

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPLAIRE  
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE  
« HOUARI BOUMEDIEN »  
FACULTE DE Génie Mécanique et Génie des Procédés



**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER :

En/Génie Mécanique

Spécialité : Processus de Transport dans les Milieux Poreux

Par : M. KECHNIT Abdelhakim

THème

*Etude de la condensation en film autour d'un tube incliné de section elliptique se couvert d'une couche poreuse.*

Soutenu le 18/09/2007, devant le jury composé de :

M<sup>me</sup> K. BOUHADEF

Professeur (USTHB)

Présidente

M. R. KIBBOUA

Maître de Conférences (USTHB)

Directeur de thèse

M. A. AZZI

Professeur (USTHB)

Examineur

M<sup>lle</sup> H. KAHALERRAS

Maître de Conférences (USTHB)

Examinatrice

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens tout d'abord à remercier M<sup>r</sup> KIBOUA. Rachid maître de conférence à l'USTHB pour avoir bien voulu diriger et suivre ce travail et pour la confiance qu'il m'a témoignée durant sa réalisation.

J'adresse mes remerciement à M<sup>me</sup> K.BOUHADEF professeur à l'USTHB pour avoir accepté d'évaluer ce travail et de présider le jury.

Je tiens également a remercier vivement M<sup>r</sup> A.AZZI professeur à l'USTHB et M<sup>elle</sup> H.KAHALERRAS, maître de conférence à l'USTHB pour avoir examiné ce travail et participer au jury.

J'exprime un grand remerciement à toute l'équipe de recherche de laboratoire de (LTPMP) pour leur esprit d'entraide, et l'atmosphère très agréable et chaleureuse qui y règne.

Que tous trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

## DEDICACES

A :

La mémoire de mon père.

Ma mère.

Ma femme.

Mon beau père et ma belle mère.

Mes frères et soeurs.

Tous mes proches.

Tous mes amis.

Tous ceux qui m'ont aidé et encouragé.

## Résumé :

Dans cette étude, nous présentons une modélisation du phénomène de condensation en régime laminaire d'une vapeur saturée qui s'écoule à une vitesse  $U_8$  constante dans le sens de la gravité autour d'une conduite elliptique inclinée et à température constante, couverte avec une mince couche poreuse.

Les équations gouvernantes de champs dynamique et thermique à l'intérieur du condensat sont résolues analytiquement en appliquant un modèle de Darcy-Brinkman à l'intérieur du milieu poreux et un modèle classique de Nusselt dans le milieu liquide.

En appliquant un bilan global d'énergie au film liquide nous avons trouvé une relation entre l'épaisseur du film du condensat et les champs dynamique et thermique au sein du film liquide. Nous nous sommes intéressés à l'évolution de l'épaisseur du film de condensat ainsi que le coefficient de transfert thermique local et moyen représentés par le Nombre de Nusselt en fonction des nombres adimensionnels apparaissant dans la formulation physique tels que les Nombres de Re, Gr, Da, Pr, Ja.

Mots clés : condensation, milieu poreux, convection, conduite.

## Nomenclature :

### Majuscule :

$B_0$  : Nombre de Bond.

$C_p$  : La chaleur spécifique à pression constante.

$De$  : Diamètre équivalent de tube.

$$Da = \frac{K}{R^2} : \text{Nombre de Darcy}$$

$$F = \frac{Gr}{Re^2}$$

$$Gr = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R^3}{\rho_l \nu_l^2} \quad \text{Nombre de Grashoff .}$$

$H$  : épaisseur de la couche poreuse.

$$H^* = \frac{H}{\sqrt{K}} \quad : \text{épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse.}$$

$$\tilde{H} = \frac{H}{R} \quad : \text{épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse.}$$

$$Ja = \frac{c_p (T_s - T_w)}{h_{fg}} : \text{Nombre de Jacob}$$

$K$  : perméabilité

$k_{eff}$  : Conductivité thermique effective.

$k_l$  : Conductivité thermique du film liquide.

$L$  : longueur du tube.

$P$  : pression

$$Pr = \frac{\nu_l}{\alpha} \quad : \text{Nombre de Prandtl avec : } \alpha = \frac{k_l}{\rho_l c_p} : \text{diffusivité thermique.}$$

$$R = \frac{De}{2} : \text{rayon equivalent de tube}$$

$$Re = \frac{RU_\infty}{\nu_l} \quad : \text{Nombre de Reynolds}$$

$$Rc = \frac{k_{eff}}{k_l} \quad : \text{Rapport des conductivités}$$

$$Ru = \frac{\mu_{eff}}{\mu_l} \quad : \text{Rapport des viscosités}$$

$T_w, T_p$  : Température de la paroi.

$T_{sat}$  : Température de saturation de la vapeur.

$$T^* = \frac{T - T_w}{T_{sat} - T_w} \quad : \text{Température adimensionnelle}$$

$U_\infty$  : Vitesse loin de la conduite.

$U_e$  : Composante de la vitesse  $U_\infty$  selon la direction x

$$U^* = \frac{U}{U_\infty} \quad \text{vitesse adimensionnelle.}$$

$W_e$  : Composante de la vitesse  $U_\infty$  selon la direction z

$$W^* = \frac{W}{U_\infty} \quad \text{vitesse adimensionnelle.}$$

$X1, Y1$  : Coordonnées cartésiennes à partir du centre de l'ellipse.

### **Minuscule :**

$a$  : Axe majeur de l'ellipse

$b$  : Axe mineur de l'ellipse.

$$e = \frac{b}{a} \quad : \text{Excentricité de tube elliptique.}$$

$g$  : gravité.

$h_{fg}$  : chaleur latente de condensation

$r$  : Rayon radial.

$x, y$  : Coordonnées cartésiennes (voir page 48 )

$$x^* = \frac{x}{R} \quad : \text{Abscisse adimensionnelle.}$$

$$z^* = \frac{z}{L} \quad : \text{Coordonnée adimensionnelle.}$$

### **Symboles Grec :**

$\delta$  : Épaisseur du film liquide.

$$\Delta^* = \frac{\delta - H}{\sqrt{K}} \quad : \text{épaisseur adimensionnelle du film liquide.}$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{R} \quad : \text{épaisseur adimensionnelle du film liquide.}$$

$\varphi$  : Angle polaire.

$\theta$  : Angle paramétrique.

$\eta$  : Transformation de coordonnée y.

$\rho_l$  : Densité du film liquide.

$\rho_v$  : Densité de la vapeur.

$\bar{\rho} = \frac{\rho_v}{\rho_l}$  : Rapport de densité.

$\mu_l$  : Viscosité dynamique du condensat

$\mu_{eff}$  : Viscosité dynamique effective de la couche poreuse

$\nu_l$  : Viscosité cinématique du film liquide.

# SOMMAIRE

**Introduction générale**

2

## **CHAPITRE I**

### RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CONDENSATION EN FILM

I-1 Introduction	4
I-2 Modèle théorique fondamental (Théorie de Nusselt)	7
I-2-1 Cas d'une plaque plane	7
I-2-2 Forme adimensionnelle de la formule de Nusselt	11
I-2-3 Cas d'un tube lisse horizontal :	12
I-2-4 Cas d'un tube lisse incliné :	16
I-3 Variation du coefficient de transfert avec le régime d'écoulement	18
I-4 Variation du coefficient de transfert avec la vitesse de la vapeur	18
I-5 Effet de la présence d'un gaz non condensable	19
I.6 Synthèse Bibliographique	19
I-6-1 Recherche bibliographique (condensation d'une vapeur pure)	19
I-6-2 Recherche bibliographique (condensation en milieu poreux )	21
I-6-3 Techniques d'amélioration du transfert de chaleur lors de la condensation	22
I-7 Conclusion	23

## **Chapitre 2**

### **Généralités sur les milieux poreux**

Introduction :	24
I- Caractéristiques géométriques des milieux poreux :	24
I-1 Définition :	24
1.2 Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R) :	26
I-3 porosité (e) :	27
1.3.1. Notion de porosité variable	29
1.3.2. Modèles de variation de la porosité :	30
1.4. la perméabilité K :	33
1.5. Tortuosité ( $\tau$ )	35
1.6. viscosité dynamique effective $\mu_{eff}$ :	36
1.7. Conductivité thermique effective ( $k_{eff}$ )	36
2-Modèles d'écoulement dans les milieux poreux	39
2.1. Modèle de Darcy	39
Limites de validité de la loi de Darcy	40
2.2. Modèle de Darcy – Forchheimer (1901)	40

2.3. Modèle de Darcy - Brinkman	41
2.4. Modèle Général ou Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer	42
3-Transfert de chaleur dans les milieux poreux	42
4-Conclusion	43

## **CHAPITRE III**

### **FORMULATION MATHMATIQUE**

III.1 Introduction :	44
III.2 Domaine d'étude :	44
III.3 Équations gouvernantes :	46
III.3-1 Etude dynamique	46
III.3. 2 Etude thermique	47
III.4 Hypothèses simplificatrices :	48
III.5 Equations gouvernantes :	50
III.6 Equation donnant l'épaisseur du film liquide :	52
III.6.1 Tube elliptique sans une couche poreuse	52
III.6.2 Tube eliptique couvert avec une couche poreuse	53
III.7 Condition aux limites :	54
III.8. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE :	56
III.8.1. LES EQUATIONS ADIMENSIONNELLES :	56
III.8.1.1.Equation de quantité mouvement :	56
III.8.1.2.Equation d'énergie :	57
III.8.2.Condition aux limites :	57
III.8.3 .EQUATION DU FILM LIQUIDE :	59
III.9 Calcul du nombre de Nusselt :	59
III.10 Conclusion :	60

## **CHAPITRE IV**

### **RESOLUTION NUMERIQUE**

IV.1 Introduction :	61
IV.2 Résolution des équations gouvernantes (autour de la conduite):	61
IV.2.1 Equation de mouvement	61
IV.3 Résolution des équations gouvernantes (le long de la conduite):	64
IV.3.1 Equation de mouvement:	64
IV-4 Equation d'énergie:	66
IV.5 Equation de l'épaisseur du film liquide	67
IV.5 Conclusion :	72

## **CHAPITRE V**

### **RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

INTRODUCTION :	73
V.1 Validation du modèle	73
V.2 Influence de l'épaisseur de la couche poreuse $H^*$ :	74
V.2 Influence du nombre de Darcy (Da) :	78
V.3 Influence de l'excentricité (e) :	83
V.4 Influence de rapport de conductivité $R_c$	87
V.5 Influence de l'angle d'inclinaison	90
V.5.1.pour un tube de longueur infini	90
V.5.2 Influence de l'angle d'inclinaison pour un tube de longueur fini	92
Conclusion générale	94
Annexe1	
Annexe2	
Références bibliographiques	

# INTRODUCTION GENERALE

## **INTRODUCTION GENERALE :**

Plusieurs domaines industriels utilisent le phénomène de condensation d'une vapeur pure. Ainsi la condensation joue un rôle important dans les machines frigorifiques, les pompes à chaleur en condensant le fluide frigorigène à la sortie du compresseur afin de libérer vers l'air ambiant, la chaleur accumulée durant le cycle thermodynamique. Dans les centrales thermiques de production d'électricité, les condenseurs placés en aval des turbines ont pour but de condenser la vapeur d'eau à la sortie de la turbine et maintenir une basse pression à l'entrée de la chaudière.

Avec le souci grandissant de fabriquer des condenseurs à plus bas prix possible, beaucoup d'efforts ont été déployés afin de mieux comprendre et d'améliorer le mécanisme de la condensation en film le long des tubes horizontaux. La majorité de ces études se sont focalisées sur les techniques dites passives pour améliorer le transfert de chaleur lors de la condensation. Parmi ces techniques, on cite l'utilisation d'ailettes dont le but est d'augmenter la surface d'échange et d'amincir l'épaisseur du film liquide en agissant sur les effets de tension superficielle. Une alternative à cette méthode consiste à utiliser un tube de section elliptique dont le but est de rendre le film liquide issu de la condensation, encore plus fin; ce qui permet d'améliorer le coefficient de transfert de chaleur. En effet en plus de l'effet des forces de tension superficielle dues à la courbure de la surface externe de tube, il y a aussi l'effet de gravité qui s'ajoute car une plus grande proportion de la surface externe du tube, sur laquelle va se condenser la vapeur, se rapproche de la verticale. Par ailleurs il est connu que l'insertion d'une matrice poreuse dans une conduite, soumise à un flux de chaleur, peut conduire à l'amélioration du transfert de chaleur.

Nous pensons que l'effet de l'insertion d'un dépôt poreux en plus de la forme elliptique de la section du tube permet d'améliorer davantage le coefficient de transfert de chaleur lors de la condensation ce qui a pour effet de réduire les coûts de fabrication des condenseurs, c'est ce qui motivé la présente étude.

Le premier chapitre consiste en une synthèse des travaux antérieur, aussi bien théoriques qu'expérimentaux, sur la condensation en film.

Les principales définitions et modèles pour les écoulements dans les milieux poreux sont présentés dans le second chapitre.

La formulation mathématique du modèle physique, les hypothèses simplificatrices et les équations de conservations sont développées dans le troisième chapitre.

Dans le chapitre quatre, Nous présentons la méthode de résolution des équations de notre problème.

Le cinquième chapitre est une présentation et discussion des résultats obtenus.

Enfin, une conclusion générale synthétisant les principaux résultats obtenus suivis des perspectives du travail est présentée.

# CHAPITRE I

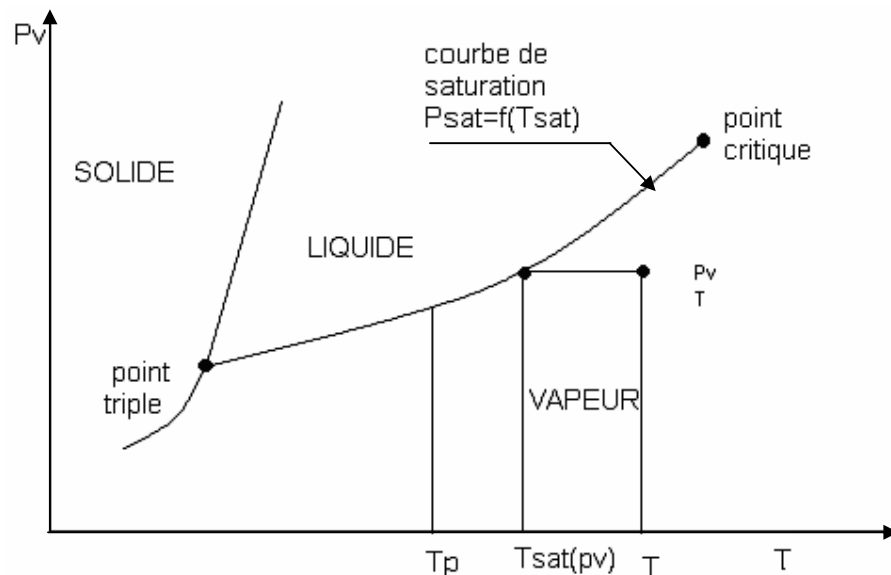
## Recherche bibliographique sur la condensation en film

## CHAPITRE I

### Recherche bibliographique sur la condensation en film

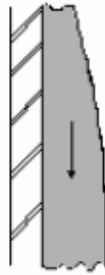
#### I-1 Introduction

Le changement de phase de l'état vapeur à l'état liquide est désigné par la condensation. Ce phénomène est souvent rencontré dans les processus industriels et joue un rôle important dans les installations motrices à vapeur, les machines frigorifiques et les pompes à chaleur. Dans les condenseurs industriels, la vapeur à condenser est séparée du fluide froid par une surface intermédiaire. Lorsqu'une vapeur se trouve en contact avec une surface dont la température est inférieure à la température de saturation de la vapeur, il y a changement de phase vapeur-liquide donnant naissance à un transfert de chaleur important.

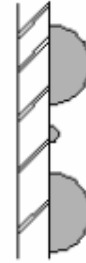


**Figure 1** : Equilibre entre une vapeur et sa phase liquide. [1]

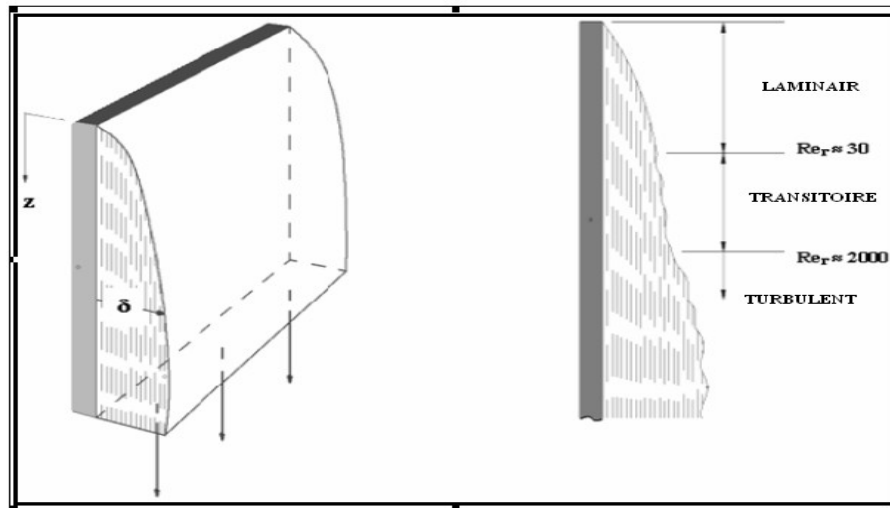
Or, la condensation de la vapeur sur une paroi refroidie donne naissance à deux types de phénomènes qui se caractérisent par l'aspect visuel du condensat formé. Dans le premier cas le condensat recouvre la surface sous la forme d'un film continu et on parle de **condensation en film** (figures : 2 et 4). Dans le second cas des gouttelettes liquides se forment sur la surface et on parle de **condensation en gouttes** (figures : 3 ) [2]



**Figure 2 :** Condensation en film



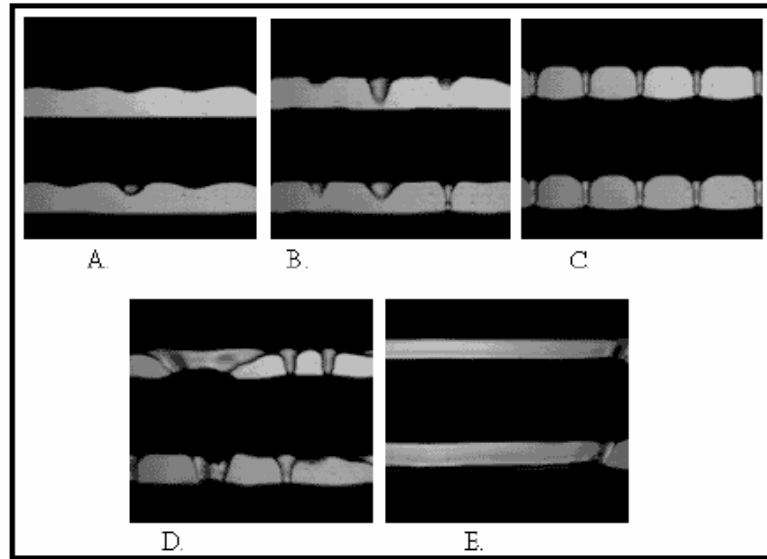
**Figure 3 :** Condensation en gouttes



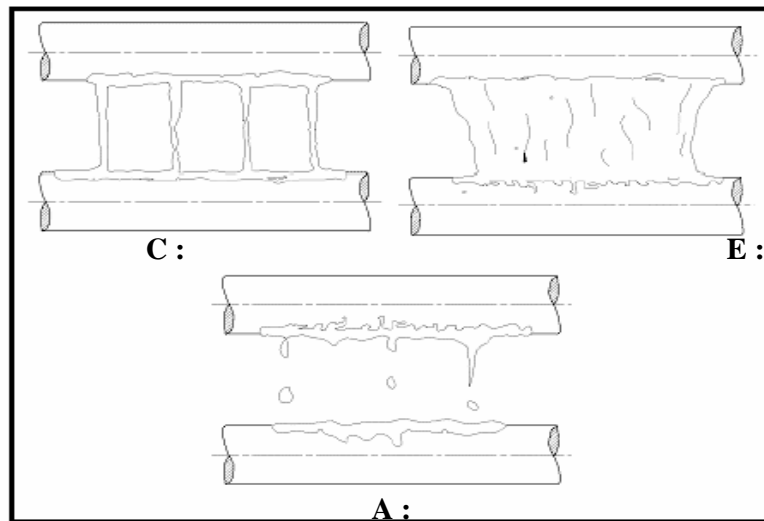
**Figure 4 :** Condensation en film

Les appareils industriels sont dimensionnés en admettant une condensation en film (figure : 5)

L'échange thermique lors de la condensation en gouttes est plus élevé que celui pour la condensation en film, mais la condensation en gouttes est difficile à maintenir sur un long terme. Elle résulte en effet de la non mouillabilité du solide par le film de condensat à cause de la présence des molécules organiques sur la surface. Le dépôt d'une fine couche de matière plastique (téflon) est parfois utilisé pour développer la condensation en gouttes, mais ceci introduit une résistance thermique supplémentaire et l'amélioration de l'échange n'est pas aussi spectaculaire qu'on le souhaiterait.



**Figure 5 -a :** Condensation en film



**Figure 5 -b :** quelques types de condensation en film autour des tubes

**(La tombé de condensât aux dessous des conduites)**

(**A :** gouttelettes, **B :** gouttelettes+colonnes, **C :** colonnes, **D :** colonnes +rideaux, **E :** rideaux )

Actuellement, il n'y a pas de méthode d'analyse théorique fiable pour traiter la condensation directe et seuls les résultats d'essais sur des revêtements spécifiques sont utilisés pour déterminer

l'échange thermique. Ces résultats ne seront pas présentés dans cette étude qui est consacrée à la condensation en film.

Inversement à l'évaporation, ce changement de phase s'accompagne de la libération d'une certaine quantité de chaleur qui transite vers la paroi froide à travers l'épaisseur du condensât déjà formé. Le coefficient d'échange à la surface de la paroi froide est donc d'autant plus élevé que cette épaisseur est réduite.

Nous allons étudier le modèle théorique fondamental qui consiste en une condensation en film sur une paroi verticale.

## **I-2 Modèle théorique fondamental (Théorie de Nusselt)**

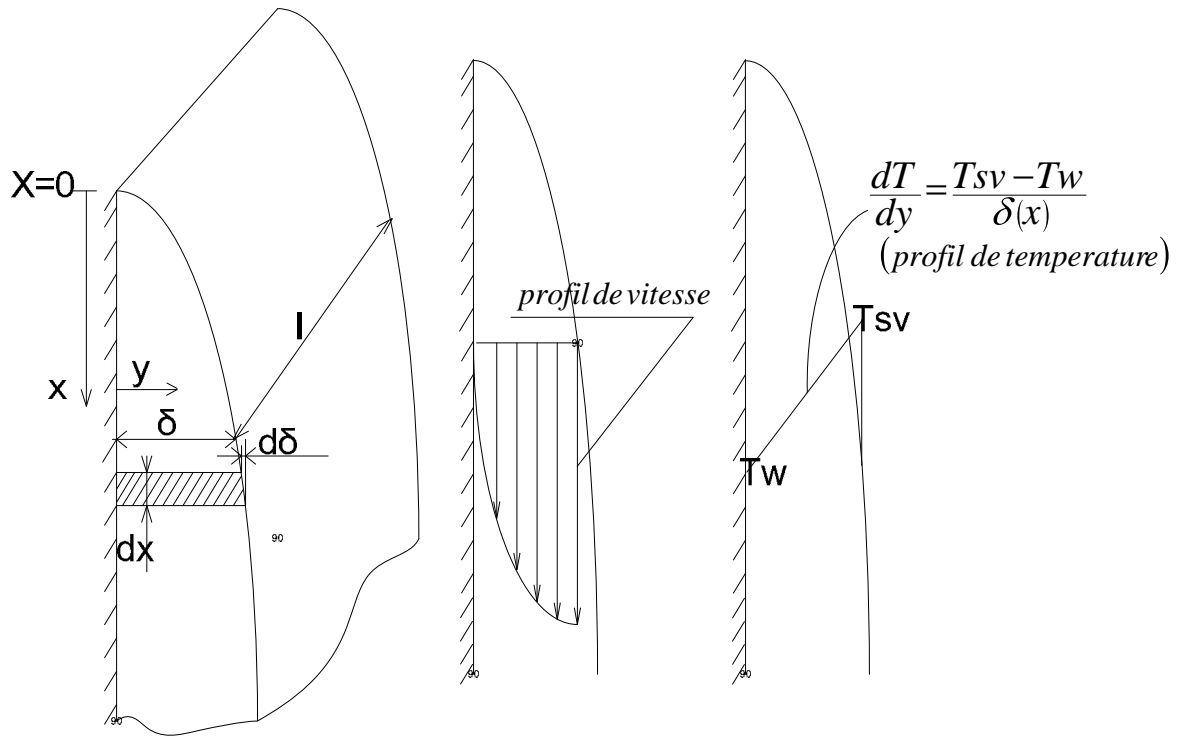
### ***I-2-1 Cas d'une plaque plane***

A moins que la vitesse de la vapeur ne soit très élevée ou que le film liquide ne soit très épais, l'écoulement de condensat est laminaire et la chaleur est transmise de l'interface liquide-vapeur à la surface uniquement par conduction. Par conséquent, le flux de chaleur dépend surtout de l'épaisseur du film de condensât, qui à son tour dépend de la vitesse à laquelle la vapeur se condense et de la vitesse du déplacement du condensât. sur une surface vertical l'épaisseur du film augmente depuis le sommet jusqu'au bas de cette surface , comme le montre **la figure 6 (A)**, lorsque la plaque est inclinée par rapport à la position vertical, l'intensité du drainage diminue et le film de liquide s'épaissit. Ceci produit naturellement, une diminution du flux de chaleur.

**Nusselt [1]** a établi en (1919) les relations théoriques pour le calcul des coefficients d'échanges de chaleur dans le cas de la condensation en couche mince de vapeurs pures sur des tubes et des plaque. Pour illustrer les études d'approche classique de Nusselt, on considère les hypothèses suivantes :

- Vapeur pure, au repos, saturée à  $T_{sat}$  ( $P_v$ )
- Température  $T_w$  de paroi constante uniforme
- Phénomène permanent (les paramètres en chaque point sont indépendants du temps).
- Film qui s'écoule vers le bas sous l'effet de la pesanteur et son épaisseur est suffisamment faible pour que le régime soit laminaire.

En se condensant, la vapeur libère sa chaleur latente de vaporisation et le liquide est refroidi à une température inférieure à  $T_{sat}$  la chaleur ainsi dégagée se transmet à la paroi par conduction à travers le film.



**Figure6 (A):** Croissance du film [1]

**Figure 6 (B) :** Profils de vitesse et de température [1]

Considérons Le volume ( $L \cdot dx \cdot dy$ ) (**figure 6 (A)**), qui est en équilibre sous l'effet de la force de d'archimède due à la vapeur, et des contraintes tangentielles de viscosité.

On a donc, selon l'axe  $x$  :

$$(\rho_1 - \rho_v)g \cdot l \cdot dx \cdot dy + \left( \mu_1 l dx \frac{du}{dy} \right)_{y+dy} - \left( \mu_1 l dx \frac{\partial u}{\partial y} \right)_y = 0 \quad \text{[I-1]}$$

D'où 
$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{(\rho_1 - \rho_v)}{\mu_1} g \quad \text{[I-2]}$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$u=0 \quad \text{à} \quad y = 0$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{à} \quad y = \delta$$

D'où, le profil de vitesse dans le film devient :

$$u = -\frac{(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} g \frac{\delta_x^2}{2} \left( \frac{y^2}{\delta_x^2} - \frac{2y}{\delta_x} \right) \quad \text{[I-3]}$$

Il s'ensuit un débit massique  $m_x$  par unité de largeur de paroi à l'abscisse  $x$  :

$$m_x = \int_0^{\delta_x} \rho_l u dy = \int_0^{\delta_x} \rho_l \frac{(\rho_v - \rho_l)}{\mu_l} g \frac{\delta_x^2}{2} \left( \left( \frac{y}{\delta_x} \right)^2 - \frac{2y}{\delta_x} \right) dy \quad \text{[I-4]}$$

$$m_x = \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \delta_x^3}{3 \mu_l} \quad (\text{Débit par unité de largeur}) \quad \text{[I-5]}$$

Soit une masse de condensât  $dq_{mx}$  formée sur l'intervalle  $dx$  (débit par unité de surface) :

$$\frac{dm_x}{dx} = \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) d\delta_x^3}{3 \mu_l dx} \quad (\text{Débit par unité de surface}) \quad \text{[I-6]}$$

Le dégagement de chaleur correspondant à ce  $dm_x$  est donné par :

$$\frac{dq}{ds} = h'_{fg} \frac{dm_x}{dx} \quad \text{[I-7]}$$

Où:

$$h'_{fg} = h_{fg} + 0.68 C_p (T_{sat} - T_p) \quad \text{[I-8]}$$

(Le profil de température est supposé Linéaire de  $T_p$  à  $T_{sat}$ .) [1]

En effet,  $h'_{fg}$  est calculé à partir de la chaleur latente de vaporisation plus la variation d'enthalpie moyenne de la vapeur lors de son refroidissement de la température  $T_s$  à la température de liquide, soit :

$$h'_{fg} = h_{fg} + \frac{1}{m_x} \int_0^{\delta_x} \rho_L u C_p (T_{SAT} - T_p) dy = h_{fg} + \frac{3}{8} C_p (T_{SAT} - T_p) \quad \text{[I-9]}$$

Où :

$$T = T_p + \frac{T_{SAT} - T_p}{d_x} y \Rightarrow T_{SAT} - T = (T_{SAT} - T_p) \left( 1 - \frac{y}{d_x} \right) \quad \text{[I-10]}$$

La quantité  $dQ$ , en régime permanent, se transmet intégralement à la paroi par la conduction, soit :

$$dQ = \frac{k_L}{d_x} (T_{SAT} - T_p) ds \Rightarrow \frac{dQ}{ds} = \frac{k_L}{d_x} (T_{SAT} - T_p) = h'_{fg} \frac{dm_x}{dx} \quad \text{[I-11]}$$

$$\frac{dm_x}{dx} = \frac{k_l (T_{SAT} - T_p)}{h'_{fg} \delta_x} = \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v)}{3 \mu_l} \frac{d\delta_x^3}{dx} \quad \text{[I-12]}$$

$$\delta_x^3 d\delta_x = \frac{k_l \mu_l (T_{SAT} - T_p)}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg}} dx \quad \text{[I-13]}$$

En intégrant [I-13] et sachant que  $\delta_x = 0$  à  $x = 0$  ; il vient :

$$\delta_x = \left( \frac{4 k_l \mu_l (T_{SAT} - T_p) x}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg}} \right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} \quad \text{[I-14]}$$

D'où, le coefficient de transfert local  $h_x$  devient :

$$h_x = \frac{dQ}{dS} \frac{1}{(T_{SAT} - T_p)} = \frac{k_L}{\delta_x} = \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} k_l^3}{4 \mu_l (T_{SAT} - T_p) x} \right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} \quad \text{[I-15]}$$

La valeur moyenne  $h_{moy}$  du coefficient d'échange pour une vapeur se condensant sur une paroi de hauteur  $L$  est égale à [1]:

$$h_{moy} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = 0.943 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 h'_{fg}}{L \mu_l (T_{Sat} - T_p)} \right)^{\left[\frac{1}{4}\right]} \quad \text{[I-16]}$$

(Équation de Nusselt)

$$Nu = \frac{h.L}{k_l}$$

Le nombre de Nusselt moyen est donné par l'expression :

$$\overline{Nu}_D = 0.943 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} L^3}{\mu_l k_l (T_{sat} - T_p)} \right)^{\frac{1}{4}} = 0.943 \left( \frac{Ra}{Ja} \right)^{\frac{1}{4}}$$

On remarque que :

$h_{moy}$  diminue lorsque la hauteur  $L$  augmente, par suite de l'épaississement du film de condensât  
 $h_{moy}$  augmente lorsque  $(T_{SAT}-T_P)$  diminue ; d'où la conclusion qu'un condenseur constitue un bon échangeur à faible écart de température (pompe à chaleur, circuit frigorifique) dont le coefficient d'échange global peut être encore amélioré en permettant au liquide de refroidissement, à l'intérieur ou à l'extérieur des tubes, de s'évaporer en film mince (unités de dessalement de l'eau de mer).

**Autres remarques:**

1/ le terme  $0.68 C_p (T_{SAT} - T_P)$  dans  $h'_{fg}$  correspond au refroidissement du condensât à une température inférieure à  $T_{SAT}$ . Toutefois, ce terme, tout comme la pousse d'archimède dont on a tenu compte dans les calculs, ne devient important que lorsque la température est proche du point critique ; c'est à dire aux pressions élevées, puisque  $h_{fg}$  tend alors vers zéro.

2/ on néglige ici la résistance thermique de contact vapeur-condensat. Cette résistance, négligeable dans le cas de la vapeur d'eau, peut, dans le cas des matériaux à haut point d'ébullitions, devenir considérable (sodium par exemple).

Ainsi, malgré la restriction des hypothèses sur lesquelles elle repose, la formule de Nusselt demeure l'équation fondamentale employée dans les calculs d'échangeurs verticaux. Il faut néanmoins remarquer que la plupart des expériences mettent en évidence des coefficients d'échange de 20% supérieurs; en moyenne, aux valeurs indiquées par formule.

**I-2-2 Forme adimensionnelle de la formule de Nusselt**

Dans de nombreux cas (vapeur d'eau notamment, loin de la température critique) la différence  $\rho_l - \rho_v$  peut être assimilée à  $\rho_l$ .

Il est commode d'introduire le nombre de *Reynolds* du film de condensat.

$$Re_x = \frac{u_l D_h}{\nu_l} \quad \text{[I-17]}$$

Où :

$u_l$  : Désigne la vitesse moyenne dans le film et  $D_h$  le diamètre hydraulique de celui-ci égal à

$D_h = 4\delta_x$  ; on vérifie que :

$$\text{Re}_x = \frac{4\rho_l u_l \delta_x}{\mu_l} = 4 \frac{m_x}{\mu_l} = \frac{4}{3} \frac{g \rho_l^2}{\mu_l} \delta_x^3 \quad [\text{I-18}]$$

Avec :

$$\delta_x = \frac{k_l}{h_x}$$

La relation précédente s'écrit :

$$\frac{h_x}{k_l} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = 1.1 \text{Re}_x^{\left(\frac{-1}{3}\right)} \quad [\text{I-19}]$$

Soit un coefficient moyen d'échange défini par :

$$\frac{h_{\text{moy}}}{k_l} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = 1.47 \text{Re}_x^{\left(\frac{-1}{3}\right)} \quad [\text{I-20}]$$

Où

Re : est le nombre de Reynolds atteint dans le film au pied de la paroi.

### I-2-3 Cas d'un tube lisse horizontal :

Nous allons détailler la théorie de Nusselt pour le cas d'un tube lisse horizontal.

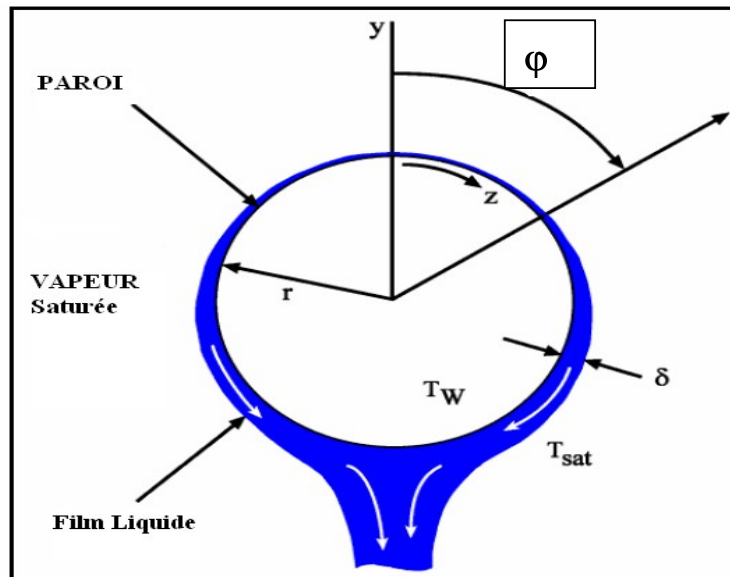


Figure 7 : Condensation autour d'un tube cylindrique horizontal

Pour le tube lisse horizontal, l'équation de mouvement devient :

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} g \sin(\varphi) \quad [\text{I-21}]$$

La vitesse locale à l'abscisse  $\varphi$  s'écrit comme suit :

$$u = \frac{(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} g \sin(\varphi) \left( y \cdot \delta(\varphi) - \frac{y^2}{2} \right) \quad [\text{I-22}]$$

Nusselt détermine le débit local de condensât traversant une section de film à l'abscisse  $\varphi$  en intégrant le débit a chaque point sur l'épaisseur du film (on prend la moitié du tube) :

$$m_\varphi = \int_0^{\delta_x} \rho_l u dy = \int_0^{\delta_x} \rho_l \frac{(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} g \sin(\varphi) \left( y \cdot \delta(\varphi) - \frac{y^2}{2} \right) dy \quad [\text{I-23}]$$

Après intégration on obtient les résultats suivants :

$$m_\varphi = \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \sin(\varphi) \delta^3(\varphi)}{3 \mu_l} \quad [\text{I-24}]$$

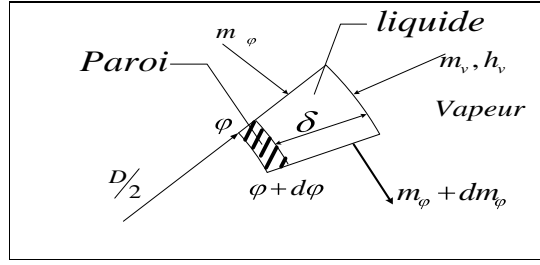
$$\frac{dm_\varphi}{d\varphi} = \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v)}{3 \mu_l} \delta^3(\varphi) \cos(\varphi) + \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v)}{3 \mu_l} \sin(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \delta^3(\varphi) \quad [\text{I-25}]$$

L'équation d'énergie :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [\text{I-26}]$$

la solution devient comme suit :

$$T - T_w = \frac{y}{\delta(\varphi)} (T - T_w) \quad [\text{I-27}]$$



**figure 8** : Bilan thermique sur une couche de condensât

la figure 8 exprime le bilan thermique sur une couche de condensât, la chaleur traversant le film par conduction est égale à la chaleur de la condensation de la vapeur par l'interface liquide-vapeur.

$$k_l \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{k_l}{\delta(\varphi)} (T_{sat} - T_w) \frac{D}{2} = h'_{fg} \frac{dm_\varphi}{d\varphi} \quad [\text{I-28}]$$

$$\frac{k_l}{\delta(\varphi)} (T_{sat} - T_w) \frac{D}{2} = h'_{fg} \left[ \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)}{3\mu_l} \delta^3(\varphi) \cos(\varphi) + \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)}{3\mu_l} \sin(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \delta^3(\varphi) \right] \quad [\text{I-29}]$$

on pose :

$$z = \frac{\delta^4(\varphi)}{C_1} \quad [\text{I-30}]$$

$$\text{où :} \quad C_1 = \frac{3k_l(T_{sat} - T_w)D}{2g\rho_l(\rho_l - \rho_v)h'_{fg}} \quad [\text{I-31}]$$

on obtient l'équation différentielle suivante :

$$z \cdot \cos(\varphi) + \frac{3}{4} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \sin(\varphi) = 1 \quad [\text{I-32}]$$

La solution de cette équation donne l'épaisseur locale du film de condensât :

$$\delta(\varphi) = \left\{ C_1 \frac{1}{\sin^{\frac{4}{3}}(\varphi)} \left[ \left( \frac{4}{3} \int \sin^{\frac{1}{3}}(\varphi) d\varphi \right) + c \right] \right\}^{\frac{1}{4}} \quad [\text{I-33}]$$

La constante d'intégration est définie par une condition aux limites, Nusselt fait l'hypothèse que l'épaisseur du film de condensât au sommet du tube est finie et trouve que cette constante est nulle.

$$\text{Le coefficient de transfert local est donnée par :} \quad h(\varphi) = \frac{k_l}{\delta(\varphi)} \quad [\text{I-34}]$$

En intégrant numériquement le coefficient de transfert local sur la circonférence du tube pour trouver le coefficient d'échange moyen pour un tube lisse de diamètre  $D$ .

$$\bar{h} = 0.725 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} k_l^3}{\mu_l (T_{sat} - T_w) D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{[I-35]}$$

Le nombre de Nusselt est donné par :

$$Nu = \frac{h.D}{2k_l} \quad \text{[I-36]}$$

Le nombre de Nusselt moyen est donné par l'expression :

$$\overline{Nu}_D = 0.725 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} D^3}{\mu_l k_l (T_{sat} - T_w)} \right)^{\frac{1}{4}} = 0.725 \left( \frac{Ra}{Ja} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{[I-37]}$$

Si la condensation se produit sur  $N$  tubes horizontaux disposés de sorte que le condensat formé sur un tube s'écoule directement sur le tube qui se trouve au dessous, la conductance moyenne par unité de surface pour ce système peut être évaluée en remplaçant dans l'équation I-35 le diamètre  $D$  par  $(ND)$ . Cette méthode donne en général des résultats approchés car une certaine quantité de turbulence est inévitable dans un système de ce genre.

Une étude qui est en meilleur accord avec les données expérimentales a été faite par CHEN [1] il suggère que puisque le liquide est sous-refroidi, une condensation supplémentaire se produit sur la couche liquide située entre les tubes. En supposant que tout le sous refroidissement est utilisé pour cette condensation supplémentaire, l'étude de CHEN aboutit à l'équation :

$$h_x = 0.728 \left[ 1 + 0.2 \frac{Cp(T_{sv} - T_s)}{h'_{fg}} (N - 1) \right] \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k^3 h'_{fg}}{ND \mu_l (T_{sv} - T_s)} \right]^{\frac{1}{4}} \quad \text{[I-38]}$$

Qui est en bon accord avec les résultat expérimentaux que

$$\left[ (N - 1) \frac{Cp(T_{sv} - T_s)}{h'_{fg}} \right] < 2.$$

Les propriétés physiques du film dans les équations II-16 jusqu'à II-22 peuvent être rapportées à la température moyenne arithmétique entre la température de la paroi et de celle de la vapeur.

Dans ce cas les équations de NUSSELT sont satisfaisantes pour calculer la conductance par unité de surface relative à des vapeurs qui se condensent. Les données expérimentales sont en accord avec la théorie de NUSSELT quand les conditions physiques sont conformes aux hypothèses faites dans l'étude du phénomène. Des écarts à la théorie de NUSSELT apparaissent lorsque l'écoulement du condensat devient turbulent, lorsque la vitesse de la vapeur est très élevée ou

lorsqu'on essaie de rendre la surface non mouillable. Tous ces facteurs tendent à augmenter la conductance par unité de surface, et c'est pourquoi la théorie de NUSSELT donne toujours des résultats approchés.

#### **I-2-4 Cas d'un tube lisse incliné :**

Hassan et Jacob [3] ont étudiés analytiquement la condensation en film autour d'un tube incliné en utilisant la théorie de Nusselt et ont trouvés que le coefficient de transfert moyen pour un tube infiniment long est proportionnel a  $(\cos(\alpha))^{\frac{1}{4}}$  ou a est l'angle d'inclinaison entre le tube et l'horizontale.

Pour calculer l'épaisseur du film liquide et le coefficient d'échange ainsi que le nombre de Nusselt il suffit de rendre les équations du tube cylindrique horizontal et de remplacer  $g$  par  $g\cos(\alpha)$ .

L'épaisseur local du film liquide est donnée par :

$$\delta(\varphi) = \left\{ C_1 \frac{1}{\sin^{\frac{3}{4}}(\varphi)} \left[ \left( \frac{4}{3} \int \sin^{\frac{1}{3}}(\varphi) d\varphi \right) + c \right] \right\}^{\frac{1}{4}} \quad \text{[I-39]}$$

où :

$$C_1 = \frac{3k_l(T_{sat} - T_w)D}{2g \cos(\alpha)\rho_l(\rho_l - \rho_v)h'_{fg}} \quad \text{[I-40]}$$

et l'expression du coefficient d'échange moyen est :

$$\bar{h} = 0.725 \left( \frac{g \cos(\alpha)\rho_l(\rho_l - \rho_v)h'_{fg}k_l^3}{\mu_l(T_{sat} - T_w)D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{[I-41]}$$

Le nombre de Nusselt est donné par :

$$Nu = \frac{h.D}{2k_l} \quad \text{[I-42]}$$

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime alors par l'expression :

$$\overline{Nu}_D = 0.725 \left( \frac{g \cos(\alpha)\rho_l(\rho_l - \rho_v)h'_{fg}D^3}{\mu_l k_l (T_{sat} - T_w)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{[I-43]}$$

Hassan et Jacob [3] ont trouvés que pour un tube de longueur finie, le coefficient d'échange moyen tend vers un maximum pour un angle optimal (**figure 9**), pour un tube infiniment long l'angle optimum est de  $0^\circ$  (tube horizontal), et pour un tube de longueur finie l'optimum est plus grand que zéro. Mossad [5b] a trouvé un résultat analogue pour le cas d'un tube de section elliptique.

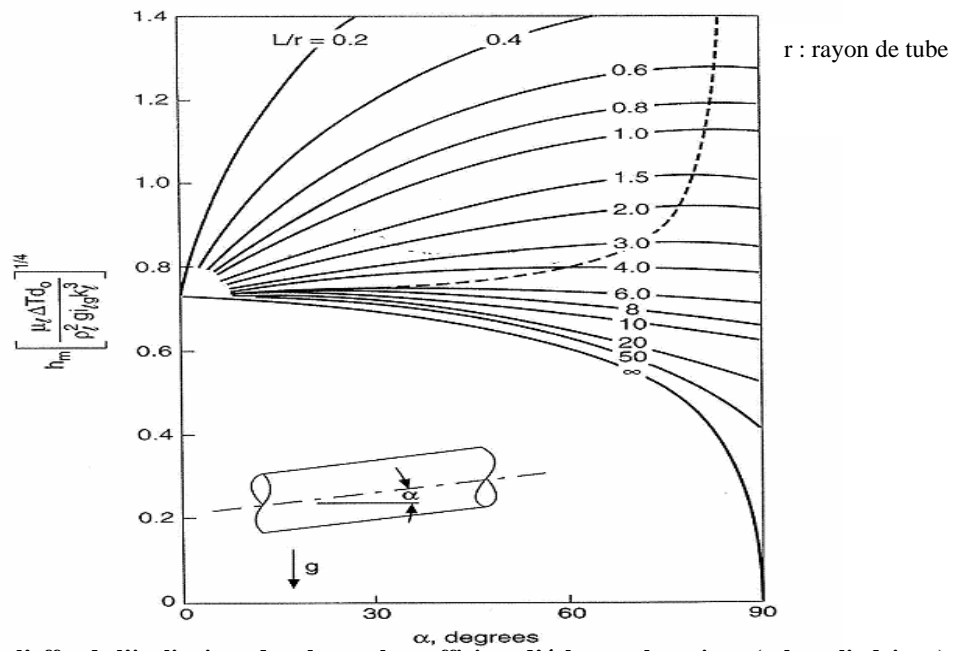


Figure 9a : l'effet de l'inclinaison de tube sur le coefficient d'échange thermique (tube cylindrique)

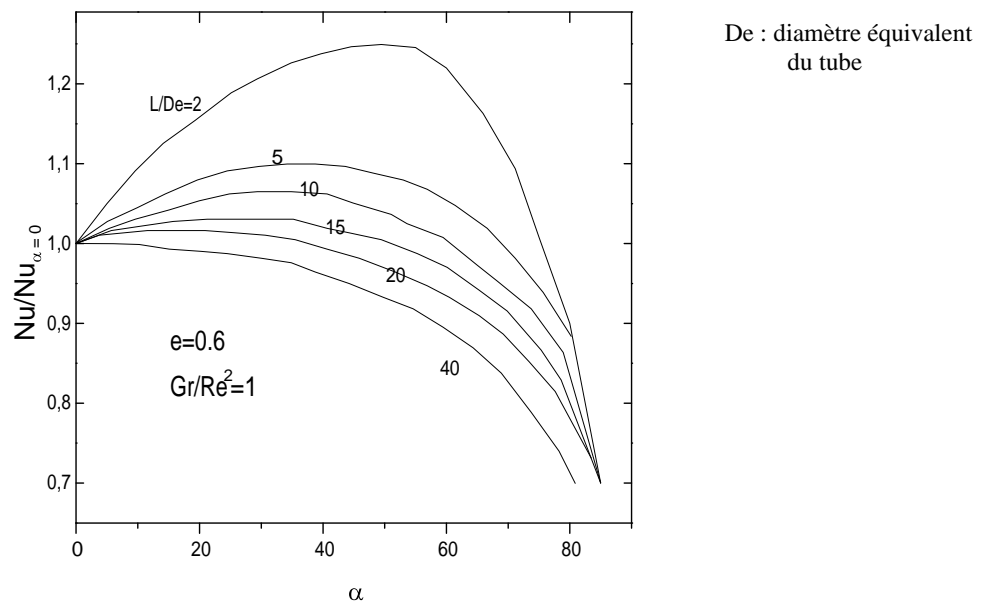


Figure 9b : l'effet de l'inclinaison de tube sur le coefficient d'échange thermique (tube elliptique)

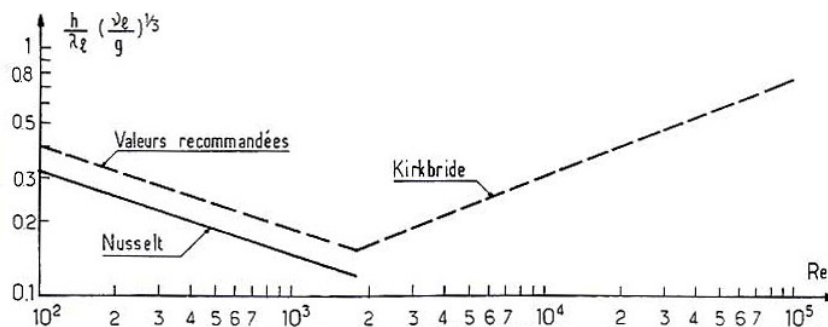
### I-3 Variation du coefficient de transfert avec le régime d'écoulement

Pour une condensation en film sur une plaque. On remarque que le film de condensat reste laminaire tant que le nombre de Reynolds reste inférieurs à 1800, bien que avant cette valeur, la surface du film soit marquée par une ondulation due à la tension superficielle et qui tend à augmenter légèrement le coefficient de transfert.

Lorsque le régime devient turbulent, les échanges de chaleur à l'intérieur du film sont considérablement accrus. On retient en générale, comme formule de base, la relation donnée par **"KIRKBRIDE"**.

$$Nu_m = \frac{h_{moy}}{k_l} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = 0.007 Re^{0.4} \quad [I-44]$$

Cette relation n'est valable que pour la zone turbulente du film, elle devra donc éventuellement être complétée par la formule de Nusselt pour la zone laminaire.



**Figure 10** : Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds [1].

### I-4 Variation du coefficient de transfert avec la vitesse de la vapeur

La distribution de la vapeur au sein du condenseur doit être considérée avec soin, en effet, toute perte de charge et donc de pression entraîne une chute de température de la vapeur saturée, et par conséquent une diminution du transfert de chaleur. D'un autre point de vue, la vitesse de la vapeur donne naissance à un cisaillement à la surface libre du film de condensât, ce qui en facilite la variation d'épaisseur, celle-ci étant alors diminuée ou augmentée selon que l'effort s'exerce vers le bas ou vers le haut. Cette influence n'est toutefois sensible que pour des vitesses assez importantes (de l'ordre de 100 m/s) ou lorsque la condensation se produit à l'intérieur des tubes.

### I-5 Effet de la présence d'un gaz non condensable

La présence d'un gaz non condensable, même à l'état de traces, peut diminuer considérablement les valeurs du coefficient d'échange obtenues pour une vapeur pure immobile. En effet, le gaz non condensable, entraîné vers la paroi par le mouvement de la vapeur, tend à s'y accumuler, offrant ainsi un obstacle au transfert de la vapeur sur le film de condensât. La pression de vapeur  $P_v$  diminue donc au voisinage du film, ce qui provoque une diminution locale de la température de saturation  $T_{sat}$  et du coefficient de transfert de chaleur.

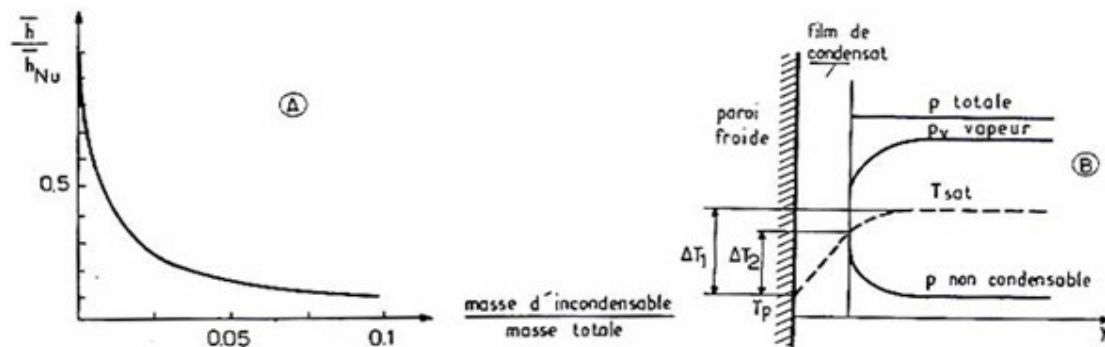


Figure11 : effets de la présence d'un gaz non condensable [38]

## I.6 Synthèse Bibliographique

### I-6-1 Recherche bibliographique (condensation d'une vapeur pure)

Dans le cas de la condensation en convection forcée autour d'un tube, le problème est plus compliqué à cause de la variation des contraintes visqueuses et de la pression le long de la section du tube en plus de la possibilité que la couche limite se détache en un point de la section du tube.

Dans une étude de l'état de l'art sur le phénomène de condensation, **Rose [4]** établit que les effets du terme d'inertie dans l'équation de quantité de mouvement et les effets du terme de convection de l'équation d'énergie peuvent être négligés dans la majorité des cas et que les effets de la tensions superficielle du a la courbure du film liquide peuvent avoir une certaine influence dans le cas de tubes de faibles diamètres.

**Dhir et al [5]** ont présenté une solution du problème de la condensation en film en utilisant la technique de similarité (solution affine). Ils ont pu montrer que, pour un nombre de Prandtl  $Pr > 1$  (tels que l'eau et les fluides frigorigènes), les termes d'inertie dans l'équation de quantité de mouvement peuvent être négligés.

**Karabulut Ercan Ataer [6]** ont étudié numériquement la condensation en film d'une vapeur pure s'écoulant de haut en bas sur un tube horizontal en tenant compte du gradient de pression externe

des forces d'inertie et de convection dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie respectivement. La méthode numérique qu'il présentent leur a permis en outre d'étudier l'effet du décollement du film liquide par un calcul simultané des champs de d'écoulement du condensat et de la vapeur avec des conditions interfaciales compatibles.

**Mosaad [7a]** a étudié l'effet de l'inclinaison sur la condensation en film d'une vapeur pure autour d'un tube cylindrique infiniment long. Il s'est intéressé à l'effet de la gravité et de la vitesse d'écoulement de la vapeur sur le coefficient local de transfert de chaleur représenté par le nombre de Nusselt. **Mosaad [7b]** a étendu ensuite l'étude de la condensation en film d'une vapeur pure autour d'un tube de section elliptique et a montré que cette forme de section était mieux performante d'un point de vue thermique qu'une section cylindrique.

**Memory et al [8]** ont étudié la condensation en film laminaire d'une vapeur pure s'écoulant autour d'un tube de section elliptique dont la grand axe de l'ellipse étant horizontal. Deux modes de transfert de chaleur à savoir la convection libre et la convection forcée ont été considérées. Pour la mode de convection naturelle leur modèle était basé sur la théorie de Nusselt tandis que pour le mode de convection forcée, Ils ont résolu les équations de quantité de mouvement et d'énergie dans les deux phases liquide et vapeur en utilisant l'approche de couche limite. Pour le mode de convection naturelle, leur modèle prévoit une amélioration de 11% du coefficient de transfert de chaleur par rapport à un tube cylindrique alors que pour la convection forcée une augmentation de 16% a été observée par rapport à tube cylindrique pour une même perte de pression.

**Rose [9]** a été le premier, par rapport aux études antérieures, à montrer que le gradient de pression externe a pour effet d'augmenter le coefficient de transfert de chaleur. Il a aussi montré que pour la partie inférieure du tube cylindrique, lorsque les contraintes visqueuses et le gradient de pression externe agissent en sens contraire, le calcul de l'épaisseur du film liquide n'est plus possible à cause du décollement du condensat de la surface externe du tube (phénomène similaire au décollement de la couche limite).

**Renken et Mueller [10]** ont conduit une étude expérimentale du phénomène de condensation le long d'une plaque couverte avec une mince couche poreuse, dans laquelle ils ont pu observer une amélioration du coefficient de transfert de chaleur de l'ordre de 200% par rapport à une plaque plane lisse. Une assez bonne concordance a été observée lors de la confrontation de ces résultats expérimentaux avec un modèle mathématique simple établis par ces mêmes auteurs.

**WANG et al [11]** proposent une nouvelle méthode pour améliorer le transfert de chaleur en condensation. Cela consiste en un tube vertical muni d'ailettes au sommet desquelles est placée une fine couche poreuse d'épaisseur 0.1mm. Ces auteurs ont testé ce nouveau design comparativement à différents type de tube (tube lisse, tube muni d'ailettes...etc). Ces auteurs ont

constaté une nette amélioration du transfert de chaleur par rapport à un tube lisse, qu'ils ont attribué au double effet de l'ailette et de la couche poreuse.

### ***I-6-2 Recherche bibliographique (condensation en milieu poreux)***

La recherche bibliographique a révélé que l'étude du phénomène de condensation dans un milieu poreux est assez récente.

**Cheng [12]** a présenté une étude du phénomène de condensation en film le long d'un dièdre et d'un cône dans un milieu poreux rempli d'une vapeur saturée. En utilisant l'approximation de couche limite et en considérant un régime Darcien, il a pu obtenir une solution analytique pour le profil de vitesse et de température du condensât liquide ainsi que le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh et du nombre de Jacob.

**Kumari et Nath [13]** ont résolu numériquement le modèle mathématique proposé par **Cheng [12]**, pour une géométrie conique.

**Udell [14]** a été le premier à tenir compte de la tension superficielle dans la modélisation en étudiant les caloducs.

**Kaviany [15]** a proposé une résolution analytique sous forme d'un développement en série pour le cas non Darcien et a défini un paramètre adimensionnel fonction du nombre de Darcy et du nombre de Rayleigh, qui délimite les deux régimes d'écoulement Darcien et non Darcien.

**Chung et al [16]** ont développé un modèle plus précis qui prédit la présence d'une couche diphasique entre le film liquide et la couche de vapeur.

**Al Nimr et Alkam [17]** ont développé une solution analytique pour de très faibles perméabilités, qui ne tient pas des effets inertiels. Ils ont étendu leur étude au cas où les effets inertiels ne sont pas négligeables, pour trouver un système non linéaire qu'ils n'ont pas résolu.

Ce qu'il faut retenir de ses travaux c'est l'amélioration du transfert de chaleur du fait de l'incorporation d'un milieu poreux pour des conditions fixées de la perméabilité et de la conductivité thermique du milieu poreux.

**Char et al. [18]** ont étudié numériquement la condensation en film d'une vapeur pure le long d'une plaque plane immergée dans un milieu poreux en tenant compte de l'effet de la conduction de la plaque plane. Ils ont conclu que la conduction de la paroi a une influence notable sur la condensation en film du fait de la réduction du coefficient de transfert de chaleur et de la température de la paroi comparativement au cas d'une plaque plane isotherme.

**Mosaad [19]** a conduit une étude théorique de l'interaction thermo-fluide de deux régions séparées par une paroi imperméable. Une région poreuse saturée par un fluide au repos soumise à la convection naturelle et de l'autre côté une région fluide où une vapeur pure se condense en film le

long de la paroi. Son étude a permis de trouver un paramètre d'interaction sans dimension  $F$  qui gouverne l'échange thermique à travers la paroi imperméable. Lorsque ce paramètre tend vers zéro, la solution s'approche de celle du problème de la convection naturelle d'un fluide le long d'une paroi immergée dans un milieu poreux infini, tandis que lorsque ce paramètre  $F$  tend vers l'infini, la solution tend vers celle de la condensation en film d'une vapeur pure le long d'une plaque plane (théorie de Nusselt).

### ***1-6-3 Techniques d'amélioration du transfert de chaleur lors de la condensation***

Les techniques d'amélioration du coefficient de transfert de chaleur peuvent être classées en deux groupes : les méthodes actives et les méthodes passives. Parmi les méthodes actives, nous pouvons citer la méthode électrohydrodynamique (EHD) qui consiste à faire passer un champ électrique à travers le fluide. Dans le cas de la condensation on montre qu'avec cette méthode, on peut amincir l'épaisseur du film liquide et par la suite améliorer le transfert de chaleur [20]. **Al-Ahmadi and Al-Dadah [20]** présentent une synthèse bibliographique des corrélations disponibles dans la littérature et proposent une nouvelle corrélation pour évaluer le coefficient de transfert de chaleur pour les systèmes tubulaires utilisant la technique EHD.

**Al-Dadaha and Karayiannis [21]** présentent une autre synthèse bibliographique des méthodes passives utilisées pour améliorer le transfert de chaleur lors de la condensation.

**Renken et al [22,23]** ont proposé une alternative à ses méthodes en utilisant une matrice poreuse, en effet ces auteurs ont montré que l'insertion d'une couche poreuse sur une plaque plane le long de laquelle une vapeur pure se condense permet d'améliorer le coefficient de transfert de chaleur. **Asbik et al [24]** ont étendu les travaux de Renken et al. au cas d'une convection forcée en proposant une solution analytique au modèle généralisé de Darcy Brinkman Forchheimer.

**Plumb et al. [25]** ont essayé d'étudier expérimentalement le phénomène de la condensation en film d'une vapeur pure dans un lit fixe poreux. Dans leurs travaux expérimentaux ils ont observé, sous certaines conditions, l'existence d'une région diphasique entre la région vapeur et la région liquide. Ils ont pu aussi faire une estimation de l'épaisseur du film liquide pour trois différents matériaux poreux.

**Renken et al. [26]** ont présenté une simulation numérique pour l'étude de la condensation en film d'une vapeur pure le long d'une plaque immergée dans un milieu poreux infini. Leurs résultats numériques montrent l'influence des différents paramètres sans dimension physiques tels que le nombre de Darcy et le nombre de Rayleigh sur le coefficient de transfert de chaleur. Ils ont pu noter à travers leurs résultats une nette amélioration du transfert de chaleur.

**Renken et al [27]** ont développé une simulation numérique basé sur le modèle généralisé DBF en incorporant dans l'équation d'énergie de la couche poreuse l'effet de la dispersion thermique. Ils ont trouvé que la dispersion thermique de par l'effet de mélange qu'elle entraîne, une nette amélioration de l'efficacité thermique par rapport aux modèles sans dispersion thermique. Le taux de transfert de chaleur s'améliore beaucoup et ceci devient beaucoup plus intense lorsque le nombre de Reynolds augmente.

**Asbik et al. [28]** récemment ont étendu les travaux de Renken et al. [27] en développant une solution analytique au même problème que celui considéré par Renken et al. [27]

Cette solution est basée sur le modèle généralisé DBF. Ils ont confirmé les résultats de Renken et al [27] et montré que le modèle généralisé permet d'obtenir des taux de transfert de chaleur plus intense que le modèle DB en contradiction avec les résultats de Renken et al. [27] qui ont noté une faible différence entre les deux modèles.

#### **I-7 Conclusion :**

Nous pensons que l'effet de l'insertion d'un dépôt poreux en plus de la forme elliptique de la section du tube permet d'améliorer davantage le coefficient de transfert de chaleur lors de la condensation ce qui a pour effet de réduire les coûts de fabrication des condenseurs à tubes, c'est ce qui a motivé la présente étude.

# CHAPITRE II

## GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX

## Chapitre 2

### Généralités sur les milieux poreux

#### Introduction :

Les notions fondamentales caractérisant les milieux poreux sont étudiés dans ce chapitre. En premier temps on s'intéresse aux définitions relatives à l'aspect géométrique ensuite aux propriétés thermo-physiques des milieux poreux. Et aussi les différents modèles d'écoulements des fluides à travers les milieux poreux.

#### I- Caractéristiques géométriques des milieux poreux :

##### I-1 Définition :

un milieu poreux est une matrice solide qui comporte des vides (pores).

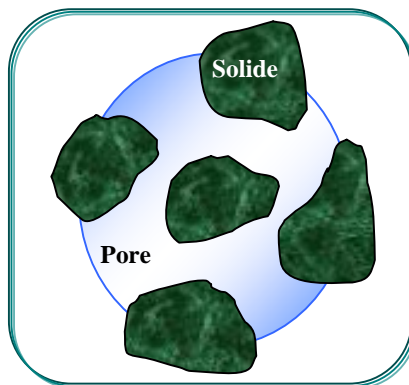
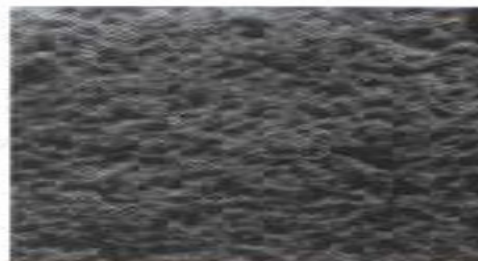


Figure II. 1 : Structure Typique d'un milieu poreux.

Il se présente généralement sous les deux formes :

- Milieux poreux consolidés dans lequel la phase solide est formée de grains soudés entre eux. tels que les roches calcaires, les grés, le bois, le céramique, etc...(figureII.2)



FigureII.2 : Milieu poreux consolidé.

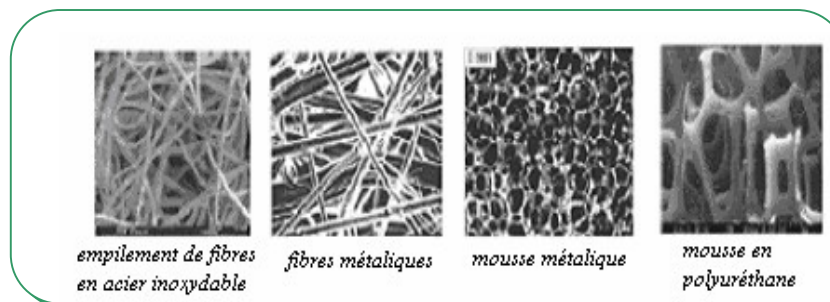
- Milieux poreux non consolidé dans lequel la phase solide est formée de grains non soudés entre eux. comme le gravier, les grains, un dépôt de billes...etc (**figureII.3**)



**FigureII.3** : Milieu poreux non consolidé.

Un milieux poreux peut être formé par :

- Une poudre frittée : cuisson préliminaire des matières premières (en métallurgie et en verrerie).
- Le compactage de grains solides.
- L'empilement des particules.
- L'assemblage de mousse ou de tissus.

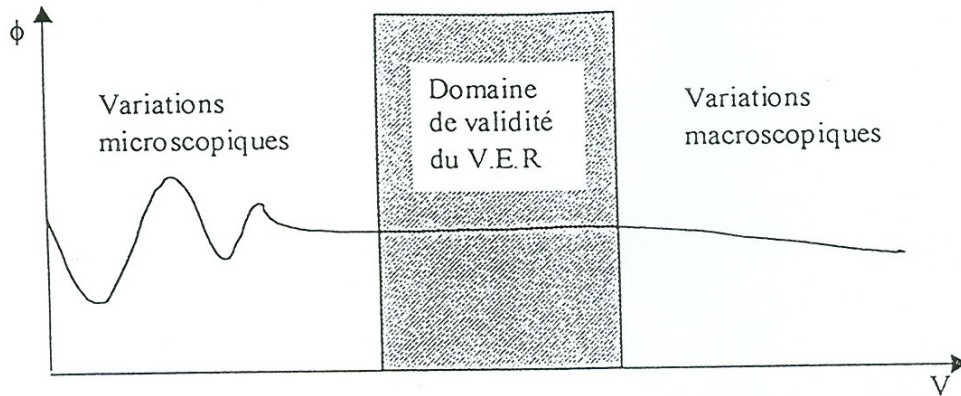


**Figure II.4** : Exemples de quelques milieux poreux

Des exemples de milieux poreux naturels sont : le sable, le grés, les roches calcaires et le bois

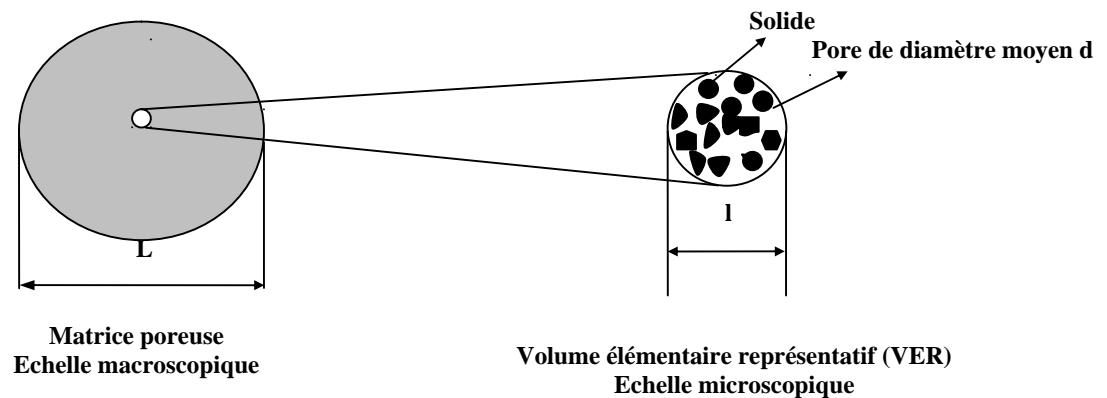
## 1.2 Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R) :

Par analogie avec la notion de particule fluide, on définit pour les milieux poreux un volume élémentaire représentatif (VER) contenant un grand nombre de cavités.



**Figure I.5 : Définition du Volume Élémentaire Représentatif Sur lequel sont moyennées les différentes grandeurs**

Les dimensions caractéristiques du volume seront grandes par rapport à l'échelle de la taille des pores mais petites par rapport à l'encombrement de la matrice solide. **La figure II-6** illustre un volume élémentaire représentatif à travers un domaine d'écoulement.



**Figure II.6: Volume élémentaire représentatif (V.E.R).**

### I-3 porosité ( $\epsilon$ ) :

la porosité est le rapport entre le volume occupé par les pores (les vides) et le volume total de la matrice solide.

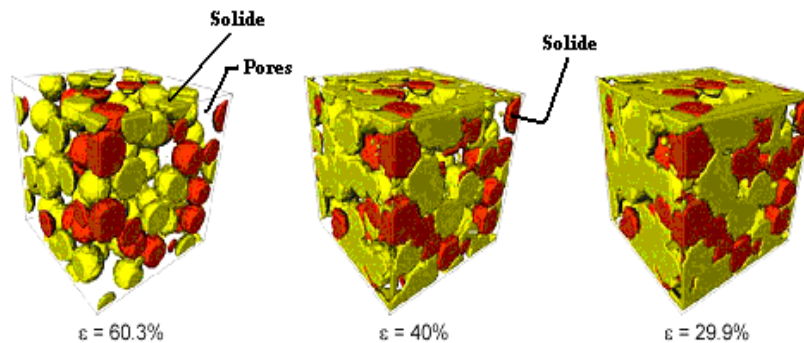
Notation :

$$\epsilon = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \quad [\text{II-1}]$$

$V_{pores}$  : volume des pores

$V_{total}$  : volume total de la matrice poreus

dans la matrice solide, chaque vide peut être connecté à plusieurs autres pores (pores interconnectés), ou connecté seulement à un seul pore (pores isolés), la fraction du volume des pores interconnectés, connectés et non connectés est appelée porosité totale. Par contre la fraction des seuls pores interconnectés est appelée porosité effective. Le fluide s'écoule seulement à travers les pores interconnectés.



**Figure II.7 :** Quelques exemples de porosités

Pour les milieux poreux non consolidés, la porosité effective et la porosité totale sont égales. par contre pour les milieux poreux consolidés, la différence entre elles peut être significative.

Pour un milieu poreux homogène et isotrope, la porosité de surface (qui est la fraction de l'aire du vide à l'aire totale d'une section droite) est égale à la porosité totale.

Pour les matrices rigides, la porosité ne change pas en présence d'un gradient de pression.

Cependant, pour les matrices déformables,  $\epsilon$  varie avec le gradient de pression ; l'étendue de variation de la porosité (avec le gradient de pression) dépend des propriétés structurales et des

déformations élastiques de la matrice poreuse. On a reporté dans le tableau 1-1 les porosités moyennes de certaines substances mesurées par Scheidegger (1974)[27]. Ces mesures ont été élaborées par utilisation de plusieurs techniques. Le tableau 1-2 donne certaines de ces techniques, leur principe, la quantité mesurée et la porosité obtenue (totale ou effective). Certaines mesures donnent des porosités totales et d'autres des porosités effectives.

Matériau	Porosité
Sable	0.37-0.5
Brique	0.12-0.34
Terre (Argile)	0.43-0.54
Poudre d'ardoise noire	0.57-0.66
Poudre de silice	0.37-0.49
Grain de silice	0.65
Charbon	0.02-0.12
Cuir	0.56-0.59
Filtre de cigarettes	0.17-0.49
Empilement de sphères	0.36-0.43
Fibre de verre	0.88-0.93
Béton	0.02-0.07
Poudre de cuivre	0.09-0.34
Calcaire (dolomite)	0.04-0.1

**Tableau II.1** : Porosité de quelques matériaux (Scheidegger 1974)

La détermination de cette grandeur (porosité) est souvent difficile. Plusieurs techniques ont été élaborées à cet effet et sont basées sur la mesure de deux (02) de ces trois (03) paramètres géométriques du milieu considéré ( $V_t$ ,  $V_s$  et  $V_v$ ). Avec :

$$V_s = V_t - V_v \quad \text{[II.2]}$$

Où :

$V_s$  : Volume de la matrice solide [ $m^3$ ]

$V_t$  : Volume total du milieu poreux [ $m^3$ ]

$V_v$  : Volume des vides (pores) [ $m^3$ ]

Sur le tableau I.2 sont regroupées quelques techniques utilisées ainsi que les paramètres mesurés.

Volume mesuré	Méthode de mesure
Volume total ( $V_t$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <b>Poussée d'Archimède dans le mercure</b> : le mercure liquide non mouillant ne pénètre pas sans pression dans les milieux poreux communs. On obtient alors une mesure très précise du volume total par cette méthode.</li> <li>➤ <b>Mesure directe de l'échantillon au comparateur</b> : cette méthode ne convient que pour les éprouvettes de formes très régulières.</li> </ul>
Volume des vides (pores) ( $V_v$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <b>Prise de fluide mouillant par saturation totale des vides</b> : on obtient directement le volume des vides par la différence de poids sec et saturé.</li> </ul>
Volume de la matrice solide ( $V_s$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ <b>Compressibilité d'un gaz parfait</b> : on trace le diagramme pression-volume injecté dans une enceinte d'abord vide puis contenant l'échantillon. Par différence on calcule le volume du solide dont on néglige la compressibilité.</li> <li>➤ <b>Poussée d'Archimède dans un fluide mouillant saturant totalement le corps poreux</b> : on mesure directement le volume de la phase solide par la différence entre le poids sec et le poids immergé.</li> <li>➤ <b>Meure de la masse volumique du solide</b> : après le broyage fin du milieu poreux.</li> <li>➤ <b>Calcul de la masse volumique du solide</b> : par analyse quantitative des minéraux le constituant.</li> </ul>

Tableau II.2 : Quelques techniques de mesure de la porosité ( $\varepsilon$ )

### 1.3.1. Notion de porosité variable

En général, les vides (pores) ne sont pas uniformes dans leur distribution et forme à travers la matrice poreuse. Cette non uniformité peut avoir un rôle significatif sur l'écoulement et le transfert de chaleur près des frontières (paroi solide ou surface libre) [27].

En effet, quand la frontière voisine est une surface solide, les porosités adjacentes à cette surface solide sont élevées, il en résulte alors une réduction de la résistance à l'écoulement ; par conséquent, la vitesse locale dans cette partie augmente. Cet effet donne lieu à ce que l'on appelle : « effet channeling » [27].

C'est dans ce sens que des recherches ont été conduites par de nombreux chercheurs pour essayer d'élaborer des lois décrivant la variation de la porosité.

Des expériences [28] ont montré que la porosité (près des parois solides) varie d'une manière oscillatoire en fonction de la distance à partir de ces parois solides. Elle est proche de l'unité près des parois solides et varie sur une distance de cinq fois le diamètre des particules solides à partir de ses parois [29].

En introduisant la notion de volume élémentaire représentatif, et vu que les équations du mouvement dans les milieux poreux sont moyennées à travers des volumes élémentaires, la plupart des chercheurs suggèrent l'utilisation d'une loi de variation de la porosité en exponentielle [30 -32]

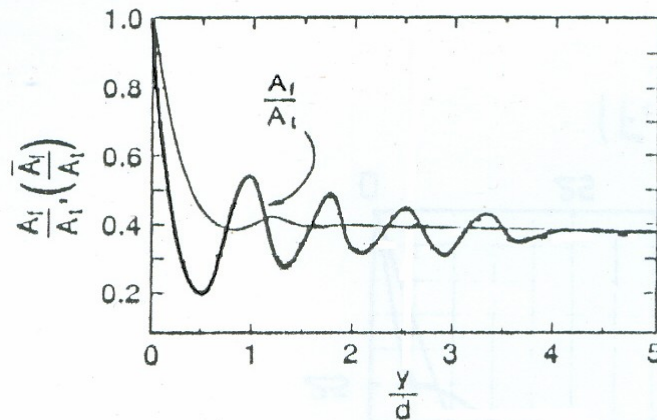
Il est à noter que récemment, l'utilisation de la notion de porosité variable a été mise en cause par quelques chercheurs. Les critiques présentées sont relatives à la dimension du volume

élémentaire représentatif puisque la porosité varie près des parois solides seulement (c'est-à-dire que la variation de la porosité est confinée sur une distance qui est de cinq fois le diamètre des pores), on ne peut donc en principe, appliquer la notion de volume élémentaire représentatif à ce problème (les dimensions du volume élémentaire représentatif sont trop larges devant le diamètre moyen des pores ou des particules). En effet au dessus d'une échelle équivalente à la taille du pore, la porosité devient binaire 0 ou 1) et il n'est plus correct de traiter le système avec l'approche de milieu continu .

### 1.3.2. Modèles de variation de la porosité :

#### A. modèle sinusoïdal :

Expérience de BENATI et BROSILOW (1962) :



**Figure I1-8:** fraction moyenne et locale de l'aire du vide (par Benati et Brosilow)

BENATI et BROSILOW ont pris un cylindre dans lequel ils ont versé des particules solides de forme sphérique. Ils ont rempli les interstices entre ces particules par un liquide de résine. Après solidification de la résine, le cylindre est usiné. L'usinage est effectué en plusieurs étapes. Pour chaque étape, le diamètre du cylindre est réduit d'une distance  $d$  de l'ordre de  $\frac{d}{6}$  ( $d$  étant le diamètre des particules solides). Après chaque opération, le poids et le diamètre du cylindre sont notés. Par la suite, les densités obtenues pour chaque échantillon sont utilisées pour déterminer la fraction du vide local.

Les auteurs ont présenté leurs résultats expérimentaux sous forme d'un rapport surfacique de l'aire du vide à l'aire totale  $\left(\frac{Af}{At}\right)$ , ces résultats sont illustrés par la figure 1-8. Il est à noter que  $y$  représente la distance à partir de la paroi du cylindre. Les tirets horizontaux sur la courbe représentent les valeurs de  $d$ .

La quantité moyenne  $\left(\overline{Af}/At\right)$  utilisée en ordonnée dans la figure 1-8 est donnée par :

$$\frac{\overline{Af}}{At} = \frac{1}{y} \int_0^y \frac{Af}{At} dy \quad [\text{II.3}]$$

Ce fut Martin [27] qui a approximé leurs résultats sous forme d'un rapport surfacique :

Pour  $y = R$ ,  $R$  étant le rayon des particules solides :

$$\frac{Af}{At} = \frac{Af}{At} \Big|_{\min} + \left(1 - \frac{Af}{At}\right) \left(\frac{y}{R} - 1\right)^2 \quad [\text{II.4}]$$

Pour  $y > R$  :

$$\frac{Af}{At} = \frac{Af}{At} \Big|_{\infty} + \left(\frac{Af}{At} \Big|_{\min} - \frac{Af}{At} \Big|_{\infty}\right) \text{EXP}\left(-\frac{y}{4R} + \frac{1}{4}\right) \text{Cos}\left[\frac{\pi}{0.810}\left(\frac{y}{R} - 1\right)\right] \quad [\text{II.5}]$$

Avec :

$$\frac{Af}{At} \Big|_{\infty} = 0.39 \quad \text{et} \quad \frac{Af}{At} \Big|_{\min} = 0.23$$

$Af$  : surface du vide.

$At$  : surface totale.

P. Cheng et A. Chowdhury [33], en s'inspirant des résultats des expériences de Benati et Brosilow, ont approximé la variation de la porosité comme suit :

Pour  $y = dp/2$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\min} + (1 - \varepsilon_{\min}) \left((2y/dp) - 1\right)^2 \quad [\text{II.6}]$$

Pour  $y > dp/2$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{\infty}) \exp\left(\frac{1 - (2y/dp)}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{l}(2y/dp - 1)\right) \quad [\text{II.7}]$$

avec :

$y$  : distance à partir des parois solides.  
 $\varepsilon_{\min} = 0.23$        $e_8 = 0.4$

$$l = \begin{cases} 2/3 & \text{pour } (D/dp) \rightarrow \infty \\ 0.876 & \text{pour } (D/dp) = 20.3 \end{cases}$$

$D$  et  $dp$  sont respectivement les diamètres du tube et des particules solides.

### **B. modèle exponentiel :**

Comme on l'a déjà souligné, ce sont les équations du mouvement moyennées à travers les volumes élémentaires qui ont amené certains chercheurs à opter pour le modèle exponentiel.

Pour le cas d'un cylindre, la variation de la porosité s'exprime par [31,34] :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} \left[ 1 + C_1 \exp\left(-N_1 \left(\frac{r_0 - r}{dp}\right)\right) \right] \quad [\text{II.8}]$$

$r_0$  étant le rayon du cylindre et  $r$  la coordonnée radiale.

Pour le cas d'un canal plan, elle s'exprime par [31,34] :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} \left[ 1 + C_1 \exp\left(-N_1 \left(\frac{y}{dp}\right)\right) \right] \quad [\text{II.9}]$$

$N_1$  et  $C_1$  sont des constantes empiriques.

$dp$  est le diamètre des particules solides.

$y$  est la distances à partir des parois solides.

La constante  $N_1$  a été prise égale à deux dans certaines analyses [31,34] ; cependant, des travaux on indiqué que cette valeur est trop petite [32,35] et suggèrent des valeurs pour  $N_1=5$  ou  $6$ ,  $C_1=1.4$  et  $e_8=0.4$ .

### 1.4. la perméabilité $K$ :

C'est un paramètre qui traduit l'aptitude de la matrice solide à laisser passer le fluide sous un gradient de pression.

La perméabilité est une caractéristique du milieu poreux, elle dépend de la forme et de la dimension des grains, de la connectivité des pores et de la porosité.

Elle est donnée par la loi expérimentale de Darcy :

$$K = -\frac{\mu \cdot U_D}{\left(\frac{dP}{dx}\right)} \quad \text{[II.10]}$$

Où :  $K$  : perméabilité exprimée en Darcy ou en  $[m^2]$  ( $1 \text{ Darcy} = 9.87 \times 10^{-13} m^2$ )

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide  $[kg/m \cdot s]$

$U_D$  : vitesse Darcienne  $[m/s]$

$\left(\frac{dP}{dx}\right)$  : Gradient de pression dans le sens de l'écoulement  $[Pa/m]$

Dans le tableau II.3 sont représentées les perméabilités de certains matériaux.

Matériaux	Perméabilité
Ardoise (poudre)	$4.9 \cdot 10^{-14}$ --- $1.2 \cdot 10^{-13}$
Grès	$5 \cdot 10^{-16}$ --- $3 \cdot 10^{-12}$
Sable	$2 \cdot 10^{-11}$ --- $1.8 \cdot 10^{-10}$
Brique	$4.8 \cdot 10^{-14}$ --- $2.2 \cdot 10^{-13}$
Sol	$2.9 \cdot 10^{-13}$ --- $1.4 \cdot 10^{-11}$
Poudre de silice	$1.3 \cdot 10^{-14}$ --- $5.1 \cdot 10^{-14}$
Cuir	$9.5 \cdot 10^{-14}$ --- $1.2 \cdot 10^{-13}$
Filtre de cigarettes	$1.1 \cdot 10^{-9}$
Fibre de verre	$2.4 \cdot 10^{-11}$ --- $5.1 \cdot 10^{-11}$
Béton bitumineux	$10^{-13}$ --- $2.3 \cdot 10^{-11}$
Poudre de cuivre	$3.3 \cdot 10^{-10}$ --- $1.5 \cdot 10^{-9}$
Calcaire (dolomite)	$2 \cdot 10^{-15}$ --- $4.5 \cdot 10^{-14}$
Terre	$2.9 \cdot 10^{-13}$ --- $1.4 \cdot 10^{-11}$
Sable	$2 \cdot 10^{-11}$ --- $1.8 \cdot 10^{-9}$
Cheveux artificiels	$8.3 \cdot 10^{-10}$ — $1.2 \cdot 10^{-9}$
Plaque de liège	$3.3 \cdot 10^{-10}$ — $1.5 \cdot 10^{-9}$
Fils à tisser	$3.8 \cdot 10^{-9}$ — $1.10^{-8}$

**Tableau II.3** : Perméabilités de quelques matériaux

Différents modèles ont été utilisés pour évaluer la perméabilité tels que les modèles capillaires et le modèle du rayon hydraulique. Ainsi, Carman et Kozeny ont recommandé une formulation mathématique développée à partir d'un modèle capillaire formé de conduites parallèles, dont l'expression s'écrit sous la forme suivante :

$$K = \frac{\varepsilon^3 d^2}{36C(1-\varepsilon)^2} \quad \text{[II.11]}$$

Où :

$d$  : dimension caractéristique des pores [m]

$C$  : coefficient de Kozeny appelé "paramètre de forme" ( $3.6 < C < 5$ )

- dans le cas de grains sphériques entassés  $C = 4.84$

- dans le cas de fibres :

$$C = \frac{62.3 \left( \sqrt{\frac{2\pi}{1-\varepsilon}} - 2.5 \right)^2 (1-\varepsilon) + 107.4}{16 \varepsilon^3 (1-\varepsilon)^4}$$

- Rumpf et Gupte ont proposé :

$$C = \varepsilon^{5.5} \frac{d^2}{5.6} \quad \text{Pour des particules sphériques entassées.}$$

D'autres chercheurs ont utilisé une formule analogue à celle de Carman-Kozeny pour un milieu formé de billes :

$$K = \frac{d^2 \cdot \varepsilon^3}{A(1-\varepsilon)^2} \quad \text{[II.12]}$$

Où  $A$  est une constante qui varie comme indique le tableau

Auteurs	Année	Coefficient A
P.C. Carman et J. Kozeny	1937	180
S. Ergun	1952	150
W. Robsenow et J.P. Harnett	1973	175
R. Fand et col	1986	182
R. Fand et col	1989	215

**Tableau II.4 :** Quelques valeurs de  $A$  utilisées par certains auteurs.

### 1.5. Tortuosité ( $\tau$ )

La tortuosité est le rapport entre la longueur moyenne ( $L_m$ ) du chemin parcouru par une particule fluide, entre deux points de la matrice solide et la longueur ( $L$ ) en ligne droite entre ces deux points :

$$\tau = \frac{L_m}{L} \quad [\text{II.13}]$$

Elle est utilisée comme facteur de correction du gradient de pression.

$$\nabla P_{\text{modifiée}} = \frac{1}{\tau} \cdot \nabla P$$

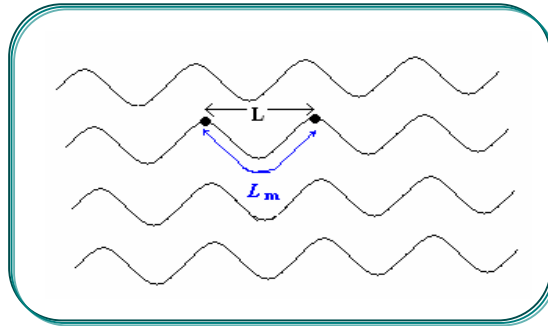


Figure II.9 : Schéma explicatif de la notion de tortuosité.

### 1.6. viscosité dynamique effective $\mu_{\text{eff}}$ :

Elle a été introduite par Brinkman (1947-1948) afin d'obtenir une expression pour la perméabilité. Il a étendu la force de Stokes obtenu pour une sphère placée dans un domaine infini, à une sphère mais cette fois-ci entourée d'autres sphères. Les effets des sphères avoisinantes sont alors pris en considération. En combinant l'écoulement de Stokes avec l'écoulement de Darcy :

$$\vec{\nabla} p = -\frac{\mu}{k} \vec{v} + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \vec{v} \quad [\text{II.14}]$$

Où  $\mu_{\text{eff}}$  représente la viscosité effective.

Il a pris le rapport entre la viscosité effective et la viscosité de fluide égal à un

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = 1$$

## 1.7. Conductivité thermique effective ( $k_{eff}$ )

Elle est définie comme étant la conductivité thermique du milieu poreux, du fait de la complexité de la structure de ce milieu, sa conductivité thermique ( $k_{eff}$ ) dépend de la porosité ( $\varepsilon$ ) et de conductivités thermiques des phases solide ( $k_s$ ) et fluide ( $k_f$ ).

Différents modèles basés sur l'analogie électrique, ont été proposés. Nous pouvons citer :

### a. Modèle série

Dans ce modèle le flux de chaleur qui traverse successivement les phases solide et fluide à une résistance thermique dû au milieu poreux  $\left(\frac{1}{k_{eff}}\right)$ , alors elle est égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases.

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{e}{k_f} + \frac{1-e}{k_s} \quad \text{[II.15]}$$

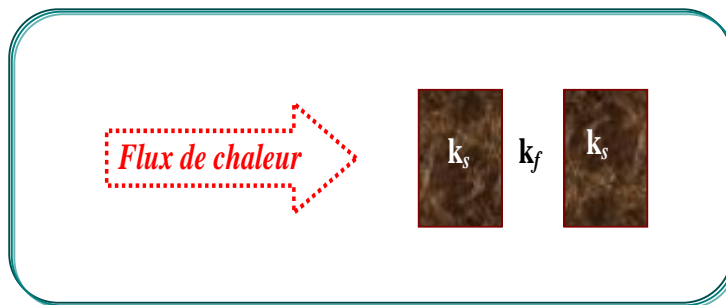
Où :

$k_{eff}$  : conductivité thermique effective [W/m K]

$k_s$  : conductivité thermique de la phase solide [W/m K]

$k_f$  : conductivité thermique de la phase fluide [W/m K]

$\varepsilon$  : porosité



**Figure II.10:** Modèle en série de conductivité thermique effective  $k_{eff}$ .

### b. Modèle Parallèle

Dans ce modèle le flux de chaleur traverse les deux phases (fluide et solide) en même temps. La conductivité effective ( $k_{eff}$ ) est alors égale à la somme pondérée des taux d'occupation d'espace des conductivités phasiques.

$$k_{eff} = \varepsilon \cdot k_f + (1 - \varepsilon) \cdot k_s \quad [\text{II.16}]$$



Figure II.11 : Modèle en parallèle de conductivité thermique effective  $k_e$ .

### c. Modèle de Maxwell

$$\frac{K_{eff}}{K_f} = \frac{2\varepsilon + (3 - 2\varepsilon) \frac{k_s}{k_f}}{(2 - \varepsilon) + \varepsilon \frac{k_s}{k_f}} \quad [\text{II.17}]$$

Ce modèle est développé dans le cas des sphères solides lâchés aléatoirement dans un milieu continu et lorsque la porosité est importante.

### d. Modèle de Zehner et schlunder

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = 1 - \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{1/2}} + \frac{2(1 - \varepsilon)^{1/2}}{\left(1 - \frac{k_s}{k_f} \beta\right)} \left[ \frac{\left(1 - \frac{k_s}{k_f}\right) \beta}{\left(1 - \frac{k_s}{k_f} \beta\right)^2} \ln \left( \frac{1}{\frac{k_s}{k_f} \beta} \right) - \frac{\beta + 1}{2} - \frac{\beta - 1}{1 - \frac{k_s}{k_f} \beta} \right] \quad [\text{II.18}]$$

Avec :

$$\beta = A \left( \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{10/9}$$

A dépend de la forme des particules solides

(Particule sphériques A=1.25 ; cylindres creux ou pleins A= 2.5 ; particules quelconque A=1.4)

### e. Modèle Hadley

$$\frac{k_{eff}}{k_f} = (1-\alpha_0) \frac{\varepsilon f_0 + \frac{k_s}{k_f} (1-\varepsilon f_0)}{1-\varepsilon(1-f_0) + \frac{k_s}{k_f} \varepsilon(1-f_0)} + \alpha_0 \frac{2 \left( \frac{k_s}{k_f} \right)^2 (1-\varepsilon) + (1+2\varepsilon) \frac{k_s}{k_f}}{(2-\varepsilon) \frac{k_s}{k_f} + 1-\varepsilon} \quad [\text{II.19}]$$

Avec  $f_0 = 0.8 + 0.1 \varepsilon$

$$\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon)$$

$\text{Log } \alpha_0 = -4.898 \varepsilon$  : pour  $0 \leq \varepsilon \leq 0.0827$

$\text{Log } \alpha_0 = -0.405 - 3.154(\varepsilon - 0.0827)$  : pour  $0.0827 \leq \varepsilon \leq 0.248$

$\text{Log } \alpha_0 = -1.084 - 6.778(\varepsilon - 0.0827)$  : pour  $0.248 \leq \varepsilon \leq 0.580$

## 2-Modèles d'écoulement dans les milieux poreux [27,29]

Les principes de conservation de quantité de mouvement, d'énergie ainsi que la masse ne peuvent être mis en application dans l'étude des écoulements dans les milieux poreux, à cause de la complexité géométrique des pores, qu'après passage à l'échelle macroscopique qui permet de faire une équivalence entre un milieu réel désordonné et un milieu continu. Plusieurs modèles ont été établis dont celui de Darcy (1856) qui néglige les effets inertiels et de viscosité et d'autres qui les prennent en considération et qui sont des extensions du modèle de Darcy.

### 2.1. Modèle de Darcy

Pour des faibles vitesses de filtration, H. Darcy (1856) a mis en évidence une loi liant le gradient de pression et la vitesse de filtration à la perméabilité et à la viscosité dynamique.

Elle s'écrit :

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{K} U_D \quad \text{[II.20]}$$

Où :

$\frac{dp}{dx}$  : Gradient de pression [Pa / m]

$U_D$  : vitesse de filtration déduite du débit massique [m / s]

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide [kg / m.s]

$K$  : perméabilité de la matrice poreuse [m<sup>2</sup>]

On peut noter que la vitesse à l'intérieur des pores peut être très supérieure à la vitesse de filtration puisqu'elle est multipliée par un facteur  $1/\varepsilon$ .

### 1.1.1 Limites de validité de la loi de Darcy

La loi Darcy traduit la proportionnalité entre la vitesse d'écoulement du fluide et le gradient de pression moteur. L'écoulement est d'autant plus aisé que le fluide est moins visqueux et que le milieu poreux est plus perméable pour des vitesses d'écoulement importantes on peut s'attendre à des écarts non linéaire du fait de l'inertie du fluide.

Pour caractériser la nature de l'écoulement et déterminer les limites de validité de la loi de Darcy on a défini pour les milieux poreux un nombre sans dimension analogue au nombre de Reynolds.

Pour un milieu poreux constitué d'un lit de billes en distribution étroit en diamètre on utilise :

$$\text{Re}_p = \frac{\rho \omega d_p}{\mu}$$

Où  $\omega$  : Vitesse de filtration

$d_p$  : diamètre de paroi

Il est généralement montré expérimentalement que la loi Darcy est valable si le nombre de Reynolds en milieu poreux est inférieur à une limite comprise entre 1 et 10 .

Par exemple pour l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux constitué d'un empilement de billes de 100  $\mu\text{m}$  de diamètre le nombre  $\text{Re}_p$  reste inférieur à 1 pour des vitesses inférieures à :

1 cm/s pour l'eau à 20°C.

50 cm/s pour l'air à 20°C.

## 2.2. Modèle de Darcy – Forchheimer (1901)

Ne tenant pas compte des effets inertiels à l'échelle du pore la loi de Darcy n'est plus applicable pour les écoulements à grandes vitesses. Staneck et Szekely ont formulé une équation vectorielle, tenant compte de ces effets, sous la forme :

$$\vec{\nabla} P = \frac{\mu}{K} \vec{V} + \rho C |\vec{V}| \vec{V} \quad [\text{II.21}]$$

Cette équation est une généralisation de l'équation établie par Forchheimer (1901) pour un écoulement unidirectionnel

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\mu}{K} w + \rho c w^2 \quad [\text{II.22}]$$

w : vitesse axiale

c : coefficient inertiel

Ergun a proposé d'utiliser

$$C_f = \frac{1.75(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3 d_p}$$

Joseph, Nield et Papanicolaou 1982 ont utilisé :

$$C_f = \frac{\varepsilon F}{\sqrt{K}}$$

Où F est le coefficient de Forchheimer

Ward 1964 a trouvé expérimentalement, pour une large variété de milieu poreux, que F est très proche de 0.55

Beavers, Sparrow et Rodenz ont proposé, dans le cas d'un matériau formé de billes, une expression de F de la forme :

$$F = 0.55 \left( 1 - 5.5 \frac{d_s}{D_e} \right)$$

$d_s$  : diamètre des billes (sphères)

$D_e$  : diamètre équivalent du lit occupé par la matrice poreuse

## 2.3. Modèle de Darcy - Brinkman

En 1947 Brinkman a établi une équation de la quantité de mouvement en combinant l'équation de Darcy et celle de Navier – Stokes pour tenir compte des effets pariétaux. Elle est de la forme :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_e\Delta\vec{V} \quad \text{[II.23]}$$

Où :

$\mu_e\Delta\vec{V}$  : sont les forces de viscosité causées par les frottements du fluide avec les parois dans un milieu poreux

$\mu_e$  : est la Viscosité effective (kg/ms)

La notion de viscosité effective a été introduite afin d'exprimer la continuité entre la région poreuse et la région fluide (cas d'une conduite partiellement poreuse).

Brinkman (1947) a supposé que la viscosité effective était égale à la viscosité du fluide.

En (1972) Lundgren a montré que la viscosité effective dépend de la viscosité du fluide et de la porosité du milieu poreux . Pour les faibles concentrations de particules Lundgren confirme l'hypothèse de Brinkman

## 2.4. Modèle Général ou Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Pour tenir compte de tous les effets cités auparavant, Vafai et Tien (1980, 1981, 1990) ont introduit un modèle général appelé modèle de Darcy – Brinkman – Forchheimer Sous sa forme vectorielle, ce modèle s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \vec{\nabla} \vec{V} = -\vec{\nabla}P + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V} - \frac{\mu}{K} \vec{V} - \rho \frac{F \varepsilon}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \vec{V} + \rho \vec{F}_v \quad \text{[II.24]}$$

$\vec{V}$  : est une quantité moyenne à travers un volume élémentaire.

Ce modèle d'écoulement est relatif à un fluide Newtonien uniquement

Définition des différents termes :

- $\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \vec{\nabla} \vec{V}$  : Forces inertielles macroscopiques
- $\vec{\nabla}P$  : gradient de pression
- $\mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}$  : terme visqueux de Brinkman
- $-\frac{\mu}{K} \vec{V}$  : terme de Darcy
- $-\rho \frac{F \varepsilon}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \vec{V}$  : forces inertielles microscopiques
- $\rho \vec{F}_v$  : forces de volume

### 3-Transfert de chaleur dans les milieux poreux [27,29]

La description du transfert de chaleur dans les milieux poreux, par l'approche macroscopique peut présenter une différence par rapport au transfert réel. De ce fait, la notion d'équilibre local est introduite. Cette dernière a été largement étudiée.

- Carbonell et Whitaker (1984) ont posé des conditions d'équilibre thermique sur la mesure du temps et de la longueur.
- Bennacerallah (1994) et Kaviany (1995) ont étudié la condition d'équilibre et ont trouvé qu'elle est satisfaite en régime instationnaire.
- Chang et al. (1990) ont trouvé que l'équation d'énergie macroscopique peut être obtenue par prise de moyenne de l'équation d'énergie dans chaque phase et dans un volume élémentaire. Elle se présente sous la forme suivante :

$$(\rho C_p)_e \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f \vec{\nabla} \vec{\nabla} T = k_{eff} \nabla^2 T \quad [\text{II.25}]$$

Avec  $(\rho C_p)_e = \varepsilon (\rho C_p)_f + (1 - \varepsilon) (\rho C_p)_s$

Où :

$\rho$  : Masse volumique du fluide considéré [kg /m<sup>3</sup>]

$(Cp)_e$  : capacité calorifique effective [kCal/kg °C]

$(Cp)_f$  : capacité calorifique du fluide [kCal/kg °C]

$\varepsilon$  : Porosité du milieu poreux

$k_{eff}$  : conductivité thermique effective [kCal/h m °C].

**N.B** : cette équation décrivant le transfert de chaleur dans un milieu poreux a été obtenu en supposant les hypothèses suivantes

\* les termes de dissipation visqueux sont négligeables (hypothèse justifiée si la vitesse de filtration reste relativement faible et si les fluides saturants ne sont pas trop visqueux.

\* les caractéristiques thermiques des phases solide et fluides sont supposées constantes et donc indépendantes de la température

\* Pas de source internes (la source de la chaleur).

### Conclusion :

Ce chapitre nous a permis de mettre en évidence les différents paramètres pertinents dans l'étude de l'écoulement et du transfert de chaleur dans un milieu poreux.

# CHAPITRE III

## FORMULATION MATHÉMATIQUE

## CHAPITRE III

### FORMULATION MATHÉMATIQUE

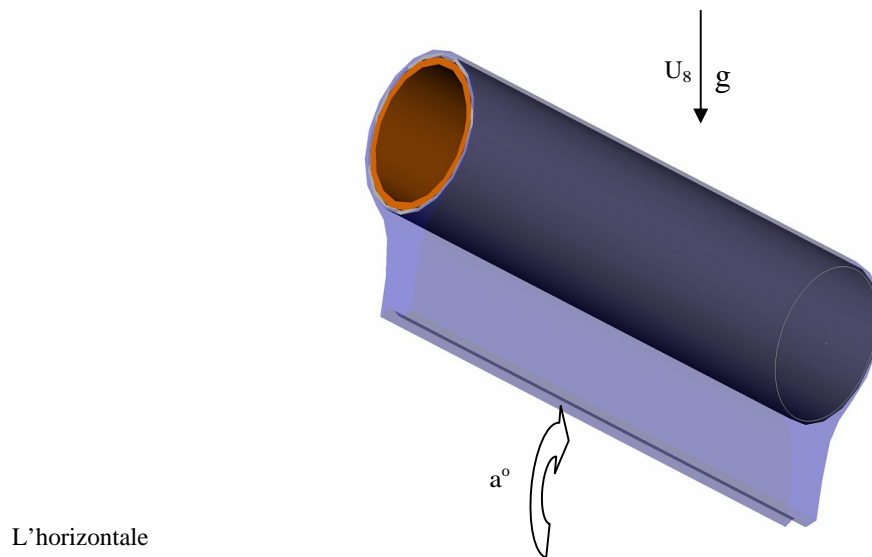
#### III.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons formuler mathématiquement le problème de l'effet de la couche poreuse sur le transfert de chaleur lors de la condensation d'une vapeur pure autour d'un tube elliptique incliné.

Pour ce faire nous allons poser les équations dynamiques et thermiques régissant l'écoulement dans les deux milieux fluide et poreux ainsi que les conditions aux limites. Des hypothèses sont introduites afin de simplifier le problème

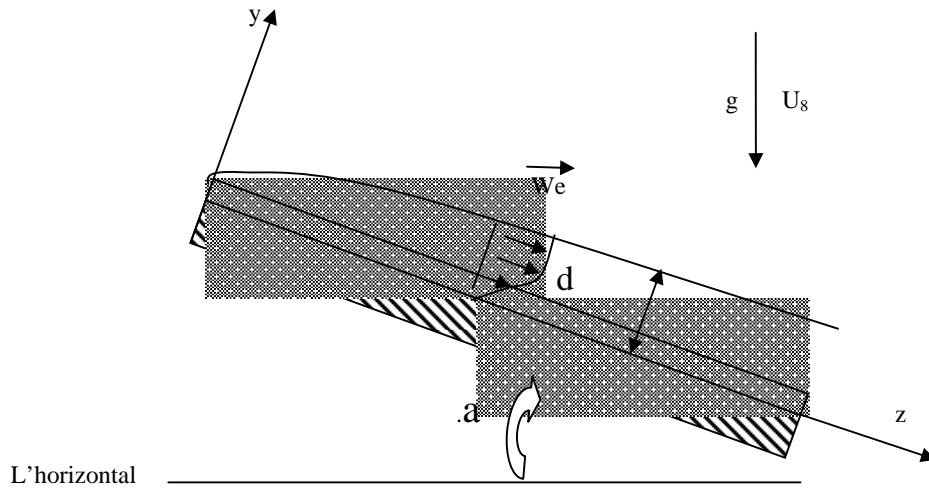
#### III.2. Domaine d'étude :

La figure (III-1) représente le phénomène de condensation, d'une vapeur qui s'écoule autour d'un cylindre imperméable incliné d'un angle  $\alpha$  et couvert d'une couche poreuse.

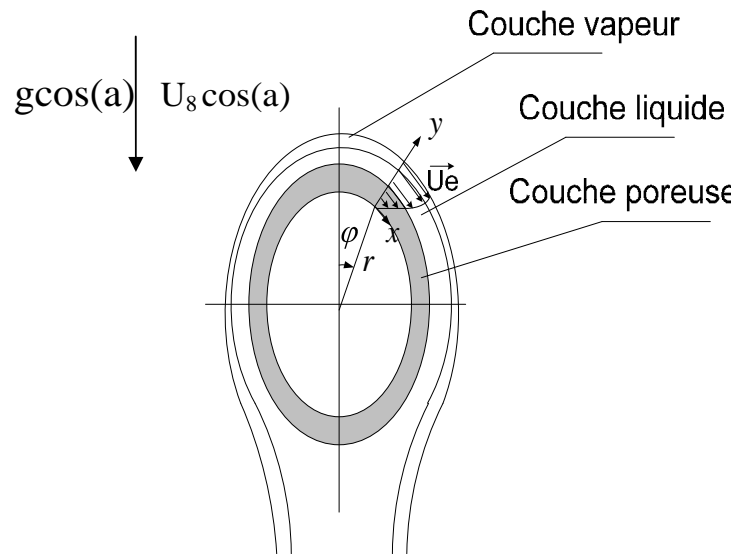


**Figure III-1** : Domaine physique

Afin de mieux cerner le problème nous allons décomposer le problème tridimensionnel en deux problèmes bidimensionnels de telle manière à avoir un problème de condensation autour d'une conduite elliptique et d'un autre côté l'écoulement le long d'une conduite elliptique incliné.



**a** : une coupe longitudinale



**b** : une coupe transversale

Figure III-2 : Domaine d'étude

### III.3. Équations gouvernantes :

#### III.3-1 Etude dynamique :

1. Principe de conservation de masse

- Région poreuse

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{[III-1]}$$

- Région fluide

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{[III-2]}$$

## 2. Principe de conservation de quantité de mouvement

- Région poreuse

D'après le modèle de Darcy-Brikman-Frochheimer, on a :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div}(\vec{v}) \right) = -\nabla \bar{p} + \rho f_v - \frac{\mu_e}{K} \vec{v} + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{v} - \frac{\rho C_e |v|}{\sqrt{K}} \vec{v} \quad \text{[III-3]}$$

- Région fluide

D'après l'équation de Navier stokes, on à :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div}(\vec{v}) \right) = -\nabla \bar{P} + \rho f_v + \mu_l \nabla^2 \vec{v} \quad \text{[III-4]}$$

### III.3. 2 Etude thermique :

#### 1. Principe de conservation l'énergie

- Région poreuse

$$\left[ \varepsilon (\rho c_p)_F + (1 - \varepsilon) (\rho c_p)_s \right] \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p) \vec{V} \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (K_{eff} \vec{\nabla} T) + \varepsilon S_F + (1 - \varepsilon) S_s \quad \text{[III-5]}$$

Avec :

$[\varepsilon(\rho c_p)_F + (1 - \varepsilon)(\rho c_p)_s] \frac{\partial T}{\partial t}$  : La variation de l'énergie en fonction du temps

$\vec{\nabla} \cdot (K_{eff} \vec{\nabla} T)$  : La variation de l'énergie par conduction

$(\rho c_p) \vec{V} \vec{\nabla} T$  : La variation de l'énergie par convection

$\varepsilon S_F + (1 - \varepsilon) S_s$  : La génération de chaleur

- **Région fluide**

$$(\rho c_p) \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{DP}{Dt} + \mu \phi_t + \rho \vec{V} \vec{F} + S \quad \text{[III-6]}$$

Avec:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$  : Terme de diffusion.

$\frac{DP}{Dt}$  : Terme de compression (Travail).

$\mu \phi_t$  : Terme de dissipation visqueuse.

$\rho \vec{V} \vec{F}$  : Terme de travaux des forces de volume.

S : Terme de génération de chaleur.

### III.4. Hypothèses simplificatrices :

L'étude est menée sous certaines hypothèses qui sont énumérées comme suit :

- La vapeur est pure isotherme loin de la conduite et elle s'écoule avec une vitesse constante  $U_\infty$ .
- L'épaisseur du film liquide est faible devant la circonférence de la conduite elliptique.
- L'écoulement est bidimensionnel, stationnaire et laminaire.
- Le régime est établi.
- Le milieu poreux est isotrope et homogène.
- Le film liquide et le milieu poreux, sont en équilibre thermique.
- Les effets microscopiques d'inerties sont négligeables.

- Le terme de convection dans l'équation d'énergie ainsi que le terme d'inertie dans l'équation de quantité de mouvement du film liquide sont négligeables.
- Toute la couche poreuse est imbibée par le film liquide ( $d > H$ ).

### Changement de coordonnée $\varphi \rightarrow \theta$ :

On peut faire le changement de variable des coordonnées,

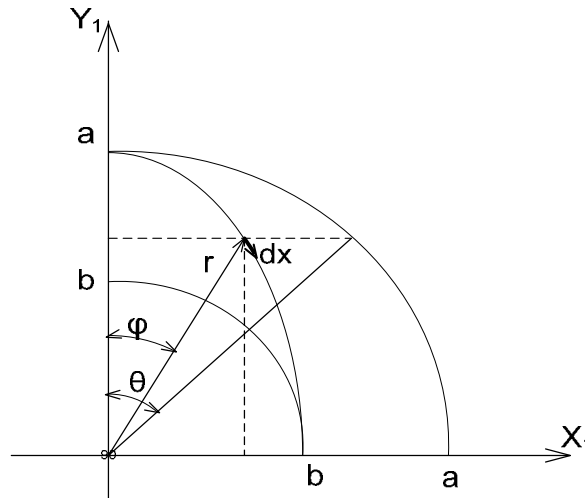


Figure III-3 : Changement de coordonnée

La conduite elliptique est placée horizontalement où l'axe majeur est alignée verticalement, deux expressions pour la distance radiale ( $r$ ), l'élément curviligne d'abscisse  $dx$ , et le rayon curviligne de l'ellipse  $R(\theta)$ .

Nous utilisons le système de coordonnées cartésiennes ( $X_1, Y_1$ ) où le centre se coïncide avec le centre de l'ellipse, ensuite nous faisons une transformation aux coordonnées paramétriques l'angle ( $\theta$ ).

$$\begin{aligned} X_1 &= r \sin(\varphi) = b \sin(\theta) \\ Y_1 &= r \cos(\varphi) = a \cos(\theta) \end{aligned}$$

la relation entre  $(\varphi), (\theta)$  :  $\operatorname{tg}(\varphi) = e \operatorname{tg}(\theta)$

si l'excentricité  $e=1$  on aura  $\varphi = \theta$

Dans le système de coordonnées cartésiennes le rayon  $r$  est donné par l'expression :

$$r = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = a \sqrt{\cos^2(\theta) + e^2 \sin^2(\theta)}$$

L'élément curviligne de l'abscisse  $dx$  :

$$dx = \sqrt{dX_1^2 + dY_1^2} = a \sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)} d\theta$$

et finalement le rayon curviligne de l'ellipse est :

$$R(\theta) = \frac{a}{e} (\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta))^{3/2}$$

le rayon équivalent  $R = \frac{De}{2}$  : à un rayon de cylindre ayant la même surface externe

$$\frac{De}{2} = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)} d\theta$$

### III.5. Equations gouvernantes :

En introduisant les hypothèses simplificatrices, les équations gouvernantes deviennent :

- **Equation de continuité**

La même équation régit les deux milieux :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{[III-7]}$$

- **Equation de quantité de mouvement pour l'écoulement autour de la conduite :**

**i) Région poreuse**

$$\mu_{eff} \frac{\partial^2 U^p}{\partial y^2} - \frac{\mu_l}{K} U^p + g(\rho_l - \rho_v) f(\varphi) \cos(\alpha) - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{[III-8]}$$

**ii) Région fluide**

$$\mu_f \frac{\partial^2 U^f}{\partial y^2} + g(\rho_l - \rho_v) f(\varphi) \cos(\alpha) - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{[III-9]}$$

Avec :

$$f(\varphi) \Rightarrow f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)}}$$

• **Equation de quantité de mouvement pour l'écoulement le long de la conduite :**

**i) Région poreuse**

$$\mu_{eff} \frac{\partial^2 W^p}{\partial y^2} - \frac{\mu_l}{K} W^p + g(\rho_l - \rho_v) \sin(\alpha) - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \text{[III-10]}$$

**ii) Région fluide**

$$\mu_l \frac{\partial^2 W^f}{\partial y^2} + g(\rho_l - \rho_v) \sin(\alpha) - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \text{[III-11]}$$

• **Equation d'énergie**

Compte tenu des hypothèses citées ci-dessus, les équations d'énergie régissant les deux régions poreux fluide s'écrivent :

**i) Région poreuse :**

$$\frac{\partial^2 T^p}{\partial y^2} = 0 \quad \text{[III-12]}$$

**ii) Région fluide :**

$$\frac{\partial^2 T^f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{[III-13]}$$

**L'expression du gradient de pression :**

Loin de la surface du tube, l'écoulement de la vapeur peut être supposé potentiel et de ce fait le gradient de pression du à l'écoulement est donnée par :

$$\frac{dPe}{dx} = -\rho_v Ue \frac{\partial Ue}{\partial x}$$

$$\text{Avec : } Ue = U_\infty (1+e) \cos(\alpha) \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)}}$$

le gradient de pression due à la tension superficielle est donnée par :

$$\frac{dPc}{dx} = \sigma \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(\theta)} \right)$$

Par conséquent le gradient de pression total est :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dPe}{dx} + \frac{dPc}{dx}$$

$$\frac{dP}{dx} = -\rho_l Ue \frac{\partial Ue}{\partial x} + \sigma \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(\theta)} \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{R(\theta)} \right) &= \frac{\sigma}{R^2(\theta)} \frac{\partial R(\theta)}{\partial x} \\ &= \frac{3}{2} g (\rho_l - \rho_v) \frac{F(\theta)}{B_0} \end{aligned}$$

$$\text{avec : } B_0 = g (\rho_l - \rho_v) \frac{R}{2\sigma}$$

$$F(\theta) = \frac{2}{3} \frac{R^2}{R^2(\theta)} \frac{dR(\theta)}{dx}$$

$$F(\theta) = \frac{2}{3} \frac{R^2}{R^2(\theta)} \frac{dR(\theta)}{dx} = \frac{e(1-e^2)\sin(2\theta)}{\pi^2 (\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta))^3} \left[ \int_0^\pi \sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)} d\theta \right]^2$$

### III.6. Equation donnant l'épaisseur du film liquide :

#### 1 .Tube elliptique sans une couche poreuse :

i. Bilan de masse :

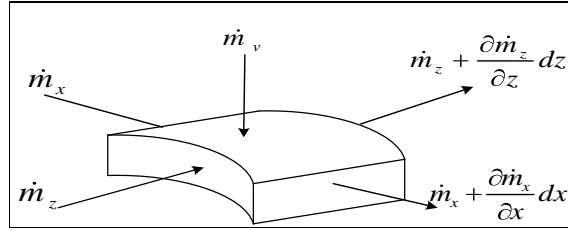


Figure III- 4 : Bilan de masse

$$\dot{m}_x dz + \dot{m}_z dx + \dot{m}_v dx dz = \dot{m}_{x+\Delta x} dz + \dot{m}_{z+\Delta z} dx \quad \text{[III-14]}$$

Avec :

$$\dot{m}_x = \int_0^{\delta} \rho_l U^f dy \quad \dot{m}_z = \int_0^{\delta} \rho_l W^f dy$$

Où

$\dot{m}_x, \dot{m}_z$  : débit (kg/s)

Et:

$\dot{m}_v$  : débit de la vapeur qui se condense par unité de surface (kg/s.m<sup>2</sup>)

D'où

$$\dot{m}_v = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho_l U^f dy + \frac{d}{dz} \int_0^{\delta} \rho_l W^f dy \quad \text{[III-15]}$$

ii. Bilan d'énergie :

$$\dot{m}_x h_x dz + \dot{m}_z h_z dx + \dot{m}_v h_v dx dz = \dot{m}_{x+\Delta x} h_{x+\Delta x} dz + \dot{m}_{z+\Delta z} h_{z+\Delta z} dx + k_l \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} dx dz \quad \text{[III-16]}$$

Avec :

$k_l \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$  : Flux de chaleur par unité de surface qui traverse la paroi

Et:

$$h_x = h_{liq} = h_l$$

$$h_v - h_l = h'_{fg} = h_{fg} + 0.68.c_p (T_{sat} - T)$$

$h_{fg}$  = chaleur latente de condensation.

L'équation [III-16] devient :

$$k_l \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\delta} \rho_l U^f h'_{fg} dy \right] + \frac{d}{dz} \left[ \int_0^{\delta} \rho_l W^f h'_{fg} dy \right] \quad \text{[III-17]}$$

## 2 .Tube elliptique couvert avec une couche poreuse

i. Bilan de masse :

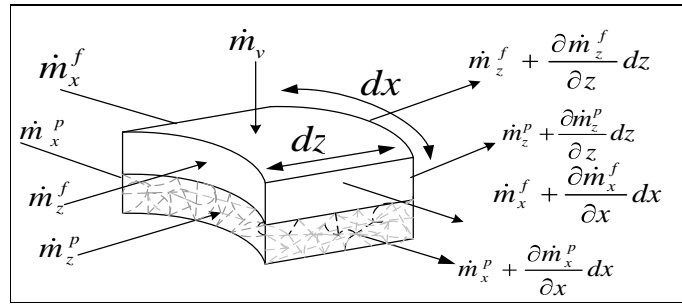


Figure III- 5 : Bilan de masse

$$\dot{m}_x^p dz + \dot{m}_x^f dz + \dot{m}_z^p dx + \dot{m}_z^f dx + \dot{m}_v dx dz = \dot{m}_{x+dx}^p dz + \dot{m}_{x+dx}^f dz + \dot{m}_{z+dz}^p dx + \dot{m}_{z+dz}^f dx \quad \text{[III-18]}$$

$$\text{Avec : } \dot{m}_x^p = \int_0^H \rho_l U^p dy \quad \dot{m}_z^p = \int_0^H \rho_l W^p dy$$

$$\dot{m}_x^f = \int_H^\delta \rho_l U^f dy \quad \dot{m}_z^f = \int_H^\delta \rho_l W^f dy$$

D'ou

$$\dot{m}_v = \frac{d}{dx} \int_0^H \rho_l U^p dy + \frac{d}{dx} \int_H^\delta \rho_l U^f dy + \frac{d}{dz} \int_0^H \rho_l W^p dy + \frac{d}{dz} \int_H^\delta \rho_l W^f dy \quad \text{[III-19]}$$

ii. Bilan d'énergie :

$$\dot{m}_x^p h_x^p dz + \dot{m}_x^f h_x^f dz + \dot{m}_z^p h_z^p dx + \dot{m}_z^f h_z^f dx + \Delta x \Delta z \dot{m}_v h_v = \dot{m}_{x+\Delta x}^p h_{x+\Delta x}^p dz$$

$$+ \dot{m}_{x+\Delta x}^f h_{x+\Delta x}^f dz + \dot{m}_{z+\Delta z}^p h_{z+\Delta z}^p dx + \dot{m}_{z+\Delta z}^f h_{z+\Delta z}^f dx + k_{eff} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \Delta x \Delta z \quad \text{[III-20]}$$

20]

Finalement l'équation [III-20] devient :

$$k_{eff} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H \rho_l U^p h'_{fg} dy + \int_H^\delta \rho_l U^p h'_{fg} dy \right] + \frac{d}{dz} \left[ \int_0^H \rho_l W^p h'_{fg} dy + \int_H^\delta \rho_l W^p h'_{fg} dy \right] \quad [\text{III-21}]$$

### III.7. Condition aux limites :

- La paroi

$$\begin{aligned} T^p &= T_w \\ U^p &= 0 \\ W^p &= 0 \end{aligned} \quad [\text{III-22}]$$

- L'interface poreux–fluide

$$\begin{aligned} U^p &= U^f \\ W^p &= W^f \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left( \mu_{eff} \frac{\partial U^p}{\partial y} \right)_{y=H} &= \left( \mu_l \frac{\partial U^f}{\partial y} \right)_{y=H} \\ \left( \mu_{eff} \frac{\partial W^p}{\partial y} \right)_{y=H} &= \left( \mu_l \frac{\partial W^f}{\partial y} \right)_{y=H} \end{aligned} \quad [\text{III-23}]$$

et :

$$\begin{aligned} T^p &= T^f \\ \left( k_{eff} \frac{\partial T^p}{\partial y} \right)_{y=H} &= \left( k_l \frac{\partial T^f}{\partial y} \right)_{y=H} \end{aligned}$$

- L'interface fluide – vapeur :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U^f}{\partial y} \right)_{y=\delta_x} &= \frac{\dot{m}}{\mu_l} (U_e - U_{i2}) \\ \left( \frac{\partial W^f}{\partial y} \right)_{y=\delta_x} &= \frac{\dot{m}}{\mu_l} (W_e - W_{i2}) \end{aligned} \quad [\text{III-24}]$$

Et

Et

$$T^f = T_{sat}$$

On néglige la vitesse d'interface  $U_{i2}, W_{i2}$  devant  $Ue, We$  respectivement.

avec :

$$\begin{aligned} Ue &= U_{\infty} (1+e) \cos(\alpha) \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)}}, \\ We &= U_{\infty} \sin(\alpha) \end{aligned} \quad \text{[III-25]}$$

### Calcul de la masse condensée :

$$\dot{m} h_{fg} = k_{eff} \left. \frac{\partial T^p}{\partial y} \right|_{y=0}$$

doù :

$$\dot{m} = \frac{k_{eff}}{h_{fg}} \left. \frac{\partial T^p}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \text{[III-26]}$$

## III.8. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE :

La mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes, en utilisant les grandeurs de références appropriées, permet de généraliser et de simplifier l'étude et de faire apparaître les nombres adimensionnels qui régissent l'écoulement.

on pose :

$$\begin{cases} \eta = \frac{y}{H} & \text{pour } 0 < y < H \text{ pour la région poreuse.} \\ \eta = 1 + \frac{y-H}{\delta-H} & \text{pour } H < y < \delta \text{ pour la région fluide.} \end{cases}$$

### III.8.1. LES EQUATIONS ADIMENSIONNELLES :

Après la mise sous forme adimensionnelle, les équations gouvernantes devient :

#### III.8.1.1. Equation de quantité mouvement :

- Equation de quantité de mouvement pour l'écoulement autour de la conduite :

- région poreuse :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \eta^2} - \frac{H^*}{Ru} U^* + \frac{Da H^*}{Ru} A(\theta, \alpha) = 0 \quad \text{[III-27]}$$

- région liquide :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \eta^2} + Da \Delta^* A(\theta, \alpha) = 0 \quad [\text{III-28}]$$

$$A(\theta, \alpha) = \frac{Gr}{Re} \cos(\alpha) \left[ f(\theta) + \frac{3}{2} \frac{F(\theta)}{B_0} \right] + \bar{\rho} Re(1+e) \cos^2(\alpha) f(\theta) \frac{\partial f(\theta)}{\partial x}$$

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)}}$$

- **Equation de quantité de mouvement pour l'écoulement le long du conduit :**

- région poreuse :

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} - \frac{H}{Ru} W^* + \frac{Da H}{Ru} B(\alpha) = 0 \quad [\text{III-29}]$$

- région liquide :

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} + Da \Delta^* B(\alpha) = 0 \quad [\text{III-30}]$$

avec :

$$B(\alpha) = \frac{Gr}{Re} \sin(\alpha)$$

### **III.8.1.2. Equation d'énergie :**

- région poreuse :

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} = 0 \quad [\text{III-31}]$$

- région liquide :

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} = 0 \quad [\text{III-32}]$$

**III.8.2. Condition aux limites :**

- pour  $x^* = 0$   $\frac{\partial U^*}{\partial x^*} = 0$  ,  $\frac{\partial \Delta^*}{\partial x^*} = 0$
- pour  $z^* = 0$   $U^* = 0$  ,  $W^* = 0$  ,  $\Delta^* = 0$  [III-33]
- à la paroi :  $\eta = 0$   $U^* = 0$  ,  $W^* = 0$  ,  $T^* = 0$
- à l'interface liquide-poreux :  $\eta = 1$

$$U^{*p} = U^{*f} , \quad \frac{R_u^* \Delta^*}{H^*} \frac{\partial U^{*p}}{\partial \eta} = \frac{\partial U^{*f}}{\partial \eta}$$

$$W^{*p} = W^{*f} , \quad \frac{R_u^* \Delta^*}{H^*} \frac{\partial W^{*p}}{\partial \eta} = \frac{\partial W^{*f}}{\partial \eta} \quad \text{[III-34]}$$

$$T^{*p} = T^{*f} , \quad \frac{Rc^* \Delta^*}{H^*} \frac{\partial T^{*p}}{\partial \eta} = \frac{\partial T^{*f}}{\partial \eta}$$

- à l'interface liquide-vapeur :  $\eta = 2$

$$\left. \frac{\partial W^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=2} = \frac{RcJa^*}{Pr^*} \frac{\Delta^*}{H^* + Rc^* \Delta^*} \left( W^{*e} - W^{*i\delta} \right) \quad \text{[III-35]}$$

$$\left. \frac{\partial U^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=2} = \frac{RcJa^*}{Pr^*} \frac{\Delta^*}{H^* + Rc^* \Delta^*} \left( U^{*e} - U^{*i\delta} \right)$$

On néglige  $U^{*i\delta}$  devant  $U^{*e}$  et  $W^{*i\delta}$  devant  $W^{*e}$  l'équation devient :

$$\left. \frac{\partial U^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=2} = \frac{RcJa^*}{Pr^*} \frac{\Delta^*}{H^* + Rc^* \Delta^*} U^{*e}$$

$$\left. \frac{\partial W^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=2} = \frac{RcJa^*}{Pr^*} \frac{\Delta^*}{H^* + Rc^* \Delta^*} W^{*e} \quad \text{[III-36]}$$

$$T^* = 1$$

- Relation de la conduite :  $\eta \longrightarrow 8$

$$U^* e = (1 + e) f(\varphi) = (1 + e) \frac{\sin(\theta) \cos(\alpha)}{\sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)}} \quad \text{[III-37]}$$

$$W^* e = \sin(\alpha)$$

### Calcul de la masse condensée :

$$\dot{m} = \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Da} H} \left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad \text{[III-38]}$$

### III.8.3 .EQUATION DU FILM LIQUIDE :

Après l'introduction des nombres adimensionnels l'équation de l'épaisseur du film liquide devient :

$$\begin{aligned} \frac{RcJa}{Pr Da H} \left. \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} &= H \int_0^1 \frac{\partial U^*}{\partial x^*} d\eta + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \Delta \int_1^2 U^* d\eta \right) + \\ &H \int_0^1 \frac{\partial W^*}{\partial z^*} d\eta + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \Delta \int_1^2 W^* d\eta \right) \end{aligned} \quad \text{[III-39]}$$

### **III.9. Calcul du nombre de Nusselt :**

Le nombre de Nusselt est une expression adimensionnelle du coefficient d'échange. Il permet de traduire les échanges de chaleur au niveau de la paroi.

Le nombre de Nusselt est donné par l'expression :

$$Nu_\phi = \frac{h.De}{2.k_l} \quad \text{[III-40]}$$

$h$  : coefficient d'échange de chaleur local par convection déduit en combinant le flux conductif et le flux convectif au niveau de l'interface paroi-milieu poreux.

D'où .

$$\left( k_{eff} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_{sat} - T_w) \right) \quad \text{[III-41]}$$

$$Nu_\phi = \frac{k_{eff}}{k_l} \frac{De/2}{(T_{sat} - T_w)} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

d'où:

$$Nu_\phi = \frac{Rc}{\sqrt{Da} H} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad \text{[III-42]}$$

### **III.10. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous présentons une formulation mathématique du phénomène de condensation sur une conduite de section elliptique couvert par une mince couche poreuse. En appliquant un bilan global d'énergie au film liquide nous avons trouvé une relation entre l'épaisseur du film liquide et les champs dynamiques et thermiques au sein du film liquide. Ensuite on a introduit les nombres adimensionnels afin de généraliser l'étude.

Le prochain chapitre sera consacré à la résolution des équations différentielles.

# CHAPITRE IV

## RESOLUTION ANALYTIQUE ET NUMERIQUE

## CHAPITRE IV

### RESOLUTION NUMERIQUE

#### IV.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons résoudre les équations gouvernantes obtenues dans le chapitre précédent. La résolution des équations se fera par la méthode analytique.

#### IV.2 Résolution des équations gouvernantes (autour de la conduite) :

##### IV.2.1 Équation de mouvement :

###### i. Région poreuse

$$\frac{\partial^2 U^{*p}}{\partial \eta^2} - \frac{H^{*2}}{Ru} U^{*p} + \frac{Da H^{*2}}{Ru} A(\alpha, \theta) = 0 \quad \text{[IV-1]}$$

Avec :

$$A(\theta, \alpha) = \frac{Gr}{Re} \cos(\alpha) \left[ f(\theta) + \frac{3}{2} \frac{F(\theta)}{B_0} \right] + \bar{\rho} Re(1+e) \cos^2(\alpha) f(\theta) \frac{\partial f(\theta)}{\partial x}$$

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)}}$$

C'est une équation différentielle de deuxième degré à second membre constant.

La solution analytique de cette équation différentielle [IV-1] est donnée par l'expression :

$$U^{*p} = U^{*p} \text{ (solution particulière)} + U^{*p} \text{ (solution homogène)}$$

###### ▪ solution homogène

$$\frac{\partial^2 U^{*p}}{\partial \eta^2} - \frac{H^{*2}}{Ru} U^{*p} = 0 \Rightarrow U^{*p} \text{ (homogène)} = C_1 \operatorname{ch} \left( \frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \eta \right) + C_2 \operatorname{sh} \left( \frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \eta \right)$$

###### ▪ solution particulière

$$U^{*p} \text{ (particulière)} = C^{ste} = Da^* A(\alpha, \theta)$$

alors :

$$U^{*p} = C_1 ch\left(\frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \eta\right) + C_2 sh\left(\frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \eta\right) + Da^* A(\alpha, \theta) \quad \text{[IV-2]}$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes à déterminer En utilisant les conditions limites données par [III-33] et [III-34]

Finalement :

$$U^{*p} = Da^* A(\alpha, \theta) \left(1 - ch\left(\frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \eta\right)\right) + \frac{sh\left(\frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \eta\right)}{sh\left(\frac{H^*}{\sqrt{Ru}}\right)} \left(U_{\text{int}}^* - Da^* A(\alpha, \theta) \left(1 - ch\left(\frac{H^*}{\sqrt{Ru}}\right)\right)\right) \quad \text{[IV-3]}$$

$U_{\text{int}}^*$  : La vitesse à l'interface poreux-fluide.

## ii. Région fluide

$$\frac{\partial^2 U^f}{\partial \eta^2} + Da \Delta^2 A(\alpha, \theta) = 0 \quad \text{[IV-4]}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial^2 U^f}{\partial \eta^2} = -Da \Delta^2 A(\theta, \alpha) \quad \text{[IV-5]}$$

La solution finale sera de la forme :

$$U^f = -Da \Delta^2 A(\theta, \alpha) \eta^2 + C_3 \eta + C_4 \quad \text{[IV-6]}$$

$k_1$  et  $k_2$  à déterminer à partir des conditions aux limites [III-34] et [III-35] :

Finalement l'équation [IV-6] devient :

$$U^{*f} = -Da \Delta^* A(\alpha, \theta) \left( \frac{\eta^2}{2} - 2\eta + \frac{3}{2} \right) + \frac{RcJa}{Pr} \frac{\Delta^*}{H + Rc \Delta^*} f(\theta)(\eta - 1) + U_{int}^* \quad [\text{IV-7}]$$

iii. **Détermination de la vitesse de l'interface couche poreuse-film liquide**  $U_{int}^*$

D'après la conditions [III-34] la vitesse a l'interface  $U_{int}^*$  sera donné par :

$$U_{int}^* = Da \Delta^* A(\alpha, \theta) \left[ \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Ru}} \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) f(\varphi) \frac{1}{H + Rc \Delta^*} \right. \\ \left. + Da A(\alpha, \theta) \left( \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \right) \right] \quad [\text{IV-8}]$$

Si on remplace la vitesse de l'interface ( $U_{int}^*$ ) dans les équations de vitesse de deux milieux [IV-3] et [IV-7], on aura

- **La vitesse dans la région poreuse**

$$U^{*p} = Da A(\alpha, \theta) \left( 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \eta \right) \right) + \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \eta \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right)} \left( Da \Delta^* A(\alpha, \theta) \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \right. \\ \left. + \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Ru}} \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) f(\varphi) \frac{1}{H + Rc \Delta^*} + Da A(\alpha, \theta) \left( \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \right) \right) \quad [\text{IV-9}]$$

- **La vitesse dans la région fluide**

$$\begin{aligned}
U^{*f} = & -Da \Delta^* A(\alpha, \theta) \left( \frac{\eta^2}{2} - 2\eta + \frac{3}{2} \right) + \frac{RcJa}{Pr} \frac{\Delta^*}{H + Rc \Delta^*} f(\theta)(\eta - 1) + \\
& Da \Delta^* A(\alpha, \theta) \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Ru}} \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) f(\varphi) \frac{1}{H + Rc \Delta^*} \\
& + Da A(\alpha, \theta) \left( \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \right)
\end{aligned} \quad \text{[IV-10]}$$

### **IV.3 Résolution des équations gouvernantes (le long de la conduite) :**

#### **IV.3.1 Équation de mouvement :**

##### **i. Région poreuse**

$$\frac{\partial^2 W^{*p}}{\partial \eta^2} - \frac{H}{Ru} W^{*p} + \frac{Da H}{Ru} B(\alpha) = 0 \quad \text{[IV-11]}$$

C'est une équation différentielle de deuxième degré à second membre constant,

La solution analytique de cette équation différentielle [IV-11] est donnée par l'expression :

$$W^{*p} = C_1 \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \eta \right) + C_2 \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \eta \right) + Da B(\alpha) \quad \text{[IV-12]}$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions

limites données par [III-33] et [III-34]

Finalement :

$$W^{*p} = Da B(\alpha) \left( 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \eta \right) \right) + \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \eta \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)} \left[ W_{\text{int}}^* - Da B(\alpha) \left( 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) \right) \right] \quad \text{[IV-13]}$$

Avec :

$$B(\alpha) = \frac{Gr}{Re} \sin(\alpha)$$

$W_{int}^*$  : La vitesse à l'interface poreux–fluide.

### Région fluide

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} + Da \Delta^2 B(\alpha) = 0 \quad [\text{IV-14}]$$

La solution finale sera de la forme :

$$W^* = -\frac{1}{2} Da \Delta^2 B(\alpha) \eta^2 + k_1 \eta + k_2 \quad [\text{IV-15}]$$

$k_1$  et  $k_2$  à déterminer à partir des conditions aux limites [III-35] et [III-36]

Finalement l'équation [IV-15] devient :

$$W^* = -Da \Delta^2 B(\alpha) \left( \frac{\eta^2}{2} - 2\eta + \frac{3}{2} \right) + \frac{RcJa}{Pr} \frac{\Delta^*}{H + Rc \Delta^*} \sin(\alpha) (\eta - 1) + W_{int}^* \quad [\text{IV-16}]$$

### iii. Détermination de la vitesse de l'interface couche poreuse-film liquide $W_{int}^*$

D'après la conditions [III-35] la vitesse à l'interface  $W_{int}^*$  sera donné par :

$$W_{int}^* = Da \Delta^2 B(\alpha) \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Ru}} \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \sin(\alpha) \frac{1}{H + Rc \Delta^*} + Da \Delta^2 B(\alpha) \left( \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \right) \quad [\text{IV-17}]$$

Si on remplace la vitesse de l'interface ( $W_{int}^*$ ) dans les équations de vitesse de deux milieux [IV-13] et [IV-16] on aura :

#### • La vitesse dans la région poreuse

$$W^* = Da \Delta^2 B(\alpha) \left( 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \eta \right) \right) + \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \eta \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)} \left( Da \Delta^2 B(\alpha) \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Ru}} \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \sin(\alpha) \frac{1}{H + Rc \Delta^*} + Da \Delta^2 B(\alpha) \left( \operatorname{tgh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \right) \right) \quad [\text{IV-18}]$$

#### • La vitesse dans la région fluide

$$\begin{aligned}
W^{*f} = & -Da^* \Delta^* B^*(\alpha) \left( \frac{\eta^2}{2} - 2\eta + \frac{3}{2} \right) + \frac{RcJa}{Pr} \frac{\Delta^*}{H + Rc \Delta^*} \sin(\alpha) (\eta - 1) + \\
& Da^* \Delta^* B^*(\alpha) \operatorname{tgh} \left( \frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \right) + \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Ru}} \operatorname{tgh} \left( \frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \right) \sin(\alpha) \frac{1}{H + Rc \Delta^*} \\
& + Da^* B^*(\alpha) \left( \operatorname{tgh} \left( \frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \right) + 1 - \operatorname{ch} \left( \frac{H^*}{\sqrt{Ru}} \right) \right)
\end{aligned} \quad \text{[IV-19]}$$

#### **IV-4. Equation d'énergie :**

##### **i. Région poreuse :**

D'après [III-30] on a :

$$\frac{\partial^2 T^{*p}}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{[IV-20]}$$

Après intégration, on aura :

$$T^{*p} = c_1 \eta + c_2$$

Ou :  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes a déterminer a partir des conditions aux limites(III-33) et (III-34) :

Le profil de température dans cette région sera :

$$T^{*p} = T_{\text{int}}^* \eta \quad \text{[IV-21]}$$

Avec :

$T_{\text{int}}^*$  : La température a l'interface (poreuse - fluide)

##### **ii. Région fluide**

D'après [III-30] on a

$$\frac{\partial^2 T^{*f}}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{[IV-22]}$$

Après intégration, on aura :

$$T^{*f} = c_1 \eta + c_2 \quad \text{[IV-23]}$$

Ou :  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes a déterminer a partir des conditions aux limites [III-34] et [III-35] :

Par conséquent, le profil de température dans cette région sera :

$$T^{*f} = \left(1 - T_{\text{int}}^*\right)\eta + 2T_{\text{int}}^* - 1 \quad \text{[IV-24]}$$

### iii. Détermination de la température de l'interface $\left(T_{\text{int}}^*\right)$

D'après la condition [III-34] la température à l'interface  $\left(T_{\text{int}}^*\right)$  sera donnée par l'expression :

$$T_{\text{int}}^* = \frac{H^*}{H^* + Rc \Delta^*} \quad \text{[IV-25]}$$

#### ▪ Calcul de la masse condensée :

$$\dot{m} = \frac{k_{\text{eff}}}{h_{fg}} \frac{\partial T^p}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

doù :

$$\dot{m} = \frac{k_{\text{eff}} (T_{\text{sat}} - T_w) \frac{\partial T^p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}}{h_{fg} \sqrt{Da} H^*} = \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Da}} \frac{T_{\text{int}}^*}{H^*}$$

en remplace  $T_{\text{int}}^*$  par sa valeur on aura :

$$\dot{m} = \frac{RcJa}{Pr \sqrt{Da}} \frac{1}{H^* + Rc \Delta^*}$$

### IV.5. Equation de l'épaisseur du film liquide :

$$\frac{RcJa}{Pr Da H^*} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = H^* \int_0^1 \frac{\partial U^*}{\partial x} d\eta + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta^* \int_1^2 U^{*f} d\eta \right) + \quad \text{[IV-28]}$$

$$H^* \int_0^1 \frac{\partial W^*}{\partial z} d\eta + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta^* \int_1^2 W^{*f} d\eta \right)$$

En remplaçant (IV- 9), (IV-10), (IV-18)et(IV-19) dans l'équation de l'épaisseur du film (IV-28), après l'intégration et l'introduction des nombres adimensionnelles l'équation de film liquide prend la forme suivant :

$$1 = \left( \alpha_0 + \alpha_1 \Delta + \alpha_2 \Delta^2 + \alpha_3 \Delta^3 + \alpha_4 \Delta^4 \right) + \left( \beta_0 + \beta_1 \Delta + \beta_2 \Delta^2 + \beta_3 \Delta^3 \right) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{D}{2L} \left( \gamma_0 + \gamma_1 \Delta + \gamma_2 \Delta^2 + \gamma_3 \Delta^3 \right) \frac{\partial \Delta}{\partial z}$$

C'est une équation différentielle non linéaire dont l'inconnue est :  $\Delta = \delta - H$ .

$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , Sont des coefficients dépendant des caractéristiques de la couche poreuse et des nombres adimensionnels de Prandth (Pr), Reynolds (Re), Grashof (Gr), Jacob (Ja) et Darcy (Da).

Avec :

$$\alpha_0 = \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{Re} Ja} \frac{\partial A(\theta, \alpha)}{\partial x} \left( H - \sqrt{Rv} \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) \right) H +$$

$$\sqrt{Rv} \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{Re} Ja} \frac{\partial A(\theta, \alpha)}{\partial x} \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) - 1}{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)} \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) H +$$

$$(1 + e) \text{Re} Da \cos(\alpha) \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) - 1}{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)} \frac{\partial f(\theta)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = & \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{RcJa}} \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x} \left( H - \sqrt{Rv} \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) \right) \text{Rc} + \\
& \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{RcJa}} \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x} \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) - 1}{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)} H + \\
& \sqrt{Rv} \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{Ja}} \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x} \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) - 1}{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)} \operatorname{sh} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) + \\
& Rv \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{RcJa}} A_1 \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x} H \\
& + \operatorname{Re} Da (1 + e) \cos(\alpha) \frac{\partial f(\theta)}{\partial x} \operatorname{Th} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = & \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{RcJa}} \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x} \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) - 1}{\operatorname{ch} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right)} \left( \text{Rc} + \sqrt{Rv} H \operatorname{Th} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) \right) + \\
& Rv \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{Ja}} \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x} A_1
\end{aligned}$$

$$\alpha_3 = \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{RcJa}} \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x} \left[ \frac{H}{3} + \sqrt{Rv} \operatorname{Rc} \operatorname{Th} \left( \frac{H}{\sqrt{Rv}} \right) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{3} \frac{\text{Pr} Da^2}{\text{RcJa}} \frac{\partial A^*(\theta, \alpha)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{\text{Pr } Da^2}{RcJa} A(\theta, \alpha) H \frac{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right) - 1}{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right)} + \\
&\quad (1+e)\text{Re } Da \cos(\alpha) f(\theta) \frac{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right) - 1}{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right)} \frac{-Rc}{H + Rc \Delta} + \\
&\quad Rv \frac{\text{Pr } Da^2}{RcJa} A(\theta, \alpha) H A_1 + \\
&\quad (1+e)\text{Re } Da \cos(\alpha) f(\theta) Th \left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right) \\
\beta_1 &= \frac{\text{Pr } Da^2}{Ja} A(\theta, \alpha) \frac{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right) - 1}{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right)} + 2\sqrt{Rv} \frac{\text{Pr } Da^2}{RcJa} A(\theta, \alpha) H Th \left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right) + \\
&\quad Rv \frac{\text{Pr } Da^2}{Ja} A(\theta, \alpha) A_1 + (1+e)\text{Re } Da \cos(\alpha) f(\theta) \left(1 - Th \left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right) \frac{Rc}{H + Rc \Delta}\right) \\
\beta_2 &= \frac{\text{Pr } Da^2}{RcJa} A(\theta, \alpha) \left( H + 2\sqrt{Rv} Rc Th \left(\frac{H}{\sqrt{Rv}}\right) \right) \\
&\quad + \frac{(1+e)\text{Re } Da}{2} \cos(\alpha) f(\theta) \frac{-Rc}{H + Rc \Delta} \\
\beta_3 &= \frac{\text{Pr } Da^2}{Ja} A(\theta, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\gamma_0 = \frac{\text{Pr} Da^2}{RcJa} B(\alpha) H \frac{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Ru}}\right) - 1}{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Ru}}\right)} - \text{Re} Da \sin(\alpha) \frac{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Ru}}\right) - 1}{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Ru}}\right)} \frac{Rc}{H + Rc \Delta} + Ru \frac{\text{Pr} Da^2}{RcJa} B(\alpha) H A_1 + \text{Re} Da \sin(\alpha) Th \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right)$$

$$\gamma_1 = \frac{\text{Pr} Da^2}{RcJa} B(\alpha) \left( Rc \frac{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Ru}}\right) - 1}{\text{ch}\left(\frac{H}{\sqrt{Ru}}\right)} + 2\sqrt{Ru} Rc Th \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) + Rc Ru A_1 \right) + \text{Re} Da \sin(\alpha) \left( 1 - Th \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \frac{Rc}{H + Rc \Delta} \right)$$

$$\gamma_2 = \frac{\text{Pr} Da^2}{RcJa} B(\alpha) \left( H + 2\sqrt{Ru} Rc Th \left( \frac{H}{\sqrt{Ru}} \right) \right) - \frac{\text{Re} Da}{2} \sin(\alpha) \frac{Rc}{H + Rc \Delta}$$

$$\gamma_3 = \frac{\text{Pr} Da^2}{RcJa} B(\alpha) Rc$$

La méthode numérique de Runge Kutta d'ordre 4 a été choisie pour la résolution de cette équation. La première valeur pour le départ de l'algorithme de Runge Kutta est calculée par la méthode de Newton

Le coefficient de transfert de chaleur représenté par le nombre de Nusselt local est calculé comme suit

$$Nu_\theta = \frac{Rc}{\sqrt{Da} H} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{y=0} \Rightarrow Nu_\theta = \frac{Rc}{\tilde{H} + Rc \tilde{\Delta}}$$

Le nombre de Nusselt moyen est donnée par :

$$Nu_{moy} = 2 \times \frac{\int_0^L \int_0^\pi Nu_\theta d\theta dz}{\int_0^L \int_0^\pi a \sqrt{\sin^2(\theta) + e^2 \cos^2(\theta)} d\theta dz}$$

### **IV.5 Conclusion :**

La résolution des équations différentielles du second degré du champ de vitesse et du champ de température dans les deux zones (couche poreuse et film liquide) a été faite analytiquement, tandis que pour calculer l'épaisseur du film liquide ainsi que le coefficient d'échange thermique nous avons fait appel à des méthodes de résolution numérique. (Runge Kutta d'ordre 4 et la méthode des trapèzes).

Les résultats obtenus seront représentés et interprétés dans le prochain chapitre.

# CHAPITRE V

## RESULTATS ET INTERPRETATIONS

## CHAPITRE V RESULTATS ET INTERPRETATIONS

### INTRODUCTION :

Dans ce chapitre nous allons mettre en évidence l'influence de l'épaisseur de la couche poreuse  $H^*$ , ainsi que sa perméabilité représentée par le nombre de Darcy (Da) et sa conductivité thermique qui est représentée par le rapport (Rc) sur l'évolution de l'épaisseur du film liquide et du nombre de Nusselt. Nous étudions aussi l'influence de l'excentricité (e) de la section du tube et l'inclinaison (a) du tube par rapport à l'horizontal en considérant trois différents modes de convection selon la valeur du rapport  $F = \frac{Gr}{Re^2}$ .

### V.1 Validation du modèle :

Sur la figure 1, nous avons comparé les résultats, concernant l'épaisseur du film de condensat, donnés par notre modèle pour le cas d'un tube lisse (sans couche poreuse) avec ceux de Mosaad [7b] pour deux cas différents, celui d'un tube cylindrique (e=1) et celui d'un tube de section elliptique (e=0.6). Les trois modes de convection (Convection libre, mixte et forcée) ont été considérés. Nous observons d'après cette figure une assez bonne concordance entre les deux modèles surtout pour le cas du cylindre pour le cas de la convection libre (F=10) et le cas de la convection mixte (F=1). Dans le cas de la convection forcée (F=0.1), la différence peut être attribuée au fait que le modèle de Mosaad ne prend pas en compte l'effet du gradient de pression externe.

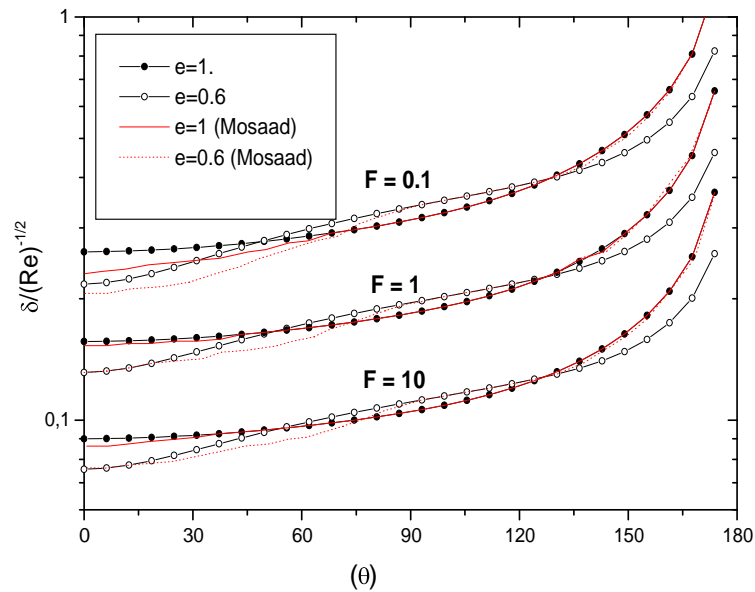


Figure 1 comparaison avec le modèle de Mosaad [5b]

## V.2 Influence de l'épaisseur de la couche poreuse $H^*$ :

Les figures (2,3,4,5), représentent l'influence de l'épaisseur de la couche poreuse sur l'épaisseur locale du film liquide et sur le coefficient local de transfert de chaleur représenté par le nombre de Nusselt local. Les résultats sont obtenus pour les paramètres suivants :

Nombre de Darcy constant ( $Da=10^{-3}$  et  $Da=10^{-6}$ )

Une excentricité constante ( $e=1$ , cas du tube cylindrique)

Le tube est placé horizontalement ( $a=0$ )

Mode de convection libre ( $F=10$ )

Rapport de conductivités ( $Rc=5$ ).

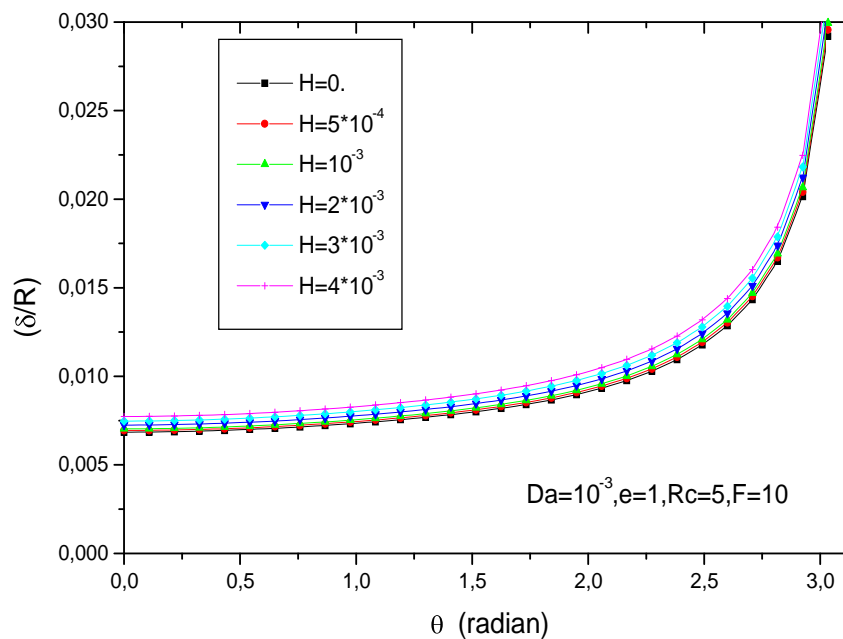
Sur la figure (2 et 4), nous observons que l'augmentation de l'épaisseur de la couche poreuse entraîne une augmentation de l'épaisseur locale du film de condensat. Par ailleurs cette augmentation est plus notable pour une perméabilité faible ( $Da=10^{-6}$ ). Nous remarquons aussi que le film liquide est plus épais avec la couche poreuse comparativement au tube lisse ( $H=0$ ).

Sur les figures (3 et 5), nous observons que l'augmentation de l'épaisseur de la couche poreuse entraîne une augmentation du coefficient de transfert de chaleur local représenté par le nombre de Nusselt. Le coefficient de transfert de chaleur local pour une épaisseur donnée est plus élevé que celui du tube lisse en tout point de la section du tube.

En comparant les coefficient de transfert de chaleur moyen avec et sans présence de la couche poreuse (figure 6), nous constatons que pour une perméabilité faible ( $Da=10^{-6}$ ), l'existence d'une épaisseur

optimale ( $H^* = 0.0016$ ) pour laquelle le coefficient de transfert de chaleur est maximal pour les trois modes de convection libre, mixte et forcée. Ce résultat est qualitativement en accord avec celui de Renken et al.[20] (cas d'une plaque plane) pour le mode de convection naturelle. Une amélioration de 6 % et de 10%, par rapport au cas d'un tube lisse, est observée respectivement pour le mode de convection libre et le mode de convection forcée.

Dans le cas d'une perméabilité assez élevée ( $Da=10^{-3}$ ), l'amélioration du transfert de chaleur est observée pour les trois modes de convection (figure 7) ; elle est plus notable pour le mode de convection forcée et qui peut atteindre 90% pour une épaisseur  $H^* = 0.005$ . Pour le cas de perméabilité élevée, nous n'observons pas d'épaisseur optimale pour laquelle le coefficient de transfert de chaleur est maximal.



**Figure 2 : Variation locale de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse ( $Da=10^{-3}$ )**

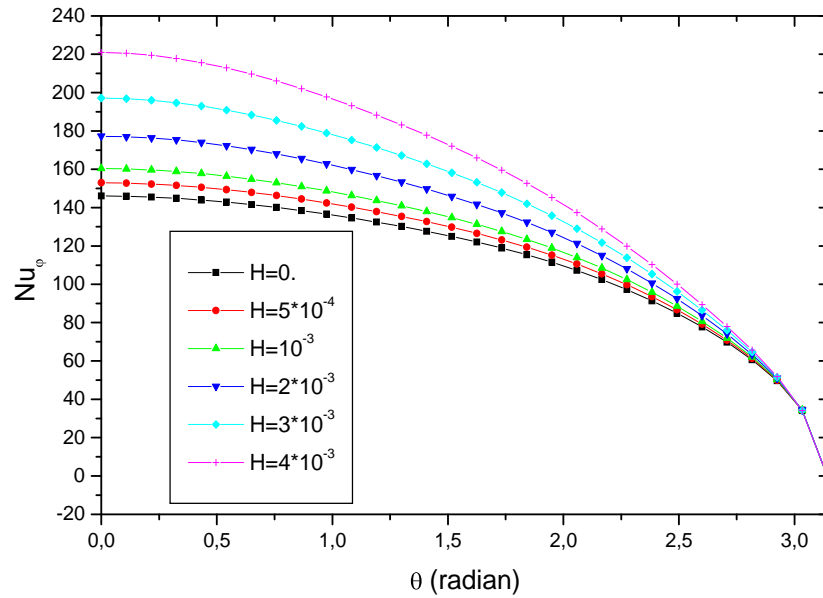


Figure 3 : Variation locale du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse ( $Da=10^{-3}$ )

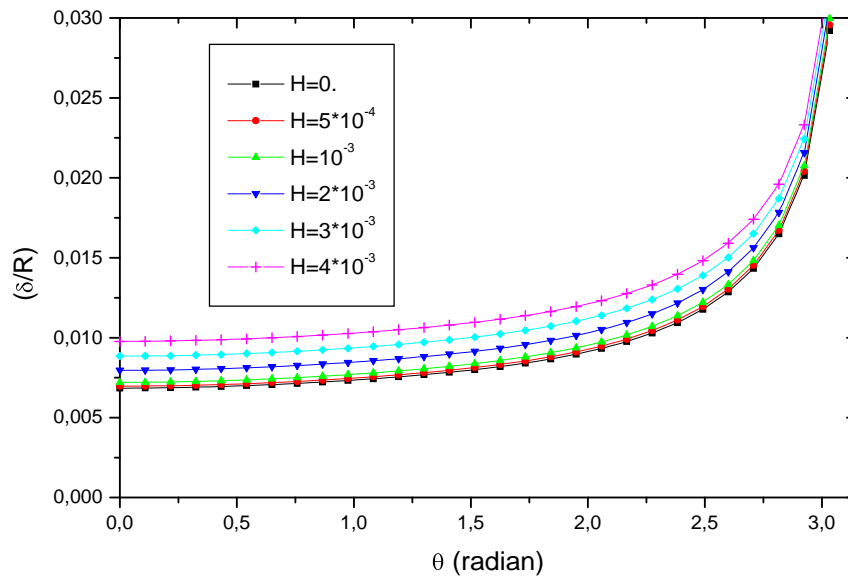


Figure 4 : Variation locale de l'épaisseur du film liquide en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse ( $Da=10^{-6}$ )

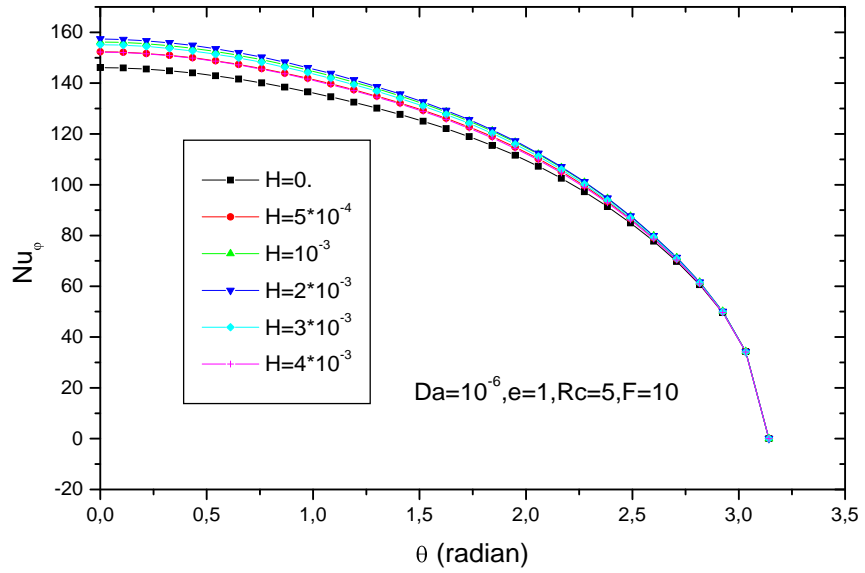


Figure 5: Variation locale du nombre de Nusselt en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse ( $Da=10^{-6}$ )

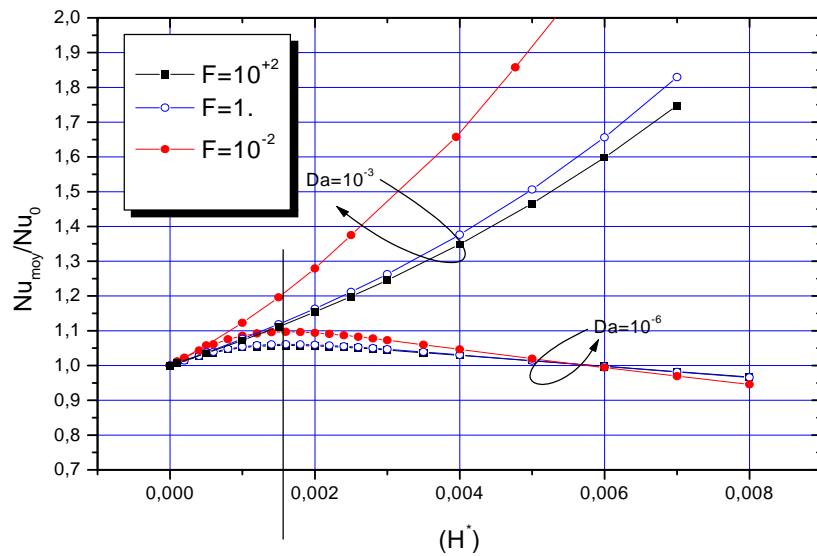


Figure 6: Variation du nombre de Nusselt Moyen en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse pour les trois modes de convection

## V.2 Influence du nombre de Darcy (Da) :

L'effet du nombre de Darcy en maintenant la couche poreuse à une épaisseur constante ( $H^* = 4.10^{-3}$ ) et pour une excentricité constante ( $e=1$ , cas du tube cylindrique) est illustré sur les figures (7,8, 9, 10, 11,12,13) pour différents modes de convection.

Nous constatons que l'épaisseur du film liquide augmente de façon monotone en fonction de la position angulaire indépendamment de la perméabilité de la couche poreuse et du mode de convection (libre, mixte ou forcée) (figures : 7,9,11). Lorsque la perméabilité est assez élevée ( $Da=10^{-3}$ ) le film de condensat s'écoule plus facilement dans la couche poreuse ce qui entraîne une épaisseur du film plus mince comparativement au cas où la couche poreuse est très peu perméable ( $Da=10^{-6}$ ).

Pour une perméabilité donnée ( $Da=10^{-3}$  ou  $Da=10^{-6}$ ), nous constatons que l'épaisseur du film liquide la plus mince est obtenue pour le mode de convection forcée due à l'effet de la contrainte appliquée sur l'interface liquide-vapeur (cas similaire sans la présence de la couche poreuse [5a, 5b]).

En effet lorsqu'on fait diminuer la perméabilité de la couche poreuse ( le nombre Da diminue) , celle ci offre une résistance plus accrue à l'écoulement du condensat ce qui entraîne une accumulation du liquide et fait augmenter son épaisseur comme on le voit sur la figure 7a où nous avons tracé le profil de vitesse du film de condensat dans la couche poreuse et dans la région fluide pour la position angulaire  $\theta=90^\circ$ . Cependant nous **remarquons que** la perméabilité de la couche poreuse n'a aucune influence sur le profil de température (Cf. figure 8a) puisque les champs dynamique et thermique sont découplés.

L'épaississement du film liquide lorsque la perméabilité diminue fait augmenter la résistance thermique du film liquide et comme le coefficient de transfert de chaleur local est inversement proportionnel à l'épaisseur du film liquide, il s'ensuit que le transfert de chaleur est amélioré lorsqu'on fait augmenter la perméabilité de la couche poreuse et ceci indépendamment du mode de convection (cf. figures : 8,10,12).

En comparant les coefficients de transfert de chaleur moyen représenté par les nombres de Nusselt moyens en fonction de la perméabilité de la couche poreuse (figure 13) pour le cas du cylindre et pour une épaisseur de la couche poreuse constante, nous constatons une amélioration du transfert de chaleur pour une perméabilité assez élevée ( $Da=10^{-3}$ ). Cette amélioration est plus notable lorsque le mode convection est forcé.

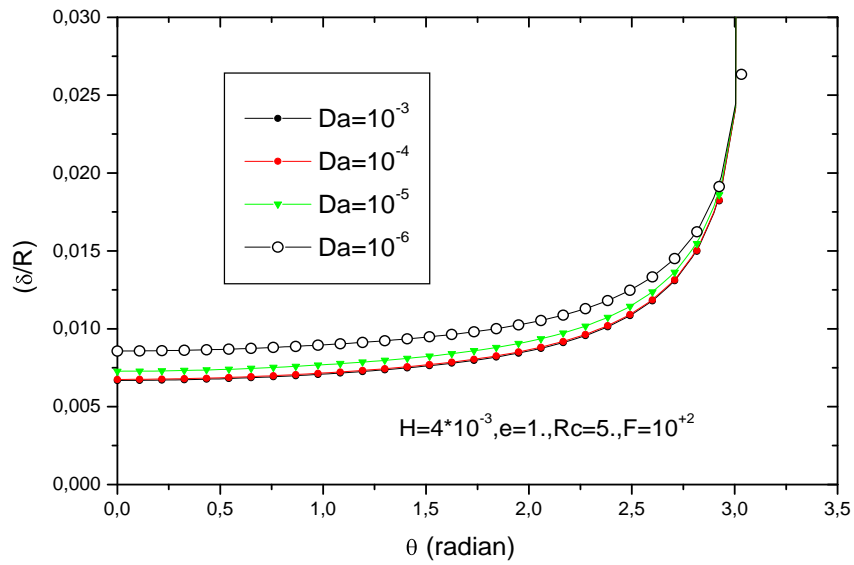


Figure 7: Variation locale de l'épaisseur du film liquide pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection libre)

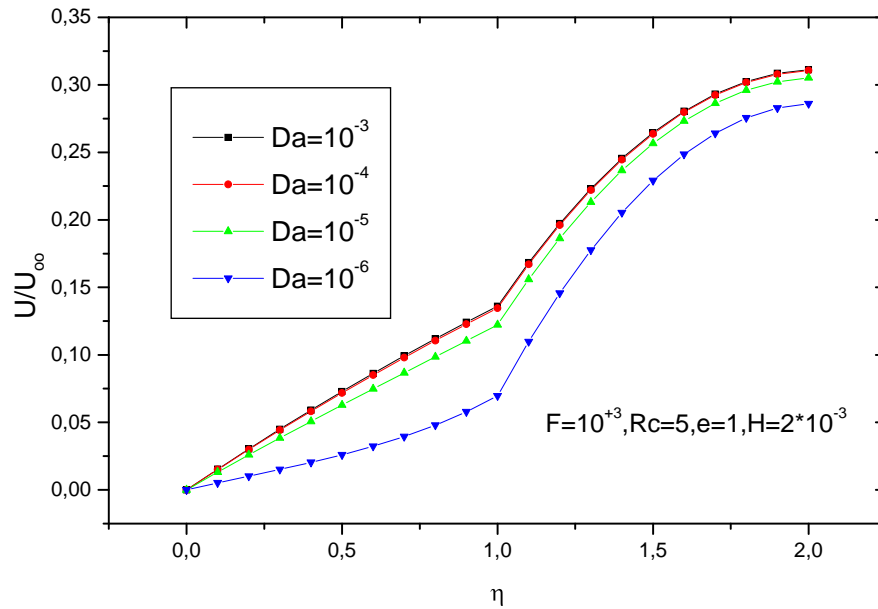


Figure 7a : Profil de vitesse du film liquide pour la position angulaire  $\theta=90^\circ$  pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection libre)

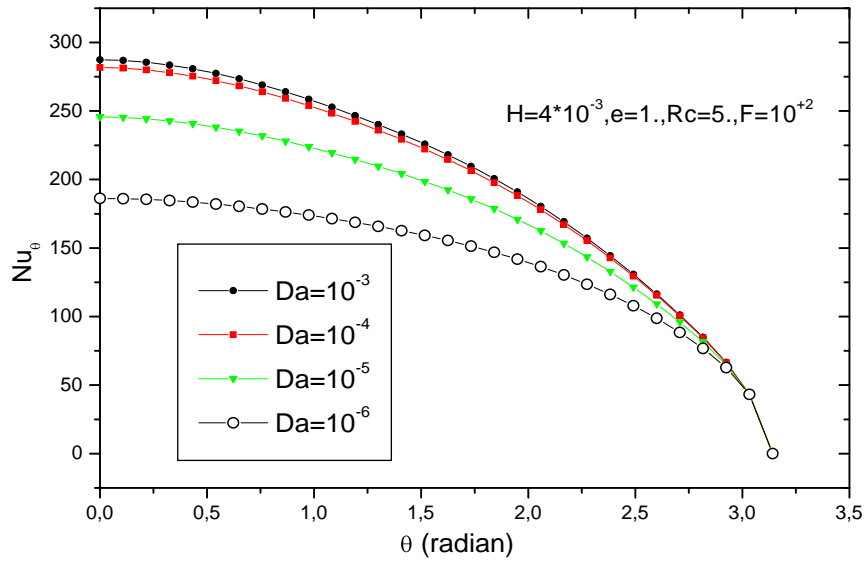


Figure 8 : Variation locale du nombre de Nusselt local pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection libre)

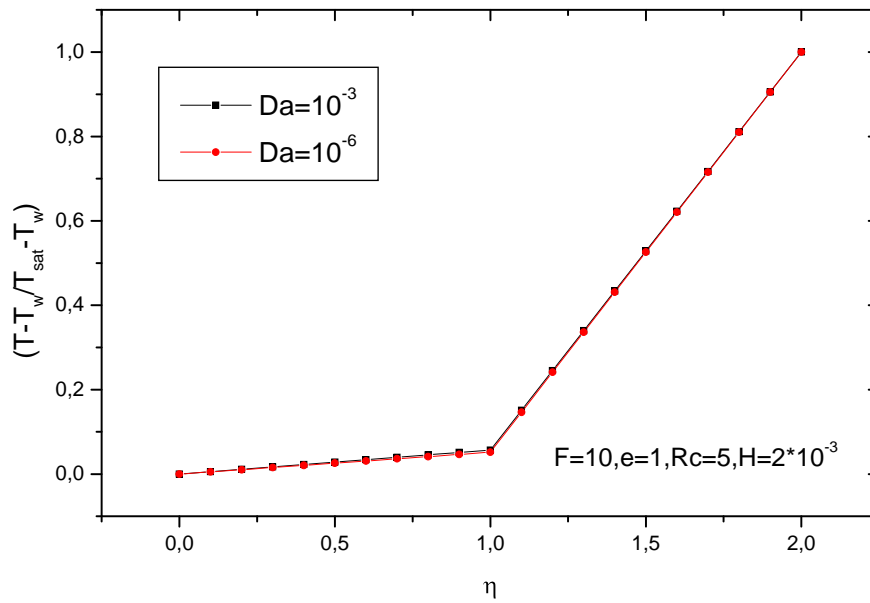
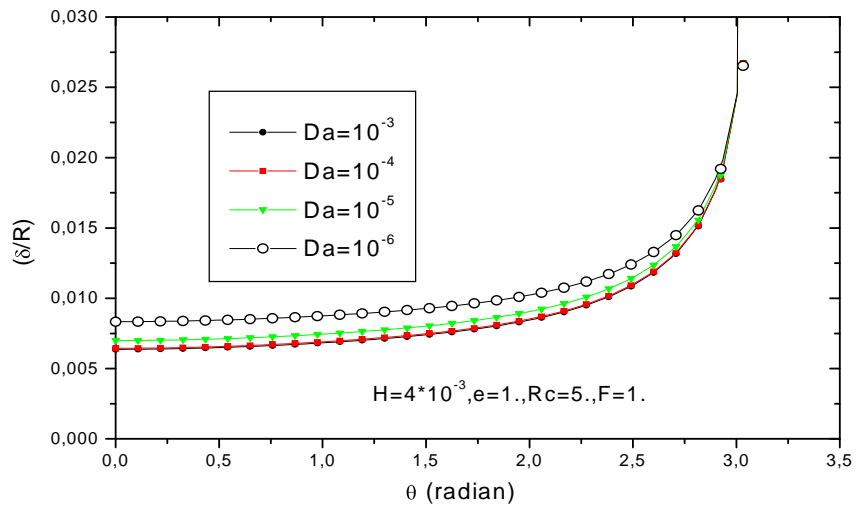
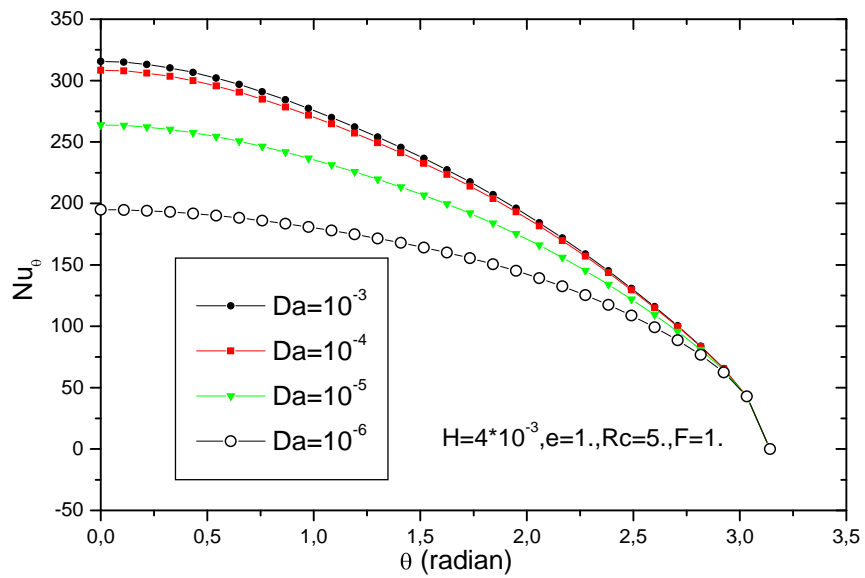


Figure 8a : Profil de température du film liquide pour la position angulaire  $\theta=90^\circ$  pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection libre)



**Figure 9 : Variation locale de l'épaisseur du film liquide pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection mixte)**



**Figure 10 : Variation locale du nombre de Nusselt local pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection mixte)**

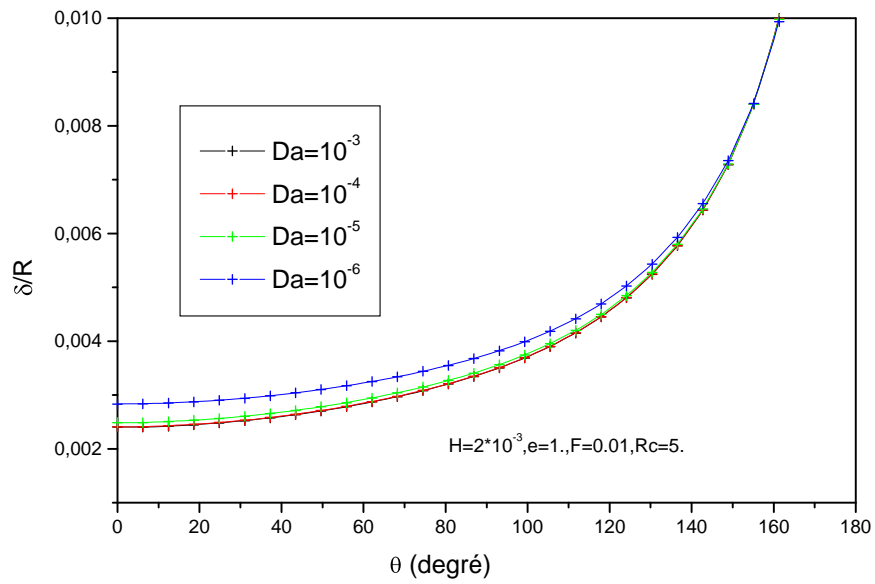


Figure 11 : Variation locale de l'épaisseur du film liquide pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection forcée)

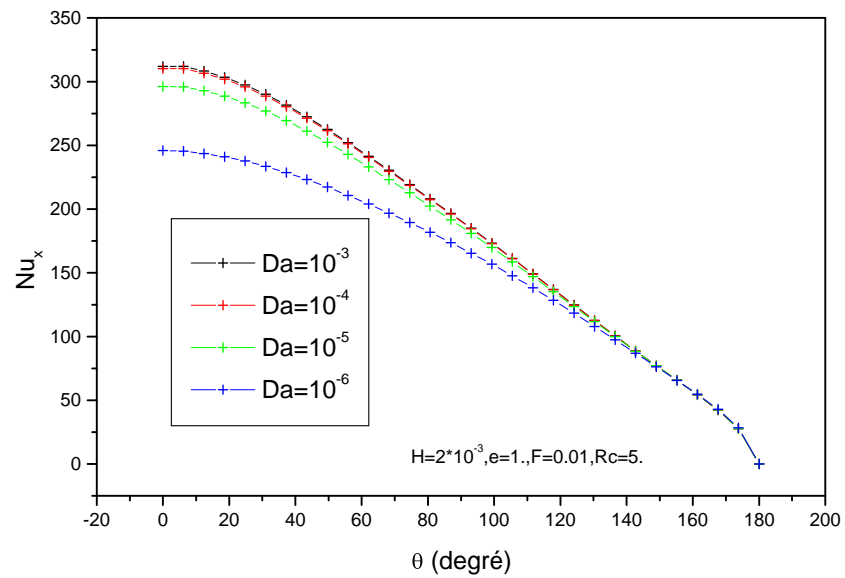
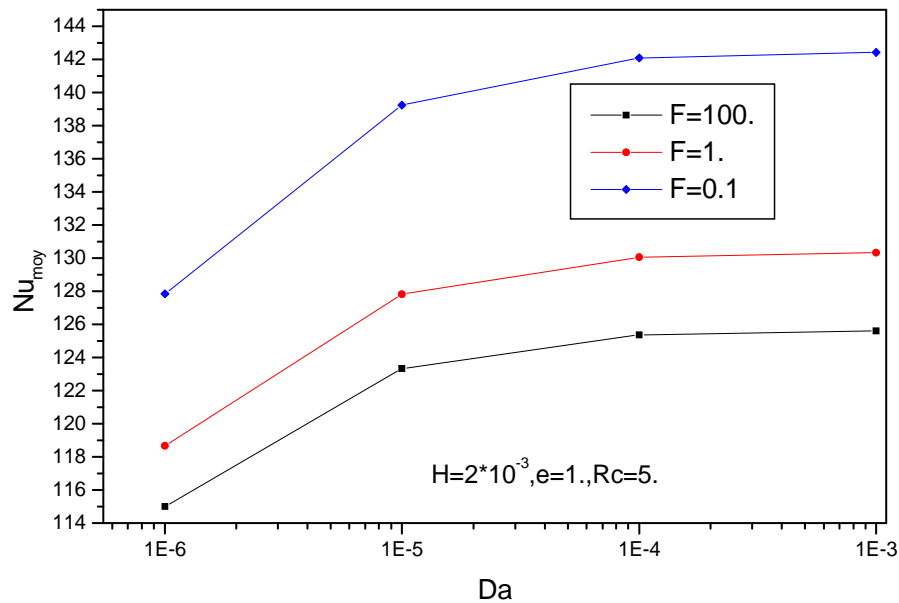


Figure 12 : Variation locale du nombre de Nusselt local pour différents nombre de Darcy ( Mode de convection forcée)



**Figure 13 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy pour les trois modes de convection**

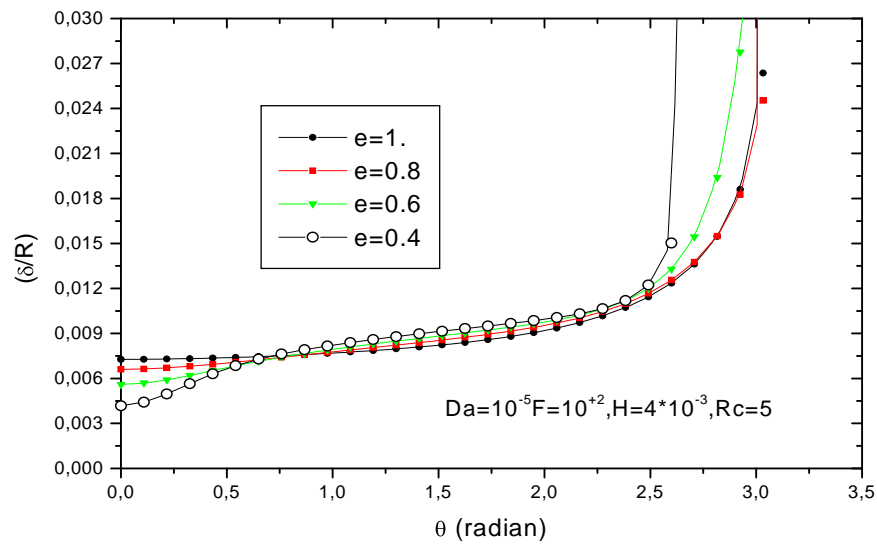
### V.3 Influence de l'excentricité (e) :

L'effet de l'excentricité de la conduite elliptique sur l'épaisseur du film liquide ainsi que sur le coefficient de transfert thermique local représenté par le nombre de Nusselt local est illustré sur les figures(14,15,16).

L'épaisseur du film liquide est une fonction monotone en fonction de la position angulaire  $\theta$ . Au sommet du tube le film liquide s'amincit lorsqu'on fait diminuer l'excentricité de la section du tube (figure: 14). En effet lorsqu'on fait diminuer l'excentricité du tube le film de condensat s'écoule plus facilement comme on le voit sur la figure 14a qui montre le profil de vitesse du film de condensat dans la couche poreuse et dans la région fluide pour la position angulaire  $\theta=90^\circ$ . Cependant l'excentricité n'a aucune influence sur le profil de température (Cf. figure 15a) puisque les champs dynamique et thermique sont découplés.

L'amincissement du film liquide lorsque l'excentricité diminue fait diminuer la résistance thermique du film liquide et comme le coefficient de transfert de chaleur est inversement proportionnel à l'épaisseur du film liquide, il s'ensuit que le transfert de chaleur est amélioré lorsqu'on fait diminuer l'excentricité (figure :15).

Pour le mode de convection libre (figure : 16), on peut remarquer qu'en diminuant l'excentricité de la conduite le transfert thermique augmente c'est-à-dire que le transfert de chaleur autour d'une conduite elliptique d'excentricité faible est plus important qu'une conduite de section cylindrique. Pour une perméabilité assez élevée ( $Da=10^{-3}$ ), cette augmentation se fait proportionnellement à l'augmentation de l'épaisseur de la couche poreuse. Pour une perméabilité faible ( $Da=10^{-6}$ ), nous observons l'existence d'une épaisseur optimale de la couche poreuse ( $H^* = 0.0016$ ), indépendante de la valeur de l'excentricité, et pour laquelle le coefficient de chaleur est maximal.



**Figure 14 : Variation locale de l'épaisseur du film liquide pour différentes excentricités**

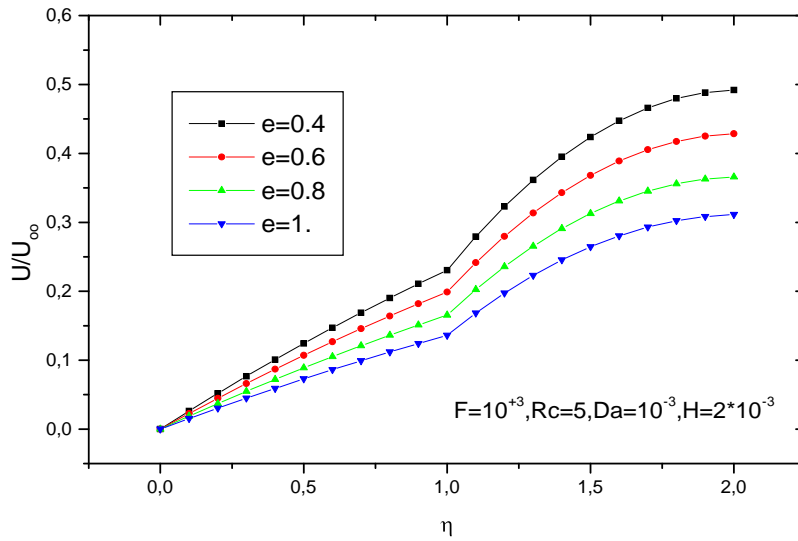


Figure 14a : Profil de vitesse du film liquide pour la position angulaire  $\theta=90^\circ$  pour différentes excentricités

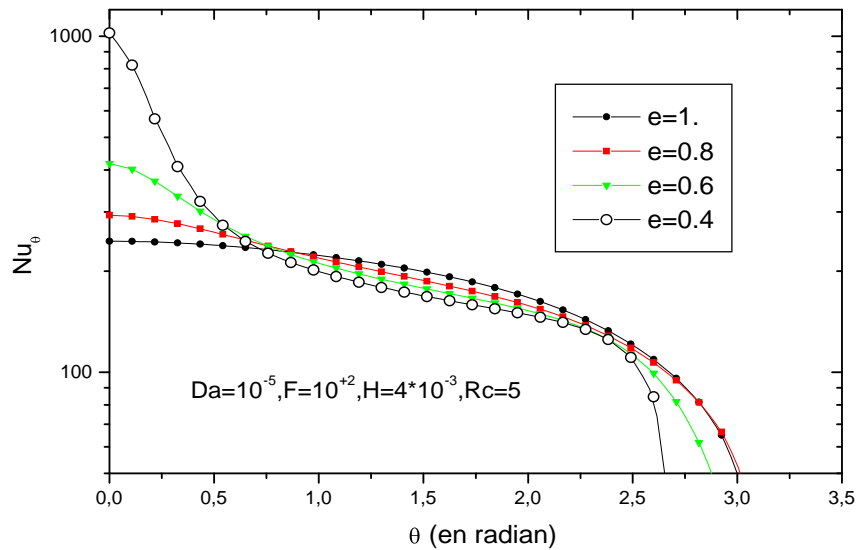


Figure 15 : Variation locale du nombre de Nusselt local pour différentes excentricités

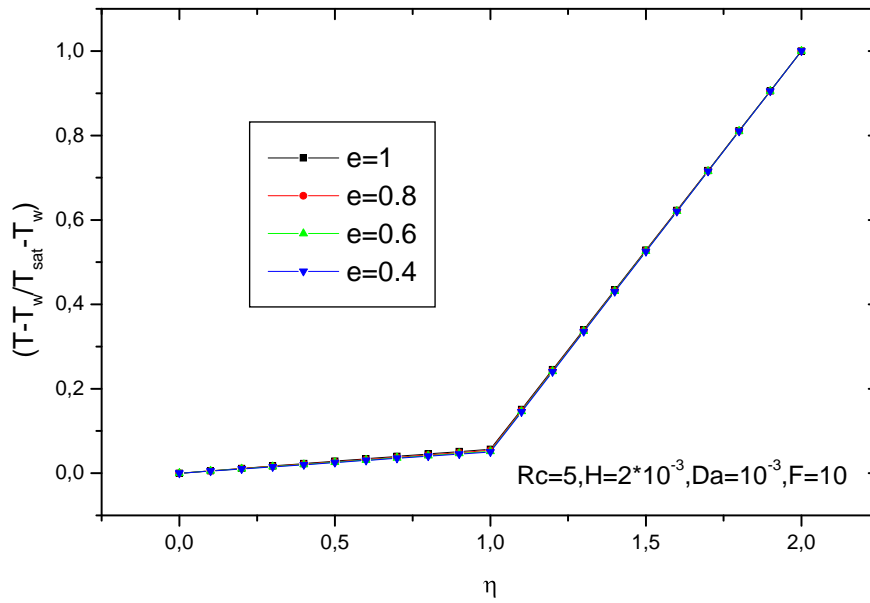


Figure 15a : Profil de température du film liquide pour la position angulaire  $\theta=90^\circ$  pour différentes excentricités

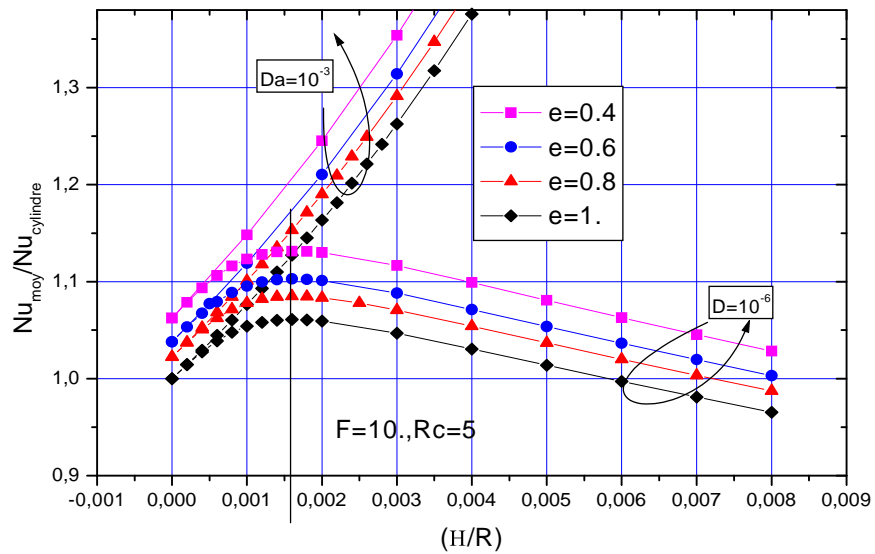


Figure 16 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'épaisseur de la couche poreuse pour différentes excentricités (Mode de convection libre)

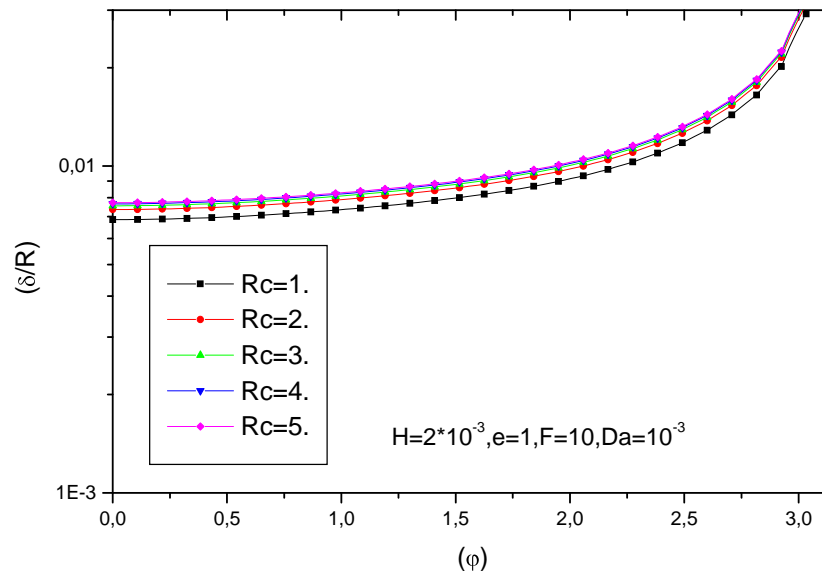
## V.4 Influence de rapport de conductivité Rc

L'effet de la conductivité thermique de la couche poreuse sur l'épaisseur du film liquide ainsi que sur le coefficient de transfert thermique local représenté par le nombre de Nusselt local est illustré sur les figures(17,18,19,20). Les résultats sont obtenus pour un tube cylindrique horizontal couvert d'une couche poreuse d'épaisseur  $H/R=4*10^{-3}$

Sur la figure 17, nous observons que l'augmentation du rapport des conductivités thermiques entraîne une légère augmentation de l'épaisseur locale du film de condensat. Comme le coefficient de transfert de chaleur est inversement proportionnel à l'épaisseur du film, il s'ensuit qu'une augmentation de la conductivité thermique de la couche poreuse entraîne une augmentation du coefficient de transfert de chaleur local représenté par le nombre de Nusselt (cf. figure 18).

En comparant avec le cas d'un tube lisse (sans couche poreuse), nous observons sur la figure 19, que la perméabilité de la couche poreuse a une grande influence sur l'augmentation du coefficient de transfert de chaleur moyen. Par contre sur la figure 20, nous observons que l'excentricité du tube présente une nette influence sur l'augmentation du nombre de Nusselt moyen.

Sur la figure 21 nous observons que l'amélioration du transfert de chaleur est plus notable lorsque le mode convection est forcé.



**Figure 17 : Variation locale de l'épaisseur du film liquide pour différents rapports de conductivités thermiques**

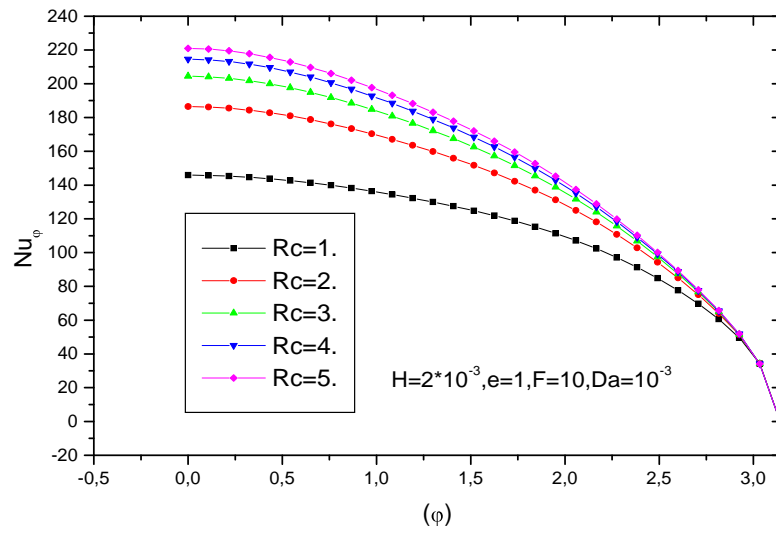


Figure 18 : Variation locale du nombre de Nusselt local pour différents rapports de conductivités thermiques

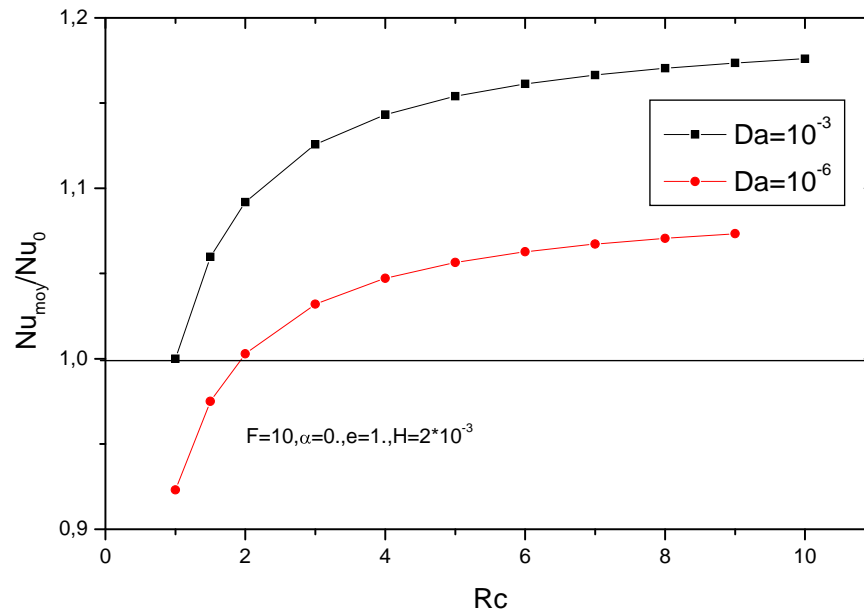


Figure 19 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport de conductivités thermiques pour différentes perméabilités (Mode de convection libre)

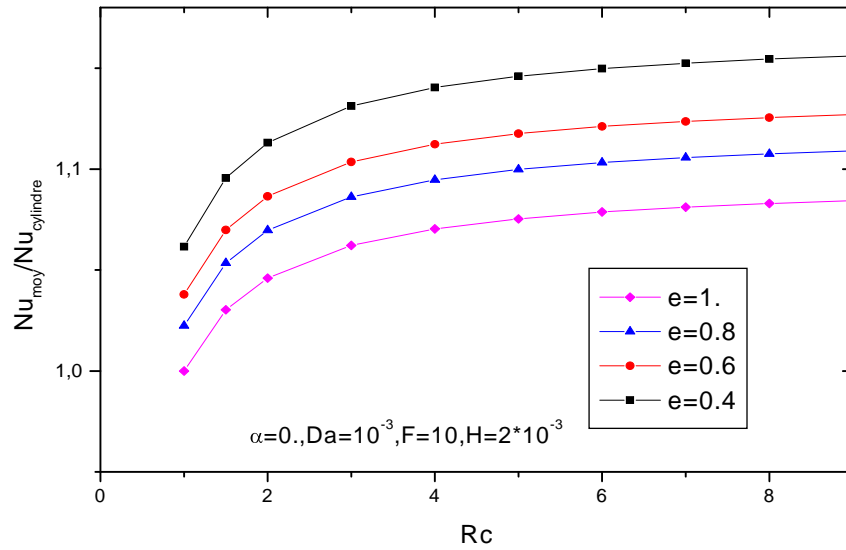


Figure 20 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport de conductivités thermiques pour différentes excentricités (Mode de convection libre)

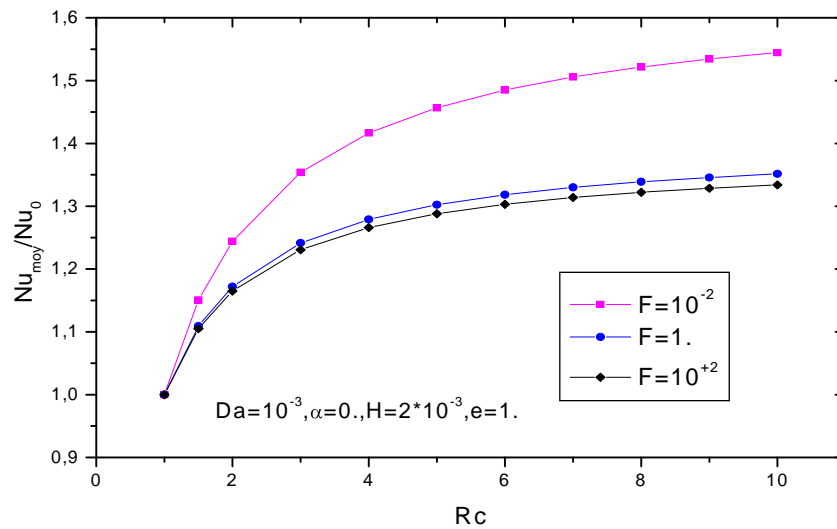


Figure 21 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport de conductivités thermiques pour différentes mode de convection.

## V.5 Influence de l'angle d'inclinaison

### V.5.1. pour un tube de longueur infini

L'effet de l'inclinaison du tube sur l'épaisseur locale du film liquide et sur le nombre de Nusselt local est représenté sur les figures (22,23), alors que la figure (24) représente la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'inclinaison de tube par rapport à un tube horizontal.

Sur la figure 22 nous observons, pour chaque angle d'inclinaison, que l'épaisseur de film liquide est une fonction monotone croissante de la position locale angulaire. Nous observons aussi que le film de condensat devient de plus en plus épais lorsqu'on augmente l'angle d'inclinaison, cela est due à l'accumulation du condensat au bout du tube. Comme le coefficient de transfert de chaleur est inversement proportionnel à l'épaisseur du film de condensat, il s'ensuit que le transfert de chaleur diminue lorsqu'on fait augmenter l'inclinaison à cause de l'augmentation de la résistance thermique du film liquide.

Pour un tube infiniment long, on peut dire que la position horizontale (angle d'inclinaison :  $\alpha = 0$ ) est la position optimale pour laquelle on aura un meilleur transfert de chaleur.

Sur la figure 24, nous observons que la variation du nombre de Darcy n'a pas d'effet sur le transfert de chaleur lorsqu'on fait varier l'inclinaison du tube.

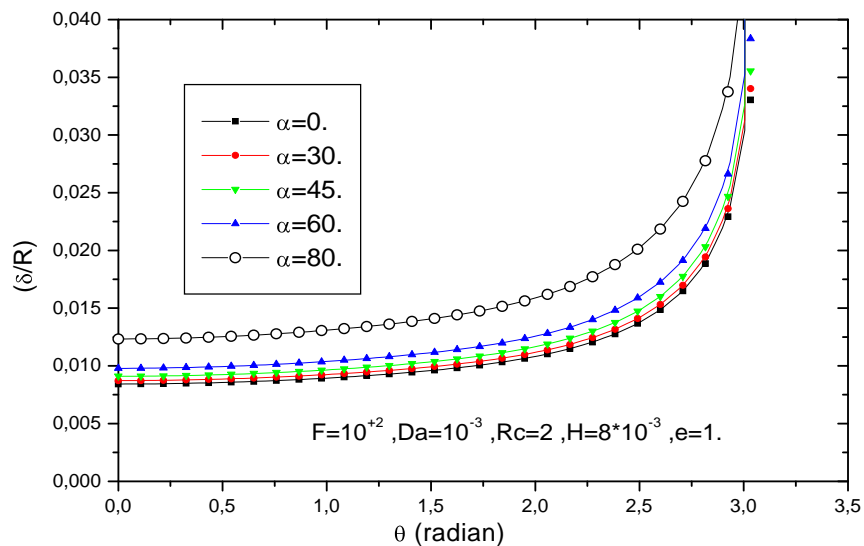


Figure 22 : Variation locale de l'épaisseur du film liquide pour différentes inclinaisons

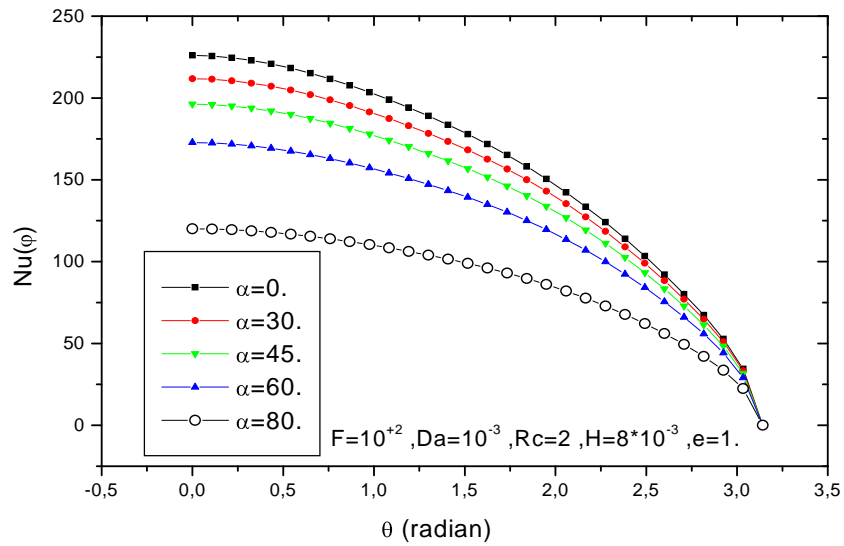


Figure 23 : Variation locale du nombre de Nusselt moyen pour différentes inclinaisons

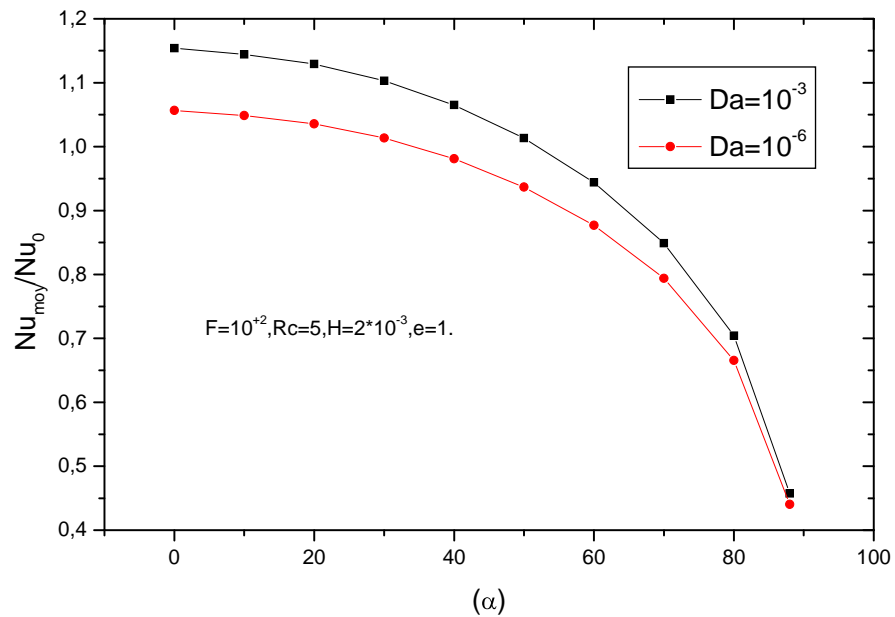


Figure 24 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'inclinaison

### V.5.2 Influence de l'angle d'inclinaison pour un tube de longueur fini

Pour connaître l'effet de l'inclinaison  $\alpha$  de tube, nous avons tracé le nombre de Nusselt moyen pour différentes rapport  $\frac{L}{De}$  (rapport de la longueur de tube par rapport à son diamètre équivalent) en fonction de l'inclinaison  $\alpha$  du tube, pour une excentricité, une perméabilité de l'épaisseur de la couche poreuse et un mode de convection donnés.

Afin de mieux apprécier les variations, nous avons représenté le rapport du nombre de Nusselt moyen du tube par rapport au nombre de Nusselt moyen relatif à la position horizontale. Le résultat montre que pour une longueur fini donnée, il y aura un angle optimal pour lequel le nombre de Nusselt moyen est maximal. On observe aussi que cet angle optimal diminue à chaque fois qu'on augmente la longueur du tube par rapport à son diamètre équivalent. Pour des conditions bien définies (Cf. figure 25), cet angle vaut  $50^\circ$  pour un rapport  $\frac{L}{De} = 2$  et  $25^\circ$  pour un rapport  $\frac{L}{De} = 4$ .

Cette augmentation dépend du mode de convection choisi, 10% pour le mode de convection libre à 13% pour le mode de convection forcée pour un nombre de  $Da=10^{-6}$  et une épaisseur  $H^*=4 \times 10^{-3}$  et une excentricité de 0.6.

A partir d'un rapport  $\frac{L}{De} = 40$ , on n'observe plus d'angle optimal et le coefficient de transfert de chaleur moyen pour une inclinaison donnée devient inférieur par rapport à celui de la position horizontale. On peut aussi dire qu'à partir de  $\frac{L}{De} = 40$  on peut assimiler le tube de longueur fini à un tube infiniment long.

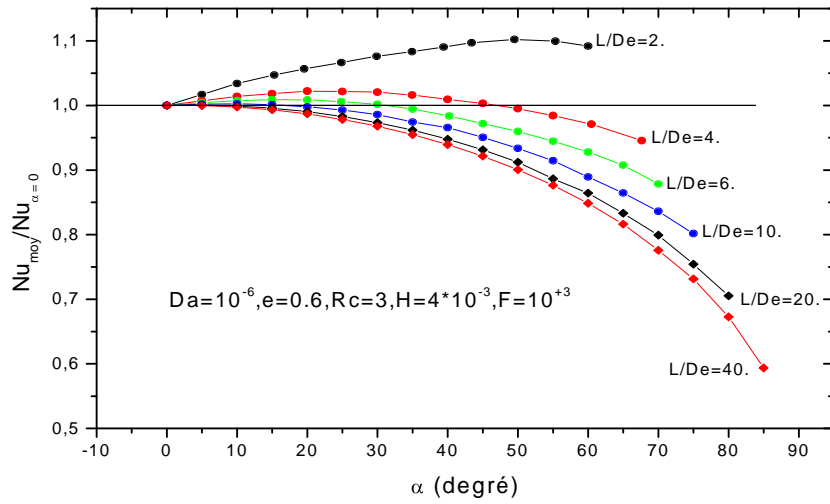


Figure 25 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'inclinaison (Mode de convection libre, tube de longueur finie)

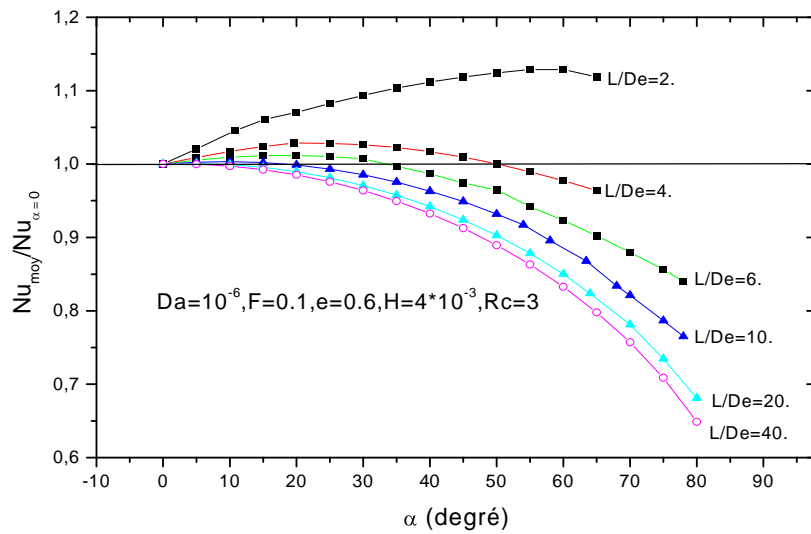


Figure 26 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'inclinaison (Mode de convection forcée, tube de longueur finie)

# CONCLUSION GENERALE

## Conclusion générale

La présente étude a pour objet l'analyse de l'effet de l'insertion d'une couche poreuse sur le transfert de chaleur lors de la condensation en film d'une vapeur pure autour d'un tube incliné de section elliptique.

A cet effet, un modèle mathématique, basé sur la théorie de Nusselt pour la couche fluide et sur le modèle de Darcy Brinkman pour la couche poreuse, a été établi. Les champs dynamique et thermique au sein de la couche fluide et de la couche poreuse ont été obtenus analytiquement tandis que l'équation de l'épaisseur du film liquide a été résolue numériquement par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4.

Les résultats portant principalement sur l'épaisseur du film de condensat et sur le coefficient de transfert de chaleur représenté par le nombre de Nusselt, montrent une dépendance de ces paramètres par rapport aux nombres adimensionnelles de Darcy ( $Da$ ), Grashof ( $Gr$ ), Jacob ( $Ja$ ), issus de la formulation mathématique de notre problème, par rapport à l'épaisseur de la couche poreuse  $H^*$

Ainsi nous avons pu noter l'amélioration du coefficient de transfert de chaleur par insertion d'une fine couche poreuse de forte perméabilité lors de la condensation de la vapeur pure autour de la surface externe d'un tube de forme elliptique. Les résultats montrent aussi l'existence d'une épaisseur optimale au delà de laquelle le coefficient de transfert de chaleur diminue pour les faibles perméabilités. Nous avons aussi pu observer qu'un tube de longueur finie, pour un rapport  $L/De$  donné et une inclinaison donnée, présente un meilleur coefficient de transfert de chaleur qu'un tube de longueur infinie.

Une continuité de ce travail, consiste à étudier et introduire l'effet microscopique et macroscopique d'inertie dans l'équation du champ dynamique ainsi que l'effet de la dispersion thermique dans l'équation de la chaleur.

# ANNEX

## ANNEXE 1

$$\begin{aligned}
 Q_{x+dx}q_{x+dx} - Q_xq_x &= \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) - Q_xq_x \\
 &= Q_xq_x + Q_x \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_x \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \frac{\partial q_x}{\partial x} dx^2 - Q_xq_x \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (Q_xq_x) dx
 \end{aligned}$$

### Méthode Runge Kutta- Méthodes d'intégration numérique des trapèzes

On peut écrire l'équation donnant l'épaisseur du film liquide sous la forme :

$$\begin{aligned}
 1 &= \left( \alpha_0 + \alpha_1 \Delta + \alpha_2 \Delta^2 + \alpha_3 \Delta^3 + \alpha_4 \Delta^4 \right) + \left( \beta_0 + \beta_1 \Delta + \beta_2 \Delta^2 + \beta_3 \Delta^3 \right) \frac{\partial \Delta}{\partial x} \\
 &\quad + \frac{D}{2L} \left( \gamma_0 + \gamma_1 \Delta + \gamma_2 \Delta^2 + \gamma_3 \Delta^3 \right) \frac{\partial \Delta}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Équation différentielle du type :

$$\frac{d\Delta}{d\phi} = f(\Delta, \phi)$$

Avec :

$$f(\Delta, \phi) = \frac{\left( \alpha_0 - 1 + \alpha_1 \Delta + \alpha_2 \Delta^2 + \alpha_3 \Delta^3 + \alpha_4 \Delta^4 \right) + \frac{D}{2L} \left( \gamma_0 + \gamma_1 \Delta + \gamma_2 \Delta^2 + \gamma_3 \Delta^3 \right) \frac{\partial \Delta}{\partial z}}{\left( \beta_0 + \beta_1 \Delta + \beta_2 \Delta^2 + \beta_3 \Delta^3 \right)}$$

❖ Pour résoudre cette équation on utilise **La méthode de Runge – Kutta (d'ordre 4)** :

L'algorithme de cette méthode est donné par :

$$\bullet \quad \Delta_{i+1} = \Delta_i + \frac{\Delta t}{6} \left[ f(\Delta_i, t_i) + 2f\left(\bar{\Delta}_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}\right) + 2f\left(\bar{\bar{\Delta}}_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(\bar{\bar{\bar{\Delta}}}_{i+1}, t_{i+1}) \right]$$

Avec :

- $\bar{\Delta}_{i+\frac{1}{2}} = \Delta_i + \frac{\Delta t}{2} f(\Delta_i, t_i)$
- $\bar{\bar{\Delta}}_{i+\frac{1}{2}} = \Delta_i + \frac{\Delta t}{2} f\left(\bar{\Delta}_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}\right)$
- $\bar{\Delta}_{i+1} = \Delta_i + \Delta t f\left(\bar{\bar{\Delta}}_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}\right)$

❖ Pour le départ de l'algorithme de **Runge – Kutta** on fait appel à la méthode de **Newton**.

L'algorithme de **Newton** est le suivant :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x_0 = a \end{cases}$$

1) calcul de  $f(x_0)$  et  $f'(x_0)$

$f'(x_0)$  est le dérivé premier de  $f(x_0)$

2) calcul de  $x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

3) test de convergence :

si  $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$  alors  $x_1$  est la solution de la fonction  $f(x) = 0$

Si non  $x_0 = x_1$  retour à l'étape 1

❖ Méthode de trapèze :

Pour le calcul de l'intégral

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{H}{2} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

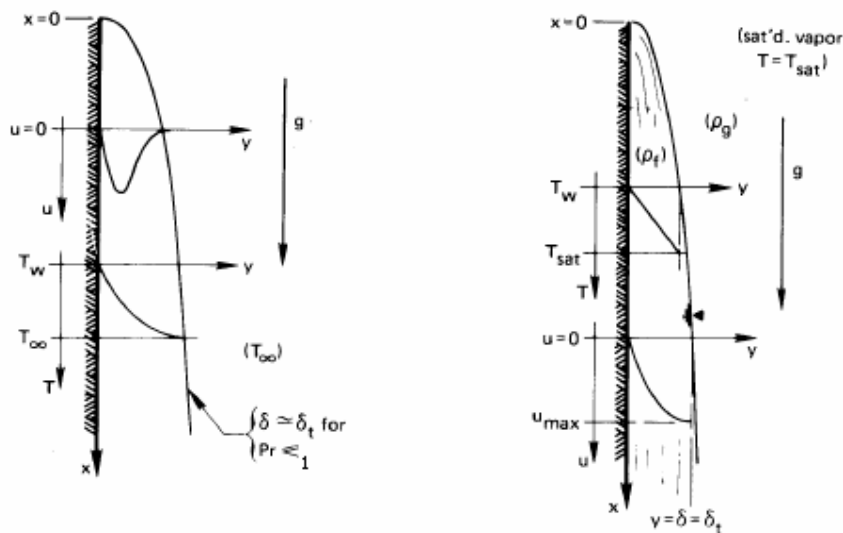
$$\text{avec } \begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \\ H = \frac{b-a}{n} \\ x_i = x_{i-1} + H \end{cases}$$

## ANNEXE 2

### La nature des problèmes de la condensation en film et de la convection naturelle

#### **1.2 Description :**

Le problème de convection naturelle est représenté sous sa forme la plus simple sur la figure (1-a). Sur cette figure, nous voyons une plaque verticale isotherme qui refroidit le fluide en contact avec elle. L'écoulement du fluide qui refroidit est dirigé vers le bas ; la figure serait inversée si la plaque était plus chaude que le fluide adjacent alors le fluide s'écoule vers le haut.



a : convection naturelle

b : condensation en film

**Figure 1 : couche limite de condensation et de convection**

la figure (1-b) correspond au problème de condensation en film sous sa forme la plus simple; une plaque verticale isotherme refroidit une vapeur pure, cette dernière se condense et forme un film liquide sur la plaque.

Le film liquide formé est très mince et il s'écoule le long de la plaque pour former une sorte de couche limite, comme indiqué sur la figure (1b). Tandis que la convection naturelle peut porter le fluide vers le haut ou vers le bas, la condensation sous forme de film peut seulement faire écouler le

fluide vers le bas. La température dans le film s'élève de  $T_w$  sur la paroi à  $T_{sat}$  à la surface libre du film.

Dans les deux problèmes, mais plus particulièrement dans la condensation en film, la couche limite de la convection naturelle et l'épaisseur du film liquide sont supposées être assez minces afin de pouvoir utiliser l'approximation ou l'hypothèse de couche limite dans les équations de bilan de quantité de mouvement et d'énergie. La couche de condensation  $\delta$  et la couche de convection  $\delta_t$  sont étroitement liées.

$\delta$  et  $\delta_t$  sont approximativement égaux quand le nombre de Prandtl  $Pr$  est de l'ordre de l'unité.

Dans le cas où  $Pr \gg 1$  la couche de condensation  $\delta$  peut excéder la couche de convection  $\delta_t$ . Nous traitons le cas pour lequel  $\delta \cong \delta_t$  dans notre analyse.

### 1.3 Equations gouvernantes :

L'équation de mouvement pour la condensation en film laminaire et la convection naturelle laminaire s'écrit comme suite :

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dP}{dx} + g\rho + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

Dans les deux problèmes le gradient de pression est le gradient de pression hydrostatique en dehors de la couche limite.

$$\underbrace{\frac{dP}{dx} = \rho_\infty g}_{\text{convection naturelle}} \qquad \underbrace{\frac{dP}{dx} = \rho_v g}_{\text{condensation en film}}$$

L'équation (1) devient :

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g(\rho - \rho_v) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{Condensation en film}$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g(\rho - \rho_\infty) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{Convection naturelle}$$

Les conditions aux limites sont

$$u(y=0) = 0 \qquad \text{Pas de mouvement à la paroi pour les deux phénomènes.}$$

La deuxième condition aux limites pour le problème de condensation en film est différente par rapport au problème de convection naturelle,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0 \quad \text{Condensation : contrainte de cisaillement nulle à l'interface liquide-vapeur}$$

$$u|_{y=\delta} = 0 \quad \text{Convection naturelle : pas de mouvement du fluide en dehors de } \delta,$$

**Dans la convection naturelle :** le terme générateur de mouvement est représenté par le terme  $(\rho - \rho_v)g$  dans l'équation d'écoulement, la densité  $\rho$  change avec la température (approximation de Boussinesq), ainsi il est impossible de résoudre les équations d'écoulement et d'énergie indépendamment l'une par rapport à l'autre.

**Dans la condensation en film :** la deuxième condition aux limites pour l'équation de mouvement implique l'épaisseur du film  $\delta$  mais pour calculer l'épaisseur  $\delta$  nous devons faire un bilan énergétique sur le film pour découvrir combien la chaleur latente et ainsi combien a-t-il absorbé de condensat, ce qui introduira  $(T_{sat} - T_w)$  dans l'équation de mouvement.

#### **1.4 Convection forcée et convection naturelle combinée :**

Quand la convection forcée le long d'une paroi verticale par exemple, se produit à une vitesse relativement faible, mais à un taux de température relativement élevé, les changements résultants de densité peuvent provoquer un processus superposé de convection (convection mixte). Nous savons que le nombre sans dimension de Grashoff  $Gr$  intervient dans la convection naturelle tandis que le nombre de Reynolds  $Re$  intervient dans la convection forcée ; on peut alors estimer l'importance relative de la convection naturelle et de la convection forcée par le rapport suivant :

$$F = \frac{Gr}{Re^2}$$

Si  $F < 1$  : écoulement en convection forcée.

Si  $F = 1$  : écoulement en convection mixte.

Si  $F > 1$  : écoulement en convection libre ou naturelle.

## Références bibliographiques

- [1] J.F SACADURA, initiation aux transferts thermiques, (CAST) centre d'actualisation scientifique et technique INSA de Lyon (4<sup>e</sup> tirage 1993)
- [2] J.R. Thome, Engineering data book, Wolverine tube Inc (2004).
- [3] Hassan and Jakob, "laminar Film condensation of pure saturated vapors on inclined circular cylinder" J. heat transfer, 80, pp.887-894, (1958).
- [4] Rose JW ,Fundamental of condensate heat transfer: laminar film condensation. JSME Int J 31: 357–375 (1988).
- [5] Dhir V.K., Sparrow E.M., Hartnett R., "The two phase boundary layer of laminar film condensation" Int. J. Heat and Mass Trans. Vol. 2 , pp 69-82 (1961).
- [6] Karabulut Ercan Ataer "Numerical analysis of laminar film-wise condensation" Int J Refrig vol 19 n°2 pp117-123, (1996).
- [7a] M. Mosaad "Combined free and forced convection laminar film condensation on an inclined circular tube" Int J H M T vol 42, pp 4017- 4025 , (1999).
- [7b] M. Mosaad "Mixed-convection Laminar Film Condensation on an inclined Elliptical tube" Journal of heat transfer 123, pp 294-300, (2001).
- [8] Memory SB, Adams VH, Marto PJ Free and forced convection laminar film condensation on horizontal elliptical tube. Int J Heat Mass Transfer 40: 3395–3406 (1997).
- [9] Rose JW Effect of pressure gradient in forced convection film condensation on a horizontal tube. Int J Heat Mass Transfer 27: 39–47 (1984).
- [10] K. J. Renken" a n d C. D. Mueller "Measurements of Enhanced Film Condensation Utilizing a Porous Metallic Coating " journal of thermophysics and heat transfer vol. 7, no. 1 , jan.-march p148 (1993).
- [11] Z. WANG, D. WEI, and F. HONG "Experimental Study of Condensation Heat Transfer Promotion on a Fluted Tube with Thin Porous Coatings " Heat Transfer Engineering, vol 21 , pp46–52, (2000).
- [12] P. Cheng, Film condensation along an inclined surface in porous medium,  
Int. J. Heat Mass Trans. 24: 983-990 (1981).
- [13] M. Kumari, I. Pop, G. Nath " Film condensation a long a frustum of a cone in porous medium" Int. J. heat Mass transfer, vol 27 N°11, pp2155-2157 (1984)

- [14] K.S. Udell "Heat transfer in porous media heated from above with evaporation, condensation and capillary effects " *Journal of heat transfer* vol **105** pp486-492 (1983).
- [15] Kaviany Boundary layer treatment of film condensation in the presence of a solid matrix, *Int. J of heat and mass transfer*, vol.29, pp 246-257 (1986).
- [16] Chung, Plumb, Lee "Condensation in a porous region bounded by a cold vertical surface" *Journal of heat transfer* vol.114 pp 1011-1018, (1992).
- [17] M.A. Al-Nimr and M.K AlKam "Film condensation on vertical plate imbedded in a porous media" *Applied Energy*, vol.N°1, pp 47-57, (1997).
- [18] Mosaad M., "Natural convection in porous medium coupled across an impermeable vertical wall with film condensation." *Heat and Mass Transfer*, vol 35, pp 177-183 (1999).
- [19] Char M.I., Lin J.D., Chen H.T., "Conjugate mixed convection laminar Non-Darcy film condensation along a vertical plate in a porous medium. *Int. J. of Eng. Science* (2000).
- [20] A. Al-Ahmadi, R.K. Al-Dadah A new set of correlations for EHD enhanced condensation heat transfer of tubular systems. *Applied Thermal Engineering* 22 :1981–2001 (2002).
- [21] R.K. Al-Dadaha,, T.G. Karayiannis Passive enhancement of condensation heat transfer. *Applied Thermal Engineering* 18: 895-909 (1998).
- [22] K.J.Renken, D.J. Soltykiewicz, D.Poulikakos A study of laminar film condensation on a vertical surface with a porous coating, *Int. Comm. Heat Mass Trans.*16:181-192 (1989).
- [23] K.J.Renken, M. Aboye Analysis of film condensation within inclined thin porous-layer coated surfaces. *Int. J. heat and fluid flow.* 14: 48-53. (1993).
- [24] M. Asbik, M. Chaynane, H. Boushaba, B. Zeghmati, A. Khmou Analytical investigation of forced convection film condensation on a vertical porous layer coated. *Heat and mass transfer*, vol : 40 pp 143-155. (2003).
- [25] Plumb O. A., Burnett D. B. and Shekarriz A. An experimental investigation of Film condensation in a porous bed, *ASME Journal of Heat transfer*, vol. 112, pp. 235-239. (1990).
- [26] Renken K. J., Aboye M., Carneiro M. and Meechan K. Effect of vapor velocity on film condensation surface embedded in a porous medium, *Comm. Heat Transfer*, vol. 20, pp. 1-13. (1993).

- [27] Renken K. J and Meechan K. Impact of thermal dispersion during forced convection condensation in a thin porous/fluid composite system, Chem. Eng. Comm., vol. 131, pp. 189-205 (1995).
- [28] Asbik M., B. Zeghmami, H. Gualous-Louahlia and M. W. Yan, The effect of thermal dispersion on free convection film condensation on a vertical plate with a thin porous layer, Transport in Porous Media, (TIPM-S- 05-00221), (in press). (2006).
- [29] Nusselt W Des Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. Z Vereines Deutsch. Ing. 60:541–564 &. 569–575 (1916).
- [30] M. Kaviany Principles of Heat Transfer in Porous Medium, Springer Verlag. (1996).
- [31] R. F. Banati et B. Brosilow, Void fraction in packed beds, AIChE J., vol. 8 p 359-361, (1962)
- [32] Nield D.A. and Bejan A. Convection in porous media, Springer-Verlag, New-York. (1999).
- [33] B. C. Chandrasekhara et D. Vortmyer, fluid Dynamics, vol. 12, p 105-111, (1979).
- [34] P. Cheng et C. T. Hsu, fully developed forced convection flow through an annular packed sphere bed with wall effects, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 29, p 1843-1853, (1986).
- [35] P. Cheng et D. Vrtmeyer, CHem. Eng. Sci. , vol. 43, p 2523-2532, (1988).
- [36] A. Chowdhury et P. Cheng, thermal developing flows in packed tubes and channels, international Conference on Mechanics of two-phase flows, (1989).
- [37 ] M. L. Hunt et C. L. Tien, Non Darcien convection in cylindrical packed beds, ASME/JSME, thermal Engineering conference, p433-438, (1987)
- [38] R. M. Fand, B. Y. K. Kim, A. C. C. Land, et R. T. Phan, fluides Eng., Vol. 109, p 268-274, (1989)
- [39] C.F Gerald P.O Wheatley Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley. (1989).

Ce document à été crée avec Win2pdf disponible à <http://www.win2pdf.com/fr>  
La version non enregistrée de Win2pdf est uniquement pour évaluation ou à usage non commercial.