molécules CO<sub>2</sub>. L'erreur estimée sur la lecture des valeurs de pression est de 0.12 torrs.



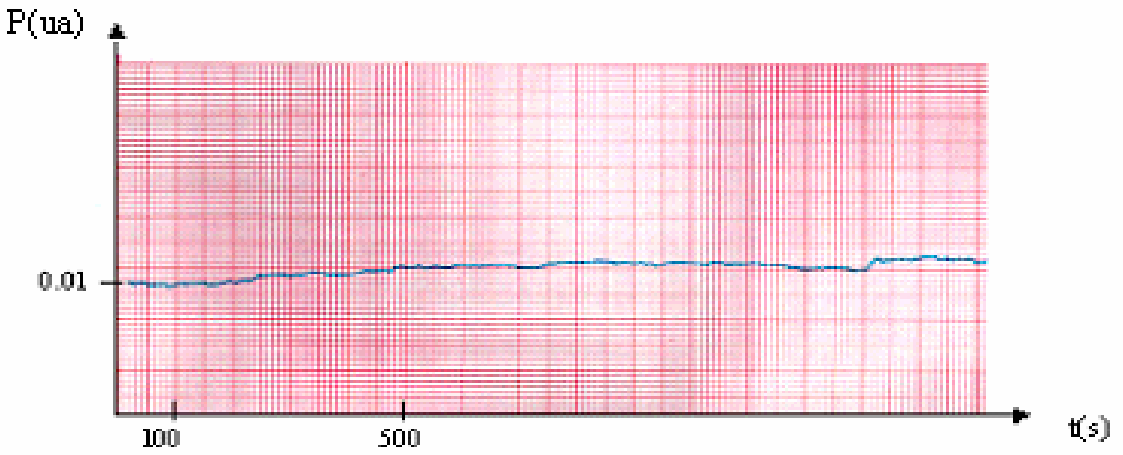
**Figure-I.4-** variation de la puissance laser en fonction de la pression totale du mélange

### I.4.3 Variation temporelle de la puissance laser

L'évolution temporelle de la puissance est montrée sur la figure -I.5- avec un courant de décharge  $I=12$  mA et une pression du mélange  $P=5.80$  torrs. On note que la puissance laser est maximale durant la 1<sup>ère</sup> heure puis elle diminue pour rester pratiquement constante pendant plusieurs heures ( 4 à 5 heures ), temps largement suffisant pour faire nos mesures et vérifier leurs reproductibilités, avant que la puissance ne diminue et que l'effet laser cesse.



Evolution temporelle durant la première heure



Evolution temporelle durant la deuxième heure

Figure -I.5- variation temporelle de la puissance laser

## I.5 Distributions transverses de l'intensité laser

Avant de passer aux résultats expérimentaux, il faudra d'abord discuter les conditions de leur obtention et notamment de la stabilisation du fonctionnement du laser.

On ne peut faire l'étude des modes transverses dans la cavité laser que s'il y a une oscillation sur une seule raie d'amplification et un fonctionnement en monomode longitudinal.

De façon générale l'oscillation laser se fait à la fréquence [Ber.99] :

$$\nu_{\text{laser}} = \nu_Q + (\nu_0 - \nu_{\text{laser}}) \frac{\Delta \nu_Q}{\Delta \nu_D}, \text{ où } \nu_Q \text{ est la fréquence du mode de résonance de la cavité,}$$

$\nu_0$  la fréquence de Bohr du milieu laser,  $\Delta \nu_Q$  est la largeur du mode de résonance, et  $\Delta \nu_D$  est le décalage Doppler.

Cette expression est une approximation qui ne tient pas compte d'effets de second ordre, liés à l'intensité de la fréquence qui oscille et donc à sa position dans la courbe de gain du milieu. Cependant, on peut simplifier encore cette expression si on admet que c'est la cavité qui va imposer sa fréquence. On peut ainsi remplacer, dans le second membre de l'expression précédente,  $\nu_{\text{laser}}$  par  $\nu_Q$  et l'on remarque alors que la nouvelle expression exprime un effet d'« attirance » de la fréquence du mode passif vers le centre de la raie d'émission ( $\nu_0$ ). Notons que la précision sur la valeur de la fréquence d'oscillation du laser dépend, en premier lieu, de la précision que l'on a sur  $\nu_Q$ . Cette précision est moins bonne que celle que l'on peut avoir sur  $\nu_0$ . En effet tous les effets mécaniques ou optiques qui modifient la longueur de la cavité  $L$  ou l'indice de réfraction du milieu  $n$ , entraînent une modification de la fréquence  $\nu_Q$  : variations de température, vibrations mécaniques ou sonores, changements de pression, etc. Une autre complication provient du fait que le laser n'est pas initialement monomode. Avoir une fréquence d'émission laser la plus stable possible demandera donc de corriger ces fluctuations de fréquence du mode de résonance de la cavité.

Naturellement, en fonctionnement libre, un laser peut émettre sur plusieurs centaines de MHz à causes des phénomènes évoqués plus haut. Les meilleurs résultats obtenus sont les variations de fréquence inférieures à 1 Hz [Pou.96]. Parmi les méthodes qui existent actuellement pour la stabilisation de la fréquence du laser, on peut citer deux méthodes connues:

1. La plus évidente consiste à ajuster la longueur de la cavité, en plaçant sur l'un des miroirs une céramique piézo-électrique [Ber.99].
2. Le procédé le plus efficace de stabilisation fait appel à l'absorption dite saturée d'un gaz moléculaire. Cependant, ce n'est pas évident de trouver une raie d'absorption moléculaire dont la longueur d'onde coïncide avec celle de la raie laser [Pou.96].

Heureusement dans notre cas, l'émission du laser à CO<sub>2</sub> comporte peu de modes longitudinaux. Au seuil d'oscillation le laser fonctionne en monomode longitudinal, du fait que l'intervalle spectral libre vaut  $\frac{c}{2L} = 77.3$  MHz et l'élargissement Doppler est de 53 MHz.

## Résultats expérimentaux et discussion

La figure-I.6- ci dessous indique les différentes positions choisies dans l'espace intra-cavité, pour le relevé des distributions transverses des ondes aller et retour.

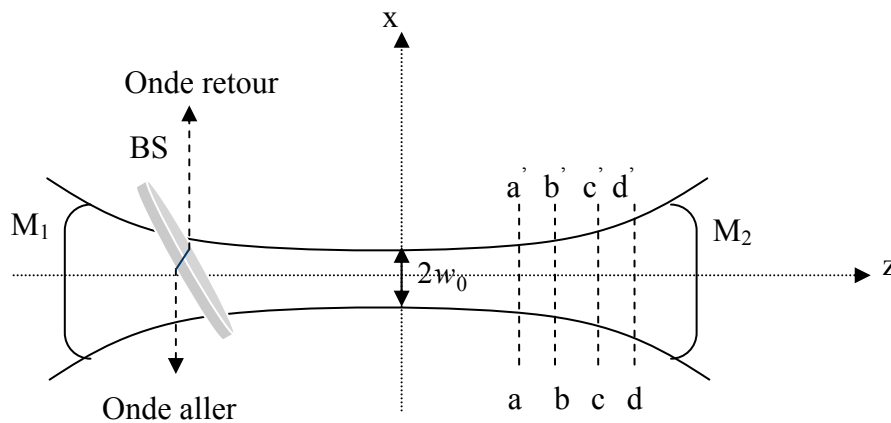


Figure -I.6 - obtention des ondes aller et retour

### I.5.1 Influence de l'épaisseur de la lame séparatrice

#### a) Avec la lame séparatrice de 5.5 mm [Bel.03]

Sur la figure -E1- nous présentons les différents profils transverses des ondes aller et retour obtenus avec une lame séparatrice de 5.5 mm, tel que la pression du mélange p=5.28 torrs, et le courant de décharge I=6 mA, détectés en différentes positions dans l'espace intracavité d'un laser à CO<sub>2</sub>.

Les deux remarques suivantes sont à prendre en considération pour faire l'analyse des résultats expérimentaux :

- Les effets du milieu amplificateur ne sont pas pris en compte dans notre étude. L'effet de saturation de gain n'influe pas sur les modes transverses, car nous avons pris la précaution de travailler près du seuil. Cela permet d'avoir des résultats semblables à ceux d'une cavité passive.
- L'absence de symétrie sur nos courbes expérimentales est due à la difficulté de définir l'axe de symétrie. En plus la surface détectrice a 0.3 mm de diamètre, or le diamètre du faisceau est de l'ordre de 6 mm. Elle intègre donc 5% du signal.

Nous remarquons sur les courbes un étalement du faisceau qui s'explique par le phénomène d'interférence résultant des deux ondes d'intensité différentes réfléchies sur la lame séparatrice. En effet la distance de séparation des deux ondes est de 4.3 mm pour un angle d'incidence de  $45^\circ$ . Elle est inférieure à la largeur la plus petite du faisceau : le beam waist  $2w_0$  est de 5 mm. Ce phénomène optique peut être évité, en augmentant l'épaisseur de la lame. Néanmoins une telle solution provoque une augmentation des pertes par absorption qui va dégrader la puissance laser. Cela nous conduit à augmenter la pression du mélange. Un tel procédé donne lieu à un effet de compétition entre modes [For.65]. Ce qui pourrait expliquer le comportement irrégulier des profils. Pour vérifier cela, nous avons enregistré voir figure-E2- un autre profil avec d'autres conditions de fonctionnement (pression du mélange égale à 4.35 torrs ) et d'autres réglages de la cavité. Ce profil exhibe clairement une structure gaussienne indiquant ainsi l'oscillation sur le mode fondamental  $TEM_{00}$ . Cependant, cette forme ne dure pas longtemps du fait de la compétition entre les modes transverses dans la cavité qui dépend des pertes variables dans le temps.

De même que la diminution du courant de décharge influe également sur le comportement irrégulier des profils. La figure-E3- est enregistrée dans les mêmes conditions que la figure-E1-a.

Ce comportement peut être causé également par les pertes par diffraction aux niveaux des ouvertures du tube à décharge qui sont de l'ordre de 1% à 2% pour les modes  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{01}$ ,  $TEM_{10}$  et le mode  $TEM_{11}$  [Dan.98]. Cependant ces pertes induisent des ondulations faibles d'environ 3% [Sie.86]. Ce qui traduit le comportement plus ou moins lisse de la plupart d'entre eux.

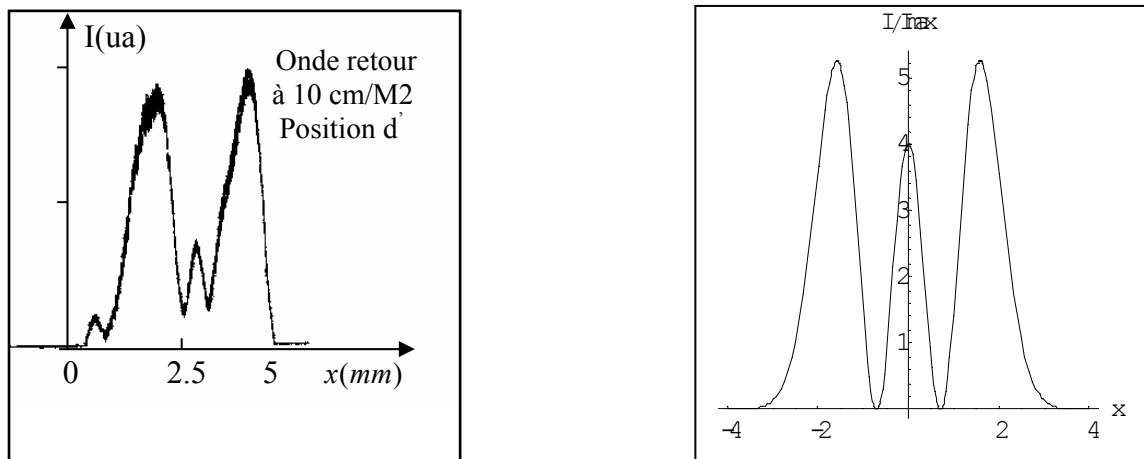
On notera également un écart en largeur et en forme (nombre de pics) pour les ondes aller et retour. Ceci était prévisible du fait que ces deux ondes progressives proviennent d'endroits différents. Par conséquent elles subissent des effets différents. En fait l'onde retour n'est pas affectée par le phénomène d'interférence évoqué plus haut (voir figures E1 en positions

a', c', d'). Il est donc possible ( en faisant une comparaison avec la largeur du faisceau gaussien) de connaître d'après ces profils le type de mode transverse oscillant (dans la limite de précision de nos appareils de mesure). Par exemple :

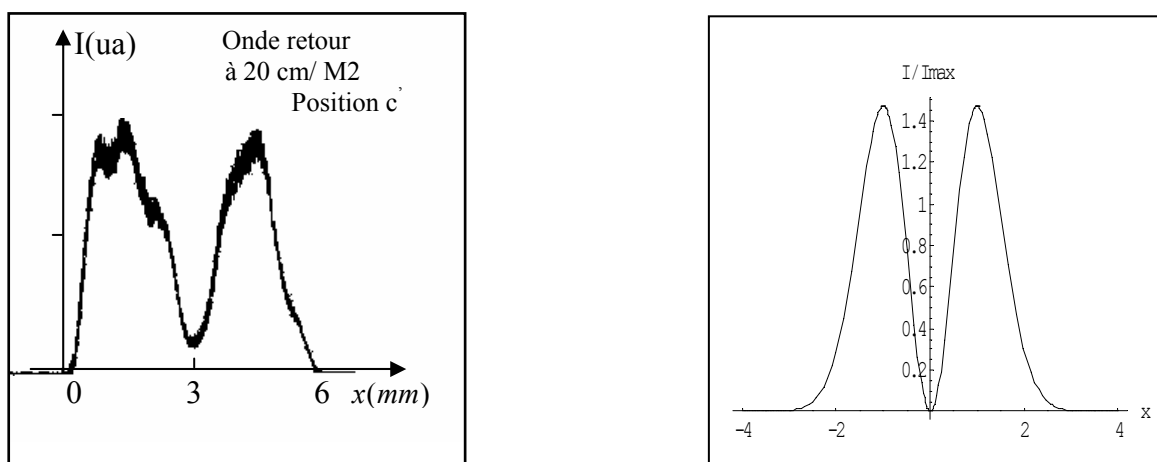
La figure-E1-d' se rapproche du mode  $TEM_{20}$ . Cette structure est compatible à celle obtenue théoriquement pour une géométrie rectangulaire (voir figure-I.7-).

La figure -E1-c' a une allure proche du mode  $TEM_{01}$  (pour une géométrie cylindrique) ou le mode  $TEM_{10}$  (pour une géométrie rectangulaire) (voir figure-I.8-). La figure-E1-a' se rapproche également du mode  $TEM_{10}$ .

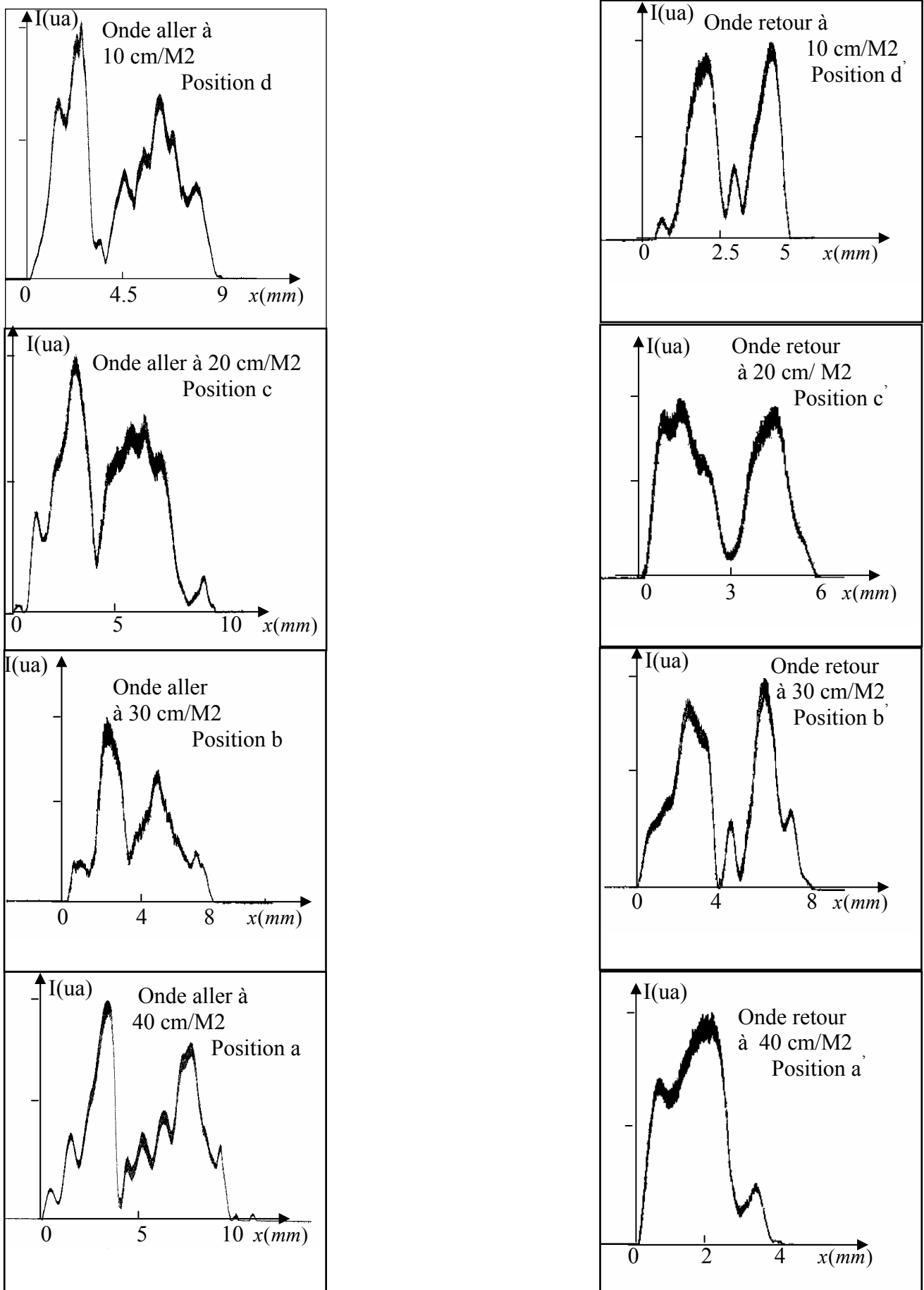
Alors que sur la figure-E1-b' deux impulsions apparaissent, montrant clairement le phénomène d'interférence évoqué ci dessus. En fait la largeur du faisceau à cette position est deux fois plus grande que la largeur du faisceau gaussien.



**Figure-I.7-** Le mode  $TEM_{20}$  expérimental et théorique

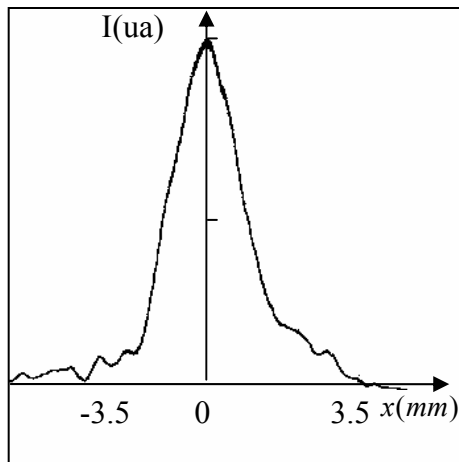


**Figure-I.8-** Le mode  $TEM_{10}$  expérimental et théorique

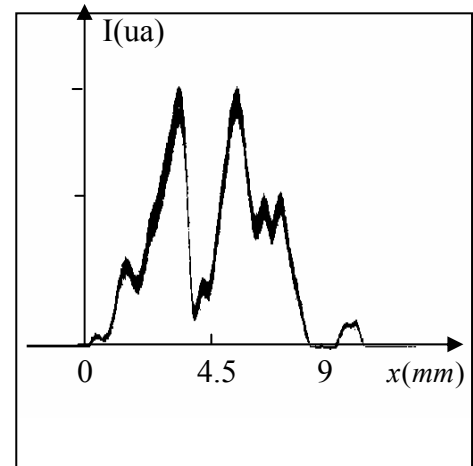


**Figure-E1-** Profils transverses d'ondes aller et retour en différentes positions axiales dans l'espace intra cavité pour une pression de  $P=5.28$  torrs, et un courant de décharge  $I=6$  mA.

Au vu de nos résultats expérimentaux, nous sommes tentés de conclure que le mode  $TEM_{10}$  (ou  $TEM_{01}$ ) est le mode oscillant le plus probable après le mode fondamental au seuil d'oscillation.



**Figure-E2-** Mode  $TEM_{00}$  (onde aller en position a) pour une pression du mélange  $p=4.35$  torrs



**Figure -E3-** Onde aller en position a pour un courant de décharge  $I=4$  mA

### b) Avec la lame séparatrice de 7.8 mm

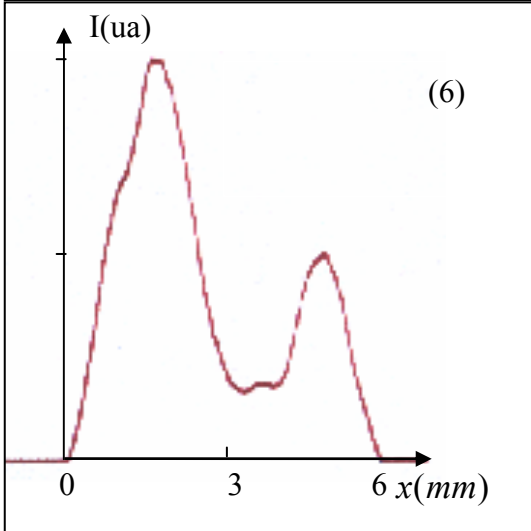
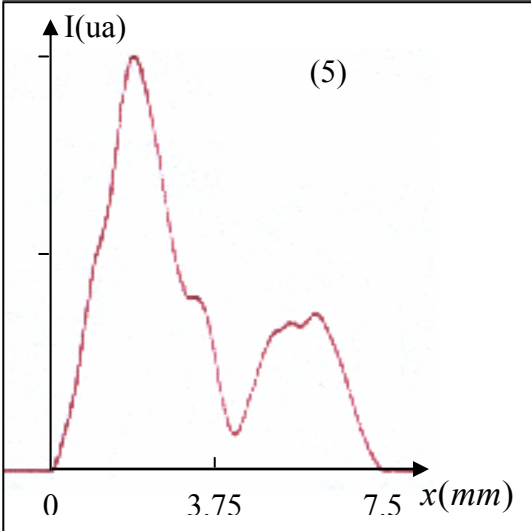
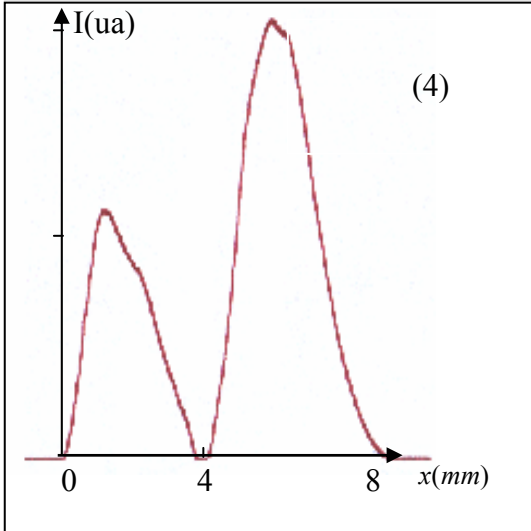
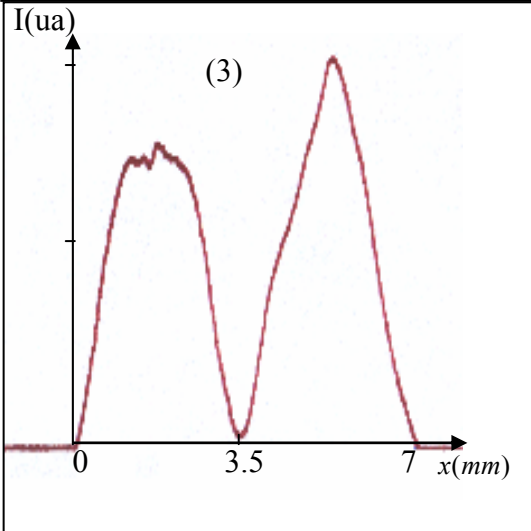
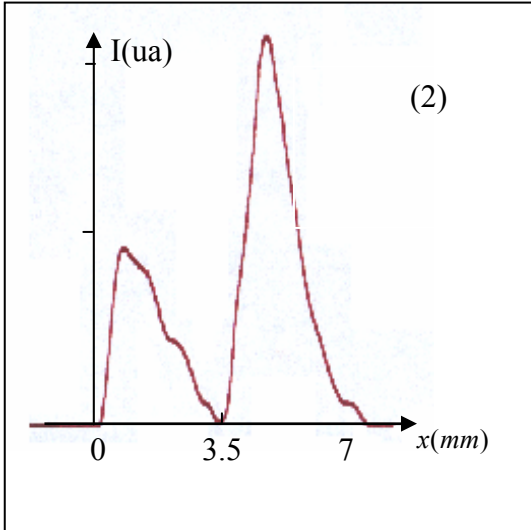
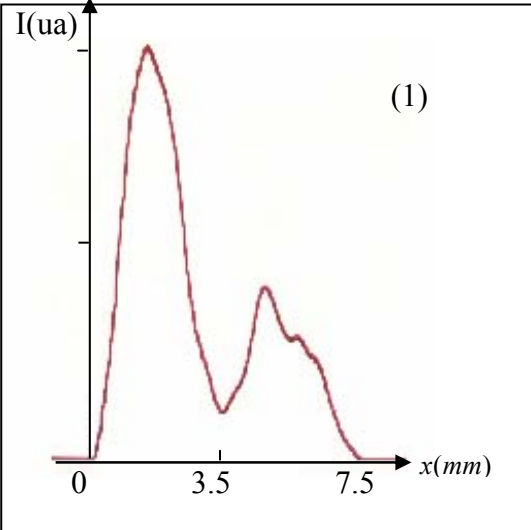
Pour éviter au maximum le phénomène d'interférence précédemment mentionné, nous avons utilisé une autre lame d'épaisseur 7.8 mm afin de pouvoir séparer les deux ondes sur la lame, dont l'écart de séparation  $\Delta = 6.05$  mm.

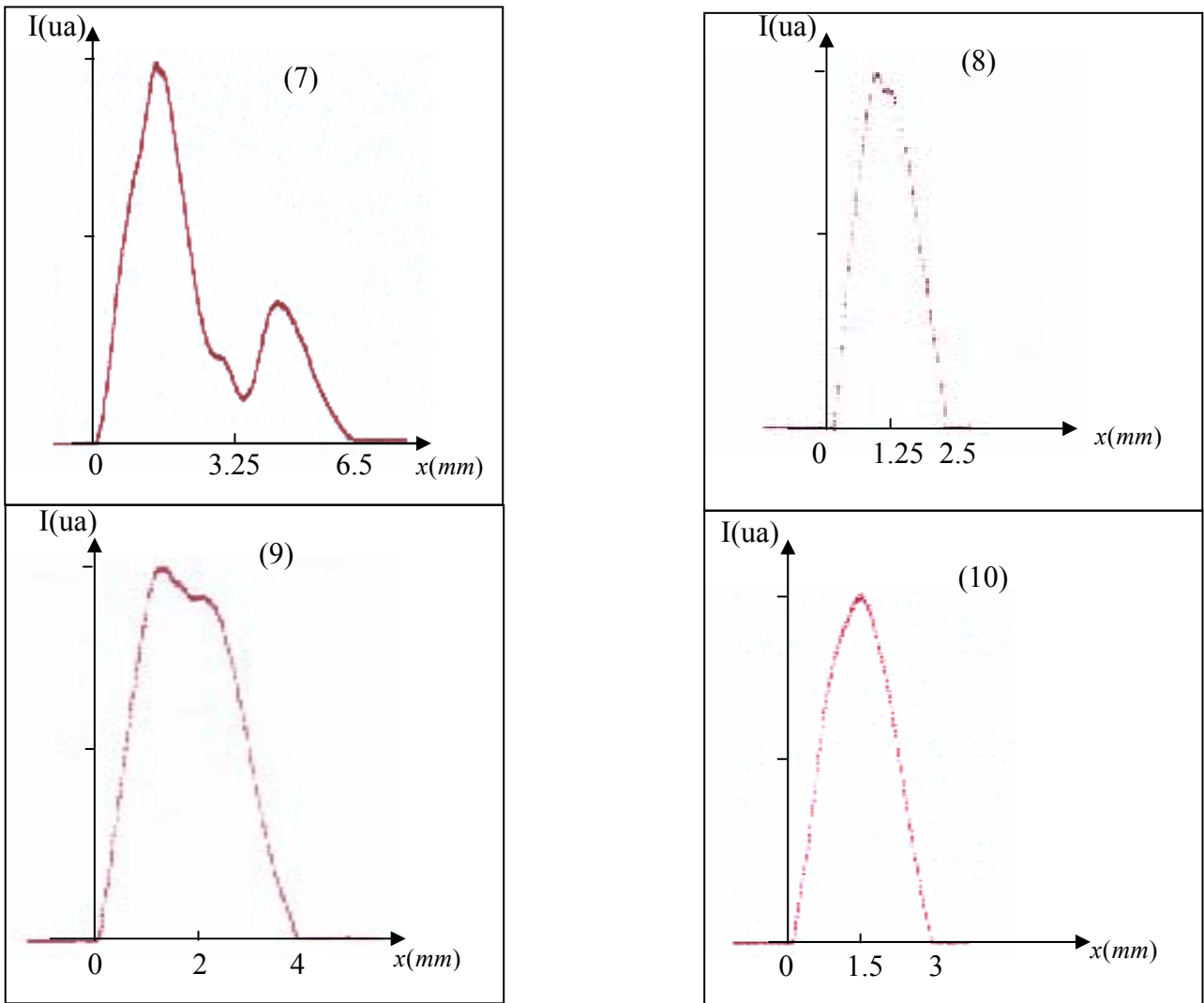
Les résultats expérimentaux sont obtenus avec une pression du mélange  $p=5.32$  torrs, et un courant de décharge  $I=5$  mA. Ils sont présentés sur la figure -E4 -.

En général, nous constatons un profil transverse constant le long de l'axe optique pour l'onde aller et retour. Ce résultat est totalement imprévu avec une cavité non diaphragmée où aucune précaution n'est prise pour supprimer les modes transverses d'ordre élevé. Néanmoins, ce résultat n'est pas surprenant est peut être expliqué par le fait que:

- ❖ Dans un résonateur passif, les modes caractérisés par les plus faibles pertes sont en général des modes d'ordres inférieurs, en particulier, le mode fondamental. Or un résonateur passif peut être assimilé à un résonateur actif au seuil d'oscillation [Tar.79]. Ceci est clairement traduit par nos courbes expérimentales. L'onde aller oscille probablement sur le mode  $TEM_{01}$  ou  $TEM_{10}$ , alors que l'onde retour à une allure proche du mode  $TEM_{00}$ .

- ❖ D'un autre coté l'onde aller présente une largeur presque égale à celle obtenue par le modèle gaussien en chaque position  $z$  dans la limite de précision de nos appareils de mesure. Ce qui atteste la remarque précédente avec l'ancienne lame. Alors que l'onde retour adopte une forme plus fine en s'approchant du tube à décharge, pour s'adapter à son diamètre, ce qui est une confirmation du rôle joué par ce tube.
- ❖ Nous avons également présenté deux ou trois courbes relevées en une seule position dans un laps de temps de 2 minutes, montrant le changement de la distribution transversale de l'intensité. En effet les pertes des différents modes étant différentes, ces modes s'affaibliront avec des vitesses différentes donnant lieu à une structure des modes du champ variable avec le temps. Néanmoins cette variation temporelle n'est pas trop prononcée du fait que l'oscillation reste constante sur le même mode. Cela est dû au fait, que le résonateur se comporte comme un filtre qui sélectionne dans un champ de rayonnement quelconque les composantes qui correspondent aux modes dont les pertes sont les plus faibles. La géométrie de notre résonateur semble favoriser l'oscillation en onde aller sur le mode  $TEM_{01}$  (ou  $TEM_{10}$ ).
- ❖ Il est à noter également, que la distribution n'est pas tout à fait symétrique. Cela s'explique par le fait que la symétrie cylindrique est brisée par la présence de différents éléments dans la cavité (tube à décharge, lame séparatrice). La dissymétrie est bien claire pour l'onde aller que pour l'onde retour car elles ne subissent pas les mêmes effets.
- ❖ Il est évident que les miroirs du résonateur n'introduisent aucun effet de diffraction sur le faisceau laser car ( $a_{Mi} \gg w_0$ ), avec  $a_{Mi}$  est l'ouverture de l'un des miroirs, et  $w_0$  est la largeur du faisceau à l'origine (beam waist). Ainsi, le nombre de Fresnel 
$$N_f = \frac{a_{M1} \cdot a_{M2}}{\lambda \cdot L} \gg 1.$$
 Par contre le tube à décharge peut causer une légère troncature à la limite de l'effet de désalignement, et qui aura des effets que nous étudierons plus loin.





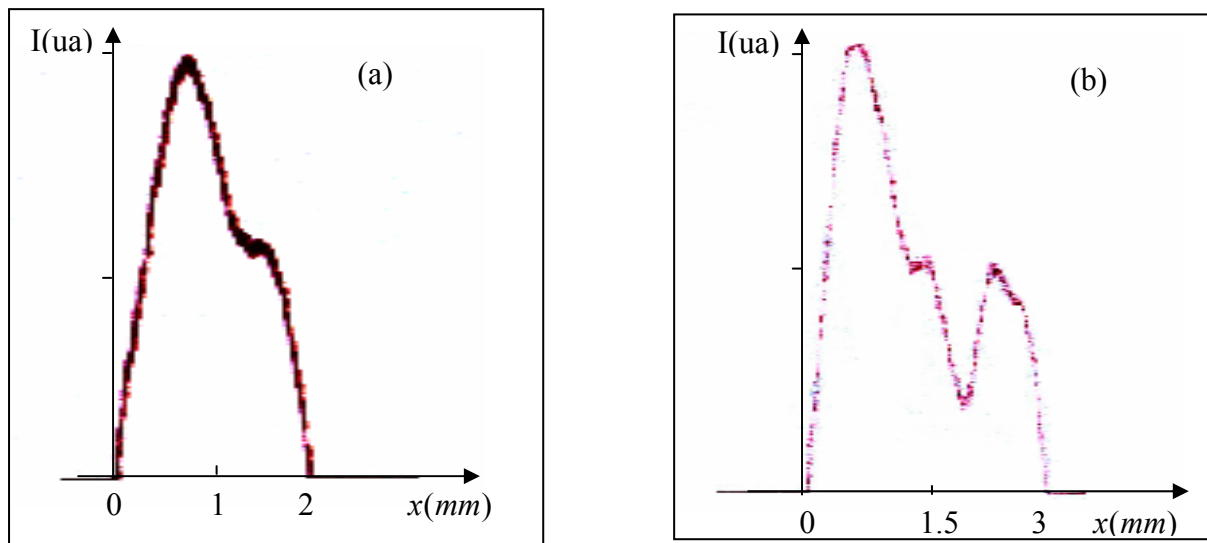
**Figure –E4-** Profils transverses des ondes aller et retour en différentes positions pour une pression du mélange de  $P=5.32$  torrs, et un courant de décharge  $I=5$  mA.

- (1) et (2) : Onde aller à 40 cm du miroir M2 à deux instants différents séparés de presque  $2'$ .  
 (3), (4), et (6) : Onde aller à 20 cm du miroir M2 à trois instants différents.  
 (5): Onde aller à 10 cm du miroir M2.  
 (7): Onde aller à 30 cm du miroir M2.  
 (8), (9), et (10) : Onde retour respectivement à 30 cm, 10 cm et à 20 cm du miroir M2.

### I.5.3 Influence du gain sur la distribution radiale de l'intensité

Pour mettre en évidence l'effet du gain sur nos courbes, nous avons enregistré d'autres profils de la distribution radiale de l'intensité.

La figure –E5- ci dessous montre l'effet de la pression du mélange gazeux sur les modes de la cavité, en gardant fixes le courant de décharge et les réglages des miroirs.



**Figure-E5-** Influence de la pression du mélange gazeux sur la distribution radiale de l'intensité de l'onde aller à 40 cm/M2.

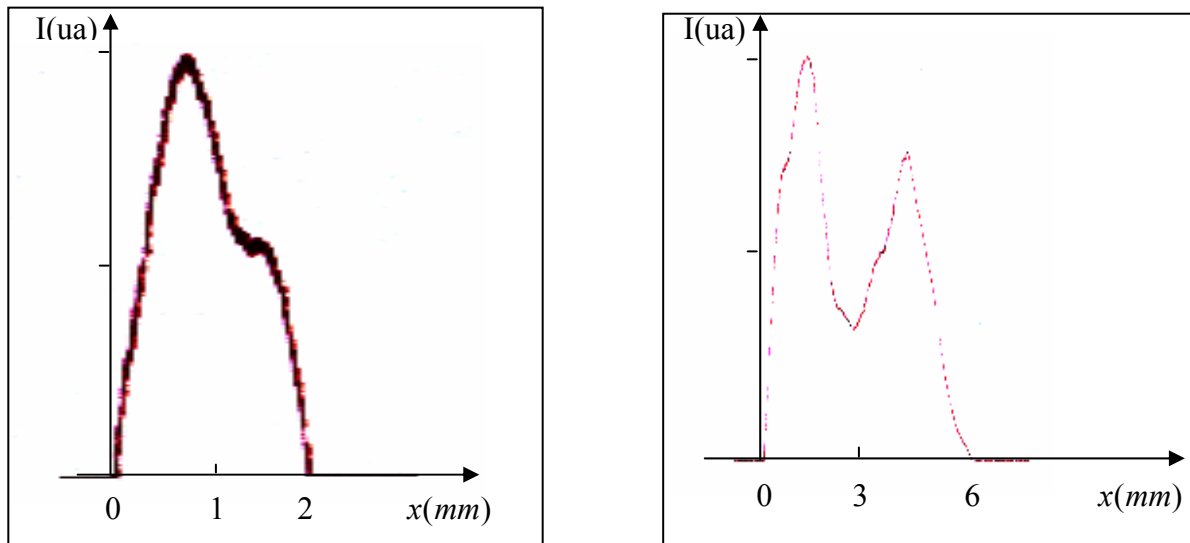
(a) : pour une pression de 5.76 torrs

(b) : pour une pression de 6.24 torrs

La pression du mélange influe considérablement sur les modes transverses. En effet l'augmentation de la pression du mélange implique une augmentation du gain d'amplification, ce qui favorise l'oscillation sur d'autres modes d'ordres élevés.

### I.5.3 Influence de l'alignement sur la distribution radiale de l'intensité

De même pour montrer l'effet de désalignement sur la distribution des modes transverses nous avons procédé à d'autres réglages de la cavité et enregistré un profil radial avec une pression et un courant constants.



**Figure-E.6-** Influence de désalignement sur la distribution radiale de l'intensité à 40 cm/M2 pour une pression de 5.76 torrs

L'effet de désalignement provoque un étalement spatial du profil car l'espace occupé par le mode dans les deux cas est différent (voir figure-E.6- ci dessus). Il implique également une oscillation sur d'autres modes transverses.

## I.6 Conclusion

En conclusion de cette étude expérimentale, on peut dire que l'oscillation sur les modes transverses dépend aussi bien des effets géométriques que des paramètres du milieu amplificateur ( pression, courant ). Ainsi la distribution transversale de l'intensité est variable dans le temps du fait de la variation des pertes. Cependant, les conditions expérimentales favorisent l'oscillation sur un nombre très faible de modes transverses, au vu de l'allure de nos courbes expérimentales.

L'étude théorique qui va suivre nous permettra de mieux comprendre cette dynamique d'évolution de l'oscillation des modes transverses.

## II Méthodes d'obtention du champ résonant dans une cavité laser

### II.1 Introduction

D'un point de vue théorique, l'intérêt porté aux modes propres du résonateur laser [Sie.86] se justifie physiquement par la nécessité de savoir lesquelles de ces formes de distribution transverse du champ sont reproductibles exactement dans le résonateur au bout de chaque aller-retour. En fait, le mode propre d'une cavité est avant tout un état stationnaire. C'est le résultat conjugué des phénomènes de diffraction et d'interférence.

Pour déterminer le champ résonant ou plus exactement les modes propres dans la cavité laser, nous allons utiliser deux méthodes. La première est basée sur le propagateur paraxial (voir annexe A) et où l'on considère que les deux miroirs constituent des surfaces infinies. Dans ce cas uniquement le problème admet une solution analytique (voir Annexe B). La deuxième méthode est basée sur la décomposition du champ sur les modes propres de la cavité. Les résultats obtenus par cette deuxième méthode sont alors comparés et étendus aux deux types de géométrie cylindrique et rectangulaire rencontrés dans les résonateurs laser.

### II.2 Méthode basée sur la décomposition du champ

Cette méthode, mise au point dans les années 80 [Sté.83], consiste à décomposer le champ en deux ondes progressives :

- Une onde aller se propageant dans la direction  $z > 0$ .
- Une onde retour se propageant dans la direction  $z < 0$ .

Cette façon de séparer le mode en ses deux ondes aller et retour est élégante et plus pratique que celle développée par Fox et Li [Fox.61], car ces ondes proviennent d'endroits différents et par conséquent ne subissent pas les mêmes effets géométriques. Ainsi, l'étude permet de prévoir la distribution transversale de l'intensité en différentes positions le long de l'axe de propagation. Les  $n$  passages forment un opérateur aller retour représenté par une matrice dont les vecteurs propres représentent les modes propres de la cavité. Cet opérateur nous renseigne sur les changements subit par le champ durant  $n$  aller retour en donnant le champ final en fonction du champ initial.

Cette méthode telle qu'elle a été utilisée par Stéphan et al [Sté.83], doit être reformulée selon le type de cavité considéré.

Le but initial de cette méthode était de sélectionner le mode fondamental  $TEM_{00}$  à l'aide d'un diaphragme à l'intérieur de la cavité [Ait.88]. Vu l'efficacité de cette méthode tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du résonateur laser [Kel.87], nous allons étendre son application dans le cas d'une cavité non diaphragmée dont la propagation des modes ne sera pas limitée.

## Application de la méthode pour une cavité non diaphragmée concave- concave

### II.3 Cas d'une géométrie cylindrique

L'étude se fait dans la cavité représentée à la figure-II.1-. Le miroir concave de rayon de courbure  $R_{M1}$ , de coefficient de réflexion  $R_1$ , et d'ouverture  $a_1$  est situé à la position  $Z_1$ . L'autre miroir concave de rayon de courbure  $R_{M2}$ , de coefficient de réflexion  $R_2$ , et d'ouverture  $a_2$  est positionné en  $Z_2$ , tel que  $L = Z_2 - Z_1$  avec  $L$  la longueur de la cavité.

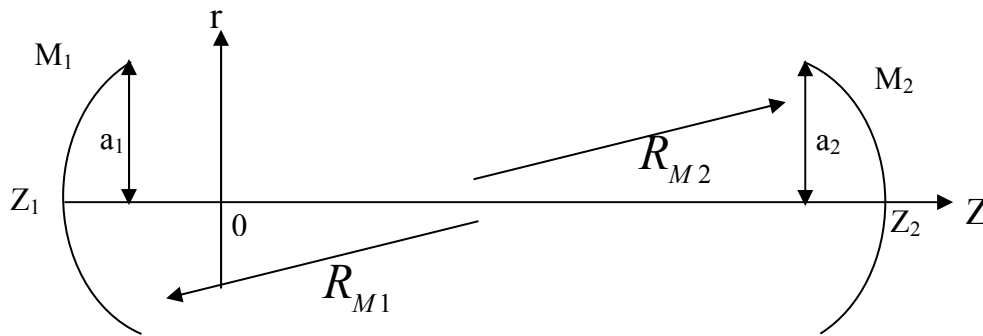


Figure-II.1- cavité passive concave-concave

Par la suite, les fonctions et les opérateurs concernant l'onde aller seront affectés de l'indice f (pour forward) et ceux concernant l'onde retour de l'indice b ( pour backward).

Les modes propres de la cavité passive sont dans ce cas les modes de Laguerre-Gauss qui ont pour expressions pour les ondes aller et retour (voir Annexe A, formules (A.46, A.47)):

$$G_{fp}^l(r, z) = \left( \frac{2}{\pi} \frac{p!}{(p+l)!} \right)^{1/2} \frac{1}{w(z)} L_p^l \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \left( \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \exp \left[ i \left( \frac{kr^2}{2R_c(z)} - (2p+l+1)\phi(z) \right) \right] \quad (\text{II.1a})$$

$$G_{bp}^l(r, z) = \left( \frac{2}{\pi} \frac{p!}{(p+l)!} \right)^{1/2} \frac{1}{w(z)} L_p^l \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \left( \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \exp \left[ -i \left( \frac{kr^2}{2R_c(z)} - (2p+l+1)\phi(z) \right) \right] \quad (\text{II.1b})$$

avec  $k$  est le nombre d'onde,  $L_p^l \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right)$  sont les polynômes de Laguerre associés,  $w(z)$  est la largeur du faisceau laser,  $R_c(z)$  est le rayon de courbure du front d'onde, et  $\phi(z)$  est la phase de Gouy.

Avant de commencer le traitement analytique de cette méthode, il faut remarquer que les différents modes de Laguerre-Gauss sont caractérisés par le même rayon de courbure du front d'onde, mais par un déphasage  $(2p + l + 1)\phi(z)$  différent. Cela implique que la fréquence de résonance des différents modes transverses est différente.

Puisque la cavité a une symétrie axiale, il s'ensuit que le faisceau l'a aussi, ce qui limite le traitement à  $l=0$  :

les deux expressions (II.1) deviennent:

$$G_{fp}(r, z) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{w(z)} L_p \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left( -\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[ i \left( \frac{kr^2}{2R_c(z)} - (2p+1)\phi(z) \right) \right] \quad (\text{II.2a})$$

$$G_{bp}(r, z) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{w(z)} L_p \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left( -\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[ -i \left( \frac{kr^2}{2R_c(z)} - (2p+1)\phi(z) \right) \right] \quad (\text{II.2b})$$

Le champ à l'intérieur de la cavité est décomposé en champ aller et en champ retour :

$$E = E^f + E^b \quad (\text{II.3})$$

En réalité le champ dans la cavité ne peut être représenté par les modes de Laguerre-Gauss à cause des distorsions, des différentes ouvertures, de l'astigmatisme, de la non-linéarité du milieu...etc. Mais il peut être développé en série linéaire sur les modes de Laguerre-Gauss [Web.87] :

$$E = \sum C_{pl} E_p^l \quad (\text{II.4})$$

Où  $C_{pl}$  est le paramètre de superposition linéaire et complexe,  $C_{pl} = \rho_{pl} \exp(i\psi_{pl})$ .

Puisque la distance de propagation dans le laser à CO2 est très courte (qq. cm) [Wan.00], le couplage entre les modes peut être ignoré, i.e.  $\psi_{pl} = 0$ .

De là, les champs aller et retour ont pour expressions :

$$E_f(r, z) = e^{ikz} \sum_p f_p G_{fp}(r, z) \quad (\text{II.5a})$$

$$E_b(r, z) = e^{-ikz} \sum_p b_p G_{bp}(r, z) \quad (\text{II.5b})$$

Où les  $f_p$  et  $b_p$  sont respectivement les coefficients aller et retour, supposés constants le long de la cavité. En effet, dans le cas d'un champ résonnant dans une cavité laser, la fonction d'onde  $E(r, z)$  satisfait l'équation d'onde paraxiale (voir annexe A). Il est donc facile de montrer [Ste.83], que les coefficients  $f_p$  et  $b_p$  sont indépendants de la coordonnée  $z$ .

Les conditions aux limites imposées par la cavité à la résonance et qui ne sont en fait, que les conditions de Kirchhoff [Bor.59], valables tant que les ouvertures des miroirs sont très larges devant la longueur d'onde  $\lambda$ , s'écrivent :

$$\text{Pour le champ aller par : } E_f = R_1 E_b. \quad (\text{II.6a})$$

$$\text{Pour le champ retour par : } E_b = R_2 E_f. \quad (\text{II.6b})$$

Avec  $R_1$  et  $R_2$  sont respectivement les coefficients de réflexion des miroir  $M_1$  et  $M_2$ .

Les deux paramètres  $f_p$  et  $b_p$  peuvent être obtenus par les conditions d'orthonormalisations :

$$f_p = e^{-ikz} \int_{M_1} E_f G_{fp}^* ds \quad (\text{II.7a})$$

$$b_p = e^{ikz} \int_{M_2} E_b G_{bp}^* ds \quad (\text{II.7b})$$

Le terme de phase  $\exp\left(\pm ik\left(z + \frac{r^2}{2R_c(z)}\right)\right)$  qui apparaît dans les expressions des champs peut être simplifié en  $\exp(\pm ikz)$ , du fait que les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  constituent une surface équiphasé à la résonance.

### a. Etude sur le miroir M1

La relation (II.7.a) s'écrit :

$$f_p = e^{-ikz_1} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{M_1} E_f G_{fp}^* r dr \quad (\text{II.8})$$

compte tenu de (II.6.a), (II.5.b), (II.2.a) et (II.2.b), elle devient :

$$f_p = e^{-2ikz_1} R_1 \sum_q b_q C_{qp} e^{2i(p+q+1)\phi_1(z)} \quad (\text{II.9})$$

avec

$$C_{pq} = \int_{M_1} e^{-x} L_p(x) L_q(x) dx$$

$$\text{où} \quad x = \frac{2r^2}{w_1^2}$$

et  $w_1$  : est la largeur du faisceau sur le miroir  $M_1$

ou encore :

$$f_p = R_1 e^{-2i[kz_1 - \phi_1(z)]} \sum_q b_q C_{qp} e^{2i(p+q)\phi_1(z)} \quad (\text{II.10})$$

### b. Etude sur le miroir M2

De même la relation (II.7.b) s'écrit :

$$b_q = e^{ikz_2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{M_2} E_b G_{bq}^* r dr \quad (\text{II.11})$$

à l'aide de (II.6.b), (II.5.a), (II.2.a) et (II.2.b), la relation (II.11) devient :

$$b_q = R_2 e^{ikz_2} \sum_v f_v C_{vq} e^{-2i(v+q+1)\phi_2(z)} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{avec} \quad C_{vq} = \int_{M_2} e^{-x} L_v(x) L_q(x) dx$$

$$\text{où} \quad x = \frac{2r^2}{w_2^2}$$

et  $w_2$  : est la largeur du faisceau sur le miroir  $M_2$

$$\text{D'où :} \quad b_q = R_2 e^{2i[kz_2 - \phi_2(z)]} \sum_v f_v C_{vq} e^{-2i(v+q)\phi_2(z)} \quad (\text{II.13})$$

Après un aller-retour, les coefficients  $f_p$  deviennent  $f_{p'}$  :

$$f_{p'} = R_1 R_2 e^{2ikL} e^{-2i\Delta\phi(z)} \sum_v \sum_q C_{vq} C_{qp} e^{-2iq\Delta\phi(z)} e^{2i[p\phi_1(z) - v\phi_2(z)]} f_v \quad (\text{II.14})$$

$$\text{avec} \quad \Delta\phi(z) = \phi_2(z) - \phi_1(z)$$

La relation précédente permet de définir un opérateur aller-retour  $R_{\nu q}$  dans l'espace vectoriel décrit par les fonctions de Laguerre-Gauss.

Il vient finalement :

$$f_{p'} = \sum_{\nu} R_{\nu p} f_{\nu} \quad (\text{II.15})$$

avec

$$R_{\nu p} = R_1 R_2 e^{2i[kL - \Delta\phi(z)]} \sum_q C_{\nu q} C_{qp} e^{-2iq\Delta\phi(z)} e^{2i[p\phi_1(z) - \nu\phi_2(z)]} \quad (\text{II.16})$$

La relation (II.15) peut être réécrite sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{p'} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdot & \cdot & R_{1\nu} & \cdot & \cdot & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdot & \cdot & R_{2\nu} & \cdot & \cdot & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{\nu 1} & R_{\nu 2} & \cdot & \cdot & R_{\nu\nu} & \cdot & \cdot & R_{\nu n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdot & \cdot & R_{n\nu} & \cdot & \cdot & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

La résolution de l'équation (II.15) nécessite la recherche des valeurs propres de l'opérateur  $R_{\nu p}$ , qui renseignent sur les pertes. Ses vecteurs propres sont les modes propres de la cavité.

Pour donner une résolution numérique et physique de l'équation précédente, il est impératif de tronquer la base en donnant une valeur limite à  $\nu$ .

Cette valeur a été déterminée par [Tra.02] en se basant sur l'approche de Siegmen [Sie.86] dans le cas de la diffraction des modes d'Hermite-Gauss :

$$\nu = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a_i}{w_i} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{II.18})$$

Où

$a_i$  est l'ouverture la plus grande parmi celles de M1 et M2.

$w_n^{(i)}$  est la largeur du mode d'ordre  $n$  au niveau de l'ouverture, elle est différente du mode fondamental.

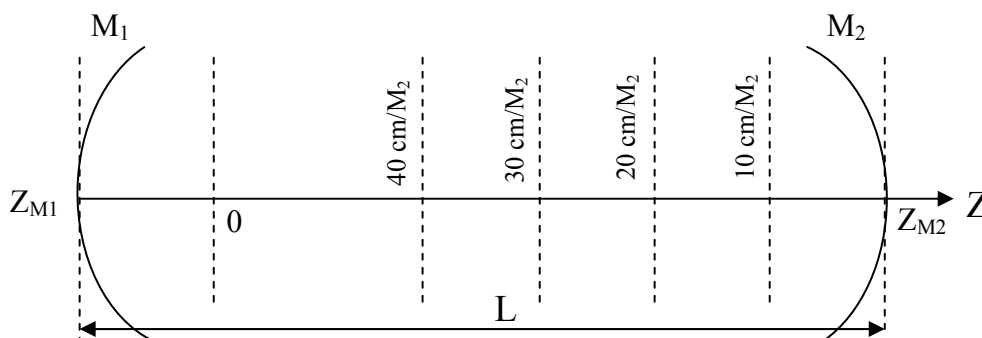
## II.4 Résultats théoriques et discussion

Le modèle théorique que nous avons adopté et qui consiste à décomposer le champ en une onde aller et une autre retour, repose sur les approximations justifiées expérimentalement suivantes:

- L'étude se fait dans une cavité passive, en négligeant pour cela tout effet perturbatif du milieu amplificateur. Or ceci n'est valable qu'au seuil d'oscillation.
- L'approximation paraxiale qui néglige toute variation longitudinale du champ devant sa variation transversale, n'est valable que lorsque l'angle de divergence ne dépasse pas  $30^\circ$ . C'est le cas de notre laser à  $\text{CO}_2$ .
- Une propagation libre de l'onde dans la cavité, en négligeant l'effet du guidage du tube à décharge et la diffraction sur ses extrémités. Cette approximation reste valable tant que le diamètre du tube est grand devant la largeur du faisceau dans toute la cavité.

L'ensemble des résultats qui suivent sont basés sur l'opérateur aller-retour précédemment établi dans une cavité concave-concave non diaphragmée, et l'analyse numérique est donnée en Annexe D. La seule ouverture prise en considération dans ce cas est celle présentée par les miroirs de 20 mm. Une telle ouverture ne donne lieu à aucun effet de diffraction. De ce fait on va étudier uniquement l'influence du nombre de polynômes ainsi que de l'ouverture du tube à décharge sur les modes transverses.

La figure-II.2- indique les positions axiales choisies pour la distribution radiale.



**Figure-II.2-** les différentes positions choisies dans la cavité laser passive pour le relevé des distributions transverses des ondes aller et retour.

### II.4.1 Effet du nombre de polynômes sur la distribution transversale de l'intensité

Nous présentons sur la figure -T1.a-, la distribution transversale à l'origine (beam waist) pour l'onde aller en fonction du nombre de polynômes. On constate que l'augmentation de ce nombre fait apparaître dans la distribution des fluctuations tout en élargissant le faisceau.

Sur la figure -T1.b-, le relevé des distributions des champs aller et retour à 10 cm/ M2, donne lieu aux mêmes conclusions. On note cependant, une différence notable dans la forme des distributions pour les champs aller et retour. Mêmes conclusions pour la position 40 cm/M2 (voir figure T1.c).

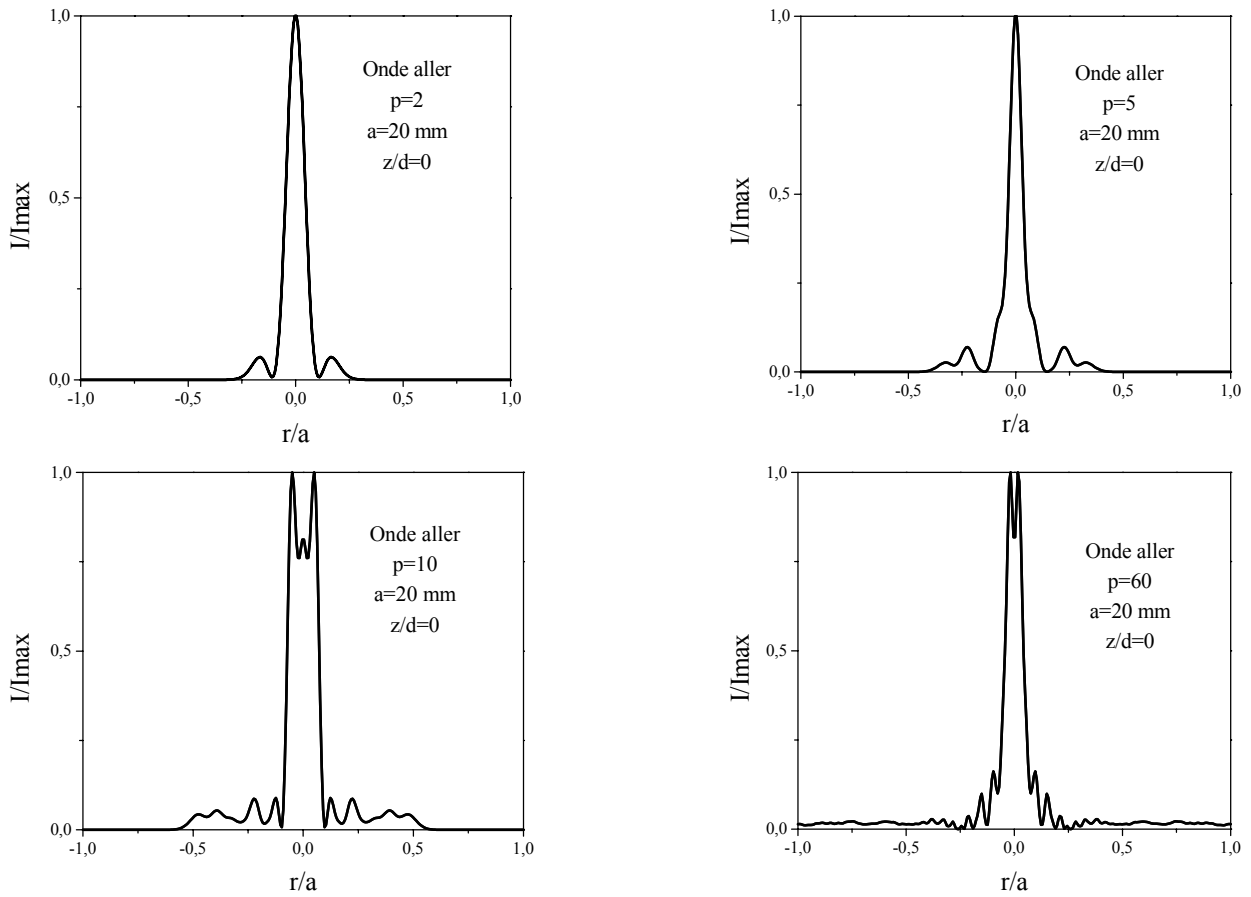
Sur le miroir M1 (figure -T1.d-), les remarques précédentes sont toujours valables avec cependant, un rétrécissement des champs par rapport aux distributions au voisinage du miroir M2. Ce qui est tout à fait logique du fait que la distance d'expansion du faisceau à partir du beam waist situé à l'origine (voir figure- II.2-) vers M1 est plus courte que celle vers le miroir M2.

En conclusion

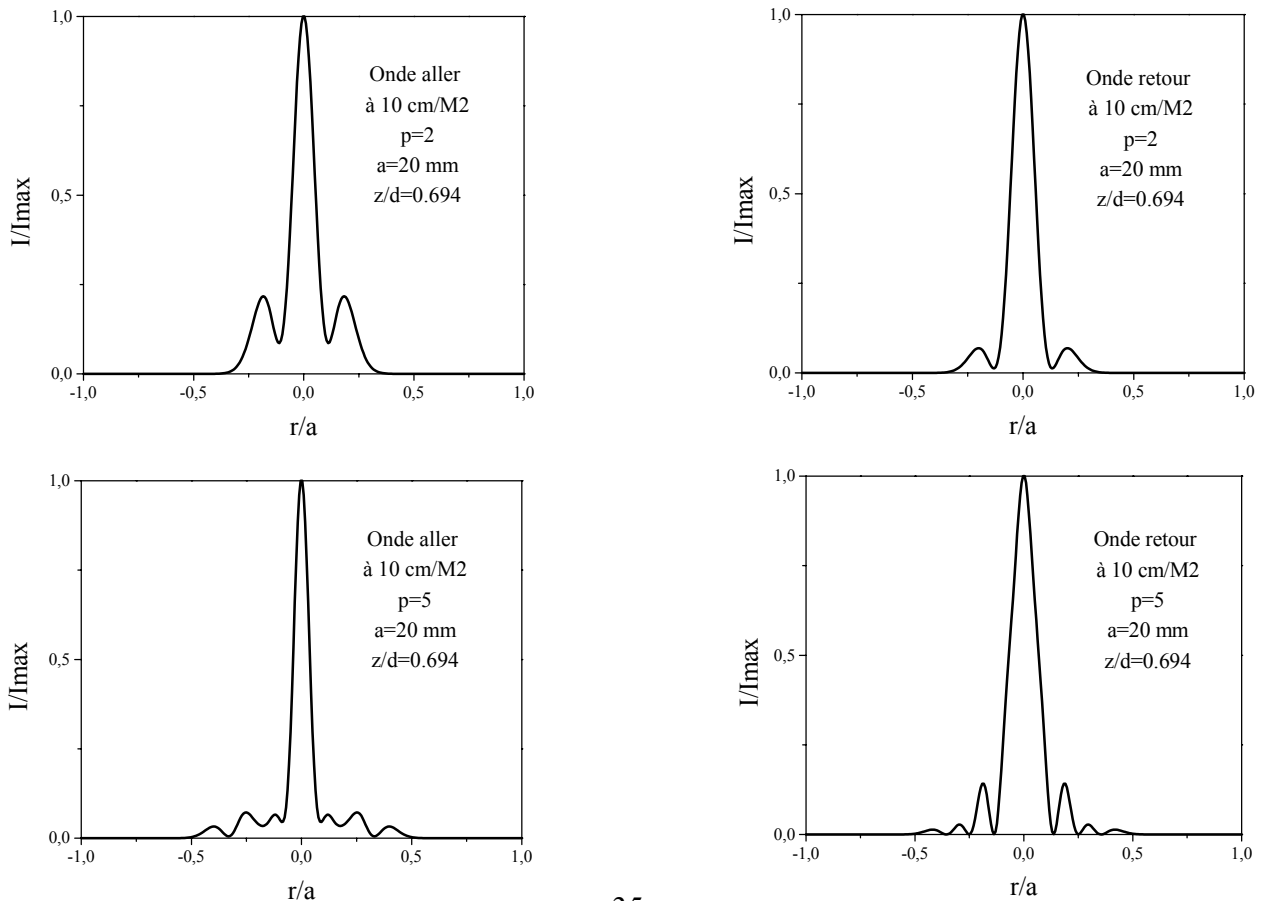
- La largeur du faisceau imposée par la géométrie de la cavité est d'autant plus faible que le nombre de polynômes est faible, permettant ainsi une oscillation sur un nombre très faible de modes passifs.
- A faible nombre de polynômes, la distribution de l'intensité devient lisse. Au fur à mesure qu'on augmente le nombre de polynômes, la distribution résultante est de plus en plus perturbée, pouvant donner lieu à une émission chaotique [Hod.97].
- La largeur du faisceau du côté du miroir M1 est plus petite que du côté du miroir M2.
- L'onde retour est moins large que l'onde aller pour des mêmes positions.

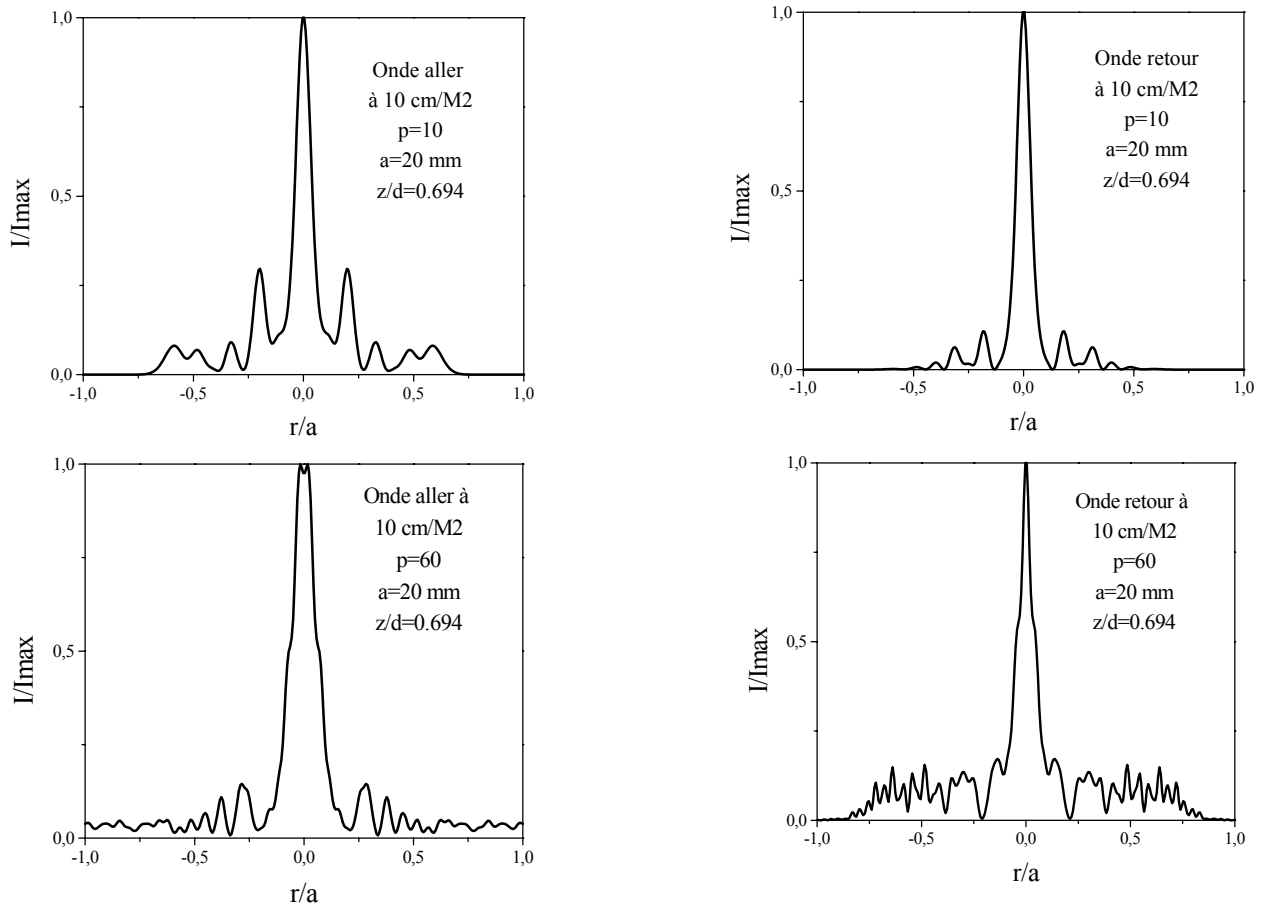
Ces conclusions corroborent du moins qualitativement nos résultats expérimentaux précédemment cités.

**Remarque :** Sur les courbes,  $a$  indique l'ouverture des miroirs,  $p$  est le nombre de polynômes et  $z/d$  représente la position choisie par rapport à l'origine normalisée à la longueur de la cavité  $d$ .

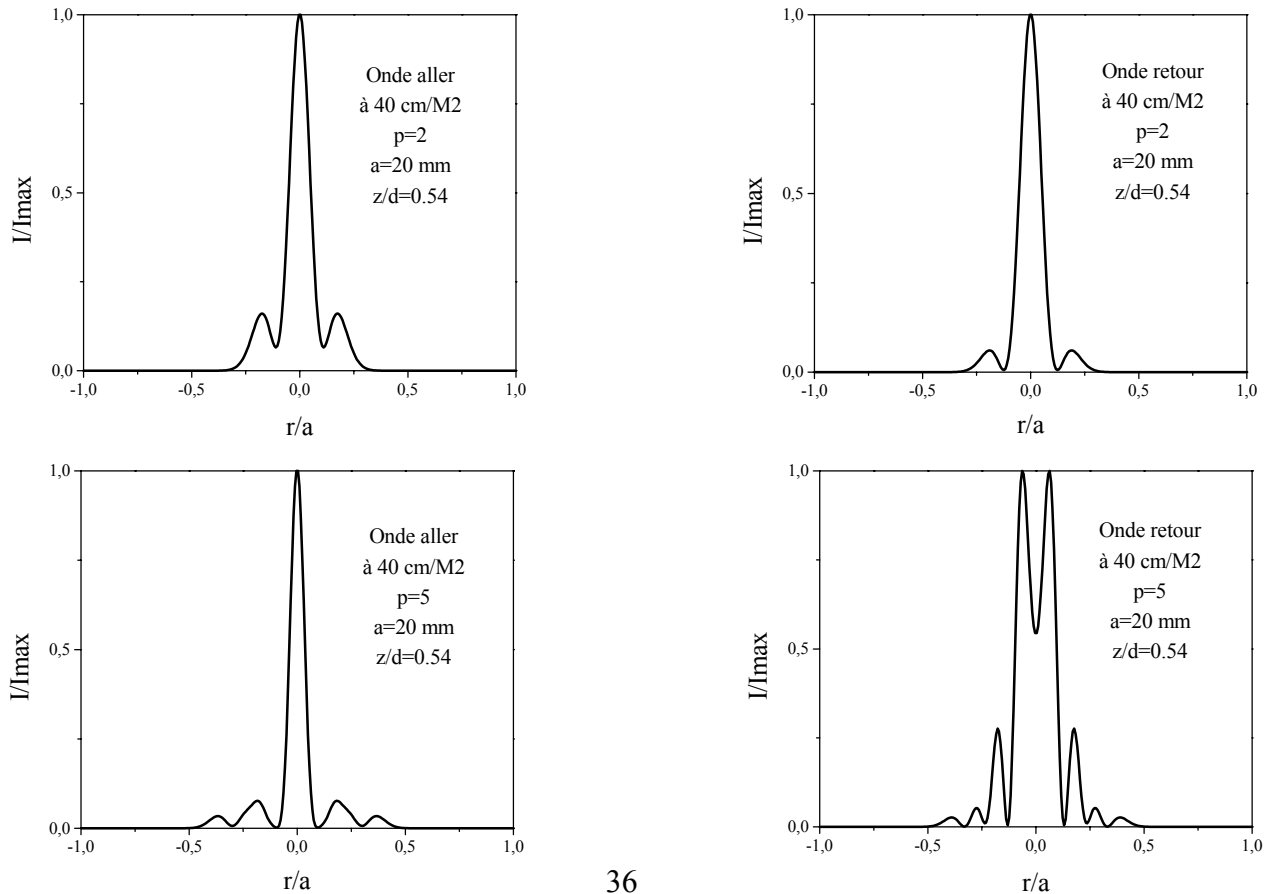


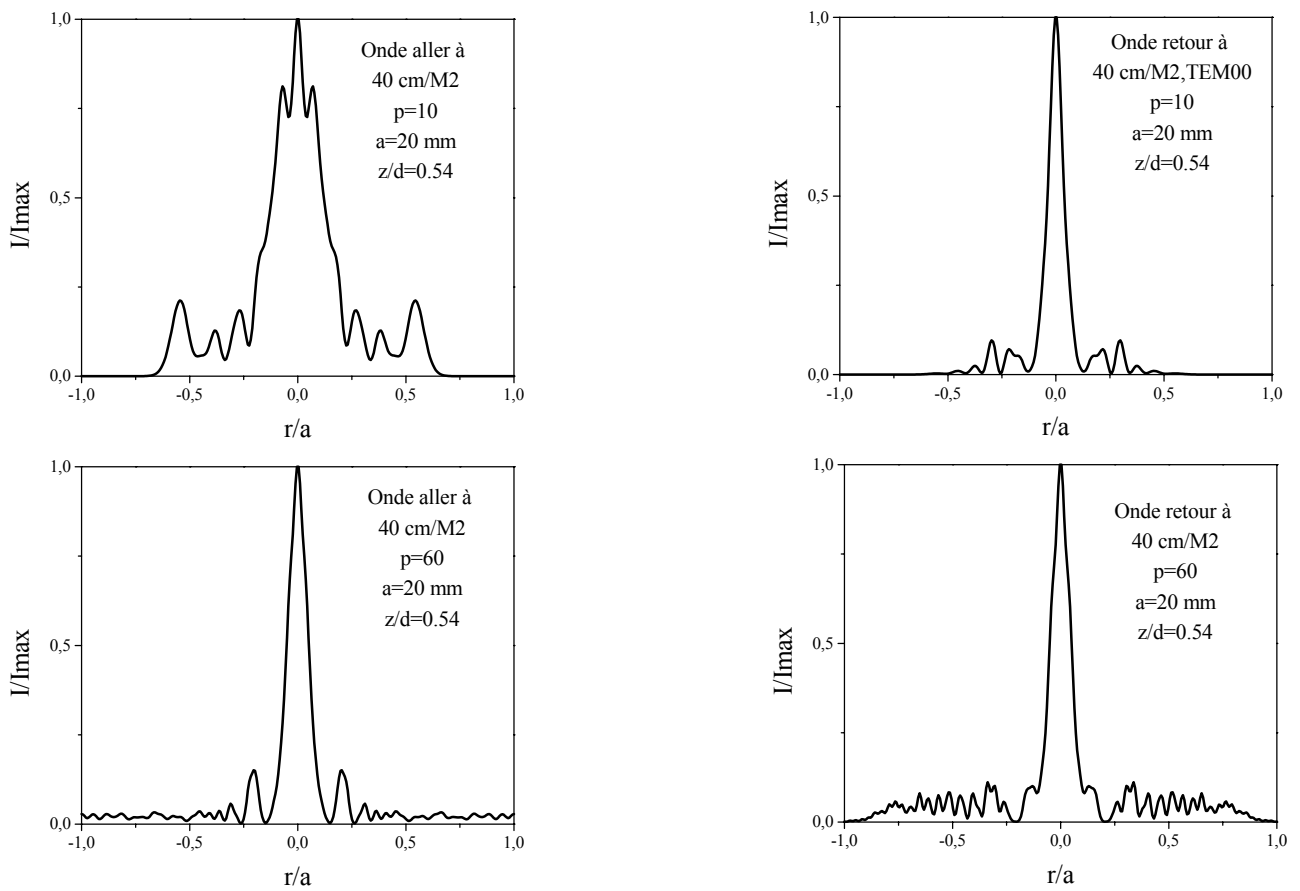
**Figure –T1.a-** Distributions transversales de l’onde aller à l’origine des coordonnées pour différentes valeurs du nombre de polynômes de Laguerre et pour des ouvertures des miroirs de 20 mm.



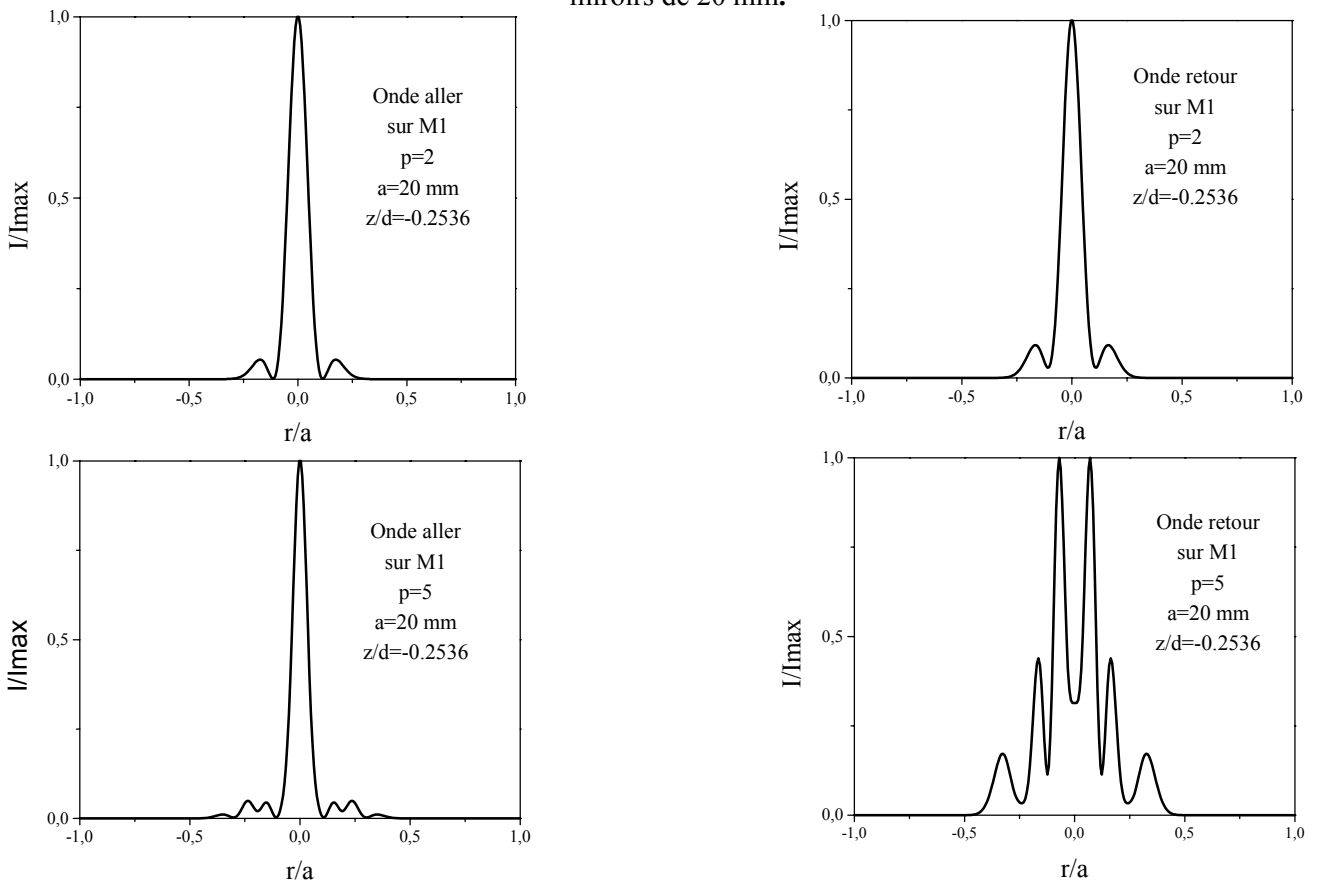


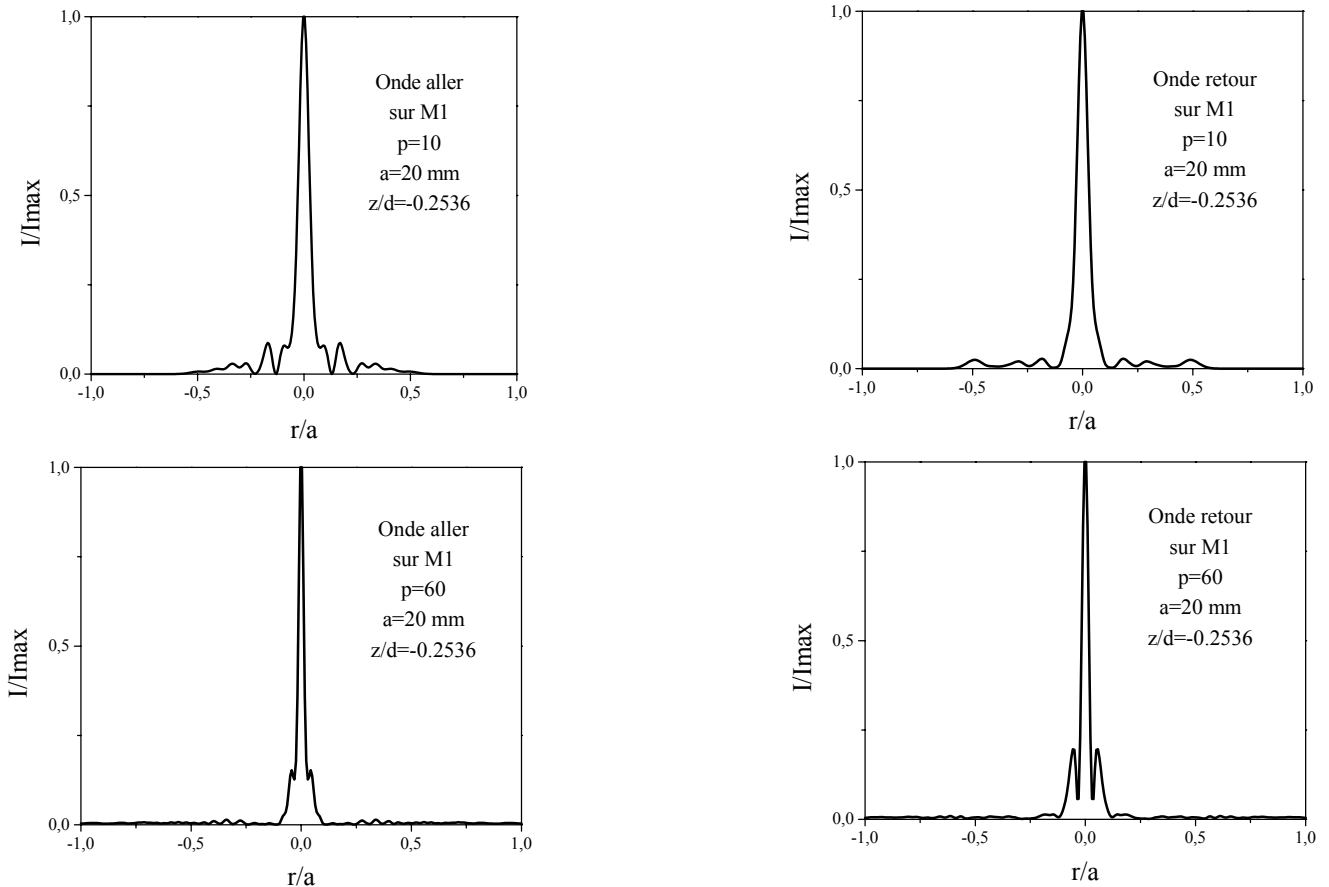
**Figure –T1.b-** Distributions transversales de l’onde aller et retour en position 10 cm/M2 pour différentes valeurs du nombre de polynômes de Laguerre et pour des ouvertures des miroirs de 20 mm.





**Figure –T1.c-** Distributions transversales de l’onde aller en position 40 cm/M2 pour différentes valeurs du nombre de polynômes de Laguerre et pour des ouvertures des miroirs de 20 mm.





**Figure –T1.d-** Distributions transversales de l'onde aller et retour sur le miroir M1 pour différentes valeurs du nombre de polynômes de Laguerre et pour des ouvertures des miroirs de 20 mm.

#### II.4.2 Effet de l'ouverture du tube à décharge sur la distribution transversale de l'intensité

A la lumière des résultats expérimentaux précédents, il est évident que le tube influe sur la distribution transverse. L'onde retour a une largeur plus petite que l'onde aller et au fur à mesure qu'on s'approche du tube, elle s'affine.

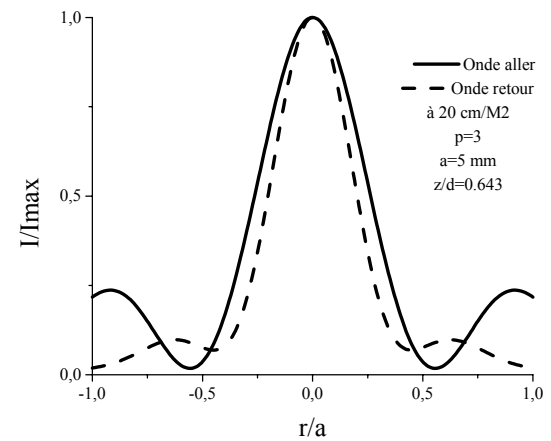
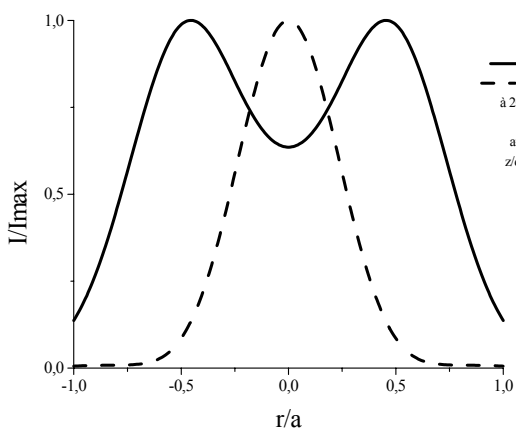
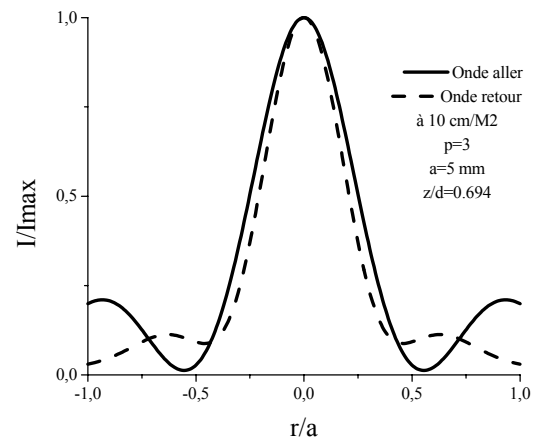
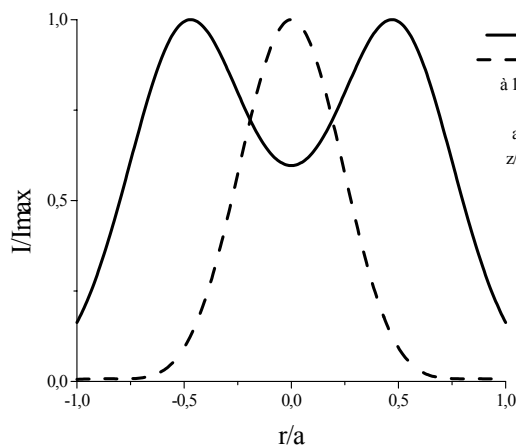
D'un point de vue théorique, l'intégrale dans le calcul des éléments de la matrice aller-retour R est prise sur la surface des miroirs M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub>. Cette ouverture est en fait, très grande par rapport à la largeur la plus élevée du faisceau obtenu par le modèle gaussien. Ce qui veut dire simplement, que la variation transverse de l'intensité ne dépasse guère une certaine largeur dite effective. Cette dernière n'est en fait que la largeur obtenue au moyen du moment d'ordre deux (voir chapitre III, formule III.31 ). Elle peut donner une valeur limite au nombre de polynômes,

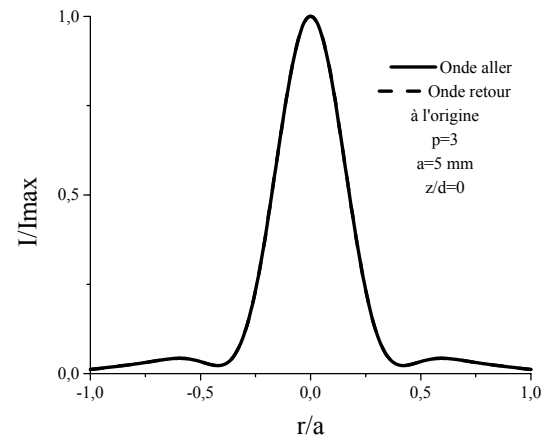
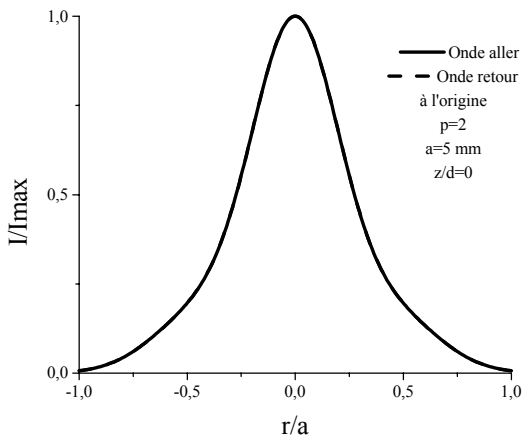
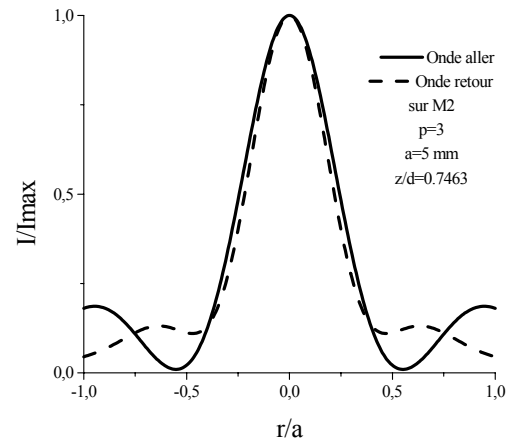
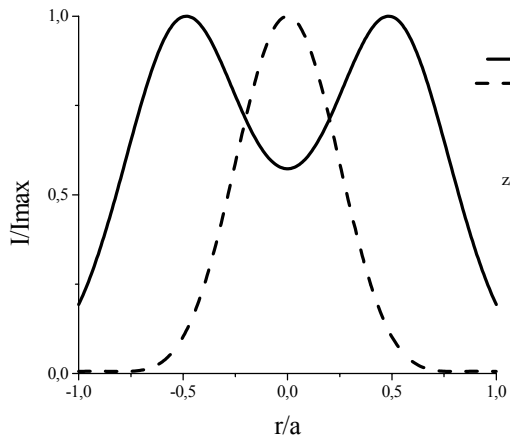
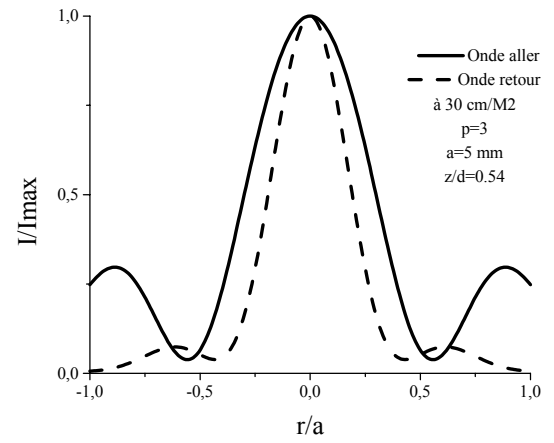
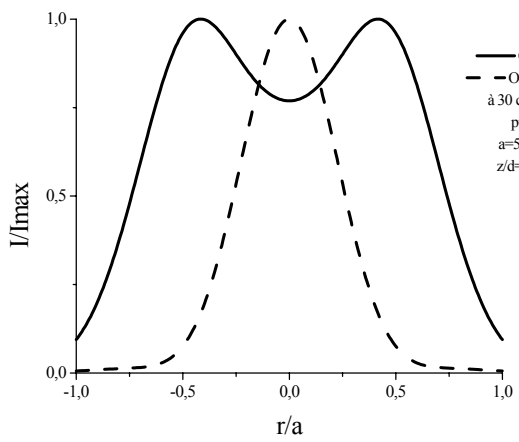
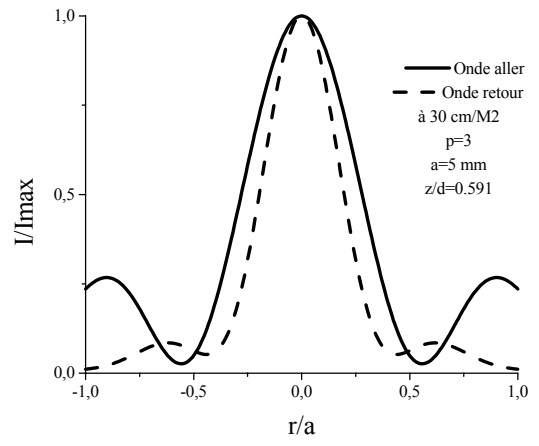
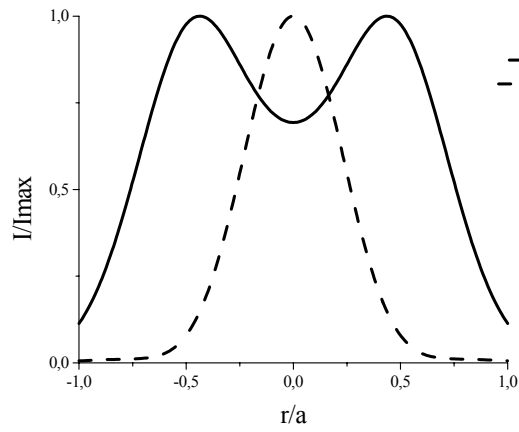
comme nous l'avons signalé précédemment, mais on doit dans ce cas connaître l'ouverture réelle qui influe sur le comportement spatial de l'intensité.

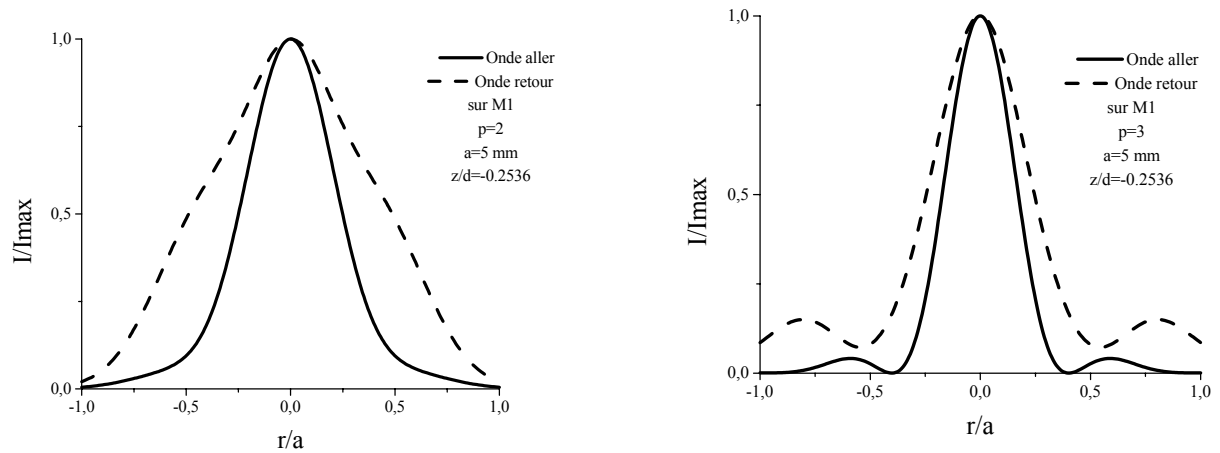
En première approximation, afin de considérer l'existence du tube à décharge et dans le but de se rapprocher de la réalité du faisceau laser, nous avons considéré une autre ouverture de l'ordre de grandeur de l'ouverture du tube ( $a=5$  mm) qui cause une troncature légère au faisceau laser. Dans ce cas le nombre de polynômes qu'on doit prendre ne peut excéder 3 (selon (II.27)). (Voir figure-T2).

Cette approximation qui peut paraître arbitraire est tout fait justifiée puisque le tube du côté du miroir M1 est pratiquement collé au miroir et donc impose son ouverture.

Sur la figure -T2-, nous avons représenté cette distribution pour un nombre de modes égal à 2 et à 3 et en différentes positions dans la cavité.







**Figure-T2-** Distributions transversales de l'onde aller et retour en différentes positions dans l'espace intra cavité pour différentes valeurs du nombre de polynômes de Laguerre et pour des ouvertures des miroirs de 5 mm.

- On remarque que le mode occupe un volume très faible, l'oscillation dans ce cas se fait sur un nombre très faible de modes passifs et elle n'est plus simultanée. Les modes oscillants possèdent des formes connues et lisses pour l'onde aller et retour. Comme il est clair que c'est une forme quasi-gaussienne qui apparaît à l'origine (pour  $p=2$ ) et qui commence à s'élargir en se rapprochant du miroir M2 là où le faisceau possède sa plus grande largeur.

## II.5 Confrontation avec l'expérience

La prise en considération de l'ouverture du tube à décharge avec une ouverture  $a=5$  mm et un nombre de polynômes  $n=2$ , permet de retrouver les courbes expérimentales pour l'onde aller et retour et pour les positions  $z$  choisies dans l'expérience. Ce qui explique que la troncature causée par le tube à décharge a un effet sur les modes du faisceau laser. Cette troncature légère affecte l'onde aller et l'onde retour, avec des effets différents. Il est donc nécessaire de tenir compte du tube à décharge dans notre modèle analytique.

En fait, le cas précédemment étudié avec une ouverture du tube ( $a(\text{tube})=5$  mm) constitue une première approximation réaliste de ce dernier car cette ouverture reste toujours positionnée aux niveaux des miroirs. Pour être rigoureux, l'étude dans une telle cavité (avec le tube à décharge) doit prendre en considération l'onde guidée dans le tube qui va par la suite se propager dans un espace libre. Cela fait appel évidemment, à d'autres moyens de calcul analytique [Der.95].

## II.6 Application de la méthode de décomposition du champ dans une géométrie rectangulaire

La corrélation entre les courbes théoriques et expérimentales n'est pas encore tout à fait satisfaisante. La dissymétrie qui apparaît dans les courbes expérimentales, ne peut être expliquée que si on tient compte d'une brisure de la symétrie cylindrique. Jusqu'à maintenant la décomposition du champ sur les modes de Laguerre –Gauss, nous a permis d'étudier les différents modes pouvant osciller dans une géométrie cylindrique et, qui par conséquent exhibent la forme cylindrique imposée par la cavité considérée.

Cette description est la plus commandée pour des systèmes ayant une symétrie cylindrique parfaite tel que les résonateurs laser pour lesquels  $l=0$ . Le cas général pour  $l$  différent de 0 a été étudié dans la référence [Trai.02]. Cependant, le choix de la base est souvent suggéré par les symétries du champ considéré. Dans une cavité laser présentant un léger astigmatisme ou un léger désalignement, la symétrie cylindrique est brisée et le champ a une structure plus proche de celle des modes d'Hermite-Gauss. Ces fonctions orthogonales et orthonormées constituent une autre solution du champ (voir annexe A) plus générale et qui sont plus probables pour les lasers réels. Ils permettent de caractériser l'astigmatisme par des paramètres différents dans les deux directions perpendiculaires à l'axe optique de la cavité. Cette différence est traduite avec les fonctions d'Hermite par séparation des deux solutions selon  $x$  et  $y$ . Néanmoins cette configuration n'est effective que dans des cas particuliers par exemple un champ dissymétrique dû au diaphragme hors axe [Wan.91].

En fait, dans la réalité, il n'y a aucune raison fondamentale qui impose les mêmes caractéristiques du faisceau dans les deux directions [Sie.86]. Les angles de Brewster et les différents éléments optiques dans les lasers réels provoquent une symétrie rectangulaire petite mais inhérente à la cavité laser. Le laser réel a, donc, tendance à osciller sur les modes d'Hermite plutôt que sur ceux de Laguerre. Dans ce cas la base des modes rectangulaire est alors la mieux adaptée.

Nous allons donc l'utiliser pour notre problème à deux dimensions vu son importance pour les lasers possédant des inévitables brisures de symétrie, où on considère que le faisceau possède la même largeur suivant  $x$  et  $y$ , i.e.  $(w_x = w_y = w)$ . Et ensuite nous simplifions son traitement à une seule dimension.

### II.6.1 Représentation à deux dimensions

L'équation (A.47) ( voir Annexe A) peut être réécrite sous la forme:

$$E_{mn}(x, y, z) = E_0 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w} \right) \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \times \exp \left[ -i \left( kz + k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - (m+n+1)\phi(z) \right) \right]. \quad (\text{II.19})$$

avec  $k$  est le nombre d'onde,  $H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right)$  est le polynôme d'Hermite,  $w(z)$  est la largeur du faisceau laser,  $R(z)$  est le rayon de courbure du front d'onde, et  $\phi(z)$  est la phase de Gouy.

En décomposant le champ en une onde aller et retour :

$$\begin{cases} E_{mn}^f(x, y, z) = A \cdot H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[ -i \left( kz + k \left( \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) - (m+n+1)\phi(z) \right) \right] \\ E_{mn}^b(x, y, z) = A \cdot H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[ i \left( kz + k \left( \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) - (m+n+1)\phi(z) \right) \right] \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{où } A = E_0 \frac{w_0}{w(z)}$$

En écrivant les ondes aller et retour suivant les deux directions (ox) et (oy) :

$$\begin{cases} G_{fm}(x, z) = \sqrt{A} H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{w(z)^2} \right) \exp \left[ -ik \frac{x^2}{2R(z)} + i \left( m + \frac{1}{2} \right) \phi(z) \right] \\ G_{bm}(x, z) = \sqrt{A} H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{w(z)^2} \right) \exp \left[ +ik \frac{x^2}{2R(z)} - i \left( m + \frac{1}{2} \right) \phi(z) \right] \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

$$\begin{cases} G_{fn}(y, z) = \sqrt{A} H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{y^2}{w(z)^2} \right) \exp \left[ -ik \frac{y^2}{2R(z)} + i \left( n + \frac{1}{2} \right) \phi(z) \right] \\ G_{bn}(y, z) = \sqrt{A} H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{y^2}{w(z)^2} \right) \exp \left[ +ik \frac{y^2}{2R(z)} - i \left( n + \frac{1}{2} \right) \phi(z) \right] \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

On a alors :

$$\begin{cases} E_f = e^{-ikz} \sum_n \sum_m f_{nm} G_{fn} G_{fm} \\ E_b = e^{ikz} \sum_n \sum_m b_{nm} G_{bn} G_{bm} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

La condition de Kirchoff imposée par les miroirs s'exprime par:

$$\begin{cases} E_b = R_2 E_f \\ E_f = R_1 E_b \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

$R_1$  et  $R_2$  sont respectivement les coefficients de réflexion des deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$ .

On s'intéresse à un résonateur sphérique constitué de deux miroirs concaves (voir figure-II.1), l'étude doit se faire sur ces deux miroirs.

- Sur le miroir  $M_1$

$$\begin{aligned} f_{nm} &= e^{ikz_1} \iint_{M_1} E_f G_{fn}^* G_{fm}^* dx dy \\ &= e^{2ikz_1} R_1 \iint_{M_1} \sum_{\mu} \sum_{\nu} b_{\mu\nu} G_{b\mu} G_{fn}^* G_{b\nu} G_{fm}^* dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

compte tenu de (II.21) et (II.22), les coefficients aller s'écrivent :

$$\begin{aligned} f_{nm} &= B e^{2i[kz_1 - \phi_1(z)]} R_1 \iint_{M_1} \sum_{\mu} \sum_{\nu} b_{\mu\nu} H_{\mu}(Y_1) H_n(Y_1) H_{\nu}(X_1) H_m(X_1) \times \\ &\quad \times \exp[-(X_1^2 + Y_1^2)] \exp[-i(\mu + \nu + m + n)\phi_1(z)] dX_1 dY_1 \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

$$X_1 = \sqrt{2} \frac{x}{w_1}$$

avec

$$Y_1 = \sqrt{2} \frac{y}{w_1}$$

$$\text{et} \quad B = E_0^2 \frac{w_0^2}{2}$$

- Sur le miroir  $M_2$

Les coefficients retour peuvent être obtenus de la même manière:

$$\begin{aligned}
b_{\mu\nu} &= e^{-ikz_2} \iint_{M_2} E_b G_{b\mu}^* G_{b\nu}^* dx dy \\
&= e^{-2ikz_2} R_2 \iint_{M_2} \sum_p \sum_q f_{pq} G_{fp} G_{b\mu}^* G_{fq} G_{b\nu}^* dx dy \quad (\text{II.27})
\end{aligned}$$

en substituant (II.21) et (II.22) dans (II.27) les coefficients retours deviennent:

$$\begin{aligned}
b_{\mu\nu} &= B e^{-2i[kz_2 - \phi_2(z)]} R_2 \iint_{M_2} \sum_p \sum_q f_{pq} H_p(X_2) H_\nu(X_2) H_q(Y_2) H_\mu(Y_2) \times \\
&\quad \times \exp[-(X_2^2 + Y_2^2)] \exp[i(p+q+\mu+\nu)\phi_2(z)] dX_2 dY_2 \quad (\text{II.28})
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
X_2 &= \sqrt{2} \frac{x}{w_2} \\
Y_2 &= \sqrt{2} \frac{y}{w_2}
\end{aligned}$$

il vient finalement :

$$\begin{aligned}
f_{nm} &= B^2 e^{-2i[kL - \Delta\phi(z)]} R_1 R_2 \sum_\mu \sum_\nu \sum_p \sum_q \iint_{M_1} \left( \iint_{M_2} H_p(X_2) H_\nu(X_2) H_q(Y_2) H_\mu(Y_2) \exp[-(X_2^2 + Y_2^2)] dX_2 dY_2 \right) \times \\
&\quad H_\nu(X_1) H_m(X_1) H_\mu(Y_1) H_n(Y_1) \exp[-2(X_1^2 + Y_1^2)] \times \\
&\quad \times \exp\{i[(p+q)\phi_2(z) + (\mu+\nu)\Delta\phi(z) - (m+n)\phi_1(z)]\} f_{pq} dX_1 dY_1 \quad (\text{II.29})
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
L &= z_2 - z_1 \\
\Delta\phi(z) &= \phi_2(z) - \phi_1(z)
\end{aligned}$$

Le terme  $\exp\left(ikw\frac{Y^2}{4R}\right)$  devient simplement l'unité car, nous avons considéré que les

deux miroirs constituent une surface équiphase à la résonance.

Comme on peut le constater l'étude à deux dimensions est compliquée, cependant, l'obtention de l'opérateur aller retour dans ce cas est pratiquement rigoureuse.

Dans le but de simplifier l'analyse, nous limitons le problème à un champ ayant une dépendance transverse selon la variable x seulement.

## II.6.2 Représentation à une dimension

Le champ dans ce cas admet une expression plus simple:

$$E_m(x, z) = E_0 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) \exp \left[ -\frac{x^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[ -i \left( kz + k \frac{x^2}{2R(z)} - (m+1)\phi(z) \right) \right]. \quad (\text{II.30})$$

On peut le décomposer en champ aller et retour:

$$\begin{cases} E_m^f(x, y, z) = A \cdot H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) \exp \left[ -\frac{x^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[ -i \left( kz + k \left( \frac{x^2}{2R(z)} \right) - (m+1)\phi(z) \right) \right] \\ E_m^b(x, y, z) = A \cdot H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) \exp \left[ -\frac{x^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[ i \left( kz + k \left( \frac{x^2}{2R(z)} \right) - (m+1)\phi(z) \right) \right] \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{ou alors} \quad \begin{cases} E_f = e^{-ikz} \sum_m f_m G_{fm} \\ E_b = e^{ikz} \sum_m b_m G_{bm} \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

compte tenu de la condition (II.24), les coefficients aller sur M1 sont donnés en fonction des coefficients retour :

$$f_m = B_1 e^{2ikz_1} R_1 \sum_n b_n C_{nm} \exp \left[ -i(m+n+2)\phi_1(z) \right] \quad (\text{II.33})$$

$$\text{avec } C_{nm} = \int_{M_1} H_n(X_1) H_m(X_1) e^{-X_1^2} dX_1$$

$$X_1 = \sqrt{2} \frac{x}{w_1}$$

$$\text{et } B_1 = E_0^2 \frac{w_0^2}{\sqrt{2}w_1}$$

de même les coefficients retour sur M2 peuvent être exprimés en fonction des coefficients aller :

$$b_n = B_2 e^{-2ikz_2} R_2 \sum_\tau f_\tau \int_{M_2} C_{\tau n} \exp \left[ i(\tau+n+2)\phi_2(z) \right] \quad (\text{II.34})$$

$$\text{avec } C_{\tau n} = \int_{M_2} H_\tau(X_2) H_n(X_2) e^{-X_2^2} dX_2$$

$$X_2 = \sqrt{2} \frac{x}{w_2}$$

$$\text{et } B_2 = E_0^2 \frac{w_0^2}{\sqrt{2}w_2}$$

Finalement les coefficients aller à l'entrée sont donnés en fonction des coefficients aller à la sortie:

$$f_m = B_1 B_2 R_1 R_2 e^{-2i[kL - \Delta\phi(z)]} \sum_n \sum_\tau f_\tau C_{\tau n} C_{nm} e^{in\Delta\phi(z)} e^{i[\tau\phi_2(z) - m\phi_1(z)]} \quad (\text{II.35})$$

$$\text{avec } \Delta\phi(z) = \phi_2(z) - \phi_1(z)$$

ou encore:

$$f_m = \sum_\tau f_\tau R_{\tau m} \quad (\text{II.36})$$

l'opérateur aller-retour est donné par :

$$R_{\tau m} = B_1 B_2 R_1 R_2 e^{-2i[kL - \Delta\phi(z)]} \sum_n C_{\tau n} C_{nm} e^{in\Delta\phi(z)} e^{i[\tau\phi_2(z) - m\phi_1(z)]} \quad (\text{II.37})$$

La troncature de la base avec les fonctions d'Hermite-Gauss nous est suggérée par Siegman [Sie.86]. Le nombre de modes maximal qui peut osciller dans une cavité d'ouverture  $a$  est donné par:

$$n \leq N_{\max} \approx \left( \frac{a}{w} \right)^2.$$

## II.7 Résultats avec une géométrie rectangulaire

Vu la dissymétrie de notre résonateur causée par le tube à décharge, nous avons fait une analyse numérique en utilisant un développement sur les modes d'Hermite-Gauss.

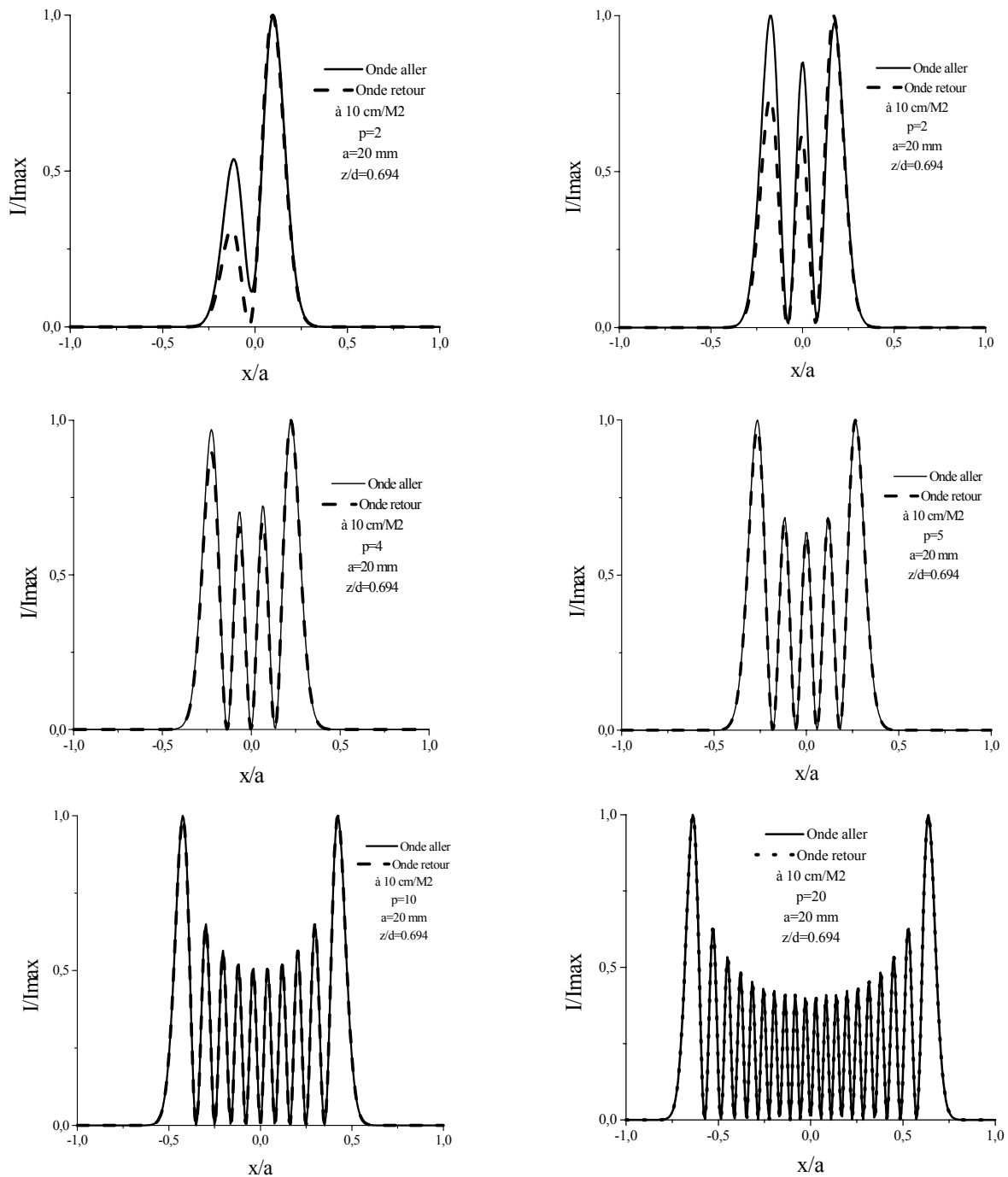
Cette dissymétrie apparaît clairement sur nos courbes théoriques pour l'onde aller et retour (voir figure-T3- ci dessous) à faible nombre de polynômes. Cette dissymétrie disparaît pour un nombre de polynômes grand et donc pour des modes transverses d'ordres élevés. On peut remarquer également pour ces modes que l'onde aller et retour sont confondues en forme et en intensité.

On constate très bien sur les courbes que le nombre des maximas d'intensité est égal au nombre de polynômes et que pour un nombre de polynômes impair l'intensité est maximale sur l'axe optique de propagation, elle s'annule pour des nombres de polynômes paires.

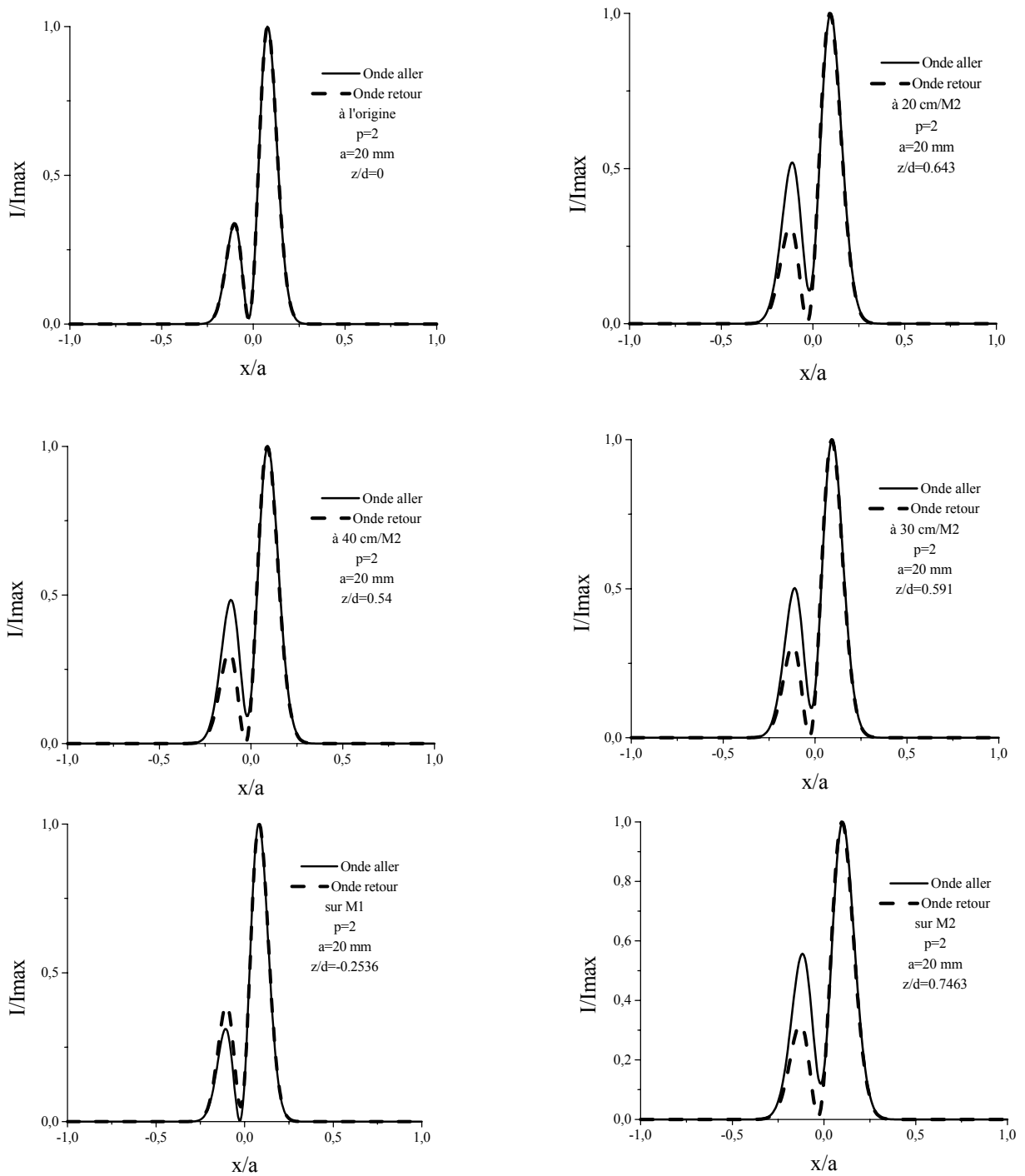
## II.8 Confrontation avec l'expérience

La structure des modes avec les fonctions d'Hermite-Gauss reflète très bien la réalité des modes obtenus expérimentalement en onde aller et ce pour un nombre de polynomes égal à 2.

En effet, les modes d'Hermite-Gauss sont les mieux adaptés pour la description du faisceau laser du fait de la brisure de symétrie du dispositif laser, chose qui a été prévue par plusieurs chercheurs dans ce domaine [Sie.86], [Hod.97].



**Figure-T3.a-** Distributions transversales de l'onde aller et retour à  $10 \text{ cm/M}^2$  pour différentes valeurs du nombre de polynômes d'Hermite et pour des ouvertures des miroirs de  $20 \text{ mm}$ .



**Figure-T3.b-** Distributions transversales de l'onde aller et retour en différentes positions dans l'espace intra cavité pour un nombre de polynômes d'Hermite égal à 2 et pour des ouvertures des miroirs de 20 mm.

### III Les faisceaux réels

#### III.1 Introduction

En pratique, le faisceau d'un laser n'est jamais purement gaussien (troncature, distorsion de phase,...). Dès qu'on souhaite extraire un maximum de puissance optique d'un milieu amplificateur, le faisceau est plutôt du type multimode transverse (cavité stable) ou est annulaire (cavité instable). La théorie de la propagation des faisceaux gaussiens exposée jusqu'à présent n'est plus valable.

Les premières difficultés de quantification d'un faisceau réel [Sie.90] résident dans la détermination des dimensions transversales de la distribution d'intensité et dans la détermination de l'axe optique du faisceau comme l'illustre la figure –III.1 –.

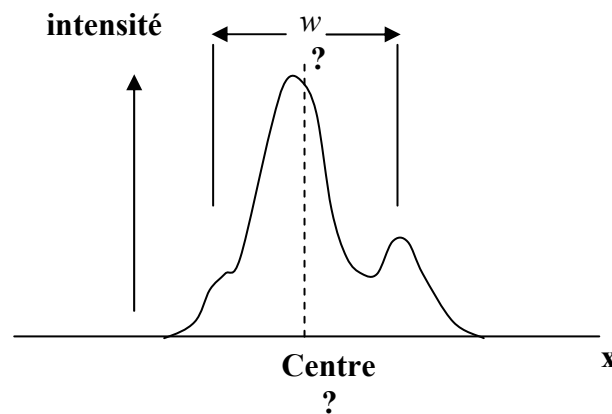


Figure-III.1-

Nous souhaitons, dans un premier temps, comprendre l'évolution d'un faisceau après un passage à travers un système optique. En particulier, on veut quantifier son étalement spatial et le changement de sa divergence angulaire. Ce type d'information globale peut se définir au moyen des moments mathématiques de la distribution spatiale  $u(x)$  et de la distribution spectrale  $S(\theta)$ .

#### 1) Moment d'ordre 1

Le moment d'ordre un de l'intensité [Ald.01]:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |u(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx} \quad (\text{III.1})$$

nous informe sur la position transverse du centre de masse de la distribution  $u(x)$ . D'autre part, le moment d'ordre un de la distribution spectrale [Ald.01]:

$$\langle \theta \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta |S(\theta)|^2 d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\theta)|^2 d\theta} \quad (\text{III.2})$$

nous donne la direction principale de propagation du faisceau.

En se servant du propagateur (A.28) ( voir Annexe A), on peut définir un vecteur  $\begin{pmatrix} \langle x \rangle \\ \langle \theta \rangle \end{pmatrix}$  des moments qui correspond au moment spatial et spectral, et on montre [Bel.00] ensuite que ce vecteur obéit à l'équation matricielle des rayons géométriques après avoir traversé un système optique ABCD :

$$\begin{pmatrix} \langle x_2 \rangle \\ \langle \theta_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x_1 \rangle \\ \langle \theta_1 \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{III.3})$$

Ceci est le résultat principal, à savoir que la position moyenne d'un faisceau  $\langle x \rangle$  et sa direction moyenne  $\langle \theta \rangle$  obéissent au même système optique, caractérisé par les éléments de la matrice ABCD.

## 2) Moment d'ordre 2

Les moments d'ordre un ont donné une information importante sur le déplacement du faisceau et sur le changement de la direction de propagation du faisceau, après un passage au travers un système optique ABCD. Le moment d'ordre deux de la distribution spatiale [Ald.01] :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |u(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx}, \quad (\text{III.4})$$

quantifiera l'élargissement (ou le pincement) du faisceau, alors que le moment d'ordre deux de la distribution spectrale [Ald.01]:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 |S(\theta)|^2 d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\theta)|^2 d\theta}, \quad (\text{III.5})$$

définira le changement de la divergence moyenne du faisceau. Notez que ces définitions sont universelles et qu'elles ne souffrent pas des lacunes attribuées à des définitions plus courantes, telles que la largeur du faisceau à la demi-hauteur ou au point 1/e (faisceau gaussien) etc.

De même en utilisant le propagateur (A.28), on peut montrer que le moment d'ordre deux obéit à l'équation matricielle des rayons géométriques [Bel.00]:

$$\begin{pmatrix} \langle x_2^2 \rangle & \langle x_2 \theta_2 \rangle \\ \langle x_2 \theta_2 \rangle & \langle \theta_2^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x_1^2 \rangle & \langle x_1 \theta_1 \rangle \\ \langle x_1 \theta_1 \rangle & \langle \theta_1^2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T. \quad (\text{III.6})$$

Pour un système optique le déterminant  $AD - BC = 1$ . On sait que le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants de chacune d'elle, c'est à dire

$$\langle x_2^2 \rangle \langle \theta_2^2 \rangle - \langle x_2 \theta_2 \rangle^2 \equiv \langle x_1^2 \rangle \langle \theta_1^2 \rangle - \langle x_1 \theta_1 \rangle^2. \quad (\text{III.7})$$

On peut remarquer que la quantité  $\langle x^2 \rangle \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2$  est un invariant du propagateur (A.28) et, aussi, de l'équation d'onde paraxiale. On notera cet invariant  $M_p^2$ , défini par :

$$\langle x^2 \rangle \langle \theta^2 \rangle - \langle x\theta \rangle^2 = \left( \frac{\lambda}{4\pi} M_p^2 \right)^2 \quad (\text{III.8})$$

Cet invariant permet de réduire à deux le nombre de caractéristiques du deuxième ordre.

En pratique, on caractérise un faisceau par rapport à son centre de gravité au moyen de la variance

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (\text{III.9})$$

Cette caractéristique est d'utilité courante lors des applications pratiques de transport et de focalisation d'un faisceau laser.

De même pour la variance angulaire

$$\sigma_\theta^2 = \langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2. \quad (\text{III.10})$$

Nous donne la divergence du faisceau. Elle est certes, essentielle pour caractériser un faisceau, cependant, elle est aussi accessible suite à une mesure de la variance spatiale.

alors que la valeur mixte sera donnée par :

$$\sigma_{\theta x}^2 = \langle x\theta \rangle - \langle x \rangle \langle \theta \rangle.$$

On peut montrer, [Bel.00] à l'aide de la loi de propagation des moments d'ordre un (III.3) et des moments d'ordre deux (III.6) que la loi de propagation des variances est de la même forme que celle des moments d'ordre deux, soit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2\theta_2}^2 \\ \sigma_{x_2\theta_2}^2 & \sigma_{\theta_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1\theta_1}^2 \\ \sigma_{x_1\theta_1}^2 & \sigma_{\theta_1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T. \quad (\text{III.11})$$

Encore ici, on peut obtenir une relation d'invariance entre ces trois variances :

$$\sigma_x^2 \sigma_\theta^2 - (\sigma_{x\theta}^2)^2 = \left( \frac{\lambda}{4\pi} M_Q^2 \right)^2. \quad (\text{III.12})$$

On note cet invariant  $M_Q^2$ , qui est une signature de propagation du faisceau, et il servira à définir un facteur de qualité pour  $M_Q^2 \geq 1$ .

### III.2 Divergence minimale d'un faisceau

Nous avons vu, qu'un faisceau optique pouvait être globalement caractérisé par ces moments d'ordre un et deux. Cependant un faisceau idéal est un faisceau dont les caractéristiques des moments satisfont des propriétés extrêmes. Naturellement, nous pouvons déjà exiger que ce faisceau soit parfaitement aligné avec l'axe optique  $z$  et le demeure. Ceci implique que les moments d'ordre un de ce faisceau soient nuls. Nous montrerons que le faisceau gaussien est celui qui possède une divergence minimale. Cependant l'usage veut [Ald.01] que l'on définisse la largeur type d'un faisceau selon :  $W_x = 2\sigma_x$ . Pour un faisceau gaussien cette largeur type correspond au point  $1/e$ .

Pour cela nous considérons un faisceau optique défini par son amplitude complexe  $u_0(x)$  à son minimum de largeur type  $W_{x0}(x)$ . La loi de propagation (III.11) de la divergence  $\sigma_x^2$  pour l'espace libre ( $A=D=1$ ,  $C=0$ ,  $B=z$ ) s'écrit:

$$\sigma_\theta^2 \equiv \sigma_{\theta_0}^2, \quad (\text{III.13})$$

C'est-à-dire que, lors d'une propagation libre, la divergence du faisceau est conservée. Selon (III.10), (III.5) et (III.2) et (A.17) la variance angulaire  $\sigma_\theta$  en fonction de l'amplitude complexe  $u(x)$  s'écrit [Bel.00] :

$$\sigma_{\theta_0}^2 = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{du_0(x)}{dx} \right|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|^2 dx}. \quad (\text{III.14})$$

Nous cherchons donc à optimiser ce rapport (III.14) pour des faisceaux ayant naturellement la

même énergie  $\int_{-\infty}^{\infty} |u_0|^2 dx$  et la même largeur spatiale  $\sigma_{x_0}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |u_0|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |u_0|^2 dx}$ . Cette

optimisation peut se faire en introduisant deux multiplicateurs de Lagrange [Har.99]  $\Lambda_1^2$  et  $\Lambda_2$  (pour la variance et l'énergie), comme pour un problème variationnel:

$$\delta \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{du_0}{dx} \right|^2 dx + \Lambda_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |u_0|^2 dx - \Lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} |u_0|^2 dx \right] = 0. \quad (\text{III.15})$$

intégrant par partie le premier terme de cette équation, on obtient :

$$\delta \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u_0^* \left[ \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \Lambda_2 u_0 - \Lambda_1^2 x^2 u_0 \right] dx \right] = 0 \quad (\text{III.16})$$

La solution de ce calcul est immédiate, suite à la contrainte sur l'énergie. Il suffit, en effet, de poser le crochet de l'intégral (III.16) égal à une constante. Cette constante peut, en toute généralité, être nulle puisqu'elle peut être absorbée dans la constante  $\Lambda_2$ . Un faisceau ayant une divergence optimale doit donc satisfaire l'équation différentielle suivante:

$$\left[ \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \Lambda_2 u_0 - \Lambda_1^2 x^2 u_0 \right] dx = 0 \quad (\text{III.17})$$

Les solutions, finies à l'origine et intégrables de  $-\infty$  à  $\infty$ , de cette équation sont bien connues. Elles sont données par:

$$u_0(x) = e^{-\Lambda_1 \frac{x^2}{2}} H\left(\Lambda_1^{\frac{1}{2}} x\right), \quad (\text{III.18})$$

sous la condition que:

$$\Lambda_2 = \Lambda_1(2n+1) \text{ ou } n = 0, 1, 2, \dots$$

H polynôme d'Hermite [Abr.65].

Le multiplicateur de Lagrange  $\Lambda_1$  peut être relié à la variance minimale, pour cette distribution  $u_0(x)$  [Bel.00]:

$$\Lambda_1 = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sigma_{x_0}^2}. \quad (\text{III.19})$$

La divergence de ce faisceau, telle que définie par la variance spectrale, devient [Bel.00]:

$$\sigma_{\theta_0}^2 = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \frac{(2n+1)^2}{\sigma_{x_0}^2}. \quad (\text{III.20})$$

le minimum absolu de divergence est donc obtenu lorsque  $n=0$  et que  $\sigma_{x_0}$  est fixé :

$$\left(\sigma_{\theta_0}^2\right)_{\min} = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\sigma_{x_0}^2}. \quad (\text{III.21})$$

ce résultat peut s'écrire, aussi, en terme du facteur de propagation (III.12)

$$M_Q^2 = (2n+1). \quad (\text{III.22})$$

la valeur minimale du facteur de propagation est atteinte pour le faisceau gaussien:

$$\left(M_Q^2\right)_{\min} = 1. \quad (\text{III.23})$$

Il est d'usage de définir le facteur d'échelle de ce faisceau  $W_0^2 = 4\sigma_{x_0}^2$ , qu'on écrit :

$$\left(u_0(x)\right)_{\min} = C_0 e^{-\frac{x^2}{w_0^2}}. \quad (\text{III.24})$$

Ce faisceau possède une largeur type

$$W_0 = w_0. \quad (\text{III.25})$$

Ici, on distingue le facteur d'échelle  $w_0$  de la largeur type  $W_0$  bien qu'ils soient les mêmes pour le faisceau gaussien, afin de se conformer à l'usage et aussi pour éviter toute confusion avec d'autres faisceaux.

Alors la divergence optimale de ce faisceau est :

$$\left(\sigma_{\theta_0}\right)_{\min} = \left(\frac{\lambda}{2\pi w_0}\right), \quad (\text{III.26})$$

et sa distance de Rayleigh :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (\text{III.27})$$

la largeur type présentée par les modes d'ordres élevés pour la géométrie rectangulaire :

$$W_0 = \sqrt{(2n+1)}w_0, \quad (\text{III.28})$$

leurs divergences :

$$\sigma_{\theta_0} = \left(\frac{\lambda}{2\pi w_0}\right)(2n+1), \quad (\text{III.29})$$

et sa distance de Rayleigh :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (\text{III.30})$$

alors que leurs facteurs de propagation sont donnés à l'équation (III.22)

Pour une distribution circulaire, le faisceau décrit par l'équation (II.1) satisfait les caractéristiques globales suivantes :

$$W_0 = \sqrt{(2n+l+1)}w_0, \quad (\text{III.31})$$

$$\sigma_{\theta_0} = \left(\frac{\lambda}{2\pi w_0}\right)(2n+l+1), \quad (\text{III.32})$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (\text{III.33})$$

$$M_Q^2 = (2n+l+1). \quad (\text{III.34})$$

Il est possible de montrer [Car.80] que les quantités données par (III.28) et (III.31) sont suffisamment larges pour renfermer le maximum d'intensité pour tous les ordres  $p, l$  ( $n, m$ ) du faisceau. En effet la fraction d'énergie totale contenu dans le rayon effectif (III.31) pour les

modes de Laguerre-Gauss peut être calculée (voir tableau-1- ci-dessous) et comparée avec la largeur du faisceau gaussien qui ne renferme que 86% d'énergie.

**Tableau.1.** fraction d'énergie contenue dans le spot size comme une fonction de l et n pour le mode de Laguerre-Gauss. [Phi.83]

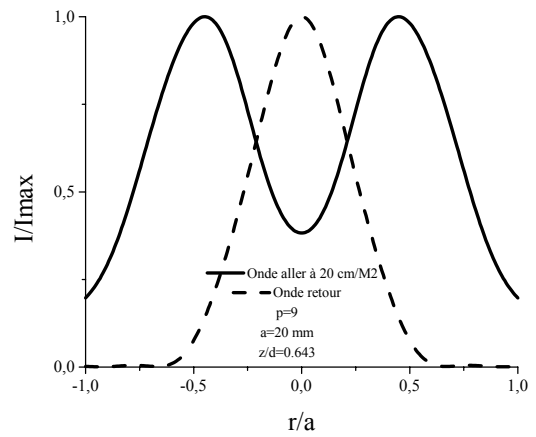
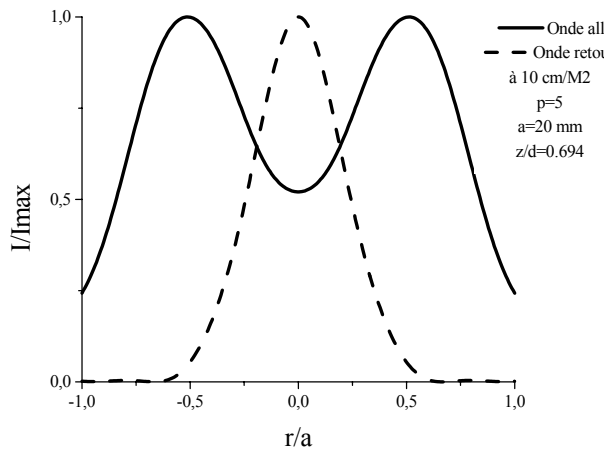
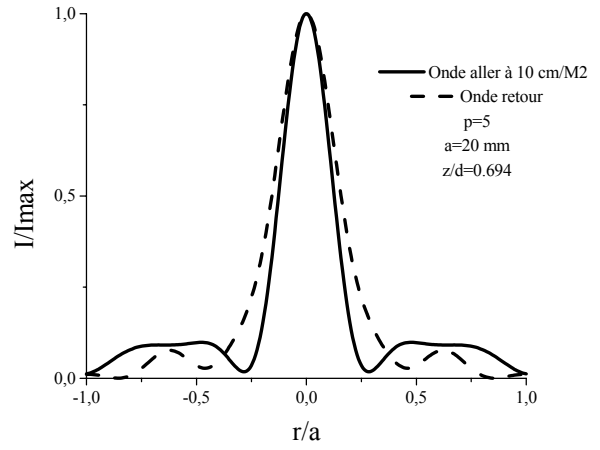
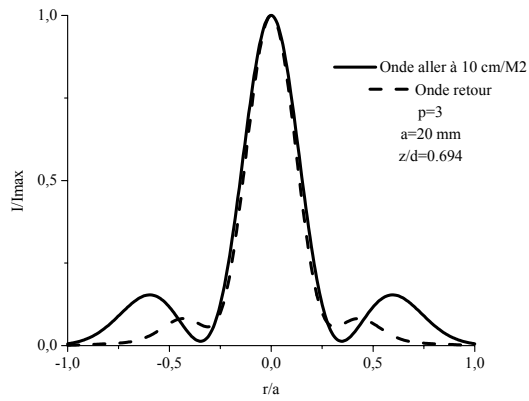
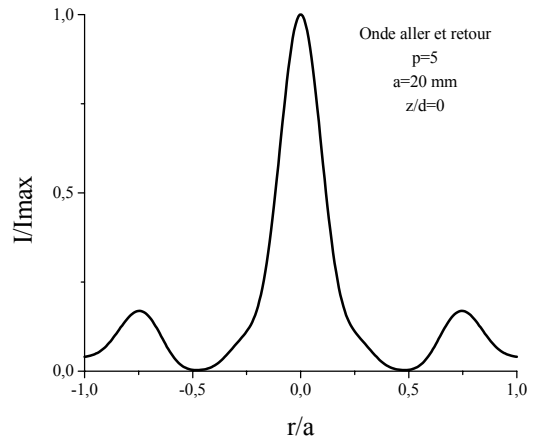
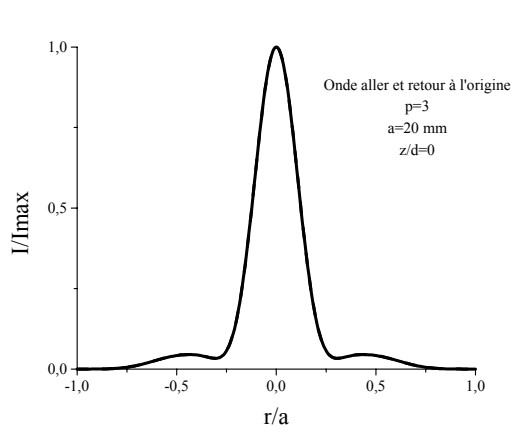
n \ l	0	1	2
0	0.865	0.908	0.938
1	0.908	0.922	0.937
2	0.923	0.930	0.939

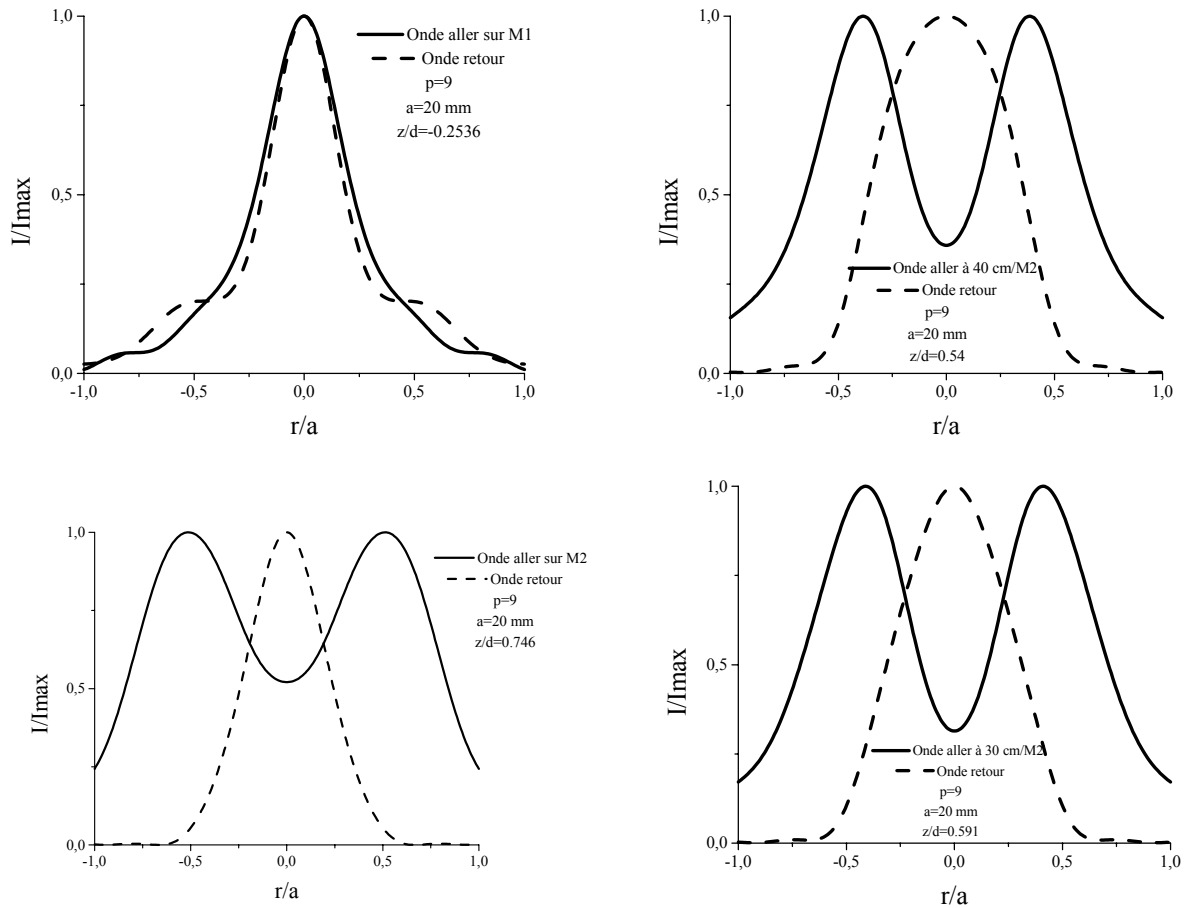
Pour illustrer ce qui a été dit précédemment, nous avons considéré dans notre analyse numérique sur la distribution du champ dans la cavité laser le paramètre  $M_Q^2$  qu'on vient de développer.

Ce paramètre est directement lié au nombre de polynômes choisi dans notre développement, comme il est introduit dans toutes les expressions déjà utilisées pour le modèle gaussien. Les résultats obtenus avec cette nouvelle approche seront présentés et discutés par la suite.

### III.3 Résultats pour un faisceau réel

Sur la figure –T4- nous avons présenté dans le cas d'une géométrie cylindrique les différentes distributions de l'intensité en différentes positions z et pour des ordres n différents, en tenant compte des propriétés des faisceaux réels quantifiés par les moments d'ordre deux.





**Figure-T4-** Distributions transversales de l'onde aller et retour en différentes positions dans l'espace intra cavité pour différentes valeurs du nombre de polynômes de Laguerre et pour des ouvertures des miroirs de 20 mm.

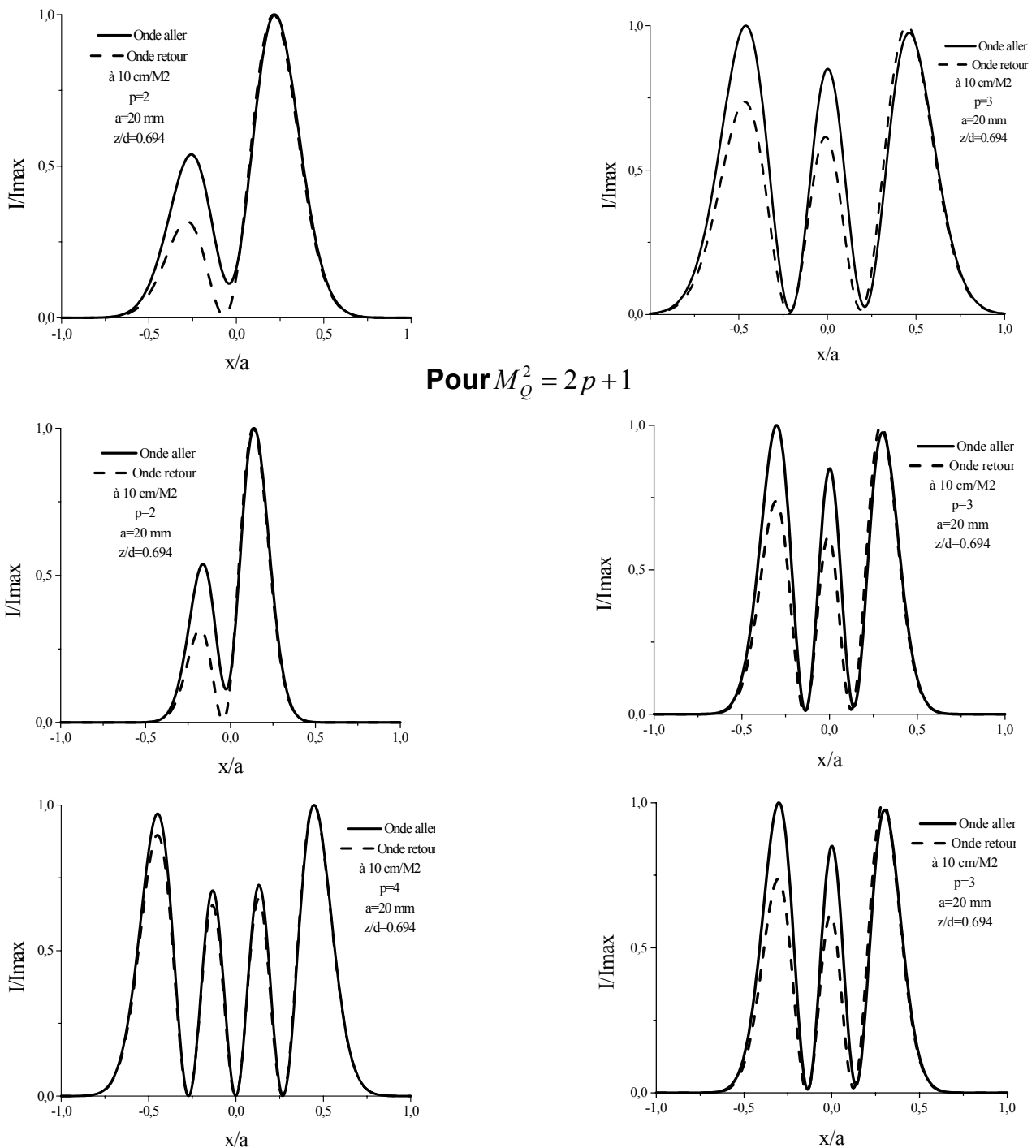
### III.4 Confrontations avec l'expérience

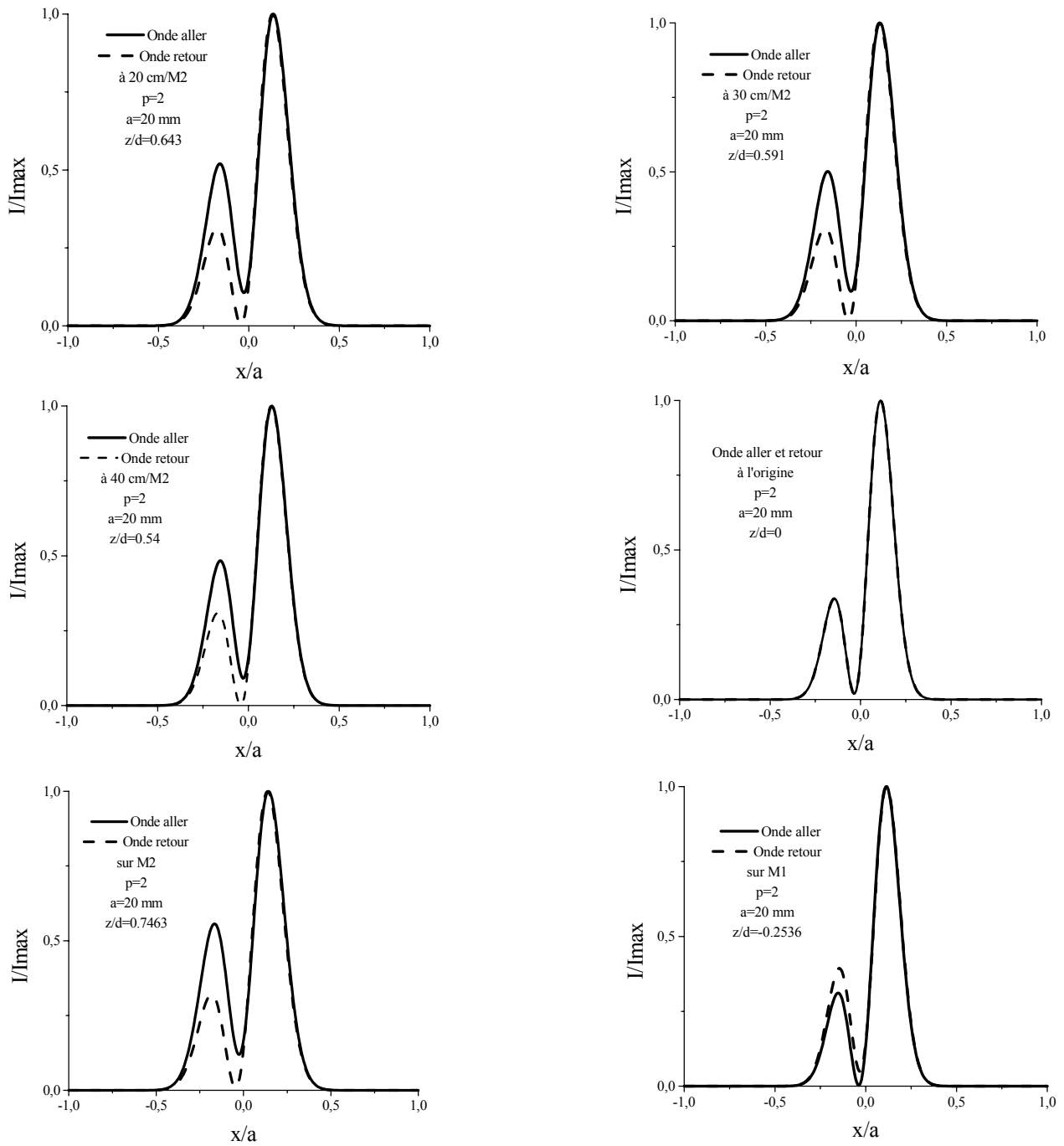
- On remarque que ce type de faisceau possède une largeur un peu plus large par rapport au faisceau gaussien, pour renfermer le maximum d'intensité pour tous les modes  $p, l$ .
- Nous avons également fait une étude systématique sur le nombre de polynômes dans le but d'avoir des résultats semblables à l'expérience.

Un bon accord est trouvé avec les résultats expérimentaux pour un nombre de polynômes égal à 9. Nous constatons un profil transverse d'intensité constant pour les mêmes positions choisies dans l'expérience.

Nous avons également, appliqué la théorie du faisceau réel dans le cas de la géométrie rectangulaire.

Les résultats avec ce modèle sont présentés en figure –T5-. Les deux premières courbes sont obtenues avec un moment d'ordre deux  $M^2 = 2n + 1$ . On peut montrer [Hod.97] que pour une énergie plus exacte occupée par le mode, ce paramètre se réduit sous la forme  $M^2 = n + 1/2$  dans une géométrie rectangulaire. Nous avons donc, considéré ce dernier pour le reste des courbes. n est le nombre de polynômes indiqué sur les courbes par p.





**Figure-T5-** Distributions transversales de l'onde aller et retour en différentes positions dans l'espace intra cavité pour différentes valeurs du nombre de polynômes de Laguerre et pour des ouvertures des miroirs de 20 mm.

## Conclusion générale

Notre étude a porté sur la distribution transverse du champ résonant dans une cavité laser à CO<sub>2</sub>, en l'absence d'ouvertures diffractantes dans le résonateur.

Elle a été divisée en deux volets, un volet expérimental et l'autre théorique suivi d'une analyse numérique pour comparer les résultats théoriques avec les résultats expérimentaux.

Dans le travail expérimental, nous avons :

- Réalisé un laser à CO<sub>2</sub> scellé fonctionnant à faible pression, pour l'étude des modes transverses le long de sa cavité.
- Fait l'étude dans une cavité concave-concave non diaphragmée au seuil d'oscillation.
- Montré l'influence de l'épaisseur de la lame séparatrice sur les résultats expérimentaux.
- Etudié l'effet de la pression du mélange et du courant de décharge et de l'alignement sur ces résultats.
- Prouvé que l'oscillation sur ces modes dépendaient tant des effets géométriques que des paramètres du milieu amplificateur ( pression, courant ).
- Prouvé que le laser à CO<sub>2</sub> peut garder son profil transverse constant en onde aller et en onde retour le long de l'axe de propagation dans une cavité non diaphragmée, et ce pour des conditions au seuil d'oscillation convenables.

Sur le plan théorique, nous avons :

- Mis au point une méthode basée sur le spectre angulaire d'onde plane et généralisé le cas d'un faisceau se propageant à travers un système optique ABCD.
- Spécifié le cas de la propagation dans l'espace libre et retrouvé les expressions données par le faisceau gaussien, ainsi que l'expression de l'intensité des modes transverses d'ordre élevé.
- Etudié l'effet de désalignement sur la distribution de l'intensité transmise du faisceau laser.
- Redéveloppé la méthode basée sur la décomposition des modes dans le cas d'une cavité non diaphragmée concave-concave et pour le cas d'une symétrie cylindrique ( $l=0$ ).
- Appliqué la méthode dans le cas le plus général d'une géométrie rectangulaire à deux dimensions et ensuite spécifié son application à une dimension.

- Généralisé l'étude pour un laser multimode par la prise en considération du moment d'ordre deux.

Pour illustrer nos modèles théoriques, nous avons fait une analyse numérique dans le cas

- ❖ D'une géométrie cylindrique.
- ❖ D'une géométrie rectangulaire.
- ❖ D'un faisceau réel.
- ❖ Et en tenant compte de l'ouverture du tube à décharge.

Nous avons tiré les conclusions suivantes :

- La prise en considération de l'ouverture du tube à décharge est la cause essentielle de diffraction des modes dans une cavité non diaphragmée à la limite de l'effet de désalignement.
- La prise en compte du moment d'ordre deux permet de quantifier les paramètres du faisceau gaussien, et donc avoir les modes du faisceau réel.
- Les modes dans une cavité rectangulaire reflètent mieux la réalité du faisceau laser par la considération de la dissymétrie causée par les lames de Brewster, et autres éléments optiques présents dans la cavité.

## Perspectives

Suite à l'étude expérimentale,

- ◆ Il serait intéressant de sélectionner un seul mode transverse pour des nombreuses applications. Habituellement le meilleur procédé pour la sélection des modes transverses est d'introduire un diaphragme à l'intérieur de la cavité. Cependant, il a été déjà montré que ce dernier influe considérablement sur ces modes. Pour éviter ce problème il est préférable de remplacer le diaphragme par un fil mince (wire) qui sert à sélectionner les modes et stabiliser l'oscillation.
- ◆ On peut également étendre l'étude au laser à CO<sub>2</sub> à écoulement, ce laser peut être réalisé dans notre laboratoire.
- ◆ L'utilisation d'une caméra CCD permettra de donner instantanément la distribution à trois dimensions et ainsi suivre son évolution temporelle en fonction de la compétition entre modes.

Sur le plan théorique,

- ◆ Il serait intéressant de calculer l'opérateur aller-retour pour tenir compte de l'effet du tube à décharge.
- ◆ Il faut tenir compte du milieu amplificateur dans nos modèles théoriques. Dans ce cas, les équations de Maxwell-Bloch sont convenables pour décrire les modes actifs.
- ◆ Nous envisageons d'approfondir l'étude à deux dimensions d'un champ dissymétrique en faisant l'analyse numérique de la méthode développée au chapitre II.
- ◆ Nous avons développé une nouvelle méthode basée sur le propagateur paraxial, qu'il faudra généraliser et valider par une analyse numérique.

### Méthode du propagateur paraxial

En général, la recherche des modes transverses d'une cavité est un problème compliqué [Sie.86], [Hod.97]. Heureusement, pour les cavités habituellement utilisées dans les lasers, en particulier dans le cas d'une cavité linéaire de type Fabry-Perot, il existe une classe de solutions simples, les modes gaussiens, qui sont une excellente approximation pour la plupart des lasers continus.

L'évaluation de la propagation de l'onde laser au bout d'un aller-retour le long du résonateur, à l'aide des modèles mathématiques appropriés, est évidemment le premier pas vers la détermination des modes propres, de leurs pertes et de leurs fréquences de résonance. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées [Sie.99]. Elles sont basées sur les trois idées suivantes :

- Rechercher une solution simple des équations de Maxwell qui prend la forme d'un faisceau paraxial et faire en sorte que les deux miroirs intercepteurs soient localement perpendiculaires à sa direction de propagation. Ceci assure que l'onde se réfléchit exactement sur elle-même [Kog.66].
- Utiliser la formulation scalaire du principe de Huygens pour calculer le champ sur les miroirs (Fox-Li). [Fox. 61]
- Ecrire le champ sous la forme d'une combinaison des modes de la cavité (Hermite-Gauss, ou Laguerre-Gauss) [Kog.66].

Toutes ces méthodes ont été déjà utilisées dans des études précédentes [Kel.87], [Ait.93],[Tra.00],[Tat.03], où elles ont donné des résultats satisfaisant mais leur traitement était limité à l'espace libre. En ce qui concerne notre étude nous proposons une nouvelle méthode basée sur le spectre angulaire de Fourier [God.72]. La procédure mathématique employée dans l'évaluation de l'intégral de Huygens-Fresnel par la méthode de la transformée de Fourier, donne une interprétation physique simple et élégante d'un rayon optique se propageant dans un système paraxial en adoptant le modèle d'onde plane. C'est la méthode du propagateur paraxial [Bel.00]. Nous allons l'adapter au cas du faisceau gaussien.

### Propagateur paraxial

Afin d'obtenir la distribution transverse des champs des résonateurs ouverts (sphériques), on doit revenir au modèle de l'optique physique.

Pour cela, on cherche à déterminer une intégrale de propagation (propagateur) pour l'amplitude scalaire  $U(x, y, z)$  d'un champ électromagnétique se propageant dans un système optique.

L'amplitude du champ obéit à l'équation d'Helmholtz, qu'on rappelle :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0 \quad (\text{A.1}) \quad \left( k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

L'axe z correspond à l'axe optique de propagation, l'axe x détermine la direction transversale, et k est le nombre d'onde.

Dans le but de simplifier l'analyse, nous limitons le problème, dans un premier temps, à un champ ayant une dépendance transverse selon la variable x seulement.

Les solutions élémentaires de l'équation précédente sont obtenues par séparation des variables x et z sous la forme [Har.99] :

$$U_e(x, z) = e^{-i[k_x x + k_z z]} \quad (\text{A.2})$$

Avec la condition :  $k_z^2 = k^2 - k_x^2$

la solution générale s'obtient comme une superposition de ces ondes élémentaires, pour les diverses constantes de propagation  $k_x$  d'amplitude  $S(k_x)$  :

$$U(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(k_x) e^{-i[k_x x + \sqrt{k^2 - k_x^2} z]} dx \quad (\text{A.3})$$

On suppose, que l'amplitude du champ est connue en un plan z particulier. On le choisit, en général à  $z=0$ .

$$U(x, 0) = U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(k_x) e^{-ik_x x} dk_x \quad (\text{A.4})$$

On constate qu'en ce plan  $z=0$ , l'amplitude  $U_0(x)$  correspond à la transformée de Fourier de l'amplitude spectrale  $S(k_x)$ . Puisque  $U_0(x)$  est supposée connue, on obtient par transformée de Fourier inverse l'amplitude spectrale :

$$S(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0) e^{ik_x x_0} dx_0 \quad (\text{A.5})$$

En combinant les équations (A.3) et (A.5), on obtient :

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0) e^{-i(x-x_0)k_x} e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2} z} dk_x dx_0 \quad (\text{A.6})$$

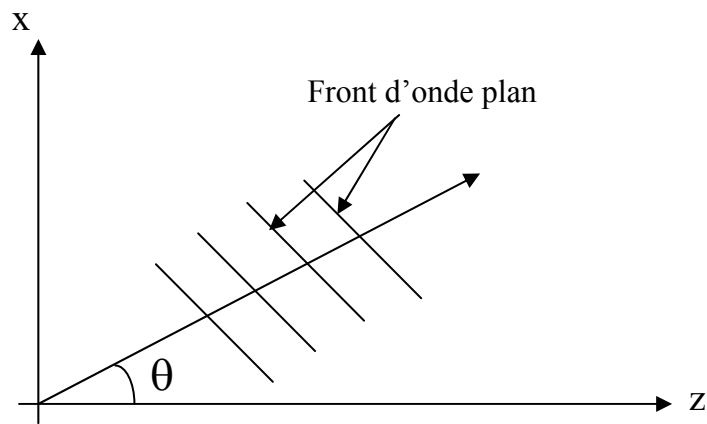
On obtient, ainsi, une solution de l'équation d'Helmholtz pour l'amplitude du champ, en tout plan  $z$ , à partir de sa valeur à  $z=0$ .

Les solutions élémentaires de l'équation (A.2) peuvent s'analyser comme des ondes planes se propageant dans une direction  $\theta$  par rapport à l'axe  $z$ . En posant :

$$k_x = k \sin\theta \quad \text{d'où} \quad k_z = k \cos\theta \quad (\text{A.7})$$

on peut donc réécrire  $U_e$  sous la forme

$$U_e(x, z) = e^{-ik(x \sin\theta + z \cos\theta)} \quad (\text{A.8})$$



**Figure –A.1** – propagation d'onde plane dans le plan (xz)

On interprète, alors, le résultat de l'équation (A.6) comme une superposition d'ondes planes ayant des directions de propagation faisant un angle  $\theta$  dans le plan  $(x, z)$ . (Voir figure-A.1-ci-dessus).

Notez que ces angles  $\theta$  varient non seulement de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$  mais, qu'on doit,

aussi, tenir compte d'angles imaginaires correspondants à des ondes évanescentes [Fel.76].

Les lasers possèdent généralement, une faible divergence (comme c'est le cas des lasers à gaz,  $\theta_D \cong \text{mrad}$  ou des diodes laser  $\theta_D \cong 2^\circ$ ). Puisqu'on s'intéresse au laser à  $\text{CO}_2$ , on peut se permettre de faire l'approximation suivante pour les ondes données par (A.8) :

$$k_x \ll k, \quad \text{et} \quad \sqrt{k^2 - k_x^2} \cong k - \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{k} \quad (\text{A.9})$$

la solution formelle de l'équation d'Helmholtz, obtenue à l'équation (A.6), devient :

$$U(x, z) = \frac{1}{2\pi} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0) e^{-i\left[(x-x_0)k_x - \frac{z}{2k} k_x^2\right]} dx_0 dk_x \quad (\text{A.10})$$

En effectuant l'intégration sur  $k_x$ , ce dernier résultat peut être simplifié grandement en utilisant l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(p^2 x^2 + qx\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-\frac{q^2}{4p^2}}, \quad (*)$$

$$U(x, z) = e^{-ikz} \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0) e^{-\frac{i\pi}{\lambda z}(x-x_0)^2} dx_0 \quad (\text{A.11})$$

L'équation (A.11) est un propagateur paraxial simple qui nous donne la solution de l'équation d'Helmholtz en tout plan  $z$ .

Cette intégrale est connue en fait sous plusieurs appellations. En particulier on rencontre souvent l'appellation d'intégrale de Kirchhoff-Fresnel puisqu'elle peut aussi être dérivée au moyen du formalisme de Kirchhoff pour la solution de l'équation d'Helmholtz [Hod.97], en y ajoutant l'approximation, suggérée par Fresnel, du chemin optique parabolique (i.e paraxial). D'autre part la formulation de Kirchhoff étant la traduction formelle de l'idée des ondelettes de Huygens [Hod.97], on appelle encore cette intégrale l'intégrale de Huygens. Ou plus précisément c'est l'intégrale paraxiale de Huygens.

Il est d'usage de poser :

$$U(x, z) = e^{-ikz} u(x, z) \quad (\text{A.12})$$

L'amplitude du faisceau est alors donnée par :

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0) e^{-\frac{i\pi}{\lambda z}(x-x_0)^2} dx_0 \quad (\text{A.13})$$

L'équation d'onde (A.1) devient pour le champ  $u(x, z)$  :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.14})$$

On peut montrer que le propagateur donné en (A.13) satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Cette opération n'est en fait, que l'approximation paraxiale exprimée par

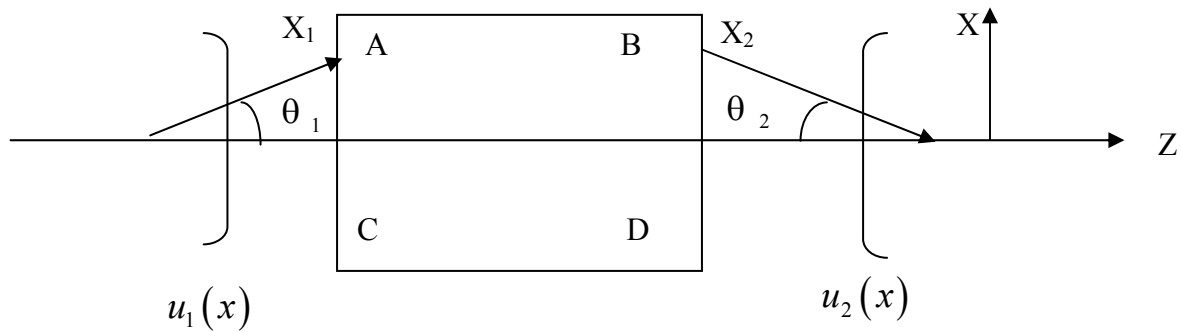
$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (\text{A.16}).$$

De ce fait la solution (A.13) est nommée propagateur paraxial.

L'analyse spectrale précédente, nous a, donc, clairement démontrée que le propagateur (A.13) s'applique pour un champ électromagnétique formé par un ensemble d'ondes planes se propageant près de l'axe z.

Pour généraliser ce propagateur de l'espace libre (A.13), on doit le faire passer à travers un système optique paraxial (ABCD) [Nem.77], [Lip.95] (voir figure-A.2- ). Ce système général a l'avantage de tenir compte de tout élément existant à l'intérieur du résonateur. Le faisceau sera décrit par une distribution  $u_2(x)$  et son spectre angulaire est obtenu au moyen de la transformée de Fourier (A.4) soit, pour l'approximation paraxiale :

$$S(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{ik\theta x} dx \quad (\text{A.17})$$



**Figure –A.2-** propagation d'un faisceau optique à travers un système optique paraxial.

Le nouveau faisceau  $U_2(x)$  s'obtient, en appliquant la loi de transformation du système à chaque onde plane  $U_1(x)$ . L'amplitude de chaque onde plane à la sortie  $S_2(\theta_2)$  sera proportionnelle à l'amplitude  $S_1(\theta_1)$  mais, aura subi un changement de phase reliée au chemin optique  $\phi(\overline{x_1 x_2})$  parcouru. On écrit donc :

$$S_2(\theta_2) = (Cte) S_1(\theta_1) e^{-ik\phi(\overline{x_1 x_2})} \quad (\text{A.18})$$

La loi de transformation du système ABCD s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

ce qui permet de relier l'angle  $\theta_1$  aux coordonnées de sortie de l'onde plane  $(\theta_2, x_2)$  au moyen de la relation :

$$\theta_1 = A\theta_2 - Cx_2 \quad (\text{A.20})$$

d'autre par, un tel système paraxial conserve l'énergie i.e :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_1|^2 d\theta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_2|^2 d\theta_2 \quad (\text{A.21})$$

cette dernière relation fixe la constante de proportionnalité de l'équation (A.18), d'où :

$$S_2(\theta_2) = \sqrt{A} S_1(A\theta_2 - Cx_2) e^{-ik\phi(\overline{x_1 x_2})} \quad (\text{A.22})$$

Le chemin optique exprimé par le principe de Fermat [Vai.04] entre deux points est stationnaire. Il s'ensuit que, pour deux points quelconques, l'un à l'entrée  $(x_1, \theta_1)$  et l'autre à la sortie  $(x_2, \theta_2)$ , le chemin optique est proportionnel à la différence  $(x_1\theta_1, x_2\theta_2)$

D'où :

$$\phi(\overline{x_1 x_2}) = L_0 - \frac{1}{2}(x_2\theta_2 - x_1\theta_1) \quad (\text{A.23})$$

Où  $L_0$  est la longueur du chemin optique sur l'axe.

en combinant (A.20) avec (A.23), il nous résulte :

$$\phi(\overline{x_1 x_2}) = L_0 - \frac{1}{2}(CDx_2^2 + AB\theta_2^2 - 2BCx_2\theta_2) \quad (\text{A.24})$$

l'amplitude du faisceau de sortie  $U_2(x)$  peut être exprimée en fonction de son spectre, au moyen de la relation :

$$U_2(x_2) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\theta_2) e^{-ikx_2\theta_2} d\theta_2 \quad (\text{A.25})$$

En remplaçant  $S_2$  par son expression (A.22) :

$$U_2(x_2) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{A} e^{-ikL_0} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(A\theta_2 - Cx_2) e^{\frac{ik}{2}(CDx_2^2 + AB\theta_2^2 - 2ADx_2\theta_2)} d\theta_2 \quad (\text{A.26})$$

De la relation (A.20), le spectre  $S_1$  peut s'écrire en terme du faisceau incident au moyen de l'équation (A.17) qui devient :

$$S_1(A\theta_2 - Cx_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{ik(A\theta_1 - Cx_2)x} dx \quad (\text{A.27})$$

après avoir effectué l'intégrale sur  $\theta_2$ , au moyen de (\*), on obtient finalement, pour l'amplitude du faisceau  $u_2(x)$  :

$$u_2(x_2) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1) e^{\frac{i\pi}{\lambda B} (Ax_1^2 - 2x_1x_2 + Dx_2^2)} dx_1 \quad (\text{A.28})$$

Avec 
$$U_2(x_2) = e^{-ikL} u_2(x_2)$$

Ce propagateur (A.28) est l'outil mathématique moderne pour décrire la propagation d'un faisceau paraxial, à travers un système optique paraxial décrit au moyen de la matrice de transfert des rayons ABCD.

Ce résultat a d'abord été dérivé par S.A. Collins [Col.70] au moyen de la théorie de L'icone et, ensuite, par A.E.Siegman au moyen d'une généralisation heuristique des ondelettes d'Huygens [Sie.86].

Ici, nous avons dérivé ce résultat fondamental en nous servant de concepts physiques bien établis (les ondes planes), et en limitant l'étude à une onde électromagnétique paraxiale qui reste une bonne approximation pour les lasers à gaz.

Pour un faisceau général possédant une distribution en  $(x, y)$ , le propagateur paraxial de l'équation (A.28) se généralise directement au moyen d'une intégrale double sur  $x$  et  $y$ , exprimée ainsi [Hod.97] :

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{i}{\lambda B} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_1, y_1) e^{\left[ \frac{-i\pi}{\lambda B} (Ax_1^2 + Dx_2^2 - 2x_1x_2 + Ay_1^2 + Dy_2^2 - 2y_1y_2) \right]} dx_1 dy_1 \quad (\text{A.29})$$

Si le faisceau possède une symétrie circulaire, on peut le décomposer en série de Fourier selon l'angle polaire:

$$u(r, \phi, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l u_l(r, z) \begin{cases} \cos(l\phi) \\ \sin(l\phi) \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

On montre [Tac.87], ensuite, que la partie radiale du faisceau se propage selon :

$$u_{l_2}(r_2) = \left( \frac{2\pi i^{l+1}}{\lambda B} \right) \int_0^{\infty} u_{l_1}(r_1) e^{-\frac{i\pi}{\lambda B} (Ar_1^2 - 2r_1r_2 + Dr_2^2)} J_l \left( \frac{2\pi}{\lambda B} r_1 r_2 \right) r_1 dr_1 \quad (\text{A.31})$$

Où  $J_l$  est une fonction de Bessel [Abr.65] d'ordre  $l$ .

Les résonateurs laser possèdent, généralement, une géométrie circulaire et, c'est pourquoi, nous limiterons l'analyse à cette géométrie.

Le propagateur décrit précédemment (A.29) et ((A.31)), trouvera une application particulière dans l'étude qui va suivre. Comme on peut aussi montrer [Bel.00] que le propagateur, qui relie le spectre à la sortie  $S_2(\theta_2)$  du système à l'entrée  $S_1(\theta_1)$ , s'exprime :

$$S_2(\theta_2) = \sqrt{\frac{-i}{\lambda C}} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta_1) e^{\frac{i\pi}{\lambda C} (A\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 + D\theta_1^2)} d\theta_1 \quad (\text{A.32})$$

Nous allons à présent spécifier la solution pour les résonateurs laser.

Il est connu que le faisceau gaussien est la référence idéale parmi l'ensemble des faisceaux optiques. Ainsi ce faisceau étant limité transversalement à cause de l'exponentielle. C'est la raison pour laquelle il n'est pas nécessaire d'utiliser des parois réfléchissantes pour confiner latéralement le champ.

On peut donc supposer l'amplitude d'entrée comme un faisceau gaussien sous la forme [Hod.97]:

$$u_1(x_1, y_1) = u_0 \exp\left[-\frac{ik}{2q_1}(x_1^2 + y_1^2)\right] \quad (\text{A.33})$$

Où  $q_1$  est le rayon de courbure complexe donnée par  $q_1(z) = z + iz_R$ ,  $z_R$  est une constante à déterminer. Après passage au travers un système optique ABCD ( en insérant (A.33) dans (A.29)), on obtient:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{u_0}{A - B/q_1} \exp\left[-\frac{ik}{2q_2}(x_2^2 + y_2^2)\right] \quad (\text{A.34})$$

avec  $q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$

La propagation dans l'espace libre ( $A=D=1$ ,  $B=z$  et  $C=0$ ) permet d'écrire l'amplitude du champ électromagnétique. ( $U(x) = e^{-ikz}u(x)$ )

$$U(x) = \frac{E_0}{1 - iz/z_R} \exp\left[-\frac{ik}{2} \frac{x_2^2 + y_2^2}{R(z)}\right] \exp\left[-\frac{x_2^2 + y_2^2}{w(z)}\right] \quad (\text{A.35})$$

ou alors

$$\tilde{E} = A \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \exp[-i\varphi(r, z)] \quad (\text{A.36})$$

Notons que la phase totale comprend plusieurs termes :

$$\varphi(r, z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (\text{A.37})$$

avec  $x^2 + y^2 = r^2$

La phase comporte ici deux contributions supplémentaires : l'une longitudinale est la phase de Gouy :  $\phi(z) = -\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$ . Ce terme est indicatif de la focalisation du faisceau, lors de sa propagation de  $-\infty$  à  $+\infty$ , puisque pour une telle situation on doit s'attendre à un saut de phase  $\pi$  pour tout faisceau.

L'autre radiale donne au front d'onde sa forme sphérique.

Le faisceau gaussien décrit par l'expression (A.36) est appelé le mode fondamental car c'est celui qui a le seuil d'oscillation le plus faible et qui présente les plus faibles pertes dans les configurations habituelles. Il est donc évident que l'on cherche à faire résonner le faisceau laser dans le mode fondamental et à obtenir la meilleure densité de puissance dans ce mode.

Les paramètres du faisceau gaussien sont donnés par les expressions suivantes :

$$R(z) = z \left[ 1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right] = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z_0} \right) \right], \quad \text{rayon de courbure du front d'onde} \quad (\text{A.38})$$

$$w(z) = w_0 \left[ 1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right]^{1/2} = w_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda z}{\pi w_0^2}}, \quad \text{largeur du faisceau} \quad (\text{A.39})$$

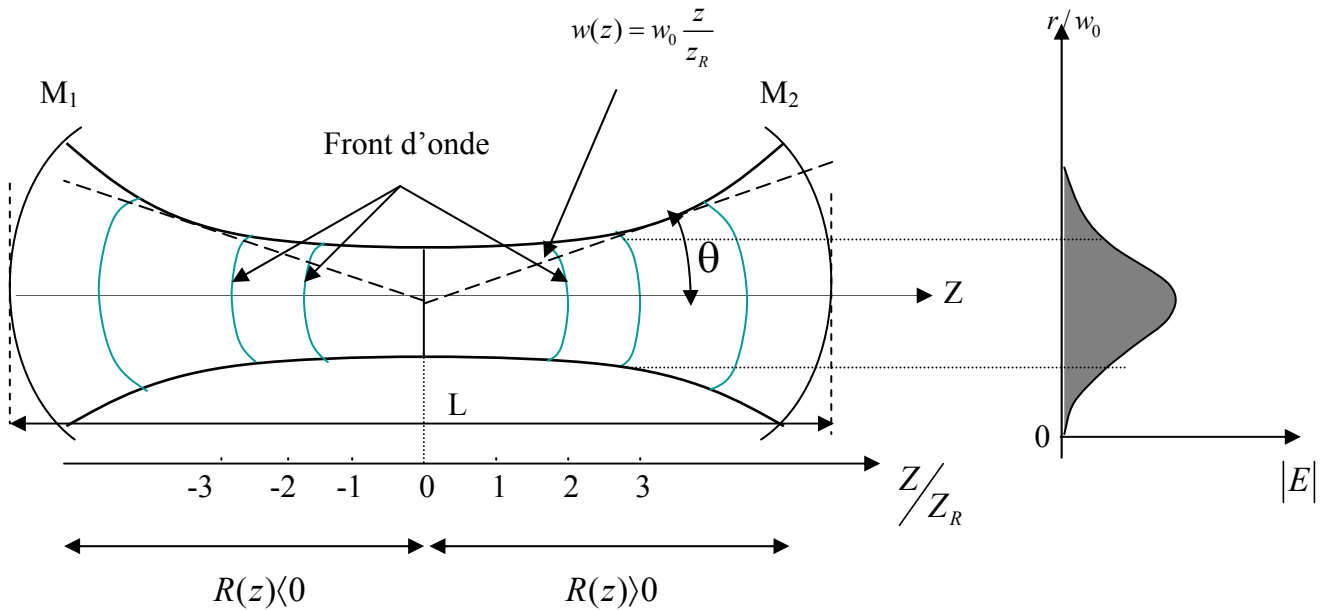
où

$$w_0 = w(z=0) = \sqrt{\frac{2z_R}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}, \quad \text{pincement du faisceau (beam waist)} \quad (\text{A.40})$$

Et la pente associée (voir figure A.3) est donnée par :

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (\text{A.41})$$

La figure -A.3- illustre les principales propriétés d'un faisceau gaussien. Dans ce cas l'onde tend vers une onde sphérique dont le centre de rayon de courbure est fixé en  $z=0$ , au voisinage du waist,  $R$  est très grand et l'onde est pratiquement plane. La transition entre les deux régimes se faisant sur la longueur de Rayleigh  $z_R$  du mode considéré.



**Figure -A.3-** Rayon de courbure du front d'onde  $R(z)$  et  $w(z)$  d'un faisceau gaussien. La figure de droite représente le profil de la norme  $|E|$  du champ. L'angle  $\theta$  caractérise la divergence du faisceau.

### Modes transverses d'ordres élevés

Le mode gaussien fondamental (A.36) appelé  $TEM_{00}$ , traité précédemment, correspond à un champ dont seules les variations selon l'axe de propagation ont été prises en compte (avec la possibilité d'une variation radiale monotone de l'amplitude).

C'est la solution d'ordre zéro, de l'équation de propagation. Il existe bien entendu d'autres modes transverses d'ordre supérieur désignés par  $TEM_{pq}$  ayant une dépendance transverse en intensité plus compliquée [Kog.66]. Ce sont les ordres gaussiens supérieurs qui sont solutions générales de l'équation (A.15). Ces modes constituent de plus une base 'orthogonale' et 'complète' des solutions de l'équation d'onde paraxiale sur laquelle tout faisceau laser arbitraire peut être décomposé. Ces modes sont connus également comme étant les modes propres de la cavité optique de type 'stable' ouverte et vide de milieu amplificateur dont le mode fondamental est le plus répandu.

On peut montrer que la fonction Hermite-Gauss suivante :

$$u_1(x, y) = \exp\left[-\frac{ik}{2q_1}(x^2 + y^2)\right] H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_1}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_2}\right) \quad (\text{A.42})$$

peut caractériser le faisceau laser dans une géométrie rectangulaire. Avec  $H_n$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$  [Abr.65].

En substituant cette relation dans (A.29), le champ devient, après son passage à travers un système optique ABCD [Bel.00]:

$$u_2(x, y) = \frac{1}{\left(A + \frac{B}{q_1}\right)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(A + \frac{B}{q_1}\right)^{m+\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{ik}{2q_1}(x^2 + y^2)\right] H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_1}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_2}\right) \quad (\text{A.43})$$

Comme on peut montrer [Bel.00], dans le cas de la géométrie cylindrique, que la fonction de Laguerre-Gauss :

$$u_1(r) = r^l e^{-\frac{i\pi r^2}{\lambda q_1}} L_n^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \quad (\text{A.44})$$

devient après son passage à travers un système optique ABCD

$$u_1(r) = \frac{1}{\left(A + \frac{B}{q_1}\right)^{2n+l+1}} r^l e^{-\frac{i\pi r^2}{\lambda q_2}} L_n^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \quad (\text{A.45})$$

avec  $L_n$  est le polynôme de Laguerre d'ordre  $n$  [Abr.65].

Les deux solutions données en (A.43) et (A.45) sont générales en comparaison avec celles obtenues avec le faisceau gaussien [Dan.98], car ces derniers ne décrivent la propagation du faisceau que dans l'espace libre où  $A=D=1$ ,  $C=0$ ,  $B=z$ . Dans ce cas le champ s'exprime ainsi :

En géométrie cylindrique :

$$E_{LG}^{pl}(r, \varphi, z) = \frac{(2/\pi)^{1/2}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^l \sum_{p, l=0}^{\infty} \left[\frac{p!}{(p+l)!}\right]^{1/2} \cdot L_p^l\left(\frac{\sqrt{2}r^2}{w}\right) \exp\left[-\frac{r^2}{w^2} - i\Phi_{pl}(r, z)\right] \quad (\text{A.46})$$

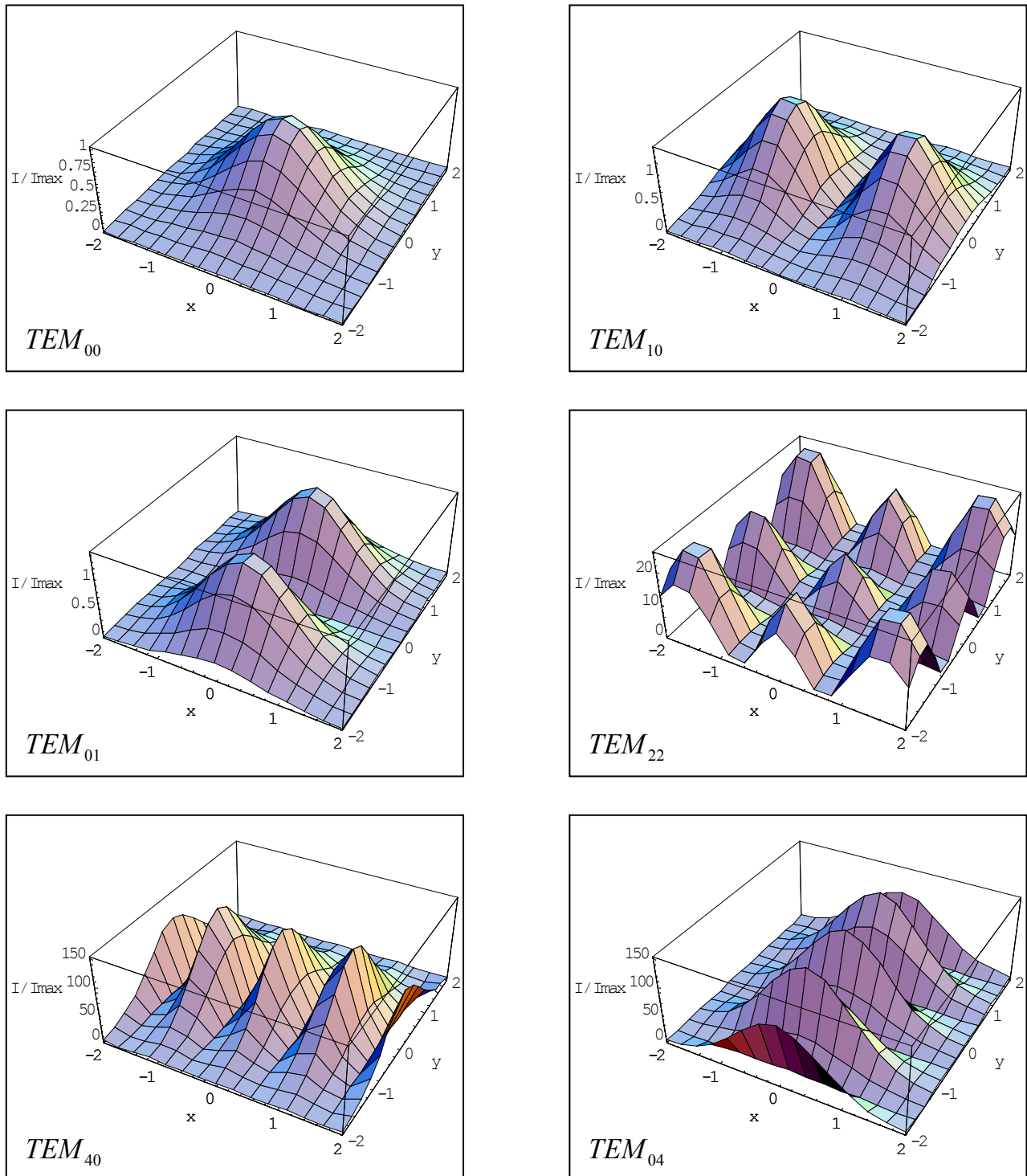
$$\text{avec} \quad \Phi_{pl}(r, z) = -kz + (2p + l + 1) \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right) - \frac{kr^2}{2R(z)} - l\varphi$$

En géométrie rectangulaire :

$$E_{nm}(x, y, z) = A_{HG}^{nm} \frac{w_0}{w(z)} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)} - i\Phi_{nm}(r, z)\right] \quad (\text{A.47})$$

$$\text{avec} \quad \Phi_{nm}(r, z) = kz - (m + n + 1) \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)}$$

Avec un simple programme sur Mathématique, on a représenté sur la figure (A.4, A.5) les profils de l'intensité de quelques modes en géométrie rectangulaire (mode d'Hermite-Gauss) et en géométrie cylindrique (mode de Laguerre-Gauss).



**Figure-A.4-** Modes transverses de différents ordres dans la géométrie rectangulaire

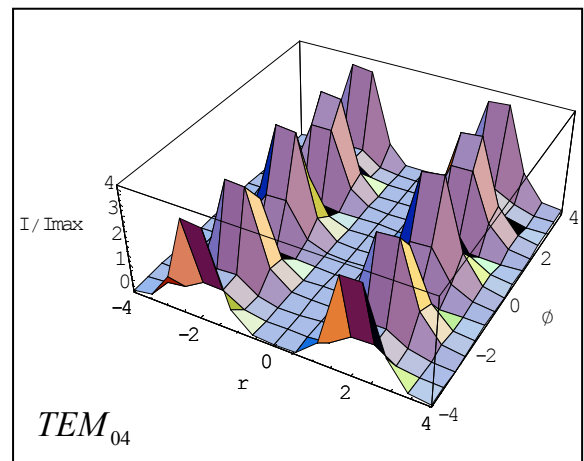
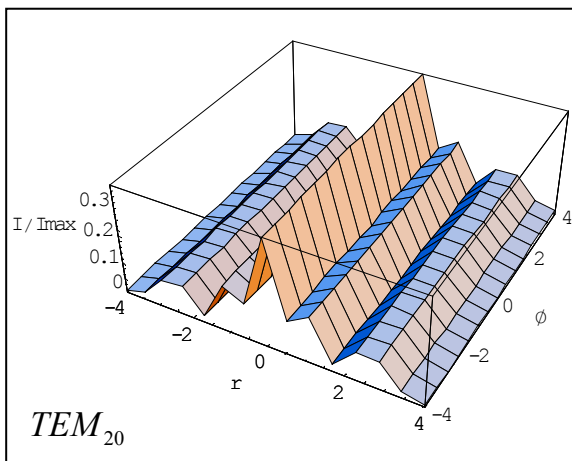
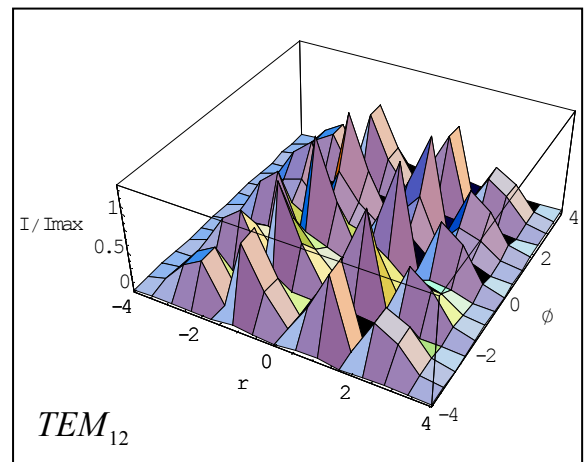
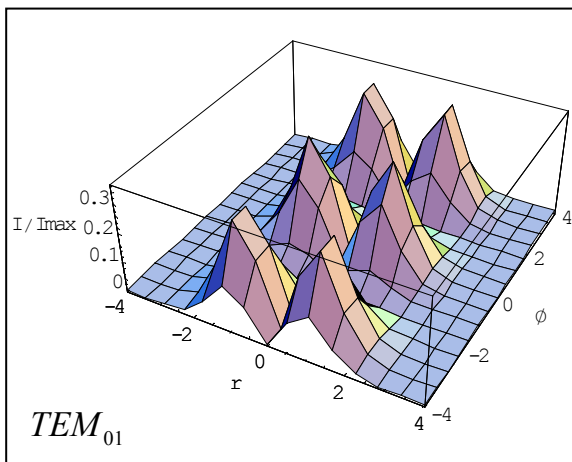
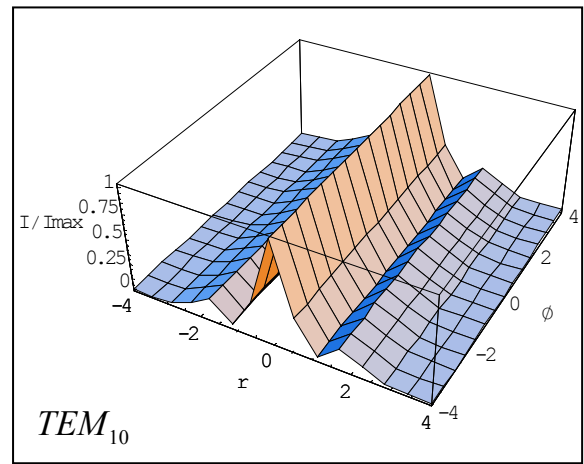
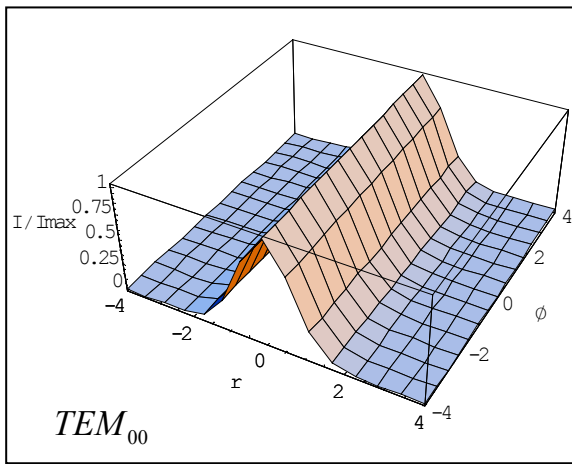
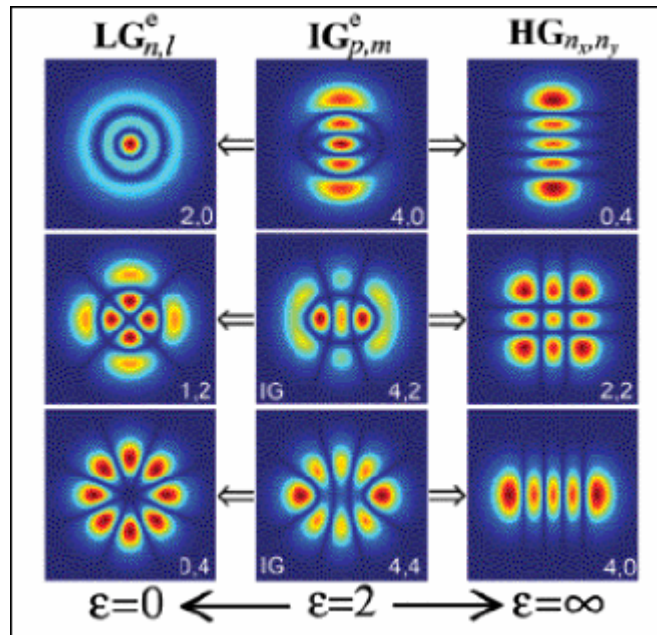


Figure-A.5- Modes transverses de différents ordres dans la géométrie cylindrique

On donne sur la figure –A.6- les différentes taches correspondantes aux distributions transverses de l'intensité [Bre.04]:



**Figure-A.6-** Différentes taches du mode transverse TEMnm

Sur cette figure  $\varepsilon$  représente le paramètre elliptique (en anglais the ellipticity parameter) [Bre.04].

Ce paramètre est caractéristique des formes elliptiques. Ces modes constituent une troisième famille de solutions orthogonales de l'équation d'onde paraxiale (A.15) développée récemment. Pour les modes de Laguerre-Gauss ou d'Hermite-Gauss le paramètre  $\varepsilon$  tend vers respectivement 0 ou  $\infty$ .

### Conclusion

La méthode que nous avons adoptée repose sur le propagateur paraxial. Elle est, en fait, élégante et très pratique. Elle permet d'exprimer le champ laser non seulement dans l'espace libre mais également après sa propagation à travers tout élément optique qui peut exister à l'intérieur de la cavité laser.

Nous avons également étudié le cas d'un laser multimode en tenant compte des degrés de liberté supplémentaires introduits par les modes transverses. En effet divers modes transverses correspondant à des valeurs différentes de  $n$ ,  $m$  (ou  $p$ ,  $l$ ) peuvent osciller simultanément. Cette situation peut être gênante si on cherche un fonctionnement mono fréquence et monomode transverse. D'autre part la répartition transversale de l'intensité sera non uniforme, à cause des

phénomènes d'interférence entre plusieurs modes transverses alors qu'un éclairage aussi uniforme que possible est souhaitable dans la plupart des applications.

### Modes des résonateurs

On part de la solution décrite par A.46 (ou A.47) pour un milieu homogène, puis on insère, aux points  $Z_1$  et  $Z_2$ , deux miroirs sphériques dont les rayons de courbure correspondent aux rayons de courbures des fronts d'onde en ces points. On est sûr ainsi, si la différence de phase entre les miroirs est un multiple de  $\pi$ , d'avoir une onde stable qui se reproduit automatiquement entre les deux miroirs.

Inversement, étant donné deux miroirs de rayon de courbure  $R_1$  et  $R_2$  et la distance  $L$  de séparation entre les miroirs (voir figure A.3), on peut calculer la position  $Z=0$  et l'étrangement  $w_0$  de l'onde dont les fronts d'onde, sur les miroirs, coïncident avec les rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$ . Si on prend soin d'avoir des miroirs dont les dimensions permettent de réfléchir la majeure partie de l'onde (99%), le facteur de qualité  $Q$  de la cavité, pour ce mode, sera très grand.

Soit les rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  situés à : 
$$-R_1 = Z_1 + \frac{Z_0^2}{Z_1} \quad \text{et} \quad R_2 = Z_2 + \frac{Z_0^2}{Z_2}$$

Avec  $Z_2 - Z_1 = L$  et si  $Z_2$  à droite de  $Z_1$  ( $Z_2 > Z_1$ ).

Pour faire le calcul, nous utiliserons la convention de signe [Sie.86] établie dans la condition de stabilité : pour un miroir ( $R_1$  par exemple), la convention de signe est changée par rapport à celle utilisée dans l'étude du faisceau gaussien. Rappelons que  $R(z) < 0$  lorsque  $z < 0$  (onde convexe) et  $R(z) > 0$  lorsque  $z > 0$  (onde concave). C'est la raison pour laquelle apparaît le signe (-) devant  $R_1$ .

Le calcul est simple si on utilise les expressions :

$$g_1 = 1 - L / R_1 \quad \text{et} \quad g_2 = 1 - L / R_2$$

les relations précédentes peuvent s'écrire alors, en terme de  $g_1$  et  $g_2$  :

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= -\frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2+2g_1g_2}L \\ Z_2 &= \frac{g_1(1-g_2)}{g_1+g_2-2g_1g_2}L \\ Z_0^2 = Z_R^2 &= L^2 \frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.48})$$

Et la largeur du faisceau est donnée dans la zone d'étranglement (Beam waist) par :

$$w_0^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \frac{\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}}{g_1+g_2-2g_1g_2} \quad (\text{A.49})$$

On peut ensuite en utilisant (A.39), calculer les largeurs à 1/e du faisceau sur les miroirs et localiser l'étranglement à partir des relations (A.48). Il faut remarquer que l'équation (A.49) contient la relation de stabilité ( $0 \leq g_1g_2 \leq 1$ ). En effet, si, cette dernière n'est pas vérifiée, la relation (A.49) ne donne pas une valeur réelle pour  $w_0^2$  et le faisceau gaussien n'existe plus.

### **Remarque 1:**

Pour un résonateur demi-symétrique :  $g_1 = 1$  et  $g_2 = g$

$$w_0 = w(Z_1) = \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{g}{1-g}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Pour un résonateur demi-sphérique, cas particulier d'un résonateur demi-symétrique,  $R=L$  donc  $w_0 = 0$ . En pratique,  $R$  s'approche de  $L$  de telle sorte que l'étranglement est variable et peut donc être adapté au milieu laser pour lequel on veut optimiser les conditions de fonctionnement ( en particulier, les dimensions du faisceau par rapport aux dimensions du milieu amplificateur).

### **Fréquences de résonance**

Il est aussi très important de connaître les fréquences de résonance de ces modes du résonateur. Ces fréquences sont obtenues à partir de la condition d'autoreproduction des modes. Il faut donc après un aller-retour complet dans le résonateur, que les amplitudes soient les mêmes, et que les phases soient égales, à  $2q\pi$  près. En supposant que les miroirs

n'introduisent pas de variation de phase lors de la réflexion de l'onde lumineuse, la condition d'autoreproduction s'écrit en utilisant l'expression A.46 (ou A.47) :

$$\phi_{m,n}(z_2) - \phi_{m,n}(z_1) = q\pi \quad (\text{A.50})$$

Où  $z_1$  et  $z_2$  sont les localisations des miroirs du résonateur et  $q$  est un entier.

Soit d'après A.37 :

$$k_{0q}L - (m+n+1) \left( \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right) = q\pi \quad (\text{A.51})$$

Avec  $L$  la longueur de la cavité.

Les modes longitudinaux  $TEM_{00q}$  ont pour fréquence :

$$\nu_q = q \frac{c}{2L} \quad (\text{A.52})$$

et leur espacement en fréquence est égal à :

$$\nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L} \quad (\text{A.53})$$

Pour les modes transverses, la relation (A.51) montre qu'ils sont dégénérés puisqu'ils correspondent à la même fréquence pour toutes les valeurs égales à  $(m+n)$ . Pour une valeur  $q$  et deux valeurs différentes de  $(m+n)$ , on obtient :

$$\left( k_{0q_1} - k_{0q_2} \right) L = \left[ (m+n+1)_1 - (m+n+1)_2 \right] \left( \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right)$$

soit :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\pi L} \Delta(m+n) \left( \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right) \quad (\text{A.54})$$

❖ Dans le cas d'un résonateur confocal ( $R=L$ ) :

$$\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) = -\arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) = \frac{\pi}{4}$$

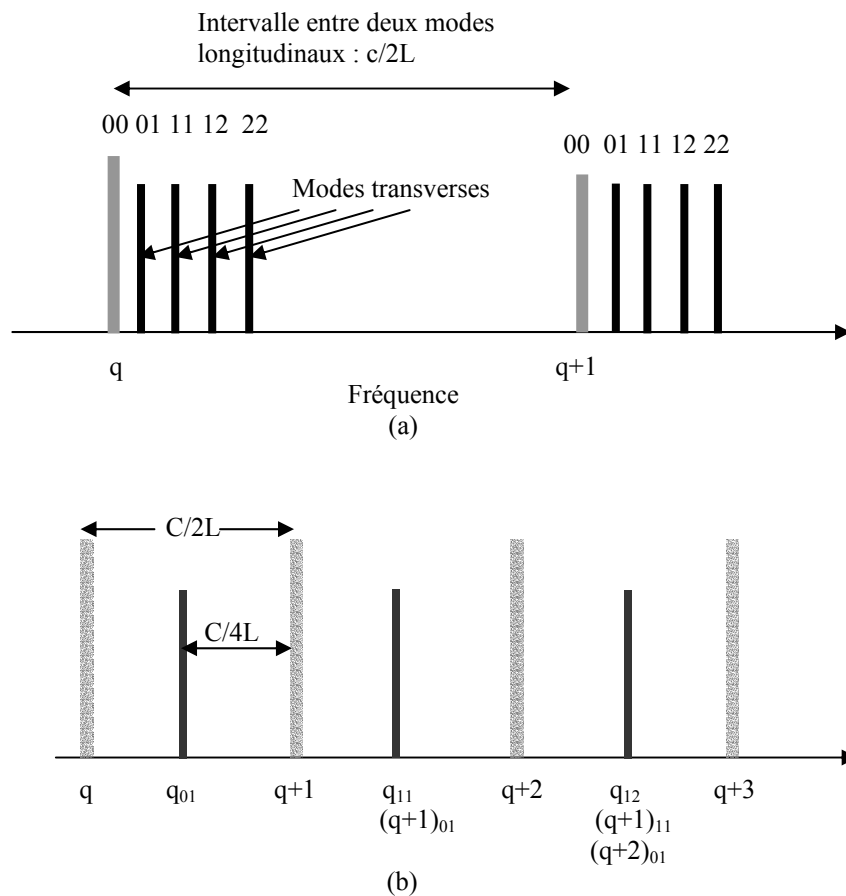
(A.52) devient :

$$\Delta\nu_{conf} = \frac{1}{2} \left[ \Delta(m+n) \right] \frac{c}{2L} \quad (\text{A.55})$$

Les modes transverses coïncident où se trouvent au milieu des modes longitudinaux.

La figure-A.7- montre les différentes fréquences d'une cavité confocale et d'un résonateur quelconque.

De façon générale, ces modes transverses oscillent à des fréquences intermédiaires entre les fréquences longitudinales.



**Figure-A.7-:** Fréquence de résonance a) d'un résonateur quelconque  
b) d'un résonateur confocal.

### **Remarque 2:**

#### **Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les équations paraxiales ?**

Les équations paraxiales comme il a été déjà évoqué ci-dessus, sont des équations aux dérivées partielles dont les solutions sont des ondes se propageant le long d'un axe privilégié. Elles sont très utilisées dans différents domaines comme la réflexion sismique pour imager la réflectivité du sous-sol en exploitant les ondes qui se propagent dans une direction proche de la verticale [Col.96], et également dans des problèmes de transmission des rayons lasers. Cette théorie habituellement présente des résultats suffisamment exacts. Parce que dans la plupart des cas les angles de divergence du faisceau laser sont très petits et la largeur du

faisceau est plus grande que la longueur d'onde. Cependant, il existe certains lasers qui ne satisfont pas à cette approche tel que les lasers à semi-conducteur qui sont caractérisés par une divergence de plusieurs dizaines de degrés [Agr.86] ; i.e. une largeur du point de pincement de l'ordre de la longueur d'onde. Dans ce cas une description vectorielle du faisceau est nécessaire [Sim.87].

Lorsque l'on veut utiliser une telle approximation pour résoudre l'équation d'onde, où il s'agit d'estimer les paramètres de la cavité résonante, la question se pose de la qualité des amplitudes qu'elles restituent. On peut montrer [Col.96] qu'une erreur de 20% peut être commise sur les solutions de l'équation des ondes dans un cône d'ouverture de 60°.

Cela nécessite de traiter correctement trois difficultés liées aux équations paraxiales :

La prise en compte des termes sources, la suppression des modes évanescents et l'absorption sur les bords latéraux.

Afin de clarifier ces problèmes de la propagation de l'onde paraxiale, Lax et al [Lax.75] ont développé une méthode de perturbation basée sur le développement suivant les puissances du paramètre de petitesse  $f = 1/kw_0$  où  $k$  est le nombre d'onde et  $w_0$  le beam waist.

Les solutions de l'équation d'onde paraxiale évoquées plus haut ne sont, en fait, que l'ordre zéro de ce développement, et les ordres suivants permettent d'estimer l'erreur commise.

En effet, on peut montrer [Cao.98] que le champ est purement transverse à l'ordre le plus bas et peut dépendre d'une coordonnée radiale. Cependant pour l'ordre suivant une petite composante longitudinale de champ est présente dont l'amplitude dépend du paramètre de petitesse  $f$ . Pour notre cas où le beam waist ne dépasse les 2.5 mm, le paramètre  $f$  est de l'ordre de  $7.10^{-4}$ , il est très petit, ce qui nous amène à négliger les erreurs commises par l'approximation paraxiale.

## Equation intégrale

L'étude de la propagation d'un faisceau quelconque, au moyen du propagateur (A.31) se fait généralement par une solution numérique de l'intégrale. Cependant l'analyse numérique ne permet pas de dégager les propriétés particulières d'un phénomène. Il existe cependant quelques exemples de distribution qui peuvent se solutionner analytiquement. En particulier, la distribution gaussienne.

La méthode que nous venons d'exposer repose sur le calcul de ce propagateur en partant d'une distribution  $u_0(r, \phi)$  en un plan et on observe, après un grand nombre de passages, la distribution stationnaire  $u_s(r, \phi)$  qui s'établira. Pour un résonateur passif, c'est la géométrie qui modifie l'onde qui se propage en aller-retour à l'intérieur de celui-ci. Dans cette première analyse, on néglige la diffraction en supposant que les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  ont des dimensions transverses très grandes ( $a \rightarrow \infty$ ). Par exemple pour amorcer notre calcul, on peut situer le plan de référence sur le miroir  $R_{M1}$ . La propagation en tout autre plan pourra éventuellement se calculer par une propagation simple à partir de la solution connue sur ce miroir. Il est pratique, en fait, de choisir le centre de courbure du miroir comme plan de référence.

Le propagateur (A.31) peut être réécrit ainsi :

$$u_1(r) = \left( \frac{2\pi(i)^{l+1}}{\lambda B} \right) \int_0^\infty u_0(r_0) e^{-\frac{i\pi}{\lambda B}(Ar_0^2 + Dr^2)} J_l \left( \frac{2\pi r r_0}{\lambda B} \right) r_0 dr_0 \quad (\text{B.1})$$

les éléments de la matrice ABCD sont calculés pour un passage aller-retour dans le résonateur [Sie.86]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{R_{M1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R_{M2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{R_{M1}} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

pour ce résonateur, on retrouve :

$$\begin{aligned} A &= D = 2g_1g_2 - 1, \\ B &= 2Lg_2, \\ \text{et } C &= \frac{2}{L}g_1(g_1g_2 - 1). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Partant d'une distribution initiale  $u_0(r)$ , on peut calculer la distribution  $u_1(r)$  après un passage complet, au moyen du propagateur (B.1) et, par itérations successives, on calcule la distribution après  $n$  passages. Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on peut imaginer que la distribution devient stationnaire, c'est à dire qu'elle ne change que par un facteur  $\gamma$  constant ; on a alors atteint la distribution modale.

Finalement, l'analyse effectuée consiste à chercher les solutions de l'équation intégrale suivante :

$$\gamma_l u_l(r) = \left( \frac{2\pi(i)^{l+1}}{\lambda B} \right) \int_0^\infty u_0(r_0) e^{-\frac{i\pi}{\lambda B}(Ar_0^2 + Dr^2)} J_l \left( \frac{2\pi r r_0}{\lambda B} \right) r_0 dr_0 \quad (\text{B.4})$$

$u_l(r)$  sont les distributions propres (modes) et  $\gamma_l$  les valeurs propres de cette équation intégrale. Ce type d'équation intégrale se nomme intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène [Har.99].

Dans le cas considéré (dimensions des miroirs infinies), on peut facilement solutionner cette équation intégrale (B.4) au moyen de la fonction génératrice de Lebedeff [Whi.40 ]

$$\frac{2(-i)^{l+1}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i(\rho^2 + \rho_0^2) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} J_l \left( \frac{2\rho\rho_0}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^l(\rho) e^{-i\left(n + \frac{l+1}{2}\right)\theta} \psi_n^l(\rho_0)$$

avec 
$$\psi_n^l(\rho) = \sqrt{\frac{2^{l+2} n!}{(n+l)!}} \rho^l e^{-\rho^2} L_n^l(2\rho^2)$$

qui nous permet de remplacer le noyau de l'équation intégrale par une somme simple de fonctions de Laguerre -Gauss :

$$\left( \frac{2\pi i^{l+1}}{\lambda B} \right) e^{\frac{i\pi A(r_0^2 + r^2)}{\lambda B}} J_l \left( \frac{2\pi r r_0}{\lambda B} \right) r_0 dr_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^l(\rho) e^{i\left(n + \frac{l+1}{2}\right)\theta} \psi_n^l(\rho_0) d\rho_0 \quad (\text{B.5})$$

Avec

$$\psi_n^l(\rho) = \sqrt{\frac{2^{l+1} n!}{(n+l)!}} \rho^l e^{-\rho^2} L_n^l(2\rho^2)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = A$$

$$\rho^2 = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{-C}{B}} r^2 \text{ et,}$$

$$\rho_0^2 = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{-C}{B}} r_0^2$$

Il s'ensuit que l'équation intégrale (B.4) est réduite à l'équation suivante :

$$\gamma_l u_l(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^l(\rho) e^{i\left(n+\frac{l+1}{2}\right)\theta} \int_0^{\infty} u_l(\rho_0) \psi_n^l(\rho_0) \rho_0 d\rho_0. \quad (\text{B.6})$$

Suite à l'orthogonalité des fonctions de Laguerre-Gauss [Abr.65], il est manifeste que les distributions propres (modes) de notre équation intégrale sont simplement :

$$u_{l,m}(r_0) = \psi_m^l(\rho_0), \quad (\text{B.7})$$

et les valeurs propres associées sont :

$$\gamma_{l,m} = e^{i\left(m+\frac{l+1}{2}\right)\theta}. \quad (\text{B.8})$$

Par exemple, le mode fondamental devient :

$$u_{0,0}(r) = e^{\frac{-\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{-C}{B}} r^2}, \quad (\text{B.9})$$

C'est à dire que ce mode sera un faisceau gaussien si le rapport C/B est négatif. Pour le résonateur sphérique (voir B.3), ce mode devient :

$$u_{0,0}(r) = e^{\frac{-\pi}{\lambda L} \sqrt{\frac{g_1}{g_2} (1-g_1 g_2)} r^2}. \quad (\text{B.10})$$

Ce mode sera un faisceau gaussien seulement si le résonateur est un résonateur à modes confinés, i.e.  $0 < g_1 g_2 < 1$ .

Pour cette géométrie, l'angle  $\theta$  est réel et la valeur propre représentera uniquement un saut de phase qui fixera la fréquence de résonance du mode. Le module de  $|\gamma|$  étant l'unité, ce résonateur à mode confiné n'a pas de pertes. Ceci se comprend facilement en considérant que les miroirs sont de dimensions infinies. Aussi parce que le mode est purement réel, sa phase, suite au choix du plan de référence, épouse la forme du miroir.

D'autre part, lorsque le rapport C/B est plus grand que zéro ( $g_1 g_2 > 1$  ou  $g_1 g_2 < 0$ ) le mode fondamental devient une onde sphérique paraxiale, ce qui est caractéristique des résonateurs

non confinés. Les valeurs propres  $\gamma_{l,m}$  ont des modules plus grands ( ou plus petits) que l'unité, ce qui correspond à une perte, suite au facteur de grandissement [Hod. 97] de ce type de résonateur. Cependant, pour le résonateur à modes non confinés, il faut se questionner sur la légitimité du développement de Lebedeff utilisé précédemment et l'orthogonalité des fonctions imaginaires dans le cas de Laguerre-Gauss.

La solution générale pour les modes, pour une symétrie cartésienne, s'obtient selon un cheminement analogue en utilisant la fonction génératrice double de Mehler [Whi.40]

$$\frac{1}{\sqrt{i\pi \sin(\theta)}} e^{\frac{[i(x^2+x_0^2)\cos(\theta)-2xx_0]}{\sin\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) e^{-i\left(n+\frac{l+1}{2}\right)\theta} \psi_n^l(x_0)$$

$$\text{avec} \quad \psi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} [n!]^{\frac{1}{2}}} e^{-x^2} H_n(\sqrt{2}x)$$

## Influence de l'alignement sur le faisceau laser

La cavité optique que nous avons considérée est constituée de deux miroirs sphériques parallèles l'un à l'autre, disposés de part et d'autre d'un milieu éventuellement amplificateur. Ainsi toutes les ondes qui ne se propagent pas dans la direction de l'axe sont éliminées. Autrement dit, elles finissent toujours par sortir de la cavité. Seuls les ondes parallèles à l'axe subsistent et peuvent résonner.

Nous avons vu (voir annexe A), pour qu'il y ait résonance dans la cavité, l'onde réfléchi par un miroir doit revenir en phase à chaque passage en un point donné. De ce fait la position des deux miroirs influe beaucoup sur la position de l'axe. Pour qu'il y ait résonance il faut que l'axe de la cavité reste dans les deux miroirs comme sur le dessin de gauche (voir figure-C1-ci-dessous).

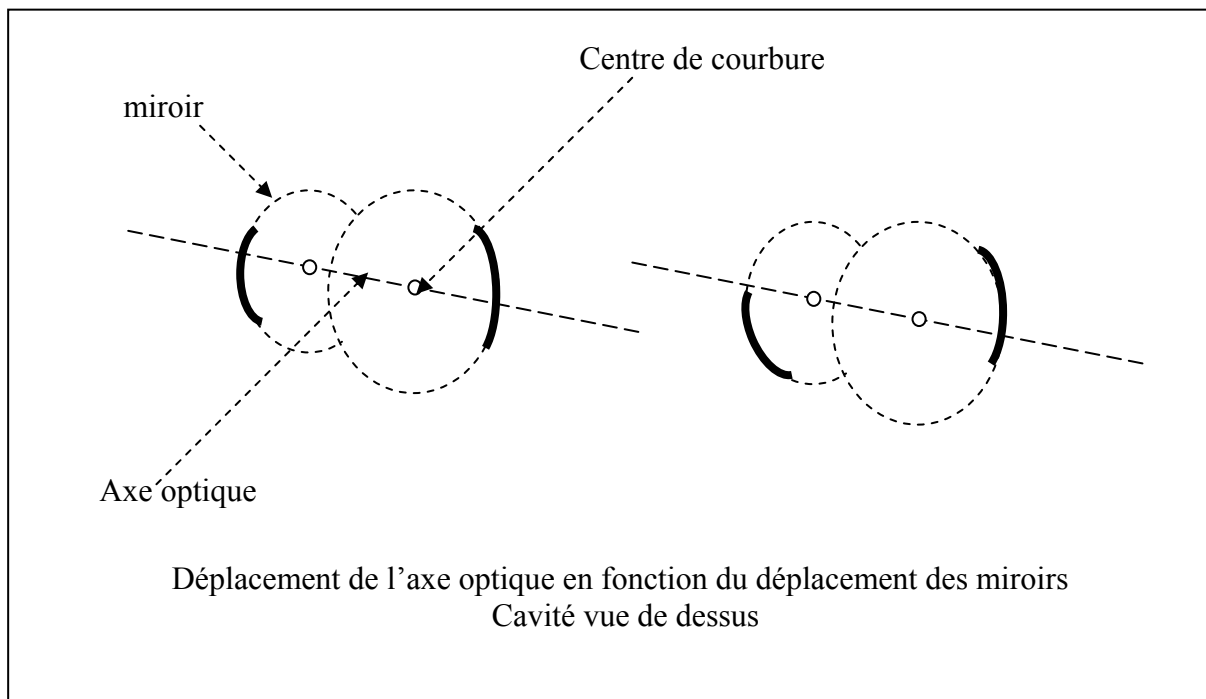


Figure-C1-

L'importance de cette étude vient du fait que les miroirs de la cavité pouvant subir des petits déplacements, on ne peut pas savoir avec précision où se situe l'axe de celle-ci. Néanmoins, ces changements de position ne peuvent excéder le millimètre ou le milliradian. Et puisqu'il s'agit des modes du laser et où des fréquences de résonance, ces petits déplacements influent

considérablement sur la distribution de l'intensité. Il est donc important que la technique d'alignement soit d'une grande précision.

Une technique a été mise au point [Dob.01]. Elle utilise une caméra CCD et une photodiode placées à la sortie de la cavité. La caméra permet d'observer la forme du champ transmis par la cavité et la photodiode donne l'intensité totale transmise.

### Etude des défauts optiques

Pour pouvoir observer l'effet de désalignement du faisceau, on s'intéresse aux conséquences d'un mauvais alignement entre le laser et la cavité. Ce problème a été traité par D.Z.Anderson [And.84]. Nous donnons ici un résumé de ses conclusions

Il faut considérer différents types de défauts :

- **Un décalage transverse**

L'axe du faisceau est parallèle à l'axe optique de la cavité mais décalé d'une petite quantité  $dx$  dans la direction  $x$ . (voir figure-C2- ci-dessous )

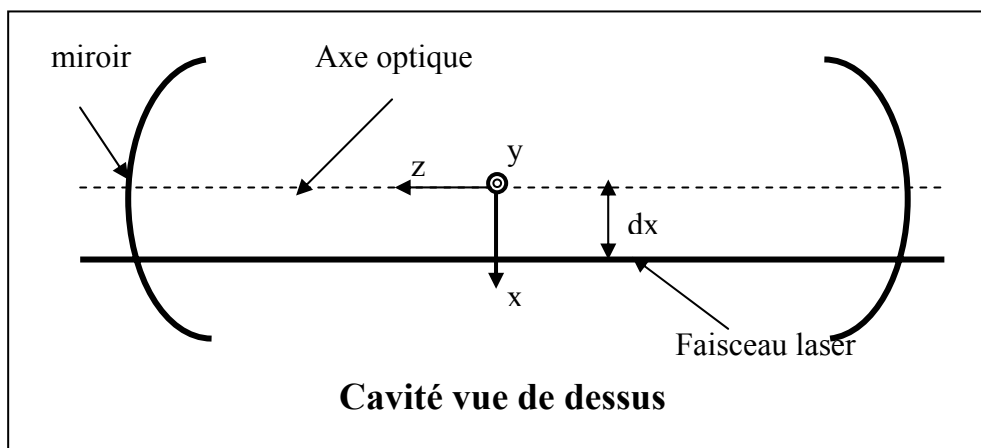


Figure-C2-

Au beam waist ( $z=0$ ) la fonction d'onde du faisceau laser s'écrit :

$$\psi(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{w_0}} e^{-\frac{[(x-dx)^2 + y^2]}{w_0^2}} \quad (C.1)$$

En effectuant un développement limité au premier ordre on obtient :

$$\psi(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{w_0}} \left(1 + 2dx \frac{x}{w_0}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \quad (C.2)$$

Or les premiers modes de Hermite dans la cavité sont donnés par :

$$\psi_{00}(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{w_0}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \quad (C.3)$$

$$\psi_{10}(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2x}{w_0}\right) \sqrt{\frac{1}{w_0}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \quad (C.4)$$

On en conclut que :

$$\psi(x, y) \approx \psi_{00}(x, y) + \frac{dx}{w_0} \psi_{10}(x, y) \quad (C.5)$$

Et donc :

$$E_t \approx E_{00} + \frac{dx}{w_0} E_{10} \quad (C.6)$$

$$\text{avec } E_t = e^{-i(kz-\omega t)} \cdot \sum_{n,m} G_{nm} \cdot \alpha_{nm} \cdot \psi_{nm} \quad (C.7)$$

$$\text{où } G_{nm} = \frac{(1-R) \cdot \cos\left(\frac{\pi\Delta\nu_{nm}}{\nu_0}\right) - i(1+R) \cdot \sin\left(\frac{\pi\Delta\nu_{nm}}{\nu_0}\right)}{(1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\pi\Delta\nu_{nm}}{\nu_0}\right)} \quad (C.8)$$

et

$$\alpha_{nm} = \iint_S (\psi_{nm}^* \cdot \psi) dx dy \text{ est la constante de normalisation}$$

$\nu_0$  est la fréquence de résonance dans le mode fondamental.

$\nu_{nm}$  est la fréquence gaussienne du mode transverse nm.

$R$  est le facteur de réflexion de l'un des miroirs.

$S$  est la surface de l'un des miroirs.

On remarque qu'un défaut transverse fait apparaître dans l'expression du champ un terme associé au mode 10.

- **Décalage angulaire :**

L'axe du faisceau laser et l'axe optique présente un décalage  $\alpha_x$  dans le plan ( $xoz$ ) mais sont concourants en  $z=0$ . (voir figure-C3- ci-dessous )

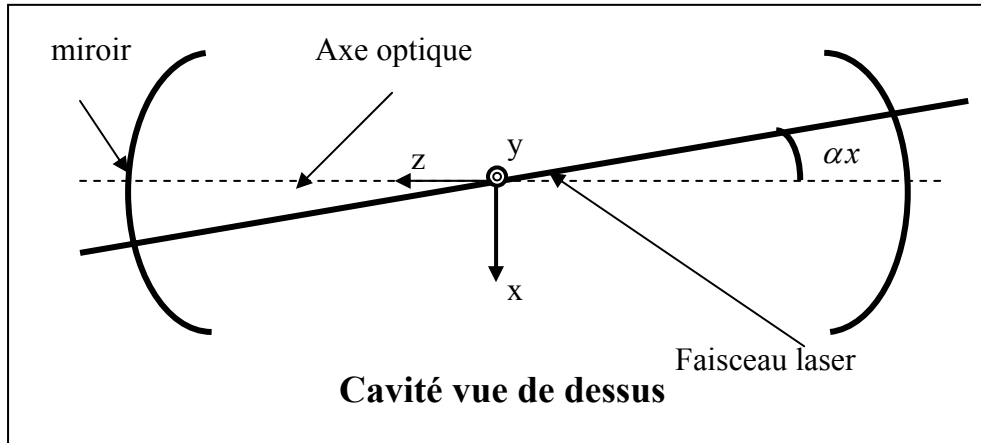


Figure-C3 -

On écrira :

$$\psi(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{w_0}} e^{ik\alpha_x x} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \quad (C.9)$$

On effectue de la même manière que pour le décalage transverse un développement limité au premier ordre et on en déduit

$$\psi(x, y) = \left(1 + i \frac{2\pi x \alpha_x}{\lambda}\right) \cdot \psi_{00}(x, y) \quad (C.10)$$

Et par conséquent

$$E_t \approx E_{00} + i \frac{\pi w_0 \alpha_x}{\lambda} E_{10} \quad (C.11)$$

Là encore dans l'expression du champ apparaît un terme supplémentaire associé au mode  $TEM_{10}$ .

On peut effectuer les mêmes calculs pour des décalages  $dy$  et  $\alpha_y$ .

- **Décalage angulaire et transverse selon x et y**

Si on a quatre décalages  $dx, \alpha_x, dy$  et  $\alpha_y$  on aura :

$$E_t \approx E_{00} + \left( \frac{\Delta x}{w_0} + i \frac{\pi w_0 \alpha_x}{\lambda} \right) \cdot E_{10} + \left( \frac{\Delta y}{w_0} + i \frac{\pi w_0 \alpha_y}{\lambda} \right) E_{01} \quad (C.12)$$

Ainsi donc, apparaissent dans l'expression du champ des termes correspondants aux modes transverses TEM<sub>10</sub> et TEM<sub>01</sub>. Le développement à l'ordre 1 ne fait apparaître que les termes  $E_{10}$  et  $E_{01}$ , si on tient en compte des termes d'ordre  $\geq 2$ , on pourra remonter aux modes d'ordres élevés. On peut donc conclure que le champ résonant est une combinaison de modes dans un laser désaligné.

### Calcul de l'intensité transmise

Si on ne fait pas de développement limité, l'expression du champ dans la cavité s'écrit [Dob.01] :

$$E = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{w_0} \right)^2 e^{ik\theta_x x} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \cdot e^{ik\theta_y y} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \cdot e^{-\frac{(x-dx)^2+y^2}{w_0^2}} \cdot e^{-\frac{(y-dy)^2+x^2}{w_0^2}} \cdot e^{-i(kz-\omega t)} \quad (C.13)$$

On s'intéresse uniquement à la projection de l'intensité sur le mode fondamental, on se place donc à la fréquence de résonance, il faut alors calculer

$$\iint_S \left( e^{ik\theta_x x} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \cdot e^{ik\theta_y y} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \cdot e^{-\frac{(x-dx)^2+y^2}{w_0^2}} \cdot e^{-\frac{(y-dy)^2+x^2}{w_0^2}} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \cdot dx dy \quad (C.14)$$

qui correspond à la projection du champ électrique sur le mode 00.

De plus, lorsqu'on intègre le module du champ on se rend compte qu'il reste juste les termes suivant :  $\iint_S E_t = \sum |c_{nm} \cdot G_{nm}|^2$ , où  $c_{nm}$  est la projection sur le mode nm, on obtient

l'expression suivante pour l'intensité totale transmise [Dob.01]:

$$I_t = e^{-\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{w_0^2}} \cdot e^{-\frac{(k \cdot w_0)^2}{4} (\theta_x^2 + \theta_y^2)} \quad (C.15)$$

L'expression de l'intensité permet de déterminer la position de l'axe optique et donc de positionner le faisceau laser [Dob.01].

L'évaluation de  $|E_t|^2$  est obtenue avec Mathematica afin de faire apparaître les différents modes pouvant osciller selon les décalages considérés.

Les figures -C4- ( 1, 2, 3, 4) donnent respectivement  $|E_t|^2$  lorsqu'il n y a pas de décalage, un décalage quelconque suivant x (transverse et angulaire), un décalage quelconque en y et un décalage en x et y.

Sans décalage, on observe une gaussienne centré en 0. Lorsqu'il y a des décalages, on observe des termes d'interférences qui se caractérisent par deux gaussienne de part et d'autre de l'axe (Oy) (L'axe (Ox)) si le décalage est en x (en y).

On donne sur la figure-C5- les résultats expérimentaux obtenus avec la camera CCD [Dob.01].

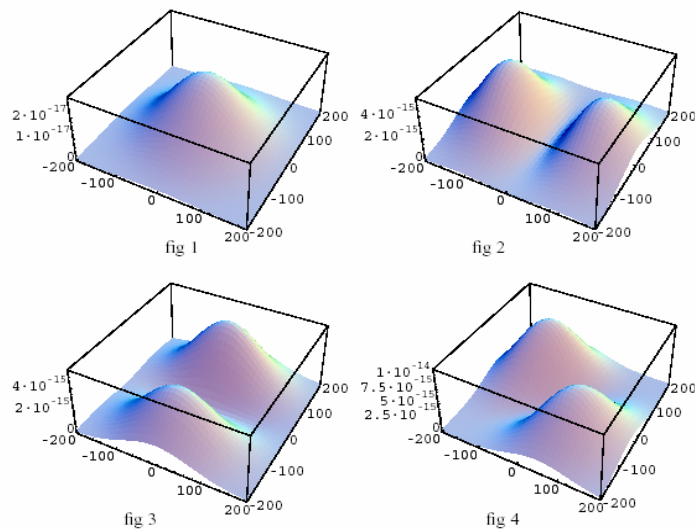


Figure-C4-



Figure-C5-

## Analyse numérique

L'analyse numérique adoptée repose sur le calcul des éléments de l'opérateur aller retour que nous avons développé. Ensuite pour remonter à la distribution transversale du champ en onde aller et retour nous avons considéré l'hypothèse que le mode est associé à la valeur la plus élevée. Dans ce cas la méthode de la puissance itérée, aussi connue sous le nom de la méthode de Caulfield et al [Cau.81] est la mieux adaptée pour déterminer aisément le champ propre et la valeur propre associée à l'opérateur déjà défini [voir chapitre II (II.16) et (II.37)].

Considérant une matrice R complexe dont les valeurs propres  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$  sont distinctes. avec  $|\gamma_1| > |\gamma_2| > |\gamma_3| > \dots > |\gamma_n|$ . Les vecteurs propres  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  associés sont orthogonaux et chaque vecteur propre  $V_0$  peut être décomposé sous la forme suivante :

$$V_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \quad (\text{D.1}) \quad \text{où } \alpha_i \text{ sont des nombres réels.}$$

La suite de la méthode de la puissance itérées est donnée de la manière suivante :

$$V_1 = R V_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i R u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i u_i \quad (\text{D.2})$$

$$V_2 = R^2 V_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i^2 u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i^2 u_i \quad (\text{D.3})$$

$$V_k = R^k V_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i^{k-1} R u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i^k u_i \quad (\text{D.4})$$

ou alors

$$V_k = R^k V_0 = \gamma_1^k \left[ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_2 + \dots + \alpha_n \left( \frac{\gamma_n}{\gamma_1} \right)^k u_n \right] \quad (\text{D.4})$$

pour k suffisamment grand, on obtient :

$$V_k = \lim_{k \rightarrow \infty} R^k V_0 = \gamma_1 \lim_{k \rightarrow \infty} R^{k-1} V_0 \quad (\text{D.5})$$

d'où la valeur absolue de la valeur propre la plus grande en module

$$|\gamma_1| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|R^k V_0\|}{\|R^{k-1} V_0\|} \quad (\text{D.6})$$

Et le vecteur propre associé  $u_1$  est donné par :

$$u_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R^k V_0}{\|R^{k-1} V_0\|} \quad (\text{D.7})$$

Comme vecteur de départ, on choisit le mode fondamental exprimé dans la base des modes considérée , et ce afin d'accélérer la vitesse de convergence de la méthode. Soit

$$V_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

Pour éviter d'avoir des composantes très grandes, on normalise les vecteurs  $R^k V$  après chaque itération.

Pour accéder au deuxième mode propre d'ordre élevé, on applique de nouveau l'algorithme à une matrice  $R_1$  possédant les valeurs propres  $0, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ .  $R_1$  est défini comme suit :

$$R_1 = R - \gamma_1 u_1 u_1^T \quad (\text{D.9})$$

Où  $u_1$  est le vecteur propre normé de  $R$  associé à la valeur propre  $\gamma_1$ . Le vecteur propre de départ étant donc :

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

On arrive ainsi à déterminer  $\gamma_2$  et  $u_2$ . On procède de façon analogue pour le calcul de  $\gamma_3$  et  $u_3$  associés à la matrice

$$R_2 = R_1 - \gamma_2 u_2 u_2^T \quad (\text{D.11}), \text{ et le vecteur de départ utilisé est}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

La vitesse de convergence de la méthode est déterminée par le rapport  $\gamma_1/\gamma_2$  [Cau.81]. Le nombre d'itérations est directement lié à l'ouverture considérée par la méthode de

décomposition sur les modes. Il est d'autant plus grand que l'ouverture est plus grande [Tat.03], le nombre d'itérations utilisé dans notre cas avec une ouverture  $a=20$  mm est de 3000 itérations. Alors que l'erreur commise par cette méthode pour le calcul des valeurs et vecteurs propres est celle choisie dans [Kel.85] soit  $10^{-5}$ .

## Références

- [Abr.65] Abamowitz and Stegun “ Tables mathématiques pour physicien” 1965.
- [Agr 86] G.P.Agrawal and N.K. Dutta, “ Long wavelength semiconductors lasers” Ed VanNostrand Reihhold Company, N.Y., (1986).
- [Ait.88] K.Ait Ameer and H.Ladjouze “ Fondamental mode distribution in a diaphragmed cavity” J.Phys. D.Appl, Vol 21, 1566-1571 (1988).
- [Ait.93] K.Ait Ameer, “ Influence de la diffraction résonante sur les caractéristiques du mode fondamental d’un laser à gaz quasi-isotrope” thèse de docteur es-science, USTHB (1993).
- [Ait.93] K.Ait Ameer, “ Influence of the longitudinal position of the fondamental mode in an aperture inside a cavity on the transverse mode discrimination App, Opt.Vol 32, 7366-7372 (1993).
- [Akr.89] A.Akrib, “ Etude de l’effet optogalvanique dans un milieu amplificateur à gaz carbonique” thèse Magister, USTHB (1989).
- [Ald.01] J.Alda “ Laser and Gaussian Beam propagation and transformation” Opt Engineering, Madrid. Spain (2001).
- [And.84] D.Z. Anderson, “Alignement of resonant optical Resonators”, App Opt 23, 2944 (1984).
- [Asc.78] G.Asch “ Les capteurs en instrumentation industrielle” , Dunod Bordas, Paris (1978).
- [Bat.94 ] K.Battou, “ Etude de la dissociation de la molécule de CO<sub>2</sub> dans un lase à gaz carbonique continu”, thèse de Magister, USTHB (1994).
- [Bel.03] R.Belhoucif, A.Kellou “ Détermination du champ résonant dans une cavité laser CO<sub>2</sub> non diaphragmée” Communication nationale, Senalap 2003.
- [Bel.00] P.A.Belanger, IEEE Journal of selected Topics in Quantum Electronics, Vol6 (2000).
- [Ber.99] L.Bertrand “ Stabilisation laser”, Ecole Polytechnique (1999).
- [Bor.59] M.Born and E.Wolf “ Principles of Optics” 6<sup>ème</sup> Edition, Pergamon Press (1959).
- [Bra.91] M.Brambilla, et al Phys. Rev. A 43, 5090 (1991).
- [Bre.04] Breck Hitz, “ Ince-Gaussian Beam Find the Middle Groud”, Opt Letters, PP.144-146 Lauring Publishing (2004).
- [Bru.02] H.Brunet, “ Les lasers et leurs applications scientifiques et médicales” - Les lasers moléculaires- LASEDOT Groupe Aéorospatiale France (2002).

- [Cao.98] Q.Cao and Ximing. Deng, "Correction to the paraxial approximation of an arbitrary free-propagation beam" J.Opt.Soc.Am.A/ Vol.15No.5 (1998).
- [Car.80] W.H. Carter "Spot size and divergence for Hermite Gaussian beams of any order" Appl.Opt.19,1027 (1980).
- [Cau.81] H.J.Caulfield, D.Dvornik, J.W. Goodman and W.Rhodes "Eigenvector determination by noncoherent optical methods", App.Opt., Vol 20, 2263-2265 (1981).
- [Col.70] S.A.Collins, J, Opt.Soc.Am.60, 1168 (1970).
- [Col.96] Collino,Francis-Lavaud, Benoit, "Can we Obtain Correct Amplitudes with Paraxial Equations?" rapport de recherche CEDEX, FRANCE (1996).
- [Dan.98] D.Dangoise, D Hennequin, V.Z.Dhaoui "Les laser" Dunod, Paris (1998).
- [Der.93] Z.Derrar, et al "Electromagnetic field distribution in He-Ne waveguide lasers", J.Phys.D: Appl.Phys., Vol 28, 2245-2251, 1995.
- [Dob.01] Dobrzynski "Mise au point d'une procédure d'alignement d'un laser dans une cavité Fabry-Perot" rapport de stage (2001).
- [Dul.76] W.W.Duley "CO<sub>2</sub> lasers effects and applications", Quantum Electronics Academic Press, New York ( San Francisco) London (1976).
- [Fel.76] L.B.Felsen, "Evanescent waves" J.Opt.Soc.Am., 66,751-760 (1976).
- [For.65] R.L.Fork and M.A.Pollack "Mode competition and collision effects in gaseous optical masers" Phys Review. Volume 139, N°5A? Murray Hill, New Jersey (1965).
- [Fox.61] A.G.Fox and T.Li "Resonant modes in maser interferometer", Bell Syst.Tech.J.,40, pp.453-488 (1961).
- [God.72] J.W.Goodman "Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie" Traduction Française Paris (1972).
- [Har.99] C.Harper "Analytic methods in physics" WILEY-VCH. Berlin (1999).
- [Hod.97] N.Hodgson, H.Weber "Optical Resonators", Fundamental, Advanced concept and Application, London (1997).
- [Kar.88] N.Karlov "Leçon d'électronique quantique" Traduction Française EDITION MIR MOSCOU (1988).
- [Kel.85] A.Kellou "Etude du champ résonant d'un laser diaphragmé" Thèse Doctorat 3<sup>ème</sup> Cycle, Université de Rennes (1985).
- [Kel.87] A.Kellou et G.Stéphan "Etude du champ proche d'un laser diaphragmé" App.Opt. Vol 26, 76-90, (1987).

- [Khe.80] N.Khelifa "Etude et réalisation du laser à gaz carbonique continu fonctionnant à faible pression" Thèse de Magister, USTHB (1980).
- [Kog.66] H.Kogelnik and T.Li "lasers beam and resonators" Pro.IEEE (1966).
- [Lax. 75] M.Lax, W.H.Louissell, and W.B.McKnight, "From Maxwell to paraxial wave optics," Phys.Rev.A 11, 1365-1370 (1975).
- [Lev.71] A.K.Levine et A.J.Demaria "Lasers", Vol 3, New York (1971).
- [Lip.95] S.G.Lipson, H.Lipson, D.S.Tannhauser "Optical physics". Combridge, New York, pp 48-98, 152-190 (1995).
- [Mai.90] H.Maillet "Le laser Pricinpes et Techniques d'application" Lavoisier paris (1990).
- [Nem.77] M.Nemes, G.Nemes, Optical quadrupole, Romanian patent N° 72789, (1977).
- [Osc.96] Oscar G.Calderon, "Transverse-mode selection insingle-longitudinal-mode lasers" Phy Rev A, Vol 53, Spain (1996).
- [Pas.93] I.Pastor et al, Physica D 66, 421(1993).
- [Pat.64] C.K.N.Patel "Continous wave laser action on vibrational-ratational transitions in CO2" Phys.Rev.Lett., 136.A1187 (1964).
- [Pat.74] B.S.Patel "Estimation of output power and optimum transmittance throught a coupling out hole for CW CO2 laser " App.Opt.Vol.13, N°1,pp 19-21, Jan. (1974).
- [Per.94] V.M.Perez-Garcia et al , Phys. Rev. A 50, 1646 (1994).
- [Phi.83] Ronald L.Philips and Larry C.Andrews, " Spot size and divergence for Laguere Gaussian beams of any order " App Opt (1983).
- [Pou.96] M. Poulmaire, F. Delaplace, K. Ould-Saïd et C. Juniet " La lumière et la mesure de la célérité" , Paris, (1996)
- [Sie.86] A.E.Siegman, "Lasers" (University Science Books, Mill Valley, California 1986).
- [Sie.90] A.E.Siegman, "New developments in Laser Resonators SPIE 1224 (1990).
- [Sie.99] A.E.Siegmnn 'Laser beam and resonators'IEEE journal of special Topics in QE, vol XX,NO Y (1999).
- [Sif.83] R.Sifodil, " Etude et réalisation d'un laser à CO2, basse pression, thèse de Magister, USTHB (1983).
- [Sim.87] R. Simon, E.C.G. Sudarshan and N Mukunda, " Cross Polarisation in laser beams" Appl.Opt., Vol 26, 1589-1593, (1987).
- [Sté.83] G.Stéphan and M.Trumper " Inomogeneity effects in gaz laser" Phys.Rev. Avol 28, 2344-2362 (1983).

- [Tac.87] J.P.Taché “ Derivation of ABCD law for Laguerre-Gaussian beams” App Opt, University of Rennes, France. (1987).
- [Tar.85] L.Tarassov “ Physique des processus dans les générateurs de rayonnement cohérent” Traduction Française Edition Mir MOSCOU (1985).
- [Tat.03] M.Tatah “ Laser à CO<sub>2</sub>: Influence de la diffraction sur le champ d’un laser à CO<sub>2</sub>”, Thèse de Magister, USTHB (2003).
- [Tra.00] M.Traiche, A.Kellou , “Distribution du rayonnement à l’intérieur d’une cavité laser, cas d’une cavité à miroir de sortie troué”, Thèse de Magister (2000).
- [Tra.02] M.Traiche, A.Kellou ‘Calculation of the resonant eigenfield....stable resonators’ Opt Comm (2002).
- [Vai.04] J.Vaills “ Cours d’optique géométrique, interférence et diffraction” Université d’Orleans (2004).
- [Wan.00] Z.Y.Wang, T.Chen,T.C.Zno “ Calculation of mode contents of height-power CO<sub>2</sub> laser beam according to the changes of transverse intensity distribution Opt Comm Vol 175, 215-220 (2000).
- [Wan.91] Lin Yu Wang “ Etude de distributions de champs dans les lasers diaphragmés” Thèse de Doctorat, Université de Rennes (1991).
- [Web.87] H.Weber, Opt.Comm. Vol 62(2), 124-126 (1987).
- [Whi.40] E.T.Whittaker, Proceeding Royal Society of Edinburgh LXIA (1940-1941).