

Résumé

Les questions abordées par M. Meziani dans ce travail sont relatives aux représentations intégrales d'opérateurs dans certains espaces fonctionnels. Le prototype des espaces considérés est représenté par l'espace $C(S, X)$ des fonctions continues de l'espace compact S à valeurs dans l'espace topologique X . Dans de nombreuses situations, X est soit un espace de Banach soit un espace vectoriel topologique localement convexe. L'importance de ces espaces tient, entre autre, au fait qu'ils interviennent dans la modélisation de certains phénomènes stochastiques. Citons à titre d'exemples l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$, qui est à la base de la construction du mouvement Brownien, ou encore l'espace $C([0, 1], \mathfrak{S}')$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R}^n , qui permet d'étudier le comportement dynamique de certains systèmes infinis de particules.

L'objectif visé dans ce travail est l'étude des représentations d'opérateurs linéaires bornés sur ces espaces, sous forme d'intégrales par rapport à des mesures scalaires ou vectorielles.

Le travail présenté par M. Meziani dans cette thèse comprend quatre parties:

1. Après une introduction, où il précise le cadre général et les orientations des questions traitées, l'auteur donne un survol des représentations intégrales existantes qui interviennent directement dans la thèse. Les théorèmes les plus importants y sont démontrés en détail.

2. Dans la deuxième partie M. Meziani présente un nouveau théorème de représentation intégrale pour une classe (notée H_{XX}) d'opérateurs bornés $T : C(S, X) \rightarrow X$, au sens de l'intégrale de Bochner par rapport à une mesure scalaire bornée sur les boréliens de S . Ce théorème est la conséquence d'un isomorphisme isométrique établi entre la classe H_{XX} et le dual topologique $C(S, \mathbb{R})^*$ de l'espace $C(S, \mathbb{R})$. Lorsque $X = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , la classe H_{XX} est l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés $T : C(S, X) \rightarrow X$ et le théorème se réduit au théorème de Riesz-Kakutani. Par contre si la dimension de X est > 2 , la situation est différente. L'auteur montre, à l'aide d'un exemple, l'existence d'opérateurs bornés hors de la classe H_{XX} , c'est à dire non représentables par une intégrale.

3. La troisième partie est une étude comparative entre la représentation intégrale précédente et les processus d'intégration évoqués dans le survol de la première partie. Cette comparaison est faite en raison de la complexité de ces processus. Elle est réalisée pour la classe H_{XX} et pour une classe d'opérateurs T factorisables sous la forme $T = \theta V$, où V est un opérateur borné réalisant un changement de variable de $C(S, X)$ dans l'espace $C(S, \mathbb{R})$ et θ un opérateur borné de $C(S, \mathbb{R})$ dans X dont la représentation intégrale est en général aisée. Pour les deux classes d'opérateurs, l'auteur détermine la structure des mesures qui interviennent dans les différents processus d'intégration.

4. L'auteur envisage dans cette partie une extension possible des résultats de la partie 2 au cas des espaces vectoriels topologiques. L'espace X est pris ici comme le dual E' d'un espace localement convexe E ; l'espace E' étant supposé muni de la topologie $*$ -faible $\sigma(E', E)$. Le résultat principal obtenu ici est un théorème de représentation intégrale pour une d'opérateurs bornés $T : C(S, E') \rightarrow E'$ au moyen d'une intégrale faible, mais toujours par rapport à une mesure scalaire. Ce résultat a été ensuite spécialisé au cas où E' est l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} . L'auteur montre que les opérateurs représentables par des intégrales faibles préservent certaines opérations de la théorie des distributions comme la dérivation ou la transformation de Fourier.

Conclusion:

Le travail réalisé par M. Meziani apporte une information appréciable sur certaines transformations linéaires des espaces du type $C(S, X)$. Lorsque un tel espace représente l'ensemble des trajectoires d'un processus les résultats montrent comment les trajectoires du processus sont transformées par les opérateurs représentables par des intégrales. Il va sans dire que l'étude des implications sur les propriétés de ces processus reste à faire.

D'autre part, dans un cadre spécifiquement stochastique, il serait intéressant d'appliquer les opérateurs étudiés dans cette thèse à des lois de processus c'est à dire à des mesures de probabilités sur les espaces $C(S, X)$. Une question importante serait de déterminer les propriétés de ces lois qui sont préservées par ces transformations.