

N° d'ordre : 19/2012-M/GC

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Génie Civil



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de
MAGISTER

En GENIE CIVIL
Spécialité : **Construction**

Par

Mr. Aliouane M'hamed

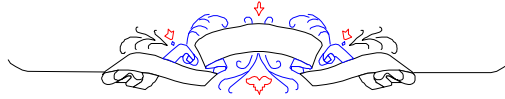
THEME

**Modélisation de la Propagation de Fissure par les Eléments
Finis Dynamiques**

Soutenu publiquement le : 23 / 06 /2012, devant le jury composé de :

Mr. M.Chabaat	Professeur	U.S.T.H.B / FGC	Président
Mme. H.Hadjab	Maitre de conférences	U.S.T.H.B / FGC	Directrice de Mémoire
Mr. A. A.Benyahia	Professeur	U.S.T.H.B / FGM	Examineur
Mr. S.Haddadi	Maître de Conférences	U.S.T.H.B / FGC	Examineur
Mr. E.Djakab	Maître de Conférences	U.S.T.H.B / FGC	Invité

Remerciements



En achevant ce modeste travail nous remercions DIEU qui nous a permis d'arriver à ce jour.

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à ma directrice de thèse **Mme H.Hadjab** pour son aide, ses conseils, sa disponibilité permanente, ses connaissances et son expérience dans le domaine.*

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur M. CHABAAT professeur à la faculté de Génie civil à l'USTHB, pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire, et consacrer une partie de son temps pour ses discussions bénéfiques, et ses encouragements.

Mes vifs remerciements s'adressent également à Monsieur A.A.Benyahia professeur à la faculté de Génie mécanique à l'USTHB, qui a bien voulu faire partie du jury et d'apporter ses vives contributions à l'enrichissement de ce travail.

Je tiens à remercier, Monsieur S.Haddadi maitre de conférences à la faculté de Génie civil à l'USTHB, qui a bien voulu faire partie du jury, qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect.

Je tiens à remercier, Monsieur E.DJAKAB maitre de conférences à la faculté de Génie civil à l'USTHB, a l'honneur qu'il ma fait d'accepter de participer au jury de ce travail.

Je tiens à remercier, mes chers parents qui m'ont aidé et soutenu durant toutes ces longues années d'étude.

Nombreuses sont les personnes qui mon apporté leur aide et leur soutien, sans citer leurs noms, je tiens à leurs présenter mes remerciements les plus sincères.



ملخص

تطور شق يعتمد على عدة معايير جوهرية للمواد، مثل الخصائص الهندسية والميكانيكية للهيكل. الأحمال المطبقة هي أيضا معيار يجب أخذها في عين الاعتبار. كل هذه المعايير تؤخذ بعين الاعتبار في كل محاكاة عددية لتطور شبه ثابت للصدع. طريقة العناصر المحدودة في الوقت الحاضر هي أداة قوية، تتوفر بتكاليف معقولة، يتم تقليل وقت البرمجة في حال كان هنالك تحكم في استخدام الكمبيوتر.

هذا العمل البحثي في تطوير برنامج كتب بلغة "++C". هذا البرنامج يسمح لنا بوضع نماذج لتطور الشقوق و حساب الإزاحات، والأجهادات في العقد وقوى الضغط. في النهاية أجرينا أمثلة للتحقق من مصداقية البرنامج من خلال تطبيقات مختلفة للحمولة و تنوع في المساند حيث لاحظنا تقارب مع النتائج التحليلية.

Résumé

L'évolution d'une fissure dépend de plusieurs paramètres intrinsèques aux matériaux, tels que les propriétés géométriques et mécaniques de la structure. Le type des charges appliquées est aussi un facteur important à prendre en considérations. Tous ces paramètres sont pris en considération dans toute simulation numérique de la propagation quasi-statique d'une fissure.

La méthode des éléments finis est de nos jours un outil puissant, disponible et à des couts raisonnables. Le temps de modélisation est désormais réduit avec une bonne prise en main de l'utilisation de l'ordinateur.

Le présent travail de recherche développe un programme en langage « C++ ». Ce programme permet la modélisation de la propagation de fissure ainsi que la détermination des déplacements, les forces axiales dans les nœuds et les contraintes. Des exemples de vérification ont été effectués sous différents types de charges et de conditions aux limites montrant ainsi une convergence avec les résultats trouvés analytiquement.

Abstract

Evolution of a crack depends on several parameters intrinsic to the materials, such as geometrical and mechanical properties of the structure. The type of applied loads is also a factor to take account. All these parameters should be considered in any numerical simulation of quasi-static propagation of a crack.

The finite element method is nowadays a powerful tool, available at reasonable costs. The modelling time is now reduced with a good grip of computer use

This research work develops a program in “C++”. This program allows modelling of crack propagation and determines displacements, axial forces in the nodes and constraints. Examples of verification were performed under different types of loads and boundary conditions and show a tight convergence with analytical results.

NOTATIONS

z : Nombre complexe.

\bar{z} : Conjuguée du nombre z .

$Re Z$ Partie Imaginaire du nombre z .

$Im Z$: Partie Imaginaire du nombre z .

$\psi z, \phi z$: Fonctions de potentiels complexes.

$\phi'z$: La dérivée de la fonction potentielle $\phi(z)$ par rapport à z .

$\phi''(z)$: La dérivée seconde de la fonction potentielle ϕz par rapport à z

θ : Angle d'orientation de la fissure par rapport à l'axe horizontal.

a : longueur de la fissure principale.

σ_{xx} : Contraintes normal dans le sens XX.

σ_{yy} Contraintes normal dans le sens YY.

σ_{xy} Contraintes tangentielles.

u_x : Composante de déplacement dans le sens XX.

u_y : Composante de déplacement dans le sens YY.

ν : Coefficient de poisson.

μ : Module de cisaillement.

J : le jacobéen.

K_I^* : Facteur d'intensité de contraintes normalisé au bout de la fissure principale
en mode I.

K_{II}^* : Facteur d'intensité de contraintes normalisé au bout de la fissure principale
en mode II.

K_I : Facteur d'intensité de contraintes au bout de la fissure principale en mode I.

K_{II} : Facteur d'intensité de contraintes au bout de la fissure principale en mode II.

ε_{ij} : Déformation suivant la direction X_{ij} .

G : Module de cisaillement.

σ_{ij} : Contrainte.

k : Coefficient.

$k=3-4\nu$ Pour une déformation plane.

$k = (1 - \nu)/(1 + 2\nu)$ Pour une contrainte plane.

U : Fonction d'Airy.

$Z(z)$: Fonction Analytique de Westergaard

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 : Les fonctions de forme d'un élément triangulaire.

Liste des Figures

- Figure 1.1: plaque infinie d'épaisseur (e) soumise à des contraintes de traction.
- Figure 1.2: Evaluation graphique de l'énergie mise en jeu lors de l'avancée d'une fissure.
- Figure 1.3 : les modes de rupture.
- Figure 1.4 : État de contrainte en un point.
- Figure 1.5 : *Distribution des champs de contraintes au voisinage de la fissure en coordonnées cartésiennes*
- Figure 1.6. : Vecteur contraintes sur trois facettes orthogonales.
- Figure 1.7 : Tenseur de contrainte σ_{ij}
- Figure 1.8 : Comportement contrainte-déformation.
- Figure 1.9 : Élément de référence.
- Figure 1.10 : Zone d'application de l'élément de Barsoum.
- Figure 1.11: Élément de Barsoum.
- Figure 1.12. : Fonctions de forme de l'élément de Barsoum :
- Figure 2.1: Visualisation du maillage généré sur un domaine rectangulaire.
- Figure 2.2 : Visualisation du maillage généré sur un domaine rectangulaire avec raffinement dans la partie droite
- Figure. 2.3 : Structure à analyser.
- Figure. 2.4 : Interprétation sur le GMSH.
- Figure 3.1: Poutre en console avec charge répartie.
- Figure 3.2: Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la poutre
- Figure 3.3: Déformée de la poutre sous le GMSH.
- Figure 3.4: Déformée sur la face inférieure de la poutre sous le GMSH.

Figure 3.5: Les contraintes de Von Mises sous le GMSH

Figure 3.6: Poutre en console avec charge ponctuelle.

Figure 3.7: Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la poutre.

Figure 3.8: Déformée de la poutre en console avec charge ponctuelle sous le GMSH .

Figure 3.9: Déformée sur la face inferieur de la poutre sous le GMSH.

Figure 3.10: Les contraintes de Von Mises sous le GMSH.

Figure 3.11: Les contraintes de Von Mises sous le GMSH.

Figure 3.12: Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la poutre.

Figure 3.13: Déformée de la poutre biencastré avec charge repartie sous le GMSH.

Figure 3.14: Déformée sur la face inferieur de la poutre sous le GMSH.

Figure 3.15: Les contraintes de Von Mises sous le GMSH.

Figure 3.16: Plaque infinie trouée.

Figure 3.17: Distribution des contraintes autour d'une fissure pour une Plaque trouée chargée.

Figure 3.18: Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la plaque trouée.

Figure 3.19: Distribution de σ_{xx} .

Figure 3.20: Distribution de $\sigma_{\theta}(\theta = \pi/2)$.

Figure 3.21: Quelques valeurs de σ_{θ} près du trou.

Figure 3.22: Distribution de σ_{yy} .

Figure 3.23: Distribution de $\sigma_r(\theta = 3\pi/2)$.

Figure 3.24: Quelques valeurs de σ_r près du Maximum.

Figure 3.25: Contraintes de Von Mises pour la plaque infinie trouée.

Figure 4.1. Exemple illustratif de Poisson.

Figure 4.2. Maillage simple dans poisson.

Figure 4.3. Arête double.

Figure 4.4. Arête double et faces correspondantes.

Figure 4.5 Correspondance nœud-face.

Figure 4.6. Fissure dans Poisson.

Figure 4.7. Résultat du premier exemple.

Figure 4.8. Résultat du second exemple.

Figure 4.9. Loi cohésive type.

Figure 4.10. Ressort entre les doubles nœuds.

Figure 4.11. Système barre.

Figure 4.12. Matrice de raideur locale d'une barre.

Figure 4.13. Représentation de la pointe de fissure.

Figure 4.14. Poisson fissuré sans ressort et avec ressort de raideur $K=1000$.

Figure 4.15. Propagation forcée jusqu'à déchirure totale.

Figure 4.16. Propagation par critère énergétique..

Figure 4.17. Représentation de la pointe de fissure.

Figure 4.18. Fissure de longueur a sur le bord d'une plaque mince infinie.

Figure 4.19. Poisson avec initiation de la fissure à trois endroits différents.

Figure 4.20. Poisson, première configuration.

Figure 4.21. Poisson, deuxième configuration.

Figure 4.22. Poisson, troisième configuration.

Figure 4.23. Essai 3 points.

Figure 4.24. Résultat, Essai trois point.

Liste des Tableaux

Tableau 2.1: Zones géométriques particuliers.

Tableau 4.1 : Calcul de K_I pour une fissure de longueur 0.5m au bord d'une plaque semi finie.

Tableau 4.2 : Calcul de K_I pour une fissure de longueur 1m au bord d'une plaque semi finie.

Sommaires

Remerciements.....	i
Abstract.....	ii
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Synthèse Bibliographique et Généralités

Partie 01 : Mécanique de la rupture

I-1-1) Introduction à la mécanique de la rupture	3
I -1-2) Théorie de la tension superficielle de Griffith pour les matériaux fragiles.....	4
I -1-3) Les Modes de ruptures.....	7
I -1-4) Théorie linéaire élastique de la rupture.....	8
I -1-4-1) Champ de contrainte et de déplacement au voisinage du front d'une fissure	8
I -1-4-1-1) Solution par Westergaard de certains problèmes de fissures dans un plan infini ...	8
I -1-4-1-2) Solution par Sneddon du problème plan de Griffith et du problème d'une fissure circulaire dans un solide infini soumis à une traction uniforme	9
I -1-4-1-3) Forme générale du champ de contrainte au voisinage du front de fissure.....	10
I -1-4-2) Facteurs d'intensités de contraintes.....	14
I -1-4-3) Relation en K_I ET G	15

Partie 02 : Fondements de l'élasticité linéaire

I-2-1) Introduction.....	16
I -2-2) Le tenseur de Cauchy.....	16
I -2-3) Le tenseur des Contraintes	17

I -2-3-1) Contraintes principales	17
I -2-3-2) Contrainte moyenne et déviateur	19
I -2-3-3) Contrainte équivalente	19
I -2-3-3-1) Contraintes équivalente de Von Mises	20
I -2-3-3-2) Contrainte équivalente de Tresca	20
I -2-3-4) Loi de comportement	20
I -2-3-4-1) Définition	20
I -2-3-4-2) Loi de Hooke	21

Partie 03 : Méthode des Éléments Finis

I -3-1) Les éléments finis traditionnels	22
I -3-1-1) L'élément de référence et les fonctions de forme	22
I -3-1-2) La matrice de rigidité	23
I -3-1-3) Les déplacements	24
I -3-1-4) Les contraintes	24
I -3-2) L'élément de Barsoum	25
I -3-2-1) La matrice de raideur locale	26

Chapitre II : Les Outils Nécessaires Pour L'élaboration du Code de Propagation de Fissure

II-1 Introduction.....	29
II-2) Les outils nécessaires	29
II-3) Etapes de résolution	33

Chapitre III : Résultats et validation du code de propagation de fissures

III-1 Introduction.....	37
III-2) Validation des déplacements	37
III-2-1) La poutre en console avec charge répartie	37
III-2-2) La poutre en console avec charge ponctuelle.....	41
III-2-3) La poutre bi-encastée avec charge répartie.	44
III-2-4) Conclusion.....	47
III-3) Validation des contraintes.....	48
III-3-1) La plaque trouée.....	48
III-3-2) Conclusion	53

Chapitre IV : Vers la propagation

IV-1 Introduction.....	54
IV-2 Les doubles nœuds	54
IV-3 Zones cohésives	60
IV-4 Vers un code dynamique	65
IV-5 L'énergie de déformation	67
IV-6 Les coefficients d'intensité de contrainte	69

Chapitre V : Conclusion Générale et Perspectives

V-1 Conclusion.....	76
V-2 Perspectives.....	77

Références Bibliographiques	78
--	----

ANNEXES

Annexe A.....	80
---------------	----

Annexe B.....	83
---------------	----

INTRODUCTION GENERALE

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré.

L'évolution d'une fissure dépend de plusieurs paramètres intrinsèque aux matériaux, tels que les propriétés géométriques et mécaniques de la structure, ou extrinsèques comme l'étendue de cette fissures ou la nature des charges appliquées. Tous ces paramètres doivent être pris en compte dans la simulation numérique, de façon à permettre l'étude de la propagation quasi-statique d'une ou de plusieurs fissures.

L'apparition de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la mécanique de la rupture d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions plus précises à des problèmes plus complexes, alors une multitude de méthodes permettant de calculer les facteurs d'intensité de contraintes, le taux de restitution d'énergie, ou encore de découpler les différents modes de rupture.

A coté des expériences de ruptures, qui permettent de connaître la résistance des matériaux, la simulation numérique apparait comme un outil de tout premier choix, elle permet de réaliser autant d'expérience que voulu, et de modifier les paramètres physiques, dans les seules limites du logiciel. Ainsi la simulation numérique permet de réduire le nombre d'expériences nécessaires. Elle permet aussi parfois de faire des expériences qui seraient trop couteuse, impossible à réaliser, ou même dangereuses.

On pourra alors se poser les questions suivantes : quand la fissure va t elle se propager, puis (si le chargement ou la géométrie de la structure n'est pas symétrique) dans quelle direction, et en fin, va-t-on aboutir à une propagation stable ou instable ?

Objectif de la recherche

Pour cette étude de recherche, les différents chapitres composant ce mémoire sont répartis comme suit :

Le premier chapitre consiste en une synthèse bibliographique sur le sujet et va nous permettre de mieux aborder notre recherche et surtout de bien cerner le sujet. Ce chapitre se subdivise en trois parties à savoir :

- Généralités sur la Mécanique de la rupture, tel que la théorie de la tension superficielle de Griffith, les modes de rupture et les champs de contraintes ainsi que les facteurs d'intensité de contraintes, et finalement la relation qui existe entre le facteur d'intensité de contraintes et le taux de restitution d'énergie.
- La deuxième partie, consiste au notions et fondements de l'élasticité linéaire.
- Quant à la troisième partie, développe la Méthode des éléments finis.

Le deuxième chapitre, présente les outils nécessaires pour l'élaboration du code de propagation de fissure et ensuite on donne les étapes de résolution.

Les résultats aboutis du code en élasticité linéaire ainsi que leurs validations par des exemples analytiquement connus font parties du troisième chapitre.

Le chapitre quatre, vise la propagation de fissure par l'utilisation des éléments à double nœuds, incorporés dans notre code.

Sur la base des résultats ainsi trouvés, une conclusion générale, des recommandations et des perspectives pour des travaux futurs, fait objet du cinquième chapitre.

Le mémoire se termine par des références bibliographiques et annexes.

Chapitre I

Synthèses Bibliographique Et Généralités

Partie 1

Mécanique de la rupture

1^{ère} Partie : Mécanique de la rupture

I-1-1) Introduction à la mécanique de la rupture

Les règles de calcul des pièces de machines ou de constructions ont le plus souvent pour objet de prévenir les déformations importantes et sont en général fondées sur la théorie de l'élasticité et la R D M. Celle-ci retient des solutions particulières de problèmes d'élasticité, qui résultent de conditions aux limites bien définies ; dont le principe de Saint Venant permet de s'affranchir en pratique.

Par ce principe on admet que, à une certaine distance des zones d'application des efforts, les champs de contrainte et de déplacement ne dépendent qu'assez peu des conditions d'application et qu'on peut remplacer les efforts appliqués par d'autres qui leur sont strictement équivalents. On choisit donc un système simple d'efforts appliqués statiquement équivalent au système réel, et on ignore les singularités et les fortes concentrations dans les régions d'application des efforts réels.

Des 1914 dans la revue de Métallurgie de très profondes observations sur la rupture ont été publiées. A la réflexion, il apparaît que les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent prévoir la rupture puisqu'ils supposent l'absence de tout défaut.

La mécanique de la rupture "MDR" considère les matériaux comme continus au sens macroscopique du terme, mais admet l'existence de fissures, c'est à dire des surfaces de discontinuité des déplacements.

C'est Griffith [1] en 1920 qui a énoncé ce principe. Il a aussi formulé les hypothèses de la théorie dite linéaire : comportement du solide élastique est linéaire et l'énergie de séparation égale au produit d'une constante du matériau par la surface de fissure créée. Griffith admettait que cette constante était une tension superficielle ; d'autres hypothèses ont été faites ultérieurement : dissipation par déformation plastique en avant du front de fissure (Irwin et Orowan) et Forces de cohésion atomique

(Barrenblatt [2] 1959).

MDR : admet que toute l'énergie libérée par l'extension d'une fissure est absorbée par la création de nouvelles surfaces. Elle calcule alors le seuil d'instabilité d'une fissure en écrivant que, dans un petit accroissement virtuel, l'énergie potentielle totale, somme de l'énergie potentielle du solide et de l'énergie de formation de la fissure par séparation est stationnaire en passant par un minimum, au delà de ce seuil, une extension libre plus d'énergie qu'elle n'en absorbe et la fissure est instable.

En 1957 Irwin [3] avait montré que la théorie ne pouvait être parfaite et qu'il fallait prévoir une correction pour tenir compte de la déformation plastique au voisinage du front de fissure.

En 1971-72 Bueckner [4] et Rice [5] mirent indépendamment en évidence les propriétés générales des fonctions de poids, qui ne dépendent que de la géométrie, et réduisent le calcul des facteurs d'intensité de contrainte à des quadratures. La connaissance de ces fonctions permet d'éviter la répétition de calculs numériques complets pour chaque cas de chargement.

I-1-2) Théorie de la tension superficielle de Griffith pour les matériaux fragiles

Griffith [1] a traité le problème d'une plaque infinie d'épaisseur (e) soumise à deux contraintes à l'infini (figure 1-1); il y provoque la formation d'un évidement elliptique très allongé en neutralisant les contraintes sur le contour de l'ellipse. Les contraintes dans une telle plaque avaient été auparavant calculées par Inglis. Il considère l'énergie de déformation élastique W de la plaque et calcule la variation de celle-ci quand on pratique l'évidement elliptique, ou un accroissement de celui-ci, les contraintes à l'infini restant appliquées; il trouve :

- En déformation plane :

$$W_1 - W_0 = \frac{\pi(1-\nu^2)}{E} e a^2 \sigma_y^2 + 0[b(\sigma_y - \sigma_x)]^2 \quad (1.1)$$

- En contrainte plane :

$$W_1 - W_0 = \frac{\pi}{E} e a^2 \sigma_y^2 + 0[b(\sigma_y - \sigma_x)]^2 \quad (1.2)$$

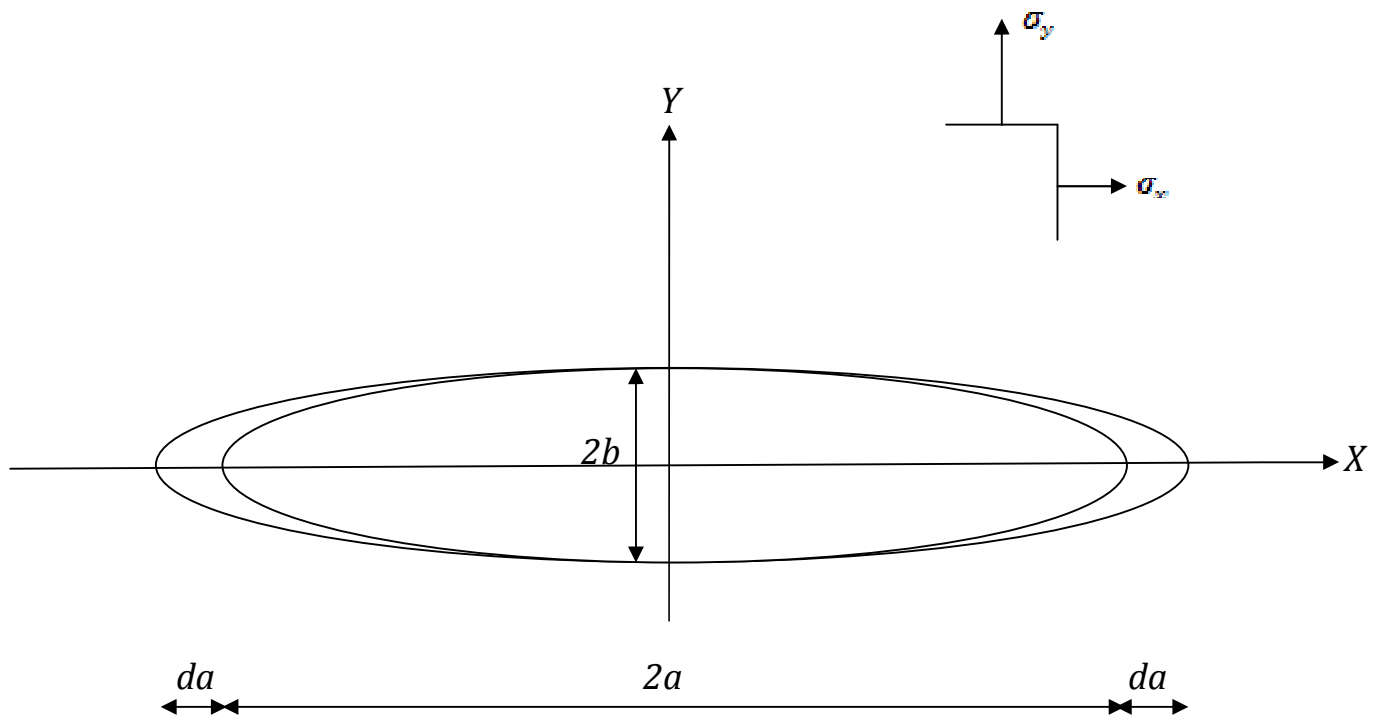


Figure 1-1 : plaque infinie d'épaisseur (e) soumise à des contraintes de traction

Le petit axe b et la contrainte σ_x ne figurent pas dans le terme principal.

Si b tend vers zéro l'évidement devient une fissure aiguë. Il admet comme établie par les théories de la matière l'existence d'une tension superficielle γ pour les solides comme pour les liquides.

Dans un accroissement virtuel d'une fissure, sans travail extérieur, le travail nécessaire pour la création de nouvelles surfaces, deux à chacune des deux extrémités, devient l'énergie superficielle :

$$dS = 2 \times 2 \gamma e da \quad (1.3) \quad (2 \times 2 \text{ puisqu'il ya deux extrémités et deux faces})$$

Il pose comme principe, que l'équilibre énergétique sera atteint lorsque l'énergie potentielle de système sera minimale :

$$w = w_0 - S \quad (1.4)$$

Où $w_0 - S$ est définie comme une constante.

Ce principe peut être exprimé par :

$$d(w - s) = 0 \quad (1.5)$$

$$a\sigma_y^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{2\gamma}{\pi} \quad (1.6)$$

- Au dessous de cette valeur critique de $a\sigma_y^2$ la fissure ne peut pas croître.
- Au delà de cette valeur $dW > dS$ la fissure est instable.

La contrainte aux extrémités du grand axe devait être élevée :

$$\sigma_{Max} = 2\sigma_y \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (1.7)$$

Avec : $\rho = \frac{b^2}{a}$ rayon de courbure, qui peut être considéré comme petit à l'extrémité du grand axe.

Pour le problème de Griffith, comportant deux extrémités parfaitement symétriques :

$$G = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial a} = -\frac{1}{2e} \frac{\partial P}{\partial a} \quad (1.8)$$

G est bien une force généralisée qui a pour déplacement correspondant à une surface, dans un problème plan, tel que le problème de Griffith, G est indépendante de l'épaisseur qui se trouve dans P et A . G est la grandeur caractéristique de la tendance à l'extension de la fissure.

Soit une éprouvette fissurée soumise à une force F dont le point d'application se déplace de δ lorsqu'on fait croître lentement la force F (figure 1- 2). Les aires du diagramme F , δ donnent la variation de l'énergie potentielle :

$$dP = dU - dT_e \quad (1.9)$$

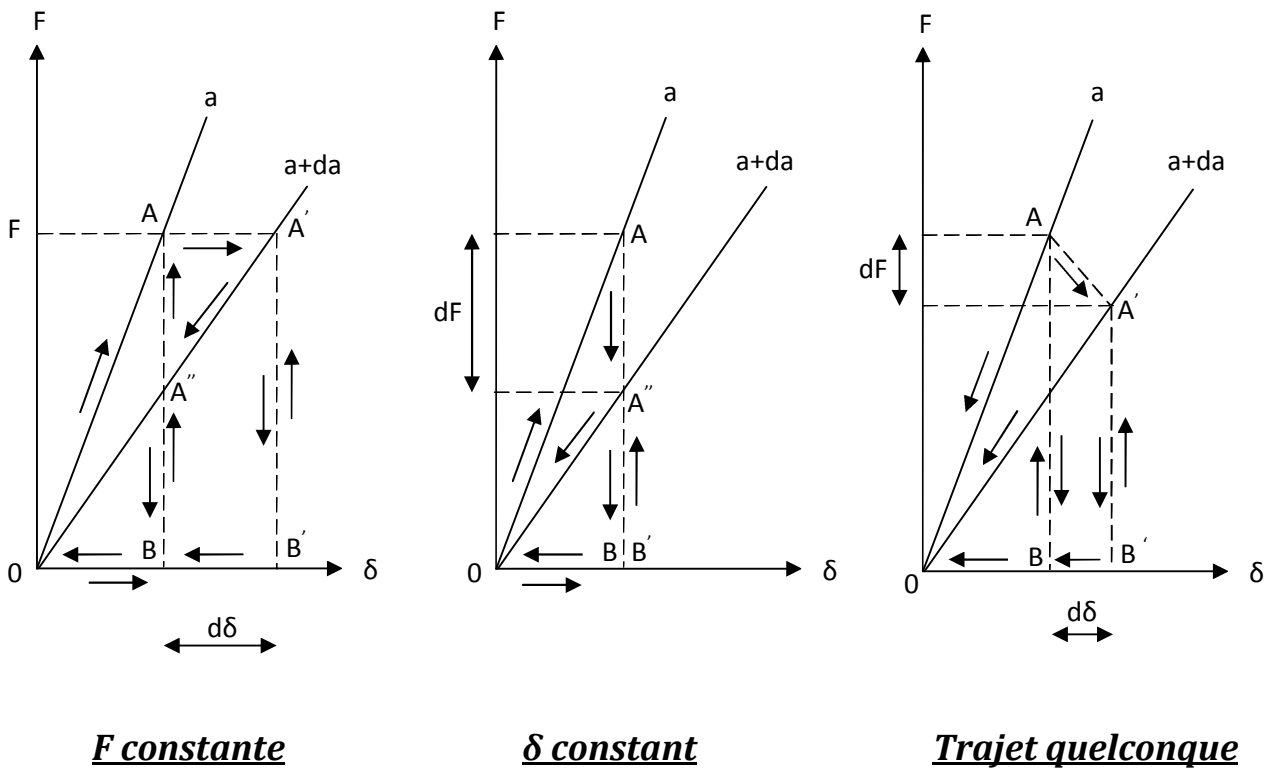


Figure 1-2 : Evaluation graphique de l'énergie mise en jeu lors de l'avancée d'une fissure

Dans une extension virtuelle de la fissure de $2a$ à $2(a+da)$, et dans les trois cas de chargement :

- Avec une force appliquée constante, c'est-à-dire en maintenant les forces extérieures :

$$dP|_{F=cste} = \text{tri } OB'A' - \text{tri } OBA - \text{rect } BB'AA'$$

$$dP|_{F=cste} = -\text{tri } OAA' = -1/2 Fd\delta = -dT_e/2 \quad (1.10)$$

$$= -dU|_{\delta=cste} + 0(d\delta^2)$$

La définition de Griffith qui considère que l'énergie de déformation élastique W (appelée ici U) est compatible avec cette définition puisque :

$$dW = \text{tri } OB'A' - \text{tri } OBA$$

$$= \text{trap } BB'A'A' - \text{tri } OA''A$$

$$= \text{rect } BB'AA' - \text{tri } OA'A \quad (1.11)$$

$$= -1/2 Fd\delta = -dP|_{F=cste} = dT_e/2$$

- Avec le point d'application de la force extérieure bloqué, donc sans travail extérieur :

$$\begin{aligned} dP|_{\delta=cste} &= \text{tri OBA}'' - \text{tri OBA} \\ &= -\text{tri OA}'' A = 1/2 \delta dF = dU|_{\delta=cste} \end{aligned} \quad (1.12)$$

- Pour un trajet de chargement quelconque entre les deux précédents, on voit encore facilement que :

$$\begin{aligned} dP &= -\text{tri OA}' A \\ &= dP|_{F=cste} + 0(d\delta^2) = -dU|_{\delta=cste} + 0(d\delta^2) \\ &= dU|_{\delta=cste} + 0(d\delta^2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Le trajet AA' n'intervient qu'au deuxième ordre et ceci permet de calculer G dans tout problème en maintenant δ constant en tout point auquel une force extérieure est appliquée, donc sans travail des forces extérieures, alors que Griffith avait traité son problème en maintenant le chargement extérieur.

Il faut noter aussi que dans cette hypothèse linéaire, le raisonnement simple fait sur une éprouvette en traction peut être généralisé à un chargement quelconque, en effet il existe toujours dans un petit élément de volume des relations linéaires entre les paramètres de chargement, les contraintes et les déformations.

Pour le problème de Griffith, à chaque extrémité :

$$G = - \frac{1}{2e} \frac{\partial U}{\partial a} \Big|_{\delta=cste} = \frac{1}{2e} \frac{\partial W}{\partial a} \Big|_{F=cste} + 0(dF) \quad (1.14)$$

On définit aussi l'énergie potentielle totale par la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie mise en jeu par la séparation. Avec l'hypothèse de Griffith ce sera :

$$P_T = P + 4\gamma ea \quad (1.15)$$

$4\gamma ea$ Pour ce problème à cause des deux extrémités, le seuil d'instabilité donné par $dP_T=0$ conduit à exprimer l'équation par $G_C = 2\gamma$

I-1-3) Les modes de ruptures

Pour une fissure de géométrie régulière, on définit localement trois modes de rupture :

-Mode I (mode d'ouverture)

Mode d'ouverture dans le quelle les deux lèvres de la fissure s'écartent (figure 1-3a).

-Mode II (glissement dans le plan)

C'est le mode de cisaillement dans le quelle les lèvres glissent l'une sur l'autre dans la direction perpendiculaire au fond de la fissure (figure 1-3b).

-Mode III (glissement perpendiculaire au plan)

C'est le mode de cisaillement antiplan dans le quelle les lèvres glissant l'une sur l'autre suivant la direction du fond de la fissure (figure 1-3c).

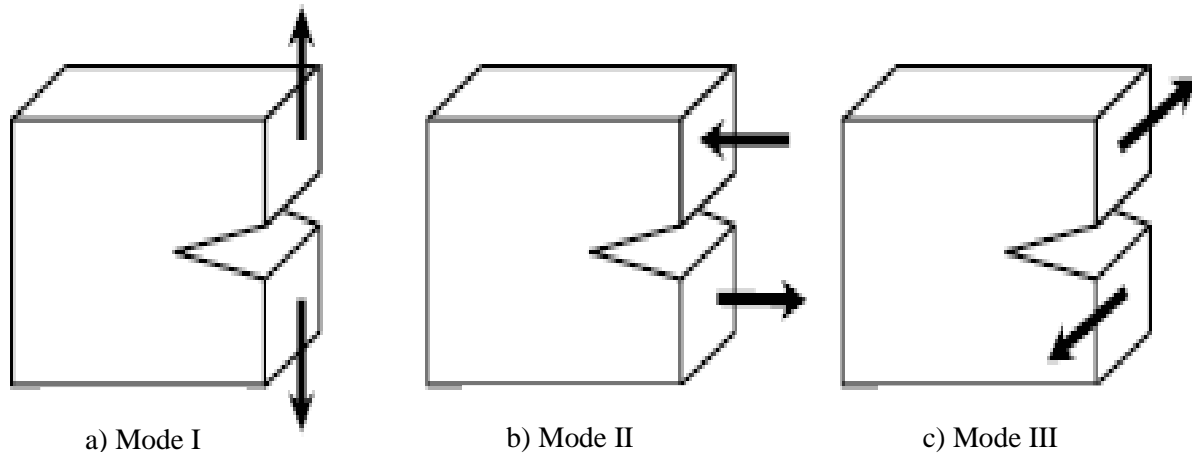


Figure 1.3 : les modes de rupture

I-1-4) Théorie linéaire élastique de la rupture

I-1-4-1) Champ de contrainte et de déplacement au voisinage du front d'une fissure

Il faut noter, que la théorie linéaire élastique se limite au premier terme des développements limités, et admet au voisinage du front de fissure des contraintes, donc des déformations infinies que l'élasticité linéaire rejette physiquement, des contraintes infinies ne sont pas possible. En effet, à l'intérieur de la zone singulière, il se développée une zone de déformation plastique, et tant que celle-ci n'est pas trop développée, la théorie linéaire apparait comme une approximation justifiée par l'expérience avec une dispersion qui peut atteindre ± 10 à 15%. Un problème d'élasticité plane peut toujours être résolu par une fonction dite d'Airy, dont les contraintes sont les dérivées secondes, et comme celle-ci est connue à l'aide de deux fonctions analytiques, certains problème symétriques peuvent être résolus à l'aide d'une seule fonction analytique dite de Westergaard et d'une constante.

I-1-4-1-1) Solution par Westergaard de certains problèmes de fissures dans un plan infini

En 1939 Westergaard [6] publia une méthode de solution des problèmes d'élasticité plane comportant des singularités, valable sous certaines conditions de symétrie, de géométrie et du chargement, applicable à des problèmes de fissures. Pour ces problèmes, la fonction d'Airy (voir l'annexe A pour plus de détails) est déterminées par une fonction analytique $Z(z)$ et une constante.

Avec les notations de Westergaard $\bar{Z}, \bar{\bar{Z}}, \dots, Z', Z'', \dots$ sont les primitives et dérivées successives de $Z(z)$ respectivement.

$$U(x, y) = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' + A$$

Les champs de contraintes sont formulés comme suit (voir annexe B) :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' + A \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' - A \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z' \end{cases} \quad (1.16)$$

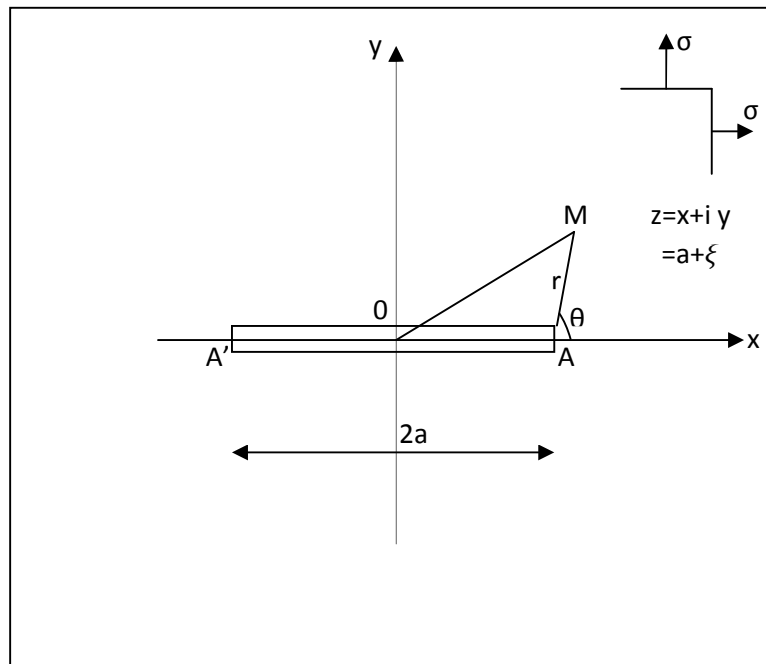


Figure 1.4 : état de contrainte en un point

- Tôle fissurée à l' infini à deux tractions égales, cas particulier de Griffith :

$$Z = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^2}}, A = 0 \quad (1.17)$$

- Tôle fissurée indéfinie soumise à une pression uniforme à l'intérieur de la fissure :

$$Z = \frac{P}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^2}} - P, A = 0 \quad (1.18)$$

I-1-4-1-2) Solution par Sneddon du problème plan de Griffith et du problème d'une fissure circulaire dans un solide infini soumis à une traction uniforme

Sneddon [7] reprend le problème de Griffith à partir de la solution de Westergaard et traite le problème d'une fissure circulaire dans un solide infini soumis à une traction normale de révolution. Pour le problème d'un plan fissuré soumis à l' infini à une traction isotrope,

Sneddon donna par un développement limité au voisinage du front de fissure les expressions des premiers termes des contraintes, et montra leur singularité.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \sigma_{yy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \tau_{xy} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \end{cases} \quad (1-19)$$

La fissure s'ouvrait en une petite ellipse, et donna les éléments pour le calcul des premiers termes des déplacements, petits comme $r^{1/2}$ au voisinage du front de fissure.

Pour la fissure circulaire, il résolut les équations de l'élasticité par la transformation de Fourier, et donna les expressions des premiers termes des contraintes dans un trièdre lié à la normale et à la tangente :

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \sigma_{zz} = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \sigma_{tt} = 2\nu \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \tau_{zn} = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \end{cases} \quad (1.20)$$

Il donna aussi les éléments nécessaires au calcul de l'ouverture de la fissure.

Sneddon nota la similitude des expressions (1.19) et (1.20). Il remarqua aussi pour la fissure circulaire l'existence de la déformation plane dans le plan normal, révélée par :

$$\sigma_{tt} = \nu(\sigma_{nn} + \sigma_{zz}) \quad (1.21)$$

I-1-4-1-3) Forme générale du champ de contrainte au voisinage du front de fissure

Irwin cherchait une expression du champ de contrainte au voisinage du front de fissure (figure 1.4), en admettant qu'on pourrait tenir compte de la zone plastique par accroissement fictif de la fissure.

Dans les expressions des contraintes singulières et des déplacements données par Sneddon, les variables se séparent en trois termes :

- Un terme rassemblant les paramètres de chargement et de géométrie, qu'il appela Facteur d'intensité de contrainte et note par "K".

$K = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a}$ Pour la fissure circulaire.

$K = \sigma \sqrt{\pi a}$ Pour la fissure de Griffith.

On développant la solution de Westergaard et si on prend la fonction $Z(z)$ telle que :

$$Z(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}, A = 0 \quad (1.22)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \sigma_{yy} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' - A = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z' = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \end{cases} \quad (1.23)$$

Qui sont les mêmes expressions de Sneddon.

– Remplaçant $\sigma\sqrt{\pi a}$ par K, Irwin admet donc que les expressions suivantes du champ singulier :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{K}{\sqrt{2\pi\zeta}} \\ \sigma_{ij} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi\zeta}} F_{ij} \quad \text{avec } i, j = x, y \\ u_i &= K \frac{2r}{\pi} g_i \end{aligned} \quad (1.24)$$

K dépend du solide, de la fissure et du chargement, sont très générales.

Le facteur d'intensité de contrainte (FIC) K généralise les paramètres déjà rencontrés :

$\sigma\sqrt{\pi a}$ de Griffith, $\frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a}$ de la fissure circulaire.

Pour le problème plan d'une fissure soumise à une contrainte d'ouverture, les premiers termes des contraintes sont alors :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0 \left[\sqrt{\frac{r}{a}} \right] \end{cases} \quad (1.25)$$

Et ceux des déplacements :

$$\begin{cases} u_x = \frac{K}{4\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(k-1) \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ u_y = \frac{K}{4\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\text{Avec : } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad (1.27)$$

- En déformation plane :

$$\begin{cases} \frac{k-1}{4\mu} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \\ \frac{k+1}{2\mu} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \end{cases} \quad (1.28)$$

- En contrainte plane :

$$\begin{cases} k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \\ \frac{k-1}{4\mu} = \frac{1-\nu}{E} \\ \frac{k+1}{2\mu} = \frac{2}{E} \end{cases} \quad (1.29)$$

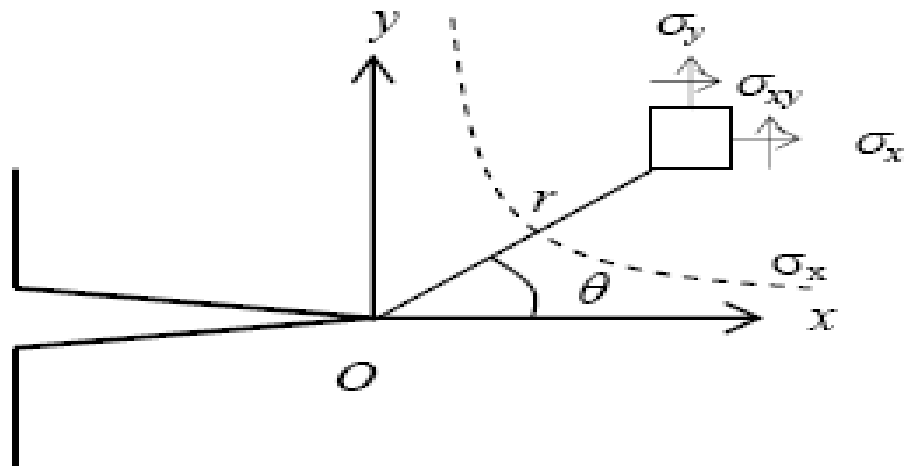


Figure 1.5 : Distribution des champs de contraintes au voisinage de la fissure en coordonnées cartésiennes

Dans la théorie, les fissures sont planes et se propagent dans leur plan. Chaque mode est caractérisé par un certain nombre de symétrie dans les déplacements et dans les contraintes, ainsi que les différentes symétries présentées aux équations:

Model 1 :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2E} \left\{ \frac{r}{2\pi} \right\}^{1/2} \begin{Bmatrix} (1 + \nu) \left[(2k - 1) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ (1 + \nu) \left[(2k + 1) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \quad (1.32)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2E} \left\{ \frac{r}{2\pi} \right\}^{1/2} \begin{Bmatrix} (1 + \nu) \left[(2k - 1) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ (1 + \nu) \left[-(2k + 1) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \quad (1.33)$$

Mode2 :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \left[-3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{Bmatrix} \quad (1.35)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2E} \left\{ \frac{r}{2\pi} \right\}^{1/2} \begin{Bmatrix} (1 + \nu) \left[(2k + 3) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ -(1 + \nu) \left[(2k - 3) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2E} \left\{ \frac{r}{2\pi} \right\}^{1/2} \begin{Bmatrix} (1 + \nu) \left[-(2k - 1) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ (1 + \nu) \left[-(2k + 1) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

Mode3 :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{xy} = \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{cases} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.39)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{cases} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.40)$$

$$\begin{cases} u_x = u_y = u_r = u_\theta = 0 \\ u_z = \left(\frac{4K_{III}}{E}\right) \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\right) \left[(1+\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \end{cases} \quad (1.41)$$

I-1-4-2) Facteurs d'intensités de contraintes

Introduits par G.R. Irwin [3] en 1957, les facteurs d'intensité de contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.42)$$

Où σ_{ij} sont les contraintes au bout de la fissure.

Pour le mode I le facteur d'intensité de contrainte s'écrit comme suit :

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} \quad (1.43)$$

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} = \sigma_0 \sqrt{2\pi a} \quad (1.44)$$

I-1-4-3) La relation en K_I ET G

On voit qu'en mode I, il est possible de trouver la relation entre K et G en évaluant le travail nécessaire pour refermer une fissure de longueur $a+\Delta a$. Le résultat obtenu est :

$$G = \frac{K_I^2(k+1)}{8\mu} \quad (1.45)$$

En contrainte plane :

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (1.46)$$

En déformation plane :

$$G = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{8\mu} \quad (1.47)$$

Partie 2

Fondements de l'élasticité linéaire

Deuxième Partie : Fondements de l'élasticité linéaire

I-2-1 Introduction

Les physiciens ont depuis des siècles tenté de mettre en équation le comportement de la matière. Plus ou moins générale, précise ou robuste. Ces modélisations s'appuient sur la représentation du phénomène de déformation à l'aide de champs vectoriels et des tenseurs. Ceux-ci décrivent en particulier la déformation de l'objet ainsi que les contraintes internes qu'il subit. Des lois de comportement viennent ensuite lier les contraintes et la déformation qui en résulte.

I-2-2 Le tenseur de Cauchy

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir d'une position initiale, qui est généralement la position de repos de l'objet dans la quelle aucune force n'est appliquée à l'objet.

On définit alors le champ vectoriel du déplacement, généralement noté u , qui est simplement pour chaque point le vecteur reliant sa position au repos à sa position actuelle dans la configuration déformée. En chaque point, et à chaque instant on définit donc : $u_t = p_t - p_0$ ou l'indice t désigne le temps et p la position du point dans un repère Galiléen fixe. Le gradient de ce déplacement est donné par l'expression (1.48).

$$A = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Cette matrice A peut être séparée en deux matrices 3×3 comme suit :

$$A = \nabla u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t) + \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^t) = E + R \quad (1.49)$$

Où E est une matrice symétrique tandis que R est antisymétrique, liée au rotationnel « Rot u » du champ de déplacement et qui représente les déformations du matériau, c'est le tenseur de déformation ε .

Le tenseur de rotation R ne sera pas utilisé dans le présent modèle. On a donc :

$$\varepsilon_{cauchy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial ux}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial ux}{\partial y} + \frac{\partial uy}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial ux}{\partial z} + \frac{\partial uz}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial uy}{\partial x} + \frac{\partial ux}{\partial y} \right) & \frac{\partial uy}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial uy}{\partial z} + \frac{\partial uz}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial uz}{\partial x} + \frac{\partial ux}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial uz}{\partial y} + \frac{\partial uy}{\partial z} \right) & \frac{\partial uz}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Ou bien : $(\varepsilon_{cauchy})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ (1.51)

I-2--3 Le tenseur des Contraintes

I-2-3-1 Contraintes principales

L'état de contrainte d'un corps cubique de dimension unitaires, est représenté par le tenseur de contrainte (σ_{ij}), appliqué d'une façon arbitraire sur chaque face respectivement par les vecteurs unitaire \vec{n} , de même façon il existe sur trois facettes orthogonales normales aux axes cartésiens des vecteurs contraintes \vec{T}_1, \vec{T}_2 et \vec{T}_3 :

- Une composante normale σ_{ii} .
- Deux composantes tangentielles σ_{ij} ($i \neq j$).

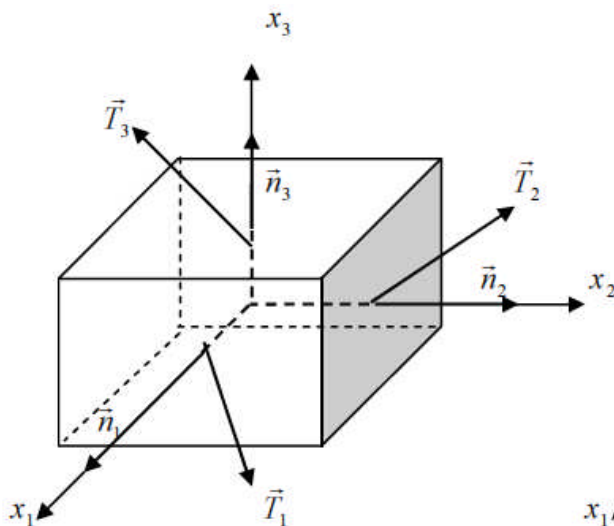


Figure 1-6 : Vecteur contraintes sur trois facettes orthogonales

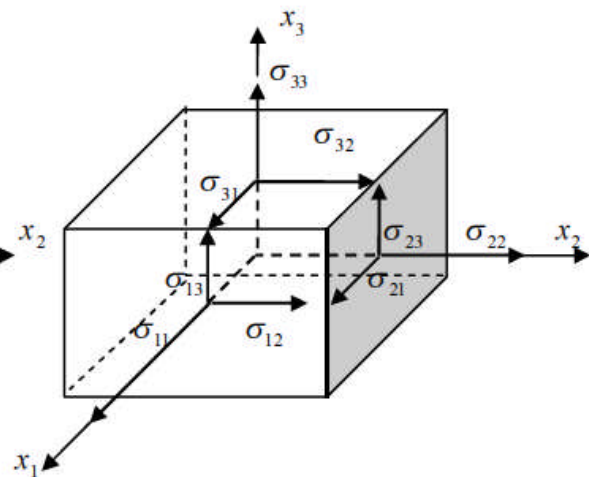


Figure 1-7 : Tenseur de contrainte σ_{ij}

En conséquence le vecteur de contrainte \vec{T} donné par

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \quad (1.52)$$

Dans le cas où les vecteurs de contrainte \vec{T} agissent dans la même direction avec les vecteurs unitaires \vec{n} , ces derniers deviennent :

$$T_i = \lambda n_j \quad (1.53)$$

Où λ sont des constantes qui représentent physiquement les contraintes normales de chaque facette du cube et qui peuvent être déterminés en utilisant la relation suivante :

$$\sigma_{ij}n_i - \lambda n_j = 0 \quad (1.54)$$

A l'aide de la règle de substitution d'un indice attaché au symbole de Kronecker donc :

$$\sigma_{ij}n_i - \lambda n_j = \sigma_{ij}n_i - \lambda \delta_{ij}n_i \quad (1.55)$$

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_i = 0 \quad (1.56)$$

Les solutions non triviales de ce système linéaire homogène sont les cosinus directeur n_i et s'obtiennent en annulant le déterminant :

$$\text{Det}|\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \quad (1.57)$$

Soit explicitement

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.59)$$

Le développement du déterminant fournit l'équation caractéristique cubique suivante :

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 \quad (1.60)$$

Donc la solution de l'équation précédente sont les trois contraintes principales et les coefficients I_1 , I_2 et I_3 qui sont appelés les invariants de contraintes.

$$I_1 = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \quad (1.61)$$

$$I_3 = \text{Det}(\sigma_{ij})$$

I-2-3-2 Contrainte moyenne et déviateur

Le tenseur des contraintes de Cauchy est décomposé en une partie dite sphérique et une partie dite déviatorique sous la forme :

$$\sigma = S + \sigma_m I \text{ avec } \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (1.62)$$

Où I est le tenseur identité. σ_m est appelée contrainte moyenne et S le tenseur déviateur des contraintes de trace nulle et symétrique.

I-2-3-3 Contrainte équivalente

Il est intéressant, en résistance des matériaux, de comparer les contraintes obtenues sur une structure (après mesures ou par calcul) aux caractéristiques des matériaux qui les constituent. Pour cela, il est commode d'utiliser des scalaires représentatifs du tenseur de contrainte, qui sont indépendants du repère dans le quel on travaille. Comme tout tenseur euclidien de dimension 2 dans un espace de dimension 3, le tenseur déviateur des contraintes de Cauchy possède trois invariants souvent notés J_1 , J_2 et J_3 qui peuvent être définis comme

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{tr}|S| = 0 \\ J_2 &= \frac{1}{2}(S.S) \\ J_3 &= \frac{1}{3}(S.S.S) \end{aligned} \quad (1.63)$$

Dans le cas du tenseur des contraintes (et non du déviateur), ces invariants sont notés I_1 , I_2 et I_3 tel que :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \\ I_3 &= \text{Det}(\sigma_{ij}) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Les deux contraintes équivalentes les plus utilisées sont celles de Von Mises et Tresca.

I-2-3-3-1 Contraintes équivalente de Von Mises

La contrainte équivalente de Von Mises est uniquement en fonction du second invariant du déviateur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (1.65)$$

Dans un repère orthonormé, elle s'écrit directement en fonction des composantes du déviateur ou du tenseur des contraintes sous la forme suivante:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} S_{ij} S_{ji}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{ji} - \frac{1}{2} \left(\sum_k \sigma_{kk} \right)^2} \quad (1.66)$$

I-2-3-3-2 Contrainte équivalente de Tresca

La contrainte équivalente de Tresca est définie en fonction des contraintes principales sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \text{Sup}(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|) \quad (1.67)$$

Elle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir s'écrire simplement en fonction des composantes du tenseur des contraintes. Pour l'obtenir, il faut diagonaliser ce tenseur. Dans un programme numérique, son estimation est donc plus coûteuse que celle de la contrainte équivalente de Von Mises.

I-2-3-4 La loi de comportement

I-2-3-4-1 Définition

La loi de comportement relie les deux tenseurs définis précédemment (déformations et contraintes). Pour un ressort par exemple la contrainte est linéairement liée à la déformation.

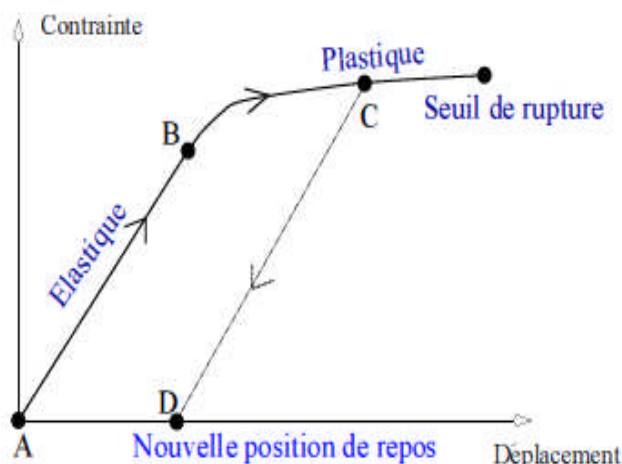


Figure 1-8 : Comportement contrainte-déformation

La loi linéaire entre le point A et B est :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.68)$$

Avec E est une fonction linéaire.

I-2-3-4-2 La loi de Hooke

Pour un grand nombre de solides, la mesure de la déformation est proportionnelle à la charge. Ce qui signifie que lorsque la charge augmente alors la mesure de déformation augmente et lorsque la charge diminue la mesure de la déformation diminue au même rythme. De la même façon lorsque la charge est réduite à zéro la déformation disparaît complètement.

La forme générale de la loi s'exprime comme suit : chaque un des composantes de l'état de contraintes en un point est une fonction linéaire des composantes de l'état de déformation en ce point donc il ya liaison directement entre les contraintes et les déformations.

Mathématiquement la loi est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{kl} = C_{klmn}e_{mn} \quad (1.69)$$

Avec : - $C_{k,l,m,n}$ sont des constantes élastique au nombre de 81(3x3x3x3).

- $k,l,m,n=1,2,3$.

En pratique, la loi linéaire introduite précédemment est souvent très générale et peut être simplifiée. Si l'on considère que le matériau est isotrope, c'est-à-dire qu'il a le même comportement dans toutes les directions alors des raisons de symétrie font que parmi les 36 coefficients, deux seulement sont indépendant. La loi de comportement se simplifie grandement et peut s'écrire :

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon)I_3 + 2\mu\varepsilon \quad (1.70)$$

Ou I_3 est la matrice identité et tr la trace de la matrice. λ et μ sont les constantes de Lamé.

Partie 3

Méthode des éléments finis

Troisième Partie : Méthode des éléments finis

I-3-1 Les éléments finis traditionnels

I-3-1-1 L'élément de référence et les fonctions de forme

Pour simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence qui est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence (ξ, η) qui peut être transformé en chaque élément réel (x, y) par une transformation géométrique comme dans le cas d'un triangle :

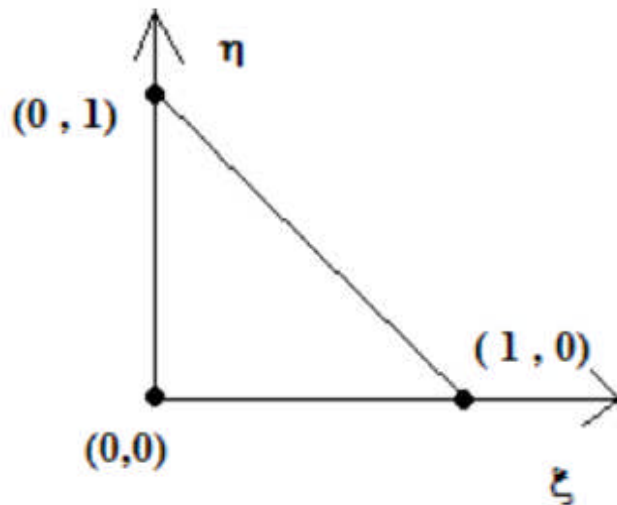


Figure 1-9 : *Elément de référence*

En élasticité linéaire, dans le cas d'un élément triangulaire on a trois fonctions de forme, chacune de ces trois fonctions est liée à des sommets de l'élément de référence. Elle est égale à un (1) au sommet et zéro(0) aux deux autres, comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_1 = 1 - \xi - \eta \\ \Phi_2 = \xi \\ \Phi_3 = \eta \end{cases} \quad (1.71)$$

Avec :

$$\begin{cases} \xi + \eta \leq 1 \\ \xi \geq 0 \\ \eta \geq 0 \end{cases} \quad (1.72)$$

Cet élément est isoparamétrique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas lieu de distinguer les fonctions utilisées pour la transformation de coordonnées et les fonctions de forme utilisées pour l'approximation dans l'élément.

I-3-1-2 La matrice de rigidité

Pour calculer la matrice de rigidité globale il faut dans un premier temps commencer par le calcul de la matrice de rigidité locale pour chaque élément composant le maillage. une fois toutes les matrices de rigidité sont calculées, on passe à l'assemblage de ces matrices pour construire la matrice de rigidité globale.

La matrice de rigidité locale sera une matrice de taille (6x6) puisque on travaille avec des éléments triangulaire à trois nœuds avec deux degré de liberté pour chaque nœud (deux translations suivant x et y), donc la taille de la matrice de rigidité globale sera de (2 x nombre de nœud) x (2 x nombre de nœud).

La matrice de rigidité locale sera construite comme suit :

$$K_{ij} = \int_V [B] [H] [B]^T dV \quad (1.73)$$

Pour réaliser cette intégration, il faut recourir à une technique d'intégration numérique sur l'élément parent, on a choisit la méthode de Gauss.

Comme on travaille en élasticité linéaire, un seul point de Gauss sera nécessaire, il se trouve au centre de gravite de l'élément de référence, c'est-à-dire (1/3,1/3) et son poids vaut 0.5, alors l'équation précédente devient :

$$[K] = 0.5[B][H][B]^T \det J \quad (1.74)$$

$$\text{Avec : } J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

[B] : Matrice de déformation de l'élément finis.

[H] : Matrice qui caractérise le matériau : est donnée par

$$H = \frac{E}{(1 + \nu)e_2} \begin{pmatrix} e_1 & \nu & 0 \\ \nu & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

Ou : - $e_1=1$, $e_2= 1-\nu$ et $e_3= e_2/2= (1-\nu)/2$ en contrainte plane.

- $e_1=1-\nu$, $e_2=1-2\nu$ et $e_3= e_2/2= (1-2\nu)/2$ en déformation plane.

I-3-1-3 Les déplacements

Puisque on est en élasticité linéaire les déplacements seront calculés par la relation suivante :

$$\{F\} = [K] \{u\} \quad (1.77)$$

Ou [k] est la matrice de rigidité globale, {F} est le vecteur force nodale qui tient compte des conditions aux limites de la structure étudiée et les forces qui lui sont appliquées et {u} est le vecteur déplacement de dimension 2*nombre de nœuds.

I-3-1-4 Les contraintes

Pour le calcul des contraintes il faut tout d'abord calculer le tenseur des déformations comme suit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (1.78)$$

Ensuite on passe au calcul des contraintes par la formule suivante :

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\} \quad (1.79)$$

En contrainte plane :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{yx} \end{array} \right. \quad (1.80)$$

Maintenant on peut calculer les contraintes de Von Mises comme suit :

$$\sigma_{Von\ Mises} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}^2 \right) + 3\sigma_{xy}^2} \quad (1.81)$$

I-3-2 L'élément de Barsoum

Au niveau de la pointe de la fissure existe une singularité (la contrainte tend vers l'infinie) donc pour pouvoir tenir compte de cette singularité on introduit l'élément de Barsoum [8] qui ne sera utilisé que pour les éléments contenant la pointe de fissure comme montré sur la figure suivante :

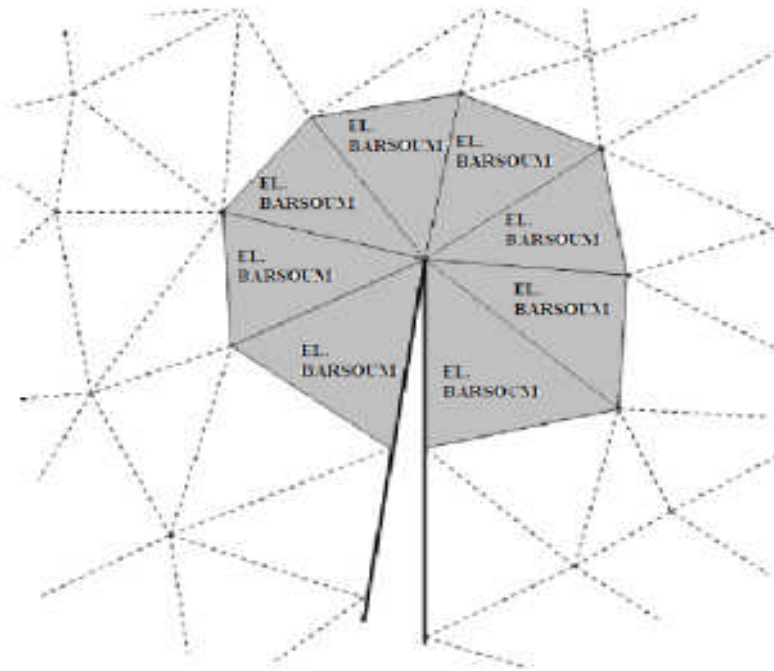


Figure 1-10 : Zone d'application de l'élément de Barsoum

Les éléments de Barsoum sont tels que les nœuds qui se trouvent au milieu sur les cotés des éléments quadratiques touchant le fond de fissure sont déplacés au quart du côté.

Ils permettent de mieux capter la singularité du champ de contraintes en fond de fissure comme montré sur la figure :

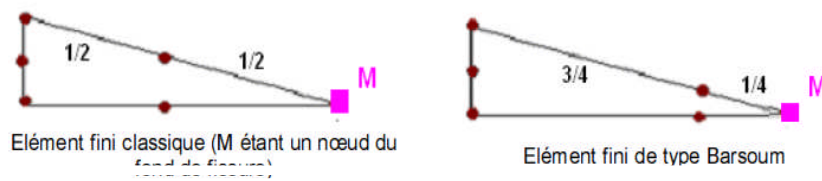


Figure 1-11 : Elément de Barsoum

Grace à cette transformation, le champ de contrainte n'est plus en \sqrt{r} sur l'élément mais en r . On voit bien que l'élément de Barsoum a six nœuds au lieu de trois dans l'élément de référence classique donc on aura six fonctions de forme pour l'interpolation géométrique qui seront quadratique comme suit :

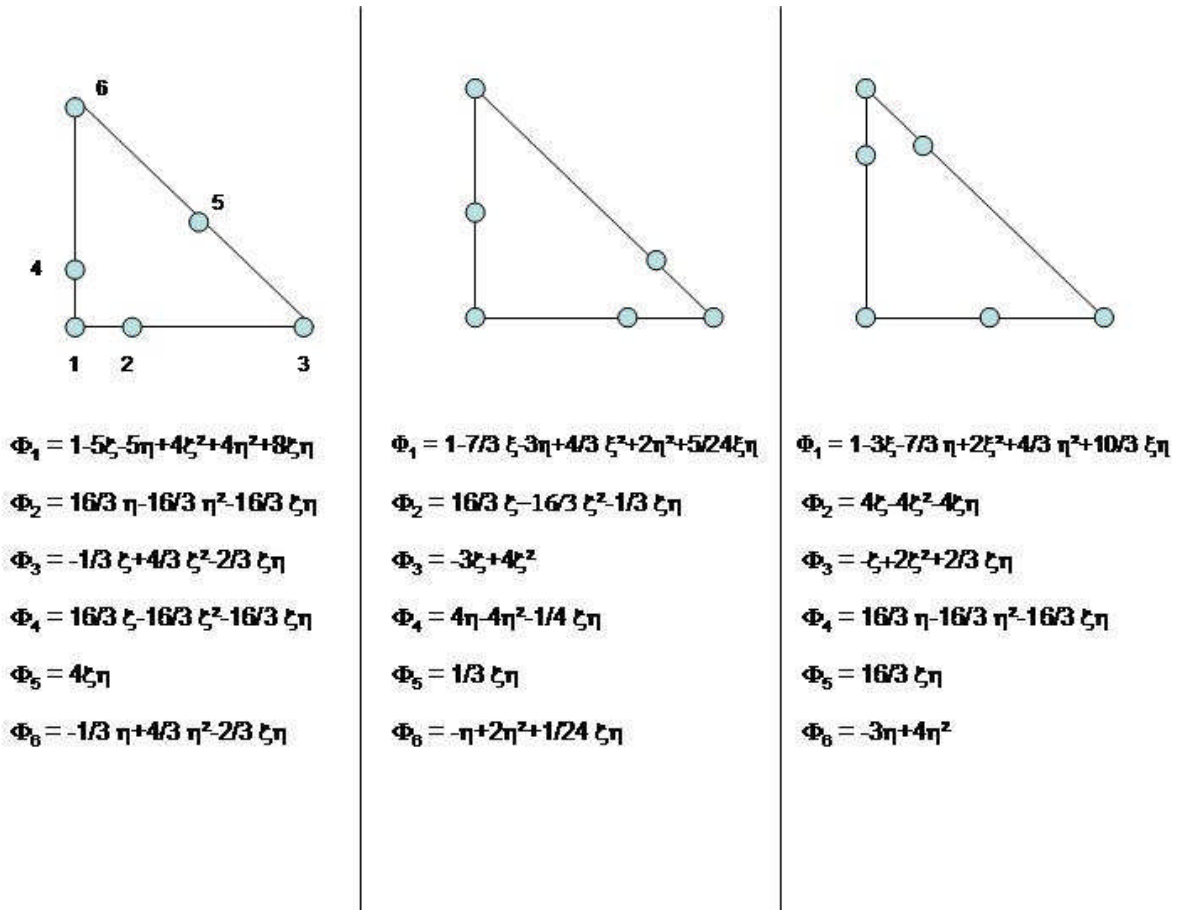


Figure 1-12 : *Fonctions de forme de l'élément de Barsoum*

I-3-2-1 La matrice de raideur locale

La construction de la matrice de raideur locale passe par plusieurs étapes de calcul et se terminera par l'intégration de Gauss [9] ou on utilise sept point de Gauss.

Pour chaque point de Gauss on calcule une partie de la matrice de raideur locale. Cette dernière sera la somme de ces sept matrices, pondérées par le poids du point de Gauss correspondant.

Donc pour chaque point de Gauss, la matrice de rigidité locale sera construite comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} J11 & J12 \\ J21 & J22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

Ces dérivées sont en fonctions des coordonnées des six points (x_i, y_i) et les fonctions de forme évaluées au point de Gauss considéré. On a :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 x_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi}(x_{pdG}, y_{pdG}) \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 x_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta}(x_{pdG}, y_{pdG}) \quad (1.84)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 y_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi}(x_{pdG}, y_{pdG}) \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 y_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta}(x_{pdG}, y_{pdG}) \quad (1.86)$$

On a besoin de calculer les dérivées des fonctions de forme par rapport à x et y et puisque l'élément de Barsoum est super-paramétrique ces fonctions de forme sont les mêmes fonctions que les éléments normaux donc de forme linéaire.

On calcule les dérivées de ces fonctions par rapport à ξ et à η qu'on multiplie par le terme correspondant à l'inverse de la Jacobienne calculée par l'équation (1.82) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J22 & J12 \\ -J21 & J11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

Ensuite on construit les trois matrices B_1 , B_2 et B_3 :

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

Il faut effectuer une série de six opérations matricielles qui consistent à multiplier la transposée de chaque matrice B_i avec la matrice de Hooke et avec chaque matrice B_i :

$$B_{ij} = B_i^T H B_j \quad (1.89)$$

Où la matrice de Hooke est présentée à l'équation (3.6) en contrainte plane et déformation plane.

Donc on aura six matrices (4*4) qui sont : B_{11} , B_{12} , B_{13} , B_{22} , B_{23} et B_{33} avec lesquelles on construit la matrice de raideur locale correspondant au point de Gauss traité (K_{gi}) comme suit :

$$K^g = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12}^T & B_{22} & B_{23} \\ B_{13}^T & B_{23}^T & B_{33} \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

On répète sept fois l'opération avec tous les points de Gauss de l'élément, donc on va obtenir sept matrices K_{gi} sommées, chacune pondérée par son poids w_i correspondant pour obtenir la matrice de raideur locale.

D'où la matrice de raideur locale totale est donnée par l'équation suivante :

$$K_{locale \text{ element de Barsoum}} = \sum_{i=1}^7 K_i^g W_{gi} \det J_i \quad (1.91)$$

L'élément de Barsoum n'affecte que les matrices de raideur locales dans la construction de la matrice de raideur globale du système. On utilisera l'élément de Barsoum seulement pour les éléments situés autour de la pointe de fissure pour les autres éléments on utilisera les éléments finis traditionnels.

Chapitre II

Les Outils Nécessaires Pour L'élaboration Du Code De Propagation De Fissure

Chapitre II : Les Outils Nécessaires Pour L'élaboration Du Code De Propagation De Fissure

II-1 Introduction

Ce chapitre est consacré pour les outils nécessaires pour l'élaboration d'un code d'élasticité linéaire, c'est-à-dire la modélisation de la fissure par les éléments finis sans tenir compte de la propagation qui sera traité au chapitre 05.

Au début, On présente les outils nécessaires pour l'élaboration du code et en fin le cheminement à suivre pour la résolution des problèmes.

II-2 Les outils nécessaires

1. Un logiciel de C++, on utilise Visual C++2008 sous Windows XP.
2. Un générateur de maillage : il ya plusieurs générateurs de maillage qu'on peut utiliser, dans notre cas on a utilisé le GMSH, il permet de généré le maillage en 2D ou bien en 3D on peut aussi condenser le maillage dans des régions précis, comme par exemple autour d'une singularité, comme il permet aussi de créer des lieux géométriques particuliers appelé physical point ou bien physical ligne qu'on va utilisés pour les conditions aux limites.

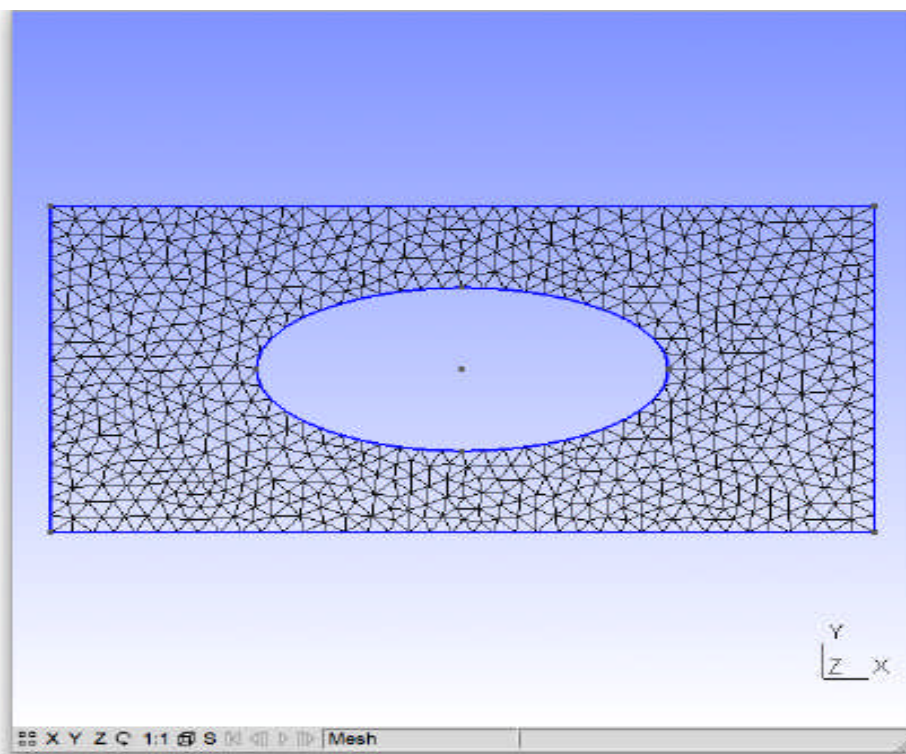


Figure 2-1 : Visualisation du maillage généré sur un domaine rectangulaire

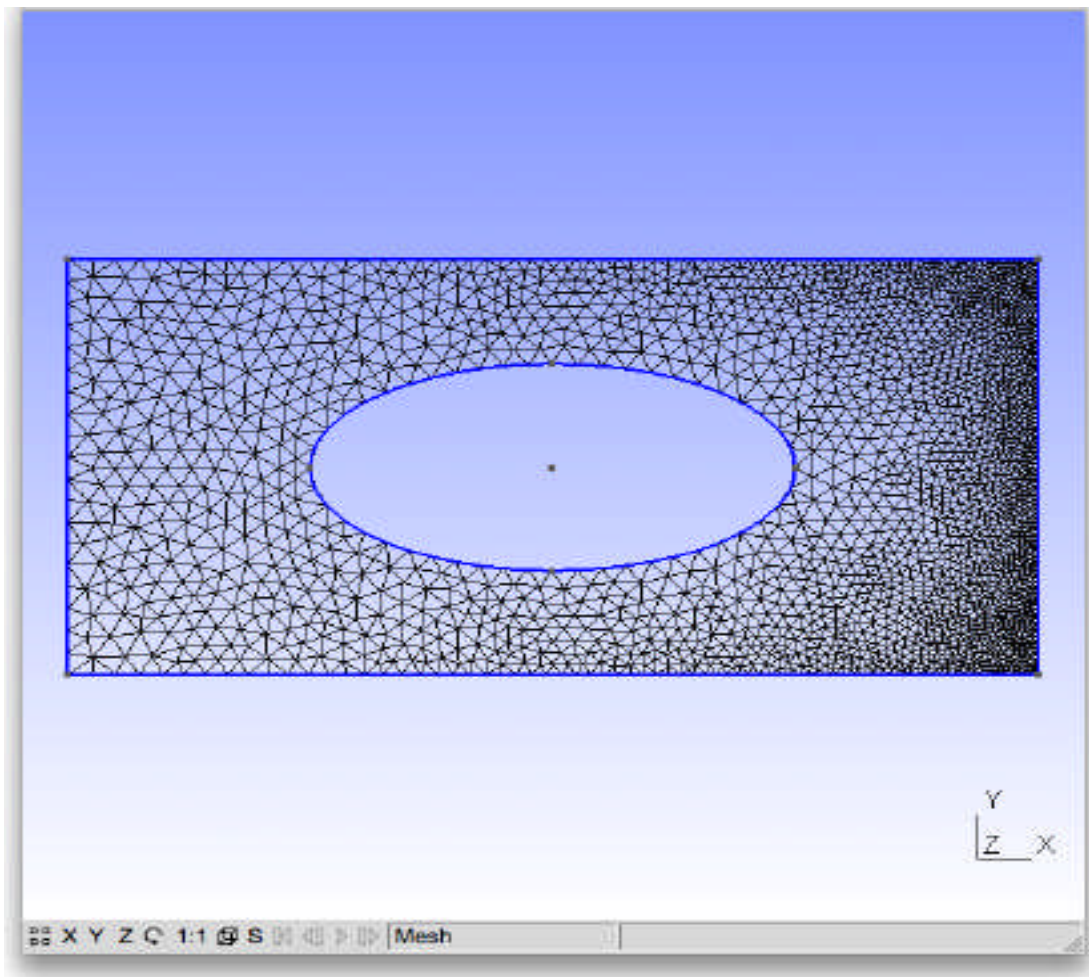


Figure 2-2 : Visualisation du maillage généré sur un domaine rectangulaire avec raffinement dans la partie droite

GMSH permet aussi d'afficher nos résultats de manière intelligibles.

Pour bien comprendre la manière dont on utilise le GMSH, on donne un exemple à analyser à la figure (2.3) :

- On dessine une structure géométrique.
- On crée des lieux géométriques particuliers (points, lignes) appelé physical point, physical lignes. Le GMSH permet d'associer à chaque physical un chiffre (2000, 3000, ...) comme suit :

$$\text{Physicalpoint}(9000)=\{3\} \quad (2.1)$$

Qui signifie que le chiffre 9000 est associé au point 3 du maillage.

$$\text{Physicalline}(1000)=\{4\} \quad (2.2)$$

C'est le même principe sauf qu'ici le chiffre 1000 est associé à la ligne 4 et le chiffre 1000 signifie encastrement (voir Tableau 2.1).

Un encastrement pour une ligne	1000
Des rouleaux (dans la direction X)	1500
Des rouleaux (dans la direction Y)	2000
Une charge répartie selon X	2000<chiffre<6000
Une charge répartie selon Y	5000<chiffre<7000
Une charge ponctuelle selon X	8000
Une charge ponctuelle selon Y	9000

Tableau 2.1 : Zones géométriques particuliers



Figure 2-3 : Poutre analysée

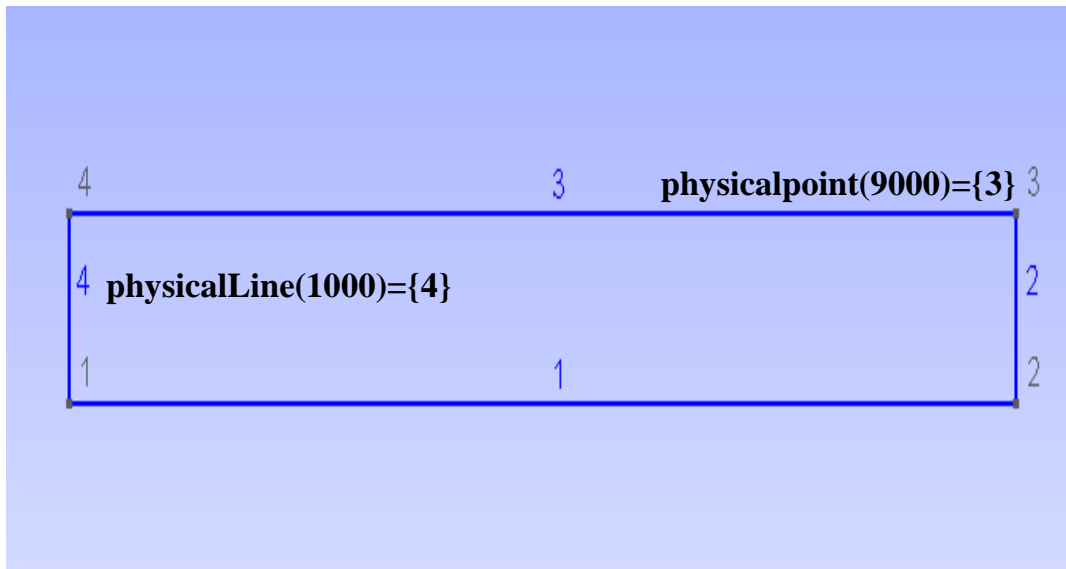


Figure 2-4 : Interprétation sur le GMSH

- Pour le maillage, on choisit une longueur caractéristique du maillage pour chaque point. Donc tout dépend de notre choix par exemple on peut définir un maillage qui sera plus fin autour des singularités.
 - On sauvegarde le maillage.
 - Le GMSH crée un fichier contenant toutes les données concernant le maillage, les lieux géométriques et leur nombre associé.
- 3. RansMesh :** le RansMesh est un fichier C++ contenant une série de fonction applicable sur un maillage généré par GMSH et dont les données sont contenues dans un fichier *.msh, des fonctions qui renvoient des résultats tels que :
- le nombre des nœuds, d'arêtes ou d'éléments contenus dans le maillage.
 - Les coordonnées de chaque nœud (x, y et z).
 - Les nœuds appartenant à une face ou arête.
- 4. Matrix Utils:** Fichier contenant des opérations de base sur les matrices telles que :
- Multiplication de deux matrices.
 - Calculer le déterminant d'une matrice.
 - Inverser une matrice.

- 5. Le solveur:** Celui-ci permet de résoudre l'équation matricielle $A.U=B$ de manière plus au moins rapide grâce à des méthodes itératives. Donc on commence par triangularisation de la matrice de rigidité globale qui a une taille de $(2 \times \text{nombre de nœuds}) \times (2 \times \text{nombre de nœud})$ ensuite on calcule les déplacements aux nœuds (deux déplacements pour chaque nœud).

II-3 Etapes de résolution

La première étape de résolution est le chargement du fichier maillage *.msh qui contient toutes les données nécessaires tels que le nombre total des nœuds, d'arrêtes (éléments barres) et de faces (éléments triangulaires) ainsi que les coordonnées dans le système d'axes définis. Le nombre de nœuds permet de déclarer la taille des matrices de rigidité globale, matrice éléments, matrice des coordonnées des nœuds et le vecteur force nodale, vecteur déplacements,..... et le nombre de face permet de déterminer le nombre de boucles nécessaires pour remplir la matrice de rigidité globale.

Le déroulement général du programme est comme suit :

- 1- Le chargement du fichier maillage *.msh.
- 2- Déclaration des variables du programme.
- 3- Remplissage des matrices coordonnées des nœuds, matrice éléments.
- 4- Calcul de la matrice de raideur locale.
- 5- Assemblage de la matrice de raideur locale de toutes les faces du maillage.
- 6- Lecture des conditions aux limites à savoir les conditions d'appuis et le vecteur forces.
- 7- Résolution de l'équation $A.U=B$.
- 8- Calcul des contraintes à partir des déplacements.
- 9- Affichage des résultats.

Le chargement du maillage

C'est la première étape à faire elle consiste à importer des données au code C++.

Déclaration des variables

On déclare toutes les matrices et vecteurs nécessaires à la résolution tels que la matrice de rigidité globale, matrice éléments, matrice des coordonnées des nœuds et le vecteur force nodale, vecteur déplacements et matrice contraintes.....

Si par exemple notre fichier maillage contient 1000 nœuds, la matrice coordonnée des nœuds contiendra 4000 entrées. Le vecteur des déplacements sera de 2000 entrées, la matrice de raideur globale aura une taille de 2000x2000 soit 4000000 entrées.

C'est ici aussi qu'on déclare les valeurs comme :

- Le coefficient de Poisson ν .
- Le module de Young E .
- Est que on est en contraintes plane ou déformations plane.

Remplissage des matrices coordonnées des nœuds, matrice éléments

Après la déclaration des matrices coordonnées des nœuds et matrice éléments, c'est ici qu'on va remplir ces matrices à partir du fichier maillage *.msh.

Calcul de la matrice de raideur locale

On calcule la matrice de raideur locale de chaque élément triangulaire pour plus de détails voir la 3ème partie du chapitre 1.

Assemblage de la matrice de raideur locale de toutes les faces du maillage

Opération effectuée par itération sur les faces en assemblant les matrices de raideur locale dans la matrice de raideur globale.

Lecture des conditions aux limites

Ils s'agissent de forces ou de conditions sur les frontières du système.

Pour les conditions sur les frontières, telle qu'un encastrement, une sous routine modifie les entrées dans la matrice de rigidité globale en mettant par exemple pour un encastrement des zéros pour toutes les lignes et colonnes correspondantes à des nœuds contenus dans l'encastrement.

En générale, pour les conditions aux frontières on a trois méthodes :

1- Méthode du terme diagonal dominant :

Nous remplaçons K_{ii} par $K_{ii} + \alpha$, α étant un nombre très grand par rapport à tous les termes K_{ij} (en pratique $\alpha = 10^7 \cdot \text{Max}|K_{ij}|$ ou $10^{15} \cdot \text{Max}|K_{ij}|$) et F_i par $\alpha \bar{U}_i$.

2- Méthode du terme diagonal unité :

Nous remplaçons :

$$- F_i = \bar{U}_i \quad (2.3)$$

$$- F_j = F_j - K_{ij} \bar{U}_i \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i \quad (2.4)$$

$$- K_{ii} = 1. \quad (2.5)$$

$$- K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq i \quad (2.6)$$

3- Méthode de suppression des équations :

On supprime les lignes et les colonnes ou les déplacements sont connus tels que un encastrement par exemple.

Pour notre cas on a utilisé la première méthode puisqu' elle donne des résultats beaucoup plus précis que la deuxième alors que la 3eme méthode est très difficile à appliquer en calcul numérique.

Pour les conditions aux limites comme les forces, on modifie le vecteur force nodales qui est initialement nul. Si on prend l'exemple de la figure 2.3, un point est attaché au chiffre 9000 cela veut dire que dans ce point (3) il y'a une force ponctuelle appliquée dans le sens y. Dans le vecteur force nodales on donne la valeur de cette force pondérée du signe moins puisque la force est dirigée vers le bas.

Lorsque on parcourt la matrice éléments (les arêtes), on vérifie pour chaque arête qu'elle appartient à une zone correspondant a un nombre (tableau 2.1) si par exemple on a des arêtes attachées à la zone 1000 (un encastrement) donc on va remplacer dans la matrice de raideur globale les valeurs des éléments situés sur la diagonale (K_{ii}) par $\alpha \cdot K_{ii}$.

Résolution de l'équation $A.U=B$

C'est l'opération la plus couteuse du programme, on commence par la triangularisation de la matrice de raideur globale, ensuite on passe au calcul du vecteur déplacement U de taille 2 x nombre de nœuds.

Calcul des contraintes à partir des déplacements

Après le calcul du vecteur déplacements, la dernière étape consiste à calculer les contraintes en se basant sur la théorie définie aux éléments finis dans le chapitre I partie 3.

On calcule les contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ ainsi que les contraintes de Von Mises données par la formule suivante :

$$\sigma_{Von\ Mises} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}^2) + 3\sigma_{xy}^2} \quad (2.7)$$

Affichage des résultats

On affiche les contraintes ainsi que la déformée du système étudié via GMSH.

Chapitre III

Résultats et validation du code de propagation de fissures

Chapitre III : Résultats et validation du code de propagation de fissures

III-1 Introduction

Avant de passer à la propagation de fissure, il est nécessaire de valider les résultats obtenus avec quelques exemples en élasticité linéaire analytiquement connus, comme par exemple la poutre en console et la poutre bi-encastree avec charge ponctuelle ou bien charge répartie .On commence par valider les déplacements (la flèche) ensuite les contraintes.

III-2 Validation des déplacements

III-2-1 La poutre en console avec charge répartie

On a une poutre rectangulaire de largeur $b=1\text{m}$ et de hauteur $H=0.5\text{m}$ présentée sur la figure 3-1.

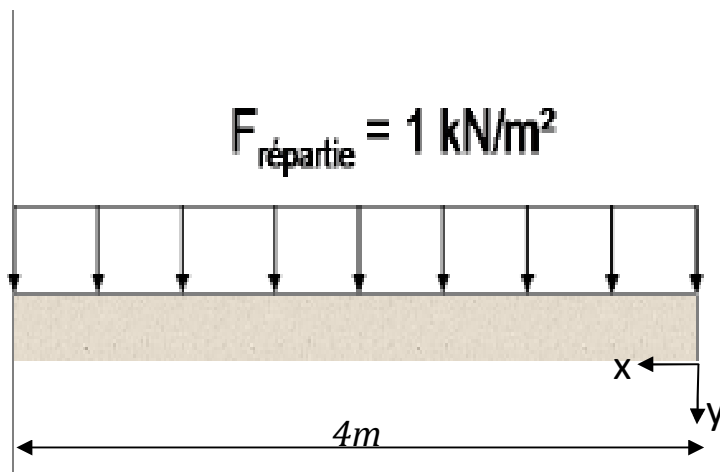


Figure 3-1 : Poutre en console avec charge répartie

La mécanique classique nous donne la déformé attendue pour une telle configuration par la formule suivante :

$$y(x) = \frac{p}{24EI} (l - x)^2 (3l^2 + 2lx + x^2) \quad (3.1)$$

Avec la flèche maximale est donnée par :

$$f_{\text{max}} = \frac{pl^4}{8EI} \quad \text{pour } x = l = 0\text{m} \quad (3.2)$$

On montre sur la figure 3-2 le maillage choisi pour la résolution du problème. Pour information notre maillage possède 1200 nœuds et 2288 arrêtes et faces. On va résoudre un système de 2400 inconnues (déplacements aux nœuds). La matrice de raideur a une taille de 2400x2400.



Figure 3-2 : Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la poutre

En appliquant la formule donnée en (3.2) pour $x=4m$, on trouve :

$$f_{max} = 14.62857 \text{ mm} \text{ Avec } P=1 \text{ kN/m}^2, \text{ le module de Young } E=210000 \text{ kN/m}^2 \text{ et } I = \frac{bh^3}{12} = 0.010417 \text{ m}^4 \text{ pour } b=1m \text{ et } H=0,5m.$$

Sur la figure 3-3 on présente la déformée sous le GMSH.

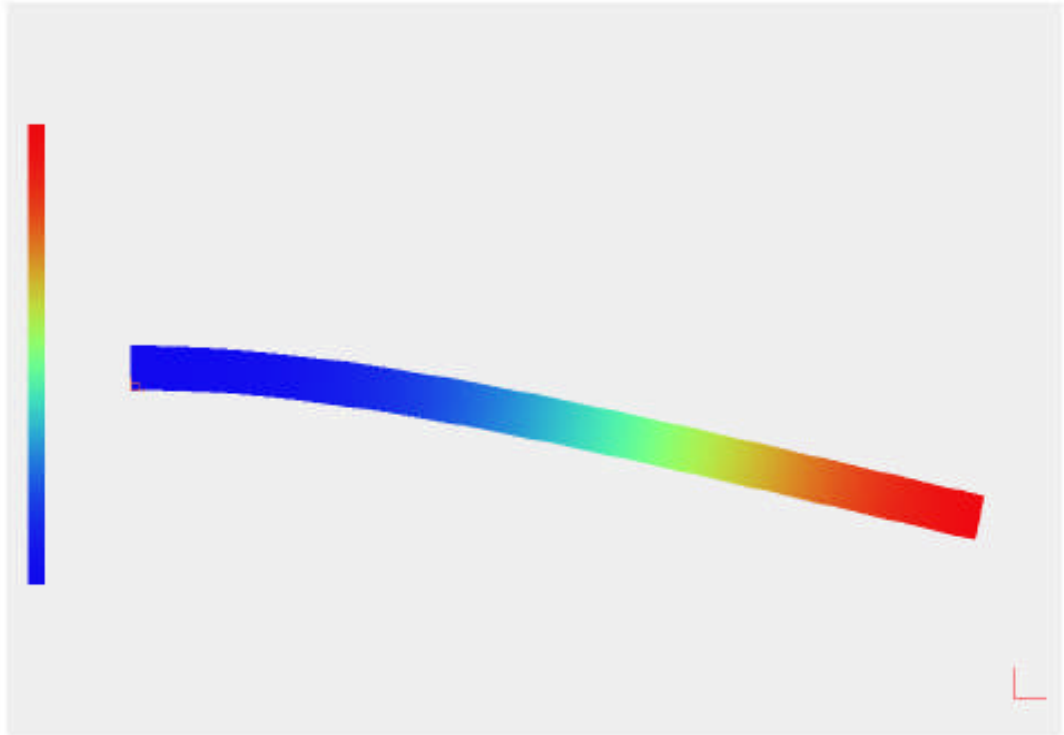


Figure 3-3 : Déformée de la poutre sous le GMSH

La figure 3-4 illustre la déformée sur la face inférieure de la poutre.

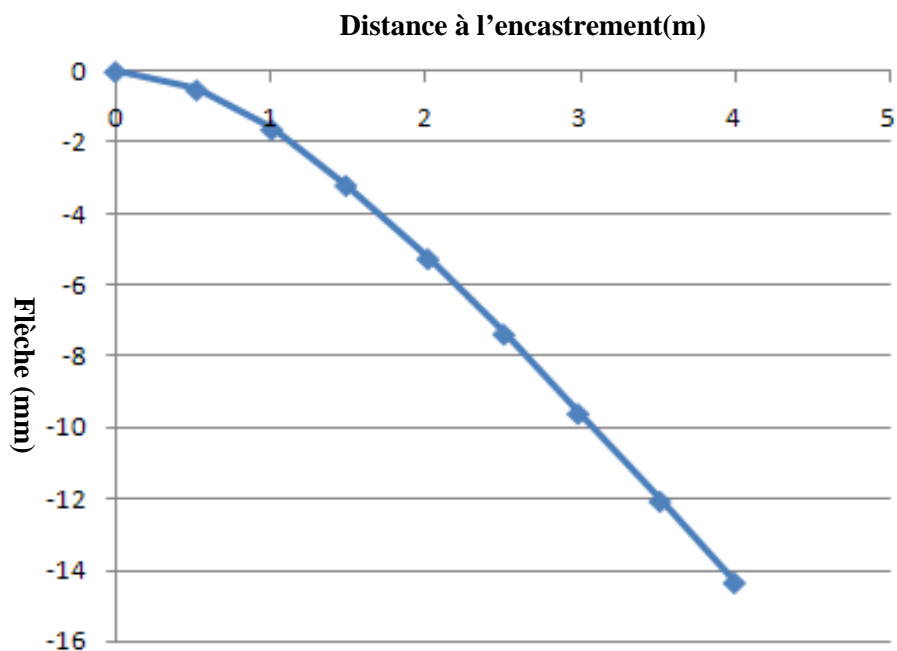


Figure 3-4 : Déformée de la face inférieure de la poutre sous le GMSH

Les contraintes de Von Mises sont représentées par la figure 3-5.

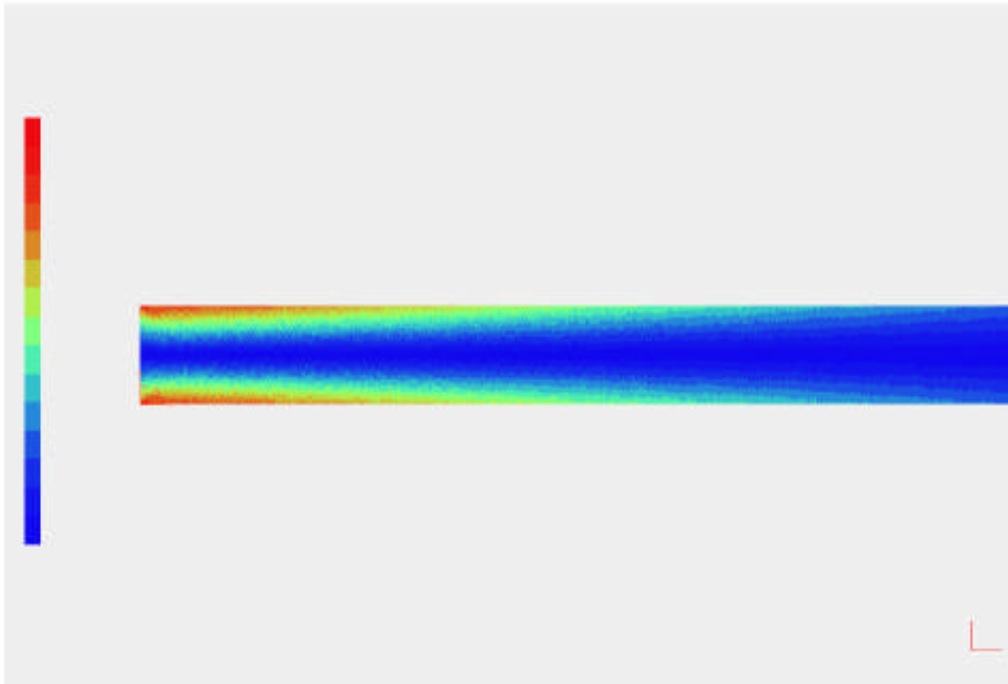


Figure 3-5 : Les contraintes de Von Mises sous le GMSH

Le résultat trouvé numériquement est $f_{Max} = 14.10146mm$, correspondant à une erreur relative de 1.72% par rapport au résultat calculé analytiquement.

III-2-2 La poutre en console avec charge ponctuelle

On a la même poutre rectangulaire de largeur $b=1\text{m}$ et de hauteur $H=0.5\text{m}$ présentée sur la figure 3-6.

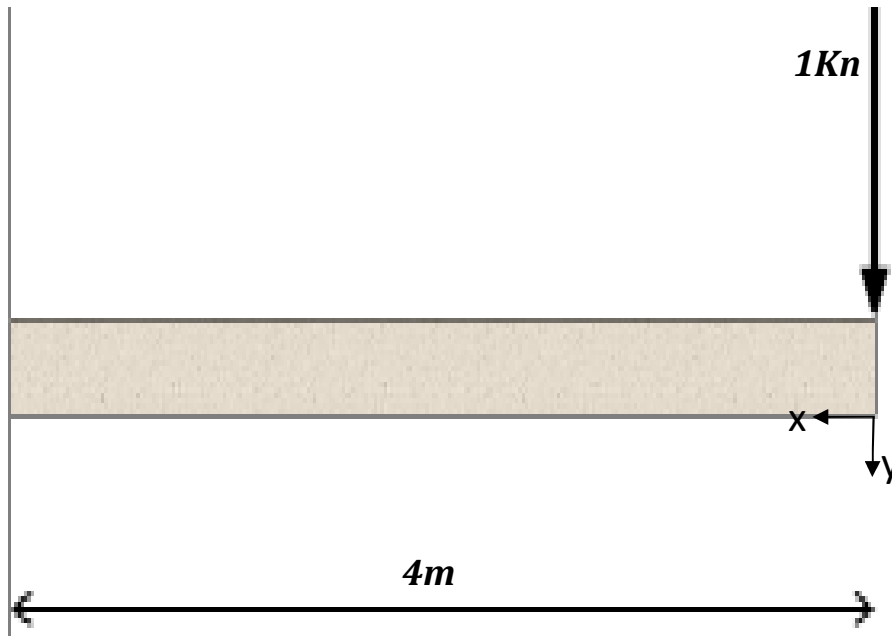


Figure 3-6 : Poutre en console avec charge ponctuelle

La mécanique classique nous donne la déformé attendue pour une telle configuration par la formule suivante :

$$y(x) = \frac{p}{6EI} (l - x)^2 (2l + x) \quad (3.3)$$

Avec la flèche maximale est donnée par :

$$f_{max} = \frac{pl^3}{3EI} \quad \text{pour } x = l = 0\text{m} \quad (3.4)$$

On montre sur la figure 3-7 le maillage choisi pour la résolution du problème. Pour information nous avons adopté le même maillage précédent à savoir 1200 nœuds et 2288 arrêtes et faces, cela va nous conduire à une résolution d'un système de 2400 inconnues(déplacements au nœuds) et la matrice de raideur a une taille de 2400x2400.



Figure 3-7 : Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la poutre

En appliquant la formule donnée en (3.4) pour $x=4\text{m}$, on trouve :

$$f_{max} = 9.75238 \text{ mm} \text{ Avec } P=1 \text{ kN, le module de Young } E=210000 \text{ kN/m}^2 \text{ et}$$
$$I = \frac{bh^3}{12} = 0.010417 \text{ m}^4 \text{ pour } b=1\text{m et } H=0,5\text{m.}$$

la figure 3-8, schématise la déformée sous le GMSH. On présente également à la figure 3-9 la déformée point par point sur la face inférieure de la poutre, enfin, on donne à la figure 3-10 les contraintes de Von Mises.

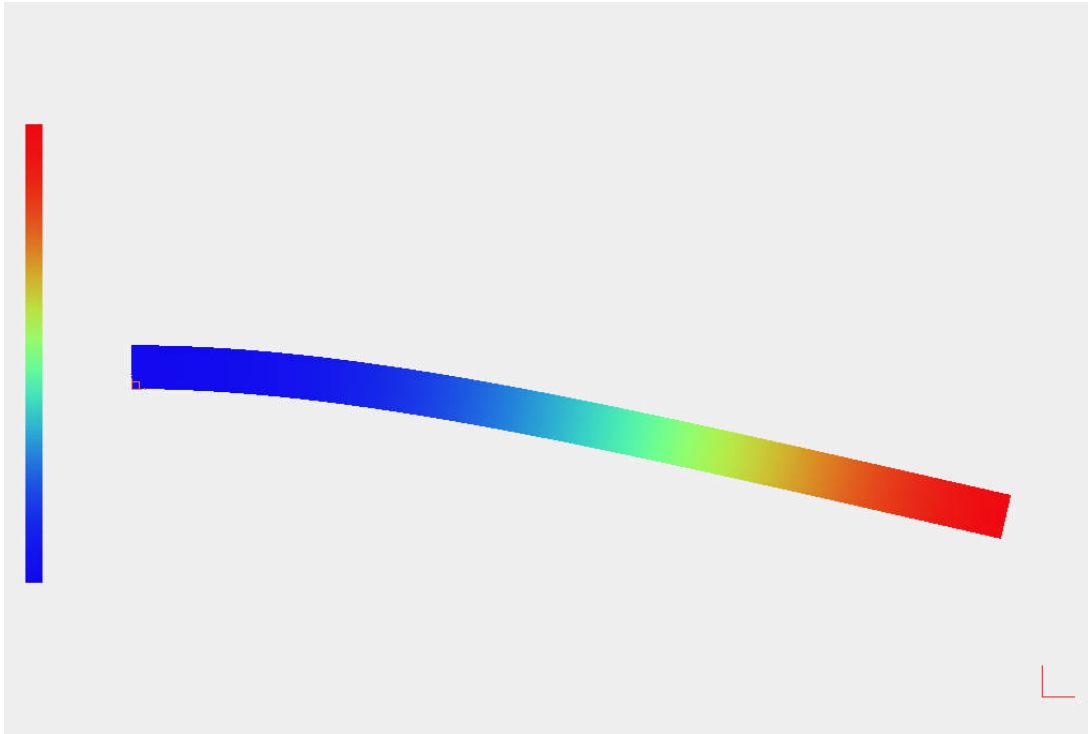


Figure 3-8 : Déformée de la poutre en console avec charge ponctuelle sous le GMSH

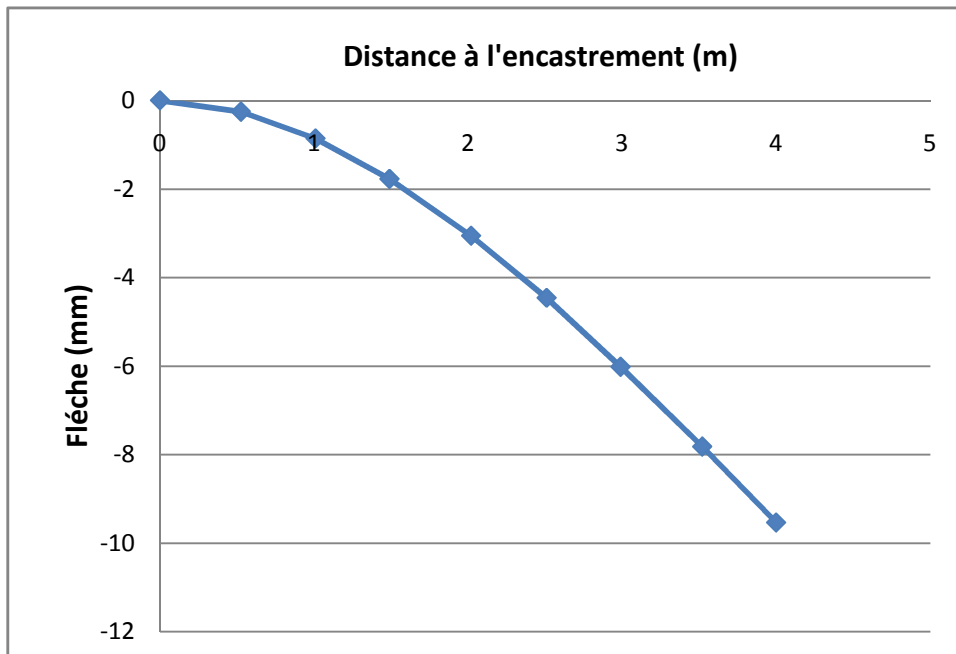


Figure 3-9 : Déformée de la face inferieur de la poutre sous le GMSH

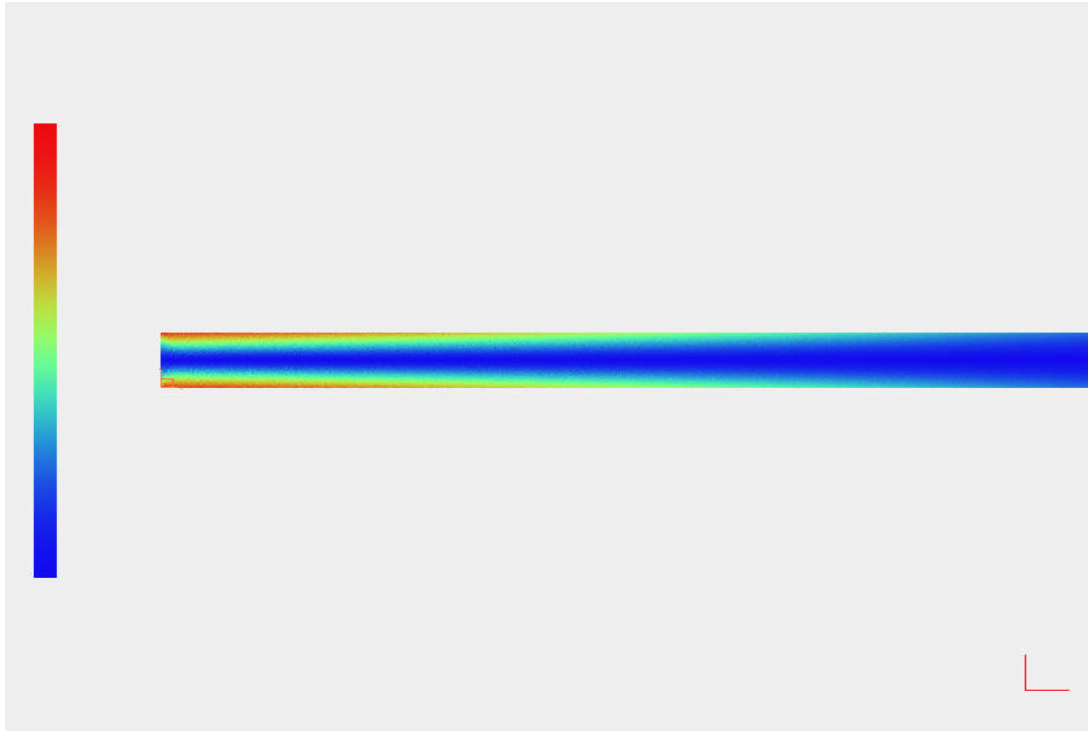


Figure 3-10 : Les contraintes de Von Mises sous le GMSH

Le résultat trouvé numériquement est $f_{Max} = 9.55766mm$, correspondant à une erreur relative de 1.99% par rapport au résultat calculé analytiquement.

III-2-3 La poutre bi-encastée avec charge répartie

On a une poutre rectangulaire de largeur $b=1m$ et de hauteur $H=0.5m$ présentée sur la figure 3-11.

La mécanique classique nous donne la déformée attendue pour une telle configuration par la formule suivante :

$$y(x) = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)^2 \quad (3.5)$$

Avec la flèche maximale est donnée par :

$$f_{max} = \frac{pl^4}{384EI} \quad \text{pour } x = \frac{l}{2} = 2m \quad (3.6)$$

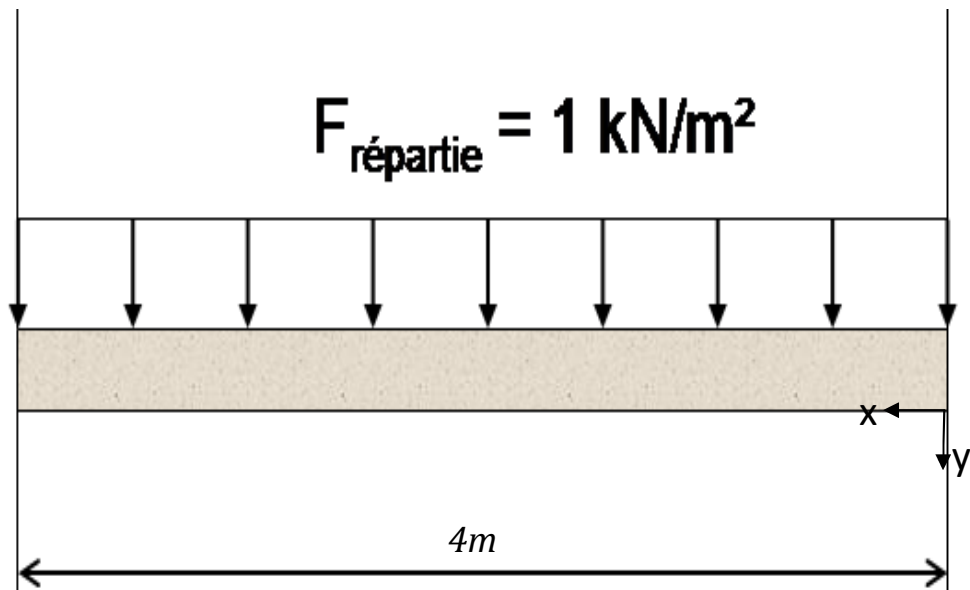


Figure 3-11 : Les contraintes de Von Mises sous le GMSH

On montre sur la figure 3-12 le maillage choisi pour la résolution du problème. Pour information nous avons adopté le même maillage précédent à savoir 1200 nœuds et 2288 arêtes et faces donc on va résoudre un système de 2400 inconnues (déplacements au nœuds) et la matrice de raideur à une taille de 2400x2400.

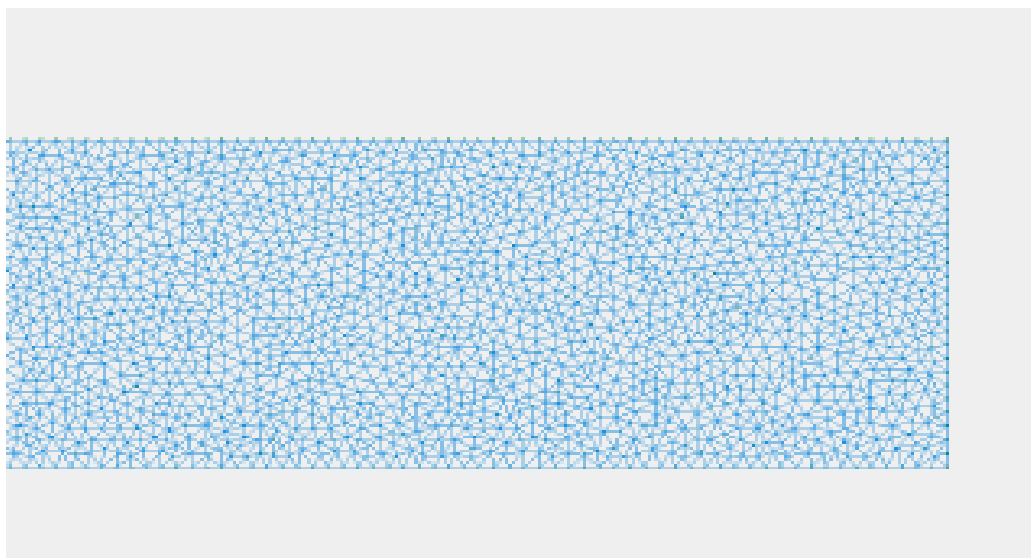


Figure 3-12 : Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la poutre

Toujours en appliquant la formule donnée en (3.6) pour $x=4\text{m}$, on trouve :
 $f_{max} = 0.304752 \text{ mm}$ Avec $P=1 \text{ kN}$, le module de Young $E=210000 \text{ kN/m}^2$ et
 $I = \frac{bh^3}{12} = 0.010417 \text{ m}^4$ pour $b=1\text{m}$ et $H=0,5\text{m}$.

Sur la figure 3-13 on présente la déformée sous le GMSH. On présente également à la figure 3-14 la déformée point par point sur la face inférieure de la poutre, enfin, on donne à la figure 3-15 les contraintes de Von Mises.

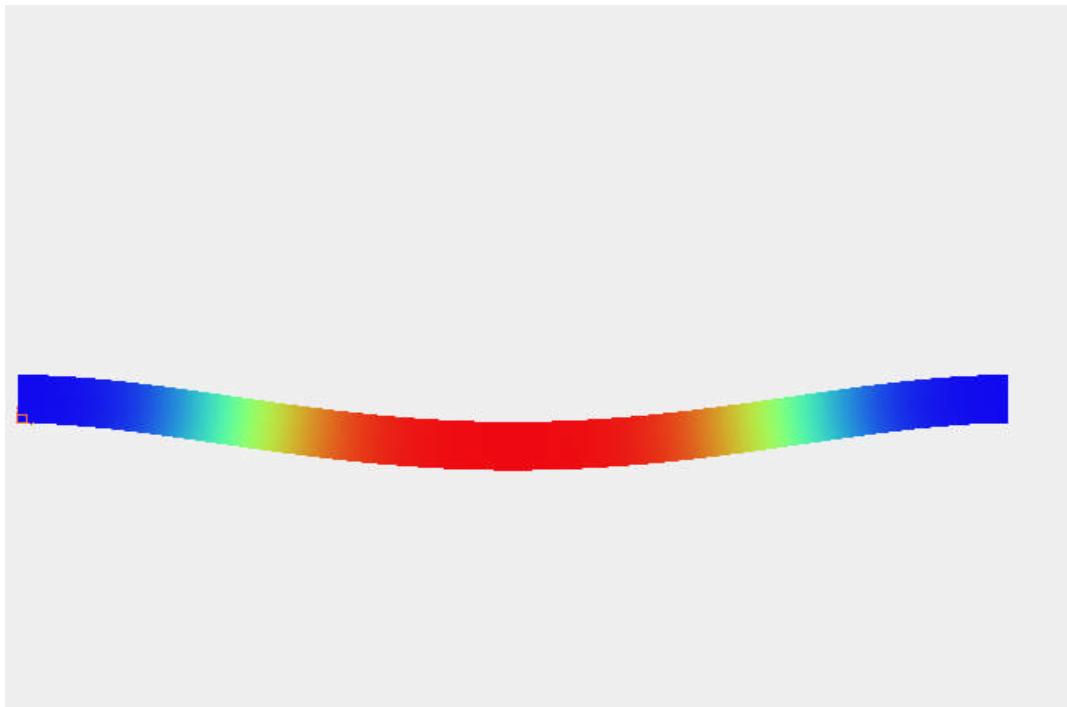


Figure 3-13 : Déformée de la poutre bi-encastree avec charge repartie sous le GMSH

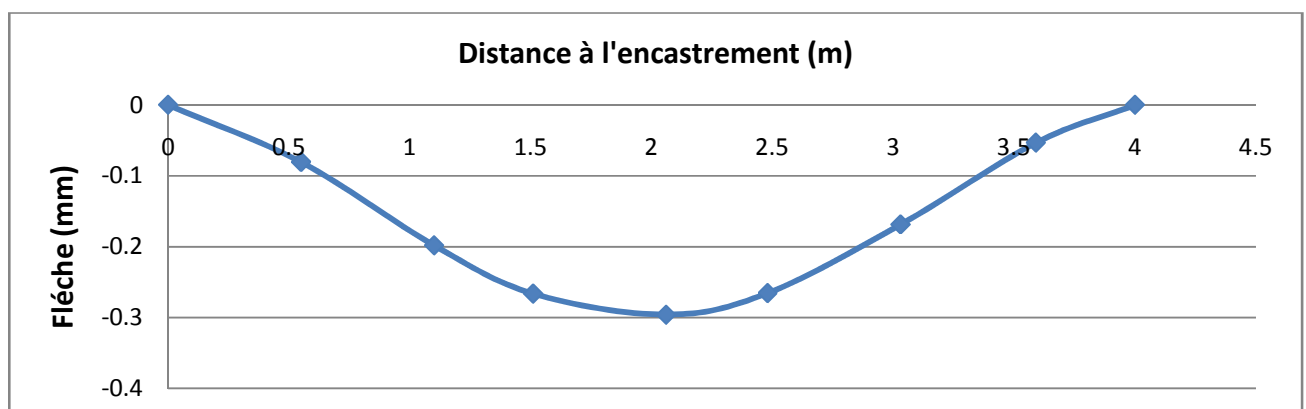


Figure 3-14 Déformée de la face inferieur de la poutre sous le GMSH

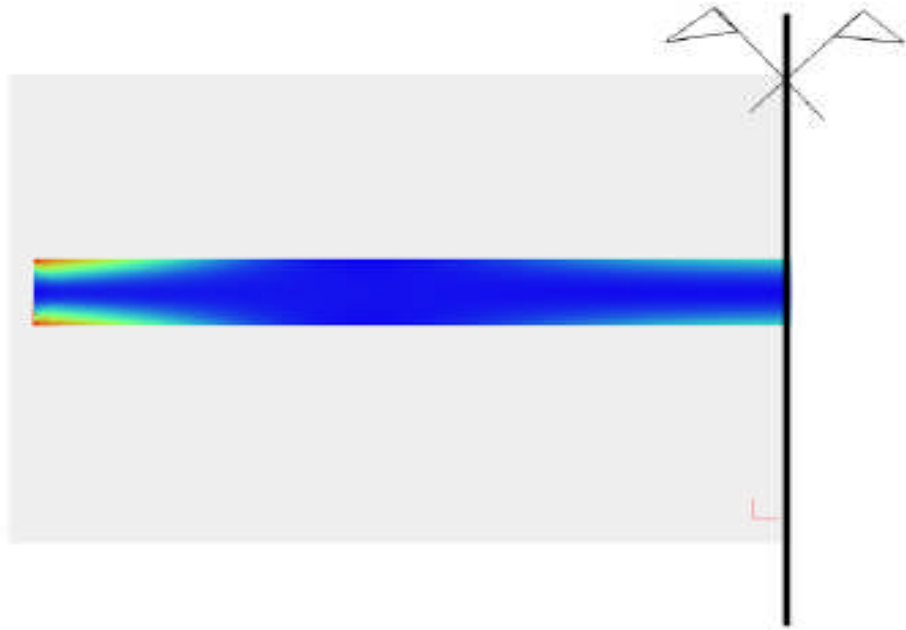


Figure 3-15 : Les contraintes de Von Mises sous le GMSH

Le résultat trouvé numériquement est $f_{Max} = 0.298648 \text{ mm}$, correspondant à une erreur relative de 2 % par rapport au résultat calculé analytiquement.

III-2-4 Conclusion

Suite aux résultats obtenus précédemment, on valide le calcul des déplacements par le code C++, ainsi on peut passer à l'étape suivante c'est-à-dire la validation des contraintes.

III-3 Validation des contraintes

III-3-1 La plaque trouée

Comme dans le cas des déplacements, on valide les contraintes par un exemple en élasticité linéaire analytiquement connu (plaque trouée) présentée à la figure 3-16.

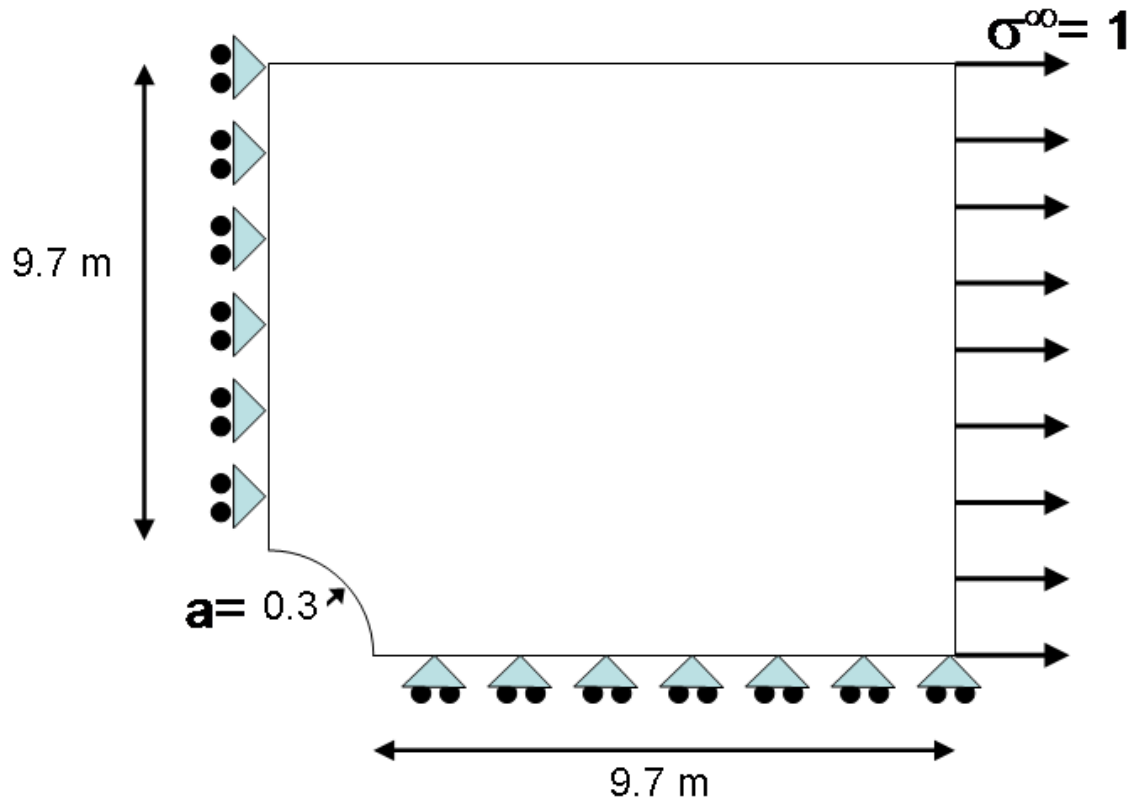


Figure 3-16 : Plaque infinie trouée

La théorie de la fissuration nous donne les contraintes attendues pour une telle configuration (figure 3-17) par les formules suivantes :

$$\sigma_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (3.8)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (3.9)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - 3 \frac{a^4}{r^4} + 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (3.10)$$

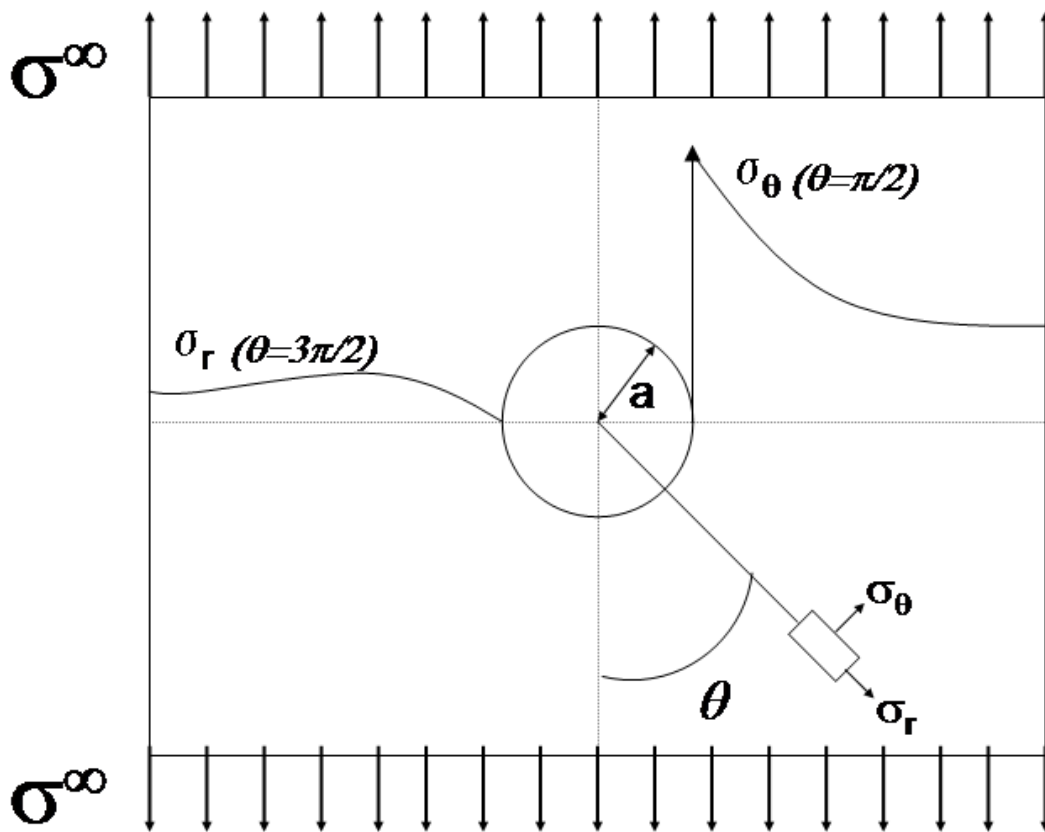


Figure 3-17 : Distribution des contraintes autour d'une fissure pour une Plaque trouée chargée

A la figure 3-18 on donne le maillage choisi pour calculer les contraintes. Pour information celui-ci possède 40434 nœuds , 120428 arrêtes et 79995 faces donc tous ca va nous conduire à une résolution d'un système de 80868 inconnues(déplacements au nœuds) et notre matrice de raideur a une taille de 80868x80868. Pour interpréter facilement les résultats, on a choisit une force $\sigma_\infty = 1kn/m^2$.

Les résultats donnés par le code C++ et affichés sur le GMSH sont donnés aux figures 3-19, 3-21, 3-22 et 3-24. Enfin, on affiche les contraintes de Von Mises à la figure 3-25 qui donnent une idée sur la propagation de la fissure (on aperçoit un des deux lobes caractéristiques d'une fissure). On peut conclure que la fissure va se propager vers le haut à partir du point le plus haut du trou.

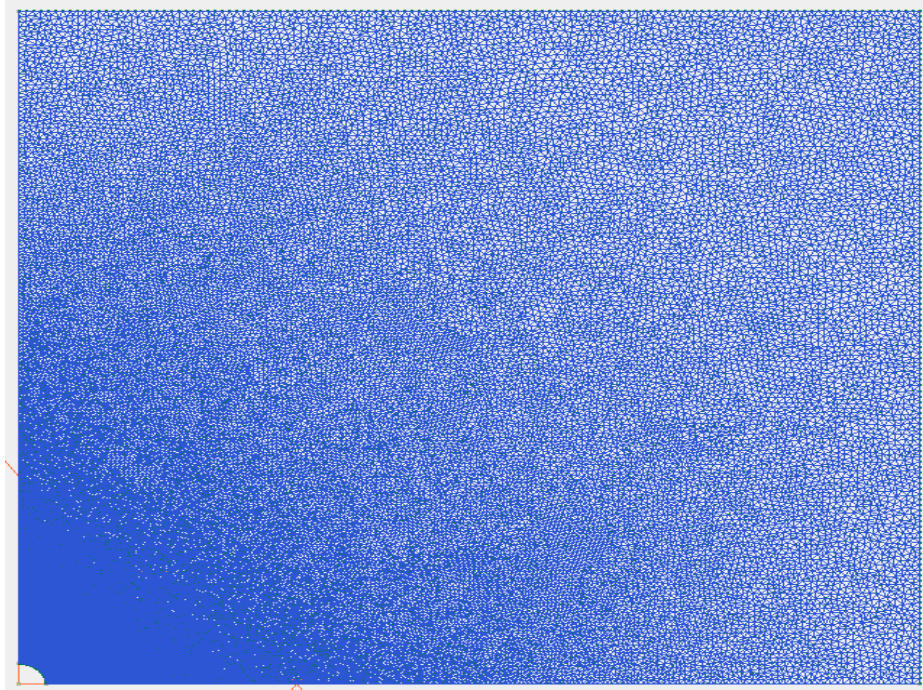


Figure 3-18 : Visualisation du maillage généré par le GMSH sur la plaque trouée

On donne à la figure 3.20 le calcul des contraintes σ_{xx} sur le coté opposé à la face chargée (correspondant donc au cas $\theta = \pi/2$ de la figure III-17) comparant avec les résultats trouvés par la formule (3.9). On peut voir que σ_θ atteint son maximum

$\sigma_\theta = 3\sigma^\infty = 3kN/m^2$ à la surface du trou, ce qui est bien le cas de nos résultats, et décroît avec r croissant pour atteindre $\sigma^\infty = 1$. Donc on valide la contrainte σ_θ .

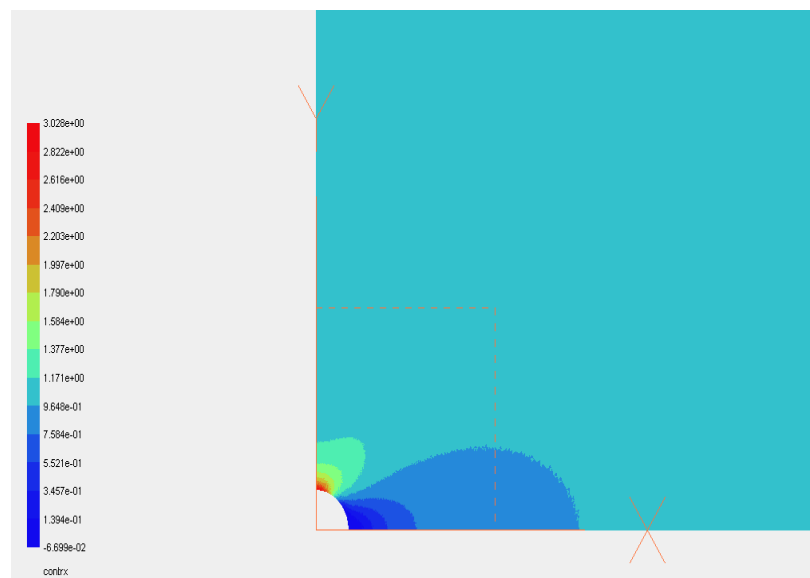


Figure 3-19 : Distribution de σ_{xx}

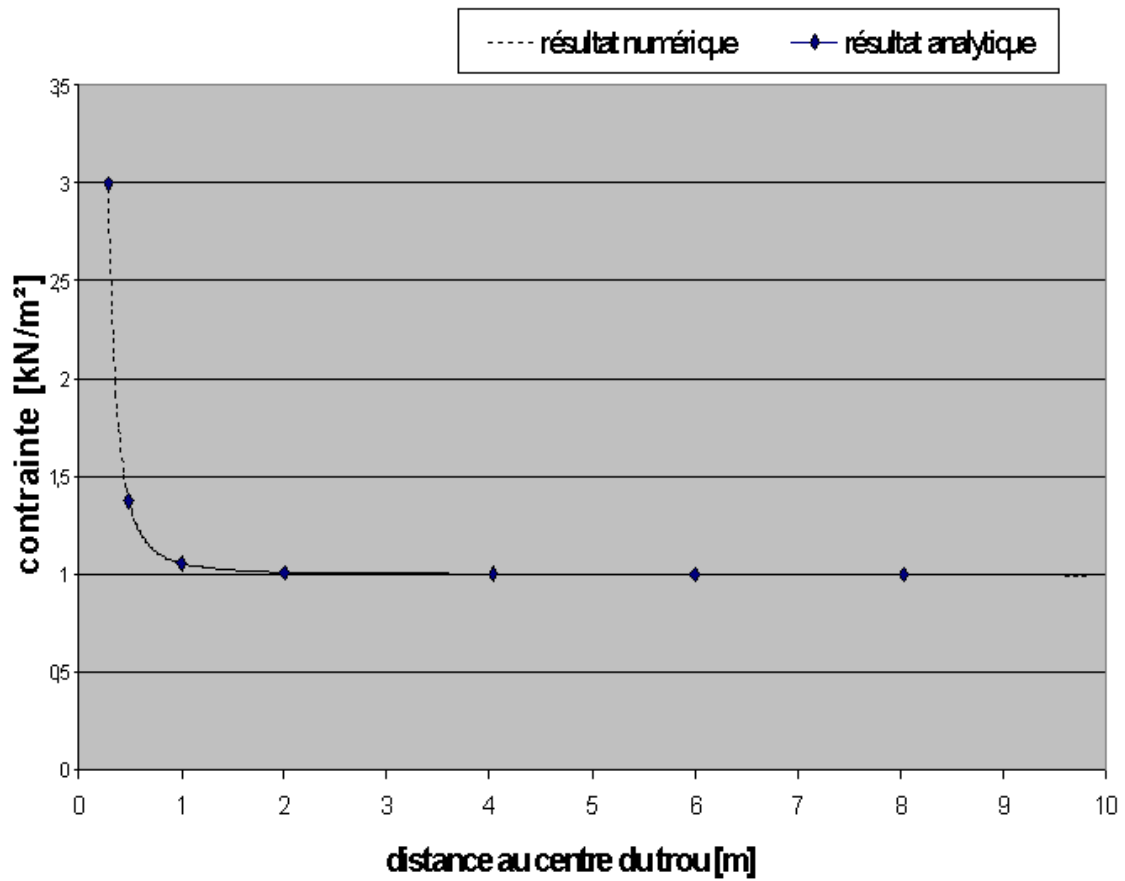


Figure 3-20 : Distribution de $\sigma_\theta(\theta = \pi/2)$



Figure 3-21 : Quelques valeurs de σ_θ près du trou

Maintenant, on donne à la figure 3.23 le calcul des contraintes σ_{yy} au même endroit comparant avec les résultats trouvés par la formule (3.8). On peut voir que σ_r atteint son maximum en $r = \sqrt{2}a = 0.4243$ et vaut $\sigma_{r_{max}} = 0.375\sigma^\infty = 0.375kN/m^2$

Ce qui est bien le cas de nos résultats, et décroît avec r croissant pour atteindre $\sigma^\infty = 0$ donc on valide la contrainte σ_θ .

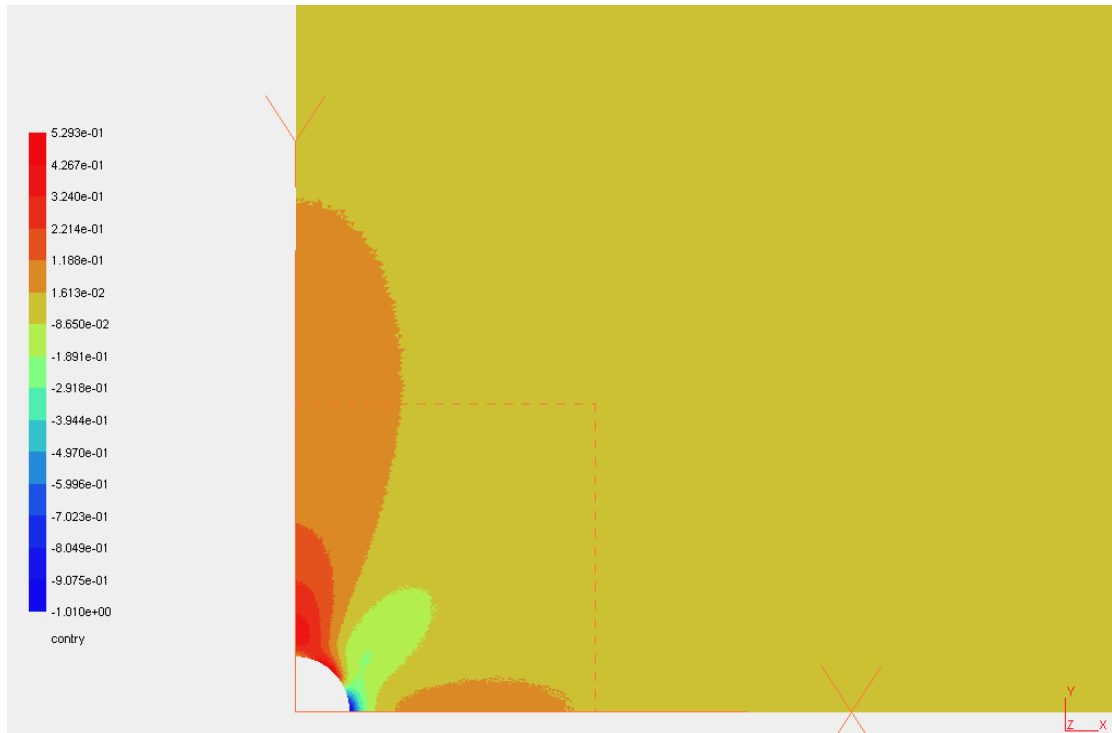


Figure 3-22 : Distribution de σ_{yy}

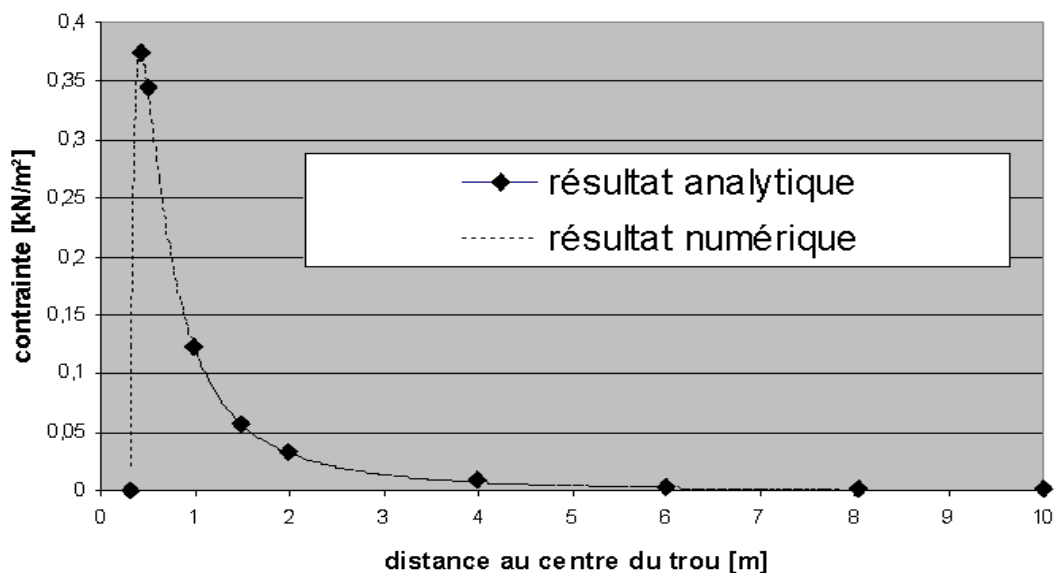


Figure 3-23 : Distribution de $\sigma_r(\theta = 3\pi/2)$

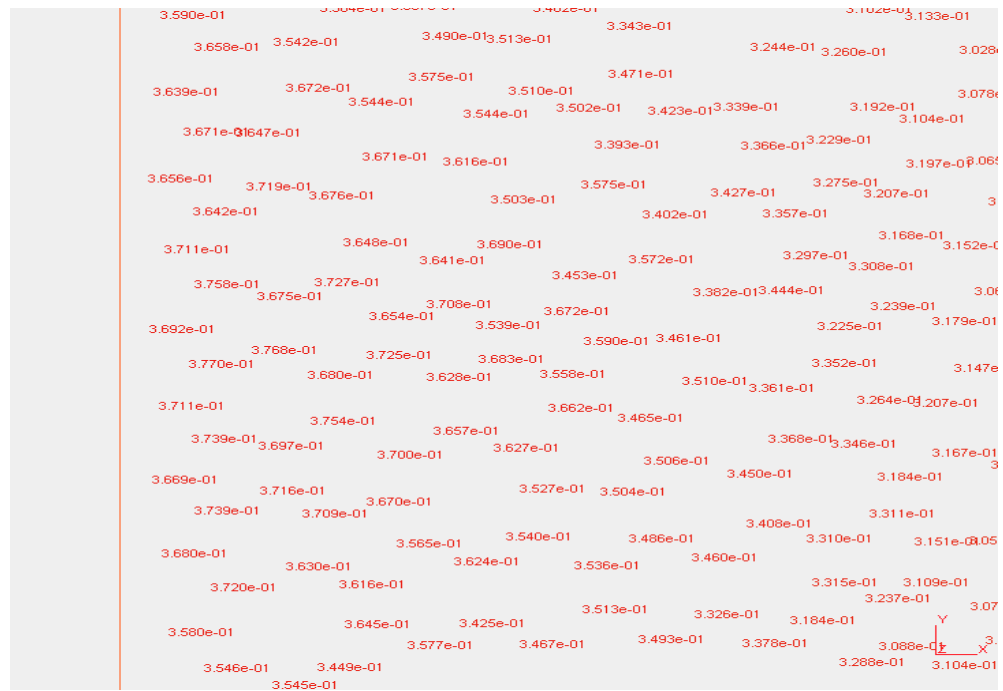


Figure 3-24 : Quelques valeurs de σ_r près du Maximum

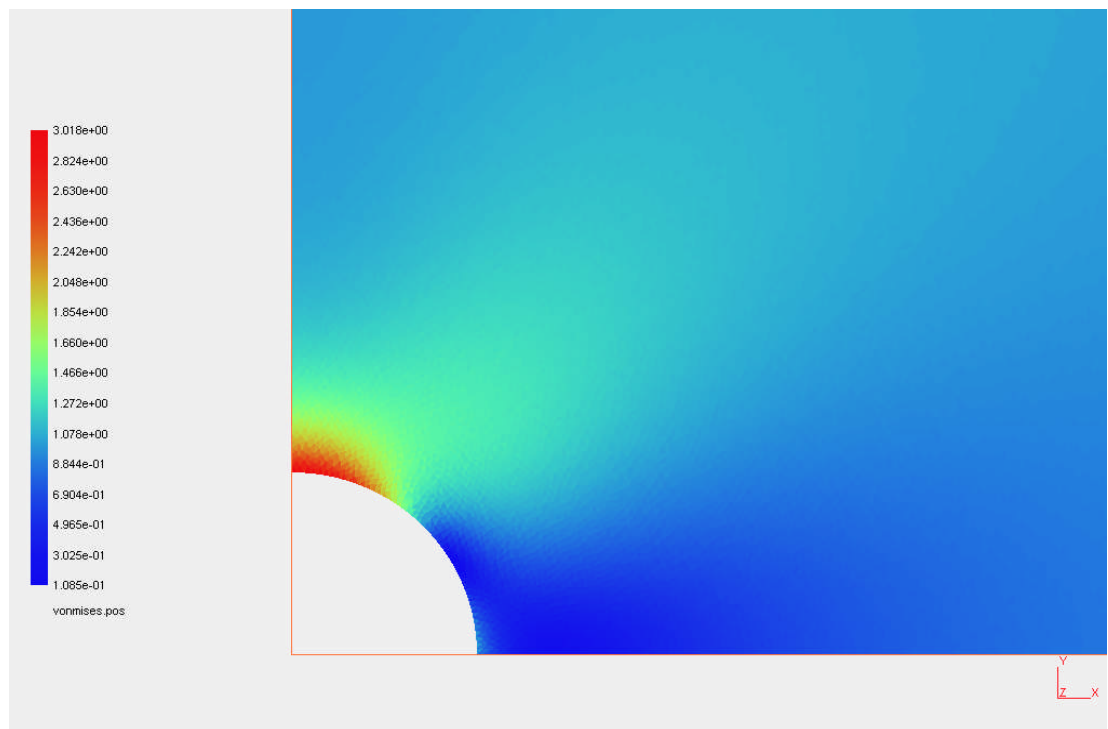


Figure 3-25 : Contraintes de Von Mises pour la plaque infinie trouée

III-3-2 Conclusion

Suite aux résultats obtenus précédemment, on valide le calcul des contraintes par le code C++ ainsi on peut passer à l'étape suivante c'est-à-dire l'adaptation du code pour en faire un code de propagation de fissure.

Chapitre IV

Vers la propagation

Chapitre IV : Vers la propagation

IV-1 Introduction

Avant de parler de la propagation, on définit la notion de doubles nœuds (Ouverture de la fissure) ensuite on présente la notion de zone cohésive (la liaison entre les nœuds de la fissure avec leur double) et en fin on tentera de dynamiser le code.

Pour bien visualiser ces adaptations successives, on propose de les illustrer par un exemple concret présenté à la figure 4.1 dénommé Poisson(en référence au célèbre coefficient de Poisson).

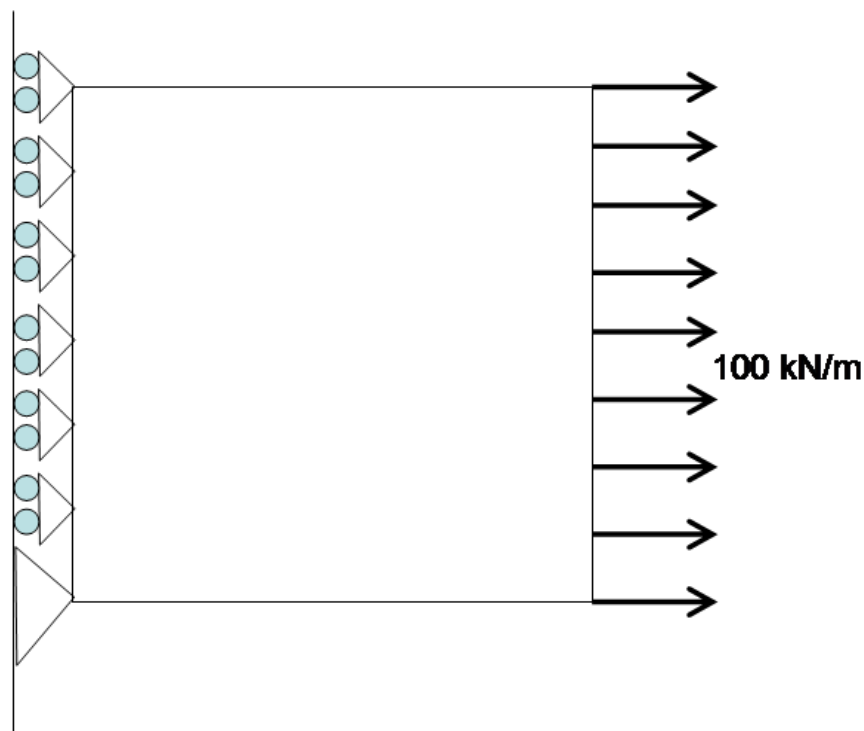


Figure 4-1 : Exemple illustratif de Poisson

IV-2 Les doubles nœuds

Il faudra à chaque fois au démarrage du programme lui donner le point de départ de la fissure ensuite on double les nœuds de sorte à pouvoir ouvrir cette fissure sans toucher au maillage comme représenté dans les figures 4-2 et 4-3. On donne par exemple l'arête 10-69, on crée deux nouveaux nœuds entre lesquels se trouve une nouvelle arête, on ne crée pas de nouveaux éléments comme on peut constater sur la figure 4-4. On doit donner à ces nœuds un numéro correspondant, mais un numéro qui n'est encore attribué à aucun autre nœud.

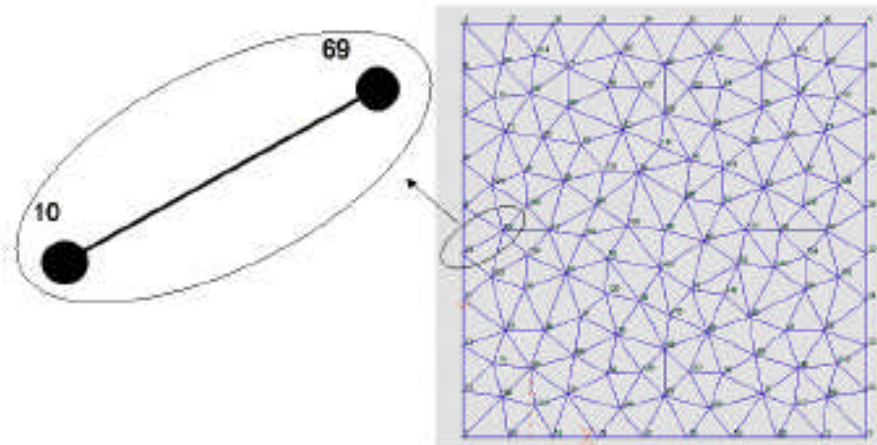


Figure 4-2 : Maillage simple dans Poisson

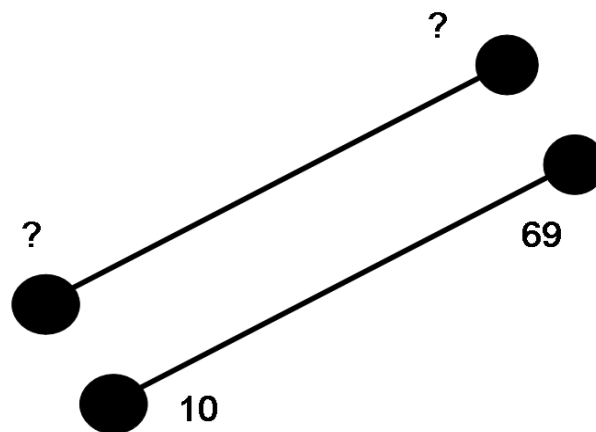


Figure 4-3 : Arête double

On leur donne les numéros d'ordre suivant : le plus élevé existant. Pour tenir compte de ces nœuds dans le programme, on doit modifier la matrice de raideur globale donc on augmente ses dimensions pour intégrer les nouveaux nœuds. On passe donc de dimension $(2 \times \text{nombre de nœuds}, 2 \times \text{nombre de nœuds})$ à des dimensions $(2 \times (\text{nombre de nœuds} + \text{nombre de nœuds double}), 2 \times (\text{nombre de nœuds} + \text{nombre de nœuds double}))$.

Il faut aussi affecter ceux-ci à leur élément respectif de manière à pouvoir calculer les matrices locales et ensuite les assembler correctement.

La Figure 4-5 montre deux éléments adjacents. A gauche ; ils sont séparés par une fissure et à droite l'existence d'une fissure entre les deux éléments.

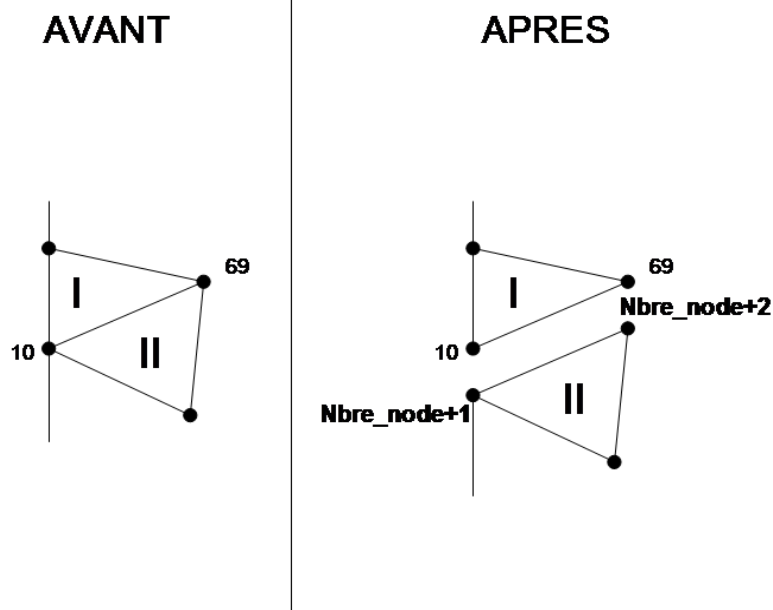


Figure 4-4 : Arête double et faces correspondantes

Pour associer ces nouveaux nœuds à la surface II de la figure 4-4 , on crée un vecteur ETATF, sui reprend les états des faces donc chaque face est ainsi associée à un état :

- ETATF= -1 pour les faces situées d'un coté de la fissure.
- ETATF= 0 pour celles situées de l'autre coté et contenant les nœuds fictifs

On en donne une représentation graphique à la figure 4-5. On peut suivre sur celle-ci l'évolution des états des faces autour de la fissure.

On possède maintenant les outils nécessaires à la construction de la matrice de raideur globale. Tous les nœuds doubles sont associés de manières cohérentes à une face. En effet, par itération sur les faces, on définit le nœud contenu dans la fissure qu'il faut prendre (le nœud réel ou le nœud fictif).

On procède comme suit :

{ Pour toutes les faces }

{ Si ETATF=0 }

Le nœud contenu dans la fissure n'est pas celui donné par le maillage, mais bien son correspondant contenu dans le vecteur refdb

L'assemblage de la matrice de raideur globale est ensuite effectuée comme précédemment.

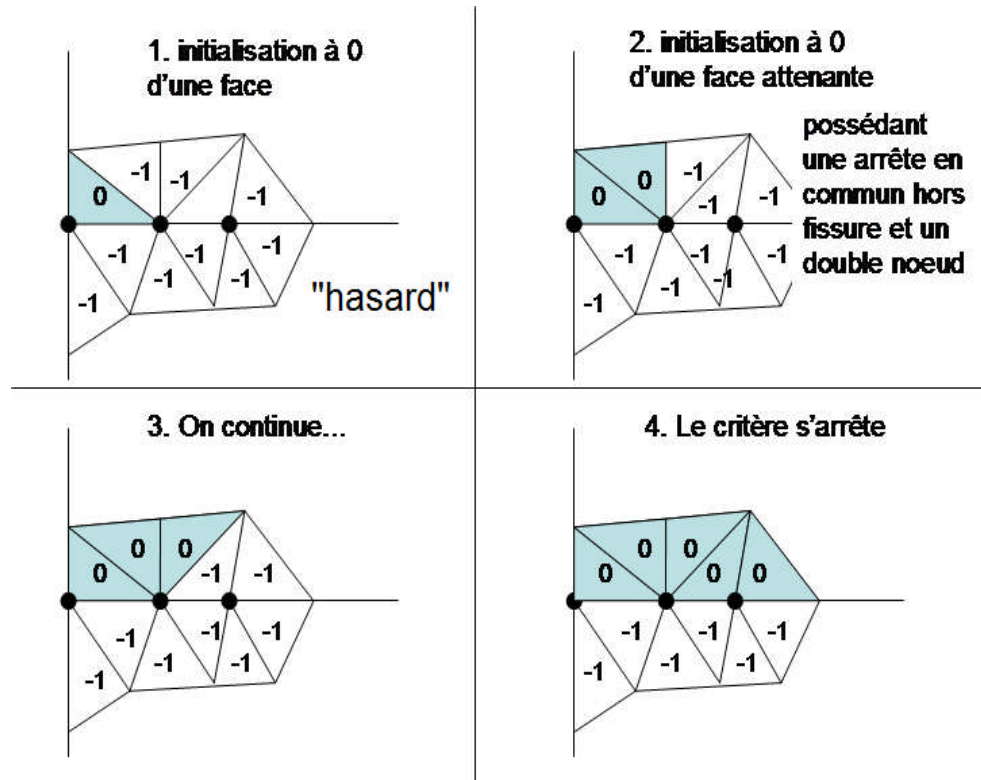


Figure 4-5 : Correspondance nœud-face

On donne à la figure 4-6 le résultat de cette opération pour notre exemple illustratif de Poisson, dans lequel on a rajouté une fissure contenant 2 nœuds. On a ajouté un autre type de nœud : la pointe de fissure qu'il faudra à présent donner en plus de l'initialisation de la fissure. Le programme se présente comme suit :

1. Démarrage : chargement du maillage
2. Voulez vous une fissure initialisée ? oui=1, non=0
 - (a) 0. Démarrage du programme
 - (b) 1. Combien de doubles nœuds ?
 - i. Donner le numéro d'ordre des doubles nœuds voulus
 - ii. Donner le numéro d'ordre du nœud de pointe de fissure
 - iii. Démarrage du programme
3. Fermeture du programme.

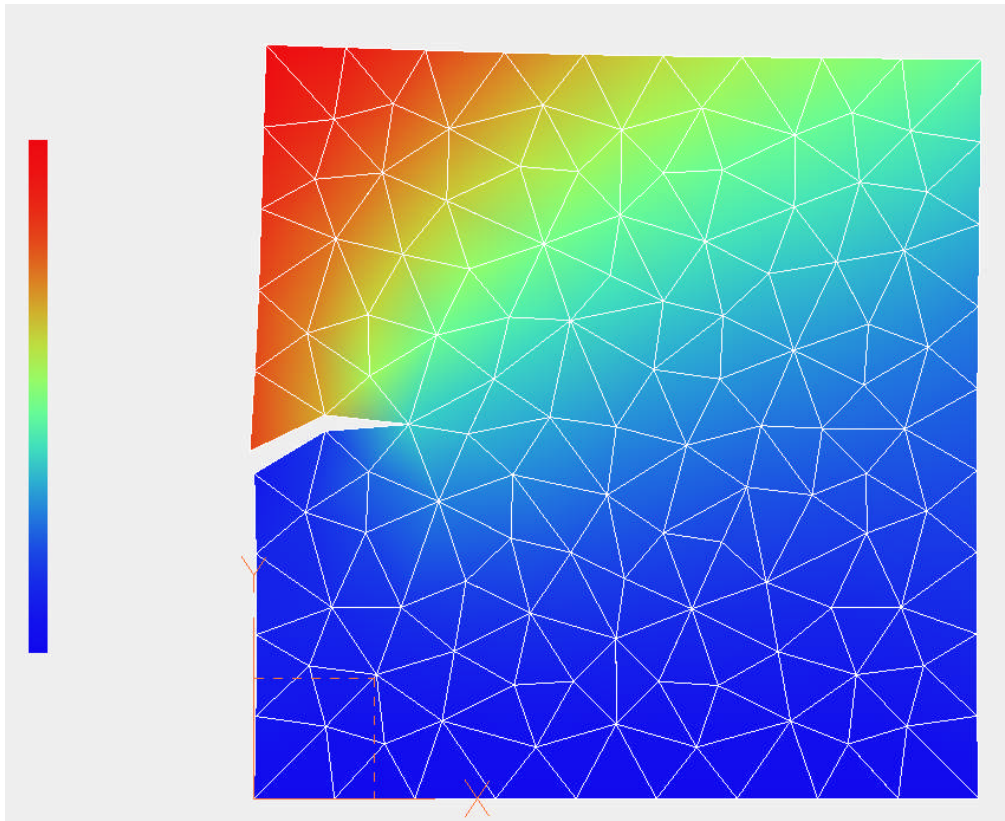


Figure 4-6 : Fissure dans Poisson

On donne ci-après deux exemples à ce stade du code :

1^{er} exemple

- (a) Voulez vous une fissure initialisée ?
- (b) OUI Combien de double nœuds ?
- (c) 8 Donnez le numéro des doubles nœuds ?
- (d) 10 69 44 132 101 38 99 119 Nœud de pointe de fissure ?
- (e) 79

Le résultat est donné à la figure 4-7

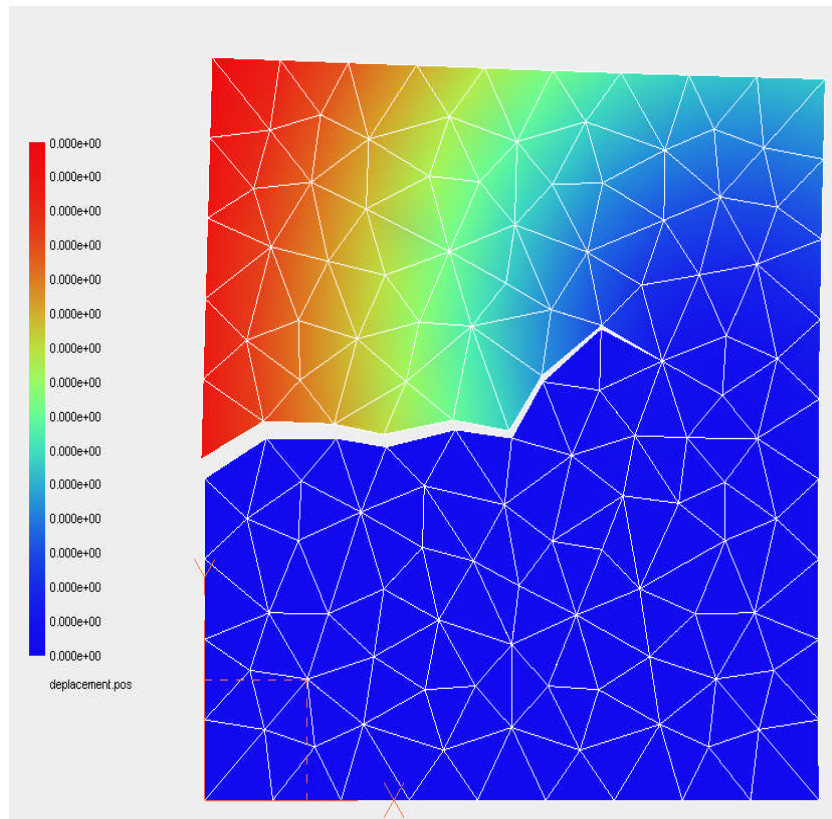


Figure 4-7 : Résultat du premier exemple

1^{er} exemple

- (a) Voulez vous une fissure initialisée ?
- (b) OUI Combien de double nœuds ?
- (c) 8 Donnez le numéro des doubles nœuds ?
- (d) 10 69 44 132 101 38 99 119 79 57 108 27 Nœud de pointe de fissure ?
- (e) NON

Le résultat est donné à la figure 4-8. Le résultat est une plaque déchirée en deux puisqu'on lui donné une fissure traversant l'entièreté de la plaque.

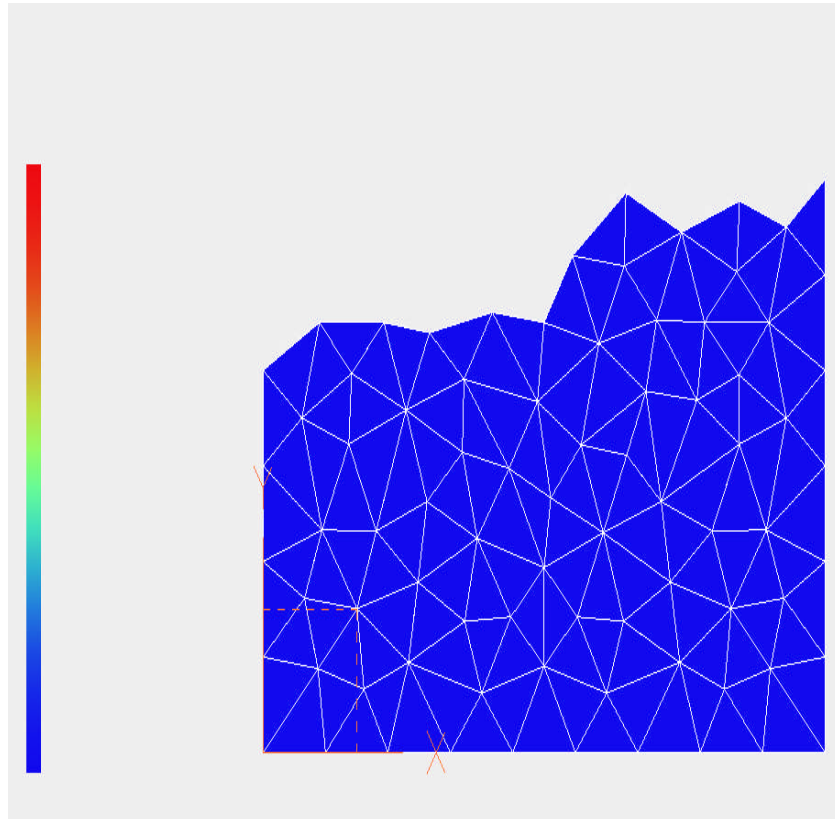


Figure 4-8 : Résultat du second exemple

IV-3 Zones cohésives

La zone cohésive est la zone endommagée, c'est une zone où il faut lier les nœuds de la fissure avec leur double respectivement avec une loi de comportement présentée sur la figure 4-9. Dans cette figure les u_i représentent la distance entre les nœuds et f_i la force dans le ressort donc lorsque la distance entre les nœuds augmente la force dans le ressort diminue jusqu'à atteindre zéro, moment où il n'y a alors plus de ressort.

Pour appliquer tout ça dans le code, on doit relier les doubles nœuds par une certaine raideur K (Figure 4-10), celle-ci est attachée à la loi de comportement dans la matrice de rigidité globale. À partir d'une certaine valeur de la traction présentée entre les doubles nœuds, le ressort saute et la fissure apparaît, les nœuds ne sont plus liés entre eux.

Dans ce travail, on a simplement modélisé la présence de barres entre les nœuds, il n'y a pas de loi cohésive à proprement parler.

Pour rendre physique ces barres, on doit, au sein de la matrice de raideur globale, relier les doubles nœuds par une certaine raideur. On a deux composantes, horizontale K_h et verticale K_v et en même temps il faudra tenir compte de l'angle d'inclinaison α du ressort(ou plutôt de la barre).

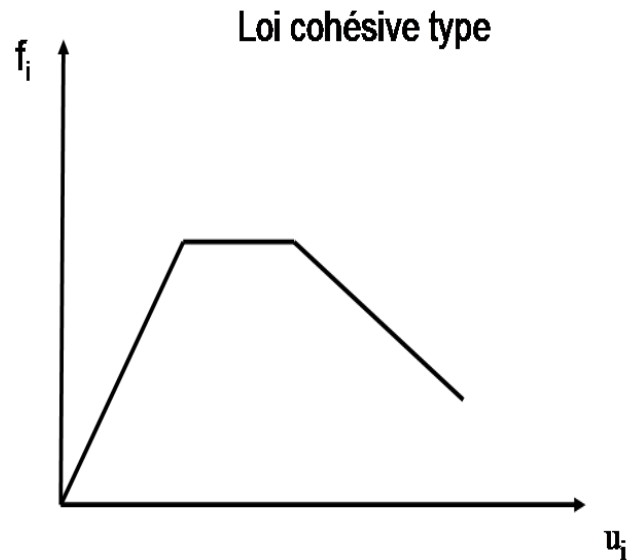


Figure 4-9 : Loi cohésive type

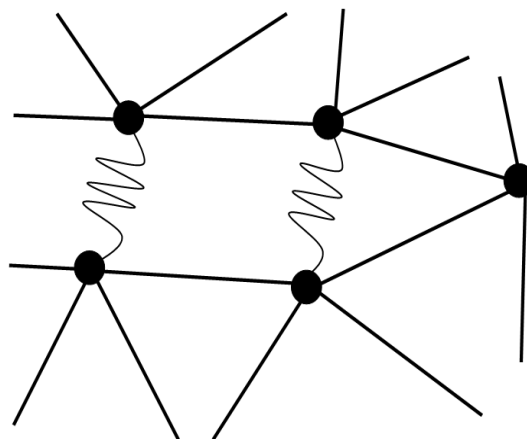


Figure 4-10 : Ressort entre les doubles nœuds

Pour une configuration du type de la figure 4-11, on a une matrice de raideur locale comme présenté à la figure 4-12.

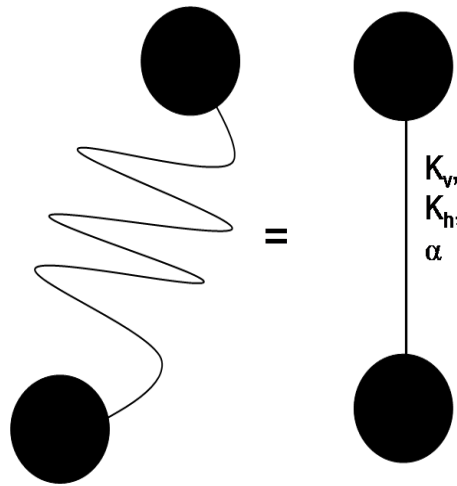


Figure 4-11 : Système barre

	Refdb[i]x	Refdb[i]y	Refdb[i+1]x	Refdb[i+1]y
R e f d b [i]	$K_H \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + K_V \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$	$K_H \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + K_V \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$	$-K_H \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha - K_V \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$	$-K_H \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - K_V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
	$K_H \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + K_V \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$	$K_V \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + K_H \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$	$-K_H \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - K_V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$-K_V \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha - K_H \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$
R e f d b [i + 1]	$-K_H \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha - K_V \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$	$-K_H \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - K_V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$K_H \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + K_V \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$	$K_H \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + K_V \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$
	$-K_H \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - K_V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$-K_V \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha - K_H \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$	$K_H \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + K_V \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$	$K_V \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + K_H \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha$

Figure 4-12 : Matrice de raideur locale d'une barre

On peut à présent tester cette nouvelle adaptation. La manière la plus visible de procéder est de reprendre un cas similaire à celui de la figure 4-12 , et d'y mettre des ressorts.

La plaque devrait être coupée en deux, mais les deux parties devront toujours être reliées physiquement.

On adapte le menu du programme comme suit

1. Démarrage : chargement du maillage
2. Voulez vous une fissure initialisée ? oui=1, non=0
 - (a) 0. Démarrage du programme
 - (b) 1. Combien des doubles nœuds ?
 - i Donnez le numéro des doubles nœuds voulus
 - ii Nœud de pointe de fissure ?
 - iii Voulez vous des ressorts ? oui=1, non=0
 - A. 0. Démarrage du programme
 - B. 1
 - a. Entrez la constante de raideur horizontale et verticale
 - b. Démarrage du programme
3. Fermeture du programme

On présente à la figure 4.13, le cas du système Poisson, coupé en deux et dont les deux parties sont reliées par des ressorts de raideur, respectivement, $K_v=K_h=1, 0.1, 0.01, 0.001$, raideurs prises arbitrairement.

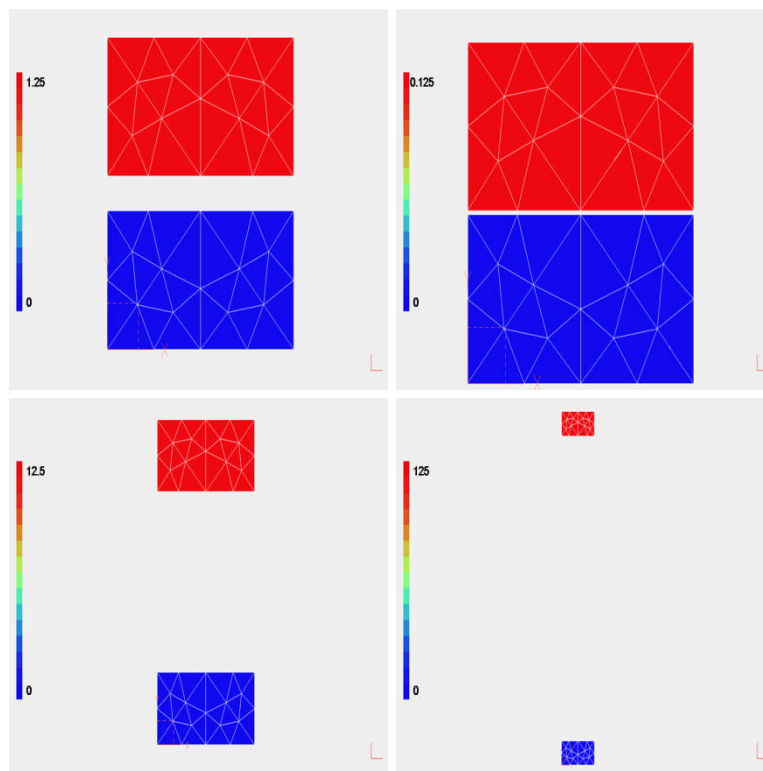


Figure 4-13 : Poisson pour raideur $K=1, 0.1$ et 0.001

On remarquera sur l'échelle présentée à gauche que le maximum est multiplié par 10 à chaque division (par 10 de la constante du ressort).

En observe enfin l'effet de ces ressorts sur l'ouverture d'une fissure. On prend l'exemple de la figure 4-7. En introduisant des ressorts de raideur 1 par exemple, on obtient les déplacements présentés à la figure 4-14

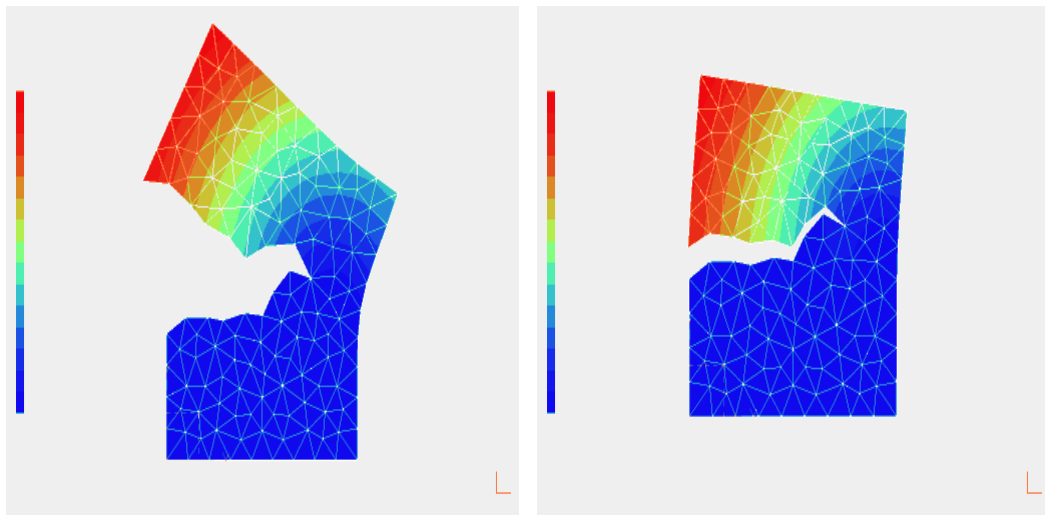


Tableau 4-14 : Poisson fissuré sans ressort et avec ressort de raideur $K=1000$

On remarque bien que la fissure est nettement moins ouverte, en fait, il n'y en a pas, c'est juste que la raideur entre les deux nœuds correspondants est plus faible que celle qui existe intrinsèquement dans le matériau, qui est endommagé.

La loi cohésive sera intéressante quand il s'agira de parler de vitesse d'endommagement, de propagation de fissure, c'est juste un phénomène retardateur, le résultat final en étant bien sur le même, une fissure ouverte. Le critère de la traction limite pourra être utilisé comme critère d'arrêt et de stabilité de la fissure, mais nous en reparlerons dans la partie consacrée à la propagation à proprement parler. Pour de plus amples informations sur la zone cohésive voir [10] et [11].

IV-4 Vers un code dynamique

Le modèle dynamique qu'on établit, est une répétition du même programme avec incrémentation du nombre de données, les doubles nœuds contenus dans la fissure, et donc un seul chargement du maillage initial, ce qui nous permet de gagner beaucoup de temps.

Dans un premier temps, on ne possède ni critère de direction, ni critère d'arrêt, on met en place une méthode générale, qu'il faudra ensuite adapter.

La méthode est simple, une variable globale régit tout le système, c'est le nombre des doubles nœuds initialisé lors de la représentation initiale de la fissure. A la fin de chaque exécution du programme (c'est-à-dire après chaque itération), l'opération suivante est effectuée :

$$(\text{Nbre double nœud}) = (\text{Nbre double nœud}) + 1 \quad (4.1)$$

Le nouveau double nœud est choisit par évaluation des distances entre les nœuds voisins de la pointe de fissure et la pointe de fissure elle-même, avec critère de direction, qu'on peut également choisir.

L'ancienne pointe de la fissure devient le dernier double nœud, et le nouveau nœud choisi parmi les voisins de l'ancienne point de fissure, devient la nouvelle pointe de fissure, et on recommence alors une itération avec cette fissure qui à évolué.

Le programme se présente alors de la manière suivante :

1. Entrez le double nœud numéro 1
2. Entrez le double nœud numéro 2
3. Entrez la pointe de fissure
4. Voulez-vous des ressorts ? Non=0, Oui=1
 - (a) 0. Démarrage du programme dynamique
 - (b) 1.
 - i Entrez la raideur verticale K_v
 - ii Entrez la raideur horizontale K_h
 - iii Démarrage du programme dynamique
5. Fin du programme

On donne à la figure 4.15, les étapes successives pour Poisson, avec une fissuration jusqu'à déchirure totale.

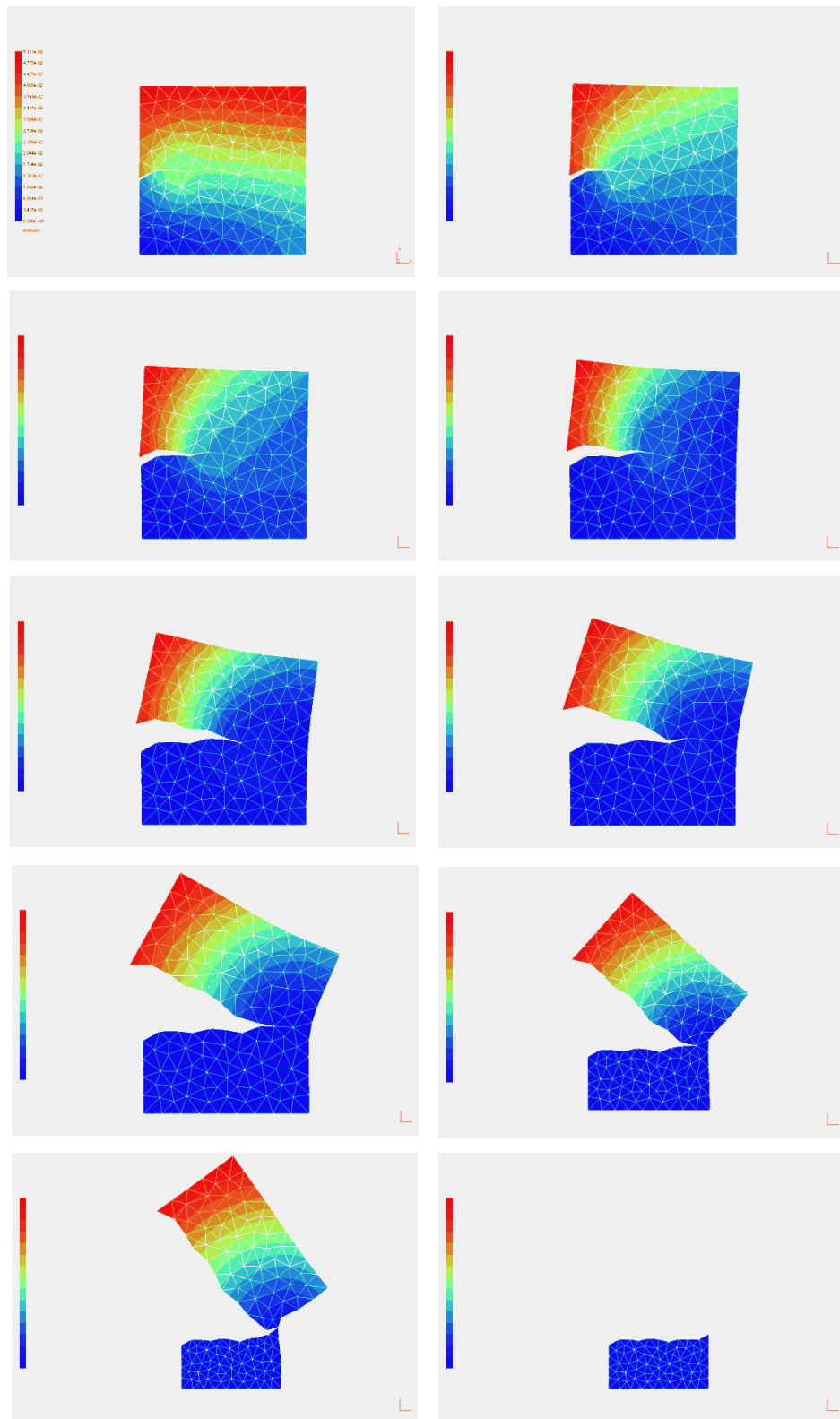


Figure 4-15 : Propagation forcée jusqu'à déchirure totale

Maintenant on a tous les outils nécessaires à la propagation, les doubles nœuds, une liaison entre ces doubles nœuds (ressort ou bien une barre) donc il nous reste seulement un critère de direction et un critère d'arrêt de la propagation.

On étudie, dans le cadre de ce travail, deux critères, le premier est basé sur l'énergie de déformation et le deuxième sur les coefficients d'intensité de contrainte.

IV-5 L'énergie de déformation

On commence par l'utilisation de ce critère basé sur l'énergie de déformation, la fissure se propage dans la direction possédant une variation nulle d'énergie de déformation, c'est à dire la direction la moins couteuse en énergie pour le système.

Pour connaître cette direction, on calcul l'énergie de déformation et ce pour chaque élément se trouvant autour de la pointe de fissure. Pour chacune d'elles, on évalue l'énergie de déformation définie dans [12], pour cela on utilise la formulation suivante, valable en FEM :

$$W_e = U_e^T K_{loc} U_e \quad (4.2)$$

Dans laquelle U_e est le vecteur contenant les déplacements suivants x et y des trois nœuds de l'élément considéré (c'est donc un vecteur de dimension 6) et K est la matrice de raideur locale de cet élément. L'énergie de déformation, W_e s'exprime en [J], en effet, le vecteur déplacement a comme unité[m], la matrice de raideur [N/m] et donc W s'exprime bien en [N.m]=[J].

Connaissant ainsi les différentes énergies de déformation, on les rapporte au centre de gravité de la face. On est donc capable de trouver l'élément qui possède l'énergie de déformation la plus élevée. On sélectionne alors les centres de gravité de part et d'autre de ce dernier. Pour que cela soit possible, on trie les centres de gravité suivant leur orientation par rapport à l'horizontale.

On effectue une interpolation parabolique sur ces trois valeurs d'énergie. On trouve le maximum ainsi que l'angle correspondant. La fissure devrait donc se diriger dans cette direction.

Malheureusement, ce critère n'est pas satisfaisant, il ne donne pas de résultats physiquement acceptable. C'est pourquoi on s'intéresse au second critère développé dans la section suivante.

On donne à la figure 4-16, un mauvais exemple de propagation obtenu par critère énergétique.

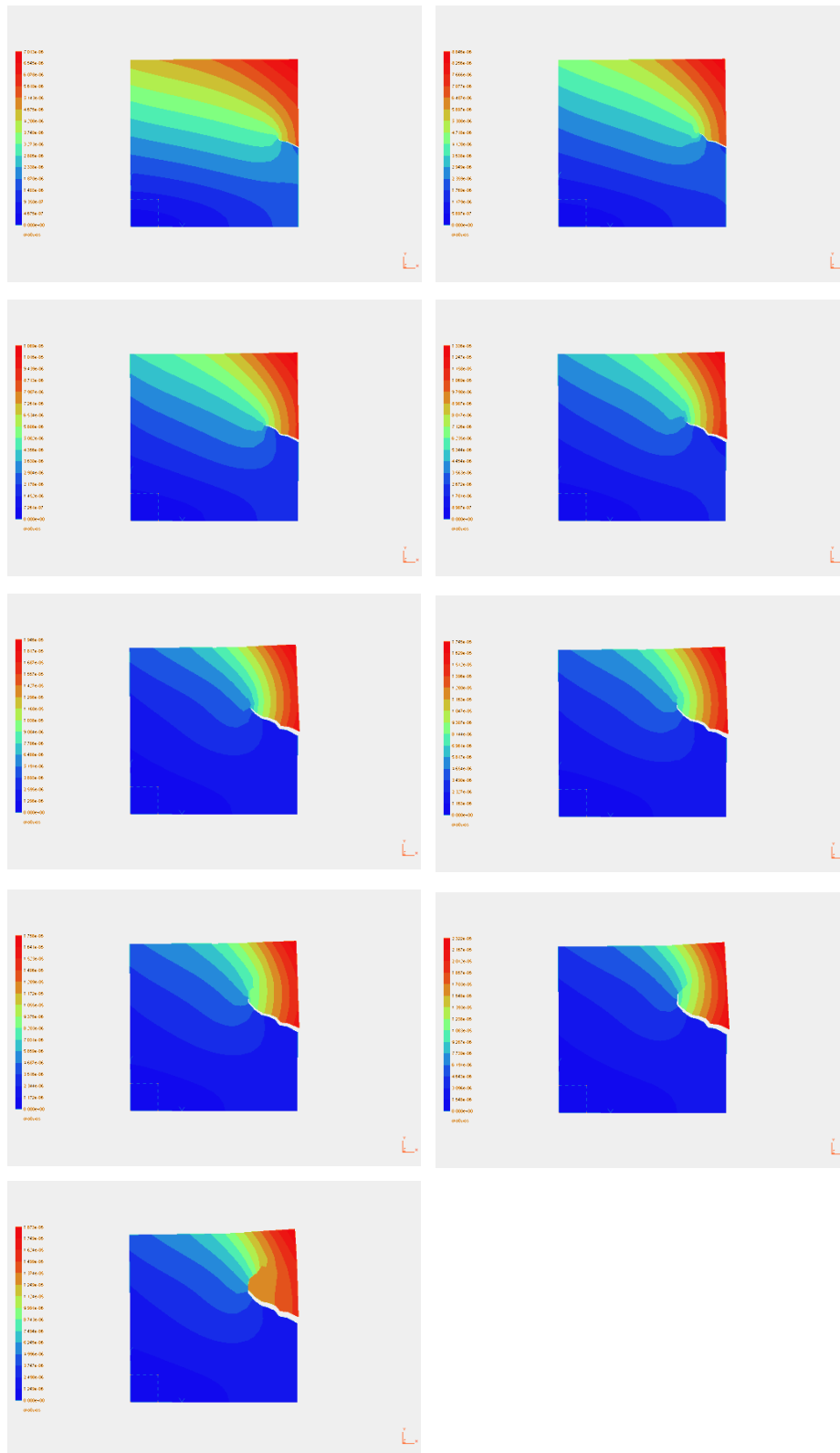


Figure 4-16 : Propagation par critère énergétique

IV-5 Les coefficients d'intensité de contrainte

On a vu au chapitre relatif aux éléments finis que l'élément de Barsoum est utilisé pour les faces situées autour de la pointe de fissure. L'article [13] donne une méthode de calcul des SIF utilisant les propriétés du Modified Quarter Point Element dont l'avantage réside dans son extrême simplicité. Le calcul est donné par :

$$K_I = \frac{G}{3(k+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (8\Delta u_2^B - \Delta u_2^C) \quad (4.3)$$

$$K_{II} = \frac{G}{3(k+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (8\Delta u_1^B - \Delta u_1^C) \quad (4.4)$$

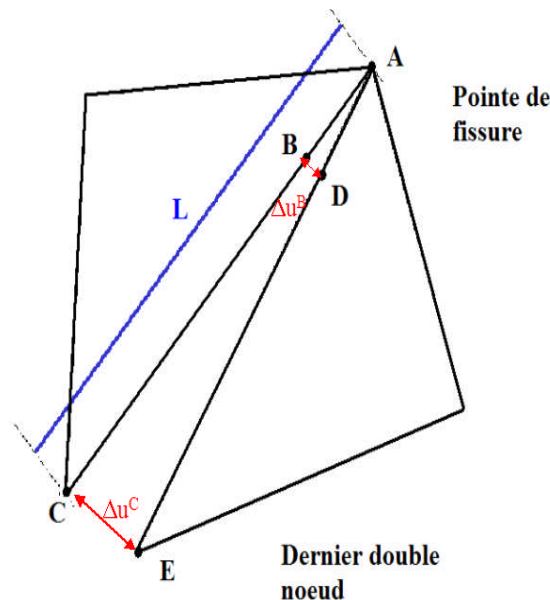


Figure 4-17 : Représentation de la pointe de fissure

Avec :

- G : module de cisaillement $G = \frac{E}{2x(1+\nu)}$
- $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contrainte plane, et $k = 3 - 4\nu$ en déformation plane
- L est la distance entre la pointe de fissure et le dernier double nœud
- Δu_1^B et Δu_2^B composante tangentielle et normale de l'ouverture de la fissure entre B et D.
- Δu_1^C et Δu_2^C composante tangentielle et normale de l'ouverture de la fissure entre B et D.

Afin de valider le calcul des K_I et K_{II} , on analyse le cas de la figure 4-18, dans [14], on apprend que pour une longueur de fissure a sur le bord libre de la plaque mince semi-infinie, on a $K_I = 1.12\sqrt{a}\sigma^\infty\sqrt{\pi}$. On donne au tableau 4-1 les résultats obtenus pour K_I pour une fissure de 0.5m.

Dont les valeurs sont à comparer avec la solution analytique, pour un $\sigma^\infty = 1kN/m$, $K_I=1.403$.

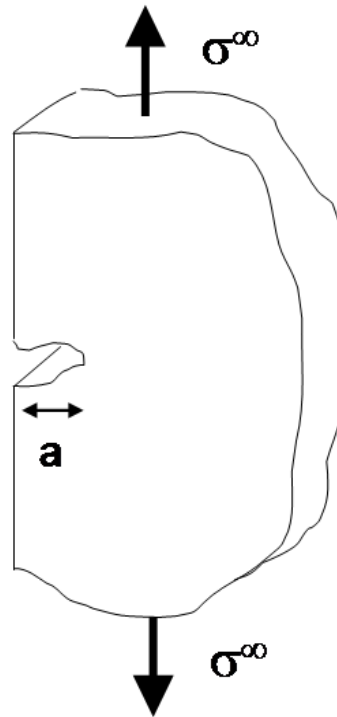


Figure 4-18 : Fissure de longueur a sur le bord d'une plaque mince infinie

Nombre d'élément sur la fissure	Taille D'un élément	K_I	Pourcentage d'erreur
5	0.1m	1.375	2
10	0.05m	1.3925	0.7
20	0.025m	1.404	0.07

Tableau 4-1 : Calcul de K_I pour une fissure de longueur 0.5m au bord d'une plaque semi finie

On donne au tableau 4-2 les résultats pour une fissure de 1m dans la même configuration.

Nombre d'élément sur la fissure	Taille D'un élément	K_I	Pourcentage d'erreur
2	0.5m	1.807	9.85
4	0.25m	1.966	0.96
10	0.1m	2.007	1.1

Tableau 4-2 : Calcul de K_I pour une fissure de longueur 1m au bord d'une plaque semi finie

Les valeurs sont à comparer avec $K_I=1.958$. L'erreur de convergence observée dans le cas où la fissure vaut 1m, révèle la problématique de l'infinité de la plaque. La taille de notre fissure devient non négligeable par rapport aux dimensions initiales données.

Après le calcul de ces deux coefficients, on utilise la formule suivante tirée de [15] donnant l'angle de propagation de la fissure :

$$\theta_c = 2 \arctang \left[0.25 \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \sin(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (4.5)$$

Cet article nous apprend aussi qu'il est possible de connaître la vitesse de propagation grâce au calcul de ce même angle.

Comme on ne peut propager la fissure que le long des arrêtes, on cherche, connaissant cet angle le point le plus proche de la direction calculée.

Le point calculé devient alors la nouvelle pointe de fissure, l'ancienne pointe de fissure devient le dernier nœud double et une nouvelle exécution du programme démarre dans cette nouvelle configuration.

A fin d'illustrer ce nouveau critère, on se propose d'étudier deux cas en particulier. Le premier est l'exemple Poisson sous trois configuration différentes, et présentées à la Figure 4-19.

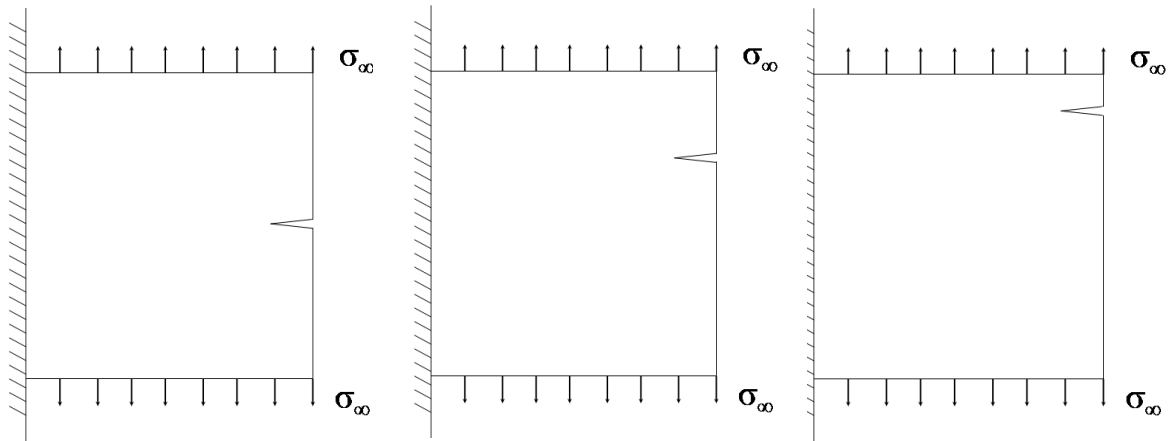


Figure 4-19 : Poisson avec initiation de la fissure à trois endroits différents

Le premier cas, est un cas parfaitement symétrique, et on s'attend donc à voir la fissure se propager en ligne droite de droite à gauche, jusqu'à rencontrer l'encastrement. C'est en effet ce que l'on peut observer à la figure 4-20, présenté ci-dessous.

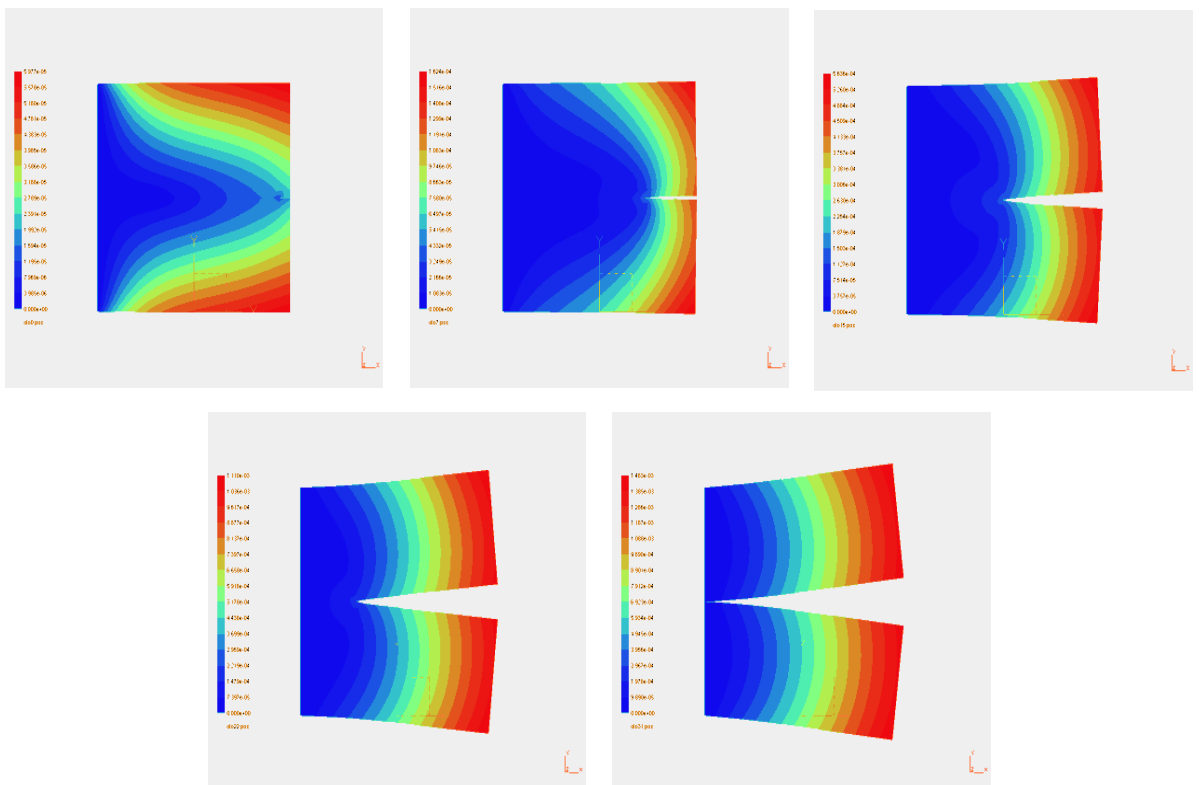


Figure 4-20 : Poisson, première configuration

Pour le deuxième cas de la figure 4-19, le caractère infini de la plaque va se marquer de moins en moins au fur et à mesure que la fissure avancera, ce qui a pour effet de faire remonter la fissure, vu la déformation de la configuration, la partie basse n'étant plus là pour équilibrer ce changement de direction. On présente les résultats obtenus à la figure 4-21.

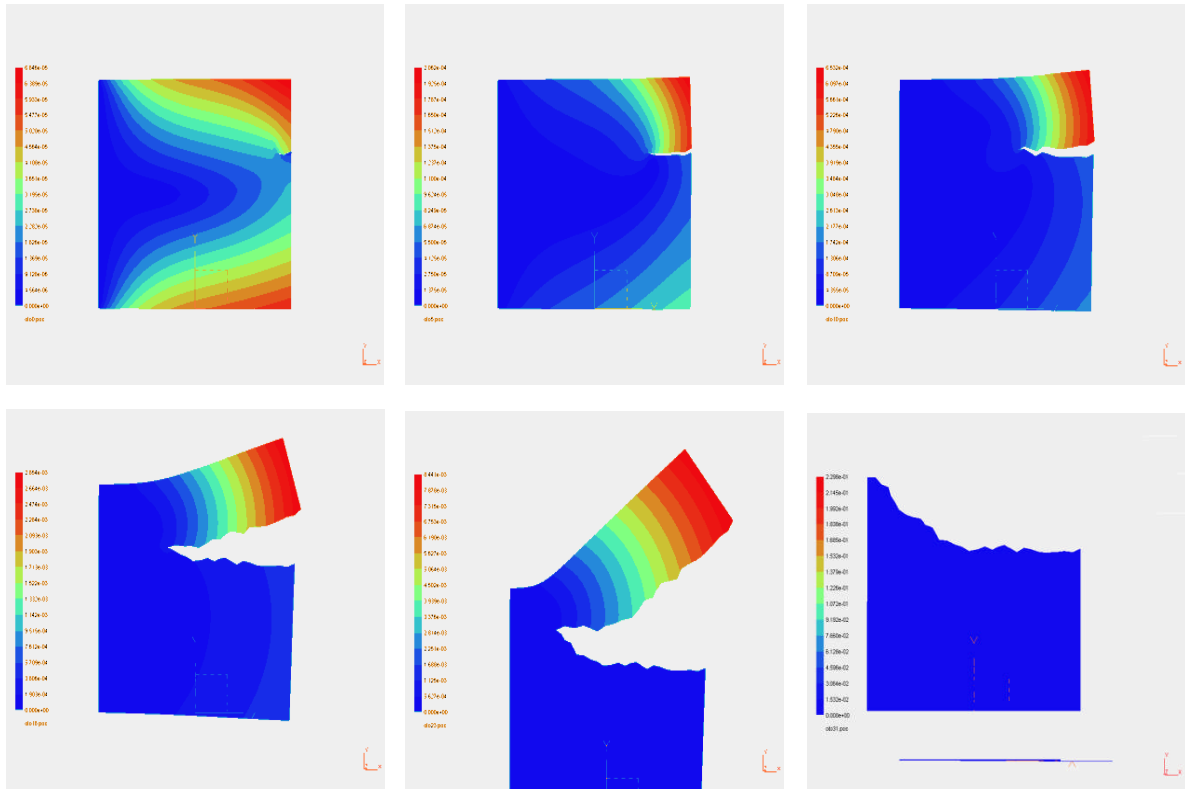


Figure 4-21 : Poisson, deuxième configuration

Le troisième cas, enfin, verra la condition de plaque infinie va se marquer au fur et à mesure que la fissure avancera, plus rapidement que pour le cas précédent, on a en effet une tendance de la fissure à remonter plus rapidement, comme montrer à la figure 4-22.

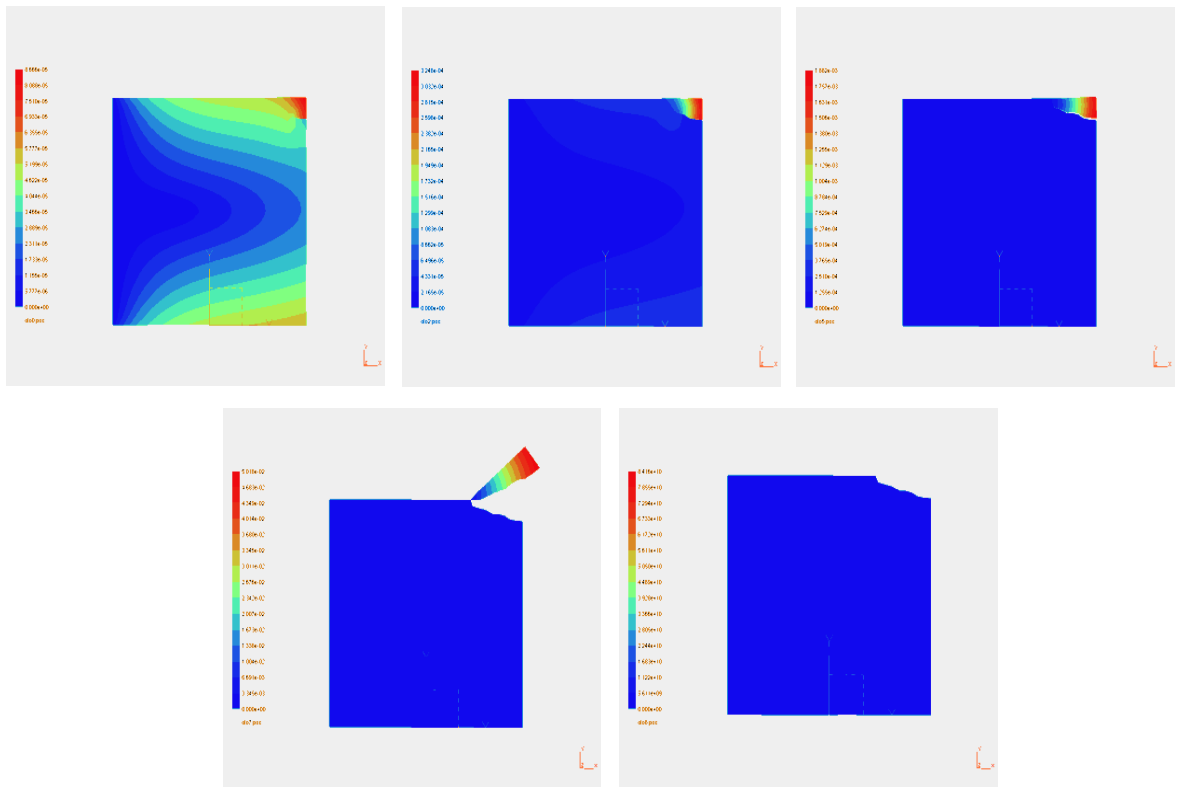


Figure 4-22 : Poisson, troisième configuration

On donne à la figure 4-24, la propagation d'une fissure pour un essai 3 points, dans la configuration de la figure 4-23.

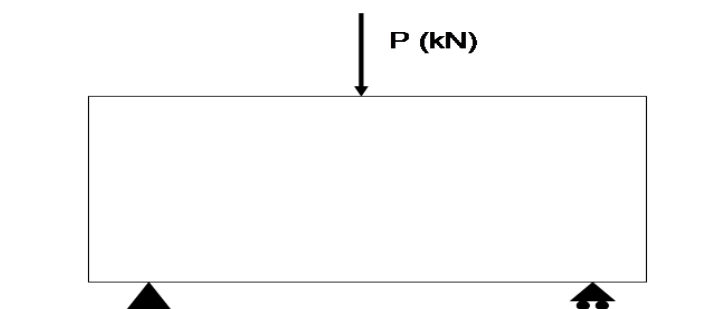


Figure 4-23 : Essai 3 points

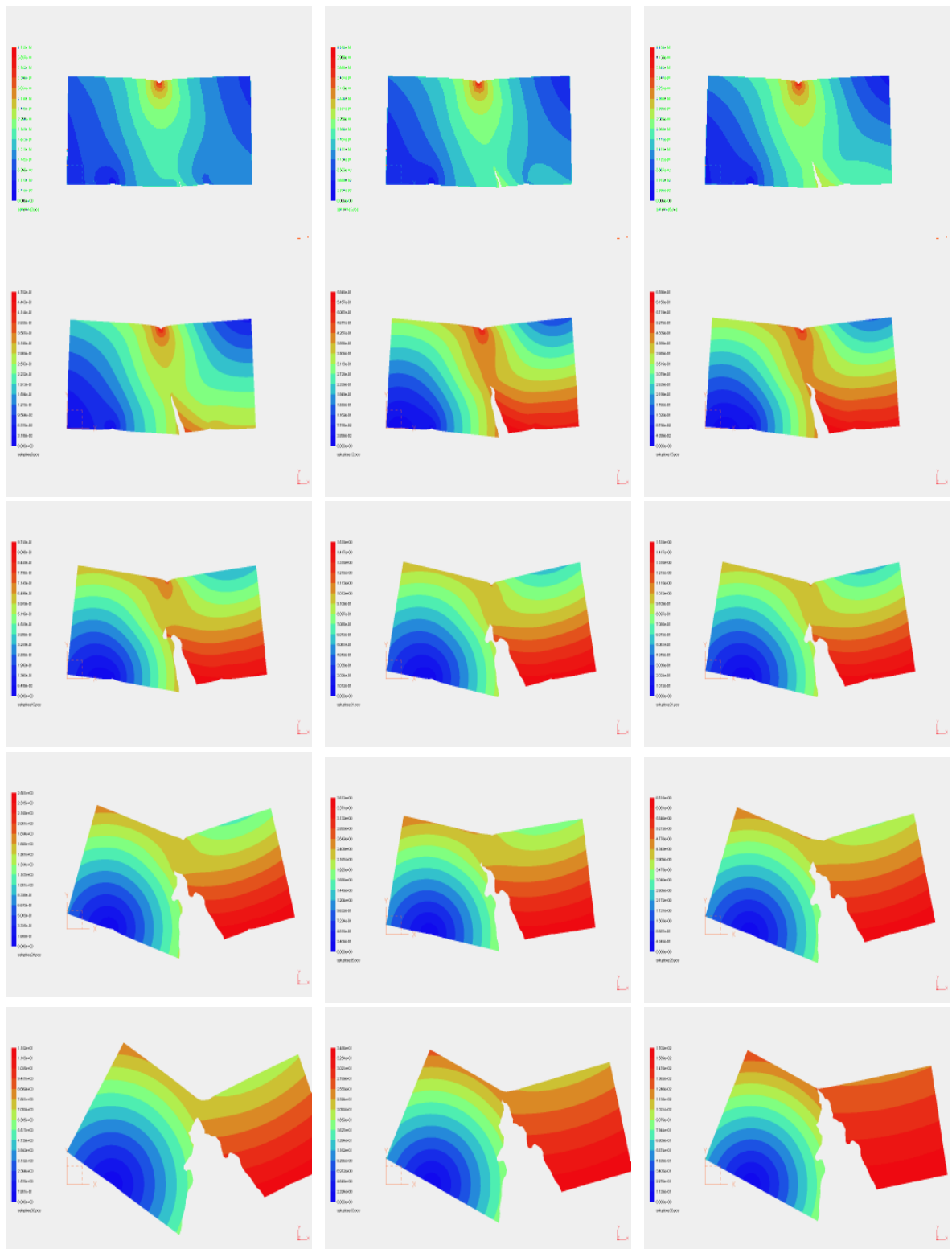


Figure 4-24 : Résultat, Essai trois point

Chapitre V

Conclusion Générale Et Perspectives

Chapitre V : Conclusion Générale et Perspectives

V-1 Conclusion

Ce travail s'intéresse essentiellement à la modélisation de la propagation d'une fissure par les éléments finis, nous avons procédé de la manière suivante :

En premier lieu, on a élaboré un code d'élasticité linéaire, c'est-à-dire un code qui calcule les déplacements et les contraintes des structures en 2D. On a remarqué que plus le nombre de nœuds augmente et plus on a une meilleure précision mais il y'a un compromis entre le temps d'exécution et la précision des résultats.

Dans la deuxième partie, on a commencé par les outils nécessaires pour la propagation de fissure à savoir les doubles nœuds et la zone cohésive ensuite nous avons inséré entre ces doubles nœuds un ressort (une barre), c'est en fait une première étape vers la création d'une zone cohésive, zone qui régit la portion endommagée de la matière. La différence entre les barres et la zone cohésive réside dans le fait que dans ce dernier cas, il existe une loi entre l'effort de traction dans la barre et la distance entre les doubles nœuds, lorsque cette distance atteint une certaine valeur, la force diminue jusqu'à devenir nulle, et on peut considérer le matériau comme fissuré et non plus endommagé.

A la fin, il a fallu rendre le code dynamique, c'est-à-dire capable de propager la fissure, dans ce cas on a utilisé deux critères, le premier basé sur l'énergie de déformation (qui donne des résultats moins précis que le 2ème critère) et le deuxième qui est basé sur les facteurs d'intensité de contrainte. Il a fallu introduire l'élément de Barsoum qui permet de lever la singularité en pointe de fissure et de rendre le champ de contrainte linéaires. Nous avons de cette manière pu mieux capturer ce dernier champ. Nous avons utilisé cet élément sur toutes les faces situées en bout de fissure. Nous avons calculé les coefficients d'intensité de contrainte et l'angle de propagation de la fissure qui dérive du calcul de ces derniers.

Il a fallu enfin désigner le nœud de nouvelle pointe de fissure. La fissure ne pouvant se propager que le long des arêtes du maillage, il nous restait qu'à choisir, parmi les nœuds situés autour de la pointe de fissure celui qui correspond le mieux (c'est pour cette raison que nous avons choisi de travailler avec des éléments triangulaires plutôt que quadrangulaire vu que avec ceux-ci il y a en moyenne six nœuds autour de chaque nœud au lieu de quatre dans le second cas).

V-2 Perspectives

Ce travail servira donc d'élément de base pour analyser plus profondément d'autres aspects de la fissuration par exemple :

- L'interaction entre les fissures.
- Généralisation du code pour plusieurs fissures.
- L'ajout d'une loi cohésive.
- Un modèle 3D pourrait aussi être élaborée à partir de ce code.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Griffith A., The phenomena of rupture and flow in solid, Philosophical translation, Royal Soc of London, Serie A, Vol. 221, (1920).
- [2] Barrenbaltt, G.I, The Mathematical Theory Of Equilibrium Of Cracks In Brittle Fracture. Adv. Appl. Mech 7, 55-129 (1962).
- [3] Irwin G. R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, Pages 361 - 364 (1957).
- [4] Bueckner F.H , Fields singularities and methods of analysis and solutions of crack problems, éd. Noordhoff(2000).
- [5] Rice J.R , Some remarks on elastic crack-tip stress fields, international journal of solids and structures, p. 751 (1972).
- [6] Westergaard H. M., Dependence on near stress and stress amplitude of the fatigue, Journal of Applied Mechanics, Series A, Vol. 49 (1939).
- [7] SNEDDON. I. N, The Distribution Of Stress In The Neighborhood Of A Crack In An Elastic Solid. Proc. Roy. Soc. London 187A, pp. 229-260 (1946).
- [8] R. S. BARSOUM, Application of Quadratic Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, International Jour of Fracture 10 (1974).
- [9] Zienkiewicz and Taylor “The finite element method for solid and structural mechanics” Vol (119) Sixth edition 2005.
- [10] TIJSSENS M.G.A , Bert L.J. Sluys, Erik Van Der Giessen, Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surfaces, Eur. J. Mech. A Solids 19 761U779, Editions scientifiques et mdicales Elsevier SAS (2000).
- [11] Y.MONERIE, V.ACARY, Formulation dynamique d’un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement, Revue européenne des éléments finis(2002).

- [12] I.DOGHRI, Mechanics of Deformable Solids, Linear and Nonlinear, Analytical and Computational Aspects, Edt. Springer(2005).
- [13] A.V.PHAN et al, Electronic Journal Of Boundary Elements, vol BETEQ 2001, N°1, pp. 51-58 (2002).
- [14] G. CAILLETAUD, M. Trijani, Mécanique des matériaux solide, MMS, Distribution Universitaire, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris(2004).
- [15] A.GRAVOUI, N. Moes and T. Belytschko, Non-Planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets, Part II: Level set update, Int. J. Numer. Meth.Engng 2002, 53:2569-2586 (DOI:10.1002/mme.430), John Wiley and Sons, Ltd (2002).
- [16] Irwin G. R., Relation Of Stress Near a Crack to the Crack Extension Force, International Congress of applied mechanics. Bruxelles, p. 245 (1926).
- [17] Chabaat M, Elasticite avancee et mecanique de la rupture, Polycopie pour Post-Graduants, Faculte de Genie Civil, USTHB (2009).
- [18] Mushkelishvili N., Some basic problems of mathematical theory of elasticity, International Journal of solids and Structure, Noordhoff, Holland, (1953).
- [19] Sih G.C , Handbook of stress intensity factors, Institute of fracture and solid mechanics. Lehigh University, Bethlehem, 18015 (1973).
- [20] Tada H , Paris .P et Irwin G , The stress analysis of cracks handbook, 2éd, Productions INC. Paris (1985).
- [21] Zienkiewicz and Taylor “La méthode des éléments finis formulations de base et problème linéaires” Vol (620) édition (1991).
- [22] Alaa Chatteaneuf « Comprendre les éléments finis » Vol (272) Ellipses édition (2005).
- [23] J-F. REMACLE, B. K. KARAMETE and M. S. SHEPARD, Algorithm Oriented Mesh Database (2003)

Annexes

Annexe A

FONCTION D'AIRY

- Les équations d'équilibre pour un problème plan sont

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + F_i = 0$$

$$\sigma_{xxx} + \tau_{xyy} + F_x(x, y) = 0$$

$$\tau_{xyx} + \sigma_{yyy} + F_y(x, y) = 0$$

Les conditions aux limites peuvent être

- Déplacements imposés $U_x, U_y = 0$
- Tractions imposées sur les faces $T_x, T_y = 0$

OU sur la surface latérale

$$n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{xy} = T_x(x, y)$$

$$n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} = T_y(x, y)$$

Avec n_x, n_y Cosinus directeur de la normale extérieur au contour

Si une solution particulière est connue les équations se réduisent à

Des équations homogènes sans force de volume.

$$\sigma_{xxx} + \tau_{xyy} = 0$$

$$\tau_{xyx} + \sigma_{yyy} = 0$$

Les conditions de compatibilité bien connue se réduisent à

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

Les équations d'équilibres sont identiquement vérifiées si on peut trouver une fonction $U(x, y)$ telle que

$$\sigma_{xx} = U_{,yy}$$

$$\tau_{xy} = -U_{,xy}$$

$$\sigma_{yy} = U_{,xx}$$

Et les conditions de compatibilité imposent

$$\nabla^2 \nabla^2 U = \nabla^4 U = 0$$

$U(x, y)$ Est une fonction bi harmonique et est appelée

Fonction d'Airy

-Si des tractions sont imposées au contour les conditions sont

$$T_x(x, y) = n_x U_{yy} - n_y U_{xy} = -U_{ys}$$

$$T_y(x, y) = n_x U_{xy} - n_y U_{xx} = -U_{xs} \quad 1$$

Puisque les cosinus directeur de la tangente sont

$$n_y, n_x$$

On peut ainsi les écrire

On remplace $U_{1,x}$ et $U_{1,y}$ par leur valeur de l'équation 1 on obtient

$$U_m = n_x U_{1,x} + n_y U_{1,y} = n_x \int_0^s T_y(x, y) ds - n_y \int_0^s T_x(x, y) ds$$

Imposer des tractions revient donc à imposer U_x et U_y ou U_m

Au contour

Par intégration de 1 on trouve la résultante des tractions imposée

Entre A et B

$$X_{AM} = \int_{AM} T_x(x, y) ds = \int_{AM} U_{ys} ds = -U_y$$

$$Y_{AM} = \int_{AM} T_y(x, y) ds = \int_{AM} U_{xs} ds = -U_x$$

De même le moment des tractions en M par rapport à l'origine est

$$dM = (xT_y - yT_x) ds$$

$$= -(x dU_x + y dU_y)$$

$$= U_x dx - d(xU_x) + U_y dy - d(yU_y)$$

$$= d[U - (xU_x + yU_y)]$$

Le moment de la traction imposée de A à M est

$$M_{AM} = d[U - (xU_{,x} + yU_{,y})]$$

La relation entre des déplacements imposée et la fonction d Airy n pas aussi

On trouve des relations simples entre les déplacements la fonction d Airy

Et son Laplacien et entre le déplacement et deux fonctions analytiques qui

Donnent la solution de l'équation bi harmonique

Si $U_{,m}$ sont connue au contour $U_{,x}$ et $U_{,y}$ peuvent être calculés le problème

Est alors

$$\nabla^4 U = 0 \text{ Dans } R$$

$$U = f(s) + \text{constante}$$

$$U_{,m} = g(s)$$

Au contour pour des tractions imposées

Les conditions aux limites sont plus compliquées pour des déplacements

Annexe B

SOLUTION DE WESTERGAARD

Dans certains problèmes symétriques par rapport à Ox, la condition

$\tau_{xy} = 0$ Sur cet axe on impose

$$\text{Im}[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] = 0$$

Sih a montré que cette condition est vérifiée si

$$\psi'(z) + z\phi''(z) + A = 0 \dots\dots\dots A$$

Avec A est une constante réelle qui dépend de chargement

De même avec une symétrie de glissement, la condition $\sigma_{yy} = 0$ sur $y=0$

Conduit a

$$\text{Re}[2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + \phi'(z)] = 0$$

Et est vérifiée si

$$\psi'(z) + 2\phi'(z) + z\phi''(z) + iB = 0 \dots\dots\dots B$$

Avec B est une constante réelle qui dépend de chargement

1)-Pour la première symétrie : la condition A s'écrit (mode I)

$$\psi'(z) = -\frac{d}{dz}[z\phi] + \phi'(z) - A$$

$$\psi(z) = -z\phi'(z) + \phi(z) - AZ + C$$

$$= -\frac{d}{dz}[z\phi(z)] + 2\phi'(z) - AZ + C$$

$$x(z) = \int \psi(z) dz$$

$$= -z\phi(z) + 2 \int \psi(z) dz - A \frac{z^2}{2} + CZ + D$$

Le $-cz+D$ peut être négligée puisqu'il résulte d'un emplacement d'ensemble. Le problème est résolu par deux fonctions :

$$\phi(z) \text{ et } \psi(z) = -z\phi'(z) + \phi(z) - AZ$$

Ou par $\phi(z) \text{ et } -AZ$

Pour calculer la fonction d'AIRY :

$$\begin{aligned}\bar{Z}\Phi(z) + x(z) &= (\bar{Z} - Z)\Phi(z) + 2 \int \Phi(Z) dz - A \frac{z^2}{2} \\ &= -2iy\Phi(z) + 2 \int \Phi(Z) dz - A \frac{z^2}{2}\end{aligned}$$

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{Z}\Phi(z) + x(z)]$$

$$U(x, y) = 2y\operatorname{Im}\Phi(z) + 2\operatorname{Re} \int \Phi(Z) dz - A(x^2 - y^2)$$

Westergaard est arrivé à la solution de ces problèmes symétriques d'une autre façon. Il définit une fonction $Z(z)$, avec les notations de Westergaard :

$$\begin{cases} Z(z) = 2\Phi'(z) \\ \bar{Z}(z) = 2\Phi(z) \\ \bar{\bar{Z}}(z) = 2 \int \Phi(Z) dz \end{cases}$$

D'où la barre signifie primitive (intégrale).

$$\Rightarrow U(x, y) = \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}} + y\operatorname{Im} \bar{Z} - \frac{A}{2}(x^2 - y^2)$$

Dans les problèmes étudiés par Westergaard A était nulle ($A=0$)

a- Calcul des contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] = 4\operatorname{Re}[\Phi'(z)] \\ -\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + 2ixy = 2[\bar{Z}\Phi''(z) + \psi'(Z)] \end{cases}$$

$$\text{Et } \psi'(z) + \bar{Z}\Phi''(z) + A = 0$$

$$\text{On trouve } \begin{cases} \sigma_{xx} = \operatorname{Re} Z - y\operatorname{Im} Z' + A \\ \sigma_{yy} = \operatorname{Re} + y\operatorname{Im} Z' - A \\ \sigma_{xy} = -y\operatorname{Re} Z' \end{cases}$$

b- Calcul des déplacements

$$\begin{aligned}2M(u_x + iu_y) &= K\Phi(z) - Z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ &= K\Phi(z) - Z\overline{\Phi'(z)} + \bar{Z}\overline{\Phi'(z)} - \overline{\psi(z)} + A\bar{Z} \\ &= K\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + A\bar{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2Mu_x = (K-1)Re\Phi - 2yIm\Phi' + Ay \\ 2Mu_x = (K+1)Re\Phi - 2yIm\Phi' - Ay \end{cases}$$

Avec les notations de Westergaard (la barre signifie l'intégrale)

$$\begin{cases} 2Mu_x = \frac{K-1}{2} Re\bar{Z} - 2yImZ + Ax \\ 2Mu_x = \frac{K+1}{2} Re\bar{Z} - 2yImZ - Ay \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z(z) = 2\Phi'(z) \\ \bar{Z}(z) = 2\Phi(z) \\ \bar{\bar{Z}}(z) = 2 \int \Phi(Z) dz \end{cases}$$

$k = 3 - 4\nu$ En déformation plane.

$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ En contrainte plane généralisée.

2)-Pour la deuxième symétrie :(symétrie de cisaillement)

$$\psi'(z) + 2\Phi'(z) + Z\Phi'(z) + iB = 0$$

$$\text{Ou } \psi(z) = -\Phi(z) - Z\Phi'(z) - iBZ = 0$$

a- Calcul des contraintes

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4Re[\Phi'(z)]$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + 2itxy = 2[(\bar{Z} - Z)\Phi''(z) - 2\Phi'(z) - iB]$$

$$= 2[-2ty\Phi''(z) - 2\Phi'(z) - iB]$$

$$\text{Avec } 2\Phi'(z) = Z(z)$$

$$\sigma_{xx} = 2ReZ - yImZ'$$

$$\sigma_{yy} = yImZ'$$

$$\tau_{xy} = -ImZ - yReZ' - B$$

b- Calcul des déplacements

$$\begin{aligned}2M(u_x + iu_y) &= K\phi(z) - Z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ &= K\phi(z) + \overline{\phi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\phi'(z)} - iB\bar{Z}\end{aligned}$$

$$2Mu_x = \frac{K+1}{2} \operatorname{Re}\bar{Z} - y\operatorname{Im}Z - By$$

$$2Mu_y = \frac{K-1}{2} \operatorname{Im}\bar{Z} - y\operatorname{Re}Z - Bx$$