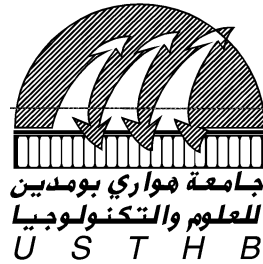


N° d'ordre 10/2006-E/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE-ALGER

FACULTE DE MATHEMATIQUES



**THESE**

Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT D'ETAT

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : ANALYSE; Equations Aux Dérivées Partielles

Par : Madame AIT-YAHIA née DJOUADI Rachida

Sujet

**CONTRIBUTION A L'ETUDE THEORIQUE  
ET NUMERIQUE D'ECOULEMENTS DE  
FLUIDES A FRONTIERE LIBRE**

Soutenue le 27 décembre 2006, devant le jury composé de :

Mr Rachid	BEBBOUCHI	Professeur (U.S.T.H-B)	Président
Mr Mohamed	AMARA	Professeur (Université de PAU)	Directeur de thèse
Mr Djamel-Eddine	TENIOU	Professeur (U.S.T.H-B)	Co-directeur de thèse
Mr Mustapha	AMAOUCHÉ	Professeur (U de Bejaia)	Examineur
Mme Assia	LAGHA	M.D.C habilitée (CMI Marseille)	Examinatrice
Mr Keddour	LEMRAËT	Professeur (U.S.T.H-B)	Examineur

## *Remerciements*

Je remercie en premier lieu le Professeur Mohamed AMARA, Directeur du laboratoire de Mathématiques appliquées de l'université de Pau et des pays de l'Adour, pour m'avoir fourni le sujet de cette thèse et pour m'avoir aidée en m'invitant maintes fois au sein de son laboratoire, où j'ai trouvé de très bonnes conditions de travail. Son aide a été précieuse pour moi pour venir à bout des difficultés que j'ai pu rencontrer dans la partie numérique de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes remerciements ne sont pas moindres envers le Professeur Djamel-Eddine TENIOU, qui a co-dirigé cette thèse. En tant que Directeur du laboratoire d'AMNEDP de la faculté de mathématiques de l'USTHB, il a su créer une très bonne ambiance au sein de son groupe de travail, dont je fais partie. Il m'a beaucoup encouragée et soutenue pour faire aboutir cette thèse. Il a mis à notre disposition tous les moyens matériels nécessaires. Son expérience et son savoir faire m'ont été très précieux. Qu'il soit remercié infiniment.

Le Professeur Rachid BEBBOUCHI, Doyen de la Faculté de Mathématiques, m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ; qu'il soit remercié infiniment.

Je remercie également le Professeur Mustapha AMAOUCHE pour avoir accepté de faire partie du jury ; j'ai discuté avec lui maintes fois sur l'aspect physique du problème et il s'est toujours montré disponible.

Mes remerciements vont aussi vers Madame Assia LAGHA-BENABDALLAH pour avoir accepté de faire partie du jury. J'ai gardé d'elle le souvenir d'une enseignante pédagogue et consciencieuse. Elle n'a raté aucune occasion pour m'encourager à aller de l'avant.

Je remercie infiniment le Professeur Keddour LEMRABET pour avoir accepté d'être membre du jury de cette thèse. Il a été l'un de mes meilleurs professeurs au cours de mon cycle de DES. Son expérience et son savoir faire sont très appréciés.

Enfin je remercie toutes les personnes qui m'ont encouragée et ont ainsi contribué à l'aboutissement de ce travail.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Position du problème</b>	<b>5</b>
1.1	Equations régissant l'écoulement . . . . .	5
1.2	Formulation $(\omega, u, p)$ du problème : . . . . .	8
1.3	Formulation du problème en fonction de courant : . . . . .	9
<b>2</b>	<b>A free boundary problem for a torrential flow</b>	<b>12</b>
2.1	Position of the problem . . . . .	13
2.2	The hodograph transformation. . . . .	15
2.3	The linearized problem. . . . .	18
2.3.1	A variational solution for the linear problem . . . . .	19
2.4	The solution of the nonlinear problem . . . . .	25
<b>3</b>	<b>A study of the inverse of a free surface problem</b>	<b>29</b>
3.1	The governing equations . . . . .	30
3.2	Formulation of the problem in stream function . . . . .	32
3.3	Determination of the obstacle : . . . . .	34
3.3.1	Differentiability of the operator $\mathbb{T}$ with respect to $(b, \gamma)$	37
3.3.2	Expression of $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$ . . . . .	39
3.3.3	Inversibility of $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$ : . . . . .	40
3.4	Conclusion . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Identifiability and stability of boundaries in a supercritical free surface flow.</b>	<b>43</b>
4.1	Position of the problem . . . . .	44
4.2	Identifiability of the boundaries . . . . .	47
4.2.1	Identifiability of the free surface . . . . .	47
4.2.2	Identifiability of the bottom . . . . .	48
4.3	Stability of the boundaries of the domain . . . . .	49
4.3.1	Some notations . . . . .	50
4.3.2	Stability of the lower boundary of the domain . . . . .	51
4.3.3	Stability of the free boundary for a small perturbation of the linear lower boundary . . . . .	52
4.3.4	Stability of the free boundary for a small perturbation of a general lower boundary . . . . .	53

<b>5</b>	<b>Simulation numérique d'un écoulement à surface libre</b>	<b>55</b>
5.1	Position du problème . . . . .	55
5.2	Formulation du problème avec la fonction de courant . . . . .	58
5.2.1	Une formulation faible du problème dans le cas torrentiel . . . . .	60
5.3	Une approche numérique du problème dans le cas torrentiel . . . . .	61
5.3.1	Indicateur d'erreur a posteriori . . . . .	61
5.3.2	Shéma numérique . . . . .	64
5.3.3	Résultats numériques . . . . .	65
5.4	Le cas fluvial . . . . .	71
	<b>Annexe au chapitre 5</b>	<b>75</b>
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

# Introduction générale

Le domaine auquel nous nous sommes intéressés dans cette thèse est l'étude des ondes de surface pour des écoulements bidimensionnels de fluides parfaits incompressibles, perturbés par un obstacle placé au fond d'un canal. Nous tenons compte de la gravité et nous négligeons les effets de la tension superficielle. Nous supposons que l'écoulement est irrotationnel. Le domaine fluide est un canal infini dont le fond est partout plat sauf en un endroit où se trouve un obstacle. Ce problème peut modéliser l'écoulement de l'eau dans une rivière ou un fleuve. Il existe deux types d'écoulements : fluvial ou subcritique, et torrentiel ou supercritique. Le type est déterminé par un nombre réel positif caractérisant l'écoulement appelé nombre de Froude ; ce nombre apparaît dans les équations modélisant l'écoulement lorsqu'on les adimensionne (voir chap 1). Le carré de ce nombre mesure l'importance relative des accélérations et des forces de pesanteur au sein du fluide.

Le problème des ondes de surface est d'une importance notable pour l'étude de la résistance à l'avancement d'un bateau et donc dans le domaine naval dans l'optimisation de la forme des coques des bateaux pour avoir une résistance minimale. Un autre aspect du problème en relation avec les ondes de surface est, en hydrogéologie, l'effet que peut avoir un glissement de terrain sous marin sur la surface de la mer, notamment le phénomène du tsunami qui a des effets dévastateurs sur les populations des littoraux.

Ce problème a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. L'un des pionniers en la matière, a été J.S. Russel [45] en 1844, qui le premier, a fait mention de "soliton" (bien qu'on ne l'appellait pas encore comme cela à cette époque, mais "onde de translation"). Il en a relaté les effets dans son rapport sur les vagues [Report on waves]. Beaucoup d'autres auteurs se sont intéressés à ce problème. Plus récemment, Forbes et Schwartz [23] en 1982 ont résolu le problème particulier de l'obstacle en forme de demi-cercle en utilisant la transformation de Schwarz-Christoffel.

Vanden Broeck [52] en 1987 a étudié le problème, pour un obstacle semi-circulaire dans les cas fluvial et torrentiel ; il en a donné une formulation intégral-différentielle. Cette équation est réduite à un ensemble d'équations algébriques par une méthode de différences finies. Ces équations algébriques sont résolues par la méthode de Newton.

King et Bloor [35] en 1987 ont étudié le problème dans le cas d'une marche semi infinie placée au fond d'un canal. Ils ont étudié une équation intégral-différentielle non-linéaire et ont conclu que les solutions de cette équation dépendent de la hauteur de l'obstacle et du nombre de Froude. Des solutions linéarisées, autour d'obstacles de petite taille sont présentées et indiquent que la nature de la surface libre dépend de la nature de l'écoulement (fluvial ou torrentiel).

Hanna [27] en 1993 a étudié le problème linéarisé dans le cas d'un obstacle polygonal et régulier ; a obtenu un profil de surface libre pour différentes valeurs du nombre de Froude et différentes formes d'obstacles.

Mandal et Basu [39] en 1996 ont étudié un écoulement à surface libre au-dessus d'une petite perturbation géométrique au fond d'un large canal. Le mouvement est supposé irrotationnel ; une technique simplifiée de perturbation est utilisée pour obtenir la côte de la surface libre jusqu'au premier ordre, en termes d'intégrale impliquant la forme du fond du canal. L'existence de deux types de profils de surfaces libres est exhibée selon la valeur du nombre de Froude.

Hanna S.N et al [28] en 1996 ont mis au point une méthode numérique basée sur la troncature de série pour résoudre le problème d'un écoulement irrotationnel, non visqueux, incompressible et stationnaire au-dessus d'un obstacle trapézoïdal bidimensionnel se trouvant sur le fond d'un canal. La méthode numérique suggérée est utilisée pour la résolution du problème non-linéaire dans le cas de l'écoulement torrentiel. Les effets du nombre de Froude, et de la taille de l'obstacle sont discutés.

Chuang [16] en 2000, a utilisé la transformation de Schwarz-Christoffel pour ramener le problème dans le cas torrentiel à l'étude d'un couple d'opérateurs intégral différentiels non linéaires sur un domaine fixe.

Beaucoup d'autres travaux ont été publiés dans ce domaine et nous en donnons quelques un dans la bibliographie.

Pour notre part, en collaboration avec D.TENIOU et D. HERNANE-BOUKARI, nous avons étudié le problème dans un premier travail [13], en le ramenant à la résolution d'une équation  $T(b, \gamma) = 0$ , provenant de la condition d'équilibre de Bernoulli vérifiée sur la surface libre.  $T(b, \gamma)$  est un opérateur non linéaire, d'arguments la fonction  $b(x)$  représentant l'obstacle et la fonction  $\gamma(x)$  représentant la perturbation du niveau horizontal de la surface libre. Cet opérateur a été étudié sur une algèbre de Banach, qui est l'espace des fonctions  $C^2$  holdériennes avec une décroissance exponentielle à l'infini, et que nous avons noté  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ . L'espace image de cet opérateur est  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$  qui est l'ensemble des fonctions  $C^1$  holdériennes avec une décroissance exponentielle à l'infini. Nous avons vérifié les hypothèses du théorème des fonctions implicites et montré l'existence et l'unicité d'une solution pour des petits obstacles. Ce travail a fait l'objet d'une publication en 2001 dans la revue "Abstract and Applied Analysis". Ce travail ne sera pas exposé dans cette thèse, on le trouvera dans la thèse de Mme Hernane-Boukari.

Par la suite nous nous sommes intéressés à ce problème d'un autre point de vue, en le formulant dans le plan de l'hodographe (le plan des inconnues potentiel des vitesses  $\varphi$  et fonction de courant  $\psi$ ). Le domaine obtenu par cette transformation est un rectangle infini de bord supérieur la droite correspondant à une ligne de niveau où la fonction de courant est égale au débit, et de bord inférieur correspondant au niveau où la fonction de courant est nulle. On a défini deux opérateurs non linéaires sur ces bords inférieur et supérieur. On

a considéré l'opérateur ayant comme composantes ces deux opérateurs qui ont pour arguments les fonctions potentiel des vitesses, fonction de courant et un paramètre  $\epsilon$  caractérisant l'épaisseur de l'obstacle. Pour  $\epsilon = 0$  nous avons une solution qui correspond à la solution plate en l'absence d'obstacle ; nous vérifions les hypothèses du théorème des fonctions implicites pour donner un résultat d'existence et d'unicité d'une solution pour des petits obstacles. Ce travail a fait l'objet d'une publication en 2006 dans la revue "Potugaliae Mathematica".

Nous avons aussi regardé le problème sous l'aspect "problème inverse", ie essayer d'identifier l'obstacle placé au fond d'un canal et ayant provoqué une perturbation observée à la surface libre. On a étudié l'opérateur  $T(b, \gamma)$  utilisé dans le premier travail, mais cette fois-ci la fonction inconnue est la fonction  $b(x)$  représentant le fond du domaine. Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut vérifier que l'opérateur  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$  est un isomorphisme de  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  dans  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$ . L'injectivité se montre assez facilement en utilisant le théorème d'unicité de Holmgren ; mais la surjectivité a été obtenue sur un sous-espace de  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$ , à priori non fermé, ce qui n'est pas suffisant pour appliquer le théorème des fonctions implicites. Le problème de la surjectivité reste donc ouvert, et nous retiendrons le résultat d'injectivité qui sera utilisé dans le travail suivant. Cet article, sur le problème inverse, a été publié en 2004 dans la revue "Abstract and Applied Analysis". Dans un travail suivant, nous nous intéressons à des résultats d'identifiabilité et de stabilité des frontières pour le problème direct et le problème inverse. On utilise le théorème d'unicité de Holmgren et les propriétés des fonctions analytiques pour montrer l'identifiabilité de la frontière libre et celle de l'obstacle lorsque l'on connaît une partie de la surface libre. L'aspect stabilité a aussi été étudié et l'on a obtenu des résultats de stabilité de type linéaire. Ce travail a été soumis à la revue "Revista Matemàtica complutense".

Enfin du point de vue numérique, en collaboration avec le Professeur AMARA de l'université de Pau, nous avons mis en oeuvre un code de calcul simulant la frontière libre dans le cas d'un écoulement torrentiel. Ce code a utilisé la méthode des éléments finis  $Q_1$  et nous avons mis en place des indicateurs d'erreurs a posteriori pour faire un raffinement de maillage adaptatif et par là même améliorer les résultats sur la fonction de courant et par conséquent sur la frontière libre. Plusieurs graphes sont donnés pour un ou deux obstacles placés au fond du canal. Pour le cas fluvial, nous donnons quelques résultats de la simulation de la frontière libre obtenus par la résolution de l'équation de Bernoulli sans discrétiser le problème en  $y$ . On ne calcule que la surface libre, qui est l'inconnue principale du problème. Nous avons donc discrétisé le problème uniquement en  $x$  et on n'a considéré que deux points en  $y$  pour chaque  $x$  fixé : le point à la surface libre et le point du fond du domaine. Cette équation de Bernoulli a été résolue par une méthode de point fixe numérique. Le fait de ne pas discrétiser en  $y$ , nous évite de calculer la fonction de courant à l'intérieur du domaine ; on utilise seulement l'harmonicité de cette fonction

et ses valeurs sur le fond du domaine (où elle vaut zéro) et sur la surface libre (où elle vaut un). On évite donc de mettre une condition à l'aval du domaine, ce qui est la difficulté majeure du cas fluvial. Une extension de ce travail, où l'on considère d'abord le problème linéarisé, et où l'on simule la frontière libre en calculant la fonction de courant à l'intérieur du domaine, est en cours et sera soumis prochainement pour publication.

La thèse est constituée de cinq chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons le problème avec sa formulation vitesse-pression, tourbillon-vitesse-pression, puis sa formulation à l'aide de la fonction de courant. C'est cette dernière formulation que nous utiliserons. Dans le deuxième chapitre nous présentons le travail concernant le résultat d'existence et d'unicité de la solution pour un écoulement torrentiel par la méthode de l'hodographe.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème inverse du problème à frontière libre. Le quatrième chapitre est l'étude de l'identifiabilité et de la stabilité de frontières pour un écoulement à surface libre.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude numérique du problème.

Notons qu'à chaque début de chapitre nous donnons une petite introduction.

Nous donnerons en annexe les formules de calcul de la matrice élémentaire et des différentes intégrales utilisées.

Nous finirons par une conclusion et les perspectives de ce travail.

# Chapitre 1

## Position du problème

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le problème sous ses différentes formulations. Nous donnons les équations d'Euler, puis nous introduisons la fonction tourbillon, et avec des hypothèses d'irrotationalité de l'écoulement nous simplifions les équations. Par suite l'écoulement étant supposé également incompressible, nous le formulons à l'aide de la fonction de courant.

### 1.1 Equations régissant l'écoulement

On s'intéresse à l'étude du problème d'un écoulement plan, permanent, à surface libre, d'un fluide parfait incompressible au dessus d'un obstacle immergé dans un canal  $\Omega$ . L'écoulement se fait de la gauche vers la droite avec une vitesse initiale horizontale  $u_0$ . Ce problème peut modéliser l'écoulement de l'eau dans une rivière ou un fleuve. Le mouvement du fluide est régi par les équations d'Euler pour un fluide incompressible en régime stationnaire :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = -g\vec{e}_2 \text{ dans } \Omega \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.2)$$

où

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < +\infty, b(x) < y < y_0 + f(x)\}$$

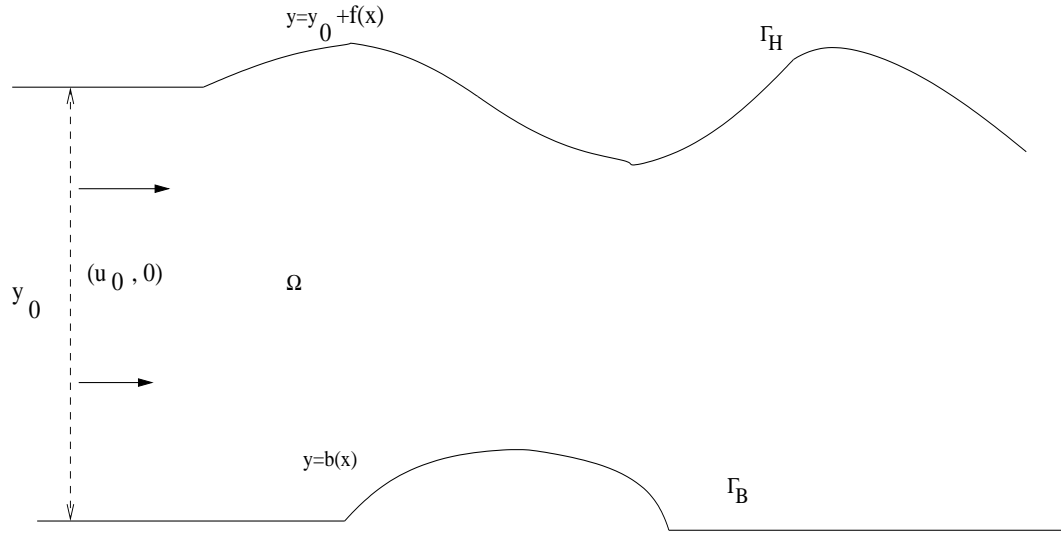
$\rho$  est la densité du fluide,  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $\vec{e}_2$  est le vecteur vertical de composantes  $(0, 1)$  et  $y_0$  est la hauteur du canal à l'infini amont.

$$y = b(x)$$

est l'équation du fond du canal  $\Gamma_B$  et

$$y = y_0 + f(x)$$

est l'équation de la surface libre  $\Gamma_H$ . Nous supposons que la fonction  $f(x)$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$  (Voir dessin ci-dessous)



Les conditions sur les bords du domaine sont données par :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \quad (1.3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.4)$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire au bord considéré, extérieure au domaine. Sur la frontière libre nous avons aussi les conditions :

$$\frac{\rho}{2} |\vec{u}|^2 + \rho g y = \rho \frac{u_0^2}{2} + \rho g y_0 \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.5)$$

appelée condition de Bernoulli, et

$$p = p_a \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.6)$$

où  $p_a$  est la pression atmosphérique.

A l'infini amont de l'obstacle nous avons la condition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = (u_0, 0) \quad (1.7)$$

A l'infini aval, nous posons simplement que la vitesse et la pression restent bornées :

$$|\vec{u}(x, y)| \text{ bornée et } p(x, y) \text{ bornée quand } x \rightarrow +\infty \quad (1.8)$$

Les conditions (1.3) et (1.4) indiquent que le fluide ne traverse pas les frontières  $\Gamma_B$  et  $\Gamma_H$  respectivement. La condition (1.5) est une condition d'équilibre sur la frontière libre  $\Gamma_H$ .

Tout d'abord, nous allons adimensionner les équations; nous référons toutes les longueurs à  $y_0$  et toutes les vitesses à  $u_0$ . On pose :

$$\begin{cases} \vec{u} = u_0 \vec{u}^* \\ x = y_0 x^* \\ y = y_0 y^* \\ p = \rho u_0^2 p^* \end{cases}$$

Le problème se réécrit avec les nouvelles variables :

$$(\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^* + \vec{\nabla} p^* = -\frac{1}{Fr^2} \vec{e}_2 \text{ dans } \Omega^* \quad (1.9)$$

$$\text{div} \vec{u}^* = 0 \text{ dans } \Omega^* \quad (1.10)$$

$$\vec{u}^* \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B^* \quad (1.11)$$

$$\vec{u}^* \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H^* \quad (1.12)$$

$$p^* = \frac{p_a}{\rho u_0^2} \text{ sur } \Gamma_H^* \quad (1.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{u}^*(x^*, y^*) = (1, 0) \quad (1.14)$$

$$|\vec{u}^*(x^*, y^*)| \text{ borné et } p^*(x^*, y^*) \text{ borné quand } x^* \rightarrow +\infty \quad (1.15)$$

$$|u^* \cdot \tau|^2 = c_1 - c_2 y^* \text{ sur } \Gamma_H^* \quad (1.16)$$

où  $\tau$  est le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma_H^*$  et où les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont données par :

$$c_1 = 1 + \frac{2}{Fr^2}, \quad c_2 = \frac{2}{Fr^2}$$

avec

$$Fr = \frac{u_0}{\sqrt{g y_0}}$$

nombre réel positif appelé nombre de Froude de l'écoulement.

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^* < +\infty, b^*(x^*) < y^* < 1 + f^*(x^*)\}, \\ f^*(x^*) &= \frac{1}{y_0} f(y_0 x^*), \\ b^*(x^*) &= \frac{1}{y_0} b(y_0 x^*), \\ \Gamma_B^* &= \{(x^*, b^*(x^*)) / x^* \in \mathbb{R}\}, \\ \Gamma_H^* &= \{(x^*, 1 + f^*(x^*)) / x^* \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Si le nombre de Froude  $Fr$  est inférieur à 1 on dira que l'écoulement est fluvial ou subcritique ; si ce nombre de Froude est supérieur à 1 on dira que l'écoulement est torrentiel ou supercritique.

Dans le cas torrentiel, il y a symétrie de l'écoulement entre l'amont et l'aval de l'obstacle. Ceci a été observé expérimentalement par différents auteurs qui se sont intéressés à ce problème. On citera entre autres [12]. Dans le but de faire une approche numérique du problème par éléments finis, on considérera des frontières verticales à l'amont et à l'aval de l'obstacle, sur lesquelles on se donnera des conditions. Dans le cas torrentiel on mettra à l'aval une condition qui assurera la symétrie de l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement fluvial, la frontière libre solution du problème présente un système d'ondes à l'aval de l'obstacle. Donc on ne sait pas quelle condition aux limites mettre sur une frontière située loin en aval de l'obstacle. Ceci est l'une des difficultés majeures que l'on rencontre dans la simulation de l'écoulement fluvial.

Dans toute la suite on notera les variables adimensionnées sans le symbole  $*$ .

## 1.2 Formulation $(\omega, u, p)$ du problème :

On introduit la vorticité  $\omega = \partial_x u_2 - \partial_y u_1$  qui est le rotationnel du vecteur  $\vec{u}$ . On vérifie aisément que :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \omega \cdot \vec{u}^\perp + \frac{1}{2} \nabla u^2$$

où

$$\vec{u}^\perp = (-u_2, u_1)$$

Le problème (1.9)-(1.16) se récrit en formulation  $(\omega, u, p)$  :

$$\omega \cdot \vec{u}^\perp + \nabla P = -\frac{1}{Fr^2} \vec{e}_2 \text{ dans } \Omega \quad (1.17)$$

$$P = p + \frac{1}{2} u^2 \quad (1.18)$$

$$\omega = Rot \vec{u} \quad (1.19)$$

$$div \vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.20)$$

$$p = \frac{p_a}{\rho u_0^2} \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.21)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \quad (1.22)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.23)$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{\tau}|^2 = c_1 - c_2 y \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.24)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{u}(x, y) = (1, 0) \quad (1.25)$$

$$|\vec{u}(x, y)| \text{ borné et } p(x, y) \text{ borné quand } x \rightarrow +\infty \quad (1.26)$$

En prenant le rotationnel de l'équation (1.17) et en tenant compte de l'équation (1.20) on obtient :

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\omega = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.27)$$

Ce qui implique que  $\omega = cste$  sur toutes les trajectoire de  $\Omega$ . Si, en outre, on suppose que l'écoulement est irrotationnel c'est à dire sans tourbillons à l'entrée du canal, on aura

$$\omega = 0 \text{ dans } \Omega$$

En fin de compte, le problème peut être formulé de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{rot} \vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \\ |\vec{u} \cdot \vec{\tau}|^2 = c_1 - c_2 y \text{ sur } \Gamma_H \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{u}(x, y) = (1, 0) \\ |\vec{u}(x, y)| \text{ borné quand } x \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

### 1.3 Formulation du problème en fonction de courant :

L'équation  $\text{div} \vec{u} = 0$  implique que  $\vec{u} = \vec{\text{rot}} \Psi$  où  $\Psi$  est la fonction de courant de l'écoulement. L'équation  $\text{rot} \vec{u} = 0$  implique que  $-\Delta \Psi = 0$  dans  $\Omega$ . Le problème se réécrit avec la fonction de courant :

$$\Delta \Psi = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.28)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \partial_y \Psi = 1 \quad (1.29)$$

$$|\vec{\nabla} \Psi(x, y)| \text{ borné quand } x \rightarrow +\infty \quad (1.30)$$

$$-b'(x) \partial_y \Psi - \partial_x \Psi = 0 \text{ en } y = b(x) \quad (1.31)$$

$$-f'(x) \partial_y \Psi - \partial_x \Psi = 0 \text{ en } y = 1 + f(x) \quad (1.32)$$

$$|\partial_n \Psi|^2 = c_1 - c_2 y \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.33)$$

La condition (1.29) implique que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, y) = y + c_1$$

$\Psi$  est une fonction de courant donc définie à une constante près. On choisit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, y) = y. \quad (1.34)$$

L'équation (1.31) s'écrit

$$\vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{\tau} = 0 \text{ en } y = b(x)$$

d'où

$$\Psi = cte \text{ sur } \Gamma_B.$$

De même l'équation (1.32) s'écrit

$$\Psi = cte \text{ sur } \Gamma_H.$$

Comme on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, y) = y$$

donc

$$\Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_B$$

et

$$\Psi = 1 \text{ sur } \Gamma_H.$$

L'équation de Bernoulli donne a priori

$$\partial_n \Psi = \pm \sqrt{c_1 - c_2 y} \text{ en } y = 1 + f(x)$$

En fait

$$\partial_n \Psi = + \sqrt{c_1 - c_2 y}$$

et ceci pour rester en conformité avec la relation (1.34).

Le problème en  $\Psi$  s'écrit donc :

$$\Delta \Psi = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.35)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x, y) = y \quad (1.36)$$

$$|\vec{\nabla} \Psi(x, y)| \text{ borné quand } x \rightarrow +\infty \quad (1.37)$$

$$\Psi = 0 \text{ en } y = b(x) \quad (1.38)$$

$$\Psi = 1 \text{ en } y = 1 + f(x) \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \sqrt{c_1 - c_2 y} \text{ en } y = 1 + f(x) \quad (1.40)$$

La condition (1.39) est une condition cinématique et la condition (1.40) est une condition dynamique sur la frontière libre.

On a donc un problème posé dans un domaine non borné avec 2 conditions aux limites sur la frontière libre  $\Gamma_H$ .

Pour l'étude théorique du problème nous considérerons le domaine non borné en  $x$ .

Pour l'étude numérique, dans le but d'approcher le problème par la méthode des éléments finis, nous devons limiter le domaine par des frontières à l'amont et à l'aval loin de l'obstacle. Les résultats expérimentaux ont montré que (voir [12]) :

dans le cas torrentiel, la frontière libre présente une unique élévation au dessus de l'obstacle puis un retour graduel vers le niveau non perturbé ;

dans le cas fluvial, la frontière libre présente une dépression au niveau de l'obstacle suivie d'un train d'ondes.

En conséquence dans le cas torrentiel on peut mettre la condition  $\psi = y$  à l'entrée du canal et  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$  ou bien  $\psi = y$  sur une frontière située loin en aval de l'obstacle. Par contre dans le cas fluvial on ne sait pas quelle condition mettre à l'aval car un bord à l'aval peut joindre n'importe quel point entre un creux et une crête de la frontière libre.

# Chapitre 2

## A free boundary problem for a torrential flow

### Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'écoulement à frontière libre au dessus d'un obstacle placé au fond d'un canal. Nous reformulons le problème dans le plan de l'hodographe et nous le ramenons à l'étude, sur un rectangle, d'un opérateur de bord dont les inconnues sont la fonction de courant et la fonction potentiel des vitesses. L'inconnue principale, qui est la surface libre, n'apparaît pas dans l'expression de l'opérateur et nous la retrouvons en appliquant la transformation inverse de la transformation de l'hodographe à la ligne de niveau où la fonction de courant est égale au débit. Cette ligne de niveau, qui représente le bord supérieur du rectangle obtenu, est exactement l'image de la surface libre par la transformation de l'hodographe. Nous donnons ci-dessous l'article tel qu'il a été publié dans la revue "Portugaliae Mathematica".

The studies of the propagation of surface wave for an out-flow of fluid in a channel over an obstacle have been landed by different authors with different methods. The literature on this topic is abundant. We can mention in particular Forbes [23], King and Bloor [35], Dias and Vander-Broeck [21] and the bibliography indicated in these papers.

In our paper, we consider the flow of a fluid over an obstacle lying on the bottom of a channel (see Fig1). Our aim is to study the perturbation effect of the obstacle on the free surface, when this obstacle is smooth enough; it is described by a  $C^1$  function on  $\mathbb{R}$ , and matches smoothly with the bottom. We begin to formulate the problem in the  $(x, y)$  plan where the domain  $S$  occupied by the fluid is unknown (precisely the free surface of the domain is

unknown).

One supposes that the depth at infinity is the same in both directions. The movement is supposed bi-dimensional, uniform, irrotational and the fluid is incompressible and inviscid ; the depth and velocity at infinity being  $H$  and  $c$  respectively ( $c$  is the uniform velocity of the flow downstream of the obstacle). A theoretical method is presented for the solution of the fully non linear problem for a super-critical flow (torrential flow) which corresponds to Froude number  $Fr = \frac{c}{\sqrt{g_0 H}}$  greater than one, ( $g_0$  is the acceleration due to gravity) ; the fluvial case ( $Fr < 1$ ) has been studied in [13]

Our results are obtained from considering the fluid equations and boundary conditions in complex potential coordinates, here we use the hodograph transformation which has been used in [42] to solve nonlinear wave-resistance problem.

This transformation changes the unknown domain  $S$  to a fixed domain  $A_H$ , then we solve two equations by defining two operators on the upper and the lower boundaries of  $A_H$ .

The plan of the paper is as follows : in section 2 we give the governing equations of the model, and by the hodograph transformation we reformulate these equations and define some spaces and operators. In section 3 we give the linearized problem and we solve it. The fourth section contains the proof of the existence and uniqueness of the solution of the non linear problem by an implicit function theorem argument.

## 2.1 Position of the problem

We consider an irrotational flow of an ideal and incompressible fluid over a small obstacle lying on the bottom of a channel.

One note by  $\omega$  the complex velocity function defined by  $\omega(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , is a complex variable and  $(u, v)$  is the velocity vector of the fluid. The bottom is described by a  $C^1$  function  $b$  on  $\mathbb{R}$ .

We set :

$$b(x) = \begin{cases} \varepsilon f(x) & |x| < x^* \\ 0 & |x| \geq x^* \end{cases}$$

where  $x^*$  is a positive real number,  $f$  is a function of class  $C^1$  and  $\varepsilon$  a small positive real number. Moreover, the function  $f$  verifies the following relation :

$$\int_{-x^*}^{x^*} \frac{f'(x)^2}{(x - x^*)(x + x^*)} dx < \infty \quad (2.1)$$

$f'$  is the derivative of  $f$ . We will see the utility of this hypothesis in the third section. Our problem is to find a function  $h \in C^1(\mathbb{R})$  describing the free surface and the complex velocity  $\omega$  holomorphic in the domain

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b(x) < y < h(x)\}.$$

$\omega$  and  $h$  must satisfy the following boundary conditions :

$$\frac{1}{2} |\omega(x, h(x))|^2 + g_0 h(x) = \text{constant} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$v(x, h(x)) = h'(x)u(x, h(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

$$v(x, b(x)) = b'(x)u(x, b(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \omega(z) = c \quad (2.5)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = H \quad (2.6)$$

Equation (2.2) is the Bernoulli condition on the free surface ( $g_0$  is the gravity constant); equations (2.3), (2.4) indicate that the free surface and the bottom are streamlines. Equations (2.5) and (2.6) indicate that upstream and downstream of the obstacle, the flow is horizontal with uniform velocity  $(c, 0)$  and the constant  $H$  is the depth of the unperturbed fluid (see Fig 1).

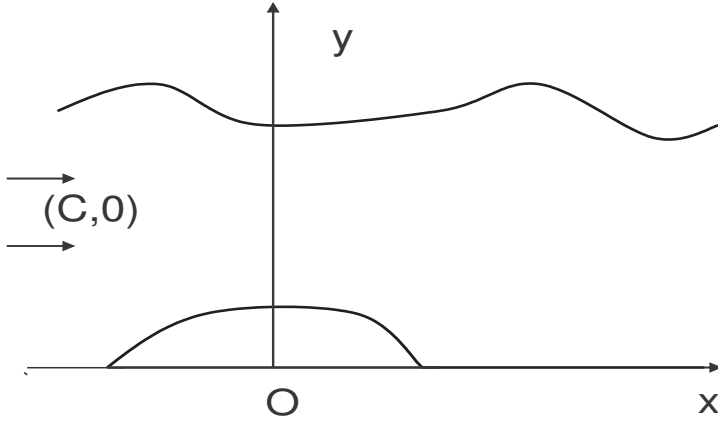


Fig 1

## 2.2 The hodograph transformation.

In this section we reformulate the problem by using as new independent variables the velocity potential  $\varphi = \varphi(x, y)$  and the stream function  $\psi = \psi(x, y)$ . Let  $W$  be the complex potential

$$W = \varphi + i\psi, \quad W'(z) = \omega(z)$$

Then

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2.7)$$

The incompressibility of the fluid and the irrotationality of the flow permit us to write :

$$\Delta\varphi = \Delta\psi = 0 \text{ in } S \quad (2.8)$$

where  $\Delta$  is the Laplace operator.

The lines  $\varphi = \text{constant}$  are the equipotential lines, while  $\psi = \text{constant}$  are the streamlines. The region  $S$  being simply connected, the potential  $W$  is determined by the complex velocity up to an additive constant. Let us now fix the complex constant : the real part is fixed by requiring that  $\varphi(0, y) = 0$  due to the symmetry of the horizontal component  $u$  of the velocity. The imaginary part is fixed by requiring that the streamline  $y = h(x)$  is represented by the equation  $\psi = cH$ . Then  $\psi(x, h(x)) - \psi(x, b(x)) = cH$ , gives  $\psi(x, b(x)) = 0$ .

We recall now that we are looking for a solution which is a small perturbation of the free parallel flow ( $y = H$ ). Hence it is reasonable to assume that

$u(x, y) > 0$  in  $S$ , and therefore  $\omega(z) \neq 0$  in  $S$ . Moreover, by the equation (2.7), the maps  $x \mapsto \varphi(x, y)$  and  $y \mapsto \psi(x, y)$  are strictly increasing. It follows that there is a conformal map, called the hodograph

$$z \mapsto W(z) \quad (2.9)$$

which maps the domain  $S$  of the physical plane onto a strip  $A_H$  in the hodograph plane  $(\varphi, \psi)$  given by

$$A_H = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \psi < cH\} \quad (2.10)$$

We note that  $W$  is one-to-one so that the inverse map

$$W \mapsto z(W)$$

is well defined on  $A_H$  and satisfies

$$\frac{dz}{dW} = \frac{1}{\omega(z)} = \Omega(\omega). \quad (2.11)$$

By writing  $\Omega = U - iV$ , the flow is better described in the hodograph plane and the above relation takes the form

$$U = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad V = \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi} \quad (2.12)$$

By noting that

$$U = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad V = -\frac{v}{u^2 + v^2} \quad (2.13)$$

we easily verify

$$\Omega \rightarrow \frac{1}{c} \text{ for } |\varphi| \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Then we can write explicitly

$$x(\varphi, \psi) = \int_0^\varphi U(s, \psi) ds, \quad y(\varphi, \psi) = \frac{1}{c}\psi + \int_\varphi^\infty V(s, \psi) ds. \quad (2.15)$$

Now we formulate the problem in the  $(\varphi, \psi)$  plane; for this, we describe the bottom and the free surface by defining the following sets :

$$B = \{(\varphi, \psi)/\psi = 0, \varphi \in \mathbb{R}\} \quad (2.16)$$

$$F = \{(\varphi, \psi)/\psi = cH, \varphi \in \mathbb{R}\} \quad (2.17)$$

The kinematic free surface condition is already taken into account by requiring that the free surface is a part of the streamline  $\psi = cH$ , while the Bernoulli condition(2.2) takes the form

$$\frac{1}{2} |\Omega|^{-4} \frac{\partial |\Omega|^2}{\partial \varphi} + g_0 V = 0 \text{ on } F \quad (2.18)$$

Let us now write the condition on  $B$ .

The equation (2.4) becomes

$$-\frac{V(\varphi, \psi)}{U(\varphi, \psi)} \Big|_{\psi=0} = b'(x(\varphi, \psi)) \Big|_{\psi=0} \quad (2.19)$$

or

$$-\frac{V(\varphi, 0)}{U(\varphi, 0)} = \begin{cases} \varepsilon f'(x(\varphi, 0)) & \text{if } |\varphi| < \varphi^* \\ 0 & \text{if } |\varphi| \geq \varphi^* \end{cases} \quad (2.20)$$

where  $\varphi^*$  corresponds to the hodograph transformation of  $x^*$ . Some precisions about  $\varphi^*$  will be given at the end in remark 11, before the conclusion. We also define the beam :

$$I = \{(\varphi, \psi)/\psi = 0, |\varphi| < \varphi^*\} \quad (2.21)$$

Now we are able to write the problem in the hodograph plane

$$\frac{1}{2} |\Omega|^{-4} \frac{\partial |\Omega|^2}{\partial \varphi} + g_0 V = 0 \quad \text{on } F \quad (2.22)$$

$$V(\varphi, 0) + b'(x(\varphi, 0))U(\varphi, 0) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

$$\Omega(\varphi, \psi) \rightarrow \frac{1}{c}, |\varphi| \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

where  $\Omega = U - iV$  is holomorphic in  $A_H$ .

By setting

$$\rho = \frac{\varphi}{\varphi^*}, \quad \sigma = \frac{\psi}{\varphi^*}, \quad \zeta = \rho + i\sigma, \quad (2.25)$$

the strip  $A_H$  becomes

$$A^* = \left\{ (\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sigma < \frac{cH}{\varphi^*} \right\} \quad (2.26)$$

The sets  $B$  and  $F$  become :

$$B^* = \{(\rho, \sigma)/\sigma = 0, \rho \in \mathbb{R}\} \quad (2.27)$$

$$F^* = \left\{ (\rho, \sigma)/\sigma = \frac{cH}{\varphi^*}, \rho \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.28)$$

In particular the beam (2.21) maps onto the interval  $(-1, 1)$  of the  $\rho$ -axis.

We now observe that, for  $\varepsilon = 0$ , the problem(2.22)-(2.24) admit the constant solution  $\Omega = 1/c$ .

Then, we define the new unknown  $\chi = \xi - i\eta$  by subtracting this solution from  $\Omega$  and dividing by  $\varepsilon$ ; namely, we set

$$U(\varphi, \psi) = \frac{1}{c}(1 + \varepsilon\xi(\rho, \sigma)), \quad V(\varphi, \psi) = \frac{\varepsilon}{c}\eta(\rho, \sigma). \quad (2.29)$$

We want to write the nonlinear boundary conditions (2.22) -(2.23) as formal operator equations in the new variables. We first note that the relations (2.15) take the form

$$x(\varphi, \psi) = \frac{\varphi^*}{c} \int_0^\rho (1 + \varepsilon\xi(s, \sigma))ds, \quad y(\varphi, \psi) = \frac{\varphi^*}{c} \left\{ \sigma + \varepsilon \int_\rho^\infty \eta(s, \sigma)ds \right\} \quad (2.30)$$

and that we can define on  $(-1, 1)$  the function

$$G(\rho) = f'(x(\varphi, 0)) = f'\left(\frac{\varphi^*}{c} \int_0^\rho (1 + \varepsilon \xi(s, 0)) ds\right). \quad (2.31)$$

We now set

$$B^1(\chi, \varepsilon) = \{\eta + G(\cdot)(1 + \varepsilon \xi)\} \Big|_{\sigma=0, |\rho|<1} \quad (2.32)$$

$$B^2(\chi, \varepsilon) = \left\{ \frac{|1 + \varepsilon \chi|^{-4}}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \rho} |1 + \varepsilon \chi|^2 + \frac{g_0 \varphi^*}{c^3} \eta \right\} \Big|_{\sigma=\frac{cH}{\varphi^*}, \rho \in \mathbb{R}} \quad (2.33)$$

and

$$B(\chi, \varepsilon) = (B^1(\chi, \varepsilon), B^2(\chi, \varepsilon)). \quad (2.34)$$

Then, it is easily verified that the equation

$$B(\chi, \varepsilon) = 0 \quad (2.35)$$

is equivalent to the conditions (2.22) -(2.23). Moreover, the function  $\chi$  must be holomorphic in  $A^*$ , vanishing for  $|\rho| \rightarrow \infty$  and satisfying the linear condition

$$\eta(\rho, 0) = 0, |\rho| \geq 1$$

## 2.3 The linearized problem.

We have already remarked that when  $\varepsilon = 0$  the problem (2.22)-(2.24) admit the trivial solution  $\Omega = 1/c$ . Now we assume that  $\Omega$  can be expanded in powers of  $\varepsilon$  and according to (2.29) we set :

$$\chi(\rho, \sigma) = \tilde{\chi}(\rho, \sigma) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (2.36)$$

By inserting this relation into (2.32), (2.33) and by taking the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we get a problem satisfied by the holomorphic function  $\tilde{\chi} = \tilde{\xi} - i\tilde{\eta}$  in the fixed domain  $A^*$  :

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \rho} + \varphi^* \frac{g_0}{c^3} \tilde{\eta} = 0 \quad \text{for } \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}, \rho \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

$$\tilde{\eta}(\rho, 0) = -f'(\varphi^* \frac{\rho}{c}) \quad |\rho| < 1 \quad (2.38)$$

$$\tilde{\eta}(\rho, 0) = 0 \quad |\rho| \geq 1 \quad (2.39)$$

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(\rho, \sigma) = 0 \quad (2.40)$$

By substituting  $\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \rho}$  with  $-\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \sigma}$ , we obtain a boundary value problem for the harmonic function  $\tilde{\eta}$  (the harmonic conjugate  $\tilde{\xi}$  is then determined by the requirement of vanishing at infinity). Then we have the linear problem :

Find  $\tilde{\eta}$  harmonic in  $A^*$  such that :

$$-\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \sigma} + \nu^* \tilde{\eta} = 0 \quad \text{for } \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}, \rho \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

$$\tilde{\eta}(\rho, 0) = -f'(\varphi^* \frac{\rho}{c}) \quad |\rho| < 1 \quad (2.42)$$

$$\tilde{\eta}(\rho, 0) = 0 \quad |\rho| \geq 1 \quad (2.43)$$

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \tilde{\eta}(\rho, \sigma) = 0 \quad (2.44)$$

where  $\nu^*$  is the constant  $\varphi^* \frac{g_0}{c^3}$ .

We consider the linear problem

$$\Delta \eta = 0 \quad \text{in } A^* \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} - \nu^* \eta = 0 \quad \text{for } \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}, \rho \in \mathbb{R} \quad (2.46)$$

$$\eta = g \quad \text{for } \sigma = 0, \rho \in \mathbb{R} \quad (2.47)$$

where

$$g(\rho) = \begin{cases} -f'(\frac{\varphi^* \rho}{c}) & \text{for } |\rho| < 1 \\ 0 & \text{for } |\rho| \geq 1 \end{cases}$$

**Remark 1** : Using [26], we prove that  $g$  is in  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ .

### 2.3.1 A variational solution for the linear problem

For  $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$  there exists a function  $v_0 \in H^1(A^*)$  such that  $v_0 = g$  for  $\sigma = 0$ .

A variational form of the problem can now be given in the Sobolev space  $H^1(A^*)$  endowed with the equivalent norm

$$\|v\|^2 = \int_{A^*} |\nabla v|^2 + \int_{F^*} |v|^2. \quad (2.48)$$

Let us put  $v = v_0 + v_1$  and consider the subspace  $H_*^1 \subset H^1(A^*)$  of the functions vanishing on  $B^*$ . Then the weak form of (2.45)-(2.47) is :  
find  $v_1 \in H_*^1$  such that

$$\int_{A^*} \nabla v_1 \nabla w - \nu^* \int_{F^*} v_1 w = - \int_{A^*} \nabla v_0 \nabla w + \nu^* \int_{F^*} v_0 w \quad \forall w \in H_*^1 \quad (2.49)$$

We can now state :

**Theorem 2** *For any given  $g \in H^{1/2}(\mathbb{R})$  and  $c^2 > g_0 H$  ( $g_0$  is the gravity acceleration), there is a unique weak solution in  $H^1(A^*)$  of the problem (2.45)-(2.47). Furthermore, we have the bound*

$$\|v\|_{H^1(A^*)} \leq c \|g\|_{H^{1/2}(B^*)} \quad (2.50)$$

for some positive constant  $c$ .

**Proof.** We must show that the bilinear form

$$a(v_1, w) = \int_{A^*} \nabla v_1 \nabla w - \nu^* \int_{F^*} v_1 w \quad (2.51)$$

is continuous and coercive in the space  $H_*^1$  and that the linear form

$$l(w) = - \int_{A^*} \nabla v_0 \nabla w + \nu^* \int_{F^*} v_0 w \quad (2.52)$$

is continuous on the space  $H_*^1$ .

First, we show the following result which will be useful for the coercivity of  $a(.,.)$ .

For any  $v_1 \in H_*^1$  we can write

$$v_1(x, \frac{cH}{\varphi^*}) = \int_0^{cH/\varphi^*} \frac{\partial v_1}{\partial y} dy \quad (2.53)$$

then

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |v_1|^2(x, \frac{cH}{\varphi^*}) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^{cH/\varphi^*} \frac{\partial v_1}{\partial y} dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^{cH/\varphi^*} \left| \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|^2 dy \int_0^{cH/\varphi^*} dy \right) dx \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{cH}{\varphi^*} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^{cH/\varphi^*} \left| \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|^2 dy \right) dx \\
&\leq \frac{cH}{\varphi^*} \int_{A^*} |\nabla v_1|^2
\end{aligned}$$

So :

$$\begin{aligned}
a(v_1, v_1) &= \int_{A^*} |\nabla v_1|^2 - \nu^* \int_{F^*} |v_1|^2 \\
&\geq \int_{A^*} |\nabla v_1|^2 - \frac{g_0 \varphi^*}{c^3} \frac{cH}{\varphi^*} \int_{A^*} |\nabla v_1|^2 \geq \left(1 - \frac{g_0 H}{c^2}\right) \int_{A^*} |\nabla v_1|^2
\end{aligned}$$

where  $(1 - \frac{g_0 H}{c^2})$  is strictly positive because  $\nu^* < \frac{\varphi^*}{cH}$ . Then the bilinear form  $a(., .)$  is coercive on  $H_*^1$ .

Now we prove the continuity of  $a(., .)$  and  $l(.)$  For  $w$  in  $H_*^1$ , we have :

$$\begin{aligned}
|a(v_1, w)| &= \left| \int_{A^*} \nabla v_1 \nabla w - \nu^* \int_{F^*} v_1 w \right| \\
&\leq \|\nabla v_1\|_{L^2(A^*)} \|\nabla w\|_{L^2(A^*)} + \nu^* \|v_1\|_{L^2(F^*)} \|w\|_{L^2(F^*)} \\
&\leq \|v_1\|_{H_1^*} \|w\|_{H_1^*} + \alpha \nu^* \|v_1\|_{H_1^*} \|w\|_{H_1^*} \\
&\leq (1 + \alpha \nu^*) \|v_1\|_{H_1^*} \|w\|_{H_1^*}.
\end{aligned}$$

where the constant  $\alpha$  comes from the continuity of the trace operator from  $H^1(A^*)$  to  $H^{1/2}(F^*)$ .

The same arguments give the continuity of the linear form  $l(.)$  and by putting  $w = v_1$  in (2.49) we easily obtain (2.50). ■

We now investigate the regularity and the decay at infinity of the above solution.

**Proposition 3** *Let  $v$  be the solution of (2.45)-(2.47). Then, for every  $R > 1$  we have*

$$\sup_{|\rho| \geq R, 0 \leq \sigma \leq \frac{cH}{\varphi^*}} e^{\lambda_1 |\rho|} |v(\rho, \sigma)| < \infty \quad (2.55)$$

where  $\lambda_1$  is the first positive solution of

$$\tan\left(\lambda \frac{cH}{\varphi^*}\right) = \frac{\lambda}{\nu^*}. \quad (2.56)$$

**Proof.** Let us consider the restriction of  $v$  to the domain  $(R, +\infty) \times (0, \frac{cH}{\varphi^*})$ ; clearly  $v$  is harmonic and square integrable in this domain and satisfies the conditions (2.46)-(2.47) on the upper and lower bound respectively. Then, by separation of variables one gets

$$v = \sum_{n \geq 1} c_n e^{-\lambda_n \rho} \sin(\lambda_n \sigma)$$

where  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  are the positive solutions of equation (2.56) and the coefficients  $c_n$  are uniquely determined by the values of the function  $v(R, \cdot)$ . Thus,  $v \sim C e^{-\lambda_1 \rho}$  for large positive values of  $\rho$ , uniformly with respect to  $\sigma$ . Clearly, the same conclusion holds for large negative values of  $\rho$ . Hence the bound (2.55) follows. ■

Now we give a result which will be useful for the next section. We consider the following boundary value problem :

$$\Delta \eta = 0 \quad \text{in } A^* \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} - \nu^* \eta = l, \quad \rho \in \mathbb{R}, \sigma = \frac{cH}{\varphi^*} \quad (2.58)$$

$$\eta(\rho, 0) = k, \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (2.59)$$

We have

**Proposition 4** *Assume that  $k \in H^{3/2}(\mathbb{R})$  and  $l \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ . Then, there exists a unique solution  $\eta \in H^2(A^*)$  of the problem (2.57)-(2.59).*

**Proof.** By the same arguments as in theorem 2 there exists a solution  $\eta \in H^1(A^*)$  of (2.57)-(2.59).

Moreover, the condition

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = -\sigma^* \eta + l, \quad \text{with } l \text{ and } \eta \text{ in } H^{1/2}(\mathbb{R}), \text{ and } k \in H^{3/2}(\mathbb{R})$$

implies that  $\eta \in H^2(A^*)$ . ■

**Corollary 5** *Assume that for some  $\rho_0 > 1$ , there exists  $\mu > \lambda^* > 0$  with  $\lambda^* = \frac{\varphi^* \lambda_1}{c}$  and  $\lambda_1$  the first positive solution of the equation (2.56), such that  $\sup_{|\rho| \geq \rho_0} e^{\mu|\rho|} |l(\rho)| < \infty$  and suppose that  $l \in C^{0,1}(\mathbb{R})$ . Then, there is a unique holomorphic function*

$$\chi = \xi - i\eta$$

*belonging to  $H^2(A^*)$ , satisfying the boundary conditions (2.58)-(2.59). Furthermore  $\chi|_{\sigma=\frac{cH}{\varphi^*}} \in C^{1,1}(\mathbb{R})$  and the following bounds hold :*

$$\sup_{A^*} e^{\lambda^*|\rho|} |\chi(\rho, \sigma)| < \infty \quad (2.60)$$

$$\sup_{|\rho| \geq \rho_0} e^{\lambda^*|\rho|} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \left( \rho, \frac{cH}{\varphi^*} \right) \right| < \infty \quad (2.61)$$

**Proof.** We note that the solution of the problem (2.57)-(2.59) can be written in the form :  $\tilde{\eta} = \eta_0 + \eta_1$ , where  $\eta_1(\rho, 0) = 0$ ,  $\eta_0, \eta_1$  are harmonic in  $A^*$  and satisfy the boundary conditions :

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \sigma} - \nu^* \eta_0 = 0 \quad \text{for } \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}, \rho \in \mathbb{R} \quad (2.62)$$

$$\eta_0 = k - \eta_1 \quad \text{for } \sigma = 0, \rho \in \mathbb{R} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma} - \nu^* \eta_1 = l \quad \text{for } \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}, \rho \in \mathbb{R} \quad (2.64)$$

We observe that, if  $\eta_1$  is known, the problem for  $\eta_0$  is similar to problem (2.45)-(2.47) ; by proposition 3 the bounds (2.60),(2.61) hold for the harmonic function  $\chi_0 = \xi_0 - i\eta_0$  (where  $\xi_0$  is the harmonic conjugate of  $\eta_0$  vanishing at infinity). Thus, we are reduced to prove the bounds for the function  $\eta_1$  satisfying (2.64) (and for the harmonic conjugate  $\xi_1$ ). Let us define  $H^* = \frac{cH}{\varphi^*}$ ; by elementary calculations,  $\eta_1$  has the representation

$$\eta_1(\rho, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ip\rho} \widehat{K}_\sigma(p) \widehat{l}(p) dp, \quad (2.65)$$

where

$$\widehat{K}_\sigma(p) = \frac{\sinh(p\sigma)}{p \cosh(pH^*) - \nu^* \sinh(pH^*)}$$

and  $\widehat{l}(p)$  is the Fourier transform of  $l$ . We point out that the function  $\widehat{K}_\sigma$  is not singular since the equation  $\nu^* \tanh(pH^*) = p$  has only the real solution  $p = 0$  for  $\nu^* H^* < 1$ . We further note that the integral (2.65) is convergent also for  $\sigma = \frac{cH}{\varphi^*}$ . In fact,  $\widehat{l}$  belongs to  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  and we easily verify that  $\widehat{K}_\sigma$  belongs to  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ .

By the convolution theorem we have :

$$\eta_1(\rho, \sigma) = \int_{\mathbb{R}} K_\sigma(\rho - \rho') l(\rho') d\rho' \quad (2.66)$$

where

$$K_\sigma(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ip\rho} \frac{\sinh(p\sigma)}{p \cosh(pH^*) - \nu^* \sinh(pH^*)} dp \quad (2.67)$$

Note that the function  $p \mapsto \frac{\sinh(p\sigma)}{p \cosh(pH^*) - \nu^* \sinh(pH^*)}$  has countable poles which are all pure imaginary.

For  $|\rho| > 0$ , we can evaluate (2.67) by residual formula and find :

$$K_\sigma(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\sigma) e^{-\lambda_n^* |\rho|} \quad (2.68)$$

where

$$c_n(\sigma) = \frac{\sin(\lambda_n^* \sigma)}{(1 - \nu^* H^*) \cos(\lambda_n^* H^*) - \lambda_n^* H^* \sin(\lambda_n^* H^*)}$$

and  $\lambda_n^*$  are the positive solutions of the equation

$$\tan(\lambda H^*) = \frac{\lambda}{\nu^*}.$$

For large values of  $n$  we have  $\lambda_n^* H^* \approx (n - 1/2)\pi$  so :

$$c_n(H^*) \sim -\frac{1}{n\pi}$$

and from (2.68) we get the estimate :

$$|K_\sigma(\rho)| \leq c e^{-\lambda_1^* |\rho|} \quad (2.69)$$

for  $|\rho| > 0$  with  $c$  independent of  $\sigma$ .

We can now prove the bounds (2.60),(2.61) for the holomorphic function  $\chi_1 = \xi_1 - i\eta_1$ . We set  $I_0 = (-\rho_0, \rho_0)$ ,  $I_{\rho,\delta} = (\rho - \delta, \rho + \delta)$  then, by the representation (2.66), the estimate (2.69) and the decaying property of  $l$ , we obtain for

$|\rho| > \rho_0 + \delta$

$$\begin{aligned} |\eta_1(\rho, \sigma)| &\leq \int_{I_{\rho,\delta}} |K_\sigma(\rho - \rho')| |l(\rho')| d\rho' + \int_{I_0} |K_\sigma(\rho - \rho')| |l(\rho')| d\rho' + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}/\{I_{\rho,\delta} \cup I_0\}} |K_\sigma(\rho - \rho')| |l(\rho')| d\rho' \\ &\leq C \left\{ (\|K_\sigma\|_{L^2} + \|l\|_{L^2}) e^{-\lambda_1^* |\rho|} + \int_{\mathbb{R}/\{I_{\rho,\delta} \cup I_0\}} e^{-\lambda_1^* (|\rho - \rho'| + |\rho'|)} d\rho' \right\} \\ &\leq C e^{-\lambda_1^* |\rho|} \end{aligned} \quad (2.70)$$

with  $C$  independent of  $\sigma$ .

By (2.66),(2.67) we see that the same bound holds for every derivative of  $\eta_1$  if  $\sigma \leq \sigma_0 < H^*$ .

The limit at infinity of (2.70) extend this bound to  $\sigma = H^*$  for  $|\rho| \geq \rho_0$ .

By the condition (2.64) and the assumption on  $l$  we obtain the same estimate for  $\frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma}$ ; the same bound holds for the function  $\frac{\partial \xi_1}{\partial \rho}$  (we have used the Cauchy-Riemann relations). So (2.61) holds. Furthermore we can write :

For  $\rho < -\rho_0$

$$|\xi_1(\rho, \sigma)| = \left| \int_{-\infty}^{\rho} \frac{\partial \xi_1}{\partial t}(t, \sigma) dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\rho} \frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma}(t, \sigma) dt \right| \leq C e^{-\lambda_1^* |\rho|} \quad (2.71)$$

For  $\rho > \rho_0$

$$|\xi_1(\rho, \sigma)| = \left| \int_{\rho}^{+\infty} \frac{\partial \xi_1}{\partial t}(t, \sigma) dt \right| = \left| \int_{\rho}^{+\infty} \frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma}(t, \sigma) dt \right| \leq C e^{-\lambda^* |\rho|} \quad (2.72)$$

It follows that  $\xi_1$  satisfies the bound (2.70). Then (2.60) is proved. ■

**Remark 6** By recalling the relation  $\xi_{\rho} = -\eta_{\sigma}$ , which holds in  $A^*$ , we can rephrase the boundary condition (2.58) in the form

$$\xi_{\rho} + \nu^* \eta = -l \quad (2.73)$$

## 2.4 The solution of the nonlinear problem

To solve the nonlinear problem, we define some Banach spaces in order to apply the implicit function theorem to the equation  $B(\chi, \varepsilon) = 0$  where  $B$  is defined by (2.34). Here we use the results given in corollary 5

Let us define the following set :

$$X = \left\{ \begin{array}{l} \chi = \xi - i\eta \text{ holomorphic in } A^*, \chi \in H^2(A^*) \cap C^{1,1}(\bar{A}^*), \eta(\cdot, 0) = 0, |\rho| > 1, \\ \sup_{A^*} e^{\lambda^* |\rho|} |\chi(\rho, \sigma)| < \infty \end{array} \right\}$$

where  $\lambda^*$  is the first positive root of :

$$\frac{\lambda}{\nu} = \operatorname{tg}\left(\lambda \cdot \frac{cH}{\varphi^*}\right).$$

Then  $X$  is a Banach space of continuous functions vanishing at infinity equipped with the norm :

$$\|\chi\| = \|\chi\|_{H^2(A^*)} + \sup_{A^*} e^{\lambda^* |\rho|} |\chi(\rho, \sigma)| + \|\chi\|_{C^{1,1}(A^*)}.$$

We now define,  $Y_0$  and  $Y$  by

$$Y_0 = \left\{ l \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \cap C^{0,1}(\mathbb{R}) / \sup_{|\rho| \geq \rho_0} e^{\lambda^* |\rho|} |l(\rho)| < \infty \right\}$$

$$Y = H^{3/2}(-1, 1) \times Y_0 \quad (2.74)$$

To prove in the following theorem that the operator  $B$  is continuously differentiable, we need this definition :

**Definition 7** We call the Nemitski operator associated to a function  $f$ , the application defined by  $u \mapsto f \circ u$ .

**Theorem 8** Let  $f$  be a  $C^2$  function defined in an interval  $J \supset [-\frac{\varphi^*}{c}, \frac{\varphi^*}{c}]$  and suppose that the Nemitski operator associated to  $f''$  is continuous from  $H^{3/2}(-1, 1)$  to  $H^{3/2}(-1, 1)$ . Then, there exists  $\varepsilon_0 > 0$  and a bounded open set  $U \subset X$  containing the solution  $\bar{\chi}$  of the problem :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \sigma^* \eta = 0 \quad \text{for } \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}, \quad \rho \in \mathbb{R} \quad (2.75)$$

$$\eta(\rho, 0) = -f'(\varphi^* \frac{\rho}{c}) \quad |\rho| < 1 \quad (2.76)$$

$$\eta(\rho, 0) = 0 \quad |\rho| \geq 1 \quad (2.77)$$

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(\rho, \sigma) = 0 \quad (2.78)$$

such that the operator

$$B : U \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow Y$$

defined by (2.34) is continuously differentiable.

**Proof.** By recalling the expression (2.32) of  $B^1$ , we may chose  $\varepsilon_0$  and  $U$  such that if  $(\chi, \varepsilon) \in U \times [0, \varepsilon_0)$ , the relation  $\frac{\varphi^*}{c} \int_0^\rho [1 + \varepsilon \xi(t, 0)] dt \in J$  holds for every  $\rho \in [-1, 1]$ . Then, by our assumptions on  $f''$  and the continuity of the product between functions of  $H^2(-1, 1)$ , the derivative (G-differential) of  $B^1$  at  $\chi^* = \xi^* - i\eta^*$  in the direction  $\chi = \xi - i\eta$  exists and is equal to

$$\begin{aligned} d_G B^1(\chi^*, \varepsilon)\chi &= \eta(\rho, 0) - \varepsilon f'(\frac{\varphi^*}{c} \int_0^\rho [1 + \varepsilon \xi^*(t, 0)] dt) \xi(\rho, 0) - \\ &- \varepsilon \frac{\varphi^*}{c} f''(\frac{\varphi^*}{c} \int_0^\rho [1 + \varepsilon \xi^*(t, 0)] dt) [1 + \varepsilon \xi^*(\rho, 0)] \int_0^\rho \xi \end{aligned} \quad (2.79)$$

with  $\rho \in (-1, 1)$ . Furthermore, the right-hand side term of (2.79) defines a bounded linear operator

$$d_G B^1(\chi^*, \varepsilon) : X \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(-1, 1) \quad (2.80)$$

and one can easily check that the map

$$(\chi^*, \varepsilon) \mapsto d_G B^1(\chi^*, \varepsilon) \quad (2.81)$$

is continuous. Then  $B^1$  is Fréchet differentiable with continuous derivative in  $U \times [0, \varepsilon_0)$ . The differentiability of  $B^1$  with respect to  $\varepsilon$  is readily verified.

Let us now consider the operator  $B^2$  given by (2.33) and take  $\varepsilon_0$  small enough such that  $|1 + \varepsilon \chi| > 0$  for every  $\chi \in U$ . Then, by a straightforward calculation we can write

$$B^2(\chi, \varepsilon) = \left\{ |1 + \varepsilon \chi|^{-4} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \varepsilon \left( \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \xi + \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \eta \right) + \nu^* \eta \right| \right\}_{\rho \in \mathbb{R}, \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}} \quad (2.82)$$

By the above expression, by the continuity of the application  $f, g \mapsto f.g$  from  $H^{3/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R})$  into  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ , and by corollary 5, we find that  $B^2$  is a well defined continuous operator from  $X$  into  $Y_0$ . Moreover the G-derivative at  $\chi^*$  is given by

$$d_G B^2(\chi^*, \varepsilon)\chi = \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \nu^* \eta + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.83)$$

where  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  represent a function depending on  $\chi, \chi^*$  and their derivatives, whose norm for  $\varepsilon \rightarrow 0$  (and  $\chi, \chi^*$  in a bounded set of  $X$ ) is  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . Hence, we obtain as before that

$d_G B^2(\chi^*, \varepsilon) : X \rightarrow Y_0$  is a bounded linear operator and that the map  $(\chi^*, \varepsilon) \mapsto d_G B^2(\chi^*, \varepsilon)$  is continuous in  $U \times [0, \varepsilon_0)$ . Finally, again from (2.82) we easily get the differentiability of  $B^2$  with respect to  $\varepsilon$ . ■

By denoting with  $B' = B'(\chi^*, \varepsilon)$  the Fréchet differential of  $B$  with respect to  $\chi$ , we get from (2.79) and (2.83)

$$B'(\chi^*, 0)\chi = (\eta_{|\rho| < 1, \sigma=0}, \{\xi_\rho + \nu^* \eta\}_{\rho \in \mathbb{R}, \sigma = \frac{cH}{\varphi^*}}) \quad (2.84)$$

By proposition 4, corollary 5 and remark 6 we get the following result :

**Corollary 9** *For every  $\chi \in U$  the operator  $B'(\chi, 0)$  is invertible.*

Now, by applying the implicit function theorem, we obtain the main result :

**Theorem 10** *Under the assumptions of theorem 8 on  $f$ , there exists  $\varepsilon_0 > 0$  such that, for every  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ , the equation  $B(\chi, \varepsilon) = 0$  has a unique solution  $\chi^\varepsilon \in U$ . Moreover, the map  $\varepsilon \mapsto \chi^\varepsilon$  is continuously differentiable.*

**Remark 11** *Here we verify that  $\varphi^*$  is uniquely determined from  $x^*$ . Indeed, from (2.30) we have the relation :*

$$x^* = \frac{\varphi^*}{c} \int_0^1 (1 + \varepsilon \xi(s, 0)) ds \quad (2.85)$$

We put

$$\mathfrak{S}(\varepsilon, \varphi^*) = x^* - \frac{\varphi^*}{c} \int_0^1 (1 + \varepsilon \xi(s, 0)) ds \quad (2.86)$$

We have :

$$\mathfrak{S}(0, c x^*) = 0 \quad (2.87)$$

and

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \varphi^*}(\varepsilon, \varphi^*) = -\frac{1}{c} \int_0^1 (1 + \varepsilon \xi(s, 0)) ds - \frac{\varphi^*}{c} \int_0^1 \varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial \varphi^*}(s, 0) ds \quad (2.88)$$

Then

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \varphi^*}(0, cx^*) = -\frac{1}{c} \neq 0 \quad (2.89)$$

From the implicit function theorem, we deduce that there exists a neighborhood  $V$  of zero such that for all  $\varepsilon$  in  $V$ , there exists a unique solution  $\varphi^*$  verifying  $\mathfrak{S}(\varepsilon, \varphi^*) = 0$

**Conclusion 12** *In this paper we have given a result of existence and uniqueness for the non linear free surface problem concerning a torrential flow over an obstacle. For this, we have used the hodograph transformation to solve, by the implicit function theorem, an equation defined in the upper and lower bound in the hodograph plane. We point out that the free surface profile  $h(x)$  has disappeared among the unknowns and it will be recovered by the inverse image of the level line  $\psi = cH$ .*

# Chapitre 3

## A study of the inverse of a free surface problem

### Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du "problème inverse" d'un problème d'écoulement à frontière libre au dessus d'un obstacle placé au fond d'un canal. Nous entendons par "problème inverse" la recherche de l'obstacle ayant provoqué une perturbation observée sur la surface libre. Après avoir fait un changement de variables et ramené le domaine fluide à un rectangle, nous reformulons le problème à l'aide d'un opérateur de bord  $T(b, \gamma)$  qui dépend de la fonction  $b(x)$  représentant le fond du domaine et de la fonction  $\gamma(x)$  représentant la perturbation de la surface libre. Cet opérateur est défini de l'espace  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  dans  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$  où  $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $C^m$  holdériennes avec une décroissance exponentielle à l'infini. L'inconnue du problème est la fonction  $b(x)$ . Nous connaissons une solution qui est  $b = \gamma = 0$  qui correspond à l'écoulement plat en l'absence de toute perturbation et de tout obstacle. L'idée est d'utiliser le théorème des fonctions implicites autour de cette solution pour montrer l'existence et l'unicité de l'obstacle pour des petites perturbations. Nous avons montré la différentiabilité de l'opérateur par rapport à  $b$  et  $\gamma$  et l'injectivité de  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$  de  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  dans  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$ . Pour la surjectivité nous l'avons montré de  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  dans un sous espace, qui n'est pas forcément fermé, de  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$ . Ce résultat ne nous permet pas de conclure par le théorème des fonctions implicites. Toutefois, le résultat d'injectivité sera utilisé dans le travail exposé au chapitre suivant. Nous donnons ici l'article tel qu'il a été publié dans la revue "Abstract and Applied Analysis".

In this paper we prove the existence of an obstacle lying on the bottom

of an infinite channel inducing a surface on the upper bound of the fluid domain. This problem is the inverse of the free surface problem flow which has been studied by several authors. We use the implicit function theorem to establish the existence of the solution of the problem.

This paper considers the problem of the existence of an obstacle lying on the bottom of a channel where the upper bound of the flow is known (see fig 1). The flow is bidimensional, stationary and irrotational. The fluid is inviscid and incompressible. The gravity is considered while the effects of the superficial tension are neglected. Several authors have studied the direct problem (the free surface problem). It consists on the determination of the free surface flow for a given obstacle lying on the bottom of the channel. Our aim is to study the inverse of this problem. In [22], T.P. Felici has studied the inverse problem in magneto hydrodynamic. The inverse problem is non linear just as the direct problem ; the non linearity is due to the Bernoulli condition at the upper bound and to the fact that the bottom is unknown.

The plan of this paper is as follows : In section 2 we formulate the governing equations of the problem in the undimensionless form. In section 3 we introduce the stream function in these equations. In section 4, the problem is formulated as an equation for an operator on which we apply the implicit function theorem. For this, theorems and propositions are given. We achieve this work by a conclusion in section 5.

### 3.1 The governing equations

We consider a steady two dimensional flow of an ideal and incompressible fluid in a channel with a given upper bound created by an obstacle which is the principal unknown of our problem. We denote by  $\Omega_b^\gamma$  the domain occupied by the fluid, where  $b$  is the equation of the obstacle and  $\gamma$  is the perturbation of the upper bound. We set

$$\Omega_b^\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < +\infty, b(x) < y < y_0 + \gamma(x)\}$$

where  $(x, y)$  is a coordinate system in which  $x$  and  $y$  are respectively the horizontal and positive vertical directions,  $y_0$  is the height of the unperturbed fluid. The function  $\gamma$  is a  $C^2(\mathbb{R})$  function verifying  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \gamma(x) = 0$ . We look for a function  $b$  in the same space as  $\gamma$  with the conditions :

$$0 \leq b(x) < y_0 + \gamma(x) \quad \text{and} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} b(x) = 0.$$

The problem is formulated as :

Given a function  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  find a function  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and a vector field  $\vec{u}$  (velocity of the fluid) such that :

**governing equations in  $\Omega_b^\gamma$  :**

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \quad (3.1)$$

$$\operatorname{curl} \vec{u} = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \quad (3.2)$$

Equation (3.1) expresses the incompressibility of the fluid, equation (3.2) is given by the irrotationality of the flow.

**boundary conditions :**

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ for } y = b(x) \quad (3.3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ for } y = y_0 + \gamma(x) \quad (3.4)$$

where  $\vec{\nu}$  is the exterior normal to the boundary of  $\Omega_b^\gamma$ . Equation (3.3) describes the impermeability of the flow at the bottom and equation (3.4) is a kinematic condition.

**Conditions at infinity :**

We suppose that the flow is asymptotically uniform and horizontal far upstream and downstream of the obstacle. We write then

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{u}(x, y) = (u_0, 0) \quad (3.5)$$

**Condition across the upper bound :**

The dynamic condition of continuity of the pression across the upper bound is given by :

$$\frac{\rho}{2} |\vec{u}|^2 + \rho g y = c \quad (3.6)$$

where  $\rho$  is the density of the fluid,  $g$  is the downward acceleration due to the gravity and  $c$  is a constant.

This equation is called Bernoulli equation.

**Dimensionless equations** Dimensionless variables are defined by referring all lengths to the quantity  $y_0$ , and all velocities to  $u_0$ . We put :

$$\begin{cases} \vec{u} = u_0 \vec{u}^* \\ x = y_0 x^* \\ y = y_0 y^* \end{cases}$$

The system (3.1)-(3.4) becomes :

$$\operatorname{div} u^* = 0 \quad \text{in } \Omega_{b^*}^{\gamma^*} \quad (3.7)$$

$$\text{curl} u^* = 0 \text{ in } \Omega_{b^*}^{\gamma^*} \quad (3.8)$$

$$u^* \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{for } y^* = b^*(x^*) \quad (3.9)$$

$$u^* \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{for } y^* = 1 + \gamma^*(x^*) \quad (3.10)$$

where

$$\Omega_{b^*}^{\gamma^*} = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x^* < +\infty, b^*(x^*) < y^* < 1 + \gamma^*(x^*)\}$$

and

$$b^*(x^*) = \frac{1}{y_0} b(y_0 x^*), \quad \gamma^*(x^*) = \frac{1}{y_0} \gamma(y_0 x^*).$$

The conditions at infinity become :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u^*(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

The Bernoulli equation takes the form :

$$\frac{F^2}{2} |u^*|^2 + 1 + \gamma^*(x^*) = c \quad (3.11)$$

where  $F = \frac{u_0}{\sqrt{g y_0}}$  is called the Froude number of the flow.

## 3.2 Formulation of the problem in stream function

In the following, we write all the variables without the symbol  $*$ . The irrotationality and the incompressibility of the fluid lead us to define an harmonic stream function  $\Psi$  such that :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Equation (3.9) will be written :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'(x) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

and becomes :

$$b'(x) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \text{ in } y = b(x).$$

This is equivalent to

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0 \text{ in } y = b(x).$$

In the same way, equation (3.10) gives :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0 \text{ in } y = 1 + \gamma(x)$$

We deduce that  $\Psi$  is constant in  $y = b(x)$  and  $y = 1 + \gamma(x)$ .

Thanks to the condition at infinity, we can evaluate the constant which appears in the equation (3.6), and the values of  $\Psi$  at the bound of  $\Omega_b^\gamma$ .

In fact, at infinity we have :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x, y) = y + k$$

Since the function  $\Psi$  is a stream function we can choose  $k = 0$ .

Hence

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x, y) = y \tag{3.12}$$

Replacing these limits in equation (3.11) we obtain :

$$\frac{F^2}{2} + 1 = c$$

Moreover, we deduce from (3.12) that

$$\Psi = 0 \text{ in } y = b(x)$$

and

$$\Psi = 1 \text{ in } y = 1 + \gamma(x).$$

Then the stream function  $\Psi$  verifies :

$$\Delta \Psi = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \tag{3.13}$$

$$\Psi = 0 \text{ in } y = b(x) \tag{3.14}$$

$$\Psi = 1 \text{ in } y = 1 + \gamma(x) \tag{3.15}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x, y) = y \tag{3.16}$$

$$\frac{F^2}{2} |\nabla \Psi|^2(x, 1 + \gamma(x)) + \gamma(x) = \frac{F^2}{2} \text{ in } y = 1 + \gamma(x) \tag{3.17}$$

Taking into account the condition (3.16), we can write

$$\Psi = y + \psi$$

where  $\psi$  is the perturbation of the stream function.

The equations (3.13)-(3.17) will be written as :

$$\Delta\psi = 0 \text{ in } \Omega_b^\gamma \quad (3.18)$$

$$\psi(x, b(x)) = -b(x) \quad (3.19)$$

$$\psi(x, 1 + \gamma(x)) = -\gamma(x) \quad (3.20)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x, y) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{F^2}{2} (|\nabla\psi|^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial y} + 1) + \gamma(x) = \frac{F^2}{2} \text{ in } y = 1 + \gamma(x) \quad (3.22)$$

### 3.3 Determination of the obstacle :

We put :

$$T(b, \gamma) = \frac{F^2}{2} \left[ |\nabla\psi|^2(x, 1 + \gamma(x)) + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 1 + \gamma(x)) \right] + \gamma(x)$$

The problem can be formulated as :

given a function  $\gamma$  in a neighbourhood of zero in a space which will be defined later, find a function  $b$  in the same space and also in a neighbourhood of zero, such that :

$$T(b, \gamma) = 0 \quad (3.23)$$

with  $\psi$  verifying the equations (3.18)-(3.21).

For  $b = \gamma = 0$ ,  $\psi = 0$  verifies equations (3.18)-(3.22). So  $T(0, 0) = 0$ .

To solve  $T(b, \gamma) = 0$ , we use the implicit function theorem in the neighbourhood of  $(b, \gamma) = (0, 0)$ .

Consider the change of variables :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = \frac{y-b(x)}{1+\gamma(x)-b(x)} \end{cases} \quad (3.24)$$

we transform the domain  $\Omega_b^\gamma$  in the following infinite strip  $Q$  :

$$Q = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < \tilde{x} < +\infty, 0 < \tilde{y} < 1 \right\}.$$

We put  $\psi(x, y) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$  then  $\tilde{\psi}$  verifies :

$$\Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} = 0 \text{ in } Q \quad (3.25)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = -b(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad (3.27)$$

$\mathcal{P}_b^\gamma$  is an operator defined by :

$$\mathcal{P}_b^\gamma = a_1 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}$$

where

$$a_1 = 2 \frac{\tilde{y}(b' - \gamma') - b'}{1 + \gamma - b}$$

$$a_2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1 + \frac{1}{(1 + \gamma - b)^2}$$

and

$$a_3 = \frac{-1}{1 + \gamma - b} [b'' + \tilde{y}(\gamma'' - b'')] + \frac{2}{(1 + \gamma - b)^2} (\gamma' - b') [b' + \tilde{y}(\gamma' - b')].$$

The gradient operator becomes :

$$\tilde{\nabla}_{b,\gamma} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{-b' - \tilde{y}(\gamma' - b')}{(1 + \gamma - b)^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{1}{1 + \gamma - b} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{array} \right)$$

The equation (3.23) will be written :

$$\gamma(\tilde{x}) + \frac{F^2}{2} \left[ \left| \tilde{\nabla}_{b,\gamma} \tilde{\psi} \right|^2(\tilde{x}, 1) + \frac{2}{1 + \gamma - b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right] = 0$$

We shall consider  $\gamma$  and  $b$  in the space :

$$B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{2,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |D_x^k v(x)| < \infty \right\}$$

and  $\tilde{\psi}$  in the space :

$$B_c^{2,\lambda}(\bar{Q}) = \left\{ v \in C^{2,\lambda}(\bar{Q}) / \sup_{k+l \leq 2} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \bar{Q}} e^{c|\tilde{x}|} \left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v \right| < \infty \right\}$$

where  $0 < \lambda < 1$  and  $c > 0$ . The choice of these spaces will appear evident later[13].

**Remark 13** *i) The space  $B_c^{m,\lambda}(\bar{Q})$  defined by :*

$$B_c^{m,\lambda}(\bar{Q}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\bar{Q}) / \sup_{k+l \leq m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \bar{Q}} e^{c|\tilde{x}|} \left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v \right| < \infty \right\}$$

*provided with the norm :*

$$\|v\|_{m,c,\lambda} = \sum_{k+l \leq m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \bar{Q}} e^{c|\tilde{x}|} \left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v \right| + \sup_{k+l=m} \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (\tilde{x}', \tilde{y}')} \frac{\left| D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}, \tilde{y}) - D_{\tilde{x}}^k D_{\tilde{y}}^l v(\tilde{x}', \tilde{y}') \right|}{\left[ (\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2 \right]^{\lambda/2}}$$

*is a Banach algebra.*

*ii) The space  $B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R})$  defined by :*

$$B_c^{m,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{m,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v(x) \right| < \infty \right\}$$

*provided with the norm :*

$$\|v\|_{m,c,\lambda} = \sum_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} \left| D_x^k v \right| + \sup_{\substack{(x,x') \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq x'}} \frac{\left| D_x^m v(x) - D_x^m v(x') \right|}{|x - x'|^\lambda}$$

*is also a Banach algebra.*

Now we are able to state the main result of this section :

**Theorem 14** *There exists  $\tilde{c} > 0$  such that for all  $\lambda, 0 < \lambda < 1$ , and all  $c, 0 < c < \tilde{c}$ , there exists a neighbourhood  $\mathcal{V}$  of zero in  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  such that the problem (3.18)-(3.21) has a unique solution  $\psi$  where  $\tilde{\psi}$  belongs to  $B_c^{2,\lambda}(\bar{Q})$  and there exists a mapping  $g : \mathcal{V} \rightarrow B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  of class  $\mathcal{C}^1$  such that  $b = g(\gamma)$ .*

*This theorem is equivalent to the next one :*

**Theorem 15** *There exist  $\tilde{c} > 0$ , and an open ball  $\mathcal{B}$  of radius  $r_0$  centered at the origin of  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  where  $c \in ]0, \tilde{c}[$ , and  $0 < \lambda < 1$ , there exists a neighbourhood  $\mathcal{V}_\gamma$  of zero in  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ , there exists a mapping :*

$$g : \mathcal{V}_\gamma \rightarrow B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$$

*of class  $\mathcal{C}^1$ , such that :  $\{\forall(b, \gamma) \in \mathcal{B}, T(b, \gamma) = 0\} \iff \{\gamma \in \mathcal{V}_\gamma, b = g(\gamma)\}$*

**Proof :** *In the next subsections, we shall verify the hypothesis of the implicit function theorem.*

### 3.3.1 Differentiability of the operator $\mathbf{T}$ with respect to $(b, \gamma)$

To study the differentiability of  $T$  with respect to  $b$  and  $\gamma$ , we use the following results :

**Theorem 16** *There exist  $\tilde{c} > 0$  and  $\lambda \in ]0, 1[$  such that for all  $c \in ]0, \tilde{c}[$  there exists an open ball  $\mathcal{B}$  of radius  $r_0 > 0$ , centered at the origin in  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  such that whenever  $(b, \gamma) \in \mathcal{B}$ , the following statement holds :  
The problem :*

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega_b^\gamma \\ \psi(x, 1 + \gamma(x)) = -\gamma(x), & x \in \mathbb{R} \\ \psi(x, b(x)) = -b(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*has a unique solution  $\psi$  such that :*

a)  $\tilde{\psi}$ , the transform of  $\psi$  by equations (3.24) is in  $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$ .

b) The mapping  $S : (b, \gamma) \mapsto \tilde{\psi}$  is continuously differentiable from  $\mathcal{B}$  into  $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$ .

To prove this theorem we use the following proposition which has been proved in [13]

**Proposition 17** *Let the boundary value problem*

$$\begin{cases} \Delta v = b_1 & \text{in } Q \\ v(\tilde{x}, 1) = b_2(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ v(\tilde{x}, 0) = b_3(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.28)$$

*where  $(b_1, b_2, b_3) \in B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ , then there exists  $\tilde{c} > 0$  such that whenever  $0 < c < \tilde{c}$ , problem (3.28) has a unique solution  $v \in B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$ . Furthermore the solution map  $(b_1, b_2, b_3) \mapsto v$  is a topological isomorphism between the corresponding spaces.*

**Proof of theorem 3**

a) We want to prove that

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b^\gamma : B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}) &\rightarrow B_c^{0,\lambda}(\overline{Q}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) = \mathcal{Y} \\ v &\longmapsto (\Delta v + \mathcal{P}_b^\gamma v, v(\cdot, 0), v(\cdot, 1)) \end{aligned}$$

is an isomorphism. For this we prove by the last proposition that the operator

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0^0 : v \longmapsto (\Delta v, v(\cdot, 0), v(\cdot, 1))$$

is an isomorphism and that

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_b^\gamma\|_{\mathcal{L}(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y})} \leq k.$$

where  $k > 0$ . Then the operator  $\mathcal{A}_b^\gamma$  is also an isomorphism from  $B_c^{2,\lambda}(\overline{Q})$  to  $\mathcal{Y}$  for small  $b$  and  $\gamma$ . For more details see [13] where the proof is complete.

b) To prove that  $S : (b, \gamma) \mapsto \tilde{\psi}$  is continuously differentiable from an open ball  $\mathcal{B}$  of radius  $r_0 > 0$  centered at the origin of  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  we write  $S$  as follows :

$$S(b, \gamma) = (S_2 \circ S_1(b, \gamma))\mathcal{F}(b, \gamma) = \tilde{\psi}$$

where

$$S_1 : \mathcal{B}(0, r_0) \rightarrow \mathcal{L}(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y})$$

$$(b, \gamma) \mapsto \mathcal{A}_b^\gamma$$

$$S_2 : Isom(B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}), \mathcal{Y}) \rightarrow Isom(\mathcal{Y}, B_c^{2,\lambda}(\overline{Q}))$$

$$L \longmapsto L^{-1}$$

and

$$\mathcal{F}(b, \gamma) = (0, -b(\tilde{x}), -\gamma(\tilde{x})) = \mathcal{A}_b^\gamma \tilde{\psi} \in \mathcal{Y}$$

The differentiability of  $\tilde{\psi}$  is given by the differentiability of  $S_1, S_2$  and  $\mathcal{F}(b, \gamma)$  and these results have been proved in [13].

**Theorem 18** *Under the hypothesis of the theorem16 the operator  $T$  is continuously Frechet differentiable on  $\mathcal{B}$ .*

**Proof :** In the new variables  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , the operator  $T(b, \gamma)$  takes the form :

$$T(b, \gamma) = \gamma(\tilde{x}) + \frac{F^2}{2} \left[ \left| \tilde{\nabla}_{b, \gamma} \tilde{\psi} \right|^2(\tilde{x}, 1) + \frac{2}{1+\gamma-b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right]$$

which gives

$$T(b, \gamma) = \gamma(\tilde{x}) + \frac{F^2}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 1) - \frac{\gamma'}{(1+\gamma-b)^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right]^2 + \frac{1}{(1+\gamma-b)^2} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right)^2 + \frac{2}{1+\gamma-b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right\} =$$

$$\gamma(\tilde{x}) + \frac{F^2}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 1) + \lambda_1(b, \gamma) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right]^2 + \lambda_2^2(b, \gamma) \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right)^2 + 2\lambda_2(b, \gamma) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right\}$$

with

$$\lambda_1(b, \gamma) = -\frac{\gamma'}{(1+\gamma-b)^2} ; \quad \lambda_2(b, \gamma) = \frac{1}{1+\gamma-b}.$$

We have shown that  $\tilde{\psi}$  is continuously differentiable with respect to  $b$  and  $\gamma$ . Moreover, it is evident that  $\lambda_1(b, \gamma)$  and  $\lambda_2(b, \gamma)$  are continuously differentiable with respect to  $b$  and  $\gamma$ . We deduce that  $T(b, \gamma)$  is continuously Frechet differentiable with respect to  $b$  and  $\gamma$ .

### 3.3.2 Expression of $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$

In the last subsection, we have seen that  $\tilde{\psi}$  is the solution of the problem :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} = 0 \text{ in } Q \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) = -\gamma(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) = -b(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Note that  $\mathcal{P}_0^0 \tilde{\psi} = 0$  in  $Q$  and  $\tilde{\psi}|_{b=\gamma=0} = 0$  in  $Q$ .

Let  $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ . We put  $\gamma = 0$  in the system above, we derive with respect to  $b$  in the direction  $h$  and we evaluate the derivative at  $b = 0$ . We put :

$$w_h = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial b} \Big|_{b=\gamma=0} . h$$

We obtain :

$$\begin{cases} \Delta w + \mathcal{P}_0^0 w + \frac{\partial}{\partial b} (\mathcal{P}_b^0) \Big|_{b=0} \tilde{\psi} \Big|_{b=\gamma=0} . h = 0 \text{ in } Q \\ w(\tilde{x}, 1) = 0 \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ w(\tilde{x}, 0) = -h(\tilde{x}) \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

and there follows the theorem :

**Theorem 19 :** Let  $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  Then  $w = w_h$  is the unique solution of the problem

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ in } Q \\ w(\tilde{x}, 1) = 0 \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ w(\tilde{x}, 0) = -h(\tilde{x}) \quad \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

For the proof of this theorem we use the last proposition.

Now we can evaluate  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$ . We have :

$$T(b, 0) = \frac{F^2}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\cdot, 1) \right]^2 + \frac{1}{(1-b)^2} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\cdot, 1) \right)^2 + \frac{2}{1-b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\cdot, 1) \right\}$$

We derive with respect to  $b$  in the direction  $h$  at  $b = 0$ . Taking into account the fact that  $\tilde{\psi}|_{b=\gamma=0} = 0$  in  $Q$  we obtain :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial b}(0, 0).h &= F^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\cdot, 1) \right) |_{b=\gamma=0} .h \right\} \\ &= F^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial b}(\cdot, 1) \right) |_{b=\gamma=0} .h \right\} \end{aligned}$$

Keeping the same notation as in theorem 19, we denote  $w_h = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial b}(\cdot, 1) |_{b=\gamma=0} .h$  then we can write

$$\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0).h = F^2 \frac{\partial w_h}{\partial \tilde{y}}$$

### 3.3.3 Inversibility of $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$ :

We recall that the operator  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$  is defined by :

$$\begin{aligned} B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) &\longrightarrow B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \\ h &\longmapsto F^2 \frac{\partial w_h}{\partial \tilde{y}}(\cdot, 1) \end{aligned}$$

where  $w_h$  verifies the problem

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ in } Q \\ w(\tilde{x}, 1) = 0, \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ w(\tilde{x}, 0) = -h(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

We show here the injectivity of the operator  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$ . Let  $h_1$  and  $h_2$  be given in  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  such that :

$$\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)h_1 = \frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)h_2$$

It is equivalent to write :

$$F^2 \frac{\partial w_{h_1}}{\partial \tilde{y}} = F^2 \frac{\partial w_{h_2}}{\partial \tilde{y}}$$

where  $w_{h_i}$  is the solution of the problem :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ in } Q \\ w(\tilde{x}, 1) = 0, \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ w(\tilde{x}, 0) = -h_i(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

We put :

$$w = w_{h_1} - w_{h_2}$$

Then  $w$  verifies :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ in } Q \\ w(\tilde{x}, 0) = h_2 - h_1, \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ w(\tilde{x}, 1) = 0, \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial w}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) = 0, \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

This problem has a solution if and only if  $h_2 - h_1 = 0$ , and this solution is  $w = 0$  (Holmgren theorem e.g. [31]).

Then we have :

$h_1 = h_2$  and the operator  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$  is injective from  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  to  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$

Unfortunately we can't prove the surjectivity of this operator from  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  to  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$ . Nevertheless we have the surjectivity from  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  on its image by  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$  denoted by  $\mathcal{I}$ . We don't know how to characterize  $\mathcal{I}$ ; then it will be interesting to exhibit an explicit subspace  $\mathcal{K}$  of  $\mathcal{I}$ , which will be consistent enough. Let  $K = [-a, +a] \subset \mathbb{R}$ , we consider the subspace  $\mathcal{K}$  of the functions  $g \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  which can be extended to the complex space as an analytic function  $\zeta \mapsto g(\zeta)$  such that, for every integer  $m \in \mathbb{N}$  there is a constant  $c_m$  such that for all  $\zeta = \xi + i\eta$ ,

$$|g(\zeta)| \leq c_m(1 + |\zeta|)^{-m} \exp(2\pi a |\eta|)$$

We want to prove that  $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ , ie for each  $g \in \mathcal{K}$ , there exists  $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  such that  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0).h = g$ .

We search for  $w \in B_c^{2,\lambda}(Q)$  such that :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } Q \\ w(\tilde{x}, 1) = 0, & \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial w}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) = g, & \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

For  $g \in \mathcal{K}$  we have  $w \in \mathcal{S}'$ ; applying the Fourier transformation to the last problem, we find :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tilde{y}^2} &= \xi^2 \hat{w} \\ \hat{w}(\xi, 1) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tilde{y}}(\xi, 1) &= \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

This implies that :

$$\hat{w}(\xi, y) = \hat{g}(\xi) \frac{sh\xi(\tilde{y}-1)}{\xi}$$

From Paley-Wiener theorem, we have  $\hat{g} \in C^\infty(\mathbb{R})$  and  $\text{supp}\hat{g} \subset K$ .

Let  $\theta \in D(\mathbb{R})$ , with  $\theta = 1$  in a neighbourhood of  $K$ . Because  $\text{supp}\hat{g} \subset K$  one can write :

$$\hat{w}(\xi, \tilde{y}) = \hat{g}(\xi) \frac{sh\xi(\tilde{y}-1)}{\xi} = \hat{g}(\xi)\theta(\xi) \frac{sh\xi(\tilde{y}-1)}{\xi}$$

and

$$w(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}) * \bar{\mathcal{F}}(\theta(\xi) \frac{sh\xi(\tilde{y}-1)}{\xi}) = \int_{\mathbb{R}} g(\tilde{x}-z)N(z, \tilde{y})dz$$

where

$$N(z, \tilde{y}) = \bar{\mathcal{F}}(\theta(\xi) \frac{sh\xi(\tilde{y}-1)}{\xi})(z, \tilde{y})$$

It is easy to verify that  $w \in B_c^{2,\lambda}(Q)$ . While putting  $w|_{y=0} = h$  one has the result, ie,  $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  and so  $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ . We have then proved the invertibility of the operator  $\frac{\partial T}{\partial b}(0, 0)$  from  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  to  $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$

### 3.4 Conclusion

In this work, we have shown that for a given upper bound  $y = y_0 + \gamma(x)$  where  $\gamma$  is in the space  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ , there exists a bottom  $y = b(x)$  in the same space, which has created the perturbation  $\gamma(x)$  at the upper bound. This result is local in a neighbourhood of  $(b, \gamma) = (0, 0)$  for all Froude numbers  $F > 0$ .

# Chapitre 4

## Identifiability and stability of boundaries in a supercritical free surface flow.

### Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des résultats d'identifiabilité et de stabilité de frontières dans un écoulement torrentiel. Nous regardons le problème sous ses deux aspects : problème direct et problème inverse. Nous nous intéressons aux cas d'obstacles ayant une régularité  $C^2$ . Pour l'identifiabilité nous utilisons essentiellement le théorème d'unicité de Holmgren. Pour étudier la stabilité de la surface libre par rapport à une petite perturbation du fond plat nous utilisons les résultats obtenus dans [2] et [13]. Pour étudier la stabilité de la surface libre par rapport à une perturbation d'un obstacle déjà existant, on utilise essentiellement le théorème des fonctions implicites et le théorème des accroissements finis. Signalons que l'étude de l'identifiabilité est faite pour des écoulements au dessus d'obstacles sans contraintes sur leur taille. La stabilité que nous obtenons est de type linéaire.

In this paper, we have studied a problem of identifiability of boundaries and stability of the solutions for the direct and the inverse problem concerning a supercritical flow over an obstacle which lies on the bottom of a channel. The proofs of the theorems are based on Holmgren theorem and the mean value theorem. The stability obtained is linear.

## 4.1 Position of the problem

We consider a bidimensional, irrotational and permanent flow of an ideal and incompressible fluid in a domain  $\Omega$  infinite at the downstream and the upstream, with a free surface at the upper boundary and an obstacle on the bottom. We suppose that the flow is uniform with a velocity  $U_0$  at the infinity, upstream and downstream of the obstacle, where the depth of the flow is denoted  $H$  (see the following figure) :

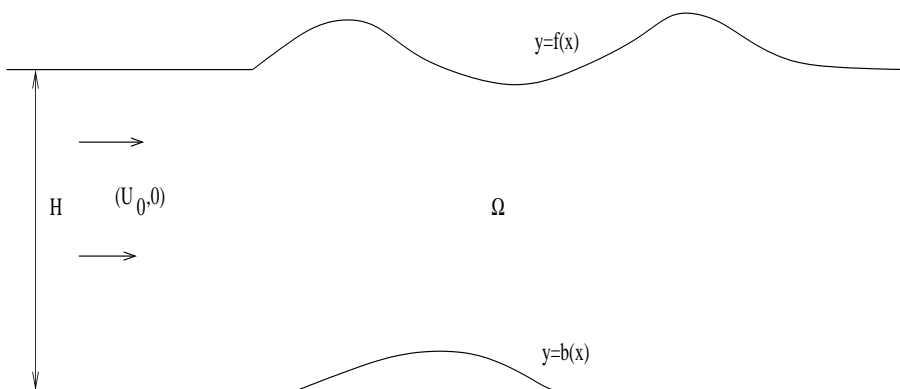


Fig1

The bottom is a plate surface everywhere except in a place where lies an obstacle.  $y = b(x)$  and  $y = f(x)$  are respectively the equations of the bottom  $\Gamma_b$  and the free surface  $\Gamma_f$ . We note

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b(x) < y < f(x)\}$$

We suppose that the functions  $b$  and  $f$  are of the class  $C^2$  on  $\mathbb{R}$ . (in the case of a small height of the obstacle,  $f$  belongs to  $C^2$  because  $b$  belongs to  $C^2$ , see [13]).

In [13], it has been established existence and uniqueness of the free surface for a small obstacle. In this paper, our aim is to generalize the uniqueness for obstacles without condition on their height and to establish the identifiability of the obstacle when the free surface is known.

The irrotationality of the flow and the incompressibility of the fluid permit us to introduce an harmonic stream function  $\psi$  in  $\Omega$ . We give the relations verified by  $\psi$ ; the bottom and the free surface of  $\Omega$  are streamlines so  $\psi$  is constant on  $\Gamma_b$  and  $\Gamma_f$ . We choice  $\psi = 0$  on the bottom and equal to the rate of flow on the free surface. The flow being uniform at the infinity upstream and downstream of the obstacle, the function  $\psi$  is equivalent to  $y$  when  $x$  tends to  $\pm\infty$ . In addition, we have an equilibrium condition on the free surface, called the Bernoulli equation, which traduces the continuity of the pressure across the free surface. It is given by :

$$\frac{\rho}{2}|\nabla\psi|^2 + \rho gy = C^{te} \text{ on } y = f(x) \quad (4.1)$$

where  $\rho$  is the density of the fluid and  $g$  the gravity (for example, see [13] for details).

The constant which appears in the relation (4.1) will be evaluated later. Using the values of  $U_0$  and  $H$ , we adimensione the equations verified by  $\psi$ ; then it appears a number  $F$  called the Froude number which characterizes the flow. This number is equal to  $\frac{U_0}{\sqrt{gH}}$ ; the Bernoulli equation becomes :

$$\frac{F^2}{2} |\nabla\psi|^2 + y = C^{te} \text{ on } y = f(x). \quad (4.2)$$

$\psi$  being constant on the free surface, the tangential derivative of  $\psi$  is equal to zero on this surface. The equation (4.2) takes the new form :

$$\frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 + y = C^{te} \text{ on } y = f(x). \quad (4.3)$$

where  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  is the normal derivative of  $\psi$  at the free surface. The constant in equation (4.3) is equal to :  $\frac{F^2}{2} + 1$ ; indeed at the infinity upstream of the obstacle, we have :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial\psi}{\partial n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1, \text{ and } y = 1 \quad (4.4)$$

so

$$\frac{F^2}{2} + 1 = C^{te}.$$

The equation (4.3) becomes :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 = c_1 - c_2 y \text{ on } y = f(x) \quad (4.5)$$

where

$$c_1 = 1 + \frac{2}{F^2} \text{ and } c_2 = \frac{2}{F^2}. \quad (4.6)$$

We note that if a solution exists, it necessarily verifies :  $y < \frac{c_1}{c_2}$ . Then we obtain :

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \pm \sqrt{c_1 - c_2 y} \text{ on } y = f(x) \quad (4.7)$$

In fact we have

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = +\sqrt{c_1 - c_2 y} \text{ on } y = f(x) \quad (4.8)$$

Indeed

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = a(x, y) \frac{\partial\psi}{\partial n} \text{ on } \Gamma_f \quad (4.9)$$

The direction of the flow is towards the positive  $x$ ; then the horizontal component of the velocity at each point on any streamline is positive. The velocity

$U$  is equal to  $\text{curl}\psi$  then  $\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y) > 0$ , hence  $\psi$  is an increasing function of  $y$ . Then

$$a(x, y) \frac{\partial\psi}{\partial n} > 0 \text{ on } \Gamma_f \quad (4.10)$$

In the other hand, at the infinity upstream of the obstacle we have :

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ on } \Gamma_f \quad (4.11)$$

then

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x, y(x)) = 1 \text{ on } \Gamma_f \quad (4.12)$$

From (4.10) and (4.12) we have :  $a(x, y) > 0$  on  $y = f(x)$ . We conclude by(4.9) that

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} > 0 \quad \text{on } y = f(x) \quad (4.13)$$

Finally  $\psi$  verifies the following problem :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{on } y = b(x) \\ \psi = 1 & \text{on } y = f(x) \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = \sqrt{c_1 - c_2 y} & \text{on } y = f(x) \end{cases} \quad (4.14)$$

where  $c_1$  and  $c_2$  are defined in the relation (4.6) and

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x, y) = y . \quad (4.15)$$

We qualify the problem (4.14)-(4.15) by a direct problem if  $b$  is known and  $f$  is to be determined. It will be qualified by an inverse problem in the opposite case ie  $f$  is known (or at least a part of  $f$ ) and  $b$  is to be identified. In this work, we will consider these two aspects of the problem : the direct problem and the inverse problem. In the direct problem, for a given obstacle, we prove the uniqueness of the solution if it exists. Concerning the inverse problem, we consider two domains  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  with bottoms  $\Gamma_{b_1}$  and  $\Gamma_{b_2}$  described by  $y = b_1(x)$  and  $y = b_2(x)$ , with free surfaces  $\Gamma_{H_1}$  and  $\Gamma_{H_2}$  described by  $y = f_1(x)$  and  $y = f_2(x)$  which coincide on a part  $\Gamma_C$ , then  $b_1(x) = b_2(x)$ ; using the result of the direct problem, we conclude that  $f_1(x) = f_2(x)$ ; hence  $\Omega_1 = \Omega_2$ . Later, we will study the stability of the bottom of the domain and of the free surface. We note that some authors have studied the identifiability and the stability of boundaries for inverse problems(see for example [11]). For small obstacles, the existence and uniqueness of the solution of the direct problem is done in [13] where we have used the implicit function theorem; the stability of this solution is deduced from this theorem.

## 4.2 Identifiability of the boundaries

### 4.2.1 Identifiability of the free surface

We have the following result :

**Theorem 20** *For an obstacle given by a function  $y = b(x)$  of class  $C^2$ , lying on the bottom of a channel, it corresponds at most one free surface  $f$  of class  $C^2$  such that  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ .*

**Proof :** We denote by  $y = b(x)$  the equation of the bottom of  $\Omega$  and we suppose the existence of two free surfaces  $\Gamma_{H_1}$  and  $\Gamma_{H_2}$  described respectively by  $y = f_1(x)$  and  $y = f_2(x)$  (see the figure below).

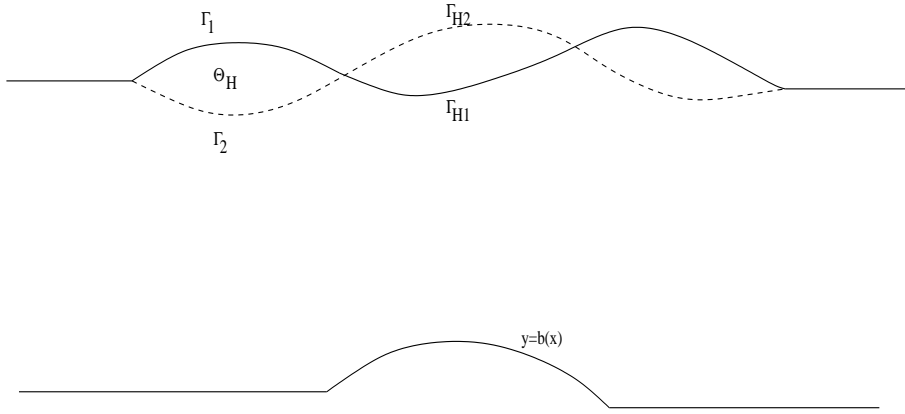


Fig 2

We put

$$\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b(x) < y < f_i(x)\}$$

The stream function  $\psi_i$  defined on  $\Omega_i$  verifies :

$$\begin{cases} \Delta\psi_i = 0 & \text{in } \Omega_i \\ \psi_i = 0 & \text{on } y = b(x) \\ \psi_i = 1 & \text{on } y = f_i(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_i(x, y) = y \end{cases} \quad (4.16)$$

On the other hand, the Bernoulli condition is verified on any streamline of the domain  $\Omega_i$ . This condition, written on the bottom, is given by :

$$\frac{Fr^2}{2} |\nabla\psi_i|^2 + b(x) = \frac{Fr^2}{2}$$

It may be written :

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = \sqrt{1 - \frac{2}{Fr^2} b(x)}$$

We put  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ . Let  $\Theta = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus \overline{(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$ . Suppose that  $\Theta \neq \emptyset$ ; Let  $\Theta_H$  a connected component of  $\Theta$ . Suppose for example that  $\Theta_H \subset \Omega_1 \setminus \overline{(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$ . The boundary of  $\Theta_H$  is composed by a part of  $\Gamma_{H_1}$  which we note  $\Gamma_1$  and a part of  $\Gamma_{H_2}$  which we note  $\Gamma_2$  (see Fig 2).

The function  $\psi = \psi_1 - \psi_2$  verifies the following system :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{on } y = b(x) \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{on } y = b(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

We apply the Holmgren theorem to deduce that  $\psi = 0$  in  $\Omega$ ; so  $\psi_1 = \psi_2$  on the boundary of  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , particularly on  $\Gamma_2$ . In fact  $\psi_2 = 1$  on  $\Gamma_2$ , and then  $\psi_1 = 1$  on  $\Gamma_2$ ; this is a contradiction with the increasing of the function  $\psi_1$  with respect to  $y$  (because  $\psi_1$  can't take the value one on  $\Gamma_1$  and on  $\Gamma_2$ ). We conclude that  $\Theta = \emptyset$ , then  $f_1(x) = f_2(x)$ .

## 4.2.2 Identifiability of the bottom

We consider  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  two possibly domains with bottoms described respectively by  $y = b_1(x)$  and  $y = b_2(x)$  and free surfaces described respectively by  $y = f_1(x)$  and  $y = f_2(x)$  of class  $C^2$ , having a common part  $\Gamma_C$  (see Fig 3) where  $\Gamma_C$  have a non empty interior. We want to prove the uniqueness of the bottom for a given part of a free surface.

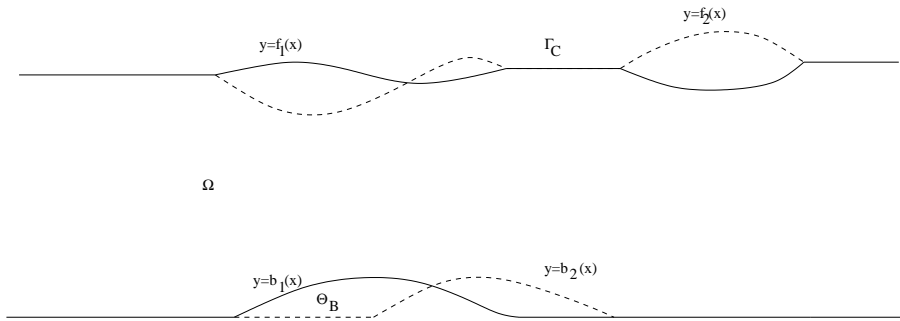


Fig3

We denote these two domains by

$$\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / b_i(x) < y < f_i(x)\}$$

The stream function  $\psi_i$  verifies in  $\Omega_i$  the following problem :

$$\begin{cases} \Delta\psi_i = 0 & \text{in } \Omega_i \\ \psi_i = 0 & \text{on } y = b_i(x) \\ \psi_i = 1 & \text{on } y = f_i(x) \\ \frac{\partial\psi_i}{\partial n} = \sqrt{c_1 - c_2y} & \text{on } y = f_i(x) \end{cases} \quad (4.17)$$

Moreover we have  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_i(x, y) = y$ .

**Theorem 21** *Under the hypothesis above, we have :*

$$b_1(x) = b_2(x) \text{ and } f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

**Proof :** The proof is the same as the last demonstration. Let  $\Theta = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus (\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})$ . Suppose that  $\Theta \neq \emptyset$ . Let  $\Theta_B$  a connected component of  $\Theta$ . Suppose, for example, that  $\Theta_B \subset \Omega_2 \setminus (\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})$ . We note  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  and we put  $\psi = \psi_1 - \psi_2$ ;  $\psi$  verifies the Cauchy problem :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{on } \Gamma_C \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_C \end{cases} \quad (4.19)$$

The Holmgren theorem [51] permit us to conclude that  $\psi = 0$  in the connected domain  $\Omega$  then

$$\psi = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (4.20)$$

This implies  $\psi_1 = \psi_2$  on  $\partial\Omega$  in particular  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  on  $\Gamma_{b_1}$ ; This is a contradiction with the fact that  $\psi_2 = 0$  on  $\Gamma_{b_2}$  and the fact that  $\psi_2$  is an increasing function with respect to  $y$ , then  $\Theta = \emptyset$  and  $b_1(x) = b_2(x)$ .

The identifiability result of the direct problem (see theorem 20) permit us to conclude that  $f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  and then  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

**Remark 22** *We can formulate the precedent theorem in this way :*

*Let  $b_1$  and  $b_2$  two possibly bottoms to identify. Let  $\psi_i$  the solution of the problem (4.17), then :*

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n} = \frac{\partial\psi_2}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_C \text{ implies } b_1 = b_2 \quad (4.21)$$

### 4.3 Stability of the boundaries of the domain

First, we give some notations which will be useful in the next.

### 4.3.1 Some notations

The domain fluid  $\Omega$  given by a figure at the first section can be written as :

$$\Omega_b^\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < +\infty, b(x) < y < 1 + \gamma(x)\}$$

where  $b$  is the function describing the bottom and  $\gamma$  is the perturbation of the horizontal surface  $y = 1$ . Using a change of variables :

$$\begin{cases} \tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= \frac{y-b(x)}{1+\gamma(x)-b(x)} \end{cases} \quad (4.22)$$

The domain  $\Omega_b^\gamma$  becomes the rectangle :

$$\Omega_0^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$$

and the relation (4.2) takes the form  $T(b, \gamma) = 0$ , where

$$\begin{aligned} T(b, \gamma) = \gamma - \frac{F^2}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 1) - \frac{\gamma'}{(1+\gamma-b)^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right]^2 + \frac{1}{(1+\gamma-b)^2} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \right)^2 \right\} - \\ - \frac{F^2}{1+\gamma-b} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 1) \end{aligned} \quad (4.23)$$

and  $\tilde{\psi}$  verifies the system :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} &= 0 \text{ in } \Omega_0^0 \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 0) &= -b(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \\ \tilde{\psi}(\tilde{x}, 1) &= -\gamma(\tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.24)$$

$\mathcal{P}_b^\gamma$  is defined by :

$$\mathcal{P}_b^\gamma = a_1 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \quad (4.25)$$

$$a_1 = 2 \frac{\tilde{y}(b' - \gamma') - b'}{1 + \gamma - b}$$

$$a_2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - 1 + \frac{1}{(1 + \gamma - b)^2}$$

$$a_3 = \frac{-1}{1 + \gamma - b} [b'' + \tilde{y}(\gamma'' - b'')] + \frac{2}{(1 + \gamma - b)^2} (\gamma' - b') [b' + \tilde{y}(\gamma' - b)']$$

$b$  and  $\gamma$  are in the space

$$B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) = \left\{ v \in C^{2,\lambda}(\mathbb{R}) / \sum_{0 \leq k \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |D_x^k v(x)| < \infty \right\}$$

where  $0 < \lambda < 1$  and  $c > 0$ . It has been proved in [13] that for a given small  $b$  in  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ , there exists one and only one  $\gamma$  in the same space such that  $(b, \gamma)$  verifies  $T(b, \gamma) = 0$  with  $\tilde{\psi}$  solution of (4.24).

### 4.3.2 Stability of the lower boundary of the domain

In this paragraph, our aim is to establish a stability result of the bottom of the domain with respect to the observed free surface. This stability traduces the continuity of the bottom configuration with respect to the data on  $\Gamma_C$ . For this study, we define a set of admissible bottoms as follows :

$$\Gamma_{ad} = \{(x, b(x)), b \in C^{2,\lambda}(\mathbb{R}), \text{supp } b \subset [-M, M], M > 0\} \quad (4.26)$$

where  $\text{supp } b$  is the compact support of  $b$ .

We define on  $\Gamma_{ad}$  the distance :

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \|b_1(x) - b_2(x)\|_{C^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \quad (4.27)$$

Note that  $(\Gamma_{ad}, d)$  is a compact metric space.

**Theorem 23** *Let  $\Gamma_{b_n}$  a sequence of elements of  $\Gamma_{ad}$ , let  $\Phi_n$  the trace of the normal derivative of the solution of the problem (4.14) defined on  $\Omega_n$  with bottom  $\Gamma_{b_n}$  and free surface  $\Gamma_{f_n}$ ; Let  $\Phi$  the trace of the normal derivative of the solution of (4.14) defined on  $\Omega$  with bottom  $\Gamma_b$  and free surface  $\Gamma_f$ ; then we have :*

$$\Phi_n \rightarrow \Phi \text{ in } B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \Rightarrow \Gamma_{b_n} \rightarrow \Gamma_b \text{ in } \Gamma_{ad} \quad (4.28)$$

**Proof :** To prove this theorem, we begin by showing the continuity of the application :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ad} &\rightarrow B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \\ \Gamma_b &\mapsto \frac{\partial \psi}{\partial n} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Indeed,  $\Gamma_{ad}$  is isomorph to the following space :

$$B = \{b \in C^{2,\lambda}(\mathbb{R}), b \text{ with a compact support included in } [-M, M]. \}$$

and we have :

$$B \hookrightarrow B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R}) \quad (4.30)$$

$$b \mapsto b \mapsto \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (4.31)$$

So we have the continuity of the application given by (4.29).  $\Gamma_{ad}$  being compact, we can extract a subsequence noted again  $\Gamma_{b_n}$  which tends to  $\Gamma_{b_1}$ ; thanks to the continuity of the application :  $\Gamma \mapsto \Phi = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ , we obtain  $\Phi_n \rightarrow \Phi_1$  which is the trace of the normal derivative of the solution of the problem (4.14) defined on  $\Omega_{b_1}$  with free surface  $\Gamma_f$ . The uniqueness of the limit allows to  $\Phi_1 = \Phi$ ; In fact if  $\Phi_1 = \Phi$ , we have  $\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial n}$  on  $\Gamma_C$ , then  $b_1 = b$  (see remark 22).

### 4.3.3 Stability of the free boundary for a small perturbation of the linear lower boundary

In this section our aim is to study the variation of the free surface with respect to the variation of the plate bottom  $\Gamma_0$ . Here we introduce some hypothesis which allows us to establish the stability result. We denote the initial domain by  $\Omega_0^0$  and let  $b_h$  a sequence of bottoms obtained by deforming the plate bottom. The bottom of the deformed domain is given by :

$$b_h(x) = h\Theta(x) \quad (4.32)$$

where  $\Theta$  is in  $C^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  with a compact support and  $\Theta(x) \geq 0$ . We have the following result :

**Theorem 24** *Under the hypothesis and notations above, we have :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{y_h - y_0}{h} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \text{ exists and is strictly positive}$$

where  $y_h = 1 + \gamma_h$  and  $y_0 = 1$  are the free surfaces corresponding respectively to the bottoms given by  $y = b_h(x)$  and  $y = 0$ .

**Remark 25** *We recall that for  $F > 1$ ,  $y_0 = 1$  is the unique solution of the problem but for  $F < 1$ ,  $y_0 = 1$  is not unique (See [12] and [30]).*

**Proof :** We deduce from [13] that for  $h$  small enough, there exists a  $C^1$  function  $g$  defined in a neighborhood of zero such that :

$$y_h = 1 + g(b_h) \text{ and } y_0 = 1 + g(0) \quad (4.33)$$

where  $g(0) = 0$  and  $b_h$  is in a neighborhood of zero.

We have

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{y_h - y_0}{h} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{g(b_h) - g(0)}{h} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

Applying the mean value theorem , we can write :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{y_h - y_0}{h} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{g'(c_h)(b_h)}{h} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \text{ where } c_h \in ]0, b_h[$$

and  $g'(c_h)$  is a linear application from  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  into itself. Because

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b_h - 0}{h} = \Theta(x) \text{ in } B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \text{ and } \lim_{h \rightarrow 0} g'(c_h) = g'(0) \text{ (} g' \text{ is continuous)}$$

we deduce :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{y_h - y_0}{h} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} = \|g'(0) \cdot \Theta\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

A consequence of the implicit function theorem permit us to write :

$$g'(0) = -\left(\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0)\right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial T}{\partial b}(0,0)\right)$$

It has been seen in [13] that  $T(b, \gamma)$  is continuously differentiable with respect to  $b$  and  $\gamma$  at the point  $(0,0)$  and  $\frac{\partial T}{\partial \gamma}(0,0)$  is injective from  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  into  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ ;  $\frac{\partial T}{\partial b}(0,0)$  is also injective from  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  into  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  (see [2]). Then we conclude that  $g'(0)$  is injective. This implies that  $\|g'(0) \cdot \Theta\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \neq 0$  because  $\Theta$  is nonzero. Then we arrive to the final result :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{y_h - y_0}{h} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} > 0$$

**Remark 26**  $\|y_h - y_0\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$  tends to zero as  $h$ .

#### 4.3.4 Stability of the free boundary for a small perturbation of a general lower boundary

From the last section, for small  $h$  and  $h_1$ , we can write :

$$y_h = y_0 + \alpha \cdot h + h^2 R(h) \quad (4.34)$$

and

$$y_{h_1} = y_0 + \alpha \cdot h_1 + h_1^2 R(h_1) \quad (4.35)$$

where  $\alpha \neq 0$  and  $R$  is a bounded function of  $h$ . The following lemma gives the regularity of the function  $R$  :

**Lemma 27**  $y_h$  is an analytical function of  $h$  for a small  $h$ .

**Proof :** We have  $y_h = 1 + \gamma_h$  with  $\gamma_h = g(b_h)$  (see (4.33)), where  $b_h = h\Theta(x)$  is an analytical function of  $h$ . If we proof that  $\tilde{\psi}$  is an analytical function of  $b$  and  $\gamma$  then  $T$  given by (4.23) will be an analytical function of  $b$  and  $\gamma$ . Hence, using the implicit function theorem, we deduce that  $\gamma = g(b)$  is an analytical function of  $b$ . Since  $b_h$  is analytical with respect to  $h$ , then  $\gamma_h$  is also analytical with respect to  $h$ .

Now, we verify that  $\tilde{\psi}$  is analytical with respect to  $b$  and  $\gamma$ . Indeed,  $\tilde{\psi}$  verifies the system :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma \tilde{\psi} = 0 \text{ in } \Omega_0^0 \\ \tilde{\psi}(x, 0) = -b(x), x \in \mathbb{R} \\ \tilde{\psi}(x, 1) = -\gamma(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.36)$$

where  $\mathcal{P}_b^\gamma$  is given by the relation (4.25). The system (4.36) can be written as :

$$F(\tilde{\psi}, (b, \gamma)) = 0 \quad (4.37)$$

with :

$$F(\tilde{\psi}, (b, \gamma)) = (F_1(\tilde{\psi}, (b, \gamma)), F_2(\tilde{\psi}, (b, \gamma)), F_3(\tilde{\psi}, (b, \gamma))) \quad (4.38)$$

where :

$$F_1(\tilde{\psi}, (b, \gamma)) = \Delta\tilde{\psi} + \mathcal{P}_b^\gamma\psi \quad (4.39)$$

$$F_2(\tilde{\psi}, (b, \gamma)) = \tilde{\psi}(\cdot, 0) + b \quad (4.40)$$

$$F_3(\tilde{\psi}, (b, \gamma)) = \tilde{\psi}(\cdot, 1) + \gamma \quad (4.41)$$

The functions  $F_1$ ,  $F_2$  and  $F_3$  are defined from  $B_c^{2,\lambda}(\Omega_0^0) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  into  $B_c^{0,\lambda}(\Omega_0^0)$ ,  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  and  $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$  respectively; it is easily seen that  $F_1$ ,  $F_2$  and  $F_3$  are analytical with respect to  $\psi$ ,  $b$  and  $\gamma$ . Applying the implicit function theorem to the equation (4.37), at the point  $(0, (0, 0))$ , we conclude that  $\tilde{\psi}$  is an analytical function of  $b$  and  $\gamma$ .

**Theorem 28** *Let  $h_1 > 0$  and small enough, then :*

$$\lim_{h \rightarrow h_1} \left\| \frac{y_h - y_{h_1}}{h - h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \text{ exists and is strictly positive.}$$

**Proof :** The equations (4.34) and (4.35) imply :

$$\left\| \frac{y_h - y_{h_1}}{h - h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} = \left\| \alpha + (h + h_1).R(h) + \frac{h_1^2(R(h) - R(h_1))}{h - h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

The mean value theorem applied to the function  $R$  permit us to write :

$$\left\| \frac{y_h - y_{h_1}}{h - h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} = \left\| \alpha + (h + h_1).R(h) + h_1^2 R'(\xi) \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

where  $\xi \in ]\min(h, h_1), \max(h, h_1)[$ . When  $h$  tends to  $h_1$  (for small  $h$  and  $h_1$ ) we obtain :

$$\lim_{h \rightarrow h_1} \left\| \frac{y_h - y_{h_1}}{h - h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} = \left\| \alpha + 2h_1.R(h_1) + h_1^2 R'(h_1) \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

The triangular inequality gives :

$$\lim_{h \rightarrow h_1} \left\| \frac{y_h - y_{h_1}}{h - h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \geq \left\| \alpha \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} - |h_1|. \left\| 2R(h_1) + h_1 R'(h_1) \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$$

We can choose  $h_1$  small enough such that

$$|h_1|. \left\| 2R(h_1) + h_1 R'(h_1) \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} < \frac{\left\| \alpha \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}}{2}$$

Hence,

$$\lim_{h \rightarrow h_1} \left\| \frac{y_h - y_{h_1}}{h - h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})} \geq \frac{\left\| \alpha \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}}{2} > 0$$

**Remark 29**  $\left\| y_h - y_{h_1} \right\|_{B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})}$  tends to zero as  $h - h_1$ .

# Chapitre 5

## Simulation numérique d'un écoulement à surface libre

### Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons une étude numérique du problème dans le cas d'un écoulement torrentiel. Nous utiliserons la méthode des éléments finis  $Q_1$ . Nous donnons le schéma numérique utilisé et nous calculons les estimateurs d'erreurs a posteriori sur la fonction de courant  $\psi$ . Le code de calcul mis en oeuvre permet de faire un raffinement de maillage adaptatif. Si dans un quadrangle  $K$  l'indicateur d'erreur a posteriori est supérieur à un paramètre epsilon choisi, ou si l'erreur est supérieure à la moitié du maximum des erreurs sur tous les autres quadrangles, alors le quadrangle  $K$  est raffiné en  $x$  et en  $y$ , de sorte à ne pas perdre la propriété de conformité du maillage. Notons que les quadrangles raffinés sont ceux situés près du sommet de l'obstacle. Quelques graphes simulant la frontière libre sont donnés pour plusieurs tailles d'obstacles et valeurs du nombre de Froude. Nous avons aussi simulé la frontière libre dans le cas de la présence de deux obstacles sur le fond du domaine.

Pour le cas fluvial, nous donnons quelques résultats sur la surface libre, obtenus par résolution numérique de l'équation de Bernoulli. Nous avons choisi de ne pas calculer la fonction de courant dans le domaine et ceci pour éviter d'avoir à imposer une condition à l'aval du domaine. Le code mis en oeuvre dans le cas fluvial, est un schéma hyperbolique, qui calcule la surface libre front par front de la gauche vers la droite. Quelques graphes sont donnés pour un ou deux obstacles de tailles différentes

### 5.1 Position du problème

Le but de ce travail est la simulation numérique d'un écoulement permanent, à surface libre, d'un fluide incompressible au dessus d'un obstacle,

gisant au fond d'un canal. L'écoulement se fait de la gauche vers la droite avec une vitesse uniforme horizontale  $u_0$  à l'amont. Ce problème peut modéliser l'écoulement de l'eau dans une rivière ou un fleuve. Pour faire l'approche numérique, nous considérons un domaine avec un bord d'entrée, situé loin en amont de l'obstacle, sur lequel nous donnons la vitesse du fluide. Le domaine fluide est donné par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < +\infty, b(x) < y < y_0 + f(x)\}$$

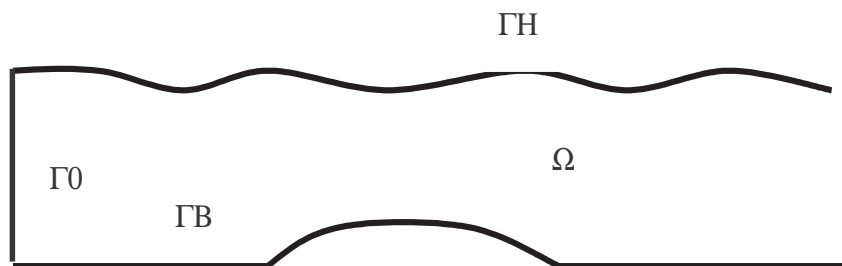
$y_0$  est la hauteur du canal à l'entrée du domaine.

$$y = b(x)$$

est l'équation du fond  $\Gamma_B$  du canal et

$$y = y_0 + f(x)$$

est l'équation de la surface libre  $\Gamma_H$ . On suppose que la fonction  $f(x)$  vérifie  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ . On note  $\Gamma_0$  le bord d'entrée du canal (voir la figure ci-dessous).



Le fluide vérifie :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (5.2)$$

Les conditions aux bords sont données par :

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = -u_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \quad (5.3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_B \quad (5.4)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \quad (5.5)$$

où  $\vec{\nu}$  est la normale unitaire extérieure au bord considéré. Sur la surface libre, nous avons aussi la condition :

$$\frac{\rho}{2} |\vec{u}|^2 + \rho g y = \rho \frac{u_0^2}{2} + \rho g y_0 \text{ sur } \Gamma_H \quad (5.6)$$

appelée condition de Bernoulli, où  $\rho$  est une constante représentant la densité du fluide et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

A l'infini aval, nous posons que la vitesse est bornée :

$$|\vec{u}(x, y)| \text{ bornée quand } x \rightarrow +\infty \quad (5.7)$$

Tout d'abord, nous définissons les variables adimensionnées en référant toutes les longueurs à la quantité  $y_0$ , et toutes les vitesses à  $u_0$ . On pose :

$$\begin{cases} \vec{u} = u_0 \vec{u}^* \\ x = y_0 x^* \\ y = y_0 y^* \end{cases}$$

Le problème s'écrit avec les nouvelles variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{div}} \vec{u}^* = 0 \text{ dans } \Omega^* \\ \vec{\text{rot}} \vec{u}^* = 0 \text{ dans } \Omega^* \\ \vec{u}^* \cdot \vec{\nu} = -1 \text{ sur } \Gamma_0^* \\ \vec{u}^* \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_B^* \\ \vec{u}^* \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_H^* \\ |\vec{u}^* \cdot \vec{\tau}|^2 = c_1 - c_2 y \text{ sur } \Gamma_H^* \\ |\vec{u}^*(x, y)| \text{ bornée quand } x^* \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

où :

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^* < +\infty, b^*(x^*) < y^* < 1 + f^*(x^*)\}, \\ f^*(x^*) &= \frac{1}{y_0} f(y_0 x^*), \\ b^*(x^*) &= \frac{1}{y_0} b(y_0 x^*), \\ \Gamma_B^* &= \{(x^*, b^*(x^*)) / x^* \in \mathbb{R}\}, \\ \Gamma_H^* &= \{(x^*, 1 + f^*(x^*)) / x^* \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$\vec{\tau}$  est le vecteur unitaire tangent au bord considéré

$$c_1 = 1 + \frac{2}{Fr^2}, c_2 = \frac{2}{Fr^2}, \text{ et } Fr = \frac{u_0}{\sqrt{g y_0}}$$

$Fr$  est un nombre réel positif appelé nombre de Froude de l'écoulement. Si le nombre de Froude est inférieur à un, on dit que l'écoulement est fluvial ou subcritique ; Si ce nombre est supérieur à un, on dit que l'écoulement est torrentiel ou supercritique.

Dans le cas d'un écoulement fluvial, la seule condition que l'on peut mettre sur une frontière située à l'aval de l'obstacle est que la vitesse est bornée. Ceci car, dans le cas fluvial, la surface libre présente un système d'ondes à l'aval, et le bord peut rencontrer n'importe quel point entre le minimum et le maximum d'une onde. D'autre part, dans le cas torrentiel, on peut mettre sur ce bord, la condition que la vitesse est la même qu'à l'amont de l'obstacle, car dans ce cas la surface libre présente une unique élévation et revient progressivement vers le niveau non perturbé. Ceci a été observé expérimentalement par différents auteurs [12], [49]. Dans la suite, nous noterons toutes les variables adimensionnées sans le symbole  $*$ .

## 5.2 Formulation du problème avec la fonction de courant

L'équation  $div \vec{u} = 0$  implique que  $\vec{u} = \vec{rot} \Psi$  où  $\Psi$  est appelée fonction de courant. L'équation  $rot \vec{u} = 0$  donne  $-\Delta \Psi = 0$  dans  $\Omega$ . Le problème formulé avec la fonction de courant devient :

$$\Delta \Psi = 0 \text{ dans } \Omega \quad (5.8)$$

$$\partial_y \Psi = 1 \text{ pour } x = 0 \quad (5.9)$$

$$-b'(x) \partial_y \Psi - \partial_x \Psi = 0 \text{ pour } y = b(x) \quad (5.10)$$

$$-f'(x) \partial_y \Psi - \partial_x \Psi = 0 \text{ pour } y = 1 + f(x) \quad (5.11)$$

$$|\partial_\nu \Psi|^2 = c_1 - c_2 y \text{ pour } y = 1 + f(x) \quad (5.12)$$

$$|\vec{\nabla} \Psi(x, y)| \text{ borné quand } x \rightarrow +\infty \quad (5.13)$$

La condition (5.9) implique que :

$$\Psi(0, y) = y + c_3$$

$\Psi$  est une fonction de courant, donc elle est définie à une constante près. On choisit :

$$\Psi(0, y) = y. \quad (5.14)$$

L'équation (5.10) devient :

$$\vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{\tau} = 0 \text{ pour } y = b(x)$$

d'où

$$\Psi = cte \text{ sur } \Gamma_B.$$

De la même manière, l'équation (5.11) devient :

$$\Psi = cte \text{ sur } \Gamma_H.$$

Ayant :

$$\Psi = y \text{ sur } \Gamma_0$$

donc

$$\Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_B$$

et

$$\Psi = 1 \text{ sur } \Gamma_H.$$

L'équation (5.12) devient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \pm \sqrt{c_1 - c_2 y} \text{ pour } y = 1 + f(x)$$

En fait :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = +\sqrt{c_1 - c_2 y}$$

et ceci pour rester en conformité avec la relation (5.14)

Le problème se formule à l'aide de la fonction de courant  $\Psi$  de la manière suivante :

$$\Delta \Psi = 0 \text{ dans } \Omega \tag{5.15}$$

$$\Psi = y \text{ pour } x = 0 \tag{5.16}$$

$$\Psi = 0 \text{ pour } y = b(x) \tag{5.17}$$

$$\Psi = 1 \text{ pour } y = 1 + f(x) \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \sqrt{c_1 - c_2 y} \text{ pour } y = 1 + f(x) \tag{5.19}$$

$$|\vec{\nabla} \Psi(x, y)| \text{ borné quand } x \rightarrow +\infty \tag{5.20}$$

La condition (5.18) est appelée condition cinématique, et la condition (5.19) est appelée condition dynamique sur la surface libre.

Nous avons un problème dans un domaine infini avec deux conditions sur la surface libre  $\Gamma_H$ .

**Remarque 30** *Comme nous l'avons mentionné plus haut, dans le cas torrentiel, les résultats expérimentaux ont montré que la surface libre présente une unique élévation au dessus de l'obstacle puis un retour graduel vers le niveau non perturbé. Dans le cas fluvial, la surface libre présente une dépression au niveau de l'obstacle suivie d'un train d'ondes.*

En conséquence, dans le cas torrentiel, on peut mettre la condition  $\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0$  sur un bord situé loin en aval de l'obstacle. Par contre, dans le cas fluvial, on ne sait quelle condition mettre car le bord aval peut rencontrer n'importe quel point entre le minimum et le maximum d'une onde de la surface libre.

**Remarque 31** *Un résultat d'existence et d'unicité a été établi pour ce problème dans un domaine illimité à l'amont et à l'aval. Ce résultat a été obtenu en résolvant une équation d'opérateur défini sur la surface libre et en utilisant le théorème des fonctions implicites dans des espaces de Banach (voir [13])*

### 5.2.1 Une formulation faible du problème dans le cas torrentiel

Dans le cas torrentiel, nous bornons le domaine loin en aval de l'obstacle en  $x = x_1$ , par un bord que l'on note  $\Gamma_1$ . Nous imposons sur ce bord une condition de Neumann ; nous avons donc à résoudre le problème :

$$\Delta \Psi = 0 \text{ dans } \Omega \quad (5.21)$$

$$\Psi = y \text{ pour } x = 0 \quad (5.22)$$

$$\Psi = 0 \text{ pour } y = b(x) \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = x_1 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \sqrt{c_1 - c_2 y} \text{ pour } y = 1 + f(x) \quad (5.25)$$

$$\Psi = 1 \text{ pour } y = 1 + f(x) \quad (5.26)$$

On multiplie les deux membres de l'équation (5.21) par une fonction test  $\phi$  et on utilise la formule de Green, on a alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi \nabla \phi d\Omega - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \phi d\sigma = 0.$$

On prendra pour fonction test  $\phi$ , une fonction dans l'espace :

$$V = \{ \phi \in H^1(\Omega) / \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_B \},$$

alors :

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi \nabla \phi d\Omega - \int_{\Gamma_H} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \phi d\sigma = 0$$

ie :

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi \nabla \phi d\Omega - \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \phi d\sigma = 0 \text{ pour tout } \phi \text{ dans } V$$

avec  $\Psi = \psi_0 + \tilde{\psi}$  où  $\tilde{\psi} \in V$  et  $\psi_0$  est une fonction dans  $H^1(\Omega)$  verifiant :  
 $\psi_0 = y$  sur  $\Gamma_0$  et  $\psi_0 = 0$  sur  $\Gamma_B$

### 5.3 Une approche numérique du problème dans le cas torrentiel

Nous résolvons le problème sur le domaine borné. Nous discrétisons le problème et nous construisons un algorithme en utilisant la méthode des éléments finis  $\mathbb{Q}_1$ .

Soit  $\tau_h$  une décomposition de  $\bar{\Omega}$  en quadrangles à côtés parallèles verticaux :

$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$ . Le problème discrétisé s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \phi_h d\Omega - \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \phi_h d\sigma = 0 \text{ pour tout } \phi_h \text{ dans } V_h$$

où  $V_h$  est le sous espace de  $V$  défini par :

$$V_h = \{ \phi_h \in C^0(\bar{\Omega}) / \phi_h|_K \in \mathbb{Q}_1(K), \forall K \in \tau_h \} \cap V$$

L'algorithme mis en oeuvre tient compte de la condition dynamique et teste la condition cinématique sur la surface libre. On détermine la fonction  $\psi$  par ses valeurs nodales aux noeuds du maillage ; si on note les noeuds de 1 à  $NI$  on écrit :

$$\psi_h = \sum_{k=1}^{NI} \psi_k \varphi_k$$

A chaque étape, on résout un système qui s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{NI} \psi_k \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_k d\Omega = \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_i d\sigma$$

où  $\psi_k$  est la valeur de  $\psi$  au noeud  $k$  et  $\varphi_i$  est la fonction de base associée au noeud  $i$ .

#### 5.3.1 Indicateur d'erreur a posteriori

Nous introduisons quelques notations qui seront utiles pour la suite. Si  $K$  est un quadrangle quelconque de la décomposition  $\tau_h$  du domaine , nous

notons :  $\mathcal{E}(K)$  l'ensemble des côtés de  $K$ . On pose :  $\mathcal{E}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} \mathcal{E}(K)$ . Pour  $K \in \tau_h$  et  $T \in \mathcal{E}_h$  on définit :

$$\omega_K = \bigcup_{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(K') \neq \emptyset} K'$$

et

$$\omega_T = \bigcup_{T \in \mathcal{E}(K')} K'$$

Finalement, on donne des estimations de l'erreur d'interpolation (voir[14])

**Proposition 32** *On a :  $\|\varphi - \pi_h \varphi\|_{L^2(K)} \leq C_1 h_K \|\varphi\|_{H^1(\omega_K)}$  et*

*$\|\varphi - \pi_h \varphi\|_{L^2(T)} \leq C_2 h_T^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(\omega_T)}$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes qui ne dépendent que du plus petit angle de la triangulation,  $h_K$  est le diamètre de  $K$  et  $h_T$  est la longueur de  $T$ .*

On rappelle que le problème faible discrétisé est :

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \varphi_h d\Omega - \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_h d\sigma = 0 \text{ pour tout } \varphi_h \text{ dans } V_h$$

où  $V_h$  est le sous espace de  $V$  défini par :

$$V_h = \{\varphi_h \in C^0(\bar{\Omega}) / \varphi_h|_K \in \mathbb{Q}_1(K), \forall K \in \tau_h\} \cap V$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \varphi_h d\Omega - \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_h d\sigma = 0 \text{ pour tout } \varphi_h \text{ dans } V_h \subset V$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \varphi_h d\Omega - \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_h d\sigma = 0 \text{ pour tout } \varphi_h \text{ dans } V_h$$

d'où

$$\int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \nabla \varphi_h d\Omega = 0 \text{ pour tout } \varphi_h \text{ dans } V_h$$

Considérons la relation suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi d\sigma - \int_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \varphi d\Omega$$

Ecrivons la dernière intégrale comme somme d'intégrales sur les quadrangles du domaine  $\Omega$ ; on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi d\sigma - \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla \psi_h \nabla \varphi dK$$

Sur chaque quadrangle  $K$  ayant pour côté  $T$  on applique la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \nabla \varphi d\Omega &= \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi d\sigma - \sum_{K \in \tau_h} \left( - \int_K \Delta \psi_h \varphi dK + \int_{\partial K} \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \varphi d\sigma \right) \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \Delta \psi_h \varphi dK - \sum_{T \text{ interne}} \int_T \left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right] \varphi d\sigma + \sum_{T \in \Gamma_h} \int_T \left( \sqrt{c_1 - c_2 y} - \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right) \varphi d\sigma \end{aligned}$$

où  $\left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right]$  represente le saut de  $\psi_h$  à travers  $T$  et est défini par :

$\left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right] = n_K \cdot (\nabla \psi_h)_K + n_{K'} \cdot (\nabla \psi_h)_{K'}$  où  $K$  et  $K'$  sont deux quadrangles ayant  $T$  comme côté commun,  $n_K$  et  $n_{K'}$  sont les vecteurs normaux à  $T$  extérieurs à  $K$  et  $K'$  respectivement.

On remplace  $\varphi$  par  $(\varphi - \pi_h \varphi)$  dans la dernière relation, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \nabla(\varphi - \pi_h \varphi) d\Omega &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \Delta \psi_h (\varphi - \pi_h \varphi) dK \\ &- \sum_{T \text{ interne}} \int_T \left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right] (\varphi - \pi_h \varphi) d\sigma + \sum_{T \in \Gamma_h} \int_T \left( \sqrt{c_1 - c_2 y} - \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right) (\varphi - \pi_h \varphi) d\sigma \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la proposition précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\psi - \psi_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq cte \left\{ \sum_{K \in \tau_h} h_K^2 \|\Delta \psi_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{T \text{ interne}} h_T \left\| \left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(T)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{T \in \Gamma_h} h_T \left\| \sqrt{c_1 - c_2 y} - \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

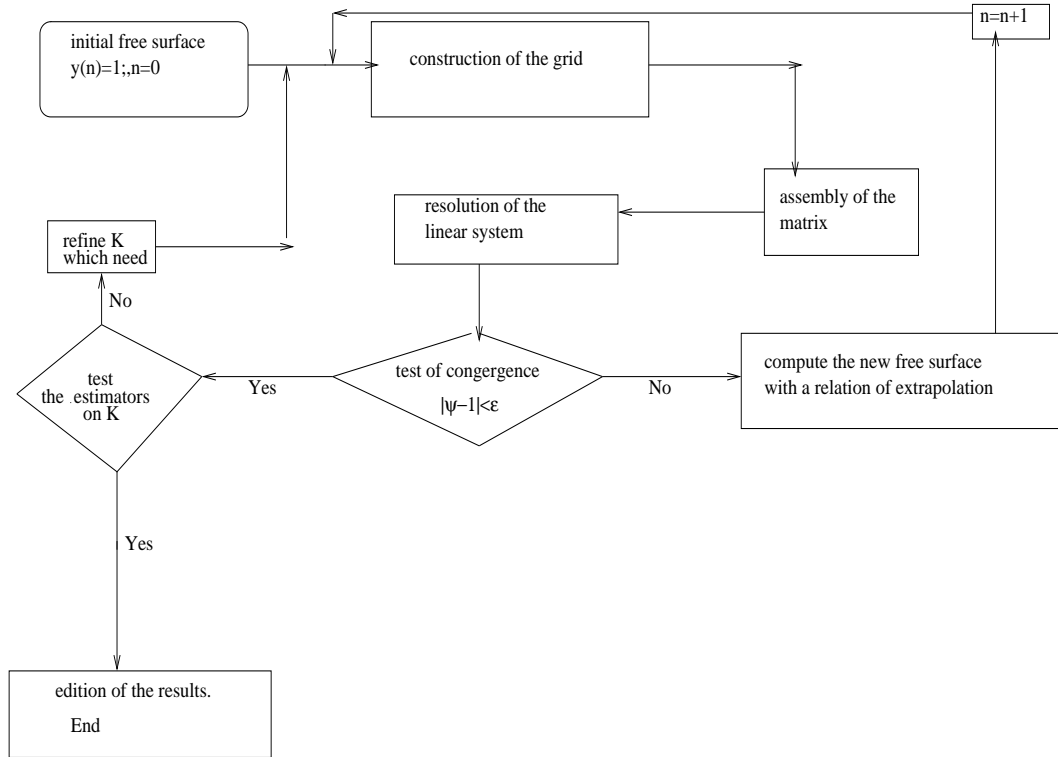
un indicateur local d'erreur a posteriori est donné par :

$$\begin{aligned} \eta(K) &= \left\{ h_K^2 \|\Delta \psi_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{T \in \partial K \setminus \Gamma} h_T \left\| \left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \partial K \cap \Gamma_h} h_T \left\| \sqrt{c_1 - c_2 y} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dans les tests que nous avons effectués, si sur un quadrangle  $K$  l'estimateur est supérieur à un paramètre *epsilon* ou si l'estimateur sur  $K$  est supérieur à *estima*/2 où *estima* est le plus grand estimateur sur les autres quadrangles  $K'$ , alors le quadrangle  $K$  est raffiné.

### 5.3.2 Shéma numérique

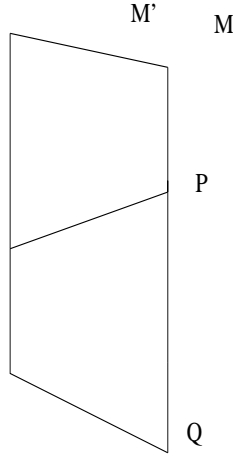
l'algorithme de calcul est :



La formule d'extrapolation pour calculer la nouvelle surface est donnée par :

$$\begin{aligned}
 y(M') = & \frac{(1 - \psi(P))(1 - \psi(M))}{(\psi(Q) - \psi(P))(\psi(Q) - \psi(M))} y(Q) + \frac{(1 - \psi(Q))(1 - \psi(M))}{(\psi(P) - \psi(Q))(\psi(P) - \psi(M))} y(P) + \\
 & + \frac{(1 - \psi(Q))(1 - \psi(P))}{(\psi(M) - \psi(Q))(\psi(M) - \psi(P))} y(M) \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

où  $M$  représente le point à la surface libre,  $M'$  le point recherché à la surface libre, et  $P$  et  $Q$  deux points situés juste au dessous de la surface libre.



A chaque étape , la résolution du système, à matrice symétrique définie positive, a été faite par la méthode de Cholesky. Nous avons utilisé le stockage bande pour la matrice.

### 5.3.3 Résultats numériques

Différents essais numériques ont été effectués. Pour ces essais, nous avons testés les obstacles suivants :

Si on note  $Hb$  la hauteur de l'obstacle,  $x_o$  et  $x_E$  les abscisses de l'origine et de l'extrémité de l'obstacle :

-obstacle sinusoidal d'équation  $y = \frac{Hb}{2} [1 - \cos(\frac{2\pi}{x_E - x_o}(x - x_o))]$  si  $x_o < x < x_E$

-obstacle de degré trois d'équation  $y = \frac{27}{4} Hb (\frac{x_E - x}{x_E - x_o})^2 (\frac{x - x_o}{x_E - x_o})$

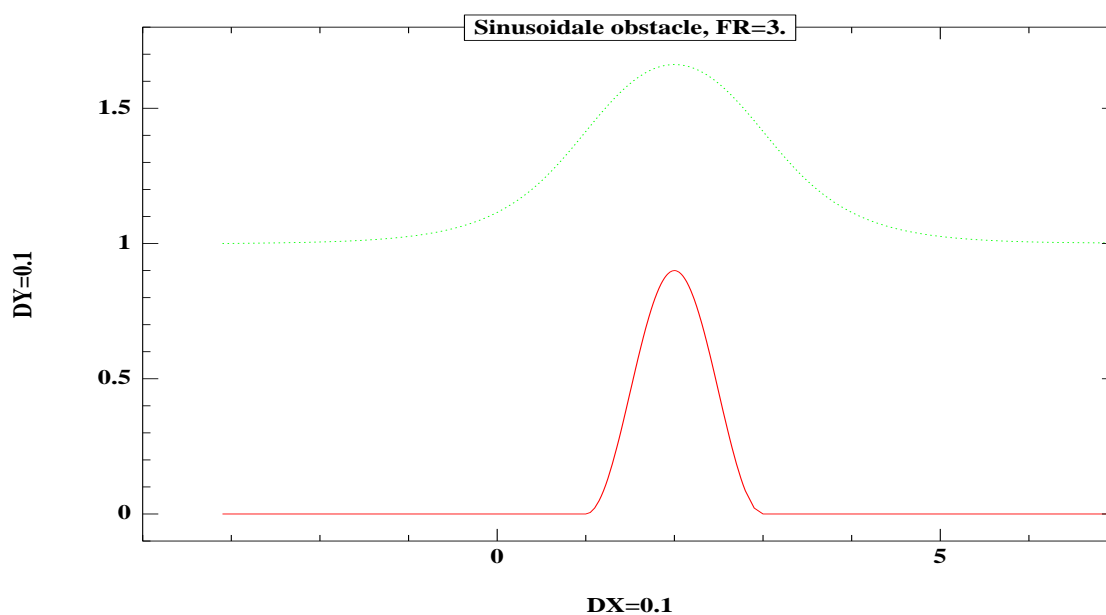
-obstacle en forme de plateau semi infini d'équation  $y = Hb (\frac{tx+1}{2})$

Pour des valeurs fixées de la hauteur de l'obstacle  $Hb$ , on prend différentes valeurs du nombre de Froude  $Fr$  approchant la valeur critique  $Fr = 1$ , jusqu'à divergence de l'algorithme. On donne dans le tableau suivant les différentes valeurs de  $Hb$  testées, pour l'obstacle sinusoidal, et l'intervalle  $I$  contenant le nombre de Froude à partir duquel l'algorithme diverge, et ceci pour un pas de discrétisation égal à 0.1 en  $x$  et en  $y$ .

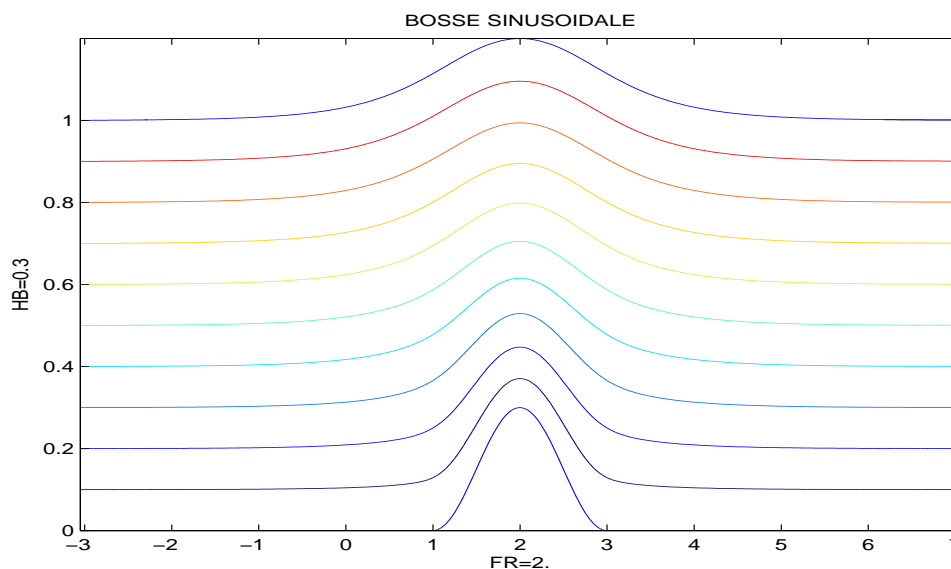
$Hb$	$I$
0.1	]1.1, 1.2[
0.2	]1.2, 1.3[
0.3	]1.3, 1.4[
0.4	]1.3, 1.4[
0.5	]1.3, 1.4[
0.6	]1.5, 1.6[
0.7	]1.5, 1.6[
0.8	]1.6, 1.7[
0.9	]2.2, 2.3[

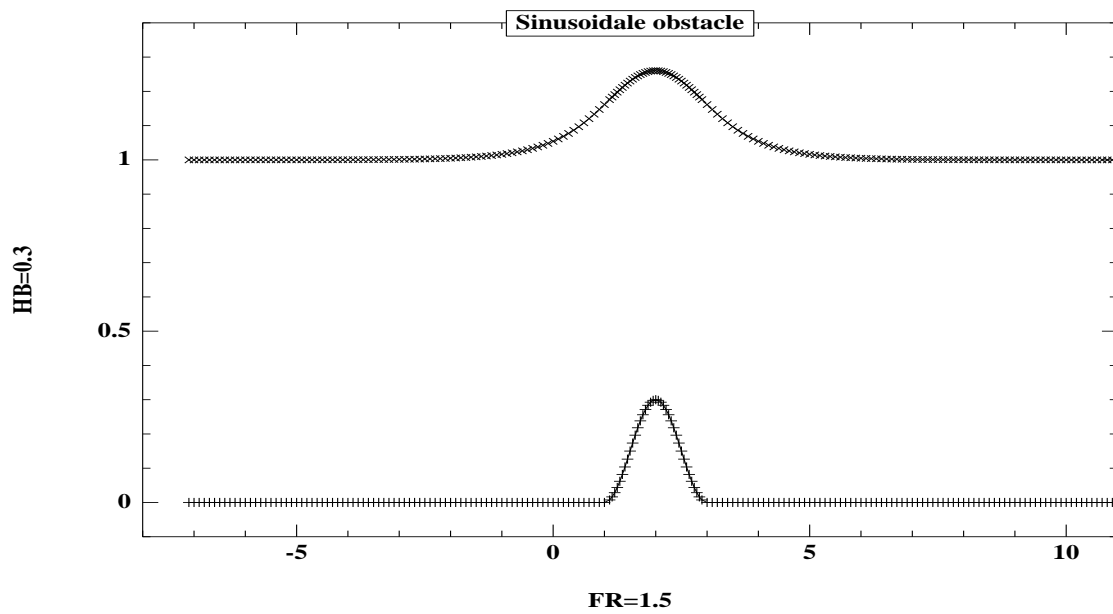
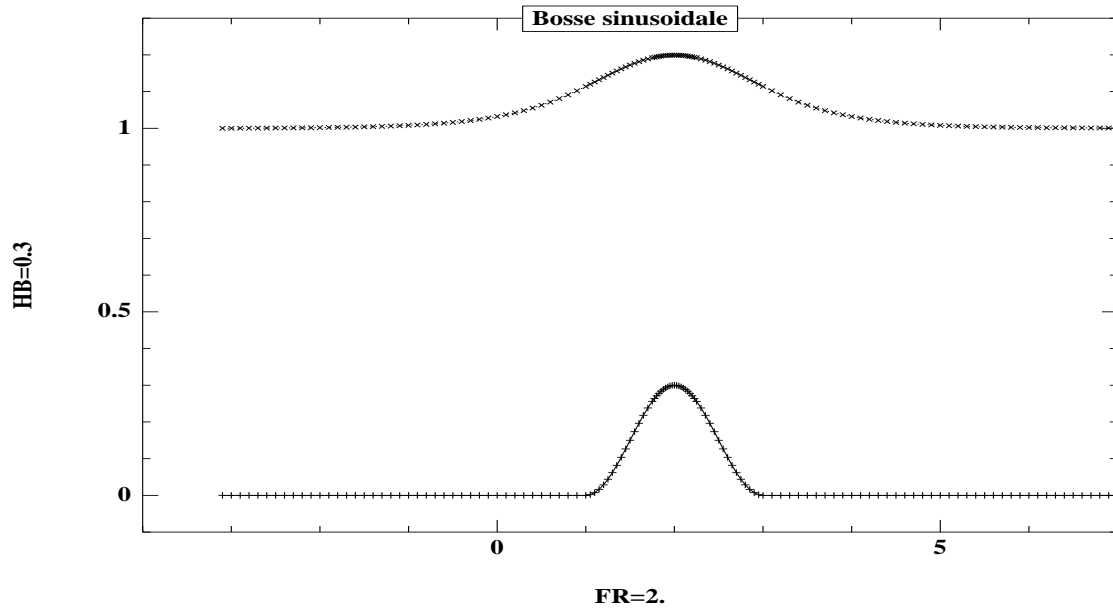
D'après ce tableau, quand la hauteur de l'obstacle décroît, la valeur du nombre de Froude à partir duquel l'algorithme diverge, approche la valeur critique  $Fr = 1$ .

Nous donnons dans les graphes suivants quelques résultats illustrant les lignes de courant et la surface libre pour plusieurs valeurs du nombre de Froude. La précision requise pour l'estimateur est prise égale à 0.01. Notons que les quadrangles qui sont raffinés sont ceux situés près du sommet de l'obstacle.

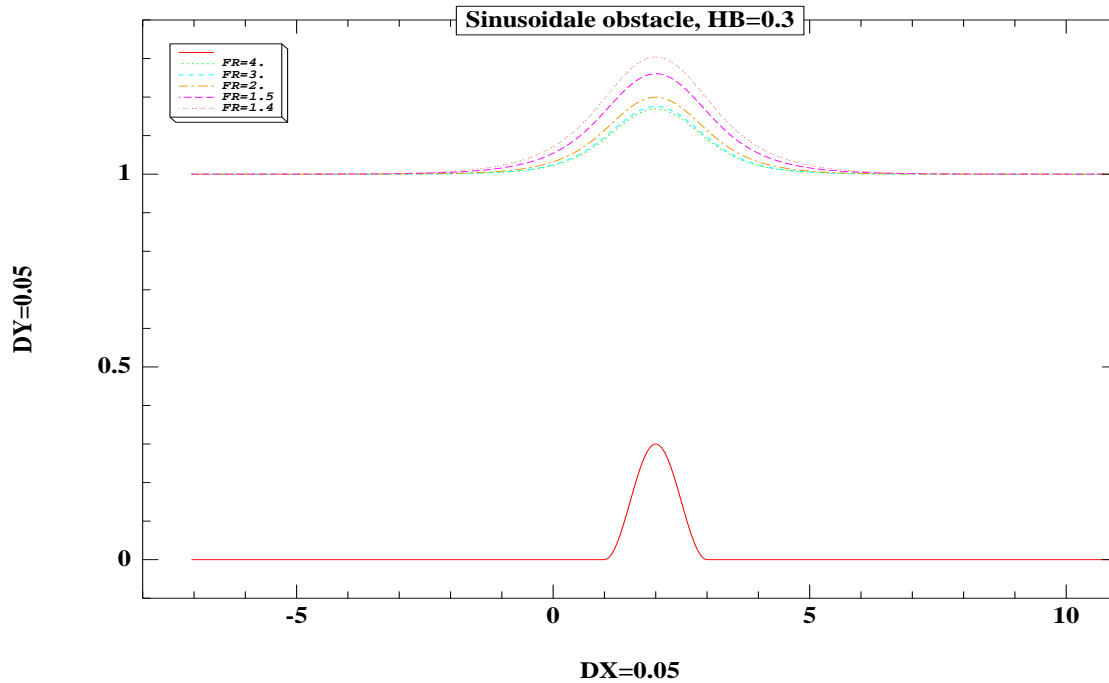


La figure ci-dessus représente la surface libre obtenue pour un obstacle sinusoïdal de hauteur  $HB = 0.9$ .





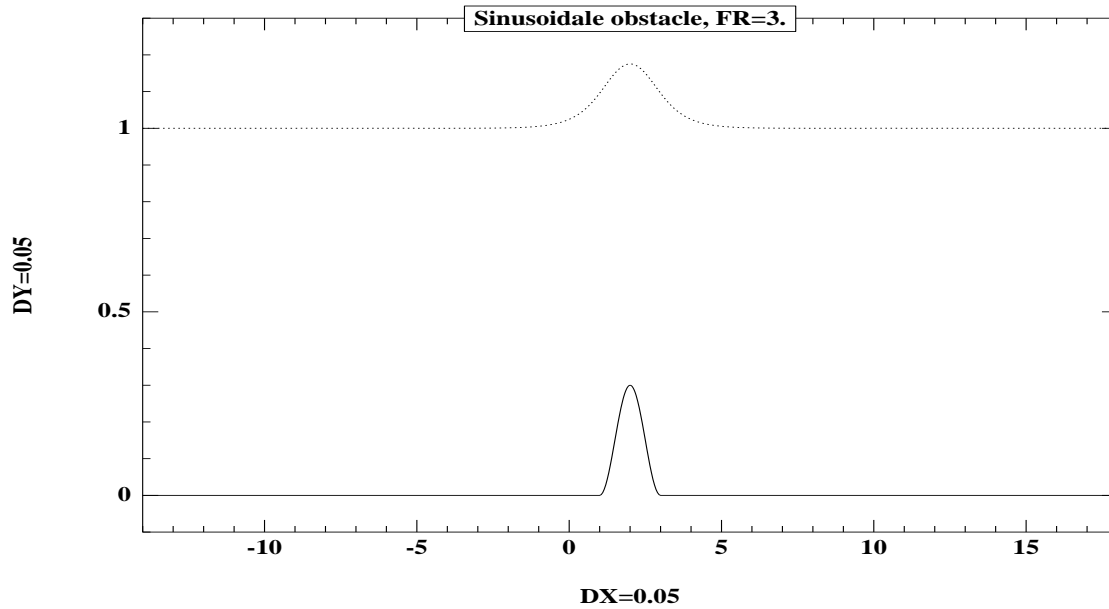
Dans la figure suivante, On donne les profils de surfaces libres obtenus or-  
 respondant à des nombres de Froude décroissants de  $Fr = 4$  à  $Fr = 1.4$ . La  
 hauteur maximale pour la surface libre decroit quand le nombre de Froude  
 croit.



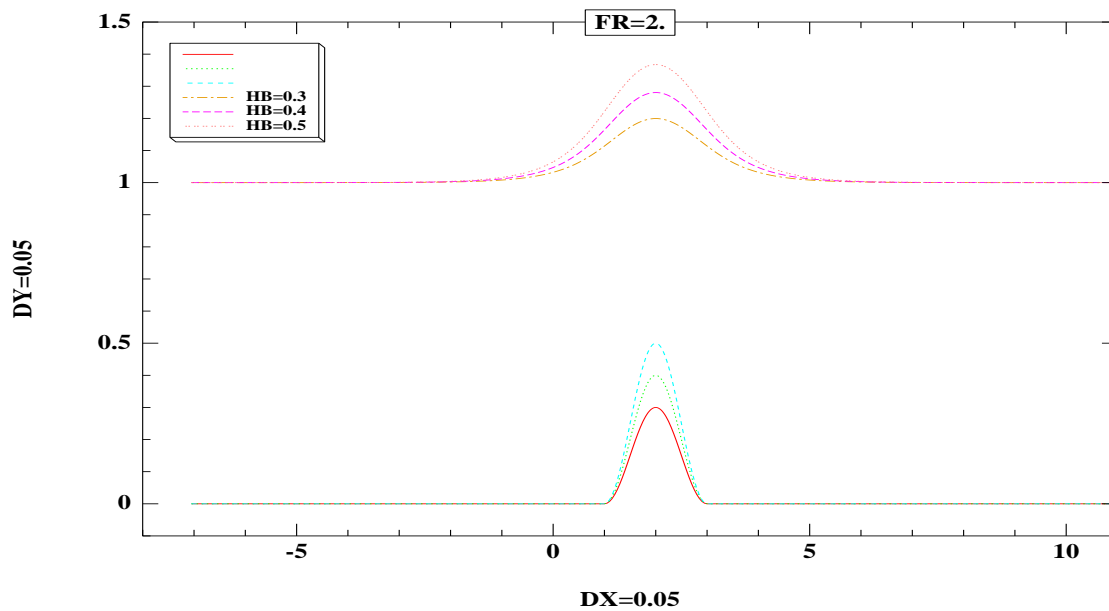
Nous donnons dans le tableau suivant, pour les nombres de Froude considérés dans la figure ci dessus, le temps CPU, le nombre  $NQ$  d'éléments du maillage, le plus grand estimateur d'erreur a posteriori  $estimax$ , la valeur moyenne  $estim$  des estimateurs, et le nombre  $IT$  des iterations effectuées.

$FR$	$CPU$	$NQ$	$estimax$	$estim$	$IT$
4.	17.479	8556	0.006515	0.0004348	6
3.	19.869	8556	0.006512	0.0004356	7
2.	18.55	8556	0.006497	0.0004371	7
1.5	16.929	8556	0.006450	0.0004420	12
1.4	18.829	8556	0.006415	0.0004462	16

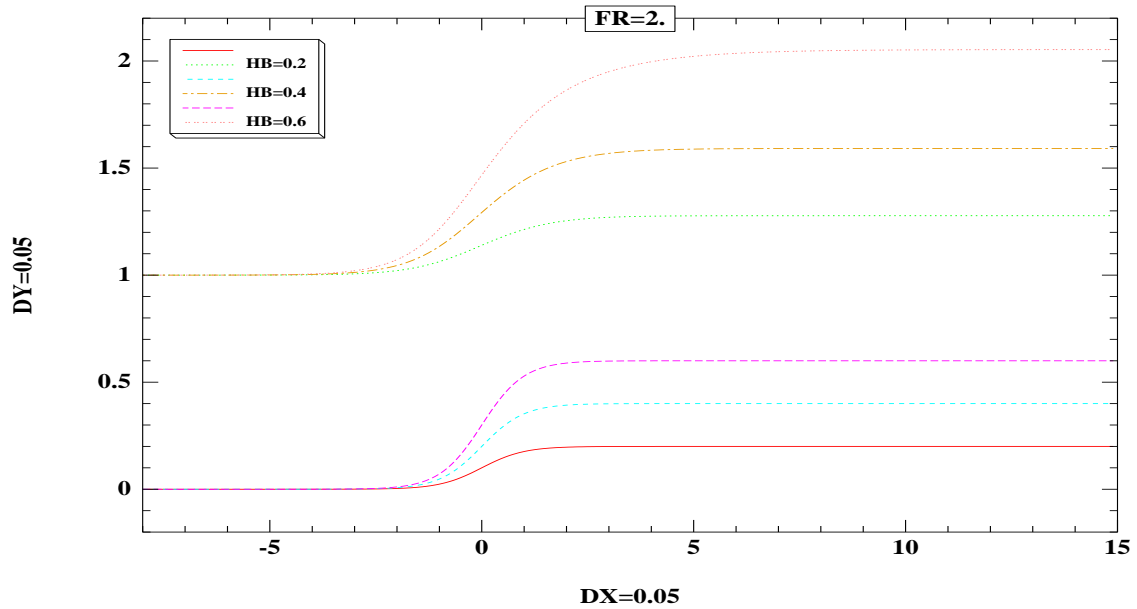
Le graphe suivant représente la surface libre obtenue quand on éloigne les frontières amont et aval de l'obstacle pour un nombre de Froude  $Fr = 3$ .



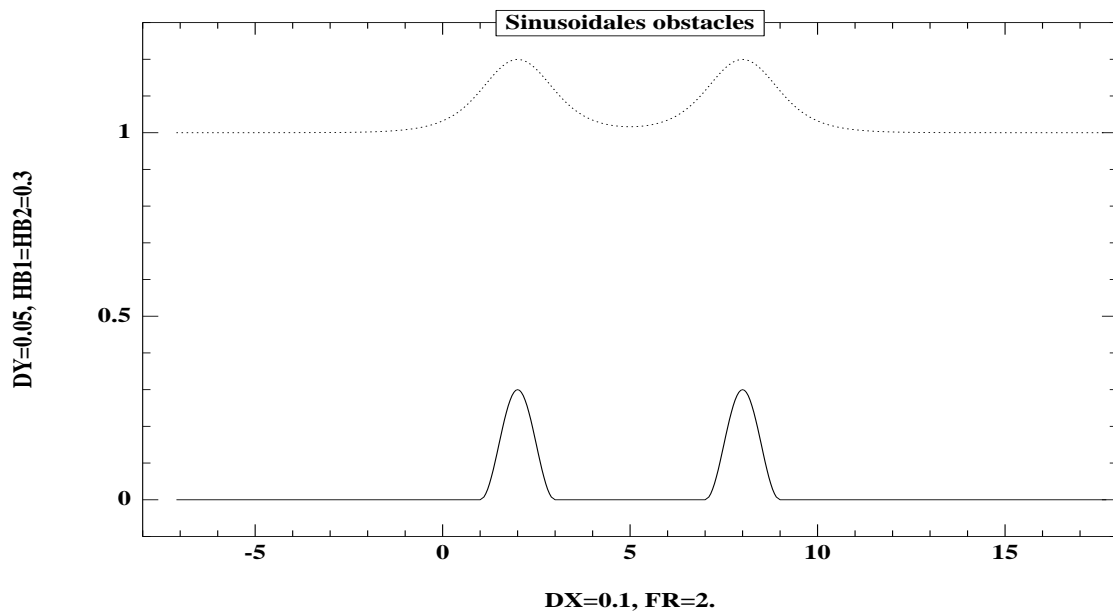
Dans la figure suivante, on représente la surface libre obtenue pour un nombre de Froude fixé  $Fr = 2$ , et trois différentes hauteurs de l'obstacle sinusoïdale. La hauteur maximum de la surface libre croît avec la hauteur de l'obstacle.



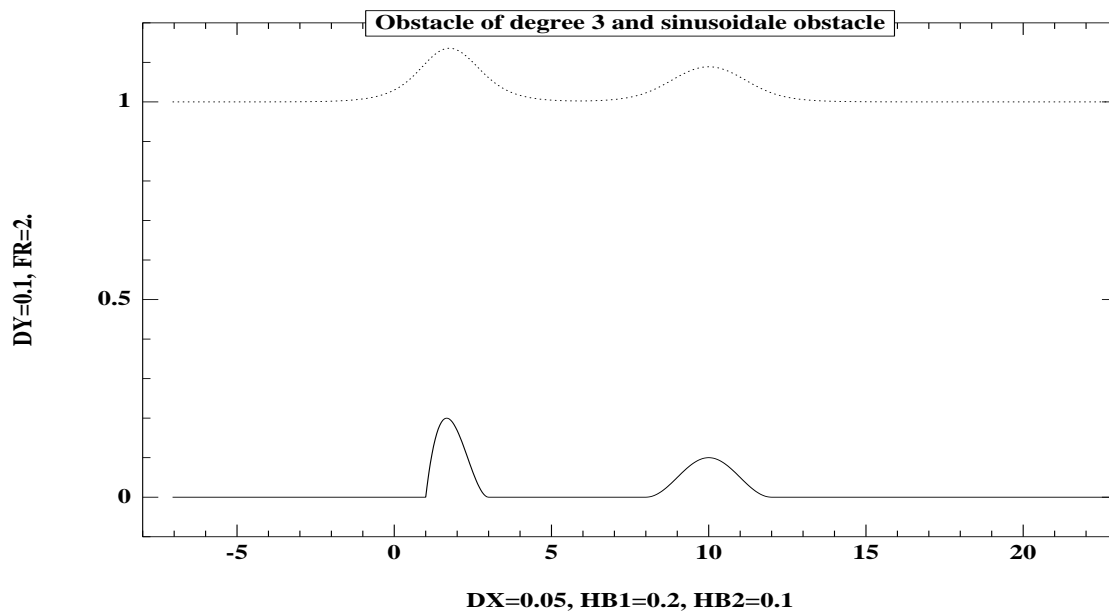
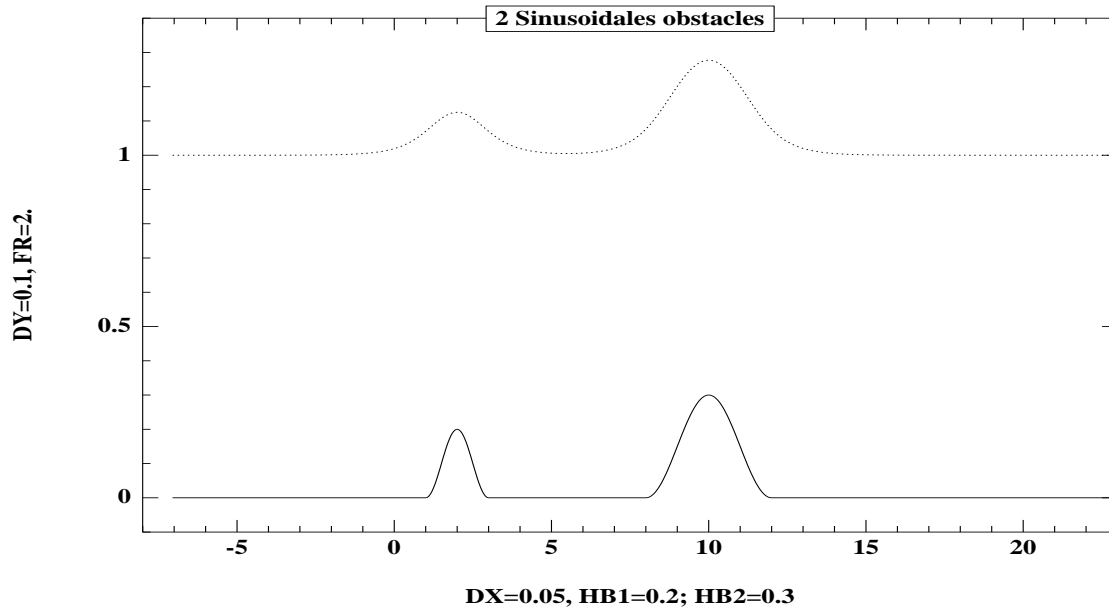
La figure suivante donne les surfaces libres obtenues pour trois hauteurs différentes de l'obstacle en forme de marche. La hauteur maximum de la surface libre croît avec la hauteur de l'obstacle.



La figure suivante représente la surface libre obtenue quand on place deux obstacles au fond du canal, pour un nombre de Froude  $Fr = 2$ . et les hauteurs de deux obstacles égales  $HB1 = HB2 = 0.3$ . Le pas de discrétisation est  $dx = 0.1$  en  $x$  et  $dy = 0.05$  en  $y$ .



Les figures suivantes montrent la surface libre obtenue pour deux obstacles avec différentes hauteurs et longueurs, pour un nombre de Froude  $Fr = 2$ .



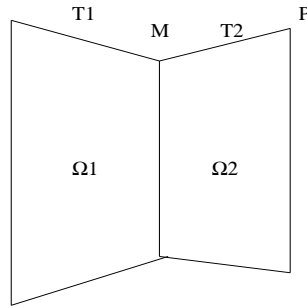
## 5.4 Le cas fluvial

Dans le cas fluvial, on choisit de déterminer la surface libre par résolution de l'équation de Bernoulli sans discrétiser le problème en  $y$ . Ce choix est motivé par le fait que l'on ne sait pas quelle condition mettre sur une frontière située à l'aval de l'obstacle.

Une formulation faible de l'équation de Bernoulli est donnée par :

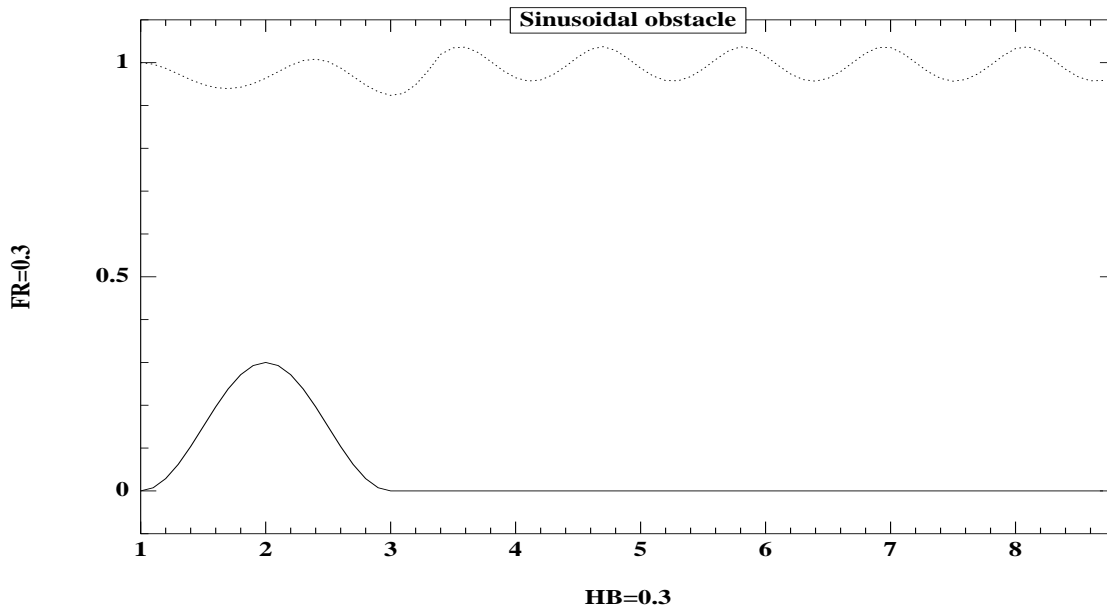
$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \nabla \psi_h \nabla \varphi_M - \int_{T_1 \cup T_2} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_M d\sigma = 0 \quad (5.28)$$

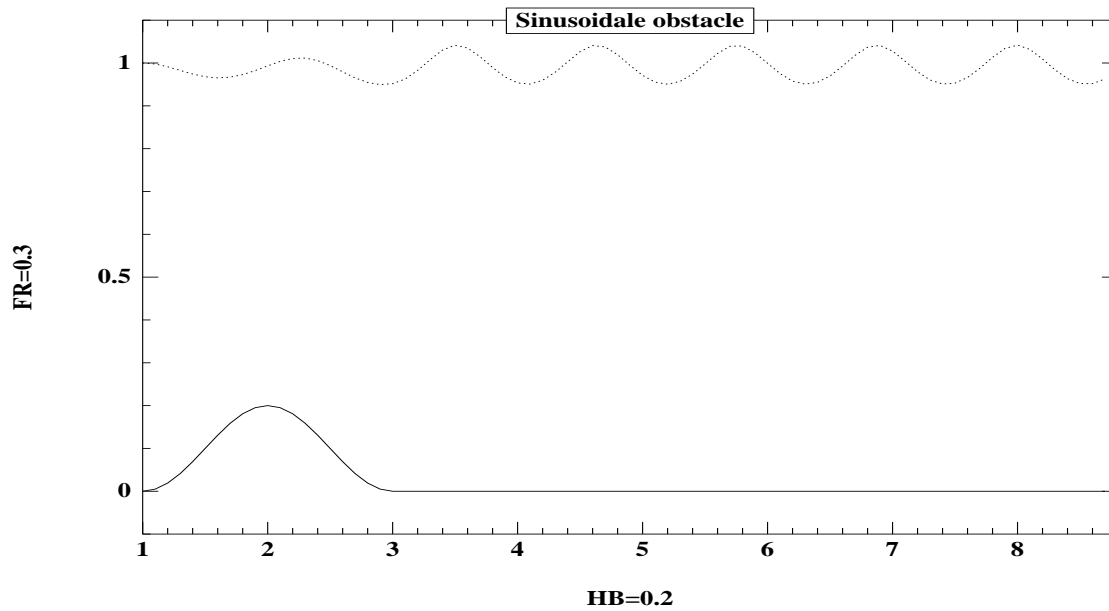
Les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et les côtés  $T_1$  et  $T_2$  sont représentés dans la figure ci-dessous :



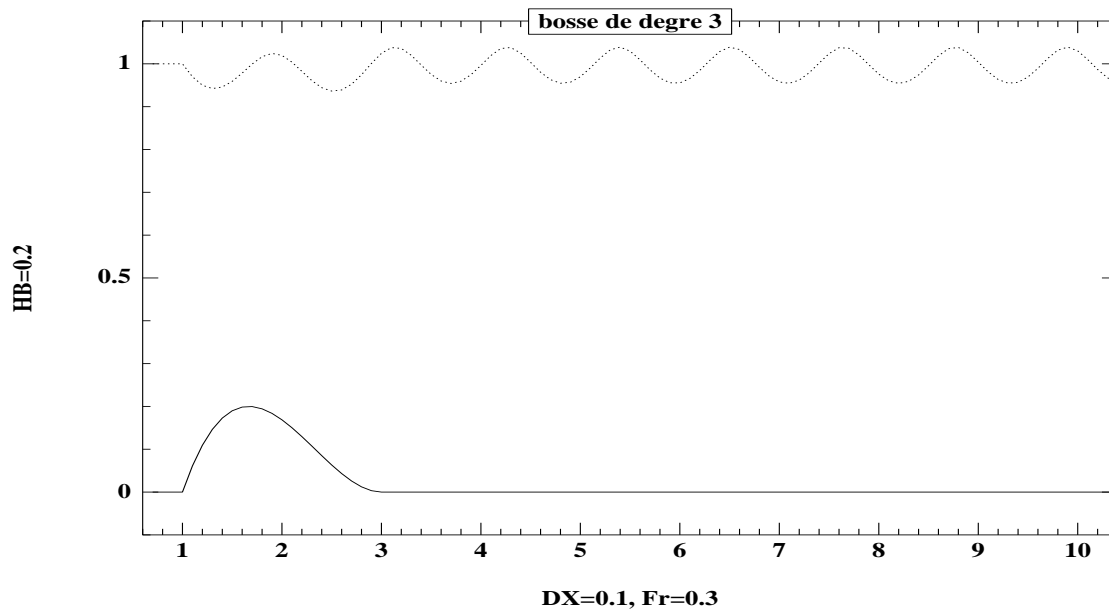
Le domaine  $\Omega_1$  est connu et le domaine  $\Omega_2$  est inconnu car le point  $P$  est à déterminer. La fonction  $\varphi_{M|\Omega_i}$  appartient à  $Q_1(\Omega_i)$ , est égale à un au point  $M$  et est égale à zero aux autres points. La résolution de l'équation (5.28) est faite par une méthode de point fixe numérique.

On donne quelques graphes de la surface libre pour quelques valeurs de hauteurs d'obstacles et quelques valeurs du nombre de Froude.

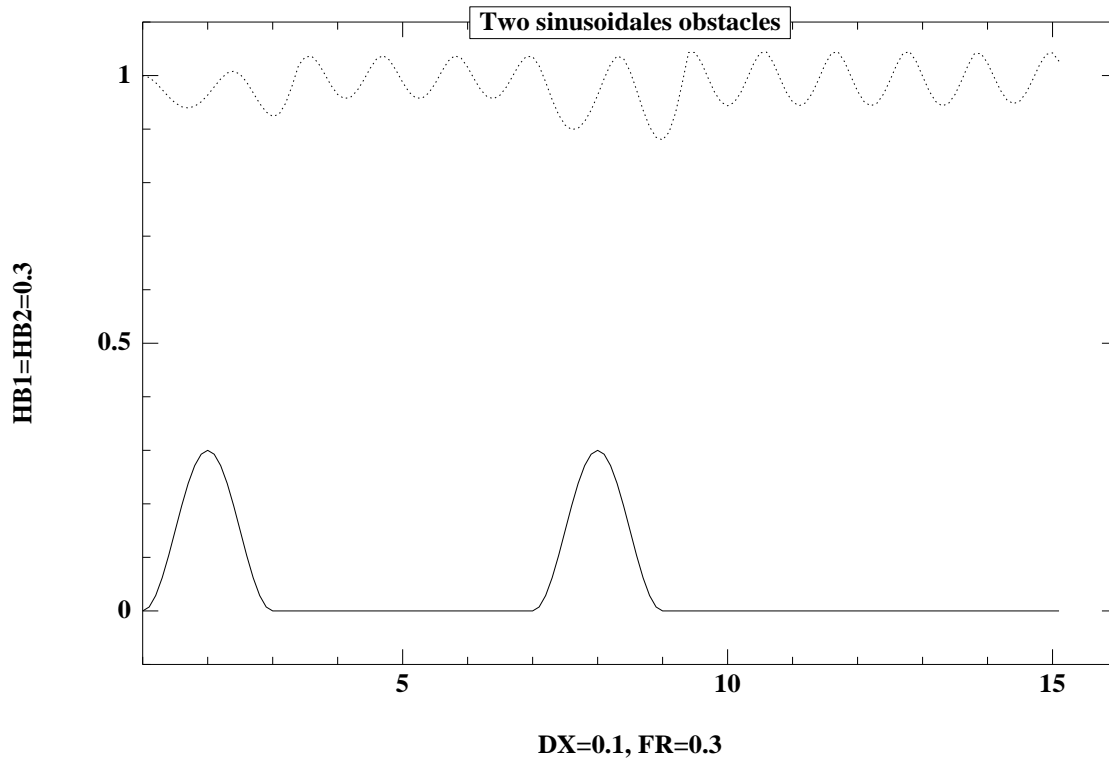




Le schéma suivant donne la surface libre obtenue dans le cas d'un obstacle de degré 3, pour un nombre de Froude  $Fr = 0.3$  et une hauteur de l'obstacle  $HB = 0.2$  :



Dans le graphe suivant, on représente la surface libre obtenue dans le cas de deux obstacles sinusoidaux.



## Commentaires sur le chapitre 5

Dans l'approche numérique que nous avons faite, différents résultats sont présentés dans le cas torrentiel, où le calcul de la surface libre est accompagné du calcul de la fonction de courant dans le domaine. Ces résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus par [12] qui a utilisé les éléments finis  $\mathbb{P}_1$  dans son code.

Dans le cas fluvial, nous avons uniquement calculé la frontière libre, qui est l'inconnue principale du problème. Ce choix a été motivé par le fait que sur une frontière située à droite du domaine de calcul, on ne peut mettre une condition de Neumann ou de Dirichlet ; et donc le code du cas torrentiel est inopérant pour le cas fluvial. On a choisi de calculer la frontière libre pas à pas de la gauche vers la droite, sans utiliser les valeurs de la fonction de courant à l'intérieur du domaine, mais uniquement sur les frontières inférieure et supérieure du domaine de calcul. Un travail est en cours, et sera prochainement soumis à publication, où l'on analyse le problème en le linéarisant. Le problème linéarisé nous permet de comprendre que les conditions aux bords à mettre dans le cas fluvial ne sont pas celles du cas torrentiel. Un code de calcul pour le problème non linéaire, calculant la frontière libre et la fonction de courant, est en phase de finalisation.

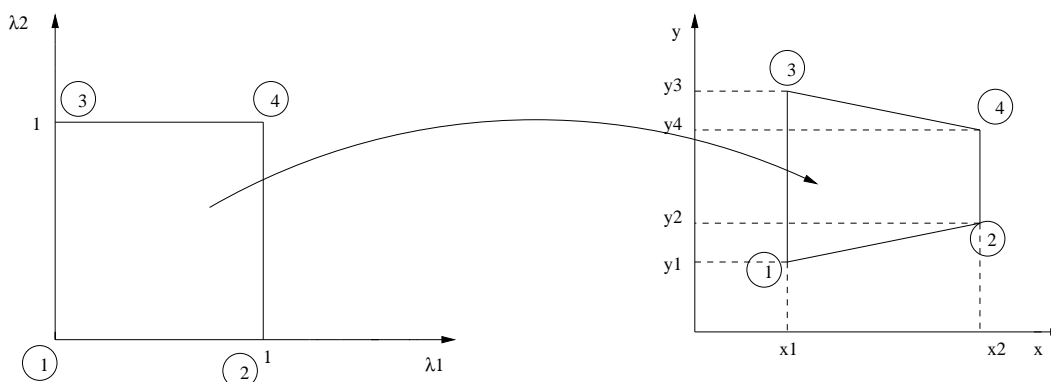
## Annexe au chapitre 5

Dans cette annexe, nous donnons les formules de calcul de la matrice élémentaire, et les formules permettant de calculer les intégrales de bord intervenant dans le second membre du système linéaire résolu à chaque étape. Nous donnons aussi le calcul de la norme  $L^2$  du saut de la dérivée normale de la fonction de courant approchée  $\psi_h$  à travers un côté interne  $T$  du maillage.

### Calcul de la matrice élémentaire :

Dans cette annexe nous présentons les formules permettant de calculer les termes de la matrice élémentaire dans la méthode des éléments finis  $\mathbb{Q}_1$ . Nous rappelons que nous avons maillé le domaine par des quadrangles à côtés parallèles verticaux. Pour un quadrangle  $K$  donné, nous numérotions ses sommets de 1 à 4 et nous noterons  $\varphi_i$  la fonction de base associée au sommet numéro  $i$ .

Considérons le carré unité dans le plan de référence  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Trouvons la fonction  $T$  qui transforme ce carré en un quadrangle  $K$  de coordonnées  $S_1 = (x_1, y_1)$ ,  $S_2 = (x_2, y_2)$ ,  $S_3 = (x_1, y_3)$  et  $S_4 = (x_2, y_4)$  (voir dessin ci dessous)



On a donc  $T(\lambda_1, \lambda_2) = (x, y)$ . On cherche  $T$  de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + b \lambda_1 \lambda_2 + c$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2,  $b$  et  $c$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .

En écrivant la correspondance des sommets du carré avec ceux du trapèze on trouve :  $A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$ ;  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ y_4 - y_2 + y_1 - y_3 \end{pmatrix}$ ;  $c = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Dans le carré de référence les fonctions de base ont les expressions suivantes :

$$\varphi_1 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2), \varphi_2 = \lambda_1(1 - \lambda_2), \varphi_3 = \lambda_2(1 - \lambda_1) \text{ et } \varphi_4 = \lambda_1\lambda_2$$

En explicitant la fonction  $T$ , on aboutit aux expressions suivantes dans le plan  $(x, y)$  :

$$\varphi_1(x, y) = \frac{x_2 - x}{h} \frac{y_H(x) - y}{H(x)}; \varphi_2(x, y) = \frac{x - x_1}{h} \frac{y_H(x) - y}{H(x)}$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{x_2 - x}{h} \frac{y - y_B(x)}{H(x)}; \varphi_4(x, y) = \frac{x - x_1}{h} \frac{y - y_B(x)}{H(x)}$$

$y_B(x)$  (resp.  $y_H(x)$ ) est l'équation du côté inférieur (resp. supérieur) du trapèze. On a posé  $H(x) = y_H(x) - y_B(x)$  et  $h = x_2 - x_1$ . Le système linéaire résolu à chaque étape s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{NI} \psi_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega = \int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_i d\sigma$$

L'intégrale  $\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega$  est calculée par :

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dK$$

Cette dernière intégrale est calculée sur chaque quadrangle  $K$  pour  $1 \leq i \leq 4$  et  $1 \leq j \leq 4$ . Nous avons donc à évaluer les 10 termes suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_K \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_1 dK; A_2 = \int_K \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_2 dK; A_3 = \int_K \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_3 dK; \\ A_4 &= \int_K \nabla \varphi_1 \nabla \varphi_4 dK; A_5 = \int_K \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_2 dK; A_6 = \int_K \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_3 dK; \\ A_7 &= \int_K \nabla \varphi_2 \nabla \varphi_4 dK; A_8 = \int_K \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_3 dK; A_9 = \int_K \nabla \varphi_3 \nabla \varphi_4 dK; \\ A_{10} &= \int_K \nabla \varphi_4 \nabla \varphi_4 dK \end{aligned}$$

Tenant compte des relations  $\sum_{i=1}^4 \varphi_i = 1$ ,  $\varphi_1 + \varphi_3 = \frac{x_2 - x}{h}$  et  $\varphi_2 + \varphi_4 = \frac{x - x_1}{h}$  on

recupère les égalités suivantes :

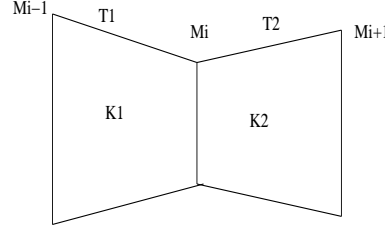
$$A_4 = -A_1 - A_2 - A_3; A_7 = -A_6 - A_2 - A_5; A_9 = -A_3 - A_6 - A_8; A_{10} = -A_4 - A_7 - A_9; A_3 = \frac{y_4 - y_1}{2h} - A_8; A_1 = \frac{y_3 - y_2}{2h} - A_3; A_2 = \frac{y_1 - y_4}{2h} - A_6$$

En définitive nous n'aurons plus qu'à calculer 3 termes :  $A_5$ ,  $A_6$  et  $A_8$ . Ces intégrales sont calculées analytiquement et leurs expressions sont trop longues pour être données ici.

## Calcul du second membre :

Dans le calcul du second membre intervient l'intégrale curviligne suivante :

$\int_{\Gamma_H} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_i d\sigma$  où  $\varphi_i$  est une fonction de base associée à un noeud  $M_i$  du maillage, se trouvant sur la frontière libre  $\Gamma_H$ . On va donc considérer les deux quadrangles  $K1$  et  $K2$  se trouvant de part et d'autre de ce noeud et calculer l'intégrale curviligne sur les deux côtés  $T1$  et  $T2$  ayant ce noeud comme sommet commun ; on notera  $y_{i-1}$ ,  $y_i$  et  $y_{i+1}$  les ordonnées respectives des sommets  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  et  $M_{i+1}$  (voir figure ci dessous)



On a :

$$\int_{T_1} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_i d\sigma = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \int_0^1 s \sqrt{c_1 - c_2 y_{i-1} - s c_2 (y_i - y_{i-1})} ds$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne sur le côté  $T_1$ .

De même nous avons :

$$\int_{T_2} \sqrt{c_1 - c_2 y} \varphi_i d\sigma = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \int_0^1 (1-s) \sqrt{c_1 - c_2 y_i - s c_2 (y_{i+1} - y_i)} ds$$

$s$  étant l'abscisse curviligne sur le côté  $T_2$ . Nous donnons le calcul de la première intégrale, celui de la seconde se fait de la même manière.

En posant  $h = x_i - x_{i-1}$ ,  $p = y_i - y_{i-1}$ ,  $A = c_1 - c_2 y_i$  et  $B = c_2 p$ , on a à calculer l'intégrale suivante qu'on notera  $I$  :

$$I = \sqrt{h^2 + p^2} \int_0^1 s \sqrt{A - B s} ds$$

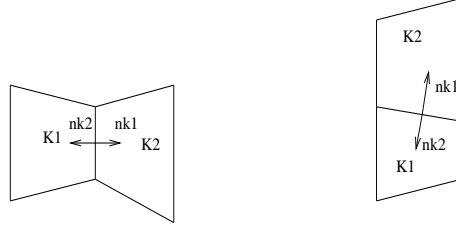
Si  $p = 0$ , alors  $I = h \frac{\sqrt{A}}{2}$

si  $p \neq 0$ , alors  $I = (\sqrt{h^2 + p^2}) \left( \frac{-2}{3B} (A - B)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15B^2} ((A - B)^{\frac{5}{2}} - A^{\frac{5}{2}}) \right)$ .

### Calcul de $\|[\frac{\partial \psi_h}{\partial n}]\|_{L^2(T)}$ :

Dans le calcul des estimateurs d'erreurs a posteriori nous avons à calculer la quantité :  $\|[\frac{\partial \psi_h}{\partial n}]\|_{L^2(T)}$  où  $T$  est un côté interne quelconque d'un quadrangle  $K$ , ie un côté non situé sur le bord du domaine  $\Omega$ . Rappelons la définition du saut  $[\frac{\partial \psi_h}{\partial n}]$  de la fonction  $\psi_h$  à travers un côté  $T$  commun à deux quadrangles  $K_1$  et  $K_2$ . On a par définition :

$[\frac{\partial \psi_h}{\partial n}] = \vec{\nabla} \psi_h^{K_1} \cdot \vec{n}_{k1} + \vec{\nabla} \psi_h^{K_2} \cdot \vec{n}_{k2}$  où  $\psi_h^{K_1}$  et  $\psi_h^{K_2}$  représentent la fonction  $\psi_h$  prise sur  $K_1$  et  $K_2$  respectivement,  $\vec{n}_{k1}$  et  $\vec{n}_{k2}$  représentent les vecteurs normale à  $T$  extérieurs à  $K_1$  et  $K_2$  respectivement (voir dessin ci-dessous)



La fonction  $\psi_h$  s'exprime sur chaque quadrangle  $K_i$ ,  $i = 1, 2$  de la manière suivante :

$$\psi_h^{K_i} = \sum_{j=1}^4 \psi_j^{K_i} \varphi_j^{K_i}, \text{ d'où } (\vec{\nabla} \psi_h^{K_i})|_T = \sum_{j=1}^4 \psi_j^{K_i} (\vec{\nabla} \varphi_j^{K_i})|_T, \text{ où } \varphi_j^{K_i}, 1 \leq j \leq 4$$

sont les 4 fonctions de base associées aux sommets de  $K_i$  et  $\psi_j^{K_i}$  est la valeur de  $\psi_h$  au noeud  $j$  du quadrangle  $K_i$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \left\| \left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T \left[ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} \right]^2 d\sigma \\ &= \int_T (\vec{\nabla} \psi_h^{K_1} \cdot \vec{n}_{k_1} + \vec{\nabla} \psi_h^{K_2} \cdot \vec{n}_{k_2})^2 d\sigma \\ &= \int_T \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \psi_j^{K_i} (\vec{\nabla} \varphi_j^{K_i})|_T \cdot \vec{n}_{k_i} \right)^2 d\sigma \end{aligned}$$

Si  $T$  est un côté vertical, la dérivée normale de  $\varphi_j^{K_i}$  se réduit à  $\pm$  la dérivée par rapport à  $x$  car le vecteur  $\vec{n}_{k_i}$  est alors  $\vec{n}_{k_i} = \pm(1, 0)$ .

Si  $T$  est un côté oblique, la dérivée normale de  $\varphi_j^{K_i}$  est :

$$\vec{\nabla} \varphi_j^{K_i} \cdot \vec{n}_{k_i} = \frac{\partial \varphi_j^{K_i}}{\partial x} \cdot n_{k_i}^1 + \frac{\partial \varphi_j^{K_i}}{\partial y} \cdot n_{k_i}^2$$

où  $n_{k_i}^1$  et  $n_{k_i}^2$  sont les composantes du vecteur normal au côté  $T$  d'extrémités  $(x_i, y_i)$  et  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , données par :

$$n_{k_i}^1 = - \frac{y_{i+1} - y_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}}$$

$$n_{k_i}^2 = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}}$$

La norme  $L^2$  sur  $T$  du saut de la dérivée normale de  $\psi_h$  est alors calculée par une formule d'intégration numérique ; on a en fait utilisé la formule de Simpson généralisée.

# Conclusion et perspectives

Le travail réalisé dans cette thèse est une contribution à l'étude théorique et numérique de problèmes d'écoulements à surface libre au dessus d'un obstacle. A notre connaissance, il n'y a pas eu auparavant de résultat théorique d'existence et d'unicité de la solution par la méthode de la transformation de l'hodographe pour le problème que nous avons considéré. Pour l'étude de l'identifiabilité et de la stabilité des frontières, nous n'avons pas eu connaissance de travaux effectués dans ce sens pour ce problème. Les résultats de l'étude numérique que nous avons présentés sont en très bon accord avec les résultats existants et qui sont donnés par de nombreux auteurs [12], [35], [36]. Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Sur le plan théorique, nous pouvons envisager d'étudier le problème de l'existence et de l'unicité de la solution en considérant des obstacles présentant des singularités, et de voir quelle en sera l'influence sur la régularité de la surface libre. Nous envisageons aussi de reprendre le problème inverse et de voir si l'on peut obtenir un résultat d'existence en appliquant le théorème des fonctions implicites sur l'opérateur considéré au chapitre 3. Nous pouvons aussi envisager de considérer le problème non stationnaire ; et par la suite introduire aussi la viscosité du fluide dans les équations ce qui changera complètement la formulation du problème.

Une suite au travail numérique fait ici est de traiter le problème dans le cas fluvial. Des travaux ont été publiés par certains auteurs dans le cas fluvial par exemple Belward et al [10] qui supposent uniquement que la vitesse et la surface libre sont bornées à l'infini aval, et qui ont utilisé une approche de la solution par une série. Pour notre part, il nous faut poser correctement le problème en tenant compte du fait qu'à l'aval de l'obstacle on ne peut mettre une condition de Dirichlet ou de Neuman car une frontière à l'aval peut rencontrer n'importe quel point entre un creux et une crête de la surface libre ondulatoire. Une étude du problème linéarisé (que nous n'avons pas donnée dans cette thèse) a été faite et nous a permis de comprendre que nous devons, dans le cas fluvial, tenir compte du caractère non elliptique du problème dans la formulation des conditions aux limites à l'aval du domaine. Un code de calcul pour le problème non linéaire, par éléments finis, tenant compte de ce caractère non elliptique du problème, est en phase de finalisation.

# Bibliographie

- [1] F. ABERGEL & J.L.BONA, Mathematical theory for viscous, free-surface flows over a perturbed plane. PENNSTATE, department of mathematics Report n°. AM81 February 1991.
- [2] R.AIT YAHIA-DJOUADI, D. HERNANE-BOUKARI and D.TENIOU, A study of the inverse of a free surface problem, *Abstract and Applied Analysis*, n°2, 159-171, (2005)
- [3] R. AIT YAHIA-DJOUADI, D. HERNANE-BOUKARI and D.TENIOU, A free boundary problem for a torrential flow, accepted in "Portugaliae Mathematica" (2006)
- [4] C. J. AMICK, On the dirichlet problem for infinite cylinders and equations with transversely varying coefficients, *Journal of differential equations* 30, 248-279 (1978).
- [5] C. J. AMICK, Properties of study Navier-Stokes solutions for certain unbounded channels and pipes. *Non linear analysis, theory, methods & applications*, vol.2, N° 6. pp 689-720.
- [6] J. ASAVANANT ; J.-M VANDEN-BROEK. Free-surface flows past a surface-piercing object of finite length. *J. Fluid Mech.* 273, 109-124 (1994).
- [7] K.J BAI. ; J.W KIM. FEM on nonlinear free-surface flow. (English) Chakrabarti, S. K. (ed.), *Numerical models in fluid-structure interaction*. Southampton : WIT Press. *Advances in Fluid Mechanics* 42, 83-133 (2005)
- [8] K.J BAI. ; S.M. CHOO ; S.K Chung . ; D.Y. Kim Numerical solutions for nonlinear free surface flows by finite element methods. *Appl. Math. Comput.* 163, No.2, 941-959 (2005)
- [9] K.J BAI ; J.W. KIM FEM on nonlinear free-surface flow. (English) Chakrabarti, S. K. (ed.), *Numerical models in fluid-structure interaction*. Southampton : WIT Press. *Advances in Fluid Mechanics* 42, 83-133 (2005).
- [10] S.R. BELWARD ; W.W.READ ; P.J. HIGGINS ; Efficient series solutions for non-linear flow over topography, *ANZIAM J.* 44 (E) pp C93-C113, 2003

- [11] A. BENABDA, sur quelques problèmes inverses géométriques via des équations de conduction elliptique : étude théorique et numérique, thèse présentée pour l'obtention du diplôme de docteur 3ème cycle, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 1993.
- [12] M. BOUHADF, Contribution à l'étude des ondes de surface dans un canal. Application à l'écoulement au dessus d'un obstacle immergé. Thèse de Doctorat Es Sciences Physiques présentée à l'université de Poitiers (U.E.R. Centre d'Etudes Aérodynamiques et thermiques), (1988)
- [13] D. BOUKARI, R. DJOUADI, D.TENIOU, Free surface flow over an obstacle. Theoretical study of the fluvial case. *Abstarct and Applied Analysis*, volume 6, N°7, pp 413-430 (2001)
- [14] P.G CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, 1978
- [15] J.W CHOI, Free surface waves over a depression. (English) *Bull. Aust. Math. Soc.* 65, No.2, 329-335 (2002).
- [16] J.M. CHUANG, Numerical studies on nonlinear free surface flow using generalized Schwarz-Christoffel transformation. (English) [J] *Int. J. Numer. Methods Fluids* 32, No.7, 745-772 (2000). [ISSN 0271-2091 ; ISSN 1097-0363]
- [17] S. L. COLE, Near critical free surface flow past an obstacle. *Q. Appl. Math.* 41, 301-309 (1983).
- [18] M. DAI, D. P SCHMIDT, . Adaptive tetrahedral meshing in free-surface flow. (English) [J] *J. Comput. Phys.* 208, No.1, 228-252 (2005).
- [19] R. DAUTRAY, J.L.LIONS, analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques.volume 2. L'opérateur de Laplace. Editions Masson 1987.
- [20] G.DHATT, G.TOUZOT, Une présentation de la méthode des éléments finis, deuxième édition, Maloine éditeur Paris, 1984.
- [21] F.DIAS and J.M. VANDEN BROECK, Open channel flow with submerged obstruction, *J. Fluid Mech.* 206 (1989) 155-170
- [22] T. P. FELICI, The inverse problem in the theory of electromagnetic shaping, PHD, university of Cambridge (1991).
- [23] L.K.FORBES and L. M. SCHWARTZ, Free- surface flow over a semi-circular obstruction, *J. Fluid Mech.* 114 (1982) 299-314.
- [24] M. FORTIN, Problèmes de surfaces libres en mécanique des fluides. Shape optimization and free boundaries, *Proc. NATO ASI, Sémin. Math. Supér., Montréal/Can.* 1990, NATO ASI Ser., Ser. C 380, 143-172 (1992).
- [25] R.S. GELLRICH, Free boundary value problems for the stationary Navier-Stokes equations in domains with noncompact boundaries. (English) [J] *Z. Anal. Anwend.* 12, No.3, 425-455 (1993). [ISSN 0232-2064]

- [26] P.GRISVARD , Elliptic problems in nonsmooth domains, monographs and studies in mathematics. 24- Pitman. London (1985).
- [27] S.N. HANNA, Free-surface flow over a polygonal and smooth topography. (English) [J] Acta Mech. 100, No.3-4, 241-251 (1993).
- [28] S.N HANNA, M.N. ABDEL-MALEK, M.B. ABDEL-MALEK, Supercritical free-surface flow over a trapezoidal obstacle. (English) [J] J. Comput. Appl. Math. 66, No.1-2, 279-291 (1996). [ISSN 0377-0427]
- [29] A. HAY, M. VISONNEAU, Computation of free-surface flows with local mesh adaptation. [J] Int. J. Numer. Methods Fluids 49, No.7, 785-816 (2005)
- [30] F. HELEIN, Ecoulement stationnaire dans un canal à fond presque plat.Rapport n° 9205 groupe Hydrodynamique Navale, URA CNRS 853, ENSTA, Centre de l'Yvette 91120 Palaiseau, France (1992).
- [31] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer 1969
- [32] S.R. IDELSOHN, M.A. STORTI, E. ONATE, Lagrangian formulations to solve free-surface incompressible inviscid fluid flows. (English) [J] Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 191, No.6-7, 583-593 (2001). [ISSN 0045-7825]
- [33] IGUSHI, TATSUO ; TANAKA, NAOTO ; TANI, ATUSI, On a free boundary problem for an incompressible ideal fluid in two space dimensions. (English), [J] Adv. Math. Sci. Appl. 9, No.1, 415-472 (1999).
- [34] IGUSHI, TATSUO On steady irrotational flow of incompressible ideal fluid in a circular domain with free surface. (English) [J] Ann. Univ. Ferrara, Nuova Ser., Sez. VII 46, 35-60 (2000).
- [35] A.C. KING, ; M.I.G BLOOR, . Free-surface flow over a step. (English) [J] J. Fluid Mech. 182, 193-208 (1987). [ISSN 0022-1120]
- [36] A.C. KING & M.I.G. BLOOR, Free streamline flow over curved topography, Quaterly of Applied Mathematics, volume XLVIII, number 2 , june 1990, pages 281-293.
- [37] C. LE ROUX, B.D REDDY, The steady Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions : Application to free boundary flows. (English) [J] Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 20, No.9, 1043-1068 (1993). [ISSN 0362-546X]
- [38] K. LOWERY , S. LIAPIS, Free surface flow over a semi-circular obstruction, Int.J. Numer. Meth. Fluids 30 ; 43-63 (1999)
- [39] B.N. MANDAL, U. BASU, Free-surface flow over a small geometrical disturbance at the bottom. (English) [J] Bull. Calcutta Math. Soc. 88, No.5, 355-362 (1996). [ISSN 0008-0659]
- [40] K. MEFTAH, G. DHATT, J.M. TANGUY, Écoulement bidimensionnel à surface libre. Approche h-s. I. Rev. Eur. Élé. Finis 8, No.4, 375-431 (1999).

- [41] A. MIRANVILLE, R. TEMAM, Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus, Cambridge University Press, 2000 Éditeur Springer , 2003.
- [42] C. D. PAGANI, D. PIEROTTI, The Neumann-Kelvin problem for a beam, Journal of Mathematical Analysis and Applications 240, 60-79, (1999).
- [43] C. D. PAGANI, D. PIEROTTI, On solvability of the nonlinear wave resistance problem for a surface-piercing symmetric cylinder, Siam J. Math. Anal , vol 32, N1, 214-233 (2000)
- [44] P. REICHL, K. HOURIGAN, M.C. THOMPSON, Flow past a cylinder close to a free surface. (English) J. Fluid Mech. 533, 269-296 (2005). MSC 2000 : \*76D05 76M20
- [45] J.S. RUSSEL, Report on waves, British association Report, 311 (1844)
- [46] V.G. SAMOJLENKO, U.S SUYAROV, Complete integrability of a hydrodynamic Navier-Stokes model of the flow in a two-dimensional incompressible ideal liquid with a free surface. (Russian, English) [J] Ukr. Math. J. 45, No.1, 94-99 (1993); translation from Ukr. Mat. Zh. 45, No.1, 86-90 (1993). [ISSN 0041-5995]
- [47] A.C. SMITH, T.H. LIM, Symmetric supercritical free surface flow over a polygonal obstacle. Int. J. Eng. Sci. 23, 289-306 (1985).
- [48] V.A. SOLONNIKOV, On free boundary problems with moving contact points for the stationary two-dimensional Navier-Stokes equations. (Russian, English) [J] J. Math. Sci., New York 84, No.1, 930-947 (1997); translation from Zap. Nauchn. Semin. POMI 213, 179-205 (1994).
- [49] M; SOULI, J.P. ZOLELIO, Le contrôle de domaine dans le problème de résistance de vague non linéaire en hydrodynamique. Ann. Sc. math. Québec, 15 (2), 1991, 203-214
- [50] B.A. TON, On a free boundary problem for an inviscid incompressible fluid. (English) Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 6, 335-347 (1982). MSC 2000 : \*76B15 35A10
- [51] F. TREVES; Basic linear partial differential equations, Academic press, New York. San Francisco. London (1975)
- [52] J.M. VANDEN-BROECK, Free-surface flow over an obstruction in a channel. Phys. Fluids 30, 2315-2317 (1987).
- [53] R. VERFÜRTH, A posteriori error estimation techniques for nonlinear elliptic and parabolic pde's. (English) [J] Rev. Eur. Im. Finis 9, No.4, 377-402 (2000). [ISSN 1250-6559]
- [54] M.A. WAKLEY, P.H. GASKELL, P.K. JIMACK, M.A. KELMANSON, J.L. SUMMERS, Finite element simulation of three-dimensional free-surface flow problems. [J] J. Sci. Comput. 24, No.2, 147-162 (2005)

- [55] V.E. ZAKHAROV, A.I. DYACHENKO, O.A. VASILYEV, New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface. (English) [J] Eur. J. Mech., B, Fluids 21, No.3, 283-291 (2002). [ISSN 0997-7546]