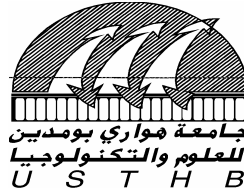


République Algérienne Démocratique Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene



Faculté de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Probabilités et Statistiques

par : CHEMERIK Hamida

THEME

**Modèles d'application des processus de diffusion
pour les prix de l'électricité**

Soutenu le 03 / 05 / 2007, devant le jury composé de :

R. OUAFI	Maître de conférence	USTHB	Président
K. BOUKHETALA	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
K. KHALDI	Maître de conférence	UMBB	Examineur
T. LARDJANE	Chargé de cours	USTHB	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mon respect et ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Professeur K. BOUKHETALA pour m'avoir encadré et proposé un sujet aussi riche qu'intéressant qui m'a initié à la mathématique financière, je lui suis reconnaissante pour son aide, pour sa patience à me guider et à me soutenir. Merci pour m'avoir permis de mener ce travail à bien, j'ai beaucoup appris.

Mes plus chaleureux remerciements au président du jury D^r R.OUAFI , aux membres du jury, D^r K.KHALDI et D^r T.LARDJANE , pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de prendre part au jury d'évaluation de ce travail.

Mes pensées se tournent vers mes parents, je les remercie pour le soutien affectif qu'ils m'ont apporté tout au long de ma vie et qui m'ont permis d'aller jusqu'au bout de mes rêves .Je leur dois infiniment et je leur suis très reconnaissante.

Un spécial remerciement à M^r KHALDI pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à mon amie Fadhéla pour l'appui moral qu'elle m'a procuré durant ma recherche.

Enfin, de tout mon cœur je remercie mes frères et sœurs, mes amis et mes proches en particulier mon cousin Smain et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Merci à vous tous.

Sommaire

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre 1 : Introduction à la notion des processus stochastiques

1-1- Introduction	5
1-2- Généralités sur les processus stochastiques.....	6
1- Espace de probabilité filtré	6
a- Tribu	6
b- Filtration	6
2- Processus stochastiques	6
a- Processus mesurable, processus continu.....	7
b- Processus continu à droite, continu à gauche.....	7
c- Processus adapté.....	7
d - Martingale à temps continu.....	7
3- Processus stochastiques particuliers.....	8
a- Processus stationnaire.....	8
b- Processus à accroissements indépendants.....	8
c- Processus à accroissements stationnaires	8
1-3- Processus stochastiques à temps continu.....	9
1- Processus de Gauss	9
2- Processus de Markov.....	10
3- Processus de Poisson	11
1-4- Conclusion et commentaire	14

Chapitre 2 : Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques

2-1- Introduction	16
2-2- Mouvement brownien	17
1- Définition du mouvement brownien	17
2- Propriétés du mouvement brownien	17
3- Mouvement brownien avec dérive.....	19
4- Mouvement brownien géométrique.....	19
5- Processus de Wiener et bruit blanc.....	19
2-3- Calcul stochastique	20
1- Intégrale stochastique de processus en escalier.....	20
2- Propriétés de l'intégrale stochastique	21
3- Formule d'Itô	23
2-4- Processus de diffusion	24
1- Définition d'un processus de diffusion	24
2- Continuité d'un processus de diffusion	25

2-5- Equations différentielles stochastiques	26
1- Existence et unicité des solutions des EDS.....	26
a- Solutions fortes.....	27
b- Solutions faibles.....	27
2- Résolution des équations différentielles stochastiques linéaires.....	28
3- Exemples d'applications d'une EDS linéaires.....	30
a- Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.....	30
b- Processus de capitalisation.....	30
2-6- Changement de probabilité et théorème de Girsanov.....	31
1- Changement de probabilité.....	31
2- Théorème de Cameron- Martin- Girsanov	32
2-7- Conclusion et commentaire.....	33

Chapitre 3 : Les options financières

3-1- Introduction.....	35
3-2- Les options.....	36
1- Définition de l'option	36
2- Les stratégies de base	36
a- Achat d'une option d'achat	36
b- Vente d'une option d'achat	37
c- Achat d'une option de vente	38
d- Vente d'une option de vente	39
3- Valeur d'une option	39
a- Valeur intrinsèque.....	39
b- Valeur temps	40
4- Les déterminants du prix d'une option	40
a- Le cours du sous-jacent	40
b- Le prix d'exercice	40
c- Le prix spot.....	41
d- La volatilité du sous-jacent	41
e- La durée de vie de l'option.....	41
f- Le niveau des taux d'intérêt	41
g- Les dividendes	41
3-3- Evaluation des options en marché complet	42
1- Stratégies financières	42
a- Stratégie de gestion de portefeuille.....	43
b- Stratégie autofinancée.....	43
c- Absence d'opportunité d'arbitrage	43
d- Probabilité risque neutre.....	44
2- Modèle de Black- Scholes.....	44
a- Equation différentielle de Black-Scholes.....	45
b- Formule de Feynman-Kac	46
c- Evaluation à risque neutre.....	47
d- Formule de Black- Scholes	47

3-4- Conclusion et commentaire	50
--------------------------------------	----

Chapitre 4 : Modèles d'EDS pour les prix spot de l'électricité

4-1- Introduction.....	52
4-2- Libéralisation du marché de l'électricité.....	53
1- Présentation.....	53
2- Caractéristiques de l'électricité.....	53
3- Contrats de l'électricité	53
a- Les Futures.....	54
b- Les options sur future.....	54
4- Dynamique des prix	54
a- Retour à la moyenne	54
b- Périodicité et Fluctuations.....	54
c- Pics des prix et une forte volatilité	55
4-3- Modélisation des prix spot de l'électricité.....	56
1- Modèles de diffusion.....	56
a- Le mouvement brownien géométrique.....	56
b- Le modèle de retour à la moyenne.....	58
2- Modèles de diffusion avec sauts.....	60
a- Le mouvement brownien géométrique avec sauts	61
b- Modèle de retour à la moyenne avec sauts.....	67
4-4- Evaluation et couverture des options en présence de sauts.....	67
1- Prix de l'option en présence de sauts.....	69
2- Couverture des options.....	70
3- Relation entre le MBG et le MBG avec sauts.....	71
4-5- Exemple d'application par simulation.....	72
4-6- Conclusion et commentaire	73

Chapitre 5 : Application par simulation aux modèles de l'électricité

5-1- Introduction	75
5-2- Simulation des processus stochastiques en temps discret.....	76
1- Approximation d'Euler stochastique.....	76
a- Simulation du mouvement brownien	77
b- Application de l'approximation d'Euler sur une EDS linéaire.....	78
2- Procédure de simulation des processus à sauts.....	80

5-3- Approximation des trajectoires et convergence forte.....	81
1- Erreur absolue.....	81
2- Ordre de convergence forte.....	83
5-4- Approximations fortes de Taylor	84
1- Schéma d'Euler	84
2- Schéma de Milstein.....	88
3- Schéma fort de Taylor d'ordre 1.5.....	90
4- Schéma fort de Taylor d'ordre 2.....	93
5- Comparaison des Schémas forts de Taylor.....	95
5-5- Conclusion et commentaire.....	97
Conclusion générale.....	98

Introduction générale

La présente étude porte sur la modélisation des prix spot (au comptant) de l'électricité, on y trouve une source de problèmes mathématiques intéressants allant de la modélisation des phénomènes aléatoires jusqu'à la simulation des équations différentielles stochastiques (EDS) qui régissent la dynamique de plusieurs modèles stochastiques.

Parmi les modèles les plus populaires dans le cas de l'électricité, nous allons retenir les suivants : le mouvement brownien géométrique (Black et Scholes) et un modèle de retour à la moyenne (Vasicek). Cependant, comme ces modèles sont à trajectoires continues, leur modélisation est peu réaliste. En effet, les prix de l'électricité sautent brusquement et par conséquent les trajectoires présentent d'éventuelles discontinuités. Cette discontinuité des prix est le résultat d'un déséquilibre entre l'offre et la demande pour des raisons climatiques ou pour des capacités de stockage et de transport limités.

Pour tenir compte des sauts qui peuvent se produire, nous allons introduire des modèles à sauts, en décrivant l'aléa des prix par des processus mixtes brownien Poisson, associant partie diffusive continue brownienne et partie discontinue poissonnienne, dont il suffira de modéliser l'amplitude.

Généralement et par leur nature, les équations différentielles stochastiques ne se prêtent pas à une résolution analytique exacte. Cependant, il existe de nombreuses méthodes numériques pour surmonter ce problème en élaborant des schémas d'approximations. La simulation numérique que nous allons considérer est basée sur la discrétisation du temps. Discrétiser c'est convertir en temps discret une équation en temps continu.

Ce travail de mémoire est organisé comme suit :

Le **Chapitre 1** se veut une introduction aux processus stochastiques notamment les processus stochastiques à temps continu. Nous présenterons d'abord sans approfondissement les aspects et définitions nécessaires pour comprendre la structure des processus aléatoires, nous trouverons également une présentation claire des processus stochastiques continus les plus fréquemment rencontrés dans la littérature financière.

Dans le **Chapitre 2**, nous commencerons par présenter le mouvement brownien (processus de Wiener) qui servira de base pour la construction de la plupart des modèles stochastiques. Nous passerons ensuite à une initiation au calcul stochastique, en présentant la construction et les propriétés élémentaires de l'intégrale stochastique. Etant donné que le processus de Wiener est à variation non bornée, l'intégrale stochastique ne satisfait pas le calcul différentiel classique, alors il était nécessaire d'introduire le calcul d'Itô basé sur la «formule d'Itô» qui permet de différentier une fonction deux fois continûment différentiable et sera présentée dans le cas unidimensionnel.

La section suivante sera consacrée au processus de diffusion qui est solution d'une équation différentielle stochastique, nous parlerons de sa continuité et nous montrerons que le processus de Wiener n'est qu'un cas particulier du processus de diffusion.

Dans la section 5, nous énoncerons le théorème d'existence et d'unicité d'une solution forte et faible d'une EDS. Ensuite, nous présenterons une méthode de résolution des EDS linéaires basée sur le calcul d'Itô, suivie par deux exemples d'applications.

Nous terminerons ce chapitre par aborder le changement de probabilité en se plaçant en théorie financière sous l'hypothèse qu'il existe un espace de probabilité où les prix sont des martingales. Ce qui facilite souvent les choses, donc nous introduirons le théorème de Girsanov.

L'intérêt du **chapitre 3** sera l'étude des options financières, particulièrement, les options européennes. Notons qu'une option est un contrat qui donne droit (mais pas obligation) à celui qui le détient d'acheter ou de vendre un autre actif financier à un prix fixé à l'avance et à une date déterminée. Ce contrat présente une assurance censée protéger son détenteur de hausses ou de baisses trop brutales de l'actif.

Après avoir présenter les concepts et définitions de base concernant les options et leurs stratégies de gestion, nous étudierons le modèle de Black -Scholes d'évaluation d'option dans le cadre d'un marché complet, dans un tel marché, tout portefeuille réplique parfaitement le comportement de l'option dont le prix est déterminé de manière unique par un argument d'arbitrage. Ce qui conduit à l'équation différentielle de Black -Scholes. Partant de cette équation, et de la formule de Feynman -Kac dans l'univers risque neutre, nous déduisons le prix d'un call et put européen dans le cas le plus simple, celui des coefficients constants.

Le **chapitre 4** sera structuré comme suit, en premier lieu, nous décrirons le marché de l'électricité et les caractéristiques qui lui sont propres.

En second lieu, nous proposerons les modèles de diffusion intégrant des sauts, en généralisant les deux modèles suivants : Mouvement brownien géométrique (MBG) et modèle de retour à la moyenne (MRM). Ensuite, nous aborderons le problème de l'estimation des paramètres de chaque modèle par maximum de vraisemblance. Puis, nous exprimerons le prix d'une option européenne du modèle MBG avec saut en s'inspirant de la démarche de Merton ([17]) qui consiste à choisir la loi normale comme loi de probabilité des amplitudes de saut, et à considérer le risque associé à la composante de saut diversifiable (non - systématique), c'est-à-dire lorsque aucune prime de risque ne le rémunère.

En dernier lieu, nous montrerons l'impact de la présence des sauts sur une modélisation plus réaliste du marché en ayant recours à la comparaison graphique entre le processus de Poisson avec le processus de diffusion et le processus mixte (diffusion avec sauts).

Le **chapitre 5** sera consacré à l'approximation par discrétisation du temps par laquelle se base l'approche numérique de résolution des équations différentielles stochastiques.

A la section 1, nous présenterons la simulation stochastique en temps discret, à savoir l'approximation d'Euler stochastique qui sera appliquée sur une EDS du type linéaire.

Dans la section 2, nous parlerons des approximations des trajectoires et critère de convergence forte où la précision de l'approximation est relative aux trajectoires. Pour cela, nous estimerons l'erreur absolue due à l'approximation de la trajectoire du processus d'Itô (solution exacte de l'EDS), nous donnerons l'intervalle de confiance correspondant et nous introduirons l'ordre de convergence forte.

Dans la section suivante, nous traiterons les schémas forts de Taylor qui sont, le schéma d'Euler, le schéma de Milstein et le schéma fort de Taylor d'ordre 1.5 et 2.0.

Ces approximations en temps discret sont basées sur le développement de Taylor stochastique au sens de la convergence forte.

Nous terminerons notre étude par l'application des différents schémas forts de Taylor via le logiciel «ANSEDS» développé par K.Boukhetala et K.Boudali ([9]) qui nous permettra de mettre en œuvre l'ensemble des schémas d'approximations, de modéliser et de trouver une solution approchée des EDS régissant les modèles stochastiques.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A LA NOTION DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

1-1- Introduction

Les mathématiques financières ont connu au cours de ces dernières années un développement considérable, cette essor vient d'une part de l'importance prise par les marchés financiers et d'autre part de l'adaptation réussie d'outils mathématiques puissants à la résolution de nombreux problèmes financiers complexes que les mathématiciens modélisent par des processus stochastiques (aléatoires).

L'objet de la théorie des processus stochastiques est de présenter et d'étudier les phénomènes aléatoires dépendant du temps .Cette théorie constitue un vaste domaine d'étude auquel le chapitre 1 ne sera qu'une introduction.

Nous allons commencer par présenter les notions élémentaires des processus stochastiques en faisant appel à la notion de filtration , processus adapté et martingale en temps continu.

Nous discuterons ensuite les processus à temps continu les plus couramment rencontrés dans la littérature financière comme le processus de Gauss caractérisé par sa la loi normale qui permet de modéliser les variations des prix des actifs financiers à trajectoires continues , le processus de Markov, parfois appelé processus sans mémoire car son évolution future ne dépend pas de son passé mais uniquement de l'état présent, cette propriété est souvent vérifiée dans la réalité, en particulier, en physique, dans les réseaux de télécommunication, ou en mathématiques financières.

Enfin, nous introduirons le processus de Poisson le plus fondamental pour la description des trajectoires discontinues.

1-2- Généralités sur les processus stochastiques

Dans cette section, nous rappelons les définitions essentielles de la théorie des processus stochastiques qui fournissent des modèles mathématiques de phénomènes aléatoires dépendant du temps.

1- Espace de probabilité filtré

Soit Ω un ensemble quelconque.

Un espace de probabilité est donné (Ω, A, P) et l'ensemble des temps sera $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

a- Tribu

Une tribu (σ -algèbre) sur Ω et une famille de partie de Ω , contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.

La tribu de boréliens de \mathbb{R} est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (ou fermés, ou ouverts à droite fermés à gauche ...). On la note $B_{\mathbb{R}}$.

b- Filtration

Une filtration est une famille croissante $(F_t)_{t \geq 0}$ (c'est à dire telle que $F_t \subset F_s$ pour tout $t \leq s$) de sous-tribus de A , qui peut s'interpréter comme l'information disponible qui évolue au cours du temps. Cette information nous permet d'attribuer des probabilités cohérentes aux évènements pouvant intervenir.

Cette filtration est dite complète si F_0 contient tous les ensembles négligeables (de probabilité nulle) de A . Elle est dite continue à droite si $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$ coïncide avec F_t pour tout $t \geq 0$.

$(\Omega, A, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ est appelé un espace de probabilité filtré.

2- Processus stochastiques (ou aléatoires)

Un processus stochastique (aléatoire) est la donnée de $\{X_t, 0 \leq t < +\infty\}$, où, à t fixé, X_t est une variable aléatoire définie sur (Ω, F) à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, B_{\mathbb{R}^d})$.

$\forall \omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \mapsto X_t(\omega) = X(\omega, t)$, est une trajectoire du processus X .

a- Processus mesurable, Processus continu

Un processus X est dit mesurable si l'application suivante $X : \Omega \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(\omega, t) \rightarrow X(\omega, t)$
 est mesurable.

Un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X(\omega, t)$ est continu (i.e., les trajectoires sont continues).

b- Processus continu à droite, limité à gauche (càd – làg)

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit càd-làg continu à droite, limité à gauche (càd-làg) s'il existe un ensemble négligeable $N \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $\omega \notin N$, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite en tout $t \geq 0$ et admet une limite à gauche en tout $t > 0$.

c- Processus adapté

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est dit adapté (par rapport à la filtration F_t) si X_t est F_t -mesurable pour tout t .

d- Martingales à temps continu

Les martingales sont une des notions de base de calcul stochastique que nous rencontrons tout au long de ce travail, d'où la définition suivante qu'en faite est une extension de celle du temps discret.

Définition 1

Sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, F, P)$, le processus stochastique $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale en temps continu si :

$$M1) \quad \forall t \geq 0, \quad E(|M_t|) < \infty ;$$

$$M2) \quad \forall s, t \geq 0 \text{ tel que } s < t ; M_t \text{ est } F_t\text{-mesurable}$$

$$M3) \quad \forall s, t \geq 0 \text{ tel que } s < t, \quad E(M_t / F_s) = M_s \quad \text{pour } 0 \leq s < t .$$

Définition 2

Un Temps d'arrêt par rapport à la filtration F_t est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout $t \geq 0$, l'évènement $\{\tau \leq t\} \in F_t$.

Propriétés

- Lorsque M_t est une martingale, on a, $E(M_t) = E(M_0)$, pour tout t .
- Si M est une (F_t) - martingale et si S et T deux temps d'arrêt tel que $S \leq T \leq K$, K étant une constante finie, M_T est intégrable et $M_S = E(M_T / F_S)$.

Ce résultat s'étend à tout les temps d'arrêt si la martingale est uniformément intégrable [14].

3- Processus stochastiques particuliers

Soit, $X(\omega, t)$ un processus stochastique et t_1, t_2, \dots, t_k ($k \in \mathbb{N}$) une succession de valeurs du temps.

a- Processus stationnaire

On considère les instants $t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_k + h$, $\forall h > 0$.

Un processus $X(\omega, t)$ est stationnaire si les variables aléatoires $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)]$ et $[X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_k + h)]$ ont la même distribution de probabilité.

b- Processus à accroissements indépendants

Un processus $X(\omega, t)$ est à accroissements indépendants si $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_k$ $k \in \mathbb{N}$, les variables $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_k) - X(t_{k-1})$ sont indépendantes.

Cela signifie que les états de ce processus évoluent dans un univers où les variations passées n'influencent pas les variations futures.

c- Processus à accroissements stationnaires

Un processus $X(\omega, t)$ est dit à accroissements stationnaires si $\forall h, \forall t$, $X(t+h) - X(t)$ et $X(h)$ sont équidistribués, en d'autres termes la loi de $X(t+h) - X(t)$ ne dépend que de h . (Pour avoir plus de détail sur les processus stochastiques voir [1]).

1-3- Processus stochastiques à temps continu

Nous allons maintenant présenter les processus stochastiques à temps continu les plus fréquents dans la littérature financière.

1- Processus Gaussien

Définition 3 (variable gaussienne)

Une variable X est gaussienne d'espérance m et de variance $\sigma^2 \neq 0$ si sa loi IP_X admet la densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Une telle variable est notée $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Définition 4 (vecteur gaussien)

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ à valeur dans \mathbb{R}^n est dit gaussien si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ est une variable gaussienne à valeurs réelles.

On caractérise la loi de X par son vecteur espérance $E(X) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)) = m$ et sa matrice de covariance $\Gamma = [\sigma_{i,j}]_{i=1,n \ j=1,n}$ où $\sigma_{i,j} = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$.

La variable X admet la densité de probabilité suivante :

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(\det \Gamma^{-1})^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} {}^t(x-m)\Gamma^{-1}(x-m)\right\}$$

Où ${}^t(x-m)$ est la transposée du vecteur colonne $(x-m)$.

Un tel vecteur est noté $X \sim N(m, \Gamma)$ [5].

Définition 5 (processus gaussien)

Un processus X est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, ceci est équivalent à

$$\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \equiv N$$

2- Processus de Markov

Un processus stochastique est de Markov si, conditionnellement à sa valeur présente au temps t son évolution future est indépendante de son passé. Autrement dit, soit une séquence quelconque d'instants $0=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ auxquels un processus prend les valeurs arbitraires $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Ce processus est markovien si $\forall n \geq 1$:

$$P [X(t_n) \in B / X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}] = P [X(t_n) \in B / X(t_{n-1}) = x_{n-1}]$$

Où B est un ensemble de $\beta_{\mathbb{R}}$ ($\beta_{\mathbb{R}}$ est une σ -algèbre).

Par extension, on parle de processus de Markov du $(n-1)^{ieme}$ ordre lorsque l'état futur du processus dépend des $(n-1)$ états précédents. En d'autres termes, le processus de Markov est un processus sans mémoire et on déduit rapidement les propriétés suivantes :

- $E [X_n / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}] = E [X_n / X_{n-1} = x_{n-1}]$
- $P[X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n] = P(X_n = x_n / X_{n-1} = x_{n-1}) \dots P(X_1 = x_1 / X_0 = x_0) P(X_0 = x_0)$

Etant donné un processus de Markov, il est naturel de définir sa probabilité de transition de s à t comme suit :

$$P(s, x, t, B) = P(X(t) \in B / X(s) = x) \quad \text{où } 0 \leq s \leq t, B \in \beta_{\mathbb{R}}$$

Pour des valeurs fixes (s, x) et une valeur non fixée t , $p(s, x, t, \cdot)$ est une fonction de probabilité (mesure) dans la σ -algèbre. Sous ces conditions $p(s, x, t, \cdot)$ est dite probabilité de transition

$$P(s, x, t, B) = \int_B p(s, x, t, z) dz$$

On dit que le processus de Markov à temps continu est homogène si la probabilité de transition $p(s, x, t, z)$ ne dépend que de la différence $(t-s)$ et non pas des instants s et t , dans ce cas, on écrira :

$$p(s, x, t, z) = p(0, x, t-s, z) = p(x, t-s, z)$$

$$P(s, x, t, B) = P(0, x, t-s, B) = P(x, t-s, B), B \in \beta_{\mathbb{R}}$$

Cependant, les probabilités de transition ne sont toutefois pas arbitraires. Elles doivent satisfaire l'équation de Chapman- Kolmogorov [1], défini comme suit

$$p(s, x, t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x, \tau; y) p(\tau, y, t, z) dy \dots \text{ pour tout } s \leq \tau \leq t \text{ et } x, z \in \mathbb{R}$$

Pour les probabilités de transition, ces équations prennent la forme

$$P(s, x; t, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau, y, t, B) P(s, x, \tau, dy), B \in \beta_{\mathbb{R}}$$

L'intégrale ci-dessus est une intégrale de Riemann Stieltjes.

3- Processus de Poisson

Le processus de poisson est un des processus stochastiques à temps continu les plus simples .Il peut -être défini de plusieurs manières qui sont équivalentes. La définition suivante semble la plus appropriée à notre travail.

Définition 6

On dit que le processus stochastique en temps continu $\{N_t : t \in \mathbb{R}^+\} \equiv N_t$ est un processus de Poisson d'intensité λ si

- i- $N_0 = 0$ avec probabilité un
- ii- Le processus est à accroissements indépendants
- iii- Le nombre de sauts dans un intervalle de taille t est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt . Pour tout $s, t \geq 0$

$$P(N_{s+t} - N_s = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Remarque 1

- Ce processus est à accroissements stationnaires puisque l'équation (1.1) ne fait pas intervenir la date s .
- Lorsque $N_s = 0$, $P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, \dots$

Loi du temps d'attente des sauts

Soient : $\tau_n = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : N_t = n\}$ (i.e., première date à partir de laquelle $N_t = n$) ;

$T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$: le temps d'attente entre le $n^{\text{ième}}$ et le $(n-1)^{\text{ième}}$ saut ;

Et $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$, $n \geq 1$, où τ_n sont les instants de sauts .

Proposition 1

Si N_t est un processus de Poisson, alors les variables aléatoires $T_n, n = 1,2,\dots$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), suivant chacune une loi exponentielle de paramètre λ [25].

Définition 7

Le processus de Poisson N_t compte le nombre de sauts survenus jusqu'à la date t .

$$N_t = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \tau_1 \\ 1 & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \\ n & \text{si } \tau_n \leq t < \tau_{n+1} \\ \vdots & \end{cases}$$

Notation plus concise : $N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\tau_n \leq t\}}$

La notation $1_A^{(w)}$ désigne la fonction indicatrice de l'évènement A (1 si $w \in A$, 0 sinon).

a- Propriétés du processus de Poisson

- i- Le processus de Poisson est continu avec probabilité 1 ;
- ii- Le processus de Poisson saute un nombre fini de fois dans $[0, T]$;
- iii- Le processus de Poisson est croissant ;
- iv- Le processus de Poisson est un processus de Markov ;
- v- Le nombre de saut d'un processus de Poisson est une variable aléatoire ;
- vi- Le processus de Poisson est un processus continu à droite limite à gauche (cad-lag) ;
- vii- Le processus de Poisson est un pur processus de saut.

b- Processus de Poisson composé

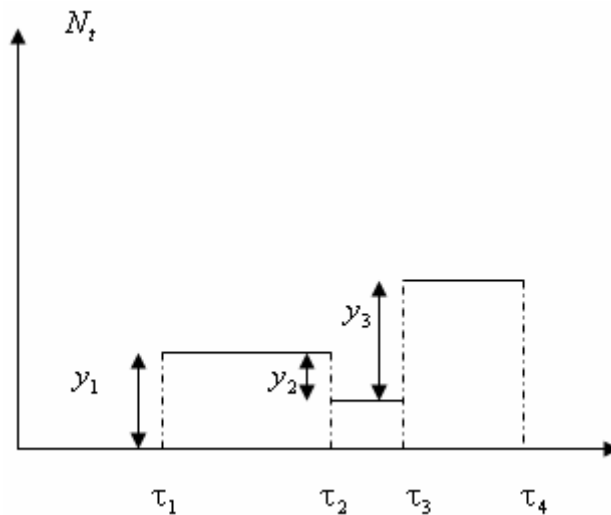
Soit N_t un processus de Poisson d'intensité λ , et $\{Y_i, i \geq 1\}$ une famille de variables aléatoires (i.i.d) également indépendante de N_t .

On appelle processus de Poisson composé le processus Q_t défini par :

$$Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad t \geq 0$$

Remarque 2

- Les variables aléatoires Y_i représentent la taille des sauts.
- Si $Y_i=1$ avec probabilité 1, alors, $Q_t = N_t$, où N_t est le processus de Poisson.
- Le processus de Poisson composé Q_t est un processus à incréments indépendants et stationnaires [7].



Trajectoire du processus de Poisson composé

1-4- Conclusion et commentaire

Dans ce chapitre, nous avons simplement présenté les définitions de base pour aider le lecteur à se familiariser et comprendre la structure des familles de processus stochastiques.

Nous nous sommes intéressés aux processus à temps continu pour pouvoir utiliser des outils mathématiques tels que le calcul différentiel et le calcul intégral ce qui permet d'obtenir des résultats plus intéressants qu'avec des processus en temps discret.

Cependant étant donné que le calcul stochastique, en particulier les équations différentielles stochastiques sont récemment à la base de la construction de la plupart des modèles financiers, nous aborderons encore une fois (dans le chapitre suivant) la notion des processus stochastiques en se concentrant sur les processus de diffusion qui sont précieux dans la modélisations de nombreux phénomènes aléatoires.

CHAPITRE 2

PROCESSUS DE DIFFUSION ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

2-1- Introduction

La motivation de ce chapitre est la suivante : Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est le plus important des processus stochastiques, en finance comme dans les autres sciences, d'une part parce qu'il sert à modéliser les perturbations aléatoires et d'autre part parce qu'il permet de construire des modèles simples sur lesquels des calculs peuvent être fait.

Le calcul stochastique ou calcul d'Itô, du nom d'un des pionniers en ce domaine est un calcul stochastique par rapport au mouvement brownien. Comme le mouvement brownien est à trajectoire non différentiable alors il est indispensable de se tourner vers une nouvelle description mathématique qui est l'intégration stochastique. Cette dernière permet de définir une équation différentielle stochastique (EDS) qui est une équation obtenue par la perturbation aléatoire d'une équation différentielle ordinaire. Les solutions de ces équations définissent de nouveaux processus, appelés processus de diffusion qui sont souvent markoviens au sens où leur comportement futur, conditionnellement au passé, ne dépend que de l'état présent. Cette propriété de Markov est souvent vérifiée dans la réalité, en particulier, en physique ou en mathématiques financières.

La méthode de résolution d'une équation différentielle stochastique nécessite l'introduction de la solution correspondante à l'équation différentielle homogène. Cependant, il existe deux types de solutions à une EDS : les solutions fortes et les solutions faibles. Lorsque la solution de l'EDS ne change pas pour une autre valeur du processus de Wiener, on parle de solution forte, dans le cas contraire, c'est-à-dire que si on trouve une solution correspondante à un processus de Wiener bien particulier, alors elle est dite solution faible.

2-2- Le mouvement brownien

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines. C'est en 1827 que le mouvement brownien est associé aux trajectoires très irrégulières de fines particules dans un fluide par le botaniste Robert Brown, en 1900, Bachelier, en vue d'étudier les cours de la bourse, met en évidence le caractère markovien du mouvement brownien, la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t et ne dépend pas de sa position avant t . En 1905, Einstein détermine la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien et les équations différentielles partielles de type parabolique.

La première étude mathématique rigoureuse est faite par N. Wiener (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence du mouvement brownien. Depuis, il continue à passionner les probabilistes aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique. On le note $W = (W_t)_{t \geq 0}$.

1- Définition du mouvement brownien

Un mouvement brownien standard $(W_t, t \geq 0)$ est un processus stochastique adapté construit sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ tel que :

$$\text{MB1) } \forall \omega \in \Omega, \quad W_0(\omega) = 0$$

MB2) $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sont indépendantes

MB3) $\forall s, t \geq 0$ tel que $s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$. $[W_t - W_s \sim N(0, t - s)]$

MB4) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue. **[15]**

2- Propriétés du mouvement brownien

Proposition 1

Le mouvement brownien est un processus Markovien.

Preuve

Pour tout $u \in [0, s]$, les variables aléatoires $W_t - W_s$ et W_u sont indépendantes car

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W_t - W_s, W_u] &= \text{Cov}[W_t - W_s + W_u - W_u, W_u] = \text{Cov}[W_t - W_s, W_u] - \text{Cov}[W_s - W_u, W_u] \\ &= 0 - 0 = 0 \quad \text{par (MB2)} \end{aligned}$$

Par conséquent W_t peut s'écrire comme la somme de deux variables aléatoires :

$$W_t = (W_t - W_s) + W_s$$

W_s ne dépend de la filtration F_s qu'à travers $\sigma(W_s)$ et $W_t - W_s$ est indépendante de $F_s = \sigma\{W_u : 0 \leq u \leq s\}$.

Proposition 2

Le mouvement brownien est une martingale.

Preuve

Par la définition même de la filtration, il est évident que W est un processus stochastique adapté.

Pour tout instant t , la variable aléatoire W_t est intégrable puisque

$$E[|W_t|] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|w|}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-w^2/2t\} dw = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-w^2/2t\} dw = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty$$

$$\begin{aligned} \forall s, t \geq 0, \text{ tel que } s < t : E[W_t / F_s] &= E[(W_t - W_s) + W_s / F_s] = E[W_t - W_s / F_s] + E[W_s / F_s] \\ &= E[W_t - W_s] + W_s \quad \text{par MB2} \\ &= W_s \quad \text{par MB3} \end{aligned}$$

Proposition 3

$\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow W_t(\omega)$ n'est nulle part différentiable.

La définition du mouvement brownien illustre bien cette propriété [7].

3- Mouvement brownien avec dérive

Un processus X est appelé mouvement brownien avec dérive de paramètres μ et σ si X_t s'écrit

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad X_0 = 0$$

Où ; μ représente la dérive (drift), c'est à dire l'espérance de variation par unité du temps et σ^2 la variance de cette variation par unité du temps.

Les propriétés de X se déduisent directement de celles de W .

4- Mouvement brownien géométrique

Un processus stochastique X est dit mouvement brownien géométrique de paramètre μ et σ s'il s'écrit :

$$dx = \mu x dt + \sigma x dw$$

Où, dw est l'accroissement du processus de Wiener.

Le mouvement brownien géométrique peut-être défini d'une autre manière, d'où la définition suivante.

Définition 1

Soit $Y = (Y(t), t \geq 0)$ un processus du mouvement brownien avec dérive μ , et coefficient de diffusion σ alors le processus défini par :

$$X(t) = e^{Y(t)}, \quad t \geq 0$$

est un mouvement brownien géométrique défini sur $[0, +\infty[$. (voir [4] et [7])

5- Processus de Wiener et bruit blanc

En pratique et en particulier en économie, la brusque hausse ou baisse d'un paramètre quelconque décrivant ainsi des perturbations inattendues est modélisé au moyen d'un bruit blanc qui est en relation avec le mouvement brownien.

Définition d'un bruit blanc

Un processus $(U_t)_{t \geq 0}$ est dit bruit blanc (White noise) d'espérance nulle et de variance σ^2 , et on note $(U_t)_{t \geq 0} \rightarrow N(0, \sigma^2)$ si et seulement si :

$$E(U_t) = 0 \quad \forall t \in T \subset \mathbb{R}$$

$$\gamma_u(h) = \text{cov}(U_t, U_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Les variables U_t sont indépendantes et identiquement distribuées [8].

En effet, on ne peut jamais calculer la valeur $U_t(\omega)$ d'un bruit blanc $U(t)$ mais, il est possible de le rencontrer comme intégrant sous la forme $\int_s^t A(\alpha)U_\alpha d_\alpha$.

$U_\alpha d_\alpha$ est remplacé formellement par la différentielle stochastique d'un processus à accroissements indépendants et stationnaires dW_α dont la mesure positive associée est la mesure de Lebesgue et l'intégrale devient une intégrale stochastique de Wiener que nous présentons dans la section suivante :

$$\int_s^t A(\alpha)U_\alpha d_\alpha = \int_s^t A(\alpha)dW_\alpha$$

(Voir [9]).

2-3- Calcul stochastique

Cette section est une initiation au calcul stochastique, en particulier, le calcul différentiel stochastique qui est la pierre angulaire de la théorie des options.

On se propose de présenter la définition de l'intégrale stochastique et ses propriétés ainsi que le calcul d'Itô basé sur une formule dite « formule d'Itô ».

1- Intégrale stochastique de processus en escaliers

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un F_t -mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$. Nous allons donner un sens précis à l'intégrale $\int_0^t H_s dW_s$ pour un processus $H = (H_t)_{t \geq 0}$ adaptés à la filtration $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Définition 2

On appelle processus élémentaire (ou processus en escalier) tout processus adapté $(H_t)_{t \geq 0}$ défini par :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\omega) 1_{[t_{i-1}, t_i[}(t)$$

Où ; $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ sont des instants fixés et $\Phi_i(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles mesurables et bornées.

Les trajectoires d'un processus élémentaire sont donc des fonctions en escalier, constantes sur les intervalles $[t_{i-1}, t_i[$, nulles après t_n .

Définition 3

On appelle intégrale stochastique d'un processus élémentaire $(H_t)_{t \geq 0}$ l'expression suivante :

$$\int_0^t H_s dW_s = \sum_{i=1}^n \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

Remarque 1

Lorsque $H_t = W_t$, l'intégrale stochastique aura la particularité suivante :

$$\text{Pour tout } t, \text{ on a } \int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t \quad \text{avec la probabilité 1}$$

2- Propriétés de l'intégrale stochastique

i- La moyenne d'une intégrale stochastique est toujours nulle.

$$E \left[\int_0^t H_s dW_s \right] = 0$$

La notion E désigne l'espérance d'une variable aléatoire.

ii- La variance d'une intégrale stochastique se calcul au moyen d'une intégrale ordinaire.

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t H_s^2 ds \right]$$

Etant donné la définition d'une intégrale stochastique à partir de laquelle nous obtenons :

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = E \left[\sum_{i=1}^n \Phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right]^2$$

Puisque W_t est à accroissements indépendants et les doubles produits sont d'espérance nulle. On obtient :

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = E \left[\sum_{i=1}^n \Phi_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right]$$

Lorsque H_t et W_t sont indépendantes, l'espérance du produit est égale au produit des espérances, et par conséquent :

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n E(\Phi_i^2) E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^n E(\Phi_i^2) (t_i - t_{i-1}) = E \left[\int_0^t H_s^2 ds \right]$$

iii- $\int_0^t H_s dW_s$ est une martingale à trajectoire continue.

iv- $\left[\int_0^t H_s dW_s \right]^2 - \int_0^t H_s^2 ds$ est une martingale.

(Pour la démonstration des autres points voir [7]).

Etant donné le mouvement brownien est à variation non bornée, l'intégrale stochastique n'obéit pas aux règles de calcul différentiel classique, alors il est nécessaire d'introduire la formule d'Itô qui permet de différentier une fonction deux fois continûment différentiable d'un processus stochastique et sera présentée dans le cas unidimensionnel.

3- Formule d'Itô

Soit X un processus admettant une différentielle stochastique

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t$$

et $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable, dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$ existent et sont des fonctions continues.

Le processus Y défini par la transformation $Y_t = f(X_t, t)$ admet aussi une différentielle stochastique qui s'écrit

$$dY_t = df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(dX_t)^2$$

Où $(dX_t)^2$ est calculé en utilisant les règles suivantes : $(dt)^2 = 0$, $dt dW_t = 0$, $(dW_t)^2 = dt$.

En remplaçant dX_t et $(dX_t)^2$ par leurs équations différentielles respectives et en regroupant les termes définissant le facteur de dt et le facteur de W_t on obtient :

$$dY_t = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + K_t \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) + \frac{1}{2} H_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t) \right\} dt + H_t \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) dW_t \quad (2.1)$$

(Pour la démonstration de cette formule, voir [7])

Remarque 2

Dans la théorie du calcul différentiel classique, la différentielle totale de la fonction $Y_t = f(X_t, t)$ est :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t \\ \Rightarrow dY_t &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + K_t \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \right\} dt + H_t \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dW_t \end{aligned}$$

En comparant cette formule à celle d'Itô, nous remarquons qu'il y a un terme supplémentaire qui est $\frac{1}{2} H_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t) dt$. Ce terme appelé (terme correcteur) permet de calculer l'écart - type du mouvement brownien qui est de l'ordre de la racine carré du temps. Pour obtenir une variation de l'ordre du temps, il faut passer aux termes du 2^e ordre.

La formule d'Itô ne permet pas toujours de résoudre explicitement une équation différentielle stochastique (EDS), ceci nécessite l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution de ces équations. Pour cela il faut d'abord savoir si l'EDS possède une solution et vérifier la propriété d'existence et d'unicité sachant la valeur initiale.

Notons que sous certaines hypothèses, la solution d'une EDS est un processus de diffusion auquel nous donnons un petit aperçu dans la section suivante.

2-4- Processus de diffusion

1- définition d'un processus de diffusion

Un processus de diffusion est un processus de Markov à trajectoires continues tel que pour des fonctions bien définies a et b les trois limites ci-dessous existent.

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, $s \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \varepsilon} p(s, x, t, y) dy = 0 \quad (2.2)$$

$$a(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) \cdot p(s, x, t, y) dy \quad (2.3)$$

$$b^2(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x)^2 \cdot p(s, x, t, y) dy \quad (2.4)$$

La probabilité de transition $p(s, x, t, y)$ est bien définie dans la section 2 du chapitre 1.

La condition (2.2) ne permet pas au processus de diffusion d'avoir des sauts instantanés.

Les expressions (2.3) et (2.4) impliquent que les fonctions $a(s, x)$ et $b(s, x)$ peuvent s'écrire :

$$a(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{E[(X_t - X_s) / X_s = x]}{t-s} \quad (2.5)$$

$$b^2(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{E[(X_t - X_s)^2 / X_s = x]}{t-s} \quad (2.6)$$

La fonction $a(s, x)$ est appelée coefficient de tendance (ou dérive) et $b(s, x)$ son coefficient de diffusion à l'instant s et à l'état x .

Cas particulier

Le mouvement brownien standard est un processus de diffusion avec $a(s, x) = 0$ et $b(s, x) = 1$

$$a(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} E \left[\frac{W_t - W_s / W_s = x}{t - s} \right] = \lim_{t \rightarrow s} E \left[\frac{W_t - W_s}{t - s} \right] = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \cdot 0 = 0$$

$$b(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} E \left[\frac{(W_t - W_s)^2 / W_s = x}{t - s} \right] = \lim_{t \rightarrow s} E \left[\frac{(W_t - W_s)^2}{t - s} \right] = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t - s} \cdot t - s = 1$$

2- Continuité d'un processus de diffusion

Il existe différentes façons de définir la continuité d'un processus stochastique X_t :

i- Continuité avec probabilité 1 (Continuité presque sûre)

$$\lim_{s \rightarrow t} p(\{\omega \in \Omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)| = 0\}) = 1$$

ii- Continuité en moyenne quadratique

$$E(X_t^2) < \infty \text{ et } \lim_{s \rightarrow t} E(|X_s - X_t|^2) = 0$$

iii- Continuité en probabilité (Continuité stochastique)

$$\lim_{s \rightarrow t} p(\{\omega \in \Omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)| \geq \varepsilon\}) = 0 \text{ pour tout } \varepsilon > 0$$

iv- Continuité en distribution

$$\lim_{s \rightarrow t} F_s(x) = F_t(x)$$

Il existe une relation entre ces continuités, on a i et ii \Rightarrow iii \Rightarrow iv.

Le concept de continuité d'un processus de diffusion entraîne la continuité du chemin aléatoire. L'expression (2.2) permet au chemin aléatoire du processus de diffusion d'avoir un bon comportement.

Définition 4

Un processus X est appelé processus d'Itô si X est un processus de diffusion et s'il existe deux fonctions μ et σ vérifiant les deux conditions (2.5) et (2.6).

Nous verrons plus loin, que lorsqu'on suppose qu'un processus de prix suit une diffusion, il est sous-entendu que μ et σ existent et qu'il s'agit en fait d'un processus d'Itô, la dynamique de tels processus s'écrit sous forme d'une différentielle stochastique faisant intervenir μ et σ .

2-5- Equations différentielles stochastiques

On appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation du type :

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (2.7)$$

Dans cette équation, dW_t est la différentielle d'un mouvement brownien W .

Sous forme d'une intégrale l'équation (2.7) s'écrit :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s \quad (2.8)$$

Où, la seconde intégrale est une intégrale stochastique. μ et σ sont les coefficients de dérive et de diffusion respectivement (ce sont des fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}) et $x_0 \in \mathbb{R}$ est la valeur initiale .

1- Existence et unicité des solutions des EDS

Il existe deux types de solutions à une EDS : les solutions fortes et les solutions faibles. Lorsque la solution de l'EDS ne change pas pour une autre valeur du processus de Wiener, on parle de solution forte, dans le cas contraire, c'est-à-dire que si on trouve une solution correspondante à un processus de Wiener bien particulier, alors elle est dite solution faible.

Le théorème qui suit donne les conditions sur μ et σ pour qu'une équation différentielle stochastique admette une solution.

Théorème 1

Supposons les hypothèses suivantes vérifiées :

- i- Les fonctions $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ sont mesurables en t , pour $x \in \mathbb{R}$
- ii- Il existe une constante positive k telle que pour tout $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$$\|\mu(x, t) - \mu(y, t)\| + \|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)\| \leq k \|x - y\|$$

- iii- Il existe une constante positive k' telle que pour tout $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}$

$$\|\mu(x, t) + \sigma(x, t)\| \leq k'(1 + \|x\|)$$

La condition X_0 est indépendante de $(W_t, t \geq 0)$ et est de carré intégrable alors il existe une unique solution $(X_t, t \geq 0)$ de l'équation (2.8) à trajectoires continues telle que :

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t\|^2\right) < \infty$$

Sous les hypothèses de ce théorème, la solution est adaptée à la filtration naturelle du mouvement brownien, on parle alors de solution forte et solution faible. ([2]).

a- Solutions fortes

Une solution forte consiste à trouver un processus stochastique X existant sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ que le mouvement brownien et satisfaisant l'équation (2.8).

On dit que la solution forte est unique si, lorsque $(X_t, t \geq 0)$ et $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$ sont deux solutions fortes de la même équation différentielle stochastique, on a

$$P[X_t = \tilde{X}_t, t \geq 0] = 1$$

b- Solution faible

Nous sommes en présence d'une solution faible si nous pouvons construire :

- i- Un espace probabilisé filtré $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{F}_t, t \geq 0\}, \tilde{P})$
- ii- Un $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{F}_t, t \geq 0\}, \tilde{P})$ – mouvement brownien standard $\{\tilde{W}_t, t \geq 0\}$
- iii- Un $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{F}_t, t \geq 0\}, \tilde{P})$ - Processus stochastique $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$; tel que :

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t \mu(\tilde{X}_s) ds + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s$$

Remarque 3

Il est possible d’avoir plusieurs solutions fortes à une même équation, si la solution forte est unique il y aura aussi une unique solution faible. Par contre, si la solution faible est unique, il se peut qu’il y ait plusieurs solutions fortes.

Proposition 4

- i- Le processus X , solution de l’équation (2.8) est un processus de Markov dont la loi initiale est celle de X_0 .
- ii- Si μ et σ sont des fonctions continues de t alors X est un processus d’Itô de paramètres μ et σ .

2- Résolution des EDS linéaires

Une équation différentielle stochastique est dite linéaire si elle s’écrit sous la forme :

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t \quad (2.9)$$

Où a_1, a_2, b_1, b_2 sont deux fonctions de temps, mesurables au sens de Lebesgue et bornée sur $[0, T]$.

Lorsque $a_2(t) \equiv 0, b_1(t) \equiv 0$, le bruit apparaît comme un terme additif et l’équation (2.9) devient :

$$dX_t = a_1(t)X_t dt + b_2(t)dW_t \quad (2.10)$$

Dans ce cas l’EDS est dite linéaire au sens limité et l’équation homogène obtenue à partir de (2.10) est une équation différentielle ordinaire.

$$\frac{dX_t}{dt} = a_1(t)X_t, \text{ où la solution fondamentale est donnée par : } \gamma_t = \exp\left(\int_0^t a_1(s) ds\right) \quad (2.11)$$

En appliquant la formule d’Itô à la transformation $f(X_t, t) = \gamma_t^{-1} X_t$ on obtient :

$$df(X_t, t) = d(\gamma_t^{-1} X_t) = \left[\frac{d\gamma_t^{-1}}{dt} X_t + a_1(t) X_t \gamma_t^{-1} \right] dt + b_2(t) \gamma_t^{-1} dW_t$$

Or
$$\frac{d\gamma_t^{-1}}{dt} = -\gamma_t^{-1} a_1(t) \Rightarrow df(X_t, t) = b_2(t) \gamma_t^{-1} dW_t$$

Cette dernière expression peut s'écrire sous forme d'intégrale :

$$\gamma_t^{-1} X_t = \gamma_0^{-1} X_0 + \int_0^t b_2(s) \gamma_s^{-1} dW_s$$

Sous la condition $\gamma_0 = 1$, la solution de (2.10) est :

$$X_t = \gamma_t \left(X_0 + \int_0^t b_2(s) \gamma_s^{-1} dW_s \right) ; \text{ ou } \gamma_t = \exp \left(\int_0^t a_1(s) ds \right) \quad (2.12)$$

Quand $a_2(t) \equiv 0$, $b_2(t) \equiv 0$, le bruit apparaît comme un terme multiplicatif et l'équation (2.9) se réduit à l'EDS homogène linéaire :

$$dX_t = a_1(t) X_t dt + b_1(t) X_t dW_t \quad (2.13)$$

La solution fondamentale (2.11) d'une équation linéaire au sens limité satisfait l'équation différentielle ordinaire : $d \ln \gamma_t = a_1(t) dt$

En utilisant cette définition et en appliquant la formule d'Itô à la transformation de la solution fondamentale $d \ln \gamma_t$ de (2.10) sera :

$$\begin{aligned} d(\ln \gamma_t) &= \left[a_1(t) \gamma_t \gamma_t^{-1} - \frac{1}{2} b_1^2(t) \gamma_t^2 \gamma_t^{-2} \right] dt + b_1(t) \gamma_t \gamma_t^{-1} dW_t = \left[a_1(t) - \frac{1}{2} b_1^2(t) \right] dt + b_1(t) dW_t \\ \Rightarrow \ln \gamma_t &= \int_0^t (a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s)) ds + \int_0^t b_1(s) dW_s \end{aligned}$$

La solution de l'équation (2.10) est donnée par : $X_t = \gamma_t X_0$ (2.14)

Où la solution fondamentale γ_t de (2.10) est :

$$\gamma_t = \gamma_0 \exp \left[\int_0^t (a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s)) ds + \int_0^t b_1(s) dW_s \right] \quad (2.15)$$

γ_0 est généralement égale à 1 .

Enfin, la solution de l'équation différentielle linéaire (2.9) que le bruit présenté par le mouvement brownien, soit additif ou multiplicatif est donnée par l'expression :

$$X_t = \gamma_t \left[X_0 + \int_0^t [a_2(s) - b_1(s)b_2(s)] \gamma_s^{-1} ds + \int_0^t (b_2(s) \gamma_s^{-1}) dW_s \right]$$

Où la solution fondamentale est : $\gamma_t = \exp \left(\int_0^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_0^t b_1(s) dW_s \right)$ (2.16)

(Pour plus de détails sur la résolution des EDS, voir [9]).

3- Exemples d'applications d'une EDS linéaire

a- Processus d'Ornstein- Uhlenbeck

On appelle processus d'Ornstein- Uhlenbeck le processus X à valeurs réelles, caractérisé par la différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = a(k - X_t) dt + b dW_t$$

a, k et b sont supposées constantes.

Considérons le changement de variable : $Y_t = e^{-at} (X_t - k)$, la formule d'Itô conduit à

$$dY_t = e^{at} b dW_t, \text{ comme } Y_0 = X_0 - k, \text{ on a : } Y_t = (X_0 - k) + b \int_0^t e^{as} dW_s$$

En écrivant la relation entre Y et X sous la forme : $X_t = k + Y_t e^{-at}$

On aboutit à l'expression de X_t suivante : $X_t = X_0 e^{-at} + k(1 - e^{-at}) + b e^{-at} \int_0^t e^{a(t-s)} dW_s$

X_t est la solution du processus d'Ornstein – Uhlenbeck.

b- processus de capitalisation

Considérons l'évolution d'un capital $C(t)$ au cours du temps régit suivant l'EDS :

$$dC_t = C(t) a dt + C(t) b dW_t$$

Définissant $Y(t) = \log(C(t))$ et appliquons la formule d'Itô

$$dC(t) = (a - b^2/2) dt + b dW_t$$

Comme $Y(0) = \log C(0)$, la formule intégrale de $Y(t)$ donne : $Y(t) = \log C(0) + (a - b^2 / 2)t + bW_t$

D'où ; $C(t) = C(0) \exp[(a - b^2/2)t + bW_t]$

De tels processus sont utilisés dans le modèle de Black et Scholes pour le calcul des options [5].

2-6- Changement de probabilité et théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov donne l'outil technique qui permet la transformation d'un processus de dérive donné μ en un processus de dérive $r \neq \mu$.

Afin d'introduire progressivement ce résultat, nous présentons tout d'abord la technique de changement de probabilité.

1- Changement de probabilité

Une probabilité Q définie un changement de probabilité (par rapport à P), sur un espace (Ω, F, P) s'il existe une variable Y , telle que pour tout événement $A \in F$

$$Q_A(A) = E_p[Y\delta_A]$$

Où ;

$$\delta_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La variable Y s'appelle la dérivée de Radon- Nikodym de Q par rapport à P

La probabilité Q est absolument continue par rapport à P au sens ou $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$

Réciproquement: si Q est absolument continue, Q est un changement de probabilité.

Rappelons que deux probabilités P et Q sont équivalentes si et seulement si :

$$P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$$

Notons que la variable aléatoire $\frac{\partial Q}{\partial P}$ a nécessairement une espérance égale à 1, et si X est une

variable sur Ω , et P et Q deux probabilités, on a : $E_Q(X) = E_p\left(\frac{dQ}{dP} X\right)$

2- Théorème de Cameron- Martin- Girsanov

Le théorème de Girsanov est le résultat fondamental utilisé pour l'équivalence et l'absolue continuité de lois de processus de type de diffusion. Nous énonçons ici ce théorème.

Enoncé du théorème

Soit $\lambda = \{\lambda_t : t \in [0, T]\}$ un processus adapté à la filtration F , filtration naturelle du mouvement brownien W , et $L = (L_t, t \in [0, 1])$ le processus défini par :

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds \right)$$

Le processus λ satisfait la condition de Novikov ssi :

$$E_p = \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right) \right] < \infty$$

Théorème 2

Si λ satisfait la condition de Novikov, on a :

1- Le processus L est une P -martingale.

2- Le processus Z^* défini par : $Z_t^* = Z_t + \int_0^t \lambda_s ds$ est un mouvement brownien sur

$(\Omega, \mathcal{A}, F, Q)$ ou Q est caractérisé par $\frac{\partial Q}{\partial P} = L_T$

On peut remarquer que si λ est une constante, dans ce cas on a $L_t = \exp \left(-\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right)$.

(voir [4] et [13]).

Remarque 4

La condition $E_p \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right) \right] < \infty$ est une condition suffisante pour que $\frac{dQ}{dP}$ soit une martingale.

Remarque 5

Nous n'avons pas besoin de calculer Q , nous avons juste besoin de savoir qu'elle existe et de connaître l'équation différentielle stochastique du processus qui nous intéresse sur l'espace $(\Omega, F, (F_t), Q)$, à savoir l'évolution du prix d'un titre risqué.

2-7- Conclusion et commentaire

Nous avons fournis dans ce chapitre une introduction à un certain nombre d'outils stochastiques. Tel que le calcul stochastique, en particulier les EDS du type Itô qui peuvent modéliser des situations diverses.

Dans la modélisation financière ont fait rarement la distinction entre processus de diffusion et processus d'Itô car c'est toujours cette dernière catégorie qui est utilisée.

Ces processus servent à modéliser plusieurs marchés d'actifs financiers, avec le problème de l'évaluation d'un portefeuille et de la couverture de l'option, alors que l'application classique du théorème de Girsanov consiste dans l'évolution d'une option européenne par la technique de changement de probabilité. Ceci fera l'objet du chapitre 3.

CHAPITRE 3

LES OPTIONS FINANCIERES

3-1- Introduction

Dans une économie de marché libre, les investisseurs désirent choisir le niveau de risque approprié à la gestion de leurs transactions, c'est pourquoi, ils cherchent à se couvrir contre les événements défavorables sur les marchés financiers qui redistribuent les risques. Ce souci de couverture trouve satisfaction principalement à travers les options qui ont pris beaucoup d'importance ces dernières années et sont maintenant échangées sur de nombreux marchés financiers.

Notre principal objectif dans ce chapitre est de présenter la théorie et la pratique des options en finance, leurs contextes, leurs évolutions et les stratégies qui peuvent être mise en œuvre pour leurs gestions.

Le modèle d'évaluation d'option que nous étudierons est celui élaboré par Fischer Black et Myron Sholes (1973), considéré comme un modèle en temps continu devenu célèbre dans le monde de la finance moderne. Pour cela nous nous placerons dans le cas simple de l'évaluation d'un certain type d'options, qui sont « les options européennes ».

Toute option dans ce modèle peut être répliquée par une stratégie de couverture faisant intervenir son sous-jacent, sa valeur est alors déterminée de façon unique, par absence d'opportunité d'arbitrage, qui signifie que tout gain supérieur au rendement d'un actif sans risque est nécessairement lié à un risque. C'est sur la base de ce principe que l'on peut évaluer une option dans le cadre d'un marché complet où il existe une seule probabilité équivalente à la probabilité initiale sous la quelle les prix actualisés des titres sont des martingales.

3-2- Les options

1-Définition de l'option

Une option est un contrat conclu entre deux parties. L'acheteur (détenteur) de l'option possède le droit et non l'obligation d'acheter (option d'achat ou «call»), ou de vendre (option de vente ou «put ») un titre (action, devise, matière première ...) à un prix fixé à l'avance (prix d'exercice) et à une date future moyennant le paiement immédiat d'une prime au vendeur (émetteur).

L'option financière (ou négociable) sur action est une option cotée sur un marché et dont le sous-jacent est une action.

On distingue deux grandes catégories d'options : les **options européennes** et les **options américaines**. La différence tient au fait de pouvoir exercer ou non l'option avant l'échéance.

Dans le cas d'une option américaine, l'acheteur peut exercer son option à tout moment entre t_0 (prise de position) et T (échéance), alors que l'option européenne ne peut être exercée avant l'échéance T .

- **Prix d'exercice**

C'est le prix auquel l'acheteur de l'option d'achat (de vente) pourra, s'il le désire, acquérir (vendre) l'action considérée. Le prix d'exercice peut être fixé librement entre les deux parties.

- **La prime**

La prime est le prix avec lequel le contrat d'option (de vente ou d'achat) sera négocié, et que l'acheteur devra payer au vendeur. Plus l'option est risqué pour le vendeur, plus la prime à verser par l'acheteur de cette option sera élevée.

2- Les stratégies de base

Les quatre stratégies de base sont présentées pour visualiser l'achat de l'option d'achat (achat de call), la vente de l'option d'achat (vente de call), l'achat de l'option de vente (achat de put), la vente de l'option de vente (vente de put).

a- Achat d'une option d'achat

L'achat de call est une spéculation à la hausse. L'acheteur de call espère qu'avant l'échéance, le cours du support aura monté et dépassé le prix d'exercice. Cette opération entraîne un risque de perte maximale égale au prix de l'option achetée.

En revanche, l'acheteur d'une option d'achat réalise un profit dès que le cours du support est supérieur au seuil de rentabilité (point mort).

Notons :

C : le cours de l'opération d'achat au temps t

P : le cours de l'opération de vente au temps t

K : le prix d'exercice

S : cours de l'action sous-jacente au temps t

S^* : cours de cette action à l'échéance du contrat

Alors l'acheteur d'une option d'achat obtiendra un retour (payoff) positif si $C < (S^* - K)$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \text{Le gain de l'acheteur} &= -C && \text{si } S^* \leq K \\ &= S^* - K - C && \text{si } S^* > K \end{aligned}$$

Cette stratégie est illustrée sur la figure 3.1.

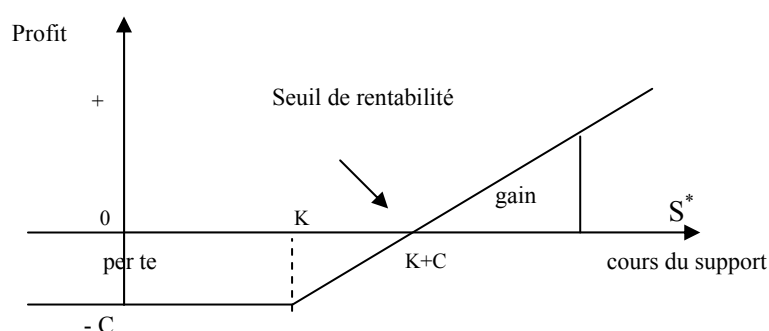


Figure 3.1 : Achat de call à l'échéance

b- Vente d'une option d'achat

Cette stratégie correspond à une anticipation de baisse. L'émetteur de cette option enregistre un gain maximum lorsque celle-ci n'est pas exercée et conserve l'intégralité de son prix.

Quand le cours de l'action dépasse le prix de l'option, celle-ci sera exercée si : $C > (S^* - K)$.

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \text{Le gain du vendeur} &= C && \text{si } S^* \leq K \\ &= K - S^* + C && \text{si } S^* > K \end{aligned}$$

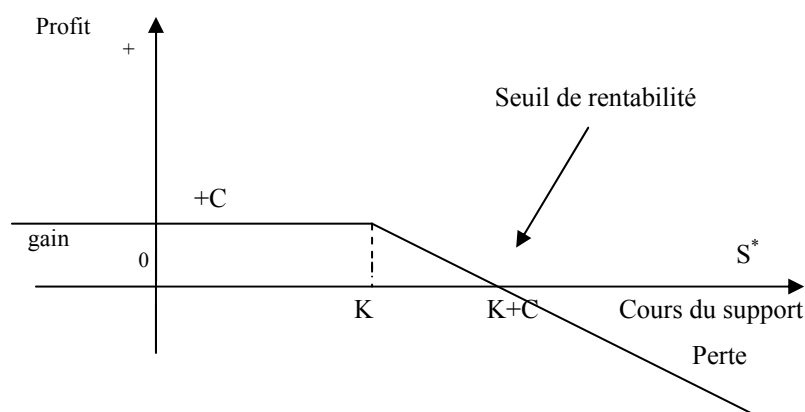


Figure 3. 2 : Vente de call à l'échéance

c- Achat d'une option de vente

C'est une stratégie d'anticipation de baisse. Le détenteur de put espère que d'ici à l'échéance du contrat, le cours diminuera de façon qu'il puisse exercer son droit de vente à un prix supérieur à celui du marché.

L'acheteur d'une option de vente exercera cette option si le cours de l'action à l'échéance S^* est inférieur au prix d'exercice mais il n'enregistrera un gain que si $P < (K - S^*)$.

Par contre, la perte maximale est égale au prix de l'option achetée.

$$\begin{aligned} \text{Le gain de l'acheteur de l'option de vente} &= K - S^* - P \quad \text{si } S^* < K \\ &= -P \quad \text{si } S^* \geq K \end{aligned}$$

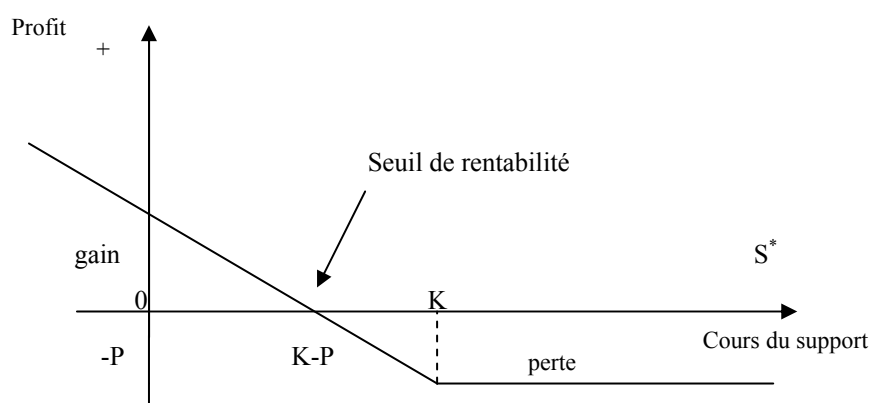


Figure 3. 3 : Achat de put à l'échéance

d- Vente d'une option de vente

L'opérateur anticipe une légère hausse des cours de l'action, et empêche ainsi la valeur temps. En cas de hausse du cours, le gain maximal est le montant de la prime encaissée et sa perte sera potentiellement sans limite.

L'avantage de cette stratégie réside dans le fait de pouvoir pratiquer des achats d'actions à des cours en baisse.

$$\begin{aligned} \text{Le gain du vendeur du put} &= S^* - K + P && \text{si } S^* < K \\ &= + P && \text{si } S^* \geq K \end{aligned}$$

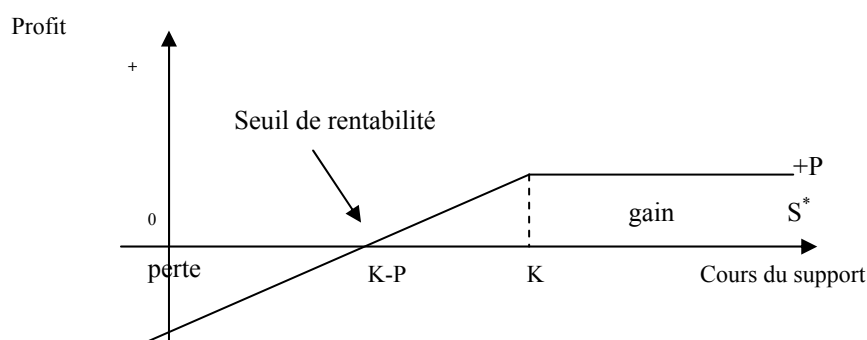


Figure 3.4 : Vente de put à l'échéance - Référence :([13])

3- La valeur d'une option

La valeur d'une option se décompose en deux parties : la valeur intrinsèque notée **VI** et la valeur temps notée **VT**. Tel que :

$$\text{Prix de l'option} = \text{valeur intrinsèque} + \text{valeur temps}$$

a- La valeur intrinsèque

La valeur intrinsèque de l'option est la valeur qu'elle aurait à l'échéance. Cette valeur peut être soit positive, soit nulle. Dans ce dernier cas, le détenteur de l'option n'a pas intérêt à l'exercer. La valeur intrinsèque est égale à $\max(0, S - K)$ pour l'option d'achat et $\max(0, K - S)$ pour l'option de vente.

Définition 2

Une option est dite « **IN the money** » si elle pouvait être exercer avec un retour (payoff) non nul. Elle est dite « **OUT the money** » si elle ne pouvait pas être exercer . Elle est dite « **AT the money** » dans la situation neutre (entre IN et OUT).

	Option d'achat	Option de vente
$K = S$	$\Rightarrow VI = K - S = 0$; AT the money	$\Rightarrow VI = 0$; AT the money
$K < S$	$\Rightarrow VI > 0$; IN the money	$\Rightarrow VI = 0$; OUT the money
$K > S$	$\Rightarrow VI = 0$; OUT the money	$\Rightarrow VI > 0$; IN the money

Tableau 3.1 : Tableau récapitulatif IN-OUT-AT

b- la valeur temps

La valeur temps est la différence entre la valeur de l'option et sa valeur intrinsèque .La valeur temps est $C - (\max (0, S - K))$ pour une option d'achat et à $P - (\max (0, K - S))$ pour une option de vente .Elle est toujours positive .Les primes C et P sont appelées valeurs marchandes.

4- les déterminants du prix d'une option

La valeur de l'option est influencée par six importants facteurs : le cours du sous - jacent (support), le prix d'exercice, la volatilité du sous-jacent, la durée de vie de l'option, le niveau des taux d'intérêt et enfin les dividendes.

a- le cours du sous-jacent

Pour un prix d'exercice donné, une option d'achat est d'autant plus profitable et plus chère que le cours de la valeur sous-jacente est élevé.

Pour une option de vente, plus le cours du support est élevé et moins elle a de la chance d'être profitable, ce qui la rend bon marché.

b- le prix d'exercice

Pour une option d'achat, une option avec un prix d'exercice élevé est moins chère qu'une option à prix d'exercice faible. Inversement, pour une option de vente, une option avec un prix d'exercice élevé est plus chère qu'une option à un prix d'exercice faible.

c- le prix spot

La valeur de l'option d'achat (de vente) est croissante (décroissante) par rapport à la valeur du sous-jacent. Par ailleurs la valeur temps est maximale quand le prix du sous-jacent est proche du prix d'exercice. Lorsque le prix du sous-jacent est très inférieur au prix d'exercice, la probabilité d'exercer est très faible. Ainsi $C_T = 0$ avec une probabilité très forte. Dans ce cas, la valeur de l'option est proche de zéro et par conséquent la valeur temps aussi.

Lorsque le prix du sous-jacent est très supérieur au prix d'exercice, l'option sera exercer avec une quasi-certitude .A l'échéance on aura $C_T = S_T - K$ avec une probabilité proche de 1.

d- la volatilité du sous-jacent

La volatilité du sous-jacent est mesurée à partir de l'écart- type des taux de rentabilité enregistrés sur les cours de l'action sous-jacente, la volatilité de l'option est calculée de la même façon à partir des taux de rentabilité de l'option.

La volatilité des options est largement supérieure à la volatilité des actions. Sa valeur est une fonction croissante de la volatilité des actifs sous-jacents .En effet , l'acheteur d'une option est d'autant plus prêt à acquitter une prime élevée que l'amplitude des fluctuations du sous-jacent est importante .Ce raisonnement est valable pour les options d'achat comme pour les options de vente .

e- la durée de vie de l'option

L'influence de la durée de vie de l'option apparaît à travers l'évolution de la valeur temps.

Plus la durée de vie de l'option est longue , plus la valeur temps est élevée. Autrement dit, la durée de vie influence à la hausse la prime pour une option d'achat et pour une option de vente

f- Le niveau des taux d'intérêt

L'option négociable sur action est généralement un contrat à court ou moyen terme, il faut donc considérer les taux sur les périodes correspondantes .Une augmentation des taux d'intérêt entraîne une augmentation du prix de l'option d'achat et une baisse du prix de l'option de vente.

g- Les dividendes

Le dividende est la part de bénéfice attribuée à chaque actionnaire d'une société ou institution, et dont le montant est fixé par l'assemblée générale.

La perte de la valeur due au versement de dividende se reporte sur la valeur de l'action. Lorsqu'il y a négociation de contrat de l'option, les opérateurs doivent donc s'efforcer d'anticiper la date et le montant du versement du prochain dividende. Si la distribution doit intervenir pendant la durée de vie de l'option, le cours du sous-jacent sera affecté par ce versement. Le cours du sous-jacent chute immédiatement de la valeur du dividende. Cela profitera au vendeur d'options d'achat et à l'acheteur d'options de vente.

Nous pouvons résumer les effets de ces déterminants sur le prix d'une option dans le tableau suivant.

Les facteurs déterminants	Option d'achat	Option de vente
1- le cours du sous-jacent	+	-
2- la volatilité	+	+
3- les dividendes	-	+
4- le taux d'intérêt	+	-
5- la durée de vie de l'option	+	+
6- le prix d'exercice	-	+

- + : influence positive
- : influence négative

Tableau 3.2 : Effet des déterminants sur le prix de l'option [13]

3-3- Evaluation des options en marché complet

Nous consacrons cette partie à la présentation de certaines stratégies d'investissement ainsi qu'à l'étude du modèle de Black et Scholes conçu pour évaluer les options européennes en l'absence d'Opportunité d'Arbitrage.

1- Stratégies financières

Considérons un marché financier pendant une durée $T : 0 \leq t \leq T$. Ce marché comprend deux actifs que nous noterons :

S_t^0 un actif sans risque dont le prix S_t^0 vérifie $S_t^0 = e^{rt}$, $dS_t^0 = rS_t^0 dt$, $S_0^0 = 1$ où r est constant et connu.

S_t un actif risqué dont le prix S_t vérifie

$$dS_t = a(S_t, t) dt + b(S_t, t) dW_t, \quad S_0 = s \quad (3.1)$$

a- Stratégie de gestion de portefeuille

Une stratégie de gestion de portefeuille φ est la donnée d'une suite $(\varphi_t^0, \varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$ F_t -adapté, où φ_t^0 et φ_t représentent respectivement les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué composant le portefeuille. La valeur à l'instant t d'un portefeuille associé à la stratégie φ est donnée par :

$$\Pi_t = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$$

b- Stratégie autofinancée

Une stratégie est dite autofinancée si l'on n'ajoute pas et l'on n'enlève pas de l'argent du portefeuille après l'instant initial. Dans le cas discret, les stratégies autofinancées sont caractérisées par l'égalité :

$$V_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k, \Delta S_k \rangle \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

Où ΔS_k est le vecteur $S_k - S_{k-1}$.

La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme :

$$\text{Pour tout } t \in [0, T], \quad d\Pi_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

Une stratégie φ est dite admissible si elle est autofinancée et si: Pour tout $t \in [0, T]$, $\Pi_t \geq 0$

c- Absence d'Opportunité d'Arbitrage

Une opportunité d'arbitrage ou plus simplement un arbitrage est un moyen de gagner de l'argent sans prendre aucun risque. Nous allons donner une définition mathématique de l'Absence d'Opportunité d'arbitrage. Pour cela, il faut commencer par définir une stratégie d'arbitrage.

Définition 3

On appelle stratégie d'arbitrage une stratégie φ autofinancée de valeur initiale nulle $\Pi_0 = 0$ et de valeur finale non nulle $\Pi_T \geq 0$ p.s .

On dit qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage. Dans ce cas le marché est dit viable.

d- Probabilité risque neutre

On appelle probabilité risque neutre toute probabilité Q équivalente à P telle que tous les prix sont des (F, Q) martingales.

Pour les modèles continus, l'existence d'une probabilité risque neutre entraîne toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage mais la réciproque est fautive.

Théorème 1

Un marché est viable et complet si et seulement si il existe une unique probabilité risque neutre Q équivalente à P sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.

(Pour la démonstration voir [7] chapitre 4)

2- Modèle de Black et Scholes

On suppose que l'actif risqué est solution de l'EDS :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s \quad (3.2)$$

Les coefficients de dérive μ et de diffusion σ sont constants.

dS : Variation de S pendant un instant très court égale à dt

dW : Un processus de Wiener standard

Cette EDS admet la solution unique explicite suivante :

$$S_t = s \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \quad (3.3)$$

Définition 4

Une option européenne f sur l'actif (S_t) , d'échéance T , est une variable aléatoire sur Ω qui est F_T -mesurable et positive. Pour une option européenne standard $f(\omega) = f(S_T(\omega))$

C'est-à-dire que f ne dépend que de la valeur finale de l'actif sous-jacent.

Par exemple : $f(S_T) = (S_T - K)^+$ pour un call européen et $f = (K - S_T)^+$ pour un put européen. Avec $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$.

Définition 5

On dit qu'une stratégie admissible duplique (ou qu'elle simule) l'option f si elle est autofinancée et si elle vérifie $\Pi_T = f(S_T)$.

a- Equation différentielle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes repose sur un nombre réduit d'hypothèses de base :

- Le prix de l'option suit un processus brownien géométrique de moyenne μ et d'écart type σ
- La vente à découvert d'actifs avec utilisation du produit de la vente est autorisée.
- Il n'y a ni taxes ni coûts de transaction
- L'action ne verse pas de dividende
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage sur le marché
- Les actifs sont traités de manière continue
- Le taux sans risque r est constant et identique sur toutes les maturités
- Le cours de l'action suit un processus d'évaluation stochastique continu de Wiener défini par l'équation différentielle d'Itô (3.2)

La valeur d'une option d'achat à maturité T et de prix d'exercice K est une fonction $C(S_t, t)$.

En appliquant le lemme d'Itô, on montre que C suit le processus suivant :

$$dC(S_t, t) = \left(\frac{\partial C}{\partial s}(S_t, t) \mu S_t + \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial s}(S_t, t) \sigma S_t dW_t \quad (3.4)$$

En constitue un portefeuille composé d'un call, de ϕ_t^0 parts de l'actif sans risque et de ϕ_t de l'actif risqué. La valeur de ce portefeuille est :

$$\Pi_t = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = C(S_t, t) \quad (3.5)$$

En supposant la condition d'autofinancement $d\Pi_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t = dC_t$ et en identifiant les termes de dt et dW_t dans $d\Pi_t$ et dC_t , on a :

$$\varphi_t^0 r S_t^0 + \varphi_t \mu S_t = \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t, t)$$

Et $\varphi_t \sigma S_t = \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)$, soit $\varphi_t = \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)$.

En utilisant l'équation (3.5), on obtient : $\varphi_t^0 S_t^0 = C(S_t, t) - \varphi_t S_t$ (3.6)

En remplaçant φ_t par sa valeur dans (3.6), on trouve : $\varphi_t^0 S_t^0 = C(S_t, t) - \frac{\partial C}{\partial S} S_t$. D'où

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + r S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t, t) = r C(S_t, t) \quad (3.7)$$

$$C(S_t, T) = (S_t - K)^+$$

C'est l'équation différentielle de Black et Scholes. Reste à trouver la fonction C solution de cette équation. [16].

b- Formule de Feynman- Kac

Supposons que la fonction $F(s, t)$ est solution de l'EDP de Black et Scholes

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, t) + \mu(s, t) \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) + \frac{1}{2} \sigma^2(s, t) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, t) = r F(s, t)$$

$$F(s, T) = \Phi(s)$$

Alors, s'il existe une solution S de l'EDS :

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad S_{t_0} = s_0$$

On a, sous l'hypothèse d'intégrabilité $\int_0^T E \left[\sigma^2(s, t) \frac{\partial F}{\partial s}(s, t) \right]^2 dt < \infty$,

$$F(s_0, t) = e^{-r(T-t_0)} E(\Phi(S_T) / S_{t_0} = s_0)$$

(Voir [14]).

Donc si on applique la formule de Feynman- Kac à l'équation (3.7), on trouve la solution C attendue.

$$C(S_t, t) = E \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ \right]$$

c- Evaluation à risque neutre

L'équation différentielle de Black- Scholes (3.7) pour le prix $C(S_t, t)$ à la date t d'une option construite sur un actif risqué S ne contient pas la tendance réelle μ de S , seuls interviennent le taux d'intérêt r et la volatilité σ . Donc, on passe de la probabilité naturelle P à la probabilité risque neutre Q en remplaçant le taux de rendement espéré μ par le taux sans risque r .

En fait cette opération correspond bien à un changement de probabilité.

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= r S_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \end{aligned}$$

Sous P , W_t est un processus de Wiener standard. La transformation est telle que, sous Q , c'est W_t^Q qui est un processus de Wiener standard.

Dans ce contexte, la formule d'évaluation d'option européenne sur un actif S d'échéance T est donnée par :

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_Q \left[(S_T - K)^+ / S_t = s \right]$$

Où E_Q représente l'espérance calculée « dans le monde à risque neutre ».

d- Formule de Black-Scholes

Grâce aux résultats précédents, le calcul de la fonction $C(S_t, t)$ se fait en remarquant que sous la condition $S_t = s$ la distribution de la variable aléatoire S_T est définie par :

$$S_T = s \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right\}$$

Cette écriture montre que le processus S_T satisfait la propriété de Markov, c'est-à-dire que conditionnellement à S_t , S_T indépendante de la filtration F_t .

$$S_T = s \exp \left\{ \left(r - \sigma^2 / 2 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \frac{W_T - W_t}{\sqrt{T - t}} \right\}$$

Où ; la variable aléatoire $\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T - t}}$ a une distribution normale standard. Il faut donc calculer

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x - K) dH(x),$$

Où ;

$$\begin{aligned} H(x) &= P(S_T \leq x / S_t = s) = P \left(s \exp \left(\left(r - \sigma^2 / 2 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \frac{W_T - W_t}{\sqrt{T - t}} \right) \leq x / S_t = s \right) \\ &= P \left(\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T - t}} \leq \frac{\log(x/s) - (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} / S_t = s \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\log(x/s) - (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) = \Phi(u(x)) \end{aligned}$$

Où ;

$$u(x) = \frac{\log(x/S) - (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \Rightarrow x = s \cdot e^{u \sigma \sqrt{T - t} + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}$$

$$\text{posons : } u(K) = \frac{\log(K/s) - (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = -d_2 \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\log(s/K) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t)} \int_{-d_2}^{+\infty} (s \cdot e^{u \sigma \sqrt{T - t} + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)} - K) d\Phi(u) \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \left[s e^{(r - \sigma^2 / 2)(T - t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{u \sigma \sqrt{T - t}} \cdot e^{-u^2 / 2} du - K \int_{-d_2}^{\infty} e^{-u^2 / 2} du \right] \\ &= \left[s \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(u - \sigma \sqrt{T - t})^2} du - K e^{-r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2 / 2} du \right] \\ &= s \left(1 - \Phi(-d_2 - \sigma \sqrt{T - t}) \right) - K e^{-r(T-t)} \left(1 - \Phi(-d_2) \right) \end{aligned}$$

$$C(S_t, t) = s \Phi(\sigma\sqrt{T-t} + d_2) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) ;$$

en raison de l'égalité $\Phi(-\mu) = 1 - \Phi(\mu)$.

Si on pose, $\sigma\sqrt{T-t} + d_2 = d_1$. La formule de prix d'une option pour un call européen a pour expression :

$$C(S_t, t) = s \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (3.8)$$

Où ; $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$, sa valeur est obtenue dans la table statistique. Avec :

$$d_2 = \frac{\log(s/K) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.9)$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log(s/K) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.10)$$

Où r est le taux d'intérêt sans risque (à court terme), $T - t$ est la durée de vie à maturité de l'option ou temps restant d'ici à l'échéance T du contrat.

Le prix d'une option de vente $P(S_t, t)$, portant sur le même titre de base et ayant la même date d'échéance et le même prix d'exercice, est donné par :

$$P(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S \Phi(-d_1)$$

En raison de la relation de parité put- call $P + C = K e^{-r(T-t)}$.

Le Delta de l'option, noté Δ , représente la variation de l'option lorsque le sous-jacent varie d'une unité monétaire. Il permet de définir la stratégie qui, en continu, permet de couvrir le risque lié à l'achat ou à la vente d'une option en prenant une position sur le sous-jacent. Ils sont définis par les équations suivantes :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0 \quad \text{pour un call et ,}$$

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1 < 0 \quad \text{pour un put}$$

3-4- Conclusion et commentaire

Nous pouvons tirer de ce chapitre deux conclusions :

La première est que nous nous sommes intéressés seulement aux options européennes, car les options américaines offrent plus de droits et déterminer leur prix et leur couverture est plus compliqué que dans le cas européen.

La deuxième conclusion est que le modèle de Black et Scholes est basé sur un certain nombre d'hypothèses qui permettent son utilisation.

- Il donne lieu à des formules exactes pour les prix de call et de put, c'est-à-dire pour les quantités d'actifs risqués que doit contenir le portefeuille.
- Stipule une loi log- normale pour les rentabilités de l'actif sous-jacent (avec une volatilité et une espérance par unité de temps constante).

Cette dernière hypothèse contraint le prix de l'actif sous-jacent à évoluer de façon continue et régulière ce qui exclut la prise en compte des situations extrêmes. Ceci favorise l'émergence de nouveaux modèles montrant l'intérêt de nombreux travaux à la recherche du comportement de prix qui soit plus réaliste que la loi log- normale.

Ces recherches aboutissent à une extension du modèle de Black et Scholes à des modèles à trajectoires discontinues que nous allons étudier en détail dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 4

MODELES D'EDS POUR LES PRIX DE L'ELECTRICITE

4-1- Introduction

Le marché de l'électricité est un marché en pleine évolution dont la dynamique ces quinze dernières années a été marquée par une vague de déréglementation qui s'est propagée mondialement.

Les prix de l'électricité sont influencés par les mécanismes de la production et la consommation, transfert et stockage, achat et vente. Chaque acteur du marché de l'électricité, du producteur au consommateur final, prend ses décisions en fonction de nombreux facteurs fondamentaux, qui compliquent le comportement des prix. On peut observer : un effet de retour à la moyenne, des fluctuations saisonnières, des pics de prix et une forte volatilité.

Dans les modèles : Mouvement brownien géométrique (MBG) et Retour à la moyenne (MRM), le prix de l'actif est une fonction continue du temps, or les trajectoires continues ne permettent pas toujours une description adéquate, en particulier si les variables modélisées peuvent subir des variations brutales des cours. Ainsi l'introduction de discontinuité dans les trajectoires est un moyen de modélisation de ce genre de phénomène, ce qui nous a conduit à proposer des modèles stochastiques à trajectoires discontinues appelés « modèles de diffusion avec sauts ».

Ces modèles ont pour la plupart une caractéristique qui les différencie des autres modèles, ce sont des modèles de marché incomplet. Il n'existe donc pas de stratégie de couverture parfaite des options. Il semble particulièrement intéressant de trouver le prix de l'option et de choisir la stratégie de couverture permettant de minimiser le risque. Mais auparavant il serait nécessaire d'aborder les techniques d'estimation de chaque modèle avec et sans sauts.

4-2- Libéralisation du marché de l'électricité

1- Présentation

Historiquement, sur la plupart des continents, le marché de l'électricité fonctionne selon le modèle suivant : Le service est offert par un monopole public ou privé qui se charge d'assurer la production, le transport, et la distribution, ces activités sont réglementés par une régie ou par des sociétés public .

Depuis une quinzaine d'années on observe une nouvelle approche : les fonctions principales du monopole sont réparties entre différentes entreprises où les prix sont établis par la concurrence entre fournisseurs. Pour cela des règles sont établies afin que tous les fournisseurs aient accès selon une tarification connue et identique pour tous. Cette nouvelle approche est souvent désignée par l'expression « Libéralisation du marché de l'électricité ».

2- Caractéristiques de l'électricité

Le marché de l'électricité se caractérise par de fortes variations de la consommation d'un moment à l'autre et d'une saison à l'autre et de l'impossibilité de stockée l'électricité dont la production doit répondre à tout moment à la demande immédiate.

Les nombreuses installations doivent donc rester à l'arrêt la plupart du temps, pour assurer l'approvisionnement aux heures de plus forte consommation. D'autre part l'électricité étant susceptible d'être vendue en unités standardisées et selon des programmes de livraisons prédéterminées, se prête à la négociation financière. Par contre un aspect de l'électricité la distingue d'autres denrées négociées en bourse : sa durée de vie nulle, l'électricité non consommée à tout instant étant perdue à jamais.

3- Contrats de l'électricité

Contrairement au marché des actions, il existe sur le marché de l'électricité des catégories spécifiques d'intervenants. Ainsi, le producteur sera toujours à priori vendeur et le consommateur sera acheteur. A milieu, les distributeurs seront à la fois acheteurs et vendeurs. Ainsi, comme la plupart des marchés de commodités, les utilisateurs des produits dérivés sur l'électricité cherchent une couverture de leurs transactions. C'est pourquoi les produits de couvertures sont proposés dans les principaux pays où le marché de l'électricité est dérégulé. On trouvera ainsi sur le NYMEX (New York Mercantile Exchange), sur la bourse de Sydney où sur le LIFE.[22]

Deux principaux types de contrats sont échangés : les futures et les options sur future.

a- Les Futures : contrats à terme

Le future est un contrat pour lequel un intervenant s'engage à vendre (ou acheter) une quantité donnée, à une date donnée et à un prix donné. La nature de l'électricité veut que des prévisions soient ajoutées à cette définition générale. Ainsi, la livraison se fera à un lieu donné, pour un mois donné et à un rythme défini dans le contrat.

b- Les options sur Future

Pour les options sur future. Le future étant assimilable à un titre financier classique, les options suivent les mêmes règles que les options sur action. Il faut bien évidemment connaître le future pour utiliser les options avec succès. Pour un acheteur d'option sur future d'électricité, il s'agit de fixer un prix plancher (ou plafond) à une vente (ou achat) dans le futur tout en profitant d'une éventuelle évolution positive des cours du future.

4- Dynamique des prix

Le prix de l'électricité est directement influencé par l'offre et la demande. Dans tout ce qui suit nous nous intéresserons qu'au prix spot (au comptant).

a- Retour à la moyenne (mean reversion)

Dire qu'un prix suit un processus de « retour à la moyenne » implique que celui-ci évolue autour d'une sorte de niveau d'équilibre. Ce niveau peut-être un taux d'intérêt historique, le rendement d'un actif ou le prix d'une denrée. Dans le cas du marché de l'électricité, on observe une forte tendance au retour vers un niveau d'équilibre à long terme. En effet, les événements inattendus créent des déséquilibres entre l'offre et la demande de l'électricité.

Le processus de retour à la moyenne mesure avec quelle rapidité ces événements vont se dissiper, ou combien cela va-t-il prendre pour que l'offre et la demande retournent à un niveau d'équilibre.

b- Périodicité et fluctuations

Les prix de l'électricité sont sujets à différentes fluctuations de nature périodiques dépendantes de l'activité économique.

- **Fluctuation saisonnière**

La demande en électricité suit des variations apparentées aux saisons. La demande est plus forte en hiver qu'en été.

- **Fluctuation « intra-jour et intra-heure »**

Les prix de l'électricité ne sont pas uniformes d'un jour à l'autre et d'une heure à l'autre. En particulier, la demande de l'électricité est moins intense durant les périodes de Week-ends ou de vacances...

c- Pics des prix et une forte volatilité

Pour expliquer les pics des prix dans les prix de l'électricité nous avons pris l'exemple du marché Nord Poole entre 1995 et 2000, mais le comportement des courbes des prix sur tous les marchés d'énergie est globalement le même.

Les grand pics que nous observons sur la figure 4.1 sont dus au fait que la production d'électricité ne change pas beaucoup et qu'il n'est pas possible de la stockée, alors que sa consommation peut varier énormément. Par exemple, s'il arrive un hiver très froid, la consommation de l'électricité augmente et au bout d'un certain moment elle dépasse la capacité de la production .Donc les producteurs sont obligés d'acheter l'électricité à des prix cher .C'est la raison pour laquelle il y a des pics dans la dynamique des prix. Ce comportement est modélisé par des processus à sauts.

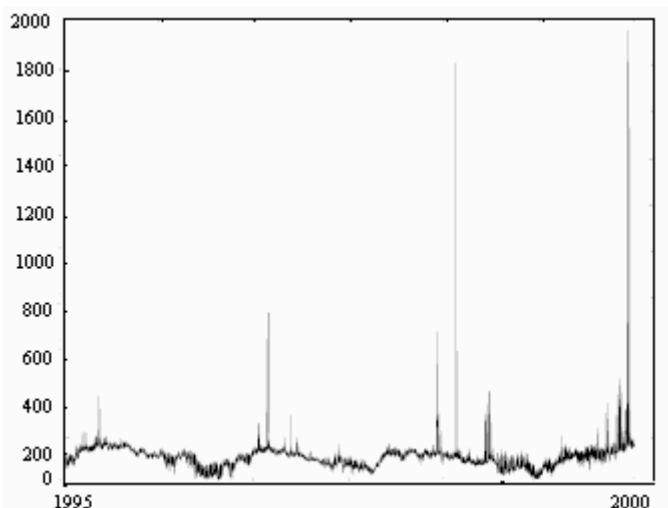


Figure 4.1 : Evolution du prix de l'électricité (Nord Poole), 1995-2000. [22]

4-3- Modélisation des prix spot de l'électricité

1- Modèles de diffusion

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à deux types de modèles célèbres :

- Le mouvement brownien géométrique du type Black et Scholes
- Le modèle de retour à la moyenne de Vasicek

La dynamique régissant ces modèles est définie à partir d'équations différentielles stochastiques. Dans chaque cas nous exprimons une solution analytique pour le processus des prix spot (au comptant) et nous estimons les paramètres de chaque modèle.

a- Le mouvement brownien géométrique (MBG) ou modèle de Black et Scholes

Le mouvement brownien géométrique est souvent utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier qui varie de façon aléatoire. La dynamique des prix de ce modèle est exprimée de la façon suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4.1)$$

Où dW_t est un incrément d'un mouvement brownien standard. Un changement de prix a donc deux parties : une tendance déterministe $\mu S_t dt$ et un incrément stochastique $\sigma S_t dW_t$.

La résolution de l'équation (4.1) par le calcul d'Itô permet de faire apparaître la forme exponentielle donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\} \quad (4.2)$$

- **Estimation des paramètres**

Les paramètres du modèle MBG sont estimés en maximisant la fonction de vraisemblance.

En transformant le modèle avec $P_t = \log S_t$ et en appliquant le lemme d'Itô, on obtient le mouvement brownien :

$$dP_t = m dt + \sigma dW_t \quad (4.3)$$

où $m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

Il en résulte que P_t est un processus de Wiener généralisé de dérive m et de variance σ^2 tel que :

$$P_t - P_{t-1} = \log(S_t / S_{t-1}) \rightarrow N(m, \sigma^2)$$

L'estimation des paramètres se fait à partir des données historiques comme suit :

Considérons la variable aléatoire : $R_t = \log(S_t / S_{t-1})$, avec $P_t = \log S_t$. En intégrant les termes de l'EDS (4.3). On obtient :

$$P_t - P_{t-1} = \int_{t-1}^t m ds + \int_{t-1}^t \sigma dW_s$$

$$E(P_t - P_{t-1}) = m E\left(\int_{t-1}^t ds\right) + \sigma E\left(\int_{t-1}^t dW_s\right) = m \quad \text{car } dW_s \sim N(0,1)$$

Et

$$\begin{aligned} \text{Var}(P_t - P_{t-1}) &= E\left[\left(\int_{t-1}^t m ds + \int_{t-1}^t \sigma dW_s\right)^2\right] - E^2\left[\int_{t-1}^t m ds + \int_{t-1}^t \sigma dW_s\right] = E\left(\int_{t-1}^t \sigma dW_s\right)^2 \\ &= \int_{t-1}^t \sigma ds = \sigma^2 \quad (\text{propriété 2 de l'intégrale stochastique .Chapitre2}) \end{aligned}$$

D'où, la loi de R_t est normale de moyenne m et de variance σ^2 .

Soit r_t : l'observation de la variable R_t à un instant donné t . Si on dispose de n observations (r_1, r_2, \dots, r_n) , la fonction de vraisemblance est :

$$L(r, m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} e^{-(r_i - m)^2 / 2\sigma^2}$$

$$\text{D'où} \quad \ln L(r, m, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \left[\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - m)^2 \right]$$

On dérive $\ln L$ par rapport à m et à σ^2 et on annule les dérivées partielles. On a :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - m), \text{ qui s'annule pour } m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \bar{r}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (r_i - m)^2, \text{ qui s'annule pour } \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - m)^2$$

\hat{m} et $\hat{\sigma}^2$ sont les valeurs de m et σ^2 qui vérifient les deux conditions en même temps. On a donc

$$\hat{m} = \hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \bar{r} \quad (4.4)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{m})^2 = S^2 \quad (4.5)$$

Les lois des variables aléatoires des estimateurs ci-dessus sont respectivement $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ et $\frac{\sigma^2}{n} \chi_{n-1}^2$. L'estimateur de μ découle de la propriété d'additivité de la fonction de l'espérance. $\hat{\mu} = \bar{r} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2$.

Les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont biaisés mais en multipliant la formule (4.5) par le facteur $n/n-1$, on retrouve les estimateurs non biaisés de μ et σ^2 .

b- Modèle de retour à la moyenne (MRM)

Ce modèle repose sur des processus de retour à la moyenne (mean-reverting), introduit par Vasicek (1977), ce type de processus permet de décrire la dynamique des taux courts. On trouvera ces applications dans la modélisation des marchés de commodité (pétrole, gaz, électricité, ...).

Le modèle souvent utilisé est :

$$dS_t = \alpha (\beta - \ln S_t) S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4.6)$$

Où ; β est la valeur moyenne de long terme ou niveau d'équilibre, α est le paramètre de tendance centrale ou la force de rappel de S vers β et σ est le coefficient de diffusion..

Lorsqu'on prend le logarithme de S_t ($P_t = \log S_t$), on obtient le processus d'Ornstein-Uhlenbeck suivant qui sera utilisé et appliqué par la suite.

$$dP_t = \alpha (\beta - P_t) dt + \sigma dW_t \quad (4.7)$$

Ce modèle possède la propriété de retour vers une moyenne. La différence avec le modèle précédent (MBG) se situe sur le terme de la dérive $\alpha (\beta - P_t)$ qui varie en fonction de P_t . Cette dérive est positive lorsque P_t est faible, c'est-à-dire inférieur à β et la tendance sera donc à la hausse. Si par contre, P_t est élevé, la tendance est baissière ; de ce fait, une telle formulation introduit une force de rappel dans la dynamique de P_t . Celui-ci va évoluer autour d'une

valeur d'équilibre de long terme égale à β . Le coefficient de diffusion σ ne dépend pas de P_t , comme les variations de W sur un intervalle de temps dt sont de l'ordre de \sqrt{dt} , ce processus peut prendre des valeurs négatives car sur le très court terme, la variation du mouvement brownien est très importante par rapport au terme de tendance.

L'expression analytique de la solution de l'équation (4.7) est donnée par :

$$P_t = P_{t-1}e^{-\alpha} + \beta(1 - e^{-\alpha}) + \sigma \int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \quad (4.8)$$

Nous remarquons que P_t est égal à l'intégrale stochastique d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien. Donc P_t est une variable aléatoire gaussienne, comme limite des approximations de Riemann de l'intégrale stochastique, qui sont gaussiennes. On en déduit même que le processus P est gaussien.

Il est facile de calculer sa fonction moyenne :

$$E[P_t] = P_{t-1}e^{-\alpha} + \beta(1 - e^{-\alpha}) + \sigma E \left[\underbrace{\int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s}_{dW_t \rightarrow N(0,1)} \right] = P_{t-1}e^{-\alpha} + \beta(1 - e^{-\alpha})$$

et sa fonction variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}(P_t) &= E \left[\left(P_{t-1}e^{-\alpha} + \beta(1 - e^{-\alpha}) + \sigma \int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right)^2 \right] - E^2 \left(P_{t-1}e^{-\alpha} + \beta(1 - e^{-\alpha}) + \sigma \int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right) \\ &= E \left[\left(\sigma \int_{t-1}^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right)^2 \right] = \sigma^2 \int_{t-1}^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha}) = \zeta^2 \end{aligned}$$

- **Estimation des paramètres :**

La démarche d'estimation du modèle (4.7) suit celle proposé dans le paragraphe précédent.

La fonction log vraisemblance est donnée par :

$$\ln L(P, \alpha, \beta, \zeta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\zeta^2) - \left[\frac{1}{2\zeta^2} \sum_{i=1}^n \left(P_i - (P_{i-1}e^{-\alpha} + \beta(1 - e^{-\alpha})) \right)^2 \right]$$

En annulant les dérivées partielles de $\ln L(P, \alpha, \beta, \zeta^2)$ par rapport à α, β et ζ^2 . On a :

$$\frac{\partial \ln L(P, \alpha, \beta, \zeta^2)}{\partial \alpha} = -\frac{e^{-\alpha}}{\zeta^2} \sum_{i=1}^n ((P_i - \beta)(P_{i-1} - \beta) - e^{-\alpha}(P_{i-1} - \beta)^2) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(P, \alpha, \beta, \zeta^2)}{\partial \beta} = \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\zeta^2} \right) \sum_{i=1}^n (P_i - e^{-\alpha} P_{i-1} - \beta(1 - e^{-\alpha})) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(P, \alpha, \beta, \zeta^2)}{\partial \zeta^2} = -\frac{n}{2\zeta^2} + \frac{1}{2\zeta^4} \sum_{i=1}^n (P_i - (e^{-\alpha} P_{i-1} + \beta(1 - e^{-\alpha})))^2 = 0$$

On obtient ainsi les paramètres suivants :

$$\hat{\alpha} = -\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (P_i - \beta)(P_{i-1} - \beta)}{\sum_{i=1}^n (P_{i-1} - \beta)^2} \right) \quad (4.9)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - e^{-\alpha} P_{i-1})}{n(1 - e^{-\alpha})} \quad (4.10)$$

$$\hat{\zeta}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i - (P_{i-1} e^{-\alpha} + \beta(1 - e^{-\alpha})))^2 \quad (4.11)$$

$$\text{Et} \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\zeta}^2 \left(\frac{2\alpha}{1 - e^{-2\alpha}} \right)$$

Concernant l'estimation du modèle (4,6), on remplace P_t par $\ln S_t$ dans les équations (4,9) \rightarrow (4,11), on retrouve les estimateurs $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$.

2- Modèles de diffusion avec sauts

On définit les processus de Poisson Gaussien ou processus de diffusion à sauts comme suit :

$$dS = a(S, t) dt + b(S, t) dW + \phi dq$$

Où a et b deux fonctions de temps et de S , dW est l'incrément d'un mouvement brownien standard, dq est un terme de poisson défini par :

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{avec une probabilité } 1 - \lambda \\ 1 & \text{avec une probabilité } \lambda \end{cases} \quad (4.12)$$

λ mesure la fréquence des sauts et ϕ représente l'amplitude des sauts.

Les termes de poisson définissant les sauts à la hausse et à la baisse sont:

- $dq_+ = 0$ avec probabilité $1 - \lambda_+$ et $dq_+ = 1$ avec probabilité λ_+
- $dq_- = 0$ avec une probabilité $1 - \lambda_-$ et $dq_- = 1$ avec probabilité λ_-

Dans le paragraphe suivant, nous passons en revue les modèles les plus simples et les plus utilisés.

a- Le mouvement brownien géométrique avec sauts

Un des modèles les plus simples consiste à étendre le mouvement brownien géométrique à des processus à sauts (rajouter une composante de Poisson).

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \gamma S_t dq_t \quad (4.13)$$

Où ; S_t est le prix spot, γ est l'amplitude des sauts, μ est le terme de tendance et σ le coefficient de diffusion, où μ et σ sont des constantes. dW est l'incrément du mouvement brownien standard, dq est un terme de Poisson défini par l'équation (4.12).

Description du modèle

Considérons un marché financier dans lequel il y a deux actifs, le premier, noté S_t^0 est sans risque de prix ($S_t^0 = e^{rt}$, à l'instant t) et le second est un actif risqué, noté S_t représentant les caractéristiques suivantes :

- S_t présente des sauts de valeurs relatives $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i, \dots$ à des instants $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots$,
- S_t suit un processus de diffusion log- normale :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad \text{pour } t \notin \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots\} \quad (4.14)$$

Sur les intervalles de temps $[\tau_i, \tau_{i+1}[$, le modèle ne présentant pas de saut est donné par (4.14)

Soit $\tau_i^- < \tau_i$ une date arbitrairement proche de τ_i .

A l'instant de saut τ_i , le saut de S_t est donné par : $\Delta S_{\tau_i} = S_{\tau_i} - S_{\tau_i^-} = S_{\tau_i^-} \gamma_i$

Il vient donc que $S_{\tau_i} = S_{\tau_i^-} (1 + \gamma_i)$

Pour $t \in [0, \tau_1[$, $S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$

La limite à gauche en τ_1 donne : $S_{\tau_1^-} = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_1 + \sigma W_{\tau_1}\right\}$

Et par conséquent : $S_{\tau_1} = S_0 (1 + \gamma_1) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_1 + \sigma W_{\tau_1}\right\}$

Puis, pour $t \in [\tau_1, \tau_2[$: $S_t = S_{\tau_1} \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - \tau_1) + \sigma(W_t - W_{\tau_1})\right\}$
 $= S_{\tau_1^-} (1 + \gamma_1) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - \tau_1) + \sigma(W_t - W_{\tau_1})\right\}$
 $= S_0 (1 + \gamma_1) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$

Par le même raisonnement, on obtient de proche en proche :

$$S_t = S_0 \left(\prod_{i=1}^{N(t)} (1 + \gamma_i) \right) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$$

Il vient donc que $S_t > 0 \Leftrightarrow \gamma_i \in]-1, \infty]$ pour tout i , cela a conduit à l'expression suivante :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N(t)} U_i\right\} \quad (4.15)$$

Où ; $U_i = \log(1 + \gamma_i) \sim \nu_0(u)$.

Dans le cas simple, nous choisissons une distribution des amplitudes des sauts U_i qui soit normale, de moyenne θ et de variance δ^2 .

$$\nu_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(u - \theta)^2}{2\delta^2}}$$

Mais rien n'interdit de choisir une autre loi de probabilité pour la distribution de l'amplitude des sauts, comme une loi exponentielle, une loi gamma, une loi Pareto, etc.

Remarque 1

Si $\delta^2 = 0$, $\theta = 0$ on se ramène au mouvement brownien géométrique.

Si $\sigma^2 = 0$ nous donne une évolution purement discontinue, et dans les autres cas le modèle intègre les deux composantes.

Propriétés du modèle

- Processus à accroissements stationnaires et indépendants
- Processus de Markov
- Processus admettant des discontinuités.

Proposition 1

La densité de probabilité de S_t peut être représentée sous forme d'une série.

$$\text{Pour tout } s > 0, \quad P(S_t \leq s) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{\log s - (\mu - \sigma^2 / 2)t - k\theta}{\sqrt{k\delta^2 + \sigma^2 t}}\right)$$

Preuve

Supposons $S_0 = 1$, on a :

$$\begin{aligned} P(S_t \leq s) &= P\left(\exp\left((\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right) \leq s\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left((\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \leq \log s, N_t = k\right) \end{aligned}$$

Puisque les processus N , W et U sont mutuellement indépendants, alors :

$$P(S_t \leq s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left((\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^k U_i \leq \log s\right) \Pr(N_t = k)$$

Par ailleurs, le processus σW_t est de loi $N(0, t)$, alors $(\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t$ est de loi $N((\mu - \sigma^2 / 2)t, \sigma^2 t)$ et le processus U_i est de loi $N(\theta, \delta^2)$, alors $\sum_{i=1}^k U_i \sim N(k\theta, k\delta^2)$.

Comme σW_t et $\sum_{i=1}^k U_i$ sont indépendants et gaussiens, leur somme est aussi gaussienne.

$\sigma W_t + \sum_{i=1}^k U_i \sim N((\mu - \sigma^2 / 2)t + k\theta, \sigma^2 t + k\delta^2)$. Enfin, puisque N est un processus de poisson d'intensité λ , pour tout $t > 0$, la variable N_t suit une loi de poisson de paramètre λt et donc $\Pr(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$ [18].

- **Estimation des paramètres**

D'un point de vue pratique, l'estimation se fait souvent à partir de données historiques.

Le rendement R de l'actif S_t sur l'intervalle $[t-1, t]$ s'écrit :

$$R = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \log \left[\frac{\exp \left((\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right)}{\exp \left((\mu - \sigma^2 / 2)(t-1) + \sigma W_{t-1} + \sum_{i=1}^{N_{t-1}} U_i \right)} \right]$$

Ce qui conduit après simplification à :

$$R = (\mu - \sigma^2 / 2) + \sigma(W_t - W_{t-1}) + \sum_{i=1}^{N_t} U_i - \sum_{i=1}^{N_{t-1}} U_i$$

D'après les propriétés de stationnarité des accroissements du mouvement brownien et du processus de Poisson, on en déduit que :

$$R = (\mu - \sigma^2 / 2) + \sigma W_{(1)} + \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

Un argument de conditionnement par rapport au nombre de sauts du processus de Poisson donne :

$$P[R = r] = \sum_{k=0}^{\infty} P \left[(\mu - \sigma^2 / 2) + \sigma W_{(1)} + \sum_{i=1}^k U_i / N_1 = k \right] P[N_1 = k]$$

Puisque $\sigma W_{(1)} + \sum_{i=1}^k U_i \sim N(k\theta, \sigma^2 + k\delta^2)$ et $P[N_1 = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

Alors, la densité du rendement R s'écrit :

$$f_R(r) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^k}{k! \sqrt{k\delta^2 + \sigma^2}} \times \exp \left(-\frac{(r - ((\mu - \sigma^2 / 2) + k\theta))^2}{2(k\delta^2 + \sigma^2)} \right) \right] \right]$$

Nous remarquons que la loi du rendement R est indépendante de t .

Il existe plusieurs méthodes d'estimer les paramètres de ce modèle. Nous donnons dans ce paragraphe deux d'entre elles et cela dans le cas où la distribution de l'amplitude des sauts est normale de moyenne 0 et de variance δ^2 .

Méthode 1 : La première démarche d'estimation suit celle proposée par Planchet- Therond ([18]), elle se fait en deux étapes. Dans un premier temps des estimateurs sont obtenus par la méthode des moments.

Étape1 : Méthode des moments

Le principe de cette méthode est que, si le premier paramètre à estimer est l'espérance de la loi du rendement R , alors on peut l'estimer par la moyenne empirique des moments.

$$m = E(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} r f_R(r) dr = (\mu - \sigma^2 / 2)$$

Compte tenu de la forme de la loi du rendement, on calcule que les moments centrés d'ordre pair

$$m_{2l} = E[R - m]^{2l} = e^{-\lambda} \frac{(2l)!}{2^l l!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\sigma^2 + k\delta^2)^l$$

Car $m_{2l+1} = 0$, par un argument de symétrie.

Le modèle est décrit par cinq paramètres $(\mu, \sigma^2, \lambda, \delta^2)$, le calcul des quatre autres moments centrés conduit aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = (\mu - \sigma^2 / 2) \\ m_2 = \sigma^2 + \lambda\delta^2 \\ m_4 = 3(\sigma^4 + (\lambda^2 + \lambda)\delta^4 + 2\lambda\sigma^2\delta^2) \\ m_6 = 15(\sigma^6 + 3\lambda\sigma^4\delta^2 + 3(\lambda^2 + \lambda)\delta^4\sigma^2 + (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)\delta^6) \end{array} \right.$$

La résolution de ce système non linéaire peut être effectuée par des méthodes numériques comme la méthode de Newton- Raphson. (Pour la présentation de cette méthode voir annexe).

Les estimateurs obtenus sont utilisés pour initialiser un algorithme de maximisation de la vraisemblance, et obtenir ainsi des estimateurs plus précis : convergence, efficacité asymptotique et normalité asymptotique.

Etape2 : Maximum de vraisemblance

L'expression de la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(r, \mu, \lambda, \sigma^2, \delta^2) = \prod_{i=1}^k \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^k}{k! \sqrt{\sigma^2 + k\delta^2}} \times \exp\left(-\frac{(r_i - (\mu - \sigma^2/2))^2}{2(\sigma^2 + k\delta^2)}\right) \right] \right]$$

Pour maximiser la vraisemblance, nous devons imposer des contraintes d'inégalité (il est évident que $\sigma^2 \geq 0$ et $\delta^2 \geq 0$). On est ainsi amené à un problème de maximisation de la vraisemblance sous contraintes qui peut être résolu numériquement. ([18] et [24]).

Méthode2 : Méthode des cumulants

La deuxième méthode que nous proposons est basée sur le calcul des cumulants.

Soit, $M_R(t)$ la fonction génératrice des moments :

$$M_R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{E[(tR)^i]}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u'_i t^i}{i!}$$

Les cumulants sont définis comme ayant comme fonction génératrice des moments :

$$K(t) = \log(M_R(t)) = \log\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u'_k t^k}{k!}\right) = \log\left(1 + u'_1 t + \frac{u'_2 t^2}{2!} + \frac{u'_3 t^3}{3!} + \dots\right)$$

Le coefficient de $\frac{t^i}{i!}$ correspond au $i^{\text{ème}}$ cumulant. Pour la distribution $f_R(r)$, les six premiers cumulants sont :

$$K_1 = m = (\mu - \sigma^2 / 2)$$

$$K_2 = \sigma^2 + \lambda\delta^2$$

$$K_3 = 0$$

$$K_4 = 3\lambda\delta^4$$

$$K_5 = 0$$

$$K_6 = 15\lambda\delta^6$$

La résolution de ce système d'équations donne :

$$\hat{\delta}^2 = \frac{K_6}{5K_4}, \quad \hat{\lambda} = \frac{25K_4^3}{3K_6^2}, \quad \hat{\sigma}^2 = K_2 - \hat{\lambda}\hat{\delta}^2, \quad K_1 = \hat{m}$$

(les formules des cumulants sont données dans l'annexe).

b- Modèle de retour à la moyenne avec sauts

Comme pour le mouvement brownien géométrique, nous proposons d'introduire une composante de saut au modèle de retour à la moyenne d'Ornstein-Uhlenbeck décrit par l'équation (4.7)

$$dP_t = \alpha(\beta - P_t) dt + \sigma dW_t + \gamma dq_t \quad (4.16)$$

Les termes $\alpha(\beta - P_t)dt$, σdW_t et γdq_t sont respectivement une composante de retour à la moyenne, une composante de volatilité et une composante de saut.

L'estimation des paramètres de ce modèle se fait par la résolution numérique de la fonction du maximum de vraisemblance suivante :

$$L(P, \beta, \lambda, \sigma^2, \alpha, \theta, \delta^2) = \prod_{i=1}^k \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^k}{k! \sqrt{\zeta^2 + k\delta^2}} \times \exp\left(-\frac{(P_i - (\beta(1 - e^{-\alpha}) + e^{-\alpha} P_{i-1}) + k\theta))^2}{2(\zeta^2 + k\delta^2)} \right) \right] \right]$$

$$\zeta = \sigma \left(\sqrt{\frac{1 - e^{-\alpha}}{2\alpha}} \right)$$

4-4- Evaluation et couverture des options en présence des sauts

Nous avons vu dans le chapitre précédent, que la notion de complétude est liée à la notion de probabilité risque neutre. Cependant bien que la plupart des modèles utilisés pour le calcul de prix de l'option respecte l'opportunité d'absence d'arbitrage, peu d'entre eux sont complets, les modèles de diffusion avec sauts, en particulier, le MBG avec sauts est un exemple de modèles incomplets, puisqu'il existe une infinité de probabilité neutre au risque, c'est-à-dire de mesure de probabilité Q équivalente à P ($Q \sim P$) telle que les actifs actualisés $(e^{-rt} S_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont des martingales.

Proposition 1

La valeur actualisée $\tilde{S}_t = (e^{-rt} S_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale si et seulement si : $\mu = r - \lambda E(\gamma_i)$

Preuve

Supposons que $E(|\gamma_i|) < +\infty$, alors :

$$\begin{aligned} E(\tilde{S}_t / F_s) &= \tilde{S}_s E \left(e^{(\mu - r - \sigma^2 / 2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} \prod_{i=N_s+1}^{N_t} (1 + \gamma_i) / F_s \right) \\ &= \tilde{S}_s E \left(e^{(\mu - r - \sigma^2 / 2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} \prod_{i=1}^{N_t - N_s} (1 + \gamma_{i+N_s}) / F_s \right) \\ &= \tilde{S}_s E \left(e^{(\mu - r - \sigma^2 / 2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)} \prod_{i=1}^{N_t - N_s} (1 + \gamma_{i+N_s}) \right) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\sigma(\gamma_{N_s+1}, \gamma_{N_s+2}, \dots, \gamma_{N_s+k}, \dots)$, $W_t - W_s$ et $N_t - N_s$ sont indépendantes de F_s .

On obtient :

$$E(\tilde{S}_t / F_s) = \tilde{S}_s e^{(\mu-r)(t-s)} E \left(\prod_{i=N_s+1}^{N_t} (1 + \gamma_i) \right)$$

Puisque $(\gamma_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et N_t une variable aléatoire suivant une loi de poisson de paramètre λ indépendante de $(\gamma_i)_{i \geq 1}$. Alors :

$$E \left(\prod_{i=N_s+1}^{N_t} (1 + \gamma_i) \right) = e^{\lambda(t-s)} E(\gamma_i)$$

D'où ;

$$E(\tilde{S}_t / F_s) = \tilde{S}_s e^{(\mu-r)(t-s)} e^{\lambda(t-s)} E(\gamma_i)$$

Il est clair que (\tilde{S}_s) est une martingale si et seulement si : $\mu = r - \lambda E(\gamma_i)$.

Comme dans le modèle de Black et Scholes, le passage de la probabilité naturelle P à la probabilité risque neutre Q se fait en modifiant la tendance μ et laisser les autres composantes inchangées.

$$\mu = r - \lambda E(\gamma_i) = r - \lambda E(e^{U_i} - 1), \text{ si } U_i \sim N(\theta, \delta^2) \text{ alors } \mu = r - \lambda(e^{\theta + \delta^2/2} - 1)$$

$$\text{Donc sous la probabilité } Q : S_t = S \exp \left((r - \sigma^2 / 2 - \lambda(e^{\theta + \delta^2/2} - 1))t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right)$$

Ce choix est justifié lorsque le risque de saut est diversifiable (non- systématique), c'est-à-dire on ne lui associe pas de prime de risque .En termes mathématiques, cela veut dire que les propriétés de la partie saut sont supposées les mêmes sous la probabilité risque neutre que sous la probabilité historique. Les distributions des amplitudes et des instants de saut restent donc identiques.(pour plus de détail sur ce point voir [17]).

1- Prix de l'option en présence de sauts

Dans le modèle MBG à sauts défini par l'équation (4.13), le prix d'une option d'achat (call) est une fonction $F(S,t)$.Si on se constitue un portefeuille composé d'un call et de $-\Delta$ parts de l'actif risqué. La valeur de ce portefeuille est $\Pi = F(S,t) - \Delta S$

On suppose que $d\Pi = dF(S,t) - \Delta dS$, en utilisant la formule d'Itô, on a :

$$d\Pi = \left(\frac{\partial F}{\partial S} S\mu + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - \Delta S\mu \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial F}{\partial S} - \Delta \sigma S \right) dW + (F(\gamma S, t) - \Delta \gamma S) dq \quad (4.17)$$

Le portefeuille est sans risque si $\sigma S \frac{\partial F}{\partial S} - \Delta \sigma S = 0$, soit $\Delta = \frac{\partial F}{\partial S}$ et de taux d'intérêt r si :

$$E(d\Pi) = r\Pi dt \text{ et } E(dq) = \lambda dt \quad (4.18)$$

En utilisant les relations (4.17) et (4.18) on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} - rF + \lambda E(F(\gamma S, t)) - \lambda E(\gamma)S \frac{\partial F}{\partial S} = 0$$

Avec

$$F(S, T) = f(S_T) = (S_T - K)^+$$

Cas d'une option d'achat

Une option européenne sur l'actif S , d'échéance T peut être valorisé selon :

$$F(S, t) = e^{-r(T-t)} E \left[f \left(S \exp(\mu_Q(T-t) + \sigma W_{T-t} + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} U_i) \right) \right]$$

Avec $\mu_Q = r - \sigma^2 / 2 - \lambda(e^{\frac{\delta^2}{2}} - 1)$

En développant par rapport au nombre de sauts N_t , nous pouvons exprimer le call $F(S, t)$ comme une somme de call de Black et Scholes pondérée par une densité de Poisson.

$$F(S, t) = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^{\infty} Q(N_t = k) E \left[f \left(S \exp(\mu_Q(T-t) + \sigma W_{T-t} + \sum_{i=1}^k U_i) \right) \right]$$

En notant le temps à maturité par $\tau = T - t$, on obtient :

$$\begin{aligned} F(S, t) &= e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{\infty} Q(N_t = k) E \left[f \left(S \exp(\mu_Q \tau + \sigma W_{\tau} + \sum_{i=1}^k U_i) \right) \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^k}{k!} E \left[f \left(S e^{k\theta + k\delta^2/2 - \lambda \exp(\theta + \delta^2/2) + \lambda\tau} e^{r\tau - \sigma^2\tau/2 + \sigma W_{\tau}} \right) \right] \end{aligned}$$

Si on pose $m = e^{\theta + \delta^2/2} - 1$, le prix de l'option d'achat (call), $F(S, \sigma, \lambda, \tau)$ s'écrit :

$$F(S, \sigma, \lambda, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^k C_{BS}(S, \sigma_k, r_k, \tau)$$

Où, C_{BS} est le prix de l'option suivant le modèle de Black et Scholes.

Et $\lambda' = \lambda(1+m) = \lambda e^{\theta + \delta^2/2}$, $\sigma_k^2 = \sigma^2 + \frac{k\delta^2}{\tau}$ et $r_k = r - \lambda m + \frac{k}{\tau}(\theta + \delta^2/2)$, $\tau = T - t$

2- Couverture des options

Différentes approches peuvent être retenues pour justifier le choix de la mesure du risque.

Les travaux mathématiques récents sur ce problème se base sur l'idée de minimiser le risque de couverture. Dans ce contexte, nous cherchons à déterminer une stratégie de couverture des Quantités d'actifs à risque détenues en portefeuille permettant de minimiser la variance.

On veut minimiser :

$$Var(d\Pi) = \sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial F}{\partial S} - \Delta \right)^2 dt + \lambda E(F(\gamma S, t) - \Delta \gamma S)^2 dt$$

Ce minimum est atteint si la dérivée partielle de $Var(d\Pi)$ par rapport à Δ est nulle.

$$\frac{\partial Var(d\Pi)}{\partial \Delta} = 0$$

On obtient ainsi une stratégie Δ minimisant le risque.

$$\Delta = \frac{\lambda E[\gamma(F(\gamma S, t))] + \sigma^2 S \frac{\partial F}{\partial S}}{\lambda S E[\gamma^2] + \sigma^2 S}$$

En remplaçant Δ par sa valeur obtenue dans (4.17) et en utilisant (4.18), on aura :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{p} (\mu + \lambda m - r) \right) \frac{\partial F}{\partial S} - rF + \lambda E(F(\gamma S, t) (1 - (\mu + \lambda m - r))) = 0$$

Où, $p = \lambda E(\gamma^2) + \sigma^2$ et $m = e^{\theta + \delta^2/2} - 1$.

Si $\lambda = 0$, on retrouve l'équation différentielle de Black et Sholes.(voir section 3, chapitre3).

3- Relation entre le MBG et le MBG avec sauts

La formule de couverture du modèle MBG avec sauts tend vers celle de Black-Scholes quand $\lambda = 0$ (absence des sauts). Dans ce cas la couverture est parfaite, c'est-à-dire le risque minimal est nul.

En présence des sauts ($\lambda \neq 0$), la couverture de l'option n'est pas parfaite et le risque minimal est en général strictement positif.

D'une part, Le taux de rendement attendu μ est le taux sans risque r ($\mu = r$) et la probabilité à risque neutre est unique.

D'autre part, le rendement attendu μ est égal à $\mu = r - \lambda E(\gamma)$. Dans ce cas il existe une infinité de probabilité à risque- neutre .

A présent, nous allons voir l'impact de la prise en compte des sauts sur une modélisation plus réaliste des marchés. En ayant recours à la comparaison graphique entre les processus de diffusion avec le processus de Poisson et le processus mixte (diffusion- sauts).

4-5- Exemple d'application par Simulation

Parmi les limites de notre travail, l'indisponibilité des données de prix de l'électricité .Ceci nous a contraint à utiliser à titre d'exemple des variations quotidiennes d'un actif sur une période de 200 jours. La figure ci-dessous illustre le résultat de simulation.

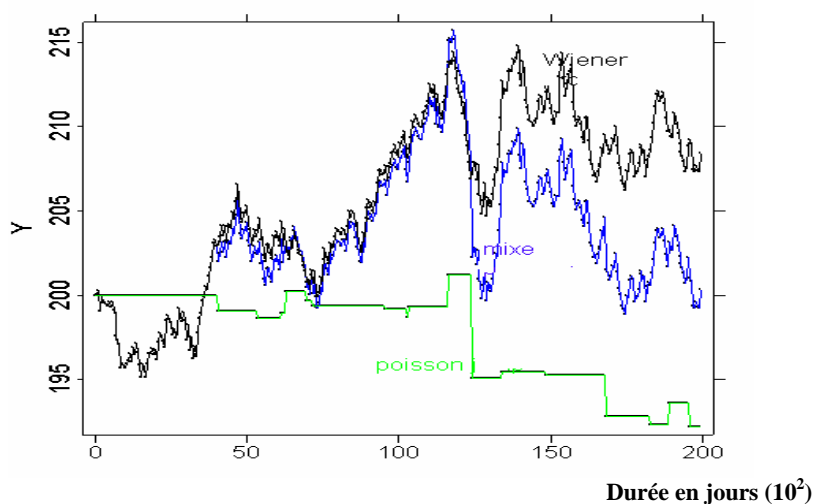


Figure 4.2 : Simulation des trajectoires des processus : diffusion, poisson, mixte

Paramètres : $Y_0= 200$, volatilité= 10%, $T= 200$, $r = 5.0$, nombre de sauts = 20, volatilité des sauts = 0.5

Commentaire

Nous voyons que le processus de diffusion évolue de façon continue ce qui ne reflète pas la réalité du marché. Alors que le processus de Poisson, n'évoluera que par saut en des instants déterminés. Chacune de ses trajectoires est une fonction en escalier, la valeur de l'actif Y restant constante (il ne se passe rien) entre deux instants de saut, le marché reste inerte, sauf quand il saute. Ainsi le processus de Poisson ne peut suffire à modéliser l'ensemble de l'évaluation du marché, donc il est nécessaire de le compléter avec une autre modélisation.

La trajectoire du processus mixte subit simultanément des petits mouvements fréquents, formant la partie continue de sa trajectoire (modélisée par un brownien), et un mouvement brusque et important par rapport au processus de diffusion, constituant la discontinuité de sa trajectoire (modélisée par un processus de poisson).

Nous remarquons aussi que la volatilité des sauts est plus élevée que celle de diffusion. Ceci explique l'importance des sauts sur un grand nombre de décisions, tels que la décision d'acheter ou de vendre, sur la gestion et la provision du prix de l'actif.

4-6- Conclusion et commentaires

Ce chapitre était une modélisation par les processus de diffusion avec et sans sauts.

- Compte tenu de la popularité du modèle de Black et Scholes dans le monde financier, nous nous sommes intéressés particulièrement au modèle : Brownien géométrique avec sauts.

Nous avons remarqué que pour ce modèle de marché complet, l'introduction d'un saut rend le marché incomplet.

- Les formules obtenues montrent que les modèles avec sauts se prêtent assez bien pour le calcul. La seule difficulté est l'estimation des paramètres et la détermination de la loi des amplitudes des sauts. Le choix de la loi normale étant d'obtenir des modèles de sauts aussi simples que les modèles de diffusion pour qu'ils soient explorés en pratique.

La modélisation des sauts présentée dans ce chapitre n'est pas propre à l'électricité mais à tout actif présentant des situations de discontinuités.

Nous avons donc présenté à travers ces modèles, les différentes situations où peuvent intervenir les EDS dont la résolution numérique par simulation est détaillée dans le dernier chapitre.

CHAPITRE 5

APPLICATION PAR SIMULATION AUX MODELES DE L'ELECTRICITE

5-1- Introduction

Les modèles mathématiques étudiés dans le chapitre précédent sont conçus sur la base des équations différentielles stochastiques (EDS) qui sont bien souvent difficile à résoudre, voir même impossible, étant donné que la solution recherchée ne peut être toujours formulée analytiquement. Cet obstacle a été contourné par des méthodes numériques d'approximations. L'approche numérique que nous allons utiliser pour résoudre les EDS est la simulation des trajectoires par la discrétisation du temps dont l'approximation d'Euler stochastique en fait partie. Ceci en introduisant le concept de la convergence forte.

Afin d'approcher les solutions des équations différentielles stochastique, nous allons parler des méthodes explicites à un pas, comme les schémas forts de Taylor basés sur la formule de Taylor stochastique qui est une généralisation de la formule de Taylor déterministe et de la formule d'Itô .Nous traiterons le schéma d'Euler, le schéma de Milstein et les schémas de Taylor d'ordre 1.5 et 2.0. Tous ces schémas seront appliqués via le logiciel « ANSEDS», développé par K.Boukhetala et K.Boudali.([9]).

5-2- Simulation des processus stochastiques en temps discret

Très peu d'équations différentielles stochastiques sont solubles analytiquement. Cependant, la résolution de la plupart des EDS nécessite l'utilisation des méthodes numériques. Un aspect très intéressant de ces méthodes est qu'elles sont basées essentiellement sur la discrétisation du temps où l'équation différentielle à temps continu est remplacée par une équation à temps discret. L'approche numérique la plus simple et la plus pratique est l'approximation d'Euler stochastique.

1- Approximation d'Euler stochastique

L'approximation d'Euler consiste à discrétiser l'intervalle de temps $[t_0, T]$ en N pas $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$, en générant itérativement des valeurs approchées aux trajectoires qui sont des valeurs exactes du processus d'Itô. Cette méthode appliquée à l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, \quad X_{t_0} = X_0 \quad (5.1)$$

Implique l'approximation d'Euler définie par :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n, \tau_n)\Delta_n + b(Y_n, \tau_n)\Delta W_n & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ Y_0 = X_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Où, $Y_n = Y(\tau_n)$ est la valeur de l'approximation à l'instant de discrétisation τ_n

$\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ est l'incrément du processus de Wiener d'ordre n .

$\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ est l'incrément du temps d'ordre n .

Le pas de discrétisation se définit comme le laps de temps séparant deux simulations

consécutives Δ_n . Si les pas $\Delta_n = \Delta t = \Delta = \frac{T - t_0}{N}$ sont équidistants alors $\tau_n = t_0 + n\Delta_n$.

Pour obtenir la suite $(Y_n)_{n=0, \dots, N}$ aux instants $(\tau_n)_{n=0, \dots, N}$, nous avons besoin de générer les incréments aléatoires ΔW_n pour $n = 0, 1, \dots, N-1$ du processus de Wiener $W = (W_t)_{t \geq 0}$

La variable aléatoire ΔW_n suit une distribution gaussienne de moyenne nulle et de variance Δ_n :

$$\Delta W_n \sim \text{loi } N(0, \Delta_n).$$

a- Simulation du mouvement brownien

Soit Δt la longueur d'une période de temps. Nous allons simuler le mouvement brownien au temps $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

La propriété (MB2) de la définition du mouvement brownien (chapitre2), implique que :

$$\{W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t} ; k \in \mathbb{N}\}$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de lois $N(0, \Delta t)$. Pour simuler la trajectoire du processus sur l'intervalle $[0, T]$ jusqu'à l'instant $m\Delta t$, il suffit de générer m variables aléatoires indépendantes $\{G_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ de loi normale centrée réduite.

Puisque $W_0 \equiv 0$ et $W_{k\Delta t} \equiv W_{(k-1)\Delta t} + \sqrt{\Delta t} G_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Nous simulons $\hat{W}_0 \equiv 0, \hat{W}_{k\Delta t} \equiv \hat{W}_{(k-1)\Delta t} + \sqrt{\Delta t} G_k, k \in \{1, 2, \dots, m\}$

Nous pouvons montrer par induction que

$$\hat{W}_{k\Delta t} = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^k G_i, k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Evidemment, Plus la longueur de l'intervalle de temps Δt est petite et plus l'approximation sera meilleure.([15])

Algorithme de simulation

Etape 1 : simuler une paire de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites (G_1, G_2) en utilisant la procédure polaire de Marsaglia.

Procédure Gauss Marsaglia

a - Répéter

$$X \leftarrow 2 * \text{Random} - 1, Y \leftarrow 2 * \text{Random} - 1 ; W = U^2 + V^2 ;$$

{Random est un nombre aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ généré par le programme Delfi}

Jusqu'à $(W \leq 1)$;

$$b- Z \leftarrow \text{SQRT}(-2 * \log(W)/W); G_1 \leftarrow U * Z ; G_2 \leftarrow V * Z ;$$

Etape 2 : Calculer la taille de pas : $\Delta t \leftarrow (T - T_0)/N$;

Etape3 : Générer les données.

Début

$T \leftarrow T_0$ {instant initial} ; $WT \leftarrow 0$; $G2 \leftarrow 0$;

De $K = 1, \dots, n$ bpt faire :

$TK \leftarrow TK + Delta$; $X[K] := TK$; {valeurs de l'abscisse des X }

Si $K \bmod 2 = 1$ alors Gauss Marsaglia ($G1, G2$) sinon $G1 \leftarrow G2$;

$DW[K-1] \leftarrow G_1 * SQRT(Delta)$;

$WT \leftarrow WT + DW[K-1]$; {valeur de la trajectoire du processus de Wiener}

$Y[K] \leftarrow WT$; {valeurs de l'abscisse des Y }

Fin .

Résultat de la simulation

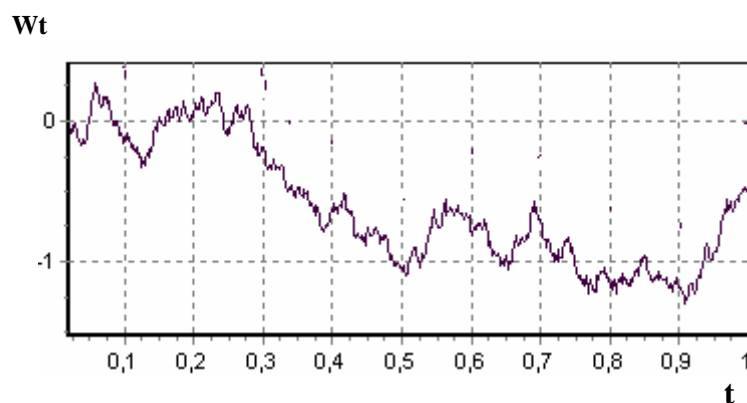


Figure 5.1 : Simulation d'une trajectoire brownienne sur [0,1]

b- Application de l'approximation d'Euler : Cas d'une EDS linéaire

Considérons la méthode d'Euler pour l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \frac{1}{2} \alpha^2 X_t dt + \alpha X_t dW_t \quad \forall t \in [t_0, T], \quad X_0 \in \mathbb{R}$$

La solution explicite de cette équation est de la forme :

$$X_t = X_0 \cdot \exp(\alpha W_t) \quad \forall t \in [t_0, T] \text{ et } \forall W = \{W_t, t \geq 0\}$$

La simulation de la trajectoire de l'approximation d'Euler Y_n sachant le pas de discrétisation se fait récursivement de la manière suivante :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2}\alpha^2 Y_n \Delta_n + \alpha Y_n \Delta W_n & \forall n = 0,1,2,\dots \\ Y_0 = X_0, \Delta W_n \approx N(0, \Delta_n) \text{ avec } \Delta_n = \Delta = \tau_{n+1} - \tau_n \end{cases}$$

La trajectoire de la solution exacte $X(t)$ est obtenue en évaluant le processus d'Itô aux instants de discrétisation est :

$$X_{\tau_n} = X_0 \exp\left\{\alpha \sum_{i=1}^n \Delta W_{i-1}\right\}$$

Pour tracer la trajectoire de l'approximation d'Euler Y_n et de la solution exacte X_t , nous utilisons le logiciel « ANSEDS », (la présentation de ce logiciel et l'algorithme de simulation sont donnés en détail dans [9]).

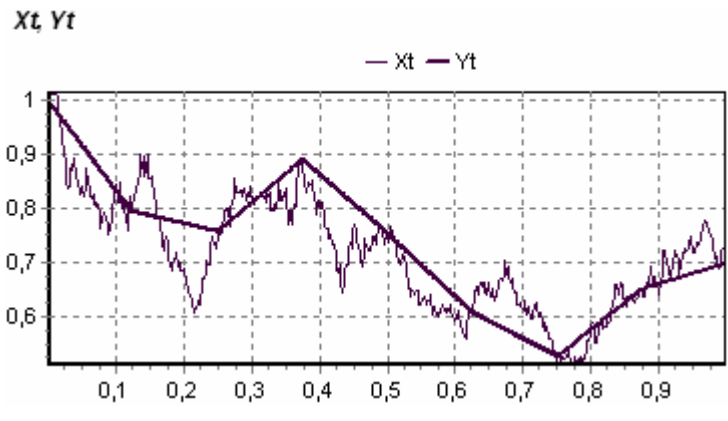


Figure 5. 2 : Approximation d'Euler $Y(t)$ et solution exacte $X(t)$ de l'EDS : $dX_t = 0,125 X_t dt + 0,5 X_t dW_t$ sur $[0,T]$, $\alpha = 1/2$, $X_0 = 1$ et $\Delta = 1/8$

Le résultat est ici aberrant, ceci provient du fait que le pas de discrétisation Δ a été choisi grand ($\Delta = 1/8$). En choisissant un pas plus petit ($\Delta = 1/32$), nous obtenons la figure ci-dessous.

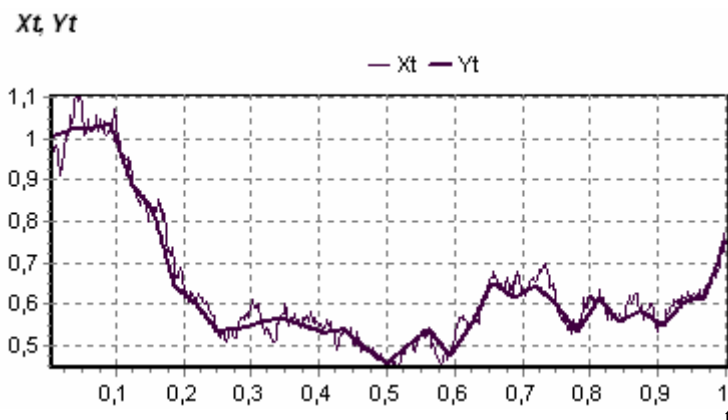


Figure 5. 3 : Approximation d'Euler $Y(t)$ et solution exacte $X(t)$ de l'EDS : $dX_t = 0,125 X_t dt + 0,5 X_t dW_t$ sur $[0,T]$, $\alpha = 1/2$, $X_0 = 1$ et $\Delta = 1/32$

On voit que , l'approximation est nettement meilleure , la trajectoire observée de l'approximations Y_t est proche de celle de la solution exacte X_t .Ce constat est vrai si le pas de temps est suffisamment petit et convenablement choisi . Dans la suite, nous fixons le pas à $\Delta = 1/32$.

2- Simulation des processus à sauts

Nous allons décrire une procédure permettant de simuler le mouvement brownien géométrique avec sauts sachant que la solution de ce modèle a la forme explicite suivante :

$$S_t = S_0 \left(\prod_{i=1}^{N_t} (1 + \gamma_i) \right) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\} \quad (5.3)$$

Où ; S_t : l'actif sous jacent à l'instant t

μ : le rendement espéré de l'actif

σ : l'écart- type (volatilité) du rendement de l'actif

$(N_t)_{t \geq 0}$: Processus de Poisson

$(\gamma_i)_{i \geq 1}$: Une suite de variables aléatoires (i.i.d) à valeurs dans $]-1, 1[$ de loi $\nu(dx)$

Afin de réaliser la simulation , on discrétise l'équation (5.3) en utilisant la méthode d'Euler.

Pour cela, on divise l'intervalle de simulation $[t_0, T]$ en n sous intervalles équidistants de pas

égal à $\Delta = \frac{T - t_0}{n}$.

Procédure de simulation

a : simuler des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites G_i

b : fixer le pas de discrétisation Δ .

c : simuler le mouvement brownien à l'instant n : $\sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^n G_i$

d: simuler une variable poissonnienne N de paramètre $\lambda \Delta$

e: Si $N = k$, simuler k variables aléatoires $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ selon la loi $\nu(ds)$

f : Simuler les prix de l'actif S aux instants : $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + n\Delta t$. On obtient ainsi à l'instant n :

$$S_T^{(n)} = S_{t_0} \left(\prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i) \right) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) n\Delta + \sigma \sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^n G_i \right\}$$

Où ; S_T : le prix de l'actif à l'échéance

T : la date à l'échéance

t_0 : la date à initiale de l'actif

$\sqrt{\Delta} G_i$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 0 et de variance Δ .

Ainsi, on génère $S_T^1, S_T^2, \dots, S_T^{(n)}$.

Jusqu'à présent , nous avons vu que la simulation des trajectoires par discrétisation du temps est l'approche la plus efficace pour résoudre les EDS .Par ailleurs, pour approcher les solutions de ces équations, nous allons traiter les approximations de Taylor en considérant le critère de convergence forte .

5-3- Approximation des trajectoires et convergence forte

Le choix du critère de convergence dépend de la nature du problème à traiter. Nous pouvons s'intéresser à une simulation directe, à l'estimation, aux tests statistiques ou autres et dans ce cas on parle de la convergence forte. Si c'est la précision des moments, des probabilités ou d'autres fonctions du processus alors on parle de la convergence faible. Pour la présente approximation, nous nous intéressons à la convergence au sens fort où la précision de l'approximation est relative aux trajectoires. Pour cela, nous allons introduire le critère de l'erreur absolue et l'ordre de convergence.

1- Erreur absolue

On définit l'erreur absolue due à l'approximation des trajectoires par :

$$\varepsilon = E(|X_T - Y_T|)$$

Où, X_T est le processus d'Itô à l'instant T et Y_T l'approximation d'Euler.

Cette erreur est estimée en simulant N trajectoires du processus d'Itô $X_{T,k}$, ainsi que son approximation d'Euler $Y_{T,k}$ correspondant au même chemin aléatoire que le processus de Wiener ; elle est donnée par :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X_{T,k} - Y_{T,k}|$$

Notons que plus la taille du pas de l'approximation est faible plus cet estimateur est faible.

Pour un nombre de simulation N assez grand, l'erreur estimée $\hat{\varepsilon}$ est une variable aléatoire gaussienne qui converge asymptotiquement en distribution vers ε (théorème central limite) ; or en pratique, il est impossible de générer un nombre infini de trajectoires mais nous pouvons construire un intervalle de confiance pour ε où nous aurons besoin d'estimer la variance σ_ε^2 de $\hat{\varepsilon}$. Pour ce la, nous disposerons de M séries où dans chacune d'elles nous procédons à N simulations. Les erreurs empiriques des M séries sont données par :

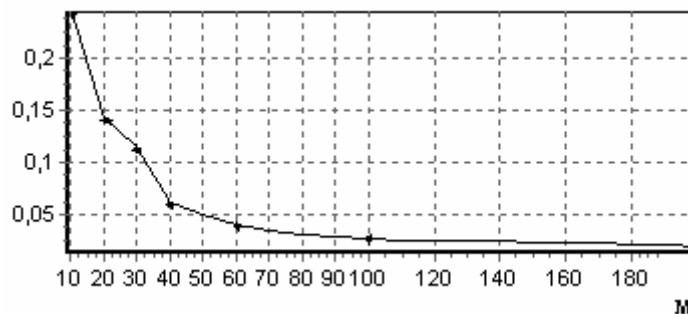
$$\hat{\varepsilon}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X_{T,k,j} - Y_{T,k,j}| \quad \forall j = 1, 2, \dots, M$$

Où $Y_{T,k,j}$ est la valeur de la $k^{\text{ième}}$ trajectoire de l'approximation générée dans la $j^{\text{ième}}$ série à l'instant T et $X_{T,k,j}$ la valeur correspondante du processus d'Itô .Delà l'intervalle de confiance est de la forme :

$$\left[\hat{\varepsilon} \pm t_{M-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{M}} \right] \text{ où } \hat{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\varepsilon}_j, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon})^2$$

Et $t_{M-1}^{1-\alpha}$ est la valeur de Student correspondante à $(M - 1)$ degré de liberté à un niveau de confiance $(1 - \alpha)$. [9]

Longueur de l'Idc (Eps)



Longueur de l'Idc (Eps) par application du schéma d'Euler pour l'EDS :

$$dX_t = 1.5 * X_t dt + X_t dW_t \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ avec } \Delta t = 1/32$$

Le graphe ci-dessus montre que la longueur de l'intervalle de confiance de l'erreur absolue décroît au fur et à mesure que le nombre de séries augmente. Cette présentation nous permet de déterminer le nombre de simulation nécessaire pour obtenir un intervalle de confiance pour l'erreur absolue en spécifiant seulement sa longueur.

2- Ordre de convergence forte

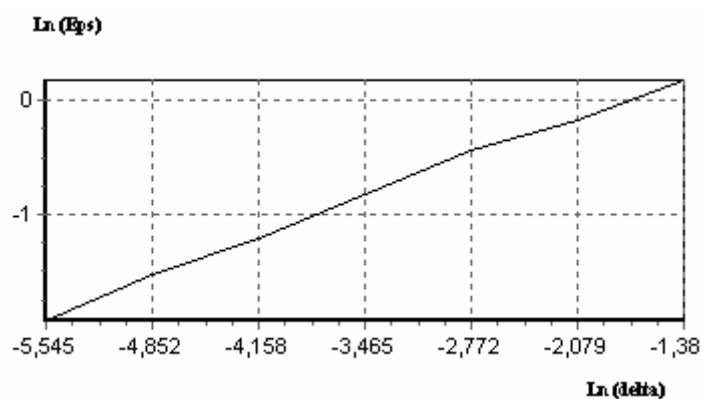
Nous dirons (par analogie avec le cas déterministe) que le processus approximatif Y_T converge fortement avec un ordre $\gamma \in [0, \infty[$ s'il existe une constante positive $k \in [0, \infty[$ indépendante de Δ tel que :

$$k > 0, \quad E\left(|X_T - Y_T|\right) \leq k \Delta^\gamma \quad \forall \Delta \in [0, 1[$$

Pour toute discrétisation du temps avec une taille maximale du pas $\Delta \in [0, 1[$.

L'ordre de convergence est parfois plus petit dans le cas stochastique par rapport au cas déterministe correspondant, ceci à cause des accroissements ΔW_i qui ont une erreur de l'ordre d'approximation de racine carrée du pas $\sqrt{\Delta}$ au lieu de l'ordre de Δ .

Dans l'analyse numérique qu'elle soit déterministe ou stochastique, on opte pour l'approximation ayant un ordre de convergence le plus élevé.



Ordre de convergence expérimental de l'approximation d'Euler
Appliquée sur l'EDS : $1.5 \cdot X_t dt + X_t dW_t / X_0=1$ et $M=20$

D'après la représentation graphique du logarithme de l'erreur absolue en fonction de celui de Delta, nous constatons qu'il y a une relation linéaire entre l'erreur absolue et la taille de pas Δ . avec une pente positive. Cette pente représente l'ordre de convergence forte de l'approximation d'Euler qui est égale dans notre cas à 0,505. Comme le montre le graphe ci-dessus

5-4- Approximations fortes de Taylor

Les approximations fortes de Taylor sont des approximations en temps discret basées sur le développement de Taylor stochastique au sens de la convergence forte.

Dans cette section, nous décrivons les schémas forts de Taylor dans le cas d'un processus d'Itô et de Wiener de dimension 1 satisfaisant l'EDS de type Itô :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s, s) dW_s, \forall t \in [t_0, T] \quad (5.4)$$

Afin d'appliquer tout les schémas forts, nous utilisons le logiciel ANSEDS cité dans la section précédente, pour cela, nous devons :

- insérer les coefficients de dérive et de diffusion de l'EDS choisie et leurs dérivées premières et secondes par rapport à x et t .
- insérer la solution explicite de l'EDS considérée si sa forme explicite est connue.
- préciser l'intervalle de temps $[t_0, T]$, la valeur initiale X_0 et le pas de discrétisation Δ .

En sélectionnant l'approximation voulue, la solution exacte de l'EDS considérée et son approximation seront présentées.

Une fois que le compteur arrive à 1016000 itérations, l'erreur d'approximation, son intervalle de confiance et l'ordre de convergence expérimentale seront données.

1- Schéma d'Euler

Le Schéma d'Euler est l'approximation de Taylor d'ordre 0,5, alors qu'il est égal à 1 dans le cas déterministe. La forme de cette approximation est :

$$Y_{n+1} = Y_n + a \Delta_n + b \Delta W_n \quad (5.5)$$

Où ; $\Delta_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} dt = \tau_{n+1} - \tau_n$ est le pas de discrétisation et $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ sont les

incrémentations du processus de Wiener.

a- Cas du Mouvement brownien géométrique (MBG)

Pour l'EDS du MBG : $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$ avec $T_0 \leftarrow 0$, $T_1 \leftarrow 1$, $X_0 \leftarrow 1$, $\mu \leftarrow 0,5$, $\sigma = 1$. Les résultats de simulation sont donnés ci-après :

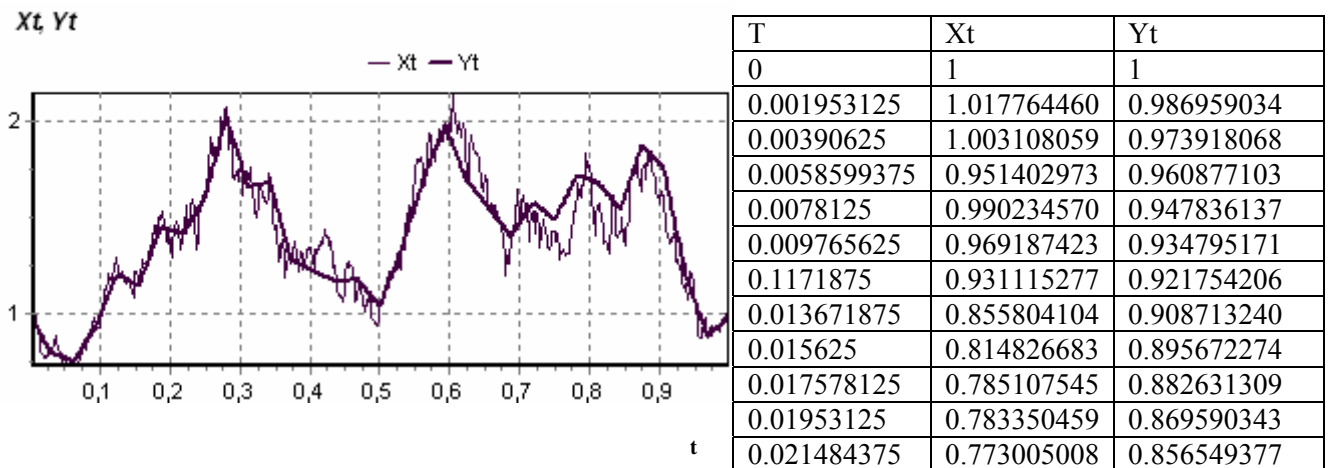
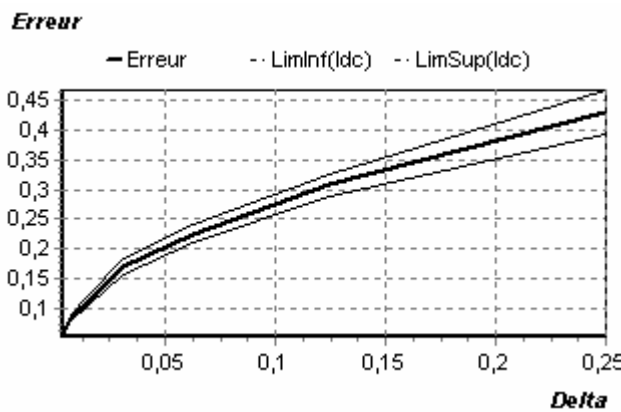
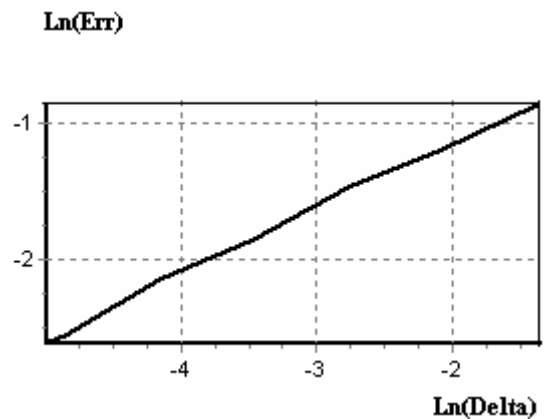


Schéma fort d'Euler Y(t) et solution exacte X(t) de l'EDS $dX_t=0.5*X_t dt+1.0*X_t dW_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0=1$, $\Delta t=1/3$



Erreur absolue du schéma fort d'Euler pour l'EDS : $dX_t=0.5* X_t dt +1.0* X_t dW_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0=1$



Ordre de convergence expérimental l'approximation forte d'Euler

Selon les résultats de simulation, la valeur minimale et maximale de l'erreur absolue (Eps) de l'approximation d'Euler stochastique appliquée sur l'EDS du mouvement brownien géométrique $dX_t = 0.5X_t dt + 1.0X_t dW_t, \forall t \in [0,1]$ varie entre 0.054 et 0.431 pour des tailles de pas de temps (delta) variant entre 2^{-8} et 2^{-2} . Cette erreur est estimée après 2000 simulations effectuées pour chacune des tailles de pas de temps. L'ordre de convergence expérimental pour cette approximation est 0.4918 et le temps d'exécution pour l'estimation de l'erreur absolue due au schéma d'Euler est égal à 609 millisecondes.

**Erreur absolue (Eps) de l'approximation forte d'Euler
(Cas du mouvement brownien géométrique)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de L'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.431	[0.394, 0.468]	0.074	<001
$2^{-3}=0.125$	0.308	[0.289, 0.327]	0.038	015
$2^{-4}=0.0625$	0.225	[0.210, 0.240]	0.030	016
$2^{-5}=0.03125$	0.170	[0.158, 0.183]	0.025	031
$2^{-6}=0.015625$	0.114	[0.106, 0.122]	0.016	079
$2^{-7}=0.0078125$	0.083	[0.077, 0.089]	0.012	140
$2^{-8}=0.00390625$	0.054	[0.052, 0.059]	0.007	266

b- Cas du modèle Retour à la moyenne (MRM)

Pour tracer la trajectoire de l'approximation d'Euler Y_t et de la solution exacte X_t , de l'EDS $dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma W_t$, nous suivons les mêmes étapes décrites précédemment seulement des modifications seront portés sur :

- La fonction drift $A(TI, XI) = \alpha(\beta - X_t)$
- La solution explicite de l'EDS considérée est de la forme

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \quad (5.6)$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte (voir[23]) suivante :

$$X_{t+\Delta} = X_t e^{-\alpha \Delta} + \beta(1 - e^{-\alpha \Delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha \Delta}}{2\alpha}} G \quad (5.7)$$

- L'application « ANSEDS » ne permet pas d'introduire l'intégrale stochastique $\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$ de la solution explicite (5.6). Pour cela, nous allons la remplacer par la discrétisation exacte

(5.7) avec la simple transformation : $G = \frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim N(0,1)$

Notons que cette modification sera aussi utilisée pour les autres schémas(Milstein et Taylor 1.5).

Résultat de la simulation : L'EDS considérée est : $dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t$, avec $T0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X0 \leftarrow 1$, $\text{Alpha} \leftarrow 1$, $\text{Béta} \leftarrow 0$ et $\text{Sigma} \leftarrow 1$

Xt, Yt

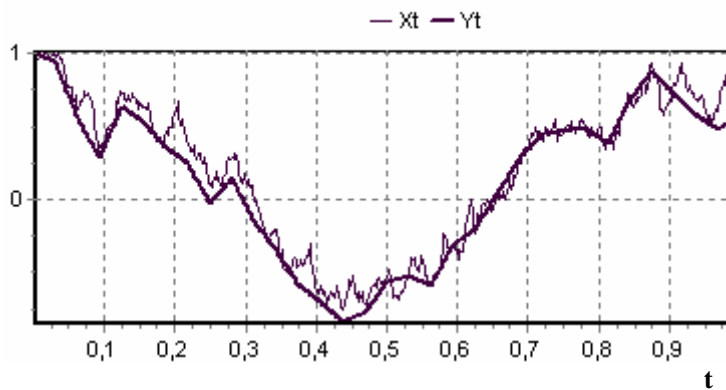
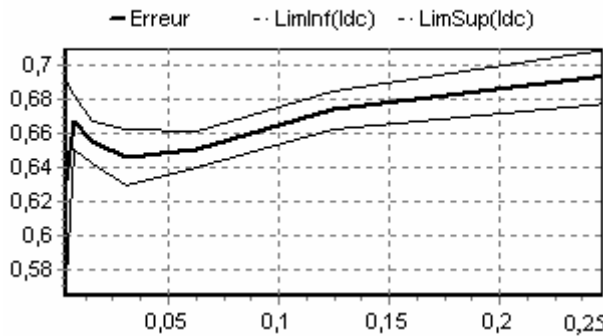


Schéma fort d'Euler Y(t) et solution exacte X(t) de l'EDS : $dX_t = 1,0*(0-X_t)dt + 1,0*dW_t$ sur $[0,1]$ / $X_0=1$, $\Delta t=1/32$

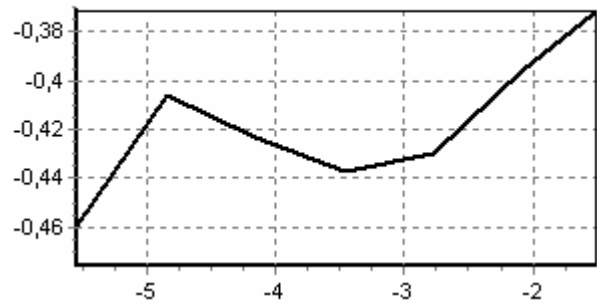
T	Xt	Yt
0	1	1
0.001953125	0.926410828	0.995637183
0.00390625	0.945913227	0.991273366
0.005859375	0.955262261	0.986911549
0.0078125	0.965054256	0.982548733
0.009765625	0.977022782	0.978185916
0.01171875	0.987103625	0.973823099
0.013671875	0.978035973	0.969460282
0.015625	1.022380701	0.965097466
0.017578125	1.011814189	0.960734649
0.01953125	0.982836551	0.956371832
0.021484375	0.961682549	0.952009015

Erreur



Erreur absolue du schéma fort d'Euler pour l'EDS : $dX_t = 1,0*(0-X_t)dt + 1,0*dW_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0=1$

Ln(Err)



Ordre de CV Expérimental de l'approximation d'Euler

L'erreur résultante (Eps) de cette approximation est moins précise que celle du MBG. Elle varie en fonction de la taille de pas de temps entre 0.631 et 0.693, soit un intervalle de confiance égal respectivement à $[0.573, 0.690]$ et $[0.677, 0.708]$ correspondant au tailles de pas de temps variant entre 2^{-8} et 2^{-2} . L'ordre de convergence est très faible, soit 0.0222 mais la durée d'exécution est longue, soit 04.27.235 millisecondes.

Erreur absolue (Eps) de l'approximation forte d'Euler (Cas du modèle retour à la moyenne)

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de L'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.693	$[0.677, 0.708]$	0.031	04.485
$2^{-3}=0.125$	0.673	$[0.661, 0.684]$	0.023	05.468
$2^{-4}=0.0625$	0.650	$[0.639, 0.661]$	0.022	06.625
$2^{-5}=0.03125$	0.645	$[0.629, 0.661]$	0.032	10.328
$2^{-6}=0.015625$	0.654	$[0.642, 0.667]$	0.025	18.610
$2^{-7}=0.0078125$	0.666	$[0.650, 0.681]$	0.031	36.437
$2^{-8}=0.00390625$	0.631	$[0.573, 0.690]$	0.117	03.05.266

2- Schéma de Milstein

Ce schéma d'approximation présente un ordre de convergence supérieur à celui d'Euler, il est égale à 1. Lorsque le processus d'Itô et de Wiener sont de dimension 1, l'approximation de Milstein en terme d'intégrale d'Itô n'est autre que celle d'Euler plus un terme, soit :

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2}bb'\{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\} \quad (5.8)$$

a- Résultat de simulation: L'EDS considérée : $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, avec $T_0 \leftarrow 0, T_1 \leftarrow 1, X_0 \leftarrow 1, \mu \leftarrow -0.5$ et $\sigma \leftarrow 1.0$

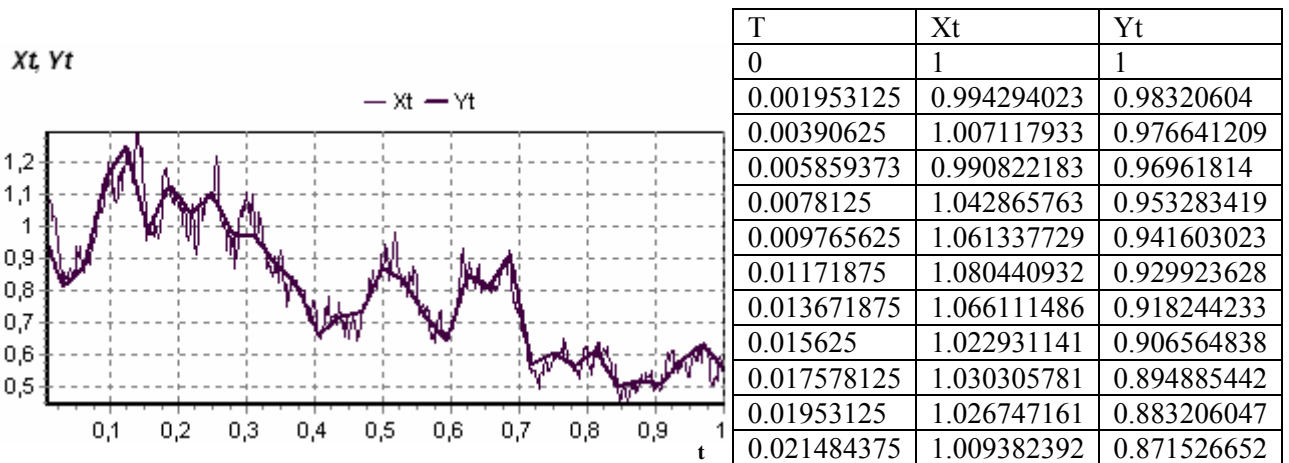
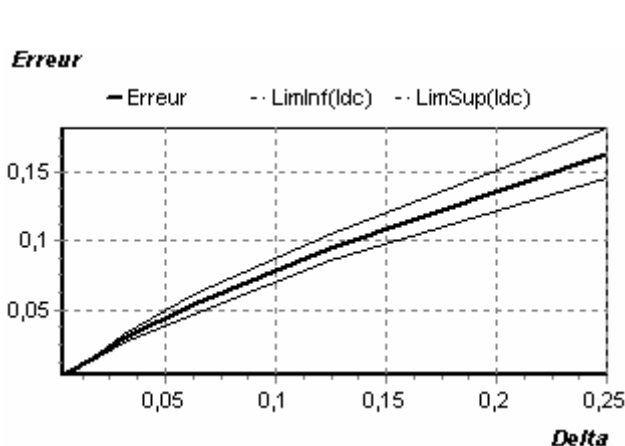
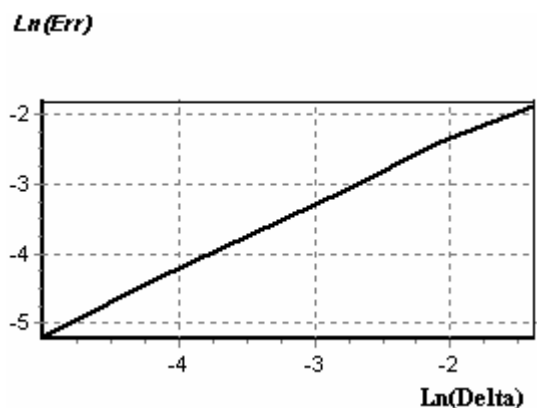


Schéma fort de Milstein Y(t) et solution exacte X(t) de l'EDS :

$$dX_t = 0.5 * X_t dt + 1.0 * X_t dW_t \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } X_0 = 1, \Delta t$$



Erreur absolue du schéma fort de Milstein pour l'EDS $dX_t = 0.5 * X_t dt + 1.0 * X_t dW_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0 = 1$



Ordre de CV Expérimentale de l'approximation forte de Milstein .

L'erreur absolue de l'approximation forte de Milstein appliquée sur une EDS d'un mouvement brownien géométrique varie entre 0.0033 et 0.163 pour des tailles de pas de temps variant entre 2^{-8} et 2^{-2} . L'application du schéma d'Euler sur la même EDS a donné des valeurs plus élevées, soit respectivement 0.054 et 0.431 pour les mêmes tailles de pas. Ceci dit que le schéma de Milstein donne des résultats meilleurs pour ce cas de modèle. L'ordre de convergence expérimental pour cette approximation est proche de 1, soit 0.9337 et le temps d'exécution pour l'estimation de l'erreur absolue du schéma de Milstein pour l'EDS :

$dX_t = 0.5X_t dt + X_t dW_t$ est de 687millisecondes.

**Erreur absolue de l'approximation de Milstein
(cas d'EDS d'un mouvement brownien géométrique)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de L'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.163	[0.145, 0.182]	0.037	< 001
$2^{-3}=0.125$	0.095	[0.086, 0.104]	0.018	016
$2^{-4}=0.0625$	0.053	[0.046, 0.061]	0.015	031
$2^{-5}=0.03125$	0.029	[0.026, 0.031]	0.005	047
$2^{-6}=0.015625$	0.012	[0.011, 0.013]	0.002	062
$2^{-7}=0.0078125$	0.006	[0.005, 0.006]	0.001	140
$2^{-8}=0.00390625$	0.0033	[0.0029, 0.0037]	0.0008	297

b- Résultat de la simulation : L'EDS considérée est : $dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t$, avec $T_0 \leftarrow 0, T \leftarrow 1, X_0 \leftarrow 1, \text{Alpha} \leftarrow 1, \text{Béta} \leftarrow 0$ et $\text{Sigma} \leftarrow 1$.

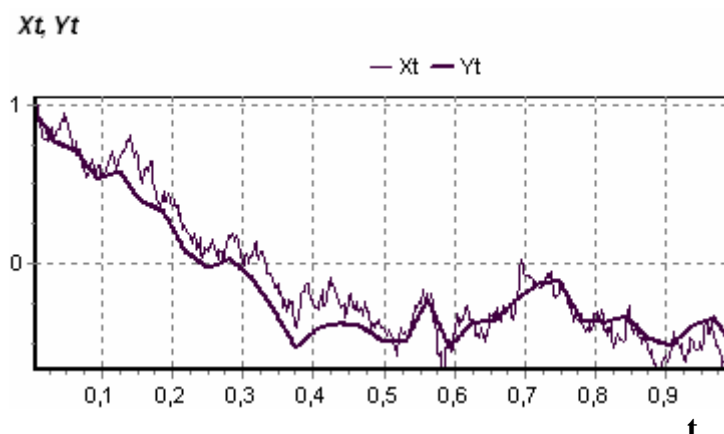
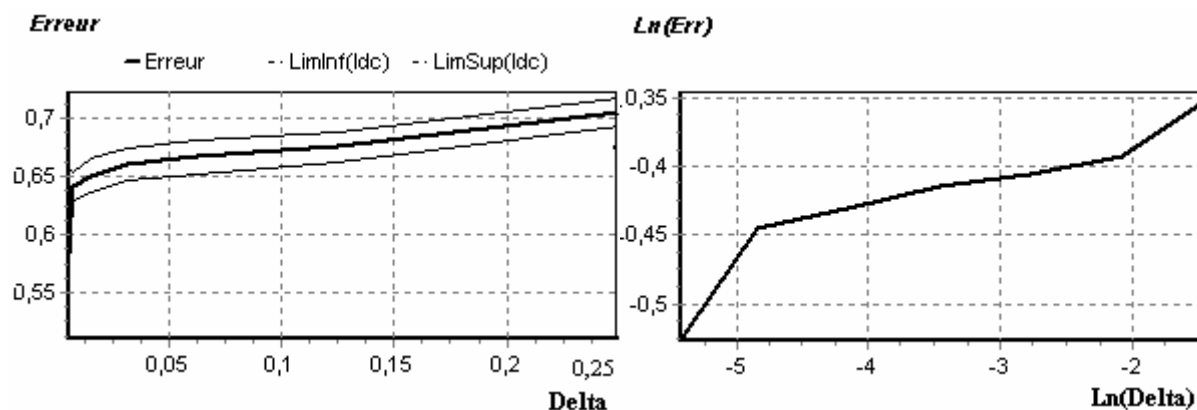


Schéma fort de Milstein Y(t) et solution exacte X(t) de l'EDS: $dX_t=1,0*(0-X_t)dt+1,0*dW_t$ sur $[0,1]$ / $X_0=1, \text{Delta}=1/32$

T	Xt	Yt
0	1	1
0.001953125	1.087404979	0.985525729
0.00390625	1.072574590	0.971051458
0.005859373	1.068383446	0.956577187
0.0078125	0.941407388	0.942102916
0.009765625	0.911219463	0.927628645
0.01171875	0.872613311	0.913154374
0.013671875	0.838939227	0.898680103
0.015625	0.813777340	0.884205832
0.017578125	0.783429901	0.869731561
0.01953125	0.788975999	0.855257290
0.021484375	0.771536774	0.840783019



Erreur absolue du schéma de Milstein pour l'EDS :
 $dX_t = 1.0 \cdot (0 - X_t) dt + 1.0 \cdot X_t dW_t$, $0 \leq t \leq 1$, $X_0 = 1$

Ordre de convergence expérimental de Milstein

Pour le schéma de Milstein, nous enregistrons les valeurs minimales et maximales de la longueur de l'intervalle de confiance variant entre 0.024 et 0.153 pour différentes tailles de pas (2^{-2} et 2^{-8}). L'ordre de convergence égal à 0.0466 et le temps d'exécution global est égal à 12.11.250 millisecondes.

Erreur absolue de l'approximation de Milstein (cas d'EDS du modèle de retour à la moyenne)

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de L'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.705	[0.693, 0.717]	0.024	36.281
$2^{-3}=0.125$	0.675	[0.662, 0.688]	0.026	38.016
$2^{-4}=0.0625$	0.666	[0.652, 0.681]	0.029	01.12.281
$2^{-5}=0.03125$	0.660	[0.646, 0.675]	0.029	01.56.047
$2^{-6}=0.015625$	0.650	[0.635, 0.665]	0.03	01.032.828
$2^{-7}=0.0078125$	0.641	[0.628, 0.653]	0.025	02.032.172
$2^{-8}=0.00390625$	0.581	[0.504, 0.657]	0.153	04.13.437

3- Schéma de Taylor d'ordre 1.5

Considérons toujours l'équation (4,5), le schéma fort de Taylor d'ordre 1,5 s'écrit :

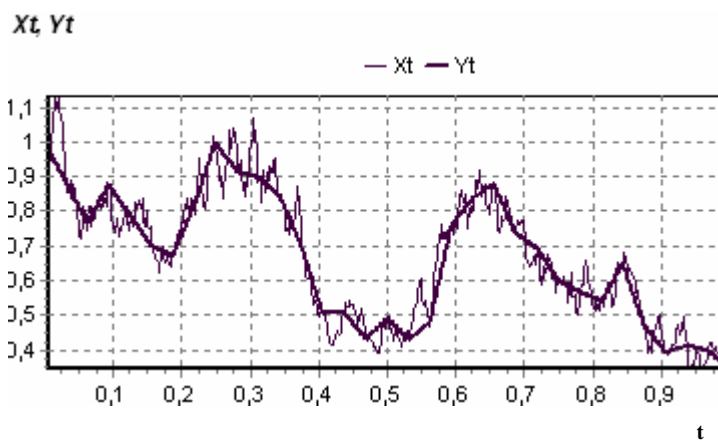
$$\begin{aligned}
 Y_{n+1} = & Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2}bb'\{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\} + a'b\Delta Z_n + \frac{1}{2}\left(aa' + \frac{1}{2}b^2a''\right)\Delta_n^2 \quad (5.9) \\
 & + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2b''\right)\{\Delta W_n\Delta_n - \Delta Z_n\} + \frac{1}{2}b(bb'' + (b')^2)\left\{\frac{1}{3}(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\right\}\Delta W_n
 \end{aligned}$$

La variable ΔZ_n est défini par:

$$\Delta Z_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_1} dW_{s_1} ds_1 \text{ Où } \Delta Z_n \approx N\left(0, \frac{1}{3} \Delta_n^3\right) \text{ et } E(\Delta Z_n \Delta W_n) = \frac{1}{2} \Delta_n^2$$

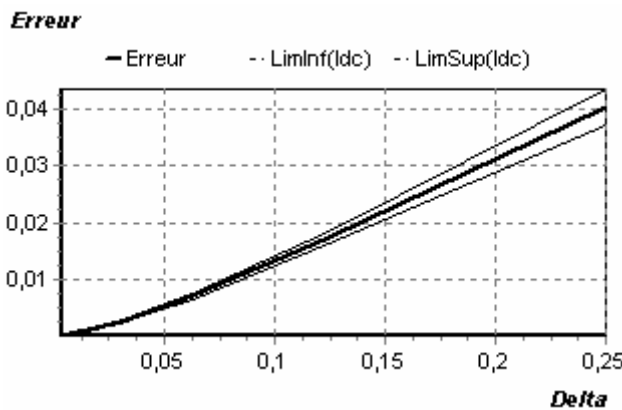
Le dernier terme dans (5.9) représente l'intégrale d'Itô triplet $I_{(1,1,1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} (\Delta W_n)^2 - \Delta_n \right\} \Delta W_n$

a-Résultat de simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, avec $T0 \leftarrow 0, T1 \leftarrow 1, X0 \leftarrow 1, \mu \leftarrow 0.5$ et $\sigma \leftarrow 1.0$

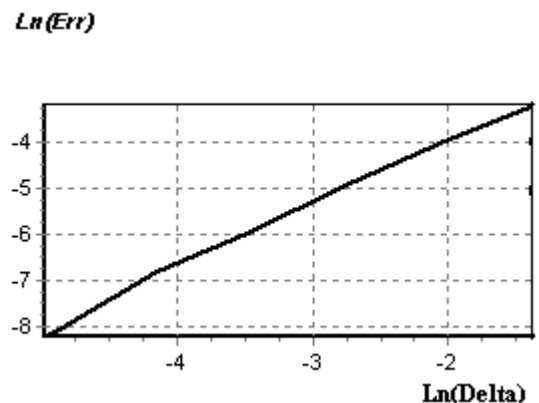


T	Xt	Yt
0	1	1
0.001953125	1.003779521	0.992762838
0.00390625	0.994024469	0.985525677
0.005859375	0.970865438	0.978288515
0.0078125	0.948592800	0.971051354
0.009765625	0.980542185	0.963814492
0.01171875	1.070500239	0.956577031
0.013671875	1.105341629	0.949339869
0.015625	1.143996377	0.942102708
0.017578125	1.094565286	0.934865546
0.01953125	1.126774220	0.927628385
0.021484375	1.097483259	0.920391223

Schéma de Taylor 1.5 Y(t) et solution exacte X(t) de l'EDS $dX_t = 0.5 * X_t dt + 1.0 * X_t dW_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0 = 1, \Delta = 1/32$



Erreur absolue du schéma de Tay1.5 pour l'EDS : $dX_t = 0.5 * X_t dt + 1.0 * X_t dW_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0 = 1$



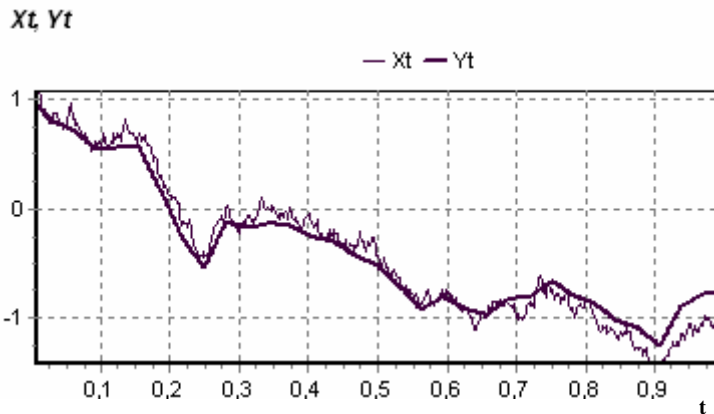
Ordre de CV Expérimental de de l'approximation forte de Taylor 1.5

La méthode d'approximation forte de Taylor d'ordre 1.5 donne des résultats plus précises avec une erreur variant entre 0.0001 et 0.040 et un ordre de convergence égale à 1.3880 en ce qui concerne le temps d'exécution obtenus, on enregistre 01.250 millisecondes

**Erreur absolue de l'approximation de Taylor d'ordre 1.5
(cas d'EDS d'un mouvement brownien géométrique)**

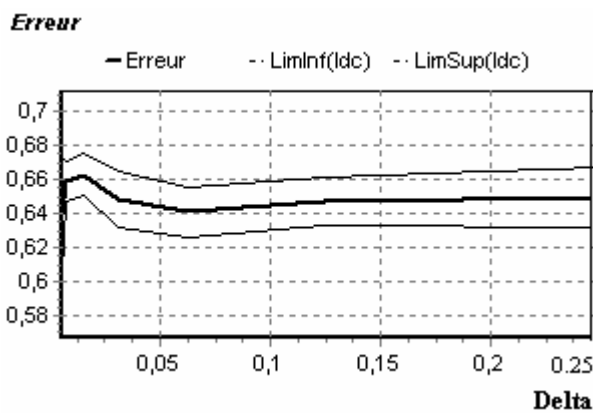
Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
0.25	0.040	[0.037, 0.043]	0.006	<001
0.125	0.017	[0.016, 0.018]	0.002	015
0.0625	0.007	[0.006, 0.007]	0.001	047
0.03125	0.002	[0.0024, 0.0027]	0.0003	0.63
0.015625	0.001	[0.0009, 0.001]	0.0001	140
0.0078125	0.0003	[0.0003, 0.00035]	$5 \cdot 10^{-5}$	344
0.00390625	0.0001	[0.00011, 0.00013]	$2 \cdot 10^{-5}$	641

b- Résultat de la simulation : L'EDS considérée est : $dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t$, avec $T_0 \leftarrow 0, T \leftarrow 1, X_0 \leftarrow 1, \text{Alpha} \leftarrow 1, \text{Béta} \leftarrow 0$ et $\text{Sigma} \leftarrow 1$

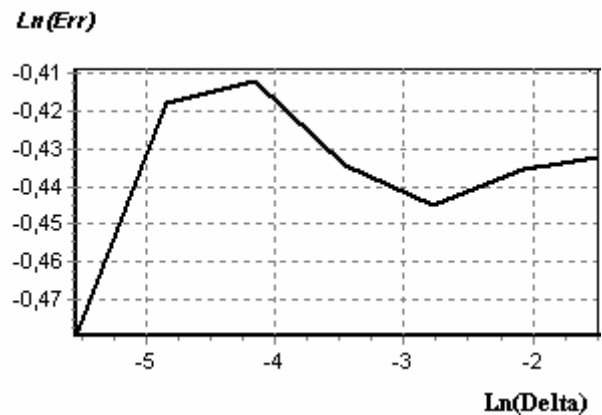


T	Xt	Yt
0	1	1
0.001953125	1.074475924	0.986951896
0.00390625	1.027579455	0.973903793
0.005859375	1.110555105	0.960855690
0.0078125	1.114008419	0.947807587
0.009765625	1.124470420	0.934759484
0.01171875	1.066680264	0.921711381
0.013671875	1.012365656	0.908663278
0.015625	0.928837480	0.895615175
0.017578125	0.857663351	0.882567072
0.01953125	0.897405115	0.869518969
0.021484375	0.827751426	0.856470866

Schéma de Taylor 1.5 Y(t) et solution exacte X(t) de l'EDS : $dX_t = 1.0 \cdot (0 - X_t)dt + 1.0 \cdot dW_t$ sur $[0,1]$ / $X_0 = 1, \text{Delta} = 1/3$



Erreur absolue du schéma de Taylor 1.5 pour l'EDS : $dX_t = 1.0 \cdot (0 - X_t)dt + 1.0 \cdot dW_t$, pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0 = 1$



Ordre de convergence expérimental de l'approximation de Taylor 1.5

L'erreur résultante du schéma fort de Taylor d'ordre 1.5 est plus réduite que les deux approximations d'Euler et de Milstein , établis précédemment .Nous enregistrons ainsi pour une taille de pas de temps 1/32 , une longueur d'intervalle de confiance égale à 0.032.

L'ordre de convergence expérimental du schéma fort de Taylor 1.5 est estimé à 0.0115 où le CPU est de l'ordre de 10.14.937 millisecondes.

**Erreur absolue de l'approximation de Taylor d'ordre1.5
(cas d'EDS du modèle retour à la moyenne)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.649	[0.631, 0.667]	0.036	19.422
$2^{-3}=0.125$	0.646	[0.632, 0.661]	0.029	22.344
$2^{-4}=0.0625$	0.640	[0.626, 0.655]	0.029	28.703
$2^{-5}=0.03125$	0.647	[0.631, 0.663]	0.032	41.000
$2^{-6}=0.015625$	0.662	[0.650, 0.674]	0.024	01.04.172
$2^{-7}=0.0078125$	0.658	[0.646, 0.670]	0.024	01.53.485
$2^{-8}=0.00390625$	0.618	[0.561, 0.676]	0.115	05.25.704

4- Schéma fort de Taylor d'ordre 2,0

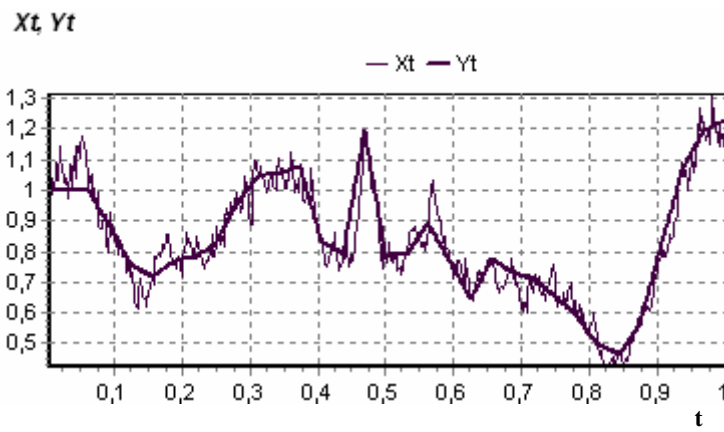
En incluant d'avantage de termes dans le développement de Taylor stochastique, nous obtiendrons des schémas d'ordre plus supérieur que ceux d'Euler, Milstein et de Taylor d'ordre1.5. Dans le cas unidimensionnel, le schéma fort de Taylor d'ordre 2.0 est donné par :

$$Y_{n+1} = Y_n + a \Delta_n + b \Delta W_n + \frac{1}{2!} bb'(\Delta W_n)^2 + b a' \Delta Z_n + \frac{1}{2} a a' (\Delta_n)^2 + a b' \{ \Delta W_n - \Delta Z_n \} \quad (5.10)$$

$$+ \frac{1}{3!} b(bb')'(\Delta W_n)^3 + \frac{1}{4!} b(b(bb'))'(\Delta W_n)^4 + a(bb')J_{(0,1,1)} + b(ab')J_{(1,0,1)} + b(ba')J_{(1,1;0)}$$

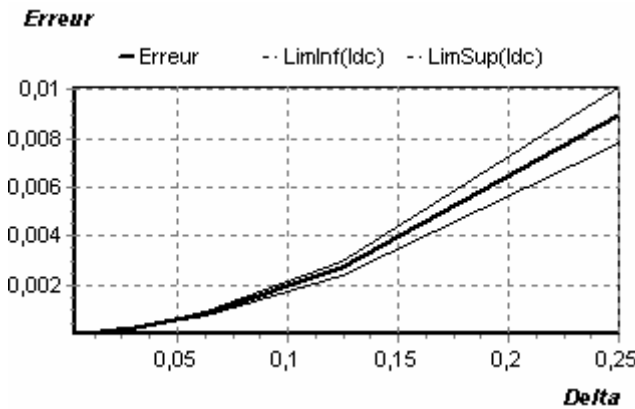
Les variables ΔW_n et ΔZ_n sont générées comme précédemment. L'intégrales de Stratonovich pour $j_1, j_2, \dots, j_l \in \{1, \dots, m\}, l = 1, 2, \dots$ et $n = 0, 1, \dots$ est :

$$J_{(j_1, j_2, \dots, j_l)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \dots \int_{\tau_n}^s o dW_{s_1}^{j_1} o \dots o dW_{s_l}^{j_l} \text{ avec } W_t^0 = t \quad \forall t \in \mathfrak{R}^+$$

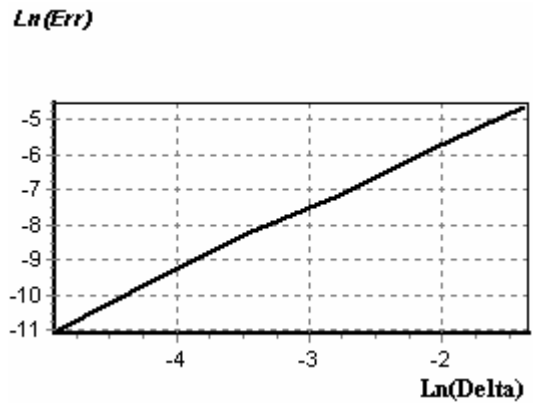


T	Xt	Yt
0	1	1
0.001953125	1.013412840	1.000012241
0.00390625	1.016437041	1.000024482
0.005859375	0.993577325	1.000036724
0.0078125	1.040272884	1.000098465
0.009765625	0.984606714	1.000061207
0.01171875	1.011338591	0.000073444
0.013671875	1.036572832	1.000085690
0.015625	1.089429679	1.000097931
0.017578125	1.031628131	1.000110173
0.01953125	1.143444201	1.000122414
0.021484375	1.122900331	1.000134655

Schéma fort de Taylor d'ordre 2, Y(t) et solution exacte X(t) l'EDS:
 $dX_t = 0.5 * X_t dt + 1.0 * X_t dW_t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $X_0 = 1$, $\Delta t = 1/32$



Erreur absolue du schéma fort de Taylor d'ordre 2.0
 Pour l'EDS : $0.5 * X_t + 1.0 * X_t dW_t$, pour $0 \leq t \leq 1, X_0 = 1$



Ordre de CV Expérim. de l'approximation forte de Taylor d'ordre 2.0.

L'approximation forte de Taylor d'ordre 2.0 appliquée à l'EDS : $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$.

Donne une erreur variant entre $4.81 * 10^{-6}$ et 0.009 pour différentes tailles de pas variant entre 2^{-8} et 2^{-2} . Nous enregistrons aussi une erreur égale à 0.0002 pour un Delta égal à 2^{-5} . La même erreur estimée par l'approximation de Taylor d'ordre 1.5 est de 0.002.

Notons que le temps d'exécution passe respectivement de 031 à 063 millisecondes pour la simulation des deux erreurs, alors que le temps d'exécution global passe de 500 à 01.250 millisecondes et donne un ordre de convergence expérimental égal à 1.812 pour l'approximation forte de Taylor d'ordre 2.0.

**Erreur absolue de l'approximation forte de Taylor d'ordre 2.0
(cas d'EDS du mouvement brownien)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
0.25	0.0090	[0.007, 0.010]	0.003	<001
0.125	0.0027	[0.0024, 0.0031]	0.0007	015
0.0625	0.0009	[0.0008, 0.001]	0.0002	016
0.03125	0.0002	[0.00022, 0.00028]	$6 \cdot 10^{-5}$	031
0.015625	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$[7.15 \cdot 10^{-5}, 8.45 \cdot 10^{-5}]$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	047
0.0078125	$1.90 \cdot 10^{-5}$	$[1.55 \cdot 10^{-5}, 2.25 \cdot 10^{-5}]$	$0.7 \cdot 10^{-5}$	094
0.00390625	$4.81 \cdot 10^{-6}$	$[4.29 \cdot 10^{-6}, 5.32 \cdot 10^{-6}]$	$1.03 \cdot 10^{-6}$	203

5- Comparaison des schémas forts de Taylor

Dans cette section, nous comparons les différentes approximations fortes de Taylor présentées [Euler- Milstein- Taylor d'ordre 1.5- et de Taylor d'ordre 2.0] appliquées sur une EDS des deux modèles : brownien géométrique (MBG) et retour à la moyenne (MRM).

Cette comparaison se fait en représentant le logarithme de l'erreur d'approximation forte (Eps) en fonction du logarithme de la taille de pas de temps (Delta) et cela pour voir le niveau de précision de ces approximations adoptées.

**Erreur absolue et temps d'exécution des schémas forts de Taylor
(Cas du mouvement brownien géométrique)**

Ln(Delta)	Ln(EpsEuler)	Temps Euler	Ln(EpsMilstein)	Temps Milstein	Ln(EpTay1.5)	Temps Tay1.5	Ln(EpsTay2.0)	Temps Tay2.0
-1,386294	-0,8416471	<001	-1,8140051	<001	-3,2188758	<001	-4,7105307	<001
-2,079491	-1,1776555	015	-2,3538784	016	-4,0745419	015	-6,2146081	015
-2,772588	-1,4916549	016	-2,9374634	031	-4,9618451	047	-7,0131158	016
-3,465735	-1,7719568	031	-3,5404594	047	-6,2146081	063	-8,5171932	031
-4,158830	-2,1715568	079	-4,4228486	062	-6,9077553	140	-9,5250511	047
-4,852030	-2,4889147	140	-5,1159958	140	-8,1117281	344	-10,90316	94
-5,545190	-2,9187712	266	-5,7138328	297	-9,2103404	641	-12,188233	188

AN : $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_0 \leftarrow 1$, $\mu \leftarrow 0,5$, $\sigma \leftarrow 1.0$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$

Les résultats du tableau montrent que les erreurs d'approximations fortes (Eps) du schéma de Taylor d'ordre 2.0 appliquées sur l'EDS : $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, avec $\mu = 0.5$ et $\sigma = 1$ sont plus réduites, alors que l'ordre de convergence expérimental est plus fort que ceux d'Euler, Milstein et Taylor 1.5 .Ainsi lorsque $\mu = 0.5$ et $\sigma = 1.0$, la meilleure approximation est celle qui possède l'ordre de convergence le plus élevé. Dans ce cas le schéma de Taylor d'ordre d'ordre 2.0 (CV= 1.8101)

**Erreur absolue et temps d'exécution des schémas forts de Taylor
(Cas du modèle : retour à la moyenne)**

Ln(Delta)	Ln(EpsEuler)	TempEuler	Ln(EpsMilstein)	TempMilstein	Ln(EpsTay1.5)	TempTay1.5
-1,386294	-0,3667252	04,485	-0,3488485	36,281	-0,4318604	19,422
-2,079491	-0,3958613	05,468	-0,392154	38,016	-0,4357181	22,344
-2,772588	-0,4300139	06,625	-0,4051151	01, 12,281	-0,4448818	28,703
-3,465735	-0,4375751	10,328	-0,4144554	01,56 ,047	-0,4343276	41,000
-4,158830	-0,4237090	18,610	-0,4298602	01,32 ,828	-0,4121876	01,04,172
-4,852030	-0,4063154	36,437	-0,4444138	02, 02,172	-0,4179426	01,53,485
-5,545190	-0,4593406	03, 05,266	-0,5428324	04, 13,437	-0,4798115	05,25,704

AN : T0 ← 0 , T ← 1 , X0 ← 1 , Alpha ← 1.0 , Beta ← 0 , Sigma ← 1.0 , Num ← 7 , N ← 100 , M ← 20

Les erreurs des 3 schémas d'approximations appliquées sur l'EDS du modèle retour à la moyenne : $dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t$ avec $\alpha = 1.0$, $\beta = 0$ et $\sigma = 1.0$ coïncident , par ailleurs le temps d'exécution global pour estimer les erreurs du schéma d'Euler est plus réduit que celui pour estimer le schéma de Milstein et Taylor d'ordre 1.5. Pour cela on peut opter pour le schéma d'Euler au lieu de choisir respectivement le schéma de Milstein ou de Taylor d'ordre 1.5.

Dans le cas où la force de rappel est plus faible ($\alpha = 0.5$), l'erreur d'approximation (Eps) est plus réduite pour les trois approximations, la meilleure approximation est celle d'Euler comme le montre les résultats ci-après.

**Erreur absolue et temps d'exécution des schémas forts de Taylor
(Cas du modèle : retour à la moyenne)**

Ln(Delta)	Ln(EpsEuler)	TempEuler	Ln(EpsMilstein)	TempMilstein	Ln(EpsTay1.5)	TempTay1.5
-1,386294	31,314	18,969	-31,316	18,187	-31,300	20,140
-2,079491	-31,33	20,531	-31,299	19,812	-31,333	23,969
-2,772588	-31,316	23,531	-31,321	23,502	-31,326	32,069
-3,465735	-31,318	29,187	-31,289	30,250	-31,301	45,734
-4,158830	-31,334	40,844	-31,296	43,813	-31,328	01, 18,469
-4,852030	-31,398	01, 04,000	-31,209	01, 08,141	-31,328	02, 15,156
-5,545190	-31,395	05, 36,281	-31,357	04, 04,250	-31,321	04, 27,438

AN : T0 ← 0 , T ← 1 , X0 ← 1 , Alpha ← 0.5 , Beta ← 0 , Sigma ← 1.0 , Num ← 7 , N ← 100 , M ← 20

5-5- Conclusion et commentaire

La résolution numérique des EDS par approximation en temps discret a montré que plus le pas de discrétisation était proche de zéro, plus les approximations de ces EDS convergeaient vers la solution exacte du processus.

La modification établie pour approximer l'intégrale stochastique de la solution explicite du modèle de retour à la moyenne (MRM) a permis d'obtenir des approximations moins précises par rapport à celles du (MBG). Afin d'éviter ce choix nous recommandons à l'utilisateur de voir l'algorithme élaboré par K.Boukhetala[11] permettant d'approximer au mieux l'intégrale

stochastique $\int_0^t \exp[-\alpha(t-s)]dW_s$, néanmoins cette méthode nécessite un temps de calcul relativement élevé.

Pour finir nous rappelons que les approximations fortes de Taylor sont des méthodes numériques efficaces pour approcher les solutions des EDS mais leurs inconvénients et qu'en plus des coefficients de dérive et de diffusion qu'on doit déterminer à chaque étape il est nécessaire d'évaluer aussi leurs dérivées à divers ordres. Cependant, il existe d'autres schémas forts qui évitent l'utilisation des dérivées comme les schémas forts explicites.

Conclusion générale

Cette étude nous a permis de se familiariser avec les notions des mathématiques financières, notre intérêt était surtout de servir d'introduction à l'immense littérature qui existe sur le sujet. Nous avons exposé des outils mathématiques indispensables qui sont le calcul stochastique et les EDS. Ces dernières ont été utilisées et appliquées tout au long de notre travail à travers les modèles présentés.

Le modèle mathématique de Black-Scholes est devenu une référence utilisé dans de nombreux secteurs (assurance- banque...). La principale qualité de ce modèle réside dans sa simplicité et facilité de mise en œuvre, mais son adaptation à la modélisation des prix de l'électricité reste malheureusement limité, par nature du problème.

Un aspect intéressant de la méthodologie que nous avons adopté est que les sauts dont l'amplitude était supposée gaussienne sont introduits explicitement dans les modèles retenus qui, tout en restant simples permettent de mieux représenter les situations de discontinuités.

La discrétisation des EDS conduit à arbitrer entre précision et temps de calcul, néanmoins la discrétisation exacte donne des résultats satisfaisants mais plus coûteux en temps de calcul.

Les résultats obtenus via le logiciel « ANSEDS » que nous avons utilisé pour simuler les solutions approchées des EDS ont montré l'efficacité des simulateurs des schémas d'approximations. Ce même logiciel est un outil d'aide à la décision puisqu'il propose à l'utilisateur un ensemble de modèles et de stratégies de résolution. Par conséquent, nous suggérons d'élargir son domaine d'application à d'autres modèles plus complexes, en particulier les modèles de diffusion à sauts.

Enfin, en incluant un aspect numérique, la modélisation des processus de diffusion avec et sans sauts présente un intérêt de recherche de tout premier plan. Ainsi, l'évaluation des actifs financiers basés sur le prix de l'électricité reste un thème de recherche très prometteur.

Bibliographie

- [1] Guikhman,A. Skorokhod. Introduction à la théorie des processus aléatoires. Edition Mir, Moscou, 1980.
- [2] I. Karatza, S.E.Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag,1998.
- [3] B.Ycart. Introduction aux équations différentielles stochastiques. Ecole des techniques avancées de Grenoble,1998.
- [4] S. Karlin , H. M. Taylor. A first course in stochastic processes. Academic Press.1975.
- [5] Nicolas Bouleau . Processus stochastiques et applications .Hermann , Paris, 1988.
- [6] A. Friedman . Stochastic differential equations and applications. Academic Press, 1975.
- [7] D.Lamberton,B.Lapeyre. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, 1991.
- [8] K.Boukhetala. Estimation des paramètres de dérives d'une équation différentielle lineaire contrôlée .Thèse de magister, USTHB,1984.
- [9] Boudali. Aspect numérique et simulation dans les équations différentielles stochastiques Thèse de magister, encadré par K. Boukhatala, USTHB,2005.
- [10] P.E. Kloeden ,E.Platen. Numerical solution of stochastic differential equations. Springer Verlag , New York,1991.
- [11] K. Boukhetala. Identification and simulation of communication system. Maghreb Mathematical Review, vol 4, N°2,pp55-79. 1995.
- [12] E. Pardoux , D. Talay. Discrétization and simulation of Stochastic Differential Equation. Acta Applicandae Mathematicae, 1985.
- [13] A .Laouar et R. Lebtahi. Etude exploratoire des modèles d'option en finance. Mémoire d'ingéniorat, encadré par K. Boukhatala .USTHB, 2003.
- [14] Monique Jeanblanc.Cours de calcul stochastique.DESS IM EVRY.Option finance ,2002
- [15] G. Gauthier . Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion. 2003.
- [16] F.Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political economy 81 p 637-659.1973.
- [17] Merton R.C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics,vol 3,224-44. 1976.
- [18] F.Planchet, P.Therond. L'impact de la prise en compte des sauts dans les problématiques d'assurance . Les cahiers de recherches de L'ISFA, 2005.

- [19] R. Barnezet , F. Delaloye . Stochastic Modeling of electricity prices. Master of science in Banking and Finance.2001.
- [20] L.Clelow,C. Strickland. Energy derivatives : Pricing and Risk management. London Lacima – Publication .
- [21] Roueyrolis.Vers la modélisation des prix spot de l'électricité.Notes Bibliographique.2004
- [22] S. Gustaf Unger. Hedging Strategy and Electricity Contract Engineering. Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2002.
- [23] F. Planchet , P. E. Therond. Simulation de trajectoires de processus continues. JWA-Actuaires, 2004.
- [24] C.A. Ramezani, Y. Zeng. Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion Processes: application to security prices. Working paper, 1998.

Glossaires

Actif : Terme générique désignant l'objet sur lequel est effectuée l'opération financière.

Actif sous-jacent : Actif sur lequel porte un produit dérivé ou particulièrement une option. Il peut être financier (action, obligation, indice boursier...) ou physique (matière première, pétrole, céréales,...) ou indice (indices boursiers tel que CAC 40, Dow Jones,..)

Action : Titre de propriété représentant une fraction du capital d'une entreprise et donnant à son porteur le droit à l'information et aux bénéfices (nommé dividende).

Arbitrage : Opération qui consiste à acheter ou vendre simultanément un ou plusieurs titres. L'arbitrage permet de réaliser un bénéfice sans risque, d'assurer l'égalité des prix à un même moment et la fluidité entre les différents marchés et contribue à leur liquidité.

Couverture (hedging) : Opération ou suite d'opérations ayant pour but de réduire les risques liés aux variations du marché. Les opérations de couverture s'effectuent sur des marchés organisés ou sur des marchés de gré à gré.

Gestion du risque : Démarche visant à contrôler le risque financier, ainsi que le risque de crédit et le risque des taux d'intérêt, au moyen d'instruments de couverture tels que les contrats à termes et les options.

Marché financier : Un lieu où l'on achète et vend des titres financiers. Les opérateurs de marché sont plus souvent autorisés à vendre à découvert des titres qu'ils ne possèdent pas.

Retour à la moyenne: Quand une variance a tendance à converger vers sa valeur moyenne.

Risque : Situation selon laquelle le nombre d'évènement éventuel est supérieur au nombre d'évènements qui vont réellement se dérouler et la mesure de probabilité qu'on peut leur rattacher.

Obligation : Titre de créance négociable représentatif de dettes qui donne droit au paiement d'un intérêt annuel et au remboursement du capital. Le détenteur d'une obligation perçoit un revenu connu à l'avance ou dont la révision se réalise dans les conditions prévues au moment de l'émission. En cas de faillite de l'émetteur, le détenteur d'une créance est prioritaire sur

l'actionnaire .Les obligations peuvent être émises par les entreprises privées ou publique ainsi que par l'Etat.

Produits dérivés : Instrument financier permettant de fixer de aujourd'hui le prix futur d'un produit physique ou financier, dit le sous-jacent. A la base composés de trois grandes familles (les contrats à terme, les warrant, les options), sont utilisés pour couvrir quatre sorte de risque (marché, liquidité, contrepartie, politique).

Volatilité : En finance, la volatilité est une mesure de l'instabilité du cours d'un actif financier. Elle sert de paramètre de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier

Volatilité historique : la mesure de la variabilité des rendements passés d'un actif financier. Plus précisément c'est l'écart type moyen des rendements de l'actif sous-jacent, calculé sur une période de temps précise, et exprimé en pourcentage annualisé.

Volatilité implicite : reflète la variabilité anticipée du cours de l'actif sous-jacent sur la durée de vie de l'option, elle se calcule à partir des options prélevé sur le marché.

Sous-jacent : Référence sur laquelle s'appuie le produit dérivé. Produit physique (céréales, électricité, pétrole..), produit financier (action, obligation, devises,...), un indice (indice boursiers tel que NASDAQ, CAC40 ,...)

Annexes

1) Méthode de Newton - Raphson

Soit à résoudre le système non linéaire suivant :

$$F = \begin{cases} f_1(X_1, X_2, \dots, X_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(X_1, X_2, \dots, X_N) = 0 \end{cases}$$

A partir d'une estimation initiale $X_i^{(0)}$, on pose $X_i^{(1)} = X_i^{(0)} + \Delta X$.

Où, ΔX est obtenu en linéarisation ce système, ce qui donne un système linéaire $AX = Y$

Dont les éléments sont données par :

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \quad \text{et} \quad Y_i = -f_i \quad (i \text{ et } j = 1 \text{ à } N)$$

A partir de valeurs d'essais (X_1^0, \dots, X_N^0) , on calcule les a_{ij} (analytiquement ou numériquement si les expressions des dérivées ne sont pas connues) et les Y_i .

On résout le système $AX = Y$, la solution X donne les variations $X_i^{(1)} = X_i^{(0)} + \Delta X_i \rightarrow (X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_N^{(1)})$ que l'on utilise pour calculer à nouveau les éléments de A et de Y , ce qui permet d'avoir une nouvelle estimation de la solution et ainsi de suite jusqu'à la convergence du système.

2) Formules des cumulants

Soit l'expression :

$$K(t) = \log\left(1 + u_1 t + \frac{u_2' t^2}{2!} + \frac{u_3' t^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\text{Posons : } x = 1 + u_1 t + \frac{u_2' t^2}{2!} + \frac{u_3' t^3}{3!} \quad (1) \quad \text{alors } K(t) = \log(1 + x)$$

Le développement limité de $\log(1 + x)$ est :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \dots \quad \text{où } x < 1 \quad (2)$$

Dans ce cas

$$x^2 = u_1'^2 t^2 + \frac{u_2' t^4}{4!} + \frac{u_3' t^6}{3!} + \frac{2u_1' u_2' t^3}{2} + \dots \quad (3)$$

$$x^3 = u_1'^3 t^2 + \frac{u_2' u_2' t^4}{2!} + \frac{u_1' u_3' t^5}{3!} + \frac{2u_1' u_4' t^6}{4!} + \dots \quad (4)$$

En substituant (1) et (3) et (4) dans (2), on obtient :

$$K(t) = u_1' t + (u_2' - u_1'^2) \frac{t^2}{2!} + (u_3' - 3u_1' u_2' + 2u_1'^3) \frac{t^3}{3!} + (u_4' - 4u_3' u_1' - 3u_2'^2 + 12u_2' u_1'^2 - 6u_1'^4) \frac{t^4}{4!} + \dots$$

Le coefficient de $\frac{t^r}{r!}$ correspond au $r^{\text{ième}}$ cumulants et $u_k' = E(X^k)$.

Les formules des six premiers cumulants sont :

$$K_1 = E(R)$$

$$K_2 = E(R^2) - E^2(R)$$

$$K_3 = E(R^3) - 3E(R)E(R^2) + 2E^3(R)$$

$$K_4 = E(R^4) - 3E^2(R^2) - 4E(R)E(R^3) + 12E^2(R)E(R^2) - 6E^4(R)$$

$$K_5 = E(R^5) - 5E(R)E(R^4) - 10E(R^3)E(R^2) + 20E^2(R)E(R^3) + 30E(R^2)E^3(R) - 60E(R^2)E^3(R) + 24E^5(R)$$

$$K_6 = E(R^6) - 6E(R^5)E(R) - 15E(R^4)E(R^2) + 30E^2(R)E(R^4) - 10E^2(R^3) + 120E(R^3)E(R^2)E(R) - 120E(R^3)E^3(R) + 30E^3(R^2) - 270E^2(R^2)E^2(R) + 360E(R^2)E^4(R) - 120E^6(R)$$

3) Simulation d'une variable aléatoire poissonnienne

Une variable aléatoire poissonnienne est une variable à valeurs dans IN telle que :

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{si } n \geq 0$$

On a vu au chapitre I que si $(T_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires exponentielle de paramètre λ , alors la loi de

$$N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t \leq T_1 + T_2 + \dots + T_{n+1}\}}$$

Suit une loi de poisson de paramètre λt .

N_t a la même loi que la variable X que l'on cherche à simuler. De plus, on peut toujours écrire les variables exponentielles T_i sous la forme $\frac{-\log(U_i)}{\lambda}$, où les $(U_i)_{i \geq 1}$ sont des variables suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ indépendantes.

N_t s'écrit alors :

$$N_t = \sum_{n \geq 1} n \mathbf{1}_{\{U_1 U_2 \dots U_{n+1} \leq e^{-\lambda t} \leq U_1 U_2 \dots U_n\}}.$$