

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur

En : Mathématiques

Spécialité: Équations aux dérivées partielles et applications

Présenté par: SEGHOOR LAMIA

Stabilisation exponentielle d'une équation des ondes viscoélastiques
avec des conditions aux limites dynamiques

Soutenue le 01/12/2015 publiquement devant le jury composé de

M. M. S. MOULAY	Professeur	à l'USTHB	Président
M. M. KHEMMOUDJ	Maître de Conférences/A	l' USTHB	Directeur
M. A. BENAÏSSA	Professeur	à l'U.DJ.L. de Sidi Bel Abbès	Examineur
M. A. HAKEM	Professeur	à l'U.DJ.L. de Sidi Bel Abbès	Examineur
M. S.E. REBIAI	Professeur	à l'U.H.L. de Batna	Examineur
M. D. E. TENIOU	Professeur	à l'USTHB	Examineur

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement Mr KHEMMOUDJ AMMAR pour sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif, et m'encourager pendant ces années. Il ma témoigné sa confiance. Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Je remercie Prof. S. MOULAY, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de cette thèse. Je remercie également Prof. D. E. TENIOU, Prof. A. BENAÏSSA, Prof. S. E. REBIAI, Prof. A. HAKEM, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Durant mes quatre années de recherche dans le Laboratoire AMNEDP à l'USTHB, le cadre de travail était idéal et l'ambiance conviviale. Je remercie en particulier le Professeur Djamel Teniou, directeur de ce laboratoire, pour avoir su créer un climat propice à la recherche.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes professeurs qui, tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

Qu'il me soit enfin permis d'exprimer toute ma gratitude à mon mari Omar, qui a toujours été un soutien à mes côtés, il m'a sans cesse encouragée et soutenue dans mon travail, c'est grâce à lui que j'ai pu entreprendre des études longues, dont cette thèse est l'aboutissement.

Un grand merci à tous les doctorants avec qui j'ai pris un réel plaisir à partager, non seulement, des discussions scientifiques, mais aussi des moments plus personnels, une pause café, un repas....

Je tiens à remercier ma famille : en particulier mon père et ma mère, ma soeur Nawel et mes frères: Fayçal et Ilyes, pour leur amour et leur soutien sans faille. Je les remercie de

m'avoir supportée et encouragée pendant les moments de doute. Je n'aurai jamais pu faire cette thèse sans eux.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse est vivement remerciée.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à un problème viscoélastique avec des conditions aux limites de type Ventcel. Nous avons démontré tout d'abord l'existence, l'unicité et la régularité des solutions mild et forte locales, et ensuite l'existence, l'unicité et la régularité des solutions globales.

Nous avons prouvé ensuite la décroissance exponentielle de l'énergie $E(t)$ associée aux solutions du problème. Les noyaux utilisés sont fortement définis positifs. Nous avons démontré que les termes mémoires interne et frontière sont assez forts via le processus de transmission $(u|_{\Gamma} = v)$ pour stabiliser tout le système. Finalement, nous avons prouvé que la fonction $e^{2\alpha t}E(t)$ appartient à l'espace $L^1(0, \infty)$.

Mots clés: Équation des ondes-Viscoélastique-Conditions aux limites dynamiques-Existence globale-Stabilité asymptotique- Noyaux fortement définis positifs.

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Notes historiques	3
1.1.1	Les travaux de C. S. Morawetz	3
1.1.2	Les travaux de G. Chen et J. Lagnese	3
1.1.3	Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani	4
1.1.4	Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua	4
1.1.5	Les travaux de J. Lions	4
1.2	Problèmes viscoélastiques	4
1.2.1	Élasticité, viscosité	4
1.2.2	Matériau viscoélastique	5
1.2.3	Stabilisation de quelques problèmes viscoélastiques	6
1.3	Problèmes de Ventcel	9
1.4	But du travail	11
1.5	Organisation de la thèse	12
2	Préliminaires	13
2.1	Espace L^p	13
2.2	Notions de base sur les distributions	14
2.2.1	Rappels et définitions	14
2.2.2	Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact	14
2.2.3	Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	15
2.3	Espaces de Sobolev	16

2.4	Quelques inégalités	18
2.5	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	19
2.6	Gradient tangentiel et laplacien tangentiel	21
2.6.1	Gradient tangentiel	21
2.6.2	Laplacien tangentiel	21
2.6.3	Espaces définis avec le gradient tangentiel	22
2.7	Lemmes de types Gronwall	22
3	Noyaux définis positifs et résolvente	24
3.1	Noyaux définis positifs	24
3.2	Noyau résolvant	28
3.3	la résolvente	30
4	Etude de l'existence et l'unicité d'un problème viscoélastique	31
4.1	Introduction	31
4.2	Préliminaires	32
4.3	Différents types de solutions	34
4.4	Existence et unicité locale	35
4.4.1	Existence et unicité locale de la solution mild	35
4.4.2	Existence et unicité locale de la solution forte	36
4.5	Energie modifiée	38
4.6	Estimations a priori	40
4.7	Existence et unicité globale	44
4.7.1	Existence et unicité de la solution mild globale	44
4.7.2	Preuve du Théorème 4.7.1	45
4.7.3	Existence et unicité de la solution forte globale	48
4.7.4	Preuve du Théorème 4.7.2	49
5	Stabilisation exponentielle du problème linéaire	51
5.1	Introduction	51
5.2	Préliminaires	52
5.3	Transformation du problème (5.1.1)-(5.1.4)	55

5.4	Énergie modifiée	55
5.5	Preuve du Théorème 5.1.1	56
5.5.1	Estimation de l'énergie cinétique	57
5.5.2	Lemmes techniques	73
5.5.3	Fin de la preuve du Théorème 5.1.1	80
6	Stabilisation exponentielle du problème semilinéaire	82
6.1	Introduction	82
6.2	Transformation du problème	83
6.3	Énergie modifiée	84
6.4	Preuve du Théorème 6.1.1	84
6.4.1	Applications des trois multiplicateurs	84
6.4.2	Fin de la Preuve du Théorème 6.1.1	87
7	Conclusion	88

Chapitre 1

Introduction générale

La Théorie du Contrôle des Équations aux Dérivées Partielles intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de contrôlabilité, d'observabilité et de stabilité des équations aux Dérivées Partielles ont fait l'objet, récemment, de nombreux travaux. Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilisation d'un problème viscoélastique semilinéaire avec des conditions aux limites dynamiques et des noyaux fortement définis positifs.

Le problème de contrôlabilité peut se formuler simplement de la manière suivante : on considère un système d'évolution décrit par les équations aux dérivées partielles et un intervalle de temps $[0, T]$. Peut-on amener les solutions d'un état initial (au temps $t = 0$) à un état finale (au temps $t = T$) en agissant par un contrôle approprié appliqué sur le bord ou dans une partie du domaine dans laquelle l'équation évolue?

Il y a eu d'importantes recherches sur le sujet durant ces dernières années. Voir par exemple J.-L. Lions [57, 58], Lasiecka et Triggiani [46], Fattorini [33], Russell [74] et Zuazua [81, 82]....

Dans un cadre fonctionnel approprié, le problème de contrôlabilité est équivalent à celui d'observabilité, qui consiste à analyser si l'énergie totale des solutions peut être évaluée au moyen de mesures partielles sur un sous-ensemble du domaine ou du bord. Pour obtenir des estimées d'observabilité, il existe diverses méthodes, comme la technique des multiplicateurs [43, 57], l'analyse micro locale [5, 9], les inégalités de Carleman [14, 34, 36, 51] ou encore

les critères fréquentiels [10, 65], les critères spectraux [59, 72] ou les inégalités d’Ingham [38, 40, 44].

La stabilisation a pour but d’atténuer les vibrations, elle consiste donc à garantir la décroissance de l’énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel nous nous intéressons revient à déterminer le comportement asymptotique de l’énergie que nous notons par $E(t)$, à étudier sa limite afin de déterminer si cette dernière est nulle ou pas, et, si cette limite est nulle, à donner une estimation de la vitesse de décroissance de l’énergie vers zéro.

On peut noter des différences entre les problèmes de contrôlabilité et ceux de stabilisation. D’une part, dans le premier cas le temps varie dans un intervalle fini $[0, T]$, alors que pour les problèmes de stabilisation le temps t tend vers l’infini.

Malgré cela, les liens entre les problèmes de stabilisation et de contrôlabilité sont étroits et l’on démontre certaines implications entre ces deux problèmes (voir par exemple [58, 67, 74]). Cependant, la stabilisation ne peut pas toujours être obtenue comme conséquence de la contrôlabilité, et c’est pour cette raison que son étude est souvent faite indépendamment et directement.

Il existe plusieurs types de stabilisation. Le premier type consiste à analyser simplement la décroissance de l’énergie des solutions vers zéro, i.e. :

$$E(t) \rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

C’est ce que l’on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s’intéresse à la décroissance de l’énergie la plus rapide, c’est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e. :

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

où C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance de l’énergie n’est pas exponentielle, mais du type polynomial ou logarithmique par exemple:

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \quad \forall t > 0,$$

ou bien

$$E(t) \leq \frac{C'}{\log(1+t)^k}, \quad \forall t > 0,$$

où C , C' , α et k sont des constantes positives avec C et C' qui dépend des données initiales.

1.1 Notes historiques

Nous allons rappeler d'une manière brève quelques phases qu'a connue la notion de stabilisation sans vraiment rentrer dans les détails.

1.1.1 Les travaux de C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation d'ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, C. Wilcox [79] a réussi à montrer que l'énergie locale décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini. Avec des hypothèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz [66] a montré que l'énergie locale décroît comme l'inverse du temps. En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips [50] ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation d'ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

1.1.2 Les travaux de G. Chen et J. Lagnese

En se basant sur les travaux C. S. Morawetz [66] sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell [73] a conjecturé, en 1974 un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné. Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen [24]. Ensuite, en adaptant la technique des multiplicateurs utilisée par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U. R. Alston, dans les domaines extérieurs, C. Chen [25]) a amélioré les résultats obtenus dans [24]). Voir aussi Lagnese [45]).

1.1.3 Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani

En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani [47] ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord.

1.1.4 Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition aux bords de G. Chen en la remplaçant par une autre condition, ce qui a permis, en principe de généraliser les résultats de Chen et Lagnese au domaine à bords réguliers et connexes, mais au prix de modifier la condition aux limites.

1.1.5 Les travaux de J. Lions

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables. Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle et de la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni l'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

1.2 Problèmes viscoélastiques

1.2.1 Élasticité, viscosité

L'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées.

Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiale quand ces forces ne s'exercent plus. Les raisons physiques du comportement élastique peuvent être quelque peu différentes d'un matériau à un autre. Pour les métaux, les treillis atomiques changent de taille et de forme quand des forces leur sont appliquées (ajout d'énergie au système). Quand les forces sont supprimées, le système revient à son état original où l'énergie est la plus faible. Pour le

caoutchouc et d'autres polymères, l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymère, lorsque les forces sont appliquées.

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, selon le module de Young, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion.

D'autre part, la viscosité est une propriété interne d'un fluide qui offre une résistance à l'écoulement. Un liquide visqueux n'a pas de forme définie, il s'écoule de manière irréversible sous l'action de forces externes. Cependant, il existe des matériaux dont les propriétés sont intermédiaires entre l'élasticité et la viscosité.

1.2.2 Matériau viscoélastique

En rhéologie, le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module E (ou G) et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité η . L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver et restituer de l'énergie après déformation.

La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, et la plupart des matériaux ont un comportement viscoélastique. La partie viscoélastique provoque une décroissance de l'énergie associée. La partie élastique donne une équation conservatrice par contre la partie viscoélastique produit un mécanisme de dissipation qui agit sur une partie où tout le domaine pour donner une décroissance de l'énergie associée à la solution pour ramener le système à l'état d'équilibre.

Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques fournissent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux à garder une certaine mémoire.

Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégraux, par exemple $\int_0^t h(t-s) \Delta(s) ds$, où h représente le noyau dans l'expression du terme mémoire, le terme intégral exprime le fait que les contraintes dépendent à tout moment, non seulement de la valeur instantanée, mais de toute l'histoire passée des contraintes que le matériau a subi.

1.2.3 Stabilisation de quelques problèmes viscoélastiques

Appleby J. A. D et al. [4] ont étudié l'équation intégral-différentielle linéaire

$$u'' + Au(t) + \int_{-\infty}^t k(t-s) Au(s) = 0 \quad t > 0,$$

où le symbole $'$ désigne la dérivée partielle par rapport au temps ($\frac{\partial}{\partial t}$), et A est un opérateur positif sur un espace de Hilbert X , avec domaine dense $D(A)$, ils ont établis des résultats concernant la décroissance exponentielle des solutions fortes dans un espace de Hilbert. Vittorino Pata [70] a étudié les propriétés de décroissance du semi-groupe engendré par une équation intégral-différentielle linéaire dans un espace de Hilbert, qui est une version abstraite de l'équation

$$u''(t) - \Delta u(t) + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) = 0$$

décrivant la dynamique des corps viscoélastiques linéaires et il a établi les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la stabilité exponentielle.

Pour le cas de l'histoire finie, Cavalcanti et al. [19] ont étudié le problème viscoélastique suivant

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) + h(u_t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (u'(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où Γ_0, Γ_1 sont des sous ensembles fermés et disjoints, avec $mesure(\Gamma_0) > 0$ et ν représente la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, g et h sont des fonctions spécifiques. Ils ont montré un résultat d'existence globale pour les solutions fortes et faibles. De même, des résultats sur le taux de la décroissance uniforme ont été prouvés avec des hypothèses assez restrictives sur le feedback h et le noyau g .

En effet, la fonction g devait se comporter exactement comme e^{-mt} , $m > 0$, et la fonction h avait un comportement polynomiale au voisinage de zéro. Plus tard, Cavalcanti et al. [17] ont considéré (1.2.1) sans imposer une hypothèse de croissance sur h et sous des conditions plus faibles sur g . Ils ont amélioré le résultat obtenu dans l'article [19] et ils ont assuré la

stabilité uniforme. En particulier, ils ont obtenu des taux de décroissance explicites pour certains cas spéciaux. Ce résultat a été récemment amélioré par Messaoudi et Mustapha [62]. Voir aussi [32] où les auteurs ont considéré

$$u'' - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta(\tau) d\tau + u' = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty)$$

et ils ont montré que la décroissance exponentielle de la fonction de relaxation est une condition nécessaire pour avoir la décroissance exponentielle de l'énergie de la solution. La présence du terme mémoire peut empêcher la décroissance exponentielle. Ils ont également obtenu un résultat similaire pour le cas de la décroissance polynomiale.

Cavalcanti et al. [20], ont considéré

$$u'' - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta(\tau) d\tau + a(x)u' + |u|^\gamma u = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty)$$

où $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction qui peut s'annuler sur une partie de Ω . Sous certaines restrictions géométrique sur ω et pour

$$\begin{aligned} a(x) &\geq a_0 > 0, \quad \forall x \in \omega, \quad \omega \subset \Omega \\ -\xi_1 g(t) &\leq g'(t) \leq -\xi_2 g(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Les auteurs ont établi un taux de décroissance exponentielle. Berrimi et Messaoudi [8] ont amélioré le résultat de Cavalcanti en introduisant une différente fonctionnelle qui leur a permis d'affaiblir les conditions à la fois sur a et sur g . Par ailleurs, Berrimi et al. [7] ont considéré

$$u'' - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta(\tau) d\tau = |u|^{p-2} u, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty)$$

dans un domaine borné et $p > 2$. Ils ont établi l'existence locale, et ils ont montré sous des conditions plus faibles que celles de [20], que la solution locale est globale et décroît uniformément si les données initiales sont assez petites.

Cavalcanti et Oquendo [22] ont considéré

$$u'' - k_0 \Delta u + \int_0^t g(t - s) \operatorname{div}[a(x)g(t - s) \nabla u(s)] ds + b(x)h(u') + f(u) = 0,$$

dans $\Omega \times \mathbb{R}_+$, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ et $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction qui peut être nulle sur une partie du domaine Ω . Sous les conditions $b(x) \geq b_0 > 0$ sur $\omega \subset \Omega$ et ω vérifiant certaines restrictions géométriques, $a(x) + b(x) \geq \rho > 0$, pour tout $x \in \Omega$, et g vérifiant

$$-\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\xi_2 g(t), \quad t \geq 0.$$

Ils ont amélioré le résultat obtenus par M.M. Cavalcanti et al. [20] en établissant la stabilité exponentielle dans le cas où g décroît exponentiellement avec h linéaire et la stabilité polynomiale dans le cas où g décroît polynomialement et h non linéaire.

Pour les équations viscoélastiques quasilineaires, Cavalcanti et al. [16] ont étudié l'équation suivante

$$|u'|^\rho u'' - \Delta u - \Delta u'' + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds - \gamma \Delta u' = 0, \quad \rho > 0,$$

ils ont démontré l'existence globale pour $\gamma \geq 0$ et la décroissance exponentielle pour $\gamma > 0$. De même, Messaoudi et Tatar [63], [64] ont prouvé pour $\gamma = 0$ la décroissance exponentielle avec ou sans terme source.

Les problèmes de stabilisation par des termes mémoires dans Ω et d'autres dissipations sur une partie du bord Γ ont été étudiés par Cavalcanti et al. [16, 18]. Aassila, Cavalcanti et Soriano [1] ont étudié la stabilisation de l'équation des ondes avec des termes mémoires et une dissipation frictionnelle non linéaire sur le bord.

Plusieurs modèles constitutifs des matériaux viscoélastiques conduisent à des équations de mouvement, ayant la forme d'une E. D.P linéaire hyperbolique, perturbée par un terme intégral dissipatif de type Volterra et ayant un noyau de convolution non négatif, décroissant, voir par exemple, e.g., [27], [28].

Pour plus de détails concernant les phénomènes physiques qui sont modélisés par les équations différentielles avec des termes mémoires, voir [31]. L'existence et l'unicité des solutions ont été étudiées par J. Prüss [71].

P. Cannarsa et D. Sforza [12] ont étudié la stabilité de l'équation intégro-différentielle non linéaire suivante

$$u''(t) + F(u(t)) + Au(t) - \int_0^t \beta(t-s)Au(s)ds = f(t), \quad t \geq 0 \quad (1.2.2)$$

où A est un opérateur positif sur un espace de Hilbert X , avec domaine dense $D(A)$, F est une fonctionnelle définie sur $D(A^\theta)$, $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, le noyau β n'est pas supposé être absolument continue mais juste intégrable. Les auteurs ont supposé que $k(t) := \int_0^\infty \beta(s)ds$ est un noyau de type positif vérifiant $k(0) < 1$. Ils ont montré que la solution décroît exponentiellement à l'infini.

Il est important de mentionner que P. Cannarsa et D. Sforza [11], ont étudié l'équation intégral-différentielle semilinéaire suivante

$$u''(t) + Au(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = \nabla F(u(t)), \quad t \in (0, \infty), \quad (1.2.3)$$

où A est vérifiant les mêmes hypothèses que celle du problème (1.2.2), ∇F représente le gradient de la différentiabilité au sens de Gâteaux de la fonctionnelle $F : D(A^{1/2}) \rightarrow \mathbb{R}$, et g est un noyau qui décroît exponentiellement à l'infini et possédant des primitives fortement définies positives. Ils ont obtenu de la stabilisation exponentielle des solutions faibles.

F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et D. Sforza [3] ont prouvé les décroissances exponentielle et polynomiale de l'énergie pour le problème (1.2.3) en affaiblissant les hypothèses sur g . Ils ont supposé que $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction localement absolument continue vérifiant, pour $p \in (2, \infty]$,

$$g(0) > 0, \quad \int_0^\infty g(t)dt < 1, \quad g'(t) \leq -kg(t)^{1+\frac{1}{p}}.$$

Les résultats de décroissance de l'énergie à l'infini de toute solution mild du problème (1.2.3), avec des données initiales suffisamment petites, sont obtenus avec le même taux de décroissance que g (exponentielle ou polynômiale).

1.3 Problèmes de Ventcel

Les problèmes de Ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels du même ordre que l'opérateur principal. Ils interviennent dans la modélisation des phénomènes mécaniques comme l'élasticité [53, 54], ou physique comme processus de diffusion [52, 75] ou la propagation d'onde [6]. Les conditions de Ventcel sont obtenues par des méthodes asymptotiques à partir de problèmes de transmission. La condition

$$\partial_\nu u - \Delta_\Gamma u = g \quad \text{sur } \Gamma_1$$

pour l'équation

$$u' - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

a été introduite par Ventcel pour des processus de diffusion [78]. Elle fait intervenir des dérivées tangentielles d'ordre deux. Elle modélise l'échange thermique du corps Ω avec le milieu ambiant en présence d'une pellicule fine, très bonne conductrice sur la surface du corps.

L'équation des ondes avec des conditions aux limites (de type Ventcel) est utilisée dans un large champ d'applications, voir [61]. Pour l'étude de la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes avec conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel, voir [55].

L'équation des ondes avec des conditions aux limites de type Ventcel a été étudiée par Khemmoudj et Medjden [42]. Dans cet article, les auteurs prouvent la stabilité exponentielle en considérant le feedback linéaire $a(x)u'_1$ agissant dans la première équation et $b(x)u'_2$ agissant dans la seconde équation, suivant les techniques développées par Zuazua [80]. Les résultats précédents, ont été généralisés dans [21], en considérant des opérateurs linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_T$ qui dépendent de la variables spatiale x , au lieu de $-\Delta$ et $-\Delta_\Gamma$, respectivement. D'autre part les auteurs ont utilisé des dissipations non linéaire $a(x)g_1(u')$ et $b(x)g_2(v')$ agissant respectivement dans la première et la seconde équation. Ces résultats ont été obtenus en combinant de nouvelles estimations de l'énergie avec des méthodes de géométrie Riemannienne, introduites par Lasiecka, Triggiani and Yao [49].

Marcelo M. Cavalcanti et al. [23] ont étudié la stabilisation de l'équation d'onde avec des conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, \infty[\end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) avec une frontière régulière $\Gamma := \partial\Omega$. Soient Γ_0 et Γ_1 des sous ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ , tels que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ce modèle décrit les vibrations d'un corps avec une couche mince d'une grande rigidité sur sa frontière. Un tel système a été d'abord étudié par Lemrabet [52, 53], puis par Lemrabet et Teniou [56].

1.4 But du travail

Notre objectif est l'étude de l'existence locale et globale des solutions mild et fortes, ainsi que la stabilisation exponentielle du problème viscoélastique avec des conditions aux limites de type Ventcel suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + (1 - \Delta)u - g * (1 - \Delta)u + h_1(u) = f_1(t) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ v'' + \frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} + (1 - \Delta_\Gamma)v - g * (1 - \Delta_\Gamma)v + h_2(v) = f_2(t) & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(0), v'(0)) = (u_1, v_1) & \text{in } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) avec une frontière régulière $\Gamma := \partial\Omega$. Soient Γ_0 et Γ_1 des sous ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. ∇_Γ représente le gradient tangentielle sur Γ , on désigne par Δ_Γ l'opérateur de Laplace sur Γ et par ∂_ν la dérivée normale où ν représente la normale unitaire extérieure à Γ . Supposons que h_i sont globalement lipschitziennes, i.e. $h_i \in C^1(\mathbb{R})$, $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, et il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$; $p > 1$; $(n - 2)p \leq n$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \\ |h_1(s_1) - h_1(s_2)| \leq c_1(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})|s_1 - s_2|, \\ |h_2(s_1) - h_2(s_2)| \leq c_2(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})|s_1 - s_2|. \end{array} \right. \quad (1.4.2)$$

Supposons que

$$R(U) = \int_\Omega F_1(u(t))dx + \int_\Gamma F_2(v(t))d\Gamma \geq 0, \quad (1.4.3)$$

où

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

et

$$F_1(u) = \int_0^u h_1(s)ds, \quad F_2(v) = \int_0^v h_2(s)ds.$$

Ce système couplé est une version semilinéaire (avec des termes de mémoires) du modèle de Ventcel. Le modèle décrit une vibration d'un corps viscoélastique avec un corps mince de grande rigidité sur sa frontière. Dans notre travail, nous supposons que le noyau g est fortement défini positif vérifiant les mêmes hypothèses que celles dans [11]. Une question

naturelle se pose dans le contexte du problème viscoélastique avec des conditions de bords dynamiques (de type Ventcel) : *est-il possible de stabiliser le système en considérant les termes mémoires (la dissipation) agissant dans la première et la seconde équation?* L'objectif de ce travail est de donner une réponse à cette question, autrement dit: prouver que les termes de mémoires (damping) sont assez forts via le processus de transmission ($u|_{\Gamma} = v$), pour assurer la stabilisation de tout le système. C'est un problème très délicat car nous avons des noyaux fortement définis positifs et des conditions aux bords dynamiques, au lieu de statiques. Nous avons des termes en plus dans l'énergie qui proviennent du fait que nous avons des conditions aux bords dynamiques. La stratégie utilisée est la technique des multiplicateurs développée par P. Cannarsa et D. Sforza [11] avec de nouveaux ingrédients.

1.5 Organisation de la thèse

La thèse comporte six chapitres.

Dans le **chapitre 1**, nous discutons sur l'importance des matériaux viscoélastiques et les problèmes de Ventcel, en citant certaines littératures liées à notre problème. Le **chapitre 2** est consacré à la présentation de quelques préliminaires utiles dans les chapitres ultérieurs. Dans le **chapitre 3**, nous donnons quelques propriétés concernant les noyaux définis positifs ainsi que la résolvante. Dans le **chapitre 4**, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution locale et globale pour le problème viscoélastique (1.4.1) avec des noyaux fortement définis positifs et des conditions aux limites dynamiques. Le **chapitre 5**, concerne la stabilisation du problème (1.4.1) dans le cas linéaire, autrement dit, nous prouvons la décroissance exponentielle de l'énergie en utilisant la méthode des multiplicateurs, et nous montrons aussi que la fonction $e^{2\alpha t}E(t)$ appartient à l'espace $L^1(0, \infty)$. Le **chapitre 6** présente des résultats de stabilisation dans le cas semilinéaire, nous procédons de la même façon que dans le chapitre 5.

Chapitre 2

Préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce travail il nous a paru utile de rappeler quelques éléments d'analyse fonctionnelles et leurs principales propriétés.

2.1 Espace L^p

Définition 1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions u définies sur Ω à valeurs dans K où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que u est mesurable et $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω . L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour } p \in [1, +\infty[$$

est un espace de Banach.

Définition 2 On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace constitué des (classes de) fonctions mesurables et bornées presque partout sur Ω . Muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)| = \{ \inf C > 0 \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

Remarque 1 $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Dans le cas où $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

2.2 Notions de base sur les distributions

2.2.1 Rappels et définitions

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) définie par $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Rappelons que l'application f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω , ce que l'on note par $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont des fonctions continues sur Ω . L'espace $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{C})$ selon le contexte est noté par $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Lemme 1 (Schwarz) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ alors, pour tout $k < l = 1, \dots, n$, on a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_k} \text{ sur } \Omega.$$

Passons au cas des dérivées partielles d'ordre supérieur.

On nomme "multi-indice" tout élément $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. A tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on associe sa longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note les dérivées partielles itérées d'une fonction v de classe C^∞ sur Ω par

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

2.2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact

Définition 3 Soit une fonction continue ϕ définie sur un espace topologique X et à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le support de la fonction ϕ est

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in X, \phi(x) \neq 0\}}.$$

L'espace de base $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 4 On appelle espace des fonctions d'essai, et que l'on note par $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions ϕ définies et indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω . Autrement dit

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \text{espace des fonctions } \mathcal{C}^\infty \text{ à support compact } \subset \Omega \}.$$

On désigne par $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2

$$\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi), \text{ pour tout } \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Définition 5 (Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$)

On dit qu'une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction, s'il existe un compact K contenu dans Ω tel que

1. $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $D^\alpha(\varphi_n)$ converge uniformément vers $D^\alpha(\varphi), \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Proposition 1 $\forall p \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

2.2.3 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 6 (Notion et caractérisation de distribution)

Soient $n \geq 1$ un entier et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ à valeurs réelles (ou complexes) vérifiant la propriété de continuité suivante:

Pour tout compact K , il existe $\mathcal{C}_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Autrement dit

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ est linéaire de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R}. \\ 2) & \text{Si } \varphi_j \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \text{ alors } \langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

On note toujours par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des distributions sur Ω (à valeurs respectivement réelles ou complexes).

Définition 7 On dit, que deux distributions T_1 et T_2 sur Ω sont égales si elles le sont en tant qu'applications de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque 3 Toute fonction f de $L^2(\Omega)$ engendre une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2.3 Espaces de Sobolev

Définition 8 [2]. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un entier $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, \infty]$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p; D^{\alpha}v \in L^p(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty \\ \|u\|_{W^{m,\infty}} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\text{ess}} |D^{\alpha}u(x)|, \quad \text{pour } p = +\infty. \end{aligned}$$

Evidemment

$$\|v\|_{W^{0,p}(\Omega)} = L^p(\Omega).$$

On vérifie sans peine que les espaces $\|v\|_{W^{0,p}(\Omega)}$ munis de la norme ainsi définie sont des espaces de Banach. C'est une conséquence facile du fait que $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ est complet; du fait qu'une suite de fonctions convergeant dans $L^p(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers la même limite, et enfin de la continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Un cas particulier très important de ces espaces de Sobolev est celui où $p = 2$.

On note que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Par rapport aux espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, les espace $H^m(\Omega)$ possèdent une propriété supplémentaire fort agréable; ce sont des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

où l'on rappelle que

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \overline{\varphi}(x) \psi(x) dx$$

et de la norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)_{H^m(\Omega)}^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans la norme $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Lemme 2 *L'espace $H_0^1(\Omega)$ peut être décrit comme étant l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ s'annulant sur le bord de Ω*

$$H_0^1(\Omega) = \{u, u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}.$$

$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un espace de distributions sur Ω

$$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'.$$

On a aussi

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)'.$$

Généralement, on a

$$H^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega) \hookrightarrow H^{k-1}(\Omega)' \hookrightarrow H^0(\Omega), k \geq 2.$$

Les injections précédentes sont continues.

Formule de Green

On définit les traces de u sur la frontière Γ par l'application linéaire continue, appelé trace

$$\begin{aligned}\gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\rightarrow u|_{\Gamma}\end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 [60]. *La fonction $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est surjective et son noyau est l'espace $H_0^1(\Omega)$.*

Proposition 2 (Formule de Green [15]). *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Si $f, g \in H^1(\Omega)$, alors pour $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} (\gamma_0 f) (\gamma_0 g) \nu_i d\Gamma,$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ est la normale unitaire extérieure à Γ . Si $f \in H^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx = - \int_{\Omega} \Delta f g dx + \int_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial \nu} d\Gamma.$$

2.4 Quelques inégalités

Soit $1 < p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p c'est à dire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Inégalité de Hölder [2]

Théorème 2.4.1 Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Remarque 4 Si $p = q = 2$ on aura l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 2.4.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière. Alors*

$$\|u\|_2 \leq B \|\nabla u\|_2, \text{ pour } u \in H_0^1(\Omega)$$

où $B^{-1} = \inf_{\|u\| \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$.

Inégalité de Young [30]

Théorème 2.4.3 *Soient $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b \geq 0$. Alors pour tout $\eta > 0$,*

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^q$$

où

$$C_\eta = \frac{1}{q (\eta p)^{\frac{p}{q}}},$$

Remarque 5 *pour $p = q = 2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme*

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}. \quad (2.4.1)$$

2.5 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Pour l'étude des problèmes d'évolution, on aura besoin des espaces de fonctions à valeurs vectorielles $W^{k,p}(0, T; X)$, ici X désigne un espace de Hilbert et T un réel positif.

On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

On note par $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$, qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X.$$

On note aussi par $C^1([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que la dérivée u' existe et est continue sur $[0, T]$. $C^1([0, T]; X)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^1([0,T];X)} = \|u\|_{C([0,T];X)} + \|u'\|_{C([0,T];X)}.$$

On notera aussi par $C^k([0, T]; X)$, $k = 1, 2$ l'espace des fonctions continues $u: [0, T] \rightarrow X$, telles que toutes leurs dérivées d'ordre k , pour $1 \leq k \leq 2$, sont des fonctions continues sur $[0, T]$.

Pour $p \in [0, \infty]$, l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u: (0, T) \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{p,T} := \|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

Dans la suite, on va utiliser l'abréviation $\|u\|_p$ pour désigner la norme $\|u\|_{p,\infty}$.

Si $p = \infty$, on a

$$\|u\|_{\infty,T} := \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup \text{ess} \|u\|_X = \inf \{c > 0; \|u(x)\|_X \leq c \text{ p.p. } t \in (0, T)\}.$$

En particulier pour $p = 2$, l'espace $L^2(0, T; X)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Par ailleurs, l'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \sum_{j=0}^k \sup \text{ess} \|u\|_X$$

Pour $k = 0$, on a

$$W^{0,p}(0, T; X) = L^p(0, T; X).$$

Pour $k = 1$, l'espace $W^{1,\infty}(0, T; X)$ est défini par

$$W^{1,\infty}(0, T; X) = \{u: [0, T] \rightarrow X; u \in L^\infty(0, T; X) \text{ et } u' \in L^\infty(0, T; X)\}$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} + \|u'\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

Nous désignerons par $L_{loc}^p(0, \infty; X)$ l'espace des fonctions appartenant à $L^p(0, T; X)$ pour tout $T \in (0, \infty)$.

Si $X = \mathbb{R}$, nous utiliserons la notation $L^p(0, T)$ pour l'espace $L^p(0, T; \mathbb{R})$ et $L_{loc}^p(0, \infty)$ pour $L_{loc}^p(0, \infty; \mathbb{R})$.

2.6 Gradient tangentiel et laplacien tangentiel

Nous rappelons quelques définitions de la dérivation tangentielle [26].

2.6.1 Gradient tangentiel

Soient Ω un ouvert borné de classe C^1 , de frontière Γ . Si $f \in C^1(\Gamma)$. On définit son gradient tangentiel, noté $\nabla_\Gamma f$ par

$$\nabla_\Gamma f = \nabla \tilde{f} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} \cdot \nu \quad (2.6.1)$$

où $\tilde{f}$ est un prolongement de f dans un voisinage de Γ .

2.6.2 Laplacien tangentiel

Si $P \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ et si $\tilde{P}$ est un prolongement de P dans un voisinage de Γ , la divergence tangentielle de P est donnée par

$$\operatorname{div}_\Gamma(P) = \operatorname{div}(\tilde{P}) - \tilde{P}' \cdot \nu, \quad (2.6.2)$$

avec $\tilde{P}' = \frac{(\partial) \tilde{P}_i}{(\partial) x_j}$.

Bien évidemment, les formules (2.6.1) et (2.6.2) ne dépendent pas des prolongements choisis.

Lorsque Ω est de classe C^2 , on peut définir l'opérateur de Laplace Beltrami, noté Δ_Γ sur Γ en posant

$$\Delta_\Gamma u = \operatorname{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma u), \quad u \in C^2(\Gamma).$$

On a le résultat classique suivant

Théorème 2.6.1 *On suppose que Ω est de classe C^2 . Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^3(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} v = - \int_{\Gamma} u \Delta_{\Gamma} v.$$

Voir [26].

2.6.3 Espaces définis avec le gradient tangentiel

Soit $L^2(\Gamma)$ l'espace des fonctions à carré intégrable sur Γ et $TL^2(\Gamma)$ l'espace des champs de vecteurs tangents à Γ tels que

$$TL^2(\Gamma) = \left\{ v \in (D'(\Gamma))^n \mid \int_{\Gamma} |v|^2 d\Gamma < +\infty \right\}.$$

Définition 9 *L'espace de Sobolev $H^1(\Gamma)$ est l'espace des distributions sur Γ telles que*

$$H^1(\Gamma) = \{ v \in L^2(\Gamma) \mid \nabla_{\Gamma} v \in TL^2(\Gamma) \}.$$

2.7 Lemmes de types Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du types Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration.

Lemme 1.2. *Soient $m, \eta \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que:*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \eta(s) \Psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t \eta(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient:

Corollaire 1.3. *Soit $\eta \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que:*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t \eta(s) \Psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\Psi(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_0^t \eta(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 3

Noyaux définis positifs et résolvante

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques propriétés des noyaux définis positifs et des noyaux fortement définis positifs ainsi que le noyau résolvant et la résolvante, qui seront utilisées dans la suite.

Pour $v \in L^1_{loc}(0, T; X)$, on définit la transformée de Laplace de v par

$$\widehat{v}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} v(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

3.1 Noyaux définis positifs

Définition 10 Pour toute fonction $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$ et $y \in L^1_{loc}(0, T; X)$, on définit le produit de convolution par

$$h * y(t) = \int_0^t g(t-s) y(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Définition 11 Une fonction $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$ est dite un noyau défini positif si

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s) \rangle ds \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{3.1.1}$$

pour tout $y \in L^2_{loc}(0, \infty; X)$.

Définition 12 Une fonction g est dite un noyau fortement défini positif s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $g(t) - \delta e^{-t}$ soit défini positif, c'est à dire

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s) \rangle ds \geq \delta \int_0^t \langle e * y(s), y(s) \rangle ds, \quad t \geq 0, \quad (3.1.2)$$

pour tout $y \in L^2_{loc}(0, \infty; X)$, où $e(t) = e^{-t}$.

Si $h \in L^\infty(0, \infty)$, alors h est défini positif si et seulement si

$$\operatorname{Re} \widehat{h}(z) \geq 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0,$$

voir [66].

Pour toute fonction $h \in L^1(0, \infty)$, h est un noyau fortement défini positif si et seulement si

$$\operatorname{Re} \widehat{h}(iw) \geq \delta / (1 + w^2) \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{R},$$

(voir Théorème 2 [69]). Ce résultat peut être donné de la manière suivante :

$h^1(0, \infty)$ est défini positif si et seulement si

$$\operatorname{Re} \widehat{h}(iw) \geq 0, \quad \text{pour tout } w > 0.$$

A partir de cette dernière inégalité, il s'ensuit que $h \in L^1(0, \infty)$ est un noyau fortement défini positif si et seulement si il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\operatorname{Re} \widehat{h}(iw) \geq \delta / (1 + w^2) \quad \text{pour tout } w > 0,$$

où l'on a utilisé $\operatorname{Re} \widehat{e}(iw) \geq 1 / (1 + w^2)$.

Afin de vérifier qu'un noyau est fortement défini positif, on peut utiliser le théorème suivant (voir [69], Corrolaire 2.2).

Théorème 3.1.1 Une fonction $h(t)$ deux fois dérivable, telle que $h' \not\equiv 0$, vérifiant

$$(-1)^n h^{(n)}(t) \geq 0 \quad \forall t > 0, \quad n = 0, 1, 2 \quad (3.1.3)$$

est un noyau fortement défini positif.

Supposons que $g \in L^1(0, \infty)$ et soit G la fonction définie par

$$G(t) = \int_t^\infty g(s)ds.$$

Les résultats suivants sont essentiels pour démontrer la décroissance exponentielle. La première proposition est énoncée et prouvée dans [12].

Proposition 3 (a) Si G est un noyau défini positif, alors

$$\int_0^\infty \sin(wt)g(t)dt \geq 0, \quad \text{pour tout } w > 0. \quad (3.1.4)$$

(b) Si $G \in L^1(0, \infty)$ et g vérifie (3.1.4), alors G est un noyau défini positif

Maintenant, nous allons prouver un résultat analogue pour les noyaux fortement définis positifs.

Corollaire 1 (a) Si G est un noyau fortement défini positif, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^\infty \sin(wt)g(t)dt \geq \delta \frac{w}{1+w^2} \quad \text{pour tout } w > 0. \quad (3.1.5)$$

(b) Si $G \in L^1(0, \infty)$ et s'il existe $\delta > 0$ tel que g vérifie (3.1.5), alors G est un noyau fortement défini positif.

(a) Puisque $G(t) = \int_t^\infty g(s)ds$ est fortement défini positif, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$G(t) - \delta e^{-t} = \int_0^\infty (g(s) - \delta e^{-s})ds$$

est défini positif. Par conséquent, en appliquant la Proposition 3(a) à $g(t) - \delta e^{-t}$ et en utilisant l'identité

$$\int_0^\infty \sin(wt)e^{-t}dt = \frac{w}{1+w^2}, \quad (3.1.6)$$

on obtient le résultat.

(b) Si $G \in L^1(0, \infty)$ et s'il existe $\delta > 0$ tel que g vérifie (3.1.5), et en tenant compte

de (3.1.6), alors $G(t) - \delta e^{-t}$ satisfait (3.1.4). D'après la Proposition 3(b) on obtient que $G(t) - \delta e^{-t}$ est défini positif, d'où le résultat.

Nous allons maintenant rappeler un résultat connu (voir [13], Lemme 3.4) qui sera utilisé ultérieurement.

Lemme 3 *Si $g \in L^1(0, \infty)$ et satisfait (3.1.4), alors la fonction perturbée $e^{-\sigma t}g(t)$, $\sigma > 0$ vérifie aussi (3.1.4).*

Proposition 4 *Soit $g \in L^1(0, \infty)$ une fonction telle que $t \rightarrow \int_t^\infty g(s)ds$ est un noyau fortement défini positif. Alors $t \rightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s}g(s)ds$, $\sigma > 0$, est aussi un noyau fortement défini positif.*

De plus, si δ est la constante dans (3.1.2) correspondante à $t \rightarrow \int_t^\infty g(s)ds$, alors la constante analogue δ_σ pour $t \rightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s}g(s)ds$ est donnée par

$$\delta_\sigma = \frac{\delta}{(\sigma + 1)^2}. \quad (3.1.7)$$

D'après le Corollaire 1(a), il existe $\delta > 0$ tel que g vérifie (3.1.5), en tenant compte de

$$\frac{w}{1 + w^2} = \int_0^\infty \sin(wt)e^{-t}dt,$$

on arrive à

$$\int_0^\infty \sin(wt)(g(t) - \delta e^{-t})dt \geq 0, \text{ pour tout } w > 0.$$

En utilisant le Lemme 3, on obtient pour tout $\sigma > 0$

$$\int_0^\infty \sin(wt)e^{-\sigma t}(g(t) - \delta e^{-t})dt \geq 0, \text{ pour tout } w > 0.$$

Puisque on a

$$\int_0^\infty \sin(wt)e^{-(\sigma+1)t}dt = \frac{w}{(\sigma + 1)^2 + w^2},$$

il vient alors

$$\int_0^\infty \sin(wt)e^{-\sigma t}g(t)dt \geq \delta \frac{w}{(\sigma + 1)^2 + w^2} \geq \frac{\delta}{(\sigma + 1)^2} \frac{w}{1 + w^2},$$

pour tout $w > 0$. On remarque que, pour tout $\sigma > 0$, la fonction $t \rightarrow te^{-\sigma t}g(t)$ est dans $L^1(0, \infty)$, et la fonction $t \rightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s}g(s)ds$ est dans $L^1(0, \infty)$. Alors, on peut appliquer le Corollaire 1(b) à $e^{-\sigma t}g(t)$ pour obtenir le résultat.

3.2 Noyau résolvant

Des résultats classiques pour les équations intégrales (voir Le Théorème 2.3.5 [37]) donnent pour tout noyau $h \in L^1_{loc}(0, \infty)$ et tout $\psi \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$, le problème

$$\varphi(t) - h * \varphi(t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (3.2.1)$$

admet une solution unique $\varphi \in L^1_{loc}(0, \infty; X)$. En particulier, il existe une solution unique $r \in L^1_{loc}(0, \infty)$ de

$$r(t) - h * r(t) = h(t), \quad t \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Une telle solution est appelée le noyau résolvant de h . De plus, la solution φ de (3.2.1) est donnée par la formule de la variation des constantes

$$\varphi(t) = \psi(t) + r * \psi(t), \quad t \geq 0, \quad (3.2.3)$$

où r le noyau résolvant de h .

Rappelons le Théorème classique de Paley-Wiener [37], qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau résolvant appartienne à l'espace $L^1(0, \infty)$.

Théorème 3.2.1 *Soit $h \in L^1(0, \infty)$. Alors, le noyau résolvant de h appartient à l'espace $L^1(0, \infty)$ si et seulement si*

$$\widehat{h}(z) \neq 1, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0.$$

Proposition 5 *Soit $g \in L^1(0, \infty)$ telle que $\int_0^\infty g(s)ds < 1$, et on suppose que*

$$G(t) = \int_t^\infty g(s)ds$$

est un noyau fortement défini positif. Alors

$$\widehat{g}(z) \neq 1, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq 0.$$

Puisque on a $G(t) = \int_0^\infty g(s)ds - \int_0^t g(s)ds$, alors on obtient

$$\widehat{G}(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty g(s)ds - \frac{\widehat{g}(z)}{z}. \quad (3.2.4)$$

Pour $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\frac{1}{z} \int_0^\infty g(s)ds - \frac{\widehat{g}(z)}{z} \neq \frac{1}{z} \left(\int_0^\infty g(s)ds - 1 \right)$$

parceque la partie réelle du membre gauche de l'égalité est non négative (d'après (2.3b)), quand à la partie du membre de droite est négative. Alors, $\widehat{g}(z) \neq 1$ pour $\operatorname{Re} z > 0$.

De plus, comme G est fortement défini positif, D'après le Corollaire 1(a) il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $w > 0$

$$\int_0^\infty \sin(wt)g(t)dt \geq \delta \frac{w}{1+w^2},$$

alors pour tout $w \neq 0$ on a $\operatorname{Im} \widehat{g}(iw) \neq 0$. En tient compte que $\int_0^\infty g(s)ds < 1$, on obtient $\widehat{g}(z) \neq 1$ pour $\operatorname{Re} z = 0$.

Le corollaire suivant de la Proposition 5 et du Théorème 3.2.1 nous donne des estimations uniformes pour des solutions d'équations intégrales.

Corollaire 2 Soit $g \in L^1(0, \infty)$ tel que $\int_0^\infty g(s)ds < 1$ et on suppose que $G(t) = \int_t^\infty g(s)ds$ est un noyau fortement défini positif. Alors,

- (a) le noyau résolvant r de g appartient à $L^1(0, \infty)$;
- (b) pour tout $\psi \in L^p(0, \infty; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, la solution φ de l'équation

$$\varphi(t) - g * \varphi(t) = \psi(t), \quad t \geq 0,$$

appartient à $L^p(0, \infty; X)$ et

$$\|\varphi\|_p \leq (1 + \|r\|_1) \|\psi\|_p. \quad (3.2.5)$$

3.3 la résolvante

Nous rappelons la notion de la résolvante de l'équation

$$u''(t) + Au(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = 0, \quad (3.3.1)$$

où A est un opérateur linéaire auto adjoint sur X avec domaine dense $D(A)$ et $g \in L_{loc}^1(0, \infty)$ (voir [12]), pour les noyaux réguliers).

Définition 13 Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ des opérateurs linéaires bornés dans X est appelée **la résolvante** de l'équation (3.3.1) si les conditions suivantes sont vérifiées:

(S1) $S(0) = I$ et $S(t)$ est fortement continue sur $[0, \infty)$, i.e. pour tout $x \in X$, $S(\cdot)x$ est continue,

(S2) $S(t)$ commute avec A : $S(t)D(A) \subset D(A)$ et

$$AS(t)x = S(t)Ax, \quad x \in D(A), \quad t \geq 0,$$

(S3) pour tout $x \in D(A)$, $S(\cdot)x$ est deux fois continûment différentiable dans X sur $[0, \infty)$ et $S'(0)x = 0$,

(S4) pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$,

$$S''(t)x + AS(t)x - \int_0^t g(t-\tau)AS(\tau)x d\tau = 0.$$

Chapitre 4

Etude de l'existence et l'unicité d'un problème viscoélastique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité locale et globale des solutions du problème viscoélastique avec des conditions aux limites de type Ventcel suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + (1 - \Delta)u - g * (1 - \Delta)u + h_1(u) = f_1(t) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ v'' + \frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} + (1 - \Delta_\Gamma)v - g * (1 - \Delta_\Gamma)v + h_2(v) = f_2(t) & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(0), v'(0)) = (u_1, v_1) & \text{in } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) avec une frontière régulière $\Gamma := \partial\Omega$. Soient Γ_0 et Γ_1 deux sous ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. ∇_Γ représente le gradient tangentiel sur Γ , on désigne par Δ_Γ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Γ et par ∂_ν la dérivée normale où ν représente la normale unitaire extérieure à Γ . Supposons que h_i sont globalement lipschitziennes, i.e. $h_i \in C^1(\mathbb{R})$, $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, et qu'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \\ |h_1(s_1) - h_1(s_2)| \leq c_1(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})|s_1 - s_2|, \\ |h_2(s_1) - h_2(s_2)| \leq c_2(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})|s_1 - s_2|. \end{array} \right. \quad (4.1.2)$$

où $p > 1$; $(n - 2)p \leq n$.

Supposons que

$$R(U) = \int_{\Omega} F_1(u(t))dx + \int_{\Gamma} F_2(v(t))d\Gamma \geq 0, \quad (4.1.3)$$

où

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

et

$$F_1(u) = \int_0^u h_1(s)ds, \quad F_2(v) = \int_0^v h_2(s)ds.$$

4.2 Préliminaires

Pour simplifier les notations, nous écrivons le problème (4.1.1) sous la forme

$$U''(t) + \mathbb{A}U(t) - \int_0^t g(t-s)\mathbb{A}U(s)ds + H(U(t)) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (4.2.1)$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad U'(0) = U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

où

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} & 1 - \Delta_{\Gamma} \end{pmatrix}, \quad (4.2.3)$$

et

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad H(U(t)) = \begin{pmatrix} h_1(u(t)) \\ h_2(v(t)) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\begin{aligned} H_{\Gamma_0}^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega), \quad u|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ \mathbb{V} &= \{z = (u, v) \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^2(\Gamma), \quad u|_{\Gamma} = v\}, \\ \widetilde{\mathbb{V}} &= \{z = (u, v) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^1(\Gamma), \quad u|_{\Gamma} = v\}, \\ \mathbb{H} &= L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma), \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathbb{V}}$ et $\mathbb{H}$ deux espaces de Hilbert et $\widetilde{\mathbb{V}}$ est dense dans $\mathbb{H}$ avec injection continue. $\widetilde{\mathbb{V}}$ et $\mathbb{H}$ sont munis de produits scalaires

$$\langle z_1, z_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2(\Gamma)},$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle_{\widetilde{\mathbb{V}}} = \langle u_1, u_2 \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle v_1, v_2 \rangle_{H^1(\Gamma)},$$

et des normes canoniques

$$\|z\|_{\mathbb{H}}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

$$\|z\|_{\widetilde{\mathbb{V}}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Pour toute fonction $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$ et toute fonction $y \in L^1_{loc}(0, \infty; \mathbb{H})$, nous définissons

$$g * y(t) = (g * y_1(t), g * y_2(t)),$$

où

$$g * y_i(t) = \int_0^t g(t-s)y_i(s)ds, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.$$

Nos hypothèses sur le noyau g sont les suivantes:

Hypothèse (H1). Nous supposons que $g \in L^1(0, \infty)$ et vérifie

$$\int_0^\infty g(t)dt < 1. \tag{4.2.4}$$

De plus, nous supposons que l'application

$$t \mapsto \int_t^\infty g(s)ds \text{ est défini positif.}$$

Définition 14 Une fonction $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$ est dite un noyau défini positif si

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{4.2.5}$$

pour toute fonction $y \in L^2_{loc}(0, \infty; \mathbb{H})$.

Définition 15 Une fonction g est dite un noyau fortement défini positif s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $g(t) - \delta e^{-t}$ est définie positive, c'est à dire

$$\int_0^t \langle g * y(s), y(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \geq \delta \int_0^t \langle e * y(s), y(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \quad t \geq 0, \quad (4.2.6)$$

pour toute fonction $y \in L^2_{loc}(0, \infty; \mathbb{H})$, où $e(t) = e^{-t}$.

Remarque 6 $\mathbb{A}$ est un opérateur linéaire auto-adjoint sur $\mathbb{H}$ avec domaine dense

$$D(\mathbb{A}) = \{(u, v) \in \mathbb{V}, \mathbb{A}(u, v) \in \mathbb{H}\}.$$

Dans la suite, nous poserons $\text{Grad } U(t) = (\nabla u(t), \nabla_{\Gamma} v(t))$, et $\|f\|_1 = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$.

Soit $0 < T \leq \infty$ et $f \in L^1(0, T; \mathbb{H})$, nous donnons quelques notions de solutions associées aux problème (4.1.1).

4.3 Différents types de solutions

Définition 16 Une fonction U est dite une solution **forte** de (4.2.1) sur $[0, T)$, $T > 0$, si

$$U \in C^2([0, T]; \mathbb{H}) \cap C([0, T]; D(\mathbb{A})),$$

et vérifie (4.2.1) pour $t \in [0, T)$.

Définition 17 Soient $U_0 \in \tilde{\mathbb{V}}$, $U_1 \in \mathbb{H}$. Une fonction $U \in C^1([0, T]; \mathbb{H}) \cap C([0, T]; \tilde{\mathbb{V}})$ est dite une solution **mild** de (4.2.1) sur $[0, T]$ avec les conditions initiales (4.2.2) si

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(\tau)U_1 d\tau + \int_0^t 1 * S(t - \tau)(-H(U(\tau)) + f(\tau))d\tau, \quad (4.3.1)$$

où $\{S(t)\}$ est la résolvante de

$$U''(t) + \mathbb{A}U(t) - \int_0^t g(t - s)\mathbb{A}U(s) ds = 0 \quad (4.3.2)$$

Une solution forte est aussi une solution mild.

Définition 18 Une solution **généralisée** (où solution **faible**) de (4.2.1) est une fonction $U \in C^1([0, T]; \mathbb{H}) \cap C([0, T]; \tilde{\mathbb{V}})$ telle que, pour tout $W \in \tilde{\mathbb{V}}$, $\langle U'(t), W \rangle_{\mathbb{H}} \in C^1([0, T])$ et pour tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle U'(t), W \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U(t), \text{Grad } W \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U(t), W \rangle_{\mathbb{H}} \\ & - \int_0^t g(t-s) \{ \langle \text{Grad } U(s), \text{Grad } W \rangle_{\mathbb{H}} \\ & + \langle U(s), W \rangle_{\mathbb{H}} \} ds + \langle H(U(t)), W \rangle_{\mathbb{H}} \\ & = \langle f(t), W \rangle_{\mathbb{H}}. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

où $\text{Grad } U(t) = (\nabla u(t), \nabla_{\Gamma} v(t))$.

Puisque $h_i, i = 1, 2$ sont globalement lipchitziennes, nous obtenons des résultats d'existence et unicité locale pour les solutions mild, faibles et fortes associées au problème (4.2.1).

4.4 Existence et unicité locale

4.4.1 Existence et unicité locale de la solution mild

La proposition suivante assure l'existence locale et l'unicité de la solution mild du problème (4.2.1) – (4.2.2).

Proposition 6 Soient $U_0 \in \tilde{\mathbb{V}}$, $U_1 \in \mathbb{H}$ et $f \in L^1(0, T; \mathbb{H})$ où $0 < T \leq \infty$. Nous supposons que les hypothèses **(H1)**, (4.1.2) – (4.1.3) sont vérifiées. Alors, il existe un nombre positif $T_0 \leq T$ tel que le problème de Cauchy (4.2.1) – (4.2.2) admet une unique solution mild U sur $[0, T_0]$.

De plus, pour tout $U_0, \tilde{U}_0 \in \tilde{\mathbb{V}}$, $U_1, \tilde{U}_1 \in \mathbb{H}$ et $f, \tilde{f} \in L^1(0, T; \mathbb{H})$, il existe une constante $C_T > 0$ (dépend de T) telle que, si U et $\tilde{U}$ sont les solutions mild avec les données U_0, U_1, f et $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \tilde{f}$ respectivement, alors nous avons

$$\begin{aligned} & \| \text{Grad } (U(t) - \tilde{U}(t)) \|_{\mathbb{H}} + \| U(t) - \tilde{U}(t) \|_{\mathbb{H}} + \| U'(t) - \tilde{U}'(t) \|_{\mathbb{H}} \\ & \leq C_T (\| \text{Grad } (U_0 - \tilde{U}_0) \|_{\mathbb{H}} + \| U_0 - \tilde{U}_0 \|_{\mathbb{H}} + \| U_1 - \tilde{U}_1 \|_{\mathbb{H}} + \| f - \tilde{f} \|_{1,T}), \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

pour tout $t \in [0, \min\{T_0, \tilde{T}_0\}]$.

Voir Proposition 3.2 [11], c'est une conséquence de l'application de la Proposition 4.3 et Théorème 4.5 [12].

4.4.2 Existence et unicité locale de la solution forte

Proposition 7 Soient $U_0 \in D(\mathbb{A})$, $U_1 \in \tilde{\mathbb{V}}$ et $f \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{H})$. Alors, la solution mild (donnée par la Proposition 6) pour le problème de Cauchy (4.2.1)-(4.2.2) sur $[0, T_0]$, où $T_0 \in (0, T]$ est une solution forte. De plus, U appartient à $C^1([0, T_0], \tilde{\mathbb{V}})$.

Dans la suite, nous supposons que l'hypothèse **(H1)** est vérifiée et posons

$$G(t) := \int_t^\infty g(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Le Lemme suivant (résultat préliminaire) joue un rôle très important pour faire le reste des calculs.

Lemme 4 Pour tout $w \in C^1([0, T]; \mathbb{H})$ et $\forall t \in [0, T]$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle g * w(s), w'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= - \int_0^t \langle G * w'(s), w'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \frac{G(0)}{2} (\|w(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|w(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ &\quad - G(t) \langle w(0), w(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \int_0^t g(s) \langle w(0), w(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

$$\langle w(t), w(t) - g * w(t) \rangle_{\mathbb{H}} = (1 - G(0)) \|w(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + G(t) \langle w(0), w(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle w(t), G * w'(t) \rangle_{\mathbb{H}}. \quad (4.4.3)$$

De plus, si $G \in L^2(0, \infty)$, alors nous avons pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^t \|w(s) - g * w(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds &\leq 2(1 - G(0)) \int_0^t \langle w(s), w(s) - g * w(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ &\quad + 2\|G\|_2^2 \|w(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \|G * w'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Comme $g = -G'$, le terme de convolution $g * w(t)$ peut être estimé en intégrant de la façon suivante

$$\begin{aligned} g * w(t) &= - \int_0^t G'(t-r)w(r)dr \\ &= G(0)w(t) - G(t)w(0) - \int_0^t G(t-r)w'(r)dr. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle g * w(s), w'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= \frac{G(0)}{2} (\|w(t)\|_{\mathbb{H}}^2 - \|w(0)\|_{\mathbb{H}}^2) - \left\langle w(0), \int_0^t G(s)w'(s)ds \right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad - \int_0^t \langle G * w'(s), w'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Une autre intégration par partie nous donne

$$\int_0^t G(s)w'(s)ds = G(t)w(t) - G(0)w(0) + \int_0^t g(s)w(s)ds, \quad (4.4.7)$$

en injectant (4.4.7) dans (4.4.6) nous retrouvons (4.4.2).

De (4.4.5), nous obtenons

$$w(t) - g * w(t) = (1 - G(0))w(t) + G(t)w(0) + G * w'(t), \quad (4.4.8)$$

en multipliant scalairement par $w(t)$, nous retrouvons l'expression (4.4.3).

En multipliant scalairement les deux cotés de (4.4.8) par $w(t) - g * w(t)$, par application de l'inégalité $|ab| \leq a^2/4 + b^2$ nous obtenons l'expression suivante

$$\|w(t) - g * w(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq 2(1 - G(0))\langle w(t), w(t) - g * w(t) \rangle_{\mathbb{H}} + 2|G(t)|^2\|w(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + 2\|G * w'(t)\|_{\mathbb{H}}^2.$$

en intégrant l'estimation précédente sur $[0, t]$, nous retrouvons (4.4.4).

4.5 Energie modifiée

En multipliant scalairement les équations (4.1.1)₁ et (4.1.1)₃ par $u'(t)$ et $v'(t)$ respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} v(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right\} \\
 & - \left\{ \langle g * \nabla u(t), \nabla u'(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g * \nabla_{\Gamma} v(t), \nabla_{\Gamma} v'(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \right\} \\
 & - \left\{ \langle g * u(t), u'(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g * v(t), v'(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \right\} \\
 & + \langle h_1(u(t)) u'(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle h_2(v(t)) v'(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\
 = & \langle f_1(t), u'(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_1(t), v'(t) \rangle_{L^2(\Gamma)}.
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right\} \\
 & - \left\{ \langle g * \text{Grad } U(t), \text{Grad } U'(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle g * U(t), U'(t) \rangle_{\mathbb{H}} \right\} \\
 & + \frac{d}{dt} R(U(t)) = \langle f(t), U'(t) \rangle_{\mathbb{H}}.
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Si nous appliquons (4.4.2) en prenant $w = U$ et $w = \text{Grad } U$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle g * U(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= - \int_0^t \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 &+ \frac{G(0)}{2} (\|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 &- G(t) \langle U(0), U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &- \int_0^t g(s) \langle U(0), U(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds,
 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle g * \text{Grad}U(s), \text{Grad}U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= - \int_0^t \langle G * \text{Grad}U'(s), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad + \frac{G(0)}{2} (\|\text{Grad}U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad}U(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 &\quad - G(t) \langle \text{Grad}U(0), \text{Grad}U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad - \int_0^t g(s) \langle \text{Grad}U(0), \text{Grad}U(s) \rangle_{\mathbb{H}}, \quad (4.5.3)
 \end{aligned}$$

alors, nous déduisons les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned}
 \langle g * U(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} &= \frac{d}{dt} \frac{G(0)}{2} (\|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 &\quad - \langle G(s)U(0), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad - \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}}, \quad (4.5.4)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \langle g * \text{Grad}U(s), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} &= \frac{d}{dt} \frac{G(0)}{2} (\|\text{Grad}U(t)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 &\quad - \langle G(s)\text{Grad}U(0), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad - \langle G * \text{Grad}U'(s), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}}, \quad (4.5.5)
 \end{aligned}$$

Nous remplaçons (4.5.4) et (4.5.5) dans (4.5.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad}U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 &\quad - \left\{ \frac{d}{dt} \frac{G(0)}{2} \|\text{Grad}U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 - \langle G(s)\text{Grad}U(0), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \right\} \\
 &\quad + \langle G * \text{Grad}U'(s), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad - \left\{ \frac{d}{dt} \frac{G(0)}{2} \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 - \langle G(s)U(0), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \right\} \\
 &\quad + \frac{d}{dt} R(U(t)) = \langle f(t), U'(t) \rangle_{\mathbb{H}}
 \end{aligned}$$

D'après l'égalité ci dessus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1-G(0)}{2} (\|\text{Grad}U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2) + R(U(t)) \right\} \\
 &= \langle f(t), U'(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \langle G(s)\text{Grad}U(0), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad - \langle G(s)U(0), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} - \langle G * \text{Grad}U'(s), \text{Grad}U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad - \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}}.
 \end{aligned}$$

De l'égalité précédente, nous définissons l'énergie associée à la solution U du problème (4.2.1)-(4.2.2) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} (1 - \int_0^\infty g(s) ds) (\|Grad U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2) + R(U(t)), \quad (4.5.6)$$

où $R(U(t))$ est donné par (4.1.3).

4.6 Estimations a priori

Pour démontrer l'existence et l'unicité globale, nous utiliserons le Lemme suivant

Lemme 5 (i) Si $U_0 \in D(\mathbb{A})$, $U_1 \in \widetilde{\mathbb{V}}$ et $f \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{H})$, alors la solution forte U du problème (4.2.1)-(4.2.2) sur $[0, T_0]$, $T_0 \leq T$, vérifie l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & E(t) + \int_0^t \{ \langle G * Grad U'(s), Grad U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\ &= E(0) + G(0) \{ \|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & \quad - \{ \langle Grad U_0, G(t) Grad U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t) U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\ & \quad - \int_0^t g(s) \{ \langle Grad U_0, Grad U(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\ & \quad + \int_0^t \langle f(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

pour tout $t \in [0, T_0]$.

(ii) Si $U_0 \in \widetilde{\mathbb{V}}$, $U_1 \in \mathbb{H}$ et $f \in L^1(0, T; \mathbb{H})$, alors la solution mild U du problème (4.2.1)-(4.2.2) sur $[0, T_0]$ vérifie l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & E(t) \leq E(0) + G(0) \{ \|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & \quad - \{ \langle Grad U_0, G(t) Grad U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t) U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\ & \quad - \int_0^t g(s) \{ \langle Grad U_0, Grad U(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\ & \quad + \int_0^t \langle f(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

pour tout $t \in [0, T_0]$.

(i) Dans un premier temps, nous supposons que $U_0 \in D(\mathbb{A})$, $U_1 \in \widetilde{\mathbb{V}}$, et $f \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{H})$; en particulier, la solution forte U appartient à $C^1([0, T_0]; \widetilde{\mathbb{V}})$, voir Proposition 7. En multipliant (4.2.1) scalairement par $U'(t)$, nous avons pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & - \{ \langle g * \text{Grad } U(t), \text{Grad } U'(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle g * U(t), U'(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} + \frac{d}{dt} R(U(t)) \\ & = \langle f(t), U'(t) \rangle_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, t]$, l'expression précédente devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & - \int_0^t \{ \langle g * \text{Grad } U(\tau), \text{Grad } U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle g * U(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \} d\tau + R(U(t)) \\ & = \frac{1}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} + R(U_0) + \int_0^t \langle f(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

En utilisant (4.4.2) avec $w = U$ et $w = \text{Grad } U$, le calcul donne

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle g * U(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds = - \int_0^t \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & \quad + \frac{G(0)}{2} (\|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ & \quad - G(t) \langle U(0), U(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \int_0^t g(s) \langle U(0), U(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle g * \text{Grad } U(s), \text{Grad } U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds = - \int_0^t \langle G * \text{Grad } U'(s), \text{Grad } U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & \quad + \frac{G(0)}{2} (\|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ & \quad - G(t) \langle \text{Grad } U(0), \text{Grad } U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ & \quad - \int_0^t g(s) \langle \text{Grad } U(0), \text{Grad } U(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

en remplaçant les deux égalités (4.6.4) et (4.6.5) dans (4.6.3), il vient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \{ \|U(t)\|^2 + \|U'(t)\|^2 + \|Grad U(t)\|^2 \} + \int_0^t \langle G * U'(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau \\
 & - \frac{G(0)}{2} (\|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(0)\|_{\mathbb{H}}^2) + G(t) \langle U(0), U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \int_0^t g(\tau) \langle U(0), U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau + \int_0^t \langle G * Grad U'(\tau), Grad U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau \\
 & - \frac{G(0)}{2} (\|Grad U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U(0)\|_{\mathbb{H}}^2) + G(t) \langle Grad U(0), Grad U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \int_0^t g(\tau) \langle Grad U(0), Grad U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau + R(U(t)) \\
 & = \frac{1}{2} \{ \|U_0\|^2 + \|U_1\|^2 + \|Grad U_0\|^2 \} + R(U_0) + \int_0^t \langle f(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} ds,
 \end{aligned}$$

en concluant, nous obtenons l'expression ci après

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 - G(0)}{2} \{ \|Grad U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + \int_0^t \{ \langle G * Grad U'(\tau), Grad U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \} d\tau + R(U(t)) \\
 & = \frac{1}{2} \|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 + G(0)}{2} \{ \|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & - \{ \langle Grad U_0, G(t) Grad U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t) U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\
 & - \int_0^t g(\tau) \{ \langle Grad U_0, Grad U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \} d\tau \\
 & + R(U_0) + \int_0^t \langle f(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau,
 \end{aligned}$$

par la suite

$$\begin{aligned}
 & E(t) + \int_0^t \left\{ \int_0^\tau \langle G * \text{Grad} U'(\tau), \text{Grad} U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \right\} d\tau \\
 = & \frac{1}{2} \|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1+G(0)}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & - \frac{G(0)}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} + \frac{G(0)}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & - \{ \langle \text{Grad} U_0, G(t) \text{Grad} U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t) U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\
 & - \int_0^t g(\tau) \{ \langle \text{Grad} U_0, \text{Grad} U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \} d\tau \\
 & + R(U_0) + \int_0^t \langle f(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau,
 \end{aligned}$$

il vient alors

$$\begin{aligned}
 & E(t) + \int_0^t \left\{ \int_0^\tau \langle G * \text{Grad} U'(\tau), \text{Grad} U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \right\} d\tau \\
 = & \frac{1}{2} \|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1-G(0)}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} + R(U_0) \\
 & + G(0) \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & - \{ \langle \text{Grad} U_0, G(t) \text{Grad} U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t) U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\
 & - \int_0^t g(\tau) \{ \langle \text{Grad} U_0, \text{Grad} U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \} d\tau \\
 & + \int_0^t \langle f(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau.
 \end{aligned}$$

Finalement , nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & E(t) + \int_0^t \left\{ \int_0^t \langle G * \text{Grad} U'(\tau), \text{Grad} U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \right\} d\tau \\
 = & E(0) + G(0) \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad} U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & - \{ \langle \text{Grad} U_0, G(t) \text{Grad} U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t) U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\
 & - \int_0^t g(\tau) \{ \langle \text{Grad} U_0, \text{Grad} U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} \} d\tau \\
 & + \int_0^t \langle f(\tau), U'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(ii) Comme G est un noyau défini positif , nous avons

$$\int_0^t \langle G * \text{Grad} U'(s), \text{Grad} U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \geq 0,$$

ainsi, un argument d'approximation basé sur (4.4.1) suffit de prouver (4.6.2) pour les solutions mild.

4.7 Existence et unicité globale

4.7.1 Existence et unicité de la solution mild globale

Théorème 4.7.1 *Nous supposons que **l'Hypothèse (H1)**, (4.1.2) et (4.1.3) sont vérifiées. Alors, pour tout $U_0 \in \tilde{\mathbb{V}}$, $U_1 \in \mathbb{H}$, et pour tout $f \in L^1(0, \infty; \mathbb{H})$, le problème (4.2.1)-(4.2.2) admet une unique **solution mild** U sur $[0, \infty)$.*

De plus, $E(t)$ est positive et vérifie

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 - G(0)}{2} \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad} U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \}, \quad (4.7.1)$$

$$E(t) \leq \tilde{C}_1 \quad (4.7.2)$$

pour tout $t \geq 0$, où $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(\|U_1\|, \|\text{Grad} U_0\|, \|f\|_1)$ est une fonction positive et croissante en chaque variable.

4.7.2 Preuve du Théorème 4.7.1

Pour montrer l'existence de la solution globale U du problème (4.2.1)-(4.2.2), il suffit de prouver que les normes $\|U'(t)\|_{\mathbb{H}}$, $\|Grad U(t)\|_{\mathbb{H}}$ et $\|U(t)\|_{\mathbb{H}}$ sont bornées par une constante indépendante de t sur l'intervalle maximal d'existence $[0, T)$.

A partir de l'hypothèse (4.1.3), nous avons $R(U(t)) \geq 0$. Donc pour tout $t \in [0, T)$, nous obtenons

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1-G(0)}{2}\{\|Grad U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2\}. \quad (4.7.3)$$

Puisque h_i sont globalement lipschitziennes, alors $|F_i(s)| \leq c'|s|^2$, $i = 1, 2$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \geq 0$, nous trouvons

$$R(U(t)) = \int_{\Omega} F_1(u(t))dx + \int_{\Gamma} F_2(v(t))d\Gamma \leq c \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2, \quad (4.7.4)$$

où c et c' sont des constantes positives.

De l'inégalité (4.6.2), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{2}\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\infty g(s)ds\right) (\|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2) \\ &+ R(U_0) + G(0) \{\|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2\} \\ &- \{\langle Grad U_0, G(t) Grad U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t)U(t) \rangle_{\mathbb{H}}\} \\ &- \int_0^t g(s) \{\langle Grad U_0, Grad U(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(s) \rangle_{\mathbb{H}}\} ds \\ &+ \int_0^t \langle f(s), U'(s) \rangle ds, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité (4.7.4) pour $t = 0$, et comme $G(0) = \int_0^\infty g(s)ds$, il vient alors

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{2}\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} (1 - G(0)) (\|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2) + c\|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \quad (4.7.5) \\ &+ G(0) \{\|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2\} \\ &- \{\langle Grad U_0, G(t) Grad U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t)U(t) \rangle_{\mathbb{H}}\} \\ &- \int_0^t g(s) \{\langle Grad U_0, Grad U(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(s) \rangle_{\mathbb{H}}\} ds \\ &+ \int_0^t \langle f(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy Schwartz et Young, nous obtenons les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle f(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= \int_0^t \langle f_1(s), u'(s) \rangle ds + \int_0^t \langle f_2(s), v'(s) \rangle ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|f_1\|_1^2 + \frac{1}{2} \|f_2\|_2^2 + \int_0^t |f_1(\tau)| \|u'(\tau)\| d\tau \\ &\quad + \int_0^t |f_2(\tau)| \|v'(\tau)\| d\tau, \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

$$\langle \text{Grad } U_0, G(t) \text{ Grad } U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{\|g\|_1^2}{2\varepsilon} \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2, \quad (4.7.7)$$

$$\langle U_0, G(t)U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{\|g\|_1^2}{2\varepsilon} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2, \quad (4.7.8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t g(s) \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } U(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|_1^2 \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t g(\tau) \|\text{Grad } U(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

$$\int_0^t g(s) \langle U_0, U(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|_1^2 \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t g(\tau) \|U(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau, \quad (4.7.10)$$

où $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-G(0)}{2}\right)$.

En substituant les estimations (4.7.6)-(4.7.10) dans (4.7.5), nous avons alors

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{2} \|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1-G(0)}{2} \{ \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} + c \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \\ &\quad + G(0) \{ \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} + \frac{\varepsilon}{2} \{ \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|_1 \{ \|g\|_1 + 1 \} \{ \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t |g(s)| \{ \|\text{Grad } U(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f\|_1 + \frac{1}{2} \int_0^t \{ |f_1(s)| + |f_2(s)| \} \|U'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds, \end{aligned}$$

où $\|f\|_1 = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$.

En utilisant l'inégalité de Poincaré et l'injection continue ci-après:

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma_1), \quad 2 \leq q \leq \bar{q}$$

avec

$$\bar{q} = \begin{cases} \frac{2(n-1)}{n-2}, & \text{si } n \geq 3, \\ +\infty, & \text{si } n = 1, 2. \end{cases}$$

nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} E(t) &\leq (\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f\|_1) (3 + k_1 + \frac{k_2}{2\varepsilon} \|g\|_1 (\|g\|_1 + 1)) \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \{ \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \{ |g(s)| + |f_1(s)| + |f_2(s)| \} \{ \varepsilon [\|U(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(s)\|_{\mathbb{H}}^2] + \|U'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds, \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

où k_1, k_2 sont des constantes positives.

A partir de (4.7.11) et (4.7.3), nous déduisons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 - G(0) - \varepsilon}{2} \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ &\leq (\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f\|_1) (3 + k_1 + \frac{k_2}{2\varepsilon} \|g\|_1 (\|g\|_1 + 1)) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \{ |g(s)| + |f_1(s)| + |f_2(s)| \} \{ \varepsilon [\|U(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(s)\|_{\mathbb{H}}^2] + \|U'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon \in (0, \frac{1-G(0)}{2})$ alors $1 - G(0) - \varepsilon > \varepsilon$, il vient

$$\begin{aligned} &\|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ &\leq (\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f\|_1) \left(6 + 2k_1 + \frac{k_2}{\varepsilon} \|g\|_1 (\|g\|_1 + 1) \right) \\ &+ \int_0^t \{ |g(s)| + |f_1(s)| + |f_2(s)| \} \{ \varepsilon [\|U(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(s)\|_{\mathbb{H}}^2] + \|U'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme de Gronwall, nous obtenons pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &\|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ &\leq (\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f\|_1) e^{\|g\|_1} (6 + 2k_1 + \frac{k_2}{\varepsilon} \|g\|_1 (\|g\|_1 + 1)) \times e^{\|f\|_1}. \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

Pour résumer, pour tout $U_0 \in \tilde{\mathbb{V}}$, $U_1 \in \mathbb{H}$ et tout $f \in L^1(0, \infty; \mathbb{H})$, nous avons

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \},$$

et

$$\begin{aligned} & \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & \leq \left(\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f\|_1 \right) e^{\|g\|_1 + \|f\|_1} \left(6 + 2k_1 + \frac{k_2}{\varepsilon} \|g\|_1 (\|g\|_1 + 1) \right). \end{aligned}$$

De plus, en remplaçant l'estimation ci-dessus dans (4.7.11), nous trouvons

$$E(t) \leq \tilde{C}_1, \quad \forall t \in [0, T],$$

où $\tilde{C}_1(\|U_1\|, \|\text{Grad } U_0\|, \|f\|_1)$ est une fonction positive croissante, telle que $\tilde{C}_1(0) = 0$ et indépendante de T . Nous déduisons que U est une solution globale et nous obtenons les estimations (4.7.1)-(4.7.2).

4.7.3 Existence et unicité de la solution forte globale

Théorème 4.7.2 *Nous supposons que l'**Hypothèse**(H1), (4.1.2) et (4.1.3) sont vérifiées. Alors, pour tout $U_0 \in D(\mathbb{A})$, $U_1 \in \tilde{\mathbb{V}}$ et $f \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty; \mathbb{H}) \cap L^1(0, \infty; \mathbb{H})$ le problème (4.2.1)-(4.2.2) admet une unique solution **forte** sur $[0, \infty)$. De plus, U appartient à*

$$C^1([0, \infty[; \tilde{\mathbb{V}}),$$

et pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$E(t) + \int_0^t \{ \langle G * \text{Grad } U'(s), \text{Grad } U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \leq \tilde{C}_2, \quad (4.7.13)$$

où $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(\|U_1\|, \|\text{Grad } U_0\|, \|f\|_1)$ est une fonction positive croissante en chaque variable.

4.7.4 Preuve du Théorème 4.7.2

D'après l'hypothèse (4.1.3), nous avons $R(U(t)) \geq 0$, il vient alors

$$\begin{aligned}
 & E(t) + \int_0^t \{ \langle G * \text{Grad } U'(s), \text{Grad } U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & \geq \frac{1}{2} \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1-G(0)}{2} \{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & \quad + \int_0^t \{ \langle G * \text{Grad } U'(s), \text{Grad } U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds.
 \end{aligned} \tag{4.7.14}$$

L'égalité (4.6.1) nous donne

$$\begin{aligned}
 & E(t) + \int_0^t \{ \langle G * \text{Grad } U'(s), \text{Grad } U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & = \frac{1}{2} \|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1-G(0)}{2} (\|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 & \quad + R(U_0) + G(0) (\|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 & \quad - \{ \langle \text{Grad } U_0, G(t) \text{Grad } U(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, G(t) U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\
 & \quad - \int_0^t g(s) \{ \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } U(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_0, U(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & \quad + \int_0^t \langle f(s) * U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned} \tag{4.7.15}$$

Nous appliquons l'inégalité (4.7.4) pour $t = 0$, et en utilisant les estimations (4.7.6)–(4.7.10) dans (4.7.15) pour $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-G(0)}{2}\right)$ ainsi que l'injection continue et l'inégalité de Poincaré, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & E(t) + \int_0^t \{ \langle G * \text{Grad } U'(s), \text{Grad } U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & \leq (\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f\|_1) \left(3 + k_1 + \frac{k_2}{\varepsilon} \|g\|_1 (\|g\|_1 + 1) \right) \\
 & \quad + \frac{\varepsilon}{2} (\|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(t)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \{ |g(s)| + |f_1(s)| + |f_2(s)| \} \{ \varepsilon [\|U(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U(s)\|_{\mathbb{H}}^2] + \|U'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds,
 \end{aligned} \tag{4.7.16}$$

où k_1, k_2 sont des constantes positives.

En utilisant (4.7.16) et (4.7.14) et le Lemme de Gronwall, pour $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-G(0)}{2}\right)$, il vient

$$\begin{aligned} & \|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon \left\{ \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right\} \\ & \leq \left(\|U_1\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|f\|_1 \right) e^{\|g\|_1} \left(6 + 2k_1 + \frac{2k_2}{\varepsilon} \|g\|_1 (\|g\|_1 + 1) \right) e^{\|f\|_1}. \end{aligned} \quad (4.7.17)$$

En remplaçant (4.7.17) dans (4.7.16) nous déduisons

$$E(t) + \int_0^t \left\{ \langle G * Grad U'(s), Grad U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G * U'(s), U'(s) \rangle_{\mathbb{H}} \right\} ds \leq \tilde{C}_2,$$

où $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(\|U_1\|, \|Grad U_0\|, \|f\|_1)$ est une fonction positive croissante en chaque variable.

Chapitre 5

Stabilisation exponentielle du problème linéaire

5.1 Introduction

Pour l'étude de la stabilisation de notre problème (4.1.1), nous allons traiter premièrement le cas linéaire. Pour simplifier les notations nous allons transformer le problème (4.1.1) sous la forme ci après

$$U''(t) + \mathbb{A}U(t) - \int_0^t g(t-s)\mathbb{A}U(s)ds = f(t), \quad t \geq 0, \quad (5.1.1)$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad U'(0) = U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad (5.1.2)$$

où

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} & 1 - \Delta_\Gamma \end{pmatrix}, \quad (5.1.3)$$

et

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \quad (5.1.4)$$

Notre objectif dans cette partie est de montrer que l'énergie de la solution associée au problème (5.1.1)-(5.1.4) décroît exponentiellement vers zéro quant $t \rightarrow +\infty$ et que la fonction $e^{\alpha t} E(t)$ appartient à l'espace $L^1(0, \infty)$.

Pour toute fonction mesurable $g : (0, \infty) \rightarrow X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, nous posons

$$g_\alpha(t) := e^{\alpha t} g(t), \quad t > 0.$$

Considérons l'hypothèse suivante:

Hypothèse (H2).

Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $g_{\alpha_0} \in L^1(0, \infty)$ et $t \rightarrow \int_t^\infty g_{\alpha_0}(s) ds$ est un noyau fortement défini positif.

Le résultat principal de stabilisation de notre travail est donné par le Théorème suivant:

Théorème 5.1.1 *Nous supposons que les hypothèses (H1), (H2) avec $\alpha_0 > 0$, sont vérifiées.*

Alors, il existe des constantes positives K_i , $i = 0, 1$, telles que, pour tout $U_0 \in \tilde{\mathbb{V}}$, $U_1 \in \mathbb{H}$ et tout $f_{\eta_0} \in L^1(0, \infty; \mathbb{H})$, $\eta_0 > 0$, l'énergie $E(t)$ associée à la solution mild U du problème (5.1.1) – (5.1.4) vérifie

$$E(t) \leq K_0 e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.1.5)$$

et

$$\int_0^\infty e^{2\alpha s} E(s) ds \leq K_1, \quad (5.1.6)$$

pour tout $\alpha \in [0, \alpha^*]$, où $\alpha^* \in]0, \min\{\alpha_0, \eta_0\}[$ et $K_i = K_i(\|U_1\|, \|Grad U_0\|, \|f\|_1)$ sont des fonctions positives, croissantes, telles que $K_i(0) = 0$, $i = 0, 1$.

5.2 Préliminaires

La proposition suivante est d'une grande importance pour étudier la décroissance exponentielle.

Proposition 8 *Soit $g \in L^1(0, \infty)$ une fonction telle que $t \rightarrow \int_t^\infty g(s) ds$ est un noyau fortement défini positif. Alors $t \rightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s} g(s) ds$, $\sigma > 0$, est aussi un noyau fortement défini positif.*

De plus, si δ est la constante dans (4.2.6) correspondante à $t \longrightarrow \int_t^\infty g(s)ds$, alors la constante analogue δ_σ pour $t \longrightarrow \int_t^\infty e^{-\sigma s} g(s)ds$ est donnée par

$$\delta_\sigma = \frac{\delta}{(\sigma + 1)^2}. \quad (5.2.1)$$

Elle est identique à la preuve à la Proposition 4.

Maintenant, en adaptant certaines estimations pour les noyaux définis positifs ([39, 41, 76, 77]), nous obtenons les trois Lemmes suivants

Lemme 6 Soit $g \in C([0, \infty))$ un noyau défini positif. Alors $g(0) \geq 0$ et

$$\|g * y(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq 2g(0) \int_0^t \langle g * y(\tau), y(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau, \quad t \geq 0, \quad (5.2.2)$$

pour tout $y \in L_{loc}^1(0, \infty; \mathbb{H})$.

Elle est analogue à celle du Lemme 6.1 [76].

Si g est un noyau fortement défini positif et δ la constante donnée par la formule (4.2.6), alors par le Lemme 6, nous avons

$$g(0) \geq \delta. \quad (5.2.3)$$

Lemme 7 Soit g un noyau fortement défini positif tel que $g, g' \in L^1(0, \infty)$. Alors

$$\int_0^t \|g * y(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \leq \frac{1}{\delta} (\|g\|_1^2 + 4\|g'\|_1^2) \int_0^t \langle g * y(\tau), y(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau, \quad t \geq 0, \quad (5.2.4)$$

pour tout $y \in L_{loc}^1(0, \infty; \mathbb{H})$, où δ est la constante donnée par (4.2.6).

Elle est similaire à celle du Lemme 2.3 [41], avec des modifications nécessaires pour l'adapter à notre problème.

Lemme 8 Soit $g \in L_{loc}^1(0, \infty)$ un noyau fortement défini positif. Alors

$$\int_0^t \|y(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \leq \|y(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{2}{\delta} \left\{ \int_0^t \langle g * y(\tau), y(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau + \int_0^t \langle g * y'(\tau), y'(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau \right\}, \quad (5.2.5)$$

pour tout $t \geq 0$ and $y \in L_{loc}^2(0, \infty; \mathbb{H})$ avec $y' \in L_{loc}^1(0, \infty; \mathbb{H})$, où δ est la constante donnée par (4.2.6).

Voir la preuve du Lemme 2.5 avec quelques changements nécessaires [39].

Rappelons la remarque suivante (voir [11]) qui sera utilisée par la suite.

Remarque 7 1. Pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$, on a $g_\alpha \in L^1(0, \infty)$ et

$$G_\alpha(t) = \int_t^\infty g_\alpha(s) ds$$

est un noyau fortement défini positif avec

$$\delta_\alpha := \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1 + \alpha_0 - \alpha)^2} \geq \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1 + \alpha_0)^2}, \quad (5.2.6)$$

notant que $G_\alpha(t) = \int_t^\infty e^{-(\alpha_0 - \alpha)s} g_{\alpha_0}(s) ds$ et en appliquant la Proposition 8 pour g_{α_0} , et d'après (5.2.3) et (5.2.6), on a

$$G_\alpha(0) \geq \delta_\alpha \geq \frac{\delta_{\alpha_0}}{(1 + \alpha_0)^2}. \quad (5.2.7)$$

2. Comme $g_{\alpha_0} \in L^1(0, \infty)$, d'après le Théorème de convergence dominée et $G(0) < 1$, on a pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$

$$1 - G_\alpha(0) \geq \frac{1 - G(0)}{2} > 0. \quad (5.2.8)$$

3. Pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_0$, $G_\alpha \in L^1(0, \infty)$ et

$$\|G_\alpha\|_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \|g_{\alpha_0}\|_1, \quad (5.2.9)$$

car il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |G_\alpha(s)| ds &\leq \int_0^\infty s e^{\alpha s} |g(s)| ds \\ &= \int_0^\infty s e^{-(\alpha_0 - \alpha)s} e^{\alpha_0 s} |g(s)| ds \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\infty e^{\alpha_0 s} |g(s)| ds. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

4. Pour tout $\alpha \in (0, \alpha_0 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_0$, $G_\alpha \in L^2(0, \infty)$ et d'après (5.2.9) on a

$$\|G_\alpha\|_2^2 \leq \|G_\alpha\|_1 \|g_\alpha\|_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \|g_{\alpha_0}\|_1^2. \quad (5.2.11)$$

5.3 Transformation du problème (5.1.1)-(5.1.4)

Pour démontrer le Théorème 5.1.1, nous faisons le changement de fonction $U_\alpha(t) = e^{\alpha t}U(t)$ où $\alpha \geq 0$, ce qui nous permet de transformer le problème (5.1.1)-(5.1.4) sous la forme suivante

$$\begin{cases} U_\alpha''(t) - 2\alpha U_\alpha'(t) + \alpha^2 U_\alpha(t) + \mathbb{A}U_\alpha(t) - g_\alpha * \mathbb{A}U_\alpha(t) = f_\alpha(t), \\ U_\alpha(0) = U_0, \quad U_\alpha'(0) = U_1 + \alpha U_0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

5.4 Énergie modifiée

En multipliant scalairement (5.3.1) par $U_\alpha'(t)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|U_\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{(\alpha^2 + 1)}{2} \|U_\alpha\|_{\mathbb{H}}^2 \right) \\ & - \langle g_\alpha * U_\alpha(t), U_\alpha'(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \langle g_\alpha * Grad U_\alpha(t), Grad U_\alpha'(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ & = 2\alpha \|U_\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \langle f_\alpha(t), U_\alpha'(t) \rangle_{\mathbb{H}}, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

en appliquant (4.4.2) avec $w = U_\alpha$ et $w = Grad U_\alpha$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle g_\alpha * U_\alpha(s), U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= - \int_0^t \langle G_\alpha * U_\alpha'(s), U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ &+ \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ &- G_\alpha(t) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle g_\alpha * Grad U_\alpha(s), Grad U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= - \int_0^t \langle G_\alpha * Grad U_\alpha'(s), Grad U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ &+ \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ &- G_\alpha(t) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &- \int_0^t g_\alpha(s) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned}$$

pour cela, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha * U_\alpha(t), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} &= \frac{d}{dt} \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ &\quad - \langle G_\alpha(t) U_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad - \langle G_\alpha * U'_\alpha(t), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

de même pour

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha * \text{Grad} U_\alpha(t), \text{Grad} U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} &= \frac{d}{dt} \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|\text{Grad} U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ &\quad - \langle G_\alpha(t) \text{Grad} U_\alpha(0), \text{Grad} U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad - \langle G_\alpha * \text{Grad} U'_\alpha(t), \text{Grad} U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

en injectant (5.4.2) et (5.4.3) dans l'égalité (5.4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|\text{Grad} U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 + \alpha^2 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \right) \\ &= 2\alpha \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \langle f_\alpha(t), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad - \langle G_\alpha(t) U_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \langle G_\alpha * U'_\alpha(t), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad - \langle G_\alpha(t) \text{Grad} U_\alpha(0), \text{Grad} U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &\quad - \langle G_\alpha(t) * \text{Grad} U'_\alpha(t), \text{Grad} U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

A partir de l'égalité (5.4.4), nous définissons l'énergie associée à la solution U_α de (5.3.1) par

$$E_\alpha(t) = \frac{1}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} (1 - G_\alpha(0)) \|\text{Grad} U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} (1 + \alpha^2 - G_\alpha(0)) \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2.$$

Remarque 8 Pour $\alpha = 0$, nous avons

$$E(t) = E_0(t).$$

5.5 Preuve du Théorème 5.1.1

Supposons que $U_0 \in D(\mathbb{A})$, $U_1 \in \tilde{\mathbb{V}}$ et $f \in C^1([0, \infty); \mathbb{H})$, alors d'après la Proposition 7, la solution mild U est une solution forte.

Dans la suite, nous noterons par C_i , $i \in \mathbb{N}$, les constantes positives dépendant des normes $\|U_1\|$, $\|\text{Grad} U_0\|$, $\|f\|_1$.

5.5.1 Estimation de l'énergie cinétique

Le terme le plus difficile à estimer est l'énergie cinétique $\int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds$, en effet, nous appliquons l'inégalité (5.2.5) en prenant $g = G_\alpha$ et $y = U'_\alpha$, pour tout $t \geq 0$ nous obtenons l'inégalité suivante

$$\int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \leq \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{2}{\delta_\alpha} \int_0^t \{ \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds. \quad (5.5.1)$$

Estimation du terme $\int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds$

Le lemme suivant nous permet d'obtenir une estimation pour le terme

$$\int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.$$

Lemme 9 *Pour toute solution U_α du problème (5.3.1) et pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$, où α_0 est défini dans l'**Hypothèse (H2)** avec $t \geq 0$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ & + \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle G_\alpha * Grad U'_\alpha(s), Grad U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & \leq C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds, \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

où $C_1 > 0$ et

$$\begin{aligned} H_{\alpha,1}(t) &= -G_\alpha(t) \{ \langle U_0, U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle Grad U_0, Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\ & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle Grad U_0, Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\ & + \int_0^t \langle f_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

En multipliant (5.3.1) scalairement par $U'_\alpha(t)$ et en intégrant entre 0 et t , nous obtenons pour $t \geq 0$ l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{(\alpha^2 + 1)}{2} \|U_\alpha\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & - \int_0^t \langle g_\alpha * U_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau - \int_0^t \langle g_\alpha * Grad U_\alpha(\tau), Grad U'_\alpha(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau \\
 = & \frac{1}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \|Grad U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{(\alpha^2 + 1)}{2} \|U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & + 2\alpha \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau + \int_0^t \langle f_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau.
 \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Par application de (4.4.2) avec $w = U_\alpha$, $w = Grad U_\alpha$ et $g = g_\alpha$, nous avons les égalités ci-après

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle g_\alpha * U_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= - \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 &+ \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 &- G_\alpha(t) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &- \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds,
 \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle g_\alpha * Grad U_\alpha(s), Grad U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= - \int_0^t \langle G_\alpha * Grad U'_\alpha(s), Grad U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 &+ \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 &- G_\alpha(t) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &- \int_0^t g_\alpha(s) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds,
 \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

en injectant (5.5.5) et (5.5.6) dans (5.5.4), nous avons l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{(\alpha^2 + 1)}{2} \|U_\alpha\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2) + G_\alpha(t) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle G_\alpha * Grad U'_\alpha(s), Grad U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
 & + G_\alpha(t) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \int_0^t g_\alpha(s) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 = & \frac{1}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \|Grad U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{(\alpha^2 + 1)}{2} \|U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & + 2\alpha \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau + \int_0^t \langle f_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau,
 \end{aligned}$$

donc nous obtenons l'expression ci-après

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \int_0^t \langle G_\alpha * Grad U'_\alpha(s), Grad U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \frac{1}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \left(\frac{\alpha^2 + 1 - G_\alpha(0)}{2} \right) \|U_\alpha\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 = & \frac{1}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|Grad U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{(\alpha^2 + 1) + G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & - G_\alpha(t) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - G_\alpha(t) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \int_0^t g_\alpha(s) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \int_0^t \langle f_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau + 2\alpha \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau,
 \end{aligned}$$

comme $\frac{1-G_\alpha(0)}{2} > 0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 & \frac{1-G_\alpha(0)}{2} \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \int_0^t \langle G_\alpha * Grad U'_\alpha(s), Grad U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 \leq & C_1 + 2\alpha \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \\
 & - G_\alpha(t) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - G_\alpha(t) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \int_0^t \langle f_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau,
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \frac{1}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1+G_\alpha(0)}{2} \|Grad U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & + \frac{(\alpha^2+1)+G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2
 \end{aligned}$$

et en posant

$$\begin{aligned}
 H_{\alpha,1} = & -G_\alpha(t) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - G_\alpha(t) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha(0), U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \langle Grad U_\alpha(0), Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \int_0^t \langle f_\alpha(\tau), U'_\alpha(\tau) \rangle_{\mathbb{H}} d\tau,
 \end{aligned}$$

nous obtenons le résultat.

Estimation du terme $\int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds$.

En utilisant le Lemme ci-après, nous obtenons une estimation du terme

$$\int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds$$

Lemme 10 Si U_α est la solution du problème (5.3.1), alors il existe un nombre $\alpha_1 > 0$, tel que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_1 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_1$ et $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle G_\alpha * U_\alpha''(s), U_\alpha''(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & \leq \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} (C_2 + H_{\alpha,2}(t)) \\ & \quad + \alpha \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} \left(\frac{(1 + \alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1 - G(0)} \right) \int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds, \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|Grad (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{4} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ & \leq C_2 + H_{\alpha,2}(t) + \alpha \left(\frac{(1 + \alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1 - G(0)} \right) \int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds, \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

où $C_2 > 0$ et

$$\begin{aligned} H_{\alpha,2}(t) &= \frac{2\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} H_{\alpha,1}(t) \\ & - G_\alpha(t) \langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle Grad U_0, Grad (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & + \int_0^t \langle f_\alpha(s), U_\alpha'(s) - g_\alpha * U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

En multipliant (5.3.1) scalairement par

$$U_\alpha'(t) - g_\alpha * U_\alpha'(t) = \frac{d}{dt} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) + g_\alpha(t) U_0, \quad (5.5.10)$$

et comme $U \in C^1([0, \infty); \mathbb{V})$ (voir Théorème 4.7.2), nous obtenons l'égalité ci-dessous

$$\begin{aligned}
 & \langle U''_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - 2\alpha \langle U'_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \alpha^2 \langle U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \langle \text{Grad } U_\alpha(t), \text{Grad } (U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \langle g_\alpha * U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \langle g_\alpha * \text{Grad } U_\alpha(t), \text{Grad } (U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & = \langle f_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}},
 \end{aligned}$$

après calcul, nous pouvons écrire

$$U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) = \frac{d}{dt}(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) + g_\alpha(t) U_0,$$

il vient alors

$$\begin{aligned}
 & \langle U''_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - 2\alpha \langle U'_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \alpha^2 \langle U_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + g_\alpha(t) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\
 & = \langle f_\alpha(t), U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}}.
 \end{aligned}$$

en intégrant l'égalité ci dessus entre 0 et t , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \| U'_\alpha(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & - \int_0^t \langle U''_\alpha(s), g_\alpha * U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & = \frac{1}{2} \{ \| U'_\alpha(0) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & + \int_0^t \{ \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + 2\alpha \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \alpha^2 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned}$$

Pour estimer l'intégrale sur le coté gauche de l'égalité ci-dessus, nous utilisons (4.4.2) avec $w = U'_\alpha$, afin d'obtenir l'expression

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
& + \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \frac{G_\alpha(0)}{2} (\|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2) \\
& + G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
= & \frac{1}{2} \{ \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
& - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
& + \int_0^t \{ \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds + 2\alpha \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
& - \alpha^2 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds,
\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 = & \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 \} - G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & + \int_0^t \{ \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + 2\alpha \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \alpha^2 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \tag{5.5.11}
 \end{aligned}$$

Pour pouvoir continuer la suite des calculs, nous devons estimer les deux derniers termes se trouvant sur le coté droit de l'égalité ci-dessus, pour cela nous appliquons (4.4.4) avec $w = U'_\alpha$, et nous obtenons alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 \leq & \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + \int_0^t \|(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 \leq & \int_0^t \|U'_\alpha\|_{\mathbb{H}}^2 ds + 2(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + 2\|G_\alpha\|_2^2 \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \int_0^t \|G_\alpha * U''_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds,
 \end{aligned}$$

par utilisation de l'inégalité à (5.2.4), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 & 2G_\alpha(0) \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & \leq 2\|G_\alpha\|_2^2 \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + 2 \int_0^t \|G_\alpha * U''_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & \leq 2\|G_\alpha\|_2^2 \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + \frac{2}{\delta_\alpha} (\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2) \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

En utilisant (5.5.10), nous avons

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & = \langle U_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha \rangle_{\mathbb{H}}|_0^t + \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_0, U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & \quad - \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha(s)) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & = \langle U_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha \rangle_{\mathbb{H}}|_0^t + \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_0, U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \frac{1}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle U'_\alpha(s), g_\alpha * U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned}$$

Pour le dernier terme se trouvant sur le coté droit ci dessus, nous appliquons (4.4.2) avec $w = U_\alpha$, pour obtenir l'expression ci-après

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= \langle U_\alpha, U - g_\alpha * U_\alpha \rangle_{\mathbb{H}}|_0^t + \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 &\quad - G_\alpha(t) \langle U_0, U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 &\quad - \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \quad (5.5.13)
 \end{aligned}$$

L'égalité (4.4.3) donne

$$\begin{aligned}
 &\langle U_\alpha(t), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \rangle_{\mathbb{H}} - G_\alpha(t) \langle U_0, U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &= (1 - G_\alpha(0)) \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}},
 \end{aligned}$$

L'égalité (5.5.13) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= \frac{G_\alpha(0) - 1}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 &\quad + \langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 &\quad - \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \quad (5.5.14)
 \end{aligned}$$

En remplaçant (5.5.12) et (5.5.14) dans (5.5.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 \leq & \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + \alpha \frac{2 \|G_\alpha\|_2^2}{G_\alpha(0)} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 - G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & + \frac{\alpha}{G_\alpha(0)} \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds - \alpha^2 \langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \alpha^2 \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + 2\alpha \frac{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \tag{5.5.15}
 \end{aligned}$$

D'après (5.2.9), (5.2.7) et (5.2.6), pour $\alpha \leq \frac{\alpha_0}{2}$, nous déduisons

$$\frac{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \leq \frac{4(1 + \alpha_0^2)(1 + \alpha_0)^4}{\alpha_0^2 \delta_{\alpha_0}^2} \|g_{\alpha_0}\|_1^2 \leq \frac{1}{2\alpha_1},$$

où

$$\alpha_1 = \min \left\{ \frac{\alpha_0^2 \delta_{\alpha_0}^2}{8(1 + \alpha_0^2)(1 + \alpha_0)^4 \|g_{\alpha_0}\|_1^2}, \frac{\alpha_0}{2} \right\}, \tag{5.5.16}$$

et de (5.2.2), nous avons

$$-\langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \leq \frac{1 - G_\alpha(0)}{4} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{2G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \tag{5.5.17}$$

en remplaçant (5.5.2) dans (5.5.15), nous avons

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 \leq & \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + \alpha \frac{2 \|G_\alpha\|_2^2}{G_\alpha(0)} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 - G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & + \frac{\alpha}{G_\alpha(0)} \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds - \alpha^2 \langle U_\alpha(t), G_\alpha * U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + 2\alpha \frac{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \alpha^2 \left(H_{\alpha,1} + 2\alpha \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + C_1 \right),
 \end{aligned}$$

a partir de l'inégalité (5.5.17), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{4} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 \leq & \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + \alpha \frac{2 \|G_\alpha\|_2^2}{G_\alpha(0)} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 - G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & + \frac{\alpha}{G_\alpha(0)} \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + \alpha^2 \left(2 \frac{G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} \right) \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + 2\alpha \frac{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \alpha^2 \left(H_{\alpha,1} + 2\alpha \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + C_1 \right),
 \end{aligned}$$

en utilisant (5.5.2), nous avons

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{4} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 \leq & \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad} U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + \alpha \frac{2 \|G_\alpha\|_2^2}{G_\alpha(0)} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 - G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad} U_0, \text{Grad} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & + 2\alpha \frac{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \alpha^2 C_1 \left(1 + \frac{2G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} \right) \\
 & + \alpha \left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \alpha^2 \frac{4G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} + 2\alpha^2 \right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + \alpha^2 \left(1 + \frac{2G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} \right) H_{\alpha,1}(t). \tag{5.5.18}
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha \frac{\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2}{G_\alpha(0)\delta_\alpha} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 \leq & \frac{\alpha}{\alpha_1} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds, \tag{5.5.19}
 \end{aligned}$$

et comme $G_\alpha(0) < 1$, nous pouvons écrire

$$\left(\alpha^2 + \alpha^2 \frac{2G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} \right) H_{\alpha,1}(t) \leq \frac{2\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} H_{\alpha,1}(t), \tag{5.5.20}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \alpha \left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \alpha^2 \frac{4G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} + 2\alpha^2 \right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & \leq \alpha \left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \frac{4\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} \right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds,
 \end{aligned} \tag{5.5.21}$$

En substituant les inégalités (5.5.19), (5.5.20) et (5.5.21) dans (5.5.18), nous aboutissons à l'expression ci-après

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \frac{1}{2} \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{4} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 \leq & C_2 + \frac{2\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} H_{\alpha,1}(t) - G_\alpha(t) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(0), U'_\alpha(0) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\
 & + \frac{\alpha}{\alpha_1} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \alpha \left(\frac{1}{G_\alpha(0)} + \frac{4\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} \right) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds,
 \end{aligned}$$

où C_2 est un nombre positif, tel que

$$\begin{aligned}
 C_2 = & \frac{1 + G_\alpha(0)}{2} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_0\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & + \alpha \frac{2\|G_\alpha\|_2^2}{G_\alpha(0)} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 C_1 \\
 & + \alpha^2 \frac{2G_\alpha(0)}{1 - G_\alpha(0)} C_1.
 \end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons faire absorber le terme $\frac{\alpha}{\alpha_1} \int_0^t \langle G_\alpha * U''_\alpha(s), U''_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds$ par le terme similaire se trouvant sur le coté gauche de l'inégalité ci-dessus. Par la suite, les estimations (5.5.7) et (5.5.8) sont vérifiées pour $\alpha \leq \alpha_1 - \varepsilon_0$.

Estimation du terme $\int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau$

Le lemme suivant nous donne une estimation du terme $\int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds$.

Lemme 11 *Si U_α est la solution du problème (5.3.1), alors il existe un nombre $\alpha_2 > 0$, donné par*

$$\alpha_2 = \min\left\{\frac{\delta_{\alpha_0}}{4(1+\alpha_0)^2} \left(1 + \frac{(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1-G(0)}\right)^{-1}, \frac{\alpha_1}{2}, \eta_0\right\},$$

tel que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_2$ et $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \\ & \leq \frac{\alpha_2}{\varepsilon_0} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0} (C_1 + 2C_2) \\ & \quad + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0} (H_{\alpha,1}(t) + 2H_{\alpha,2}(t)), \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

où η_0 a été introduit dans le Théorème 5.1.1.

Nous estimons le terme $\int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau$ après utilisation de l'inégalité (5.5.1). En tenant comptes des inégalités (5.5.2), (5.5.7) et (5.2.6), nous obtenons pour $\alpha \leq \frac{\alpha_1}{2}$ et $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \\ & \leq \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} (C_1 + 2C_2) + \frac{2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}} (H_{\alpha,1}(t) + 2H_{\alpha,2}(t)) \\ & \quad + \frac{\alpha}{\alpha_2} \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Pour $\alpha \leq \alpha_2 - \varepsilon_0$, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \\ & \leq \frac{\alpha_2}{\varepsilon_0} \|U'_\alpha(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0} (C_1 + 2C_2) \\ & \quad + \frac{2\alpha_2(1+\alpha_0)^2}{\delta_{\alpha_0}\varepsilon_0} (H_{\alpha,1}(t) + 2H_{\alpha,2}(t)). \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

5.5.2 Lemmes techniques

Lemme 12 *Soit U_α la solution du problème (5.3.1), alors il existe un nombre $\alpha_2 > 0$, tel que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_2$ et $t \geq 0$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \{ \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \frac{1}{2} \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ & \leq C_3, \end{aligned} \tag{5.5.24}$$

$$\int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \leq C_4, \tag{5.5.25}$$

où α_2 est donné par le Lemme 11 et $C_3, C_4 > 0$.

Nous remplaçons (5.5.22) dans (5.5.8), et d'après (5.5.2), (5.5.3) et (5.5.9), ainsi que les inégalités de Cauchy Schwarz et de Young nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \{ \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \frac{1}{2} \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ & \leq \varepsilon \{ \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^2 \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + C_\varepsilon + C \int_0^t (\|f_{\eta_0}(s)\|_1 + |g_{\alpha_0}(s)|) \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\ & + C \int_0^t |g_{\alpha_0}(s)| \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds \\ & + C \int_0^t |g_{\alpha_0}(s)| \{ \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds \\ & + C \int_0^t \|f_{\eta_0}(s)\|_1 \|(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}} ds, \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où C_ε et C sont des constantes positives.

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \{ \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \frac{1}{2} \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ \leq & C + C' \int_0^t \|f_{\eta_0}(s)\| \|(U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \end{aligned}$$

où C et C' sont des constantes positives dépendant des données $\|U_1\|, \|\text{Grad } U_0\|, \|f\|_1$.

Pour tout $T > 0$, nous avons

$$(\|U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha\|_{\mathbb{H}})_{\infty, T} \leq (1 + \|g_{\alpha_0}\|_1)(\|U'_\alpha\|_{\mathbb{H}})_{\infty, T},$$

par la suite

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \{ \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \frac{1}{2} \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ \leq & \varepsilon (\|U'_\alpha\|_{\mathbb{H}}^2)_{\infty, T} + C_\varepsilon, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$, nous pouvons contrôler le terme $(\|U'_\alpha\|_{\mathbb{H}}^2)_{\infty, T}$ par des constantes positives indépendantes de t , alors nous obtenons (5.5.24).

Finalement, les fonctions $H_{\alpha,1}(t)$ et $H_{\alpha,2}(t)$ dans (5.5.22) peuvent être bornées par le biais de (5.5.24), alors nous obtenons (5.5.25).

Lemme 13 *Pour toute solution U_α du problème (5.3.1) où $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_2$, et $t \geq 0$, nous avons*

$$\int_0^t \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds \leq C_5, \quad (5.5.26)$$

où $C_5 > 0$.

En multipliant (5.3.1) scalairement par $U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \langle U_\alpha''(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - 2\alpha \langle U_\alpha'(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \alpha^2 \langle U_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle U_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \langle \text{Grad } U_\alpha(t), \text{Grad } (U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \langle g_\alpha * U_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & - \langle g_\alpha * \text{Grad } U_\alpha(t), \text{Grad } (U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 = & \langle f_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}},
 \end{aligned}$$

après calcul, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 & \langle U_\alpha''(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} - 2\alpha \langle U_\alpha'(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \alpha^2 \langle U_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \|U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}} + \|\text{Grad } (U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t))\|_{\mathbb{H}} \\
 = & \langle f_\alpha(t), U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}}.
 \end{aligned} \tag{5.5.27}$$

En intégrant (5.5.27) entre 0 et t , nous avons

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \langle U_\alpha''(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - 2\alpha \int_0^t \langle U_\alpha'(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \alpha^2 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \int_0^t \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \|\text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}} ds \\
 = & \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned} \tag{5.5.28}$$

En intégrant par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 - \int_0^t \langle U''_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds &= -\langle U'_\alpha, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha) \rangle_{\mathbb{H}}|_0^t \\
 &\quad + \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 &\quad - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(s), U_0 \rangle_{\mathbb{H}} ds,
 \end{aligned} \tag{5.5.29}$$

en remplaçant (5.5.29) dans (5.5.28), nous déduisons

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \{ \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 + \| \text{Grad} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 \} ds \\
 &= \int_0^t \langle f_\alpha(s), (U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \langle U'_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha \rangle_{\mathbb{H}}|_0^t \\
 &\quad + \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(s), U_0 \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 &\quad + 2\alpha \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 &\quad - \alpha^2 \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned} \tag{5.5.30}$$

Pour estimer le dernier terme sur le côté droit de (5.5.30), par utilisation de l'inégalité (4.4.4), nous avons alors

$$\begin{aligned}
 &-(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \langle U_\alpha(s), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 &\leq -\frac{1}{2} \int_0^t \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds + \| G_\alpha \|_2^2 \| U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \| G_\alpha * U'_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds.
 \end{aligned}$$

En remplaçant l'inégalité précédente dans (5.5.30), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \| \text{Grad} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + \left(\frac{\alpha^2}{2(1 - G_\alpha(0))} + 1 \right) \int_0^t \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 \leq & \int_0^t \| f_{\eta_0}(s) \|_1 \| U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}} ds - \langle U'_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha \rangle_{\mathbb{H}} \Big|_0^t \\
 & + \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(s), U_0 \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \frac{\alpha^2 \| G_\alpha \|_2^2}{1 - G_\alpha(0)} \| U_0 \|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} \int_0^t \| G_\alpha * U'_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + 4(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \| U'_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds + \frac{\alpha^2}{4(1 - G_\alpha(0))} \int_0^t \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds.
 \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 7, l'intégrale $\int_0^t \| G_\alpha * U'_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds$ du membre de droite de l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \| G_\alpha * U'_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 \leq & \frac{1}{\delta_\alpha} \{ \| G_\alpha \|_I^2 + 4 \| g_\alpha \|_I^2 \} \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 9 nous déduisons

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \| G_\alpha * U'_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds & \leq \frac{1}{\delta_\alpha} \{ \| G_\alpha \|_I^2 + 4 \| g_\alpha \|_I^2 \} \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & \leq \frac{1}{\delta_\alpha} \{ \| G_\alpha \|_I^2 + 4 \| g_\alpha \|_I^2 \} \left\{ C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2\alpha \int_0^t \| U'_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \right\}.
 \end{aligned}$$

par la suite

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \| \text{Grad} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + \left(\frac{\alpha^2}{2(1 - G_\alpha(0))} + 1 \right) \int_0^t \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 \leq & \int_0^t \| f_{\eta_0}(s) \| \| U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}} ds - \langle U'_\alpha, U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha \rangle_{\mathbb{H}} \Big|_0^t \\
 & + \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(s), U_0 \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \frac{\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} \left(\frac{1}{\delta_\alpha} (\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2) \left(C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2 \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \right) \right) \\
 & + 4(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + \frac{\alpha^2}{4(1 - G_\alpha(0))} \int_0^t \|U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + \frac{\alpha^2 \|G_\alpha\|_2^2}{1 - G_\alpha(0)} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2,
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \| \text{Grad} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + \left(\frac{\alpha^2}{2(1 - G_\alpha(0))} + 1 \right) \int_0^t \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & - \frac{\alpha^2}{4(1 - G_\alpha(0))} \int_0^t \| U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & \leq \int_0^t \| f_{\eta_0}(s) \|_1 \| U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s) \|_{\mathbb{H}} ds - \langle U'_\alpha(t), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \langle U'_\alpha(0), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(0) \rangle_{\mathbb{H}} \\
 & + \int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U'_\alpha(s), U_0 \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & + \frac{\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} \left(\frac{1}{\delta_\alpha} (\|G_\alpha\|_1^2 + 4\|g_\alpha\|_1^2) \left(C_1 + H_{\alpha,1}(t) + 2 \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \right) \right) \\
 & + 4(1 - G_\alpha(0)) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & + \frac{\alpha^2 \|G_\alpha\|_2^2}{1 - G_\alpha(0)} \|U_0\|_{\mathbb{H}}^2,
 \end{aligned} \tag{5.5.31}$$

d'après (5.5.24), nous avons

$$\begin{aligned}
 \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}} & \leq C'_3, \\
 \|U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}} ds & \leq C''_3,
 \end{aligned}$$

nous arrivons à écrire que

$$\int_0^t \|f_{\eta_0}(s)\|_1 \|U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}} ds \leq \tilde{k}_0, \tag{5.5.32}$$

et

$$\begin{aligned}
 \langle U'_\alpha(t), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t) \rangle_{\mathbb{H}} & \leq \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}} \|U_\alpha(s) - g_\alpha * U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}} \\
 & \leq \tilde{k}_1,
 \end{aligned} \tag{5.5.33}$$

où $C'_3, C''_3, \tilde{k}_0, \tilde{k}_1$ sont des constantes positives.

A partir de l'inégalité (5.5.25), nous arrivons à écrire que

$$\int_0^t \langle U'_\alpha(s), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \leq \tilde{k}_2, \quad (5.5.34)$$

où $\tilde{k}_2$ est une constante positive.

D'après les estimations (5.5.32)–(5.5.34) et comme $H_{\alpha,1}(t)$ est bornée, de l'inégalité (5.5.31), nous arrivons au résultat suivant

$$\int_0^t \| \text{Grad} (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds + \int_0^t \| (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \|_{\mathbb{H}}^2 ds \leq C_5.$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 13

5.5.3 Fin de la preuve du Théorème 5.1.1

Dans la suite, nous noterons par $\tilde{k}_i = \tilde{k}_i(\|U_1\|, \|\text{Grad} U_0\|, \|f\|_1)$ les fonctions positives, croissantes, telles que $\tilde{k}_i(0) = 0, i = 3, 4, 5, 6$.

D'après le Lemme 12, nous obtenons pour tout $t \geq 0$,

$$\|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad} U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \tilde{k}_3 \quad (5.5.35)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 &= \langle U_\alpha(t), U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= e^{2\alpha t} \langle U(t), U(t) \rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

de l'inégalité (5.5.35), nous avons

$$\|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = e^{2\alpha t} \|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \tilde{k}_3,$$

ce qui donne

$$\|U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \tilde{k}_3 e^{-2\alpha t}, \quad (5.5.36)$$

ainsi nous trouvons

$$\|\text{Grad} U(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \tilde{k}_3 e^{-2\alpha t}. \quad (5.5.37)$$

Nous avons

$$U'(t) = e^{-\alpha t} U'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t} U_\alpha(t),$$

en prenant les normes, il vient

$$\|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|e^{-\alpha t} U'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t} U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \tilde{k}_4 e^{-2\alpha t} (\|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2)$$

d'après l'inégalité (5.5.35) nous déduisons

$$\|U'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \tilde{k}_3 \tilde{k}_4 e^{-2\alpha t}, \quad (5.5.38)$$

en utilisant (5.5.36)-(5.5.38), nous obtenons le premier résultat du Théorème, c'est à dire l'estimation (5.1.5) pour le cas linéaire.

Comme le noyau résolvant de g_α est donné par $r_\alpha(t) = e^{\alpha t} r(t)$, nous pouvons appliquer le Corollaire 2 pour obtenir

$$(\|Grad U_\alpha\|_{\mathbb{H}})_\infty \leq (1 + \|r_{\alpha_0}\|_1) (\|Grad (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)\|_{\mathbb{H}})_\infty, \quad (5.5.39)$$

$$(\|U_\alpha\|_{\mathbb{H}})_\infty \leq (1 + \|r_{\alpha_0}\|_1) (\|U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha\|_{\mathbb{H}})_\infty. \quad (5.5.40)$$

En utilisant (5.5.39), (5.5.40), (3.2.5) et (5.5.26), nous pouvons montrer l'estimation uniforme des termes

$$\int_0^\infty \|Grad U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds,$$

et

$$\int_0^\infty \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds,$$

Par conséquent, l'inégalité (5.5.25) nous donne

$$\int_0^\infty \{\|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2\} ds \leq \tilde{k}_5, \quad (5.5.41)$$

Comme $U(t) = e^{-\alpha t} U_\alpha(t)$, et $U'(t) = e^{-\alpha t} U'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t} U_\alpha(t)$, nous pouvons écrire

$$\int_0^\infty e^{2\alpha s} (\|U'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|Grad U(s)\|_{\mathbb{H}}^2) ds \leq \tilde{k}_6,$$

ainsi nous trouvons la deuxième estimation du Théorème (l'estimation (5.1.6) pour le cas linéaire). Les arguments standards de densité permettent d'étendre les résultats aux solutions mild.

Chapitre 6

Stabilisation exponentielle du problème semilinéaire

6.1 Introduction

L'étude ci-après concerne le cas semilinéaire, pour cela le problème (4.1.1) s'écrit sous la forme

$$U''(t) + \mathbb{A}U(t) - \int_0^t g(t-s)\mathbb{A}U(s)ds + H(U(t)) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (6.1.1)$$

avec les conditions initiales

$$U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad U'(0) = U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad (6.1.2)$$

où

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} & 1 - \Delta_\Gamma \end{pmatrix}, \quad (6.1.3)$$

et

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad H(U(t)) = \begin{pmatrix} h_1(u(t)) \\ h_2(v(t)) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \quad (6.1.4)$$

Supposons que h_i sont globalement lipschitziennes, i.e $h_i \in C^1(\mathbb{R})$, $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2$ et il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$; $p > 1$; $(n - 2)p \leq n$ telles que

$$\begin{cases} \text{pour tout } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \\ |h_1(s_1) - h_1(s_2)| \leq c_1(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})|s_1 - s_2|, \\ |h_2(s_1) - h_2(s_2)| \leq c_2(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})|s_1 - s_2|. \end{cases} \quad (6.1.5)$$

Supposons que

$$R(U) = \int_{\Omega} F_1(u(t))dx + \int_{\Gamma} F_2(v(t))d\Gamma \geq 0, \quad (6.1.6)$$

Théorème 6.1.1 *Nous supposons que les hypothèses (H1), (H2) avec $\alpha_0 > 0$, ainsi que (6.1.5), (6.1.6) sont vérifiées. Alors, il existe des constantes positives $\widehat{K}_i$, $i = 0, 1$, telles que, pour tout $U_0 \in \widetilde{\mathbb{V}}$, $U_1 \in \mathbb{H}$ et tout $f_{\eta_0} \in L^1(0, \infty; \mathbb{H})$, $\eta_0 > 0$, l'énergie $E(t)$ associée à la solution solution mild U du problème (6.1.1) – (6.1.4) vérifie*

$$E(t) \leq \widehat{K}_0 e^{-2\alpha t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.1.7)$$

et

$$\int_0^{\infty} e^{2\alpha s} E(s) ds \leq \widehat{K}_1, \quad (6.1.8)$$

pour tout $\alpha \in [0, \alpha^*]$, où $\alpha^* \in]0, \min\{\alpha_0, \eta_0\}[$ et $\widehat{K}_i = \widehat{K}_i(\|U_1\|, \|Grad U_0\|, \|f\|_1)$ sont des fonctions positives, croissantes, telles que $\widehat{K}_i(0) = 0$, $i = 0, 1$.

6.2 Transformation du problème

Nous faisons le changement de fonction $U_{\alpha}(t) = e^{\alpha t} U(t)$ où $\alpha \geq 0$, ce qui permet de transformer le problème (6.1.1)-(6.1.4) au problème suivant

$$\begin{cases} U_{\alpha}''(t) - 2\alpha U_{\alpha}'(t) + \alpha^2 U_{\alpha}(t) + \mathbb{A}U_{\alpha}(t) - g_{\alpha} * \mathbb{A}U_{\alpha}(t) + e^{\alpha t} H(U(t)) = f_{\alpha}(t), \\ U_{\alpha}(0) = U_0, \quad U_{\alpha}'(0) = U_1 + \alpha U_0. \end{cases} \quad (6.2.1)$$

6.3 Énergie modifiée

L'énergie associée à la solution U_α du problème (6.2.1) est définie par

$$\begin{aligned} E_\alpha(t) &= \frac{1}{2} \|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} (1 - G_\alpha(0)) (\|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha^2 + 1 - G_\alpha(0)) \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t e^{\alpha s} \langle H(U(s)), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Nous avons l'expression supplémentaire suivante

$$\int_0^t e^{\alpha s} \langle H(U(s)), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds,$$

dans l'expression de l'énergie dans le cas linéaire.

6.4 Preuve du Théorème 6.1.1

6.4.1 Applications des trois multiplicateurs

En suivant la même stratégie utilisée dans le cas linéaire, comme dans Lemme 9, Lemme 10 et Lemme 13: Après multiplication de (6.2.1) par les trois multiplicateurs $U'_\alpha(t)$, $U'_\alpha(t) - g_\alpha * U'_\alpha(t)$, $U_\alpha(t) - g_\alpha * U_\alpha(t)$ et intégration entre 0 et t , pour le premier multiplicateur $U'_\alpha(t)$, le terme non linéaire s'écrit

$$\int_0^t e^{\alpha s} \langle H(U(s)), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \quad (6.4.1)$$

En utilisant, les inégalités de Young, de Cauchy-Schwarz et (6.1.5), nous obtenons

$$\int_0^t e^{\alpha s} \langle H(U(s)), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \leq \tilde{c}_1 \int_0^t \{ \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds.$$

Pour le deuxième et le troisième multiplicateurs, nous avons également

$$\int_0^t e^{\alpha s} \langle H(U(s)), (U'_\alpha - g_\alpha * U'_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \leq \tilde{c}_2 \int_0^t \{ \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds,$$

et

$$\int_0^t e^{\alpha s} \langle H(U(s)), (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \leq \tilde{c}_3 \int_0^t \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds,$$

où $\tilde{c}_i$, $i = 1, 2, 3$ sont des constantes positives.

Nous noterons par $\widehat{C}_i$ et C_i , $i = 1, 2, 3$, les constantes positives dépendantes des données $\|\nabla U_0\|$, $\|U_1\|$ et $\|f\|_1$.

Ainsi, selon les trois estimations précédentes, nous obtenons les lemmes suivants

Lemme 14 *Pout toute solution U_α du problème (6.2.1) et pour tout $\alpha \in [0, \alpha_0]$, $t \geq 0$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|Grad U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ & + \int_0^t \langle G_\alpha * U'_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds + \int_0^t \langle G_\alpha * Grad U'_\alpha(s), Grad U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\ & \leq C_1 + H_{\alpha,1}(t) + (2\alpha + \tilde{c}_1) \int_0^t \|U'_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds + \int_0^t \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \end{aligned}$$

où $C_1 > 0$ et

$$\begin{aligned} H_{\alpha,1}(t) &= -G_\alpha(t) \{ \langle U_0, U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle Grad U_0, Grad U_\alpha(t) \rangle_{\mathbb{H}} \} \\ & - \int_0^t g_\alpha(s) \{ \langle U_0, U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} + \langle Grad U_0, Grad U_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} \} ds \\ & + \int_0^t \langle f_\alpha(s), U'_\alpha(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds. \end{aligned}$$

Lemme 15 *Si U_α est la solution du problème (6.2.1), alors il existe un nombre $\alpha_1 > 0$, tel que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_1 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_1$ et $t \geq 0$, nous avons*

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \langle G_\alpha * U_\alpha''(s), U_\alpha''(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & \leq \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} (C_2 + H_{\alpha,2}(t)) \\
 & \quad + \alpha \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} \left(\frac{(1 + \alpha_0^2)}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1 - G(0)} \right) \int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & \quad + \tilde{c}_2 \left(\int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \right) ds, \\
 & \quad \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{1}{2} \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
 & \quad + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{4} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 & \leq C_2 + H_{\alpha,2}(t) + \alpha \left(\frac{(1 + \alpha_0^2)}{\delta_{\alpha_0}} + \frac{8\alpha_1^2}{1 - G(0)} \right) \int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \\
 & \quad + \tilde{c}_2 \left(\int_0^t \|U_\alpha'(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^t \|U_\alpha(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \right) ds,
 \end{aligned}$$

où $C_2 > 0$ et

$$\begin{aligned}
 H_{\alpha,2}(t) &= \frac{2\alpha^2}{1 - G_\alpha(0)} H_{\alpha,1}(t) \\
 & \quad - G_\alpha(t) \langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(t) \rangle_{\mathbb{H}} - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_\alpha'(0), U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & \quad - \int_0^t g_\alpha(s) \langle U_0, (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & \quad - \int_0^t g_\alpha(s) \langle \text{Grad } U_0, \text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds \\
 & \quad + \int_0^t \langle f_\alpha(s), U_\alpha'(s) - g_\alpha * U_\alpha'(s) \rangle_{\mathbb{H}} ds.
 \end{aligned}$$

Lemme 16 Si U_α est la solution du problème (6.2.1), alors il existe un nombre $\alpha_2 > 0$, tel que pour tout $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_2$, avec

$$\alpha_2 = \min \left\{ \frac{\delta \alpha_0}{4(1 + \alpha_0)^2} \left(1 + \frac{(1 + \alpha_0)^2}{\delta \alpha_0} + \frac{8\alpha_1^2}{1 - G(0)} \right)^{-1}, \frac{\alpha_1}{2}, \eta_0 \right\},$$

et $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} (\|U'_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2) \\ & + \frac{1}{2} \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ & + \alpha^2 \frac{1 - G_\alpha(0)}{2} \|U_\alpha(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ & \leq \hat{C}_1, \end{aligned}$$

$$\int_0^t \|U'_\alpha(\tau)\|_{\mathbb{H}}^2 d\tau \leq \hat{C}_2,$$

où $\hat{C}_1, \hat{C}_2 > 0$.

Lemme 17 Pour toute solution U_α du problème (6.2.1), où $\alpha \in [0, \alpha_2 - \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < \alpha_2$, et $t \geq 0$, nous avons

$$\int_0^t \{ \|(U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\text{Grad } (U_\alpha - g_\alpha * U_\alpha)(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \} ds \leq \hat{C}_3, \quad (6.4.2)$$

où $\hat{C}_3 > 0$.

6.4.2 Fin de la Preuve du Théorème 6.1.1

En utilisant le même raisonnement que dans le cas linéaire et par application de Lemme 14, Lemme 15, Lemme 16, Lemme 17, les estimations (5.5.35) et (5.5.41) sont vérifiées dans le cas non linéaire.

En rappelant que $U(t) = e^{-\alpha t} U_\alpha(t)$ et $U'(t) = e^{-\alpha t} U'_\alpha(t) - \alpha e^{-\alpha t} U_\alpha(t)$, nous obtenons les inégalités (6.1.7) et (6.1.8) pour les solutions fortes. Les arguments standards de densité permettent d'étendre les résultats aux solutions mild.

Chapitre 7

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié l'existence des solutions et la stabilisation d'une équation des ondes

- **viscoélastique** (avec des noyaux fortement définis positifs),
- **semilinéaire** (les nonlinéarités sont globalement lipschitziennes),
- **avec des conditions aux limites dynamiques.**

Dans la première partie, nous avons démontré l'existence et l'unicité des solutions

- **locales mild et fortes** ,
- **globales mild et fortes** .

La deuxième partie de la thèse a été consacrée à l'étude de la **stabilisation**, nous avons considéré séparément les problèmes linéaire et semilinéaire.

Malgré la complexité des calculs techniques de la méthode utilisée, nous avons pu montrer

- **La stabilisation exponentielle.**
- **La fonction $e^{2\alpha t}E(t)$ appartient à l'espace $L^1(0, \infty)$.**

On peut envisager comme **perspective** d'étudier la stabilisation, en considérant un seul terme mémoire (damping) agissant dans une seule équation. C'est un problème très difficile car on des conditions aux limites dynamiques.

Bibliographie

- [1] M. Aassila, M. M. Cavalcanti and J. A. Soriano, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a starshaped domain, SIAM J. Control and Optimization 38(5):1581-1602, 2000.
- [2] R. A. Adams and J. F. Fourier, Sobolev Spaces. 2003, Academic Press.
- [3] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, D. Sforza, Decay estimates for second order evolution equations with memory, J. Funct. Anal. 254:1342-1372, 2008.
- [4] J. A. D. Appleby, M. Fabrizio, B. Lazzari and D. W. Reynolds, On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 16 (10): p. 1677-1694, 2006.
- [5] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. SIAM J. Control Optim., 30(5):1024-1065, 1992.
- [6] A. Bendali et K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. SIAM J. Appl. Math. 56:1664-1693, 1996.
- [7] S. Berrimi and S. A. Messaoudi, Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Analysis-Theory Methods Applications, 64 (10): p. 2314-2331, 2006.
- [8] S. Berrimi and S. A. Messaoudi, Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. Elect J. Diff. Eqns, (88): p. 1-10, 2004.

- [9] N. Burq. Contrôlabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers. *Asymptot. Anal.*, 14(2) :157-191, 1997.
- [10] N. Burq and M. Zworski. Geometric control in the presence of a black box. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(2) :443-471, 2004.
- [11] P. Cannarsa, D. Sforza, integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels, *Journal of Diff. Equa.* 250: 4289-4335, 2011.
- [12] P. Cannarsa, D. Sforza, A stability result for a class of nonlinear integrodifferential equations with L^1 kernels, *Appl. Math. (Warsaw)* 35 :395-430, 2008.
- [13] P. Cannarsa, D. Sforza, Global solutions of abstract semilinear parabolic equations with memory terms, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 10 :399-430,(2003) .
- [14] T. Carleman. Sur un problème d'unicité pur systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat., Astr. Fys.*, 26(17) :9, 1939.
- [15] M. M. Cavalcanti, Domingos Cavalcanti, V. N, Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev, Maringá : Eduem, 2009.
- [16] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping, *Math. Methods Appl. Sci.* 24 :1043-1053, 2001.
- [17] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and P. Martinez , General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems. *Nonlinear Anal.*, 68 (1): p. 177-193, 2008.
- [18] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho, and J. A. Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. *Di . Int. Eqs.*, 14 : 85-116, 2001.
- [19] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho and J. A. Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. *Diff. Integ. Eqs.*, 14 (1): p. 85-116, 2001.

- [20] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.A. Soriano, Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, *Electron. J. Differential Equations* 44 : 1-14, 2002.
- [21] M. M. Cavalcanti, A. Khemmoudj and M. Medjden, Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dynamic boundary condition, *J. Math. Anal. Appl.*, Volume 328, Issue 2, p. p. 900-930. 2007.
- [22] M. M. Cavalcanti, H.P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, *SIAM J. Control Optim.* 42 (4): 1310-1324, 2003.
- [23] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, Ryuichi Fukuoka and Daniel Toundykov: Stabilization of the damped wave equation with Cauchy–Ventcel boundary conditions, *J. Evol. Equ.* 9 :143–169, 2009.
- [24] A. Chen, Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain, *J. Math. pures, Appl.* 58, 249-274, 1979.
- [25] A. Ghen, A note on the boundary stabilization of the wave equation, *S.I.A.M. J. Control. opt.*, 19, 106-113, 1981.
- [26] M. Chouli, Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques, Université Paul Verlaine-Metz, Ile de Saulcy, 57045 Metz cedex, France. ISSN 1154-483, ISBN 978-642-02459-3, Springer Dordrecht Heidelberg London New york.
- [27] C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 37: 297-308, 1970.
- [28] C. M. Dafermos, On abstract Volterra equation with applications to linear viscoeladticity, *J. Differ. Equations* 7: 554-569, 1970.
- [29] M. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey : Prentice Hall, 1976.
- [30] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. 1998, Graduate Studies in Mathematics, AMS.

- [31] M. Fabrizio, C. Giorgi, V. Pata, A new approach to equations with memory, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 198 : 189-232, (2010).
- [32] M. Fabrizio and S. Polidoro, Asymptotic decay for some differential systems with fading memory. *Appl. Anal.*, 81 (6): p. 1245-1264, 2002.
- [33] H. O. Fattorini. Infinite-dimensional optimization and control theory, volume 62 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [34] E. Fernández-Cara and E. Zuazua. The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case. *Adv. Differential Equations*, 5(4-6) :465-514, 2000.
- [35] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stoks initial value problem I, *Arch. Rational Mech. Anal*, 16 : pp. 269-315, 1964.
- [36] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov. Controllability of evolution equations, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [37] G. Gripenberg, S.O. Londen, O.J. Staffans, *Volterra Integral and Functional Equations*, *Encyclopedia Math. Appl.*, vol. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [38] A. Haraux. Quelques propriétés des séries lacunaires utiles dans l'étude des vibrations élastiques. In *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Collège de France Seminar, Vol. XII (Paris, 1991-1993), volume 302 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 113-124. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
- [39] W.J. Hrusa, J.A. Nohel, The Cauchy problem in one-dimensional nonlinear viscoelasticity, *J. Differential Equations* 59 :388-412, 1985.
- [40] A. E. Ingham. Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Math. Z.*, 41(1) :367-379, 1936.
- [41] S. Kawashima, Global solutions to the equation of viscoelasticity with fading memory, *J. Differential Equations* 101:388-420, 1993.

- [42] A. Khemmoudj and M. Medjden, Exponential Decay for the Semilinear Damped Cauchy-Ventcel Problem, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 22(2):97-116, 2004.
- [43] V. Komornik. Exact controllability and stabilization. RAM : Research in Applied Mathematics. Masson, Paris, 1994. The multiplier method.
- [44] V. Komornik and P. Loreti. Fourier series in control theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [45] J. Lagnese. Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation, *J. Diff. Equations*, 50: 163-182, 1983.
- [46] I. Lasiecka and R. Triggiani. Control theory for partial differential equations : continuous and approximation theories. I, volume 74 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Abstract parabolic systems.
- [47] I. Lasiecka and R. Triggiani. Uniform exponential decay in a bounded region with $L^2(0, T, L^2(\Sigma))$ feedback control in the Dirichlet boundary conditions, *J. Diff. Equations*, 66 :1340-390, 1987.
- [48] I. Lasiecka and R. Triggiani, and P. F. Yao, Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term, *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications* 30(1): 111-122, 1997. Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis.
- [49] I. Lasiecka, R. Triggiani, and P. F. Yao, Inverse/Observability Estimates for Second-Ordre Hyperbolic Equations with Variable Coefficients.*J. Math. Anal. Appl.* 235 : no. 1, 13-57, 1999.
- [50] P. D. Lax, C. S. Moraetz, R. S. Phillips, Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of start-shaped obstacle, *Appl. Math*, vol 16, 477-489, 1963.
- [51] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Duke Math. J.*, 86(3) :465-491, 1997.

- [52] K. Lemrabet, Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 15: 531-534, 1985.
- [53] K. Lemrabet, Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse, USTHB, Alger (1987).
- [54] K. Lemrabet, Problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de $\mathbb{R}^3$. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 304: 151-154, 1987.
- [55] K. Lemrabet et D. E. Teniou, Controlabilité exacte pour l'équation des ondes avec conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel, Publication de l'institut de Mathématiques, U.S.T.H.B.
- [56] K. Lemrabet and D. E. Teniou, Un problème d'évolution de type Ventcel. (an evolution problem of Ventcel type), Rev. Maghréb. Math. 1(1): 15-29, 1992.
- [57] J.-L. Lions. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées* [Research in Applied Mathematics]. Masson, Paris, 1988.
- [58] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. SIAM Rev., 30(1) :1-68, 1988.
- [59] K. Liu, Z. Liu, and B. Rao. Exponential stability of an abstract nondissipative linear system. SIAM J. Control Optim., 40(1) :149-165, 2001.
- [60] L. A. Medeiros, M. Milla Miranda, Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos). Rio de Janeiro : IM-UFRJ, 2000.
- [61] T. Meurer and A. Kugi. Tracking control design for a wave equation with dynamic boundary conditions modeling a piezoelectric stack actuator. Int. J. Robust. Nonlinear Control, 21:542- 562, 2011.
- [62] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa, On convexity for energy decay rates of a viscoelastic equation with boundary feedback. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 72: p. 3602-3611, 2010.

- [63] S. A. Messaoudi and N. E. Tatar, Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30 (6): p. 665-680, 2007.
- [64] S. A. Messaoudi and N. E. Tatar, Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation. *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 68 (4): p. 785-793, 2008.
- [65] L. Miller. Controllability cost of conservative systems : resolvent condition and transmutation. *J. Funct. Anal.*, 218(2) :425-444, 2005.
- [66] C. S. Moraetz, Exponential decay of solutions of the wave equation, *Comm. Pure. Appl. Math*, vol 19 :539-444, 1966.
- [67] S. Nicaise. Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications. *Rend. Mat. Appl.* (7), 23(1) :83-116, 2003.
- [68] S. Nicaise and K. Laoubi:Polynomial stabilization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions. *Math. Nachr.* 283, No. 10 (2010).
- [69] J.A. Nohel, D.F. Shea, Frequency domain methods for Volterra equations, *Adv. Math.* 22: 278-304, (1976).
- [70] V. Pata , Stability and exponential stability in linear viscoelasticity. *Milan Journal of Mathematics*, 77 (1): p. 333-360, 2009.
- [71] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monogr. Math., vol. 87, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [72] K. Ramdani, T. Takahashi, G. Tenenbaum, and M. Tucsnak. A spectral approach for the exact observability of infinite-dimensional systems with skew-adjoint generator. *J. Funct. Anal.*, 226(1) :193-229, 2005.
- [73] D. L. Russel, Exact boundary value controlability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions, in *differential games and control theory*, Raxin. Liu and Sternberg, Eds, Maerel Dekker Inc, New York 1974.

- [74] D. L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions. *SIAM Rev.*, 20(4) :639-739, 1978.
- [75] A. Samarsky et V. Andreev, Méthodes aux différences pour équations elliptiques. Editions de Moscou (1978).
- [76] O.J. Staffans, Positive definite measures with applications to a Volterra equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 218 : 219- 237, 1976.
- [77] O.J. Staffans, On a nonlinear hyperbolic Volterra equation, *SIAM J. Math. Anal.* 11 :793-812, 1980.
- [78] A. D. Wentzell (Ventcel). On boundary conditions for multidimensional diffusion processes. *Theor. Probab. Appl.* 4. p 164-177, 1959.
- [79] C. Wilcox, The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary, *Amer. Math. Soc. Not. Abstract* 564-20, Vol 6, 1959.
- [80] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Commun. Partial Differential Equations* 15(2): 205-235, 1990.
- [81] E. Zuazua. Some problems and results on the controllability of partial differential equations. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996)*, volume 169 of *Progr. Math.*, pages 276-311. Birkhäuser, Basel, 1998.
- [82] E. Zuazua. Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8(2) :469-513, 2002. *Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999)*.