

N° d'ordre : 18/2007-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
« HOUARI BOUMEDIENE »  
*FACULTE DE PHYSIQUE*



## PROJET DE MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

### MAGISTER

En Physique

*Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides*

Par

*Mme* **AYACHI.K épouse TIMSIT**

#### SUJET :

***GENERATION D'ENTROPIE DANS UN  
TUBE CONTRACTILE***

*« La pompe péristaltique »*

Soutenu publiquement le 19/06/ 2007, devant le jury composé de :

Mr M. SALEM	Professeur	USTHB	Président
Mr F. SOUIDI	Maître de conférence	USTHB	Directeur de thèse
Mr A. BOUGUELA	Professeur	USTHB	Examineur
Mr A. AFIR	Maître de conférence	USTHB	Examineur
Mr M. DEBIANE	Maître de conférence	USTHB	Examineur

## DEDICACES

*Je dédie ce travail à*

*A mon cher père, pour sa patience, son aide, et ces précieux conseils qui ma prodigué, que dieu nous le garde.*

*A mon cher mari, pour son soutien et son encouragement constant tout au long de ce travail.*

*A ma très chère mère, mes frères et soeurs.*

*A ma belle familles.*

*A tout mes amis.*

*A tous ceux qui m'ont aidé sans exception.*

## REMERCIEMENTS

*J'éprouve pour Mr SOUIDI Ferhat de la gratitude pour le sujet qu'il a proposé et dirigé avec sérieux. Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance pour la confiance et les précieux conseils qu'il m'a prodigués.*

*Je remercie vivement Mr SALEM Abdelaziz, professeur à la faculté de physique à l'USTHB qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse.*

*Je suis entièrement reconnaissante à Mr BOUGVELIA Aissa, professeur à la faculté de chimie à l'USTHB ainsi que Mr AFIR Arezki, maître de conférence à la faculté de chimie à l'USTHB, pour avoir accepté de faire partie du jury malgré leurs multiples tâches.*

*Je remercie également Mr DEBIANE Mohamed, maître de conférence à la faculté de physique à l'USTHB, qui a bien voulu faire partie du jury.*



# *SOMMAIRE*

# SOMMAIRE

	Page
Sommaire	
Nomenclature.....	2

## INTRODUCTION ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION GENERALE.....	6
----------------------------	---

## CHAPITRE I : FORMULATION MATHÉMATIQUE

I-1- FORMULATION DU PROBLEME .....	19
I-2- MODELISATION .....	19
I-2-1- Aspects dynamique et thermique .....	20
I-2-1-a- Equations dimensionnelles.....	20
I-2-1-b- Equations adimensionnelles. ....	22
I-2-2- Aspect thermodynamique .....	24
I-2-2-a- Généralités.....	24
I-2-2-b- Taux de génération d'entropie .....	26
I-2-2-c- Le nombre de Bejan .....	31
I-3- CONCLUSION.....	32

## CHAPITRE II: METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

II-1- INTRODUCTION.....	34
II-2-METHODE DE RESOLUTION.....	34
II-3-MAILLAGE.....	35
II-4- COMPATIBILITE, STABILITE ET CONVERGENCE.....	37

### CHAPITRE III: RESULTATS ET ANALYSE

III-1- INTRODUCTION.....	40
III-2- VALIDATION DU SCHEMA NUMERIQUE.....	40
III-3- ETUDE PRELIMINAIRE.....	43
III-4- RESULTATS ET COMMENTAIRES.....	45
III-4-a- Les effets du nombre de Bi.....	45
III-4-b- Les effets du nombre de Pr .....	50
III-4-c- Les effets du nombre de Ek .....	57
III-4-d- Les effets du nombre de Re .....	60
III-5- CONCLUSION .....	64

### CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION.....	66
-----------------	----

### REFERENCES

REFERENCES.....	69
-----------------	----

### ANNEXE

DISCRITISATION DES OPERATEURS DIFFERENTIELS POUR UN PAS NON UNIFORME.....	73
L'INTEGRALE DE SIMPSON A PAS NON UNIFORME.....	82
LES EQUATIONS DE CONSERVATION.....	84



# *NOMENCLATURE*

NOMENCLATURE

Lettres majuscules :

Bi	Nombre de Biot : $Bi = \frac{h_{\infty} \bar{R}}{k}$ .
Bj	Nombre de Bejan : $Bj = \frac{s_k}{s_k + s_{\mu}}$ .
Ek	Nombre d'Eckert : $Ek = \frac{U_0^2}{c(T_0 - T_{\infty})}$ .
F <sub>0</sub>	Le terme de force induite dans l'équation du mouvement.
L	Distance axiale caractéristique.
L <sub>t</sub>	Longueur du tube adimensionnelle
P	Pression d'écoulement.
P <sub>0</sub>	Pression d'entrée
Pr	Nombre de Prandtl : $Pr = \frac{\mu c}{k}$
Q	Débit volumique : $Q(x, \tau) = 2\pi f(\tau) \left. \frac{df}{d\tau} \right _x$ .
L	Longueur de la conduite.
I	Le nombre total de points dans la direction longitudinale.
J	Le nombre total de points dans la direction radiale.
R	Coordonnée radiale.
$\bar{R}$	Le rayon du tube à t=0.
Re	Nombre de Reynolds: $Re = \frac{\bar{R}}{\alpha^{-1} v}$ .
R <sub>0</sub>	Rayon instantané du tube $R_0(t) = \bar{R} \sqrt{1 - \alpha t}$ .
S	Le taux de génération d'entropie.
S <sub>0</sub>	Terme source.
T	Température.
T <sub>0</sub>	Température initiale du fluide.
T <sub>∞</sub>	Temperature ambiante.
U	Vitesse axiale.

$\langle U \rangle$	Vitesse moyenne.
$U_0$	Vitesse axiale caractéristique.
$V$	Vitesse radiale.
$V_0$	Vitesse radiale caractéristique.
$X$	Coordonnée axiale.

### Symboles Grecs:

$\alpha$	mesure de la vitesse de contraction.
$\delta_\mu$	Epaisseur de la couche limite dynamique.
$\delta_\theta$	Epaisseur de la couche limite thermique.
$\varepsilon$	Coefficient de maillage.
$\eta$	Coordonnée radiale similaire.
$\theta$	Température adimensionnelle.
$\langle \theta \rangle$	Température moyenne (Température du mélange)
$\mu$	Viscosité dynamique.
$\nu$	Viscosité cinématique.
$\rho$	Masse volumique du fluide.
$\tau$	Temps adimensionnel : $\alpha t$ .
$\omega$	Température du milieu adimensionnelle.
$\phi$	Fonction de dissipation.

### Lettres minuscules :

$c$	Chaleur spécifique.
$f$	Rayon du tube adimensionnel.
$h_\infty$	Coefficient de convection externe.
$k$	Conductivité thermique.
$s$	Taux de génération d'entropie totale adimensionnel
$s_\mu$	Taux de génération d'entropie adimensionnelle dû à la

	dissipation visqueuse.
$S_k$	Taux de génération d'entropie adimensionnelle dû à la Diffusion thermique.
$u$	Vitesse axiale adimensionnelle.
$v$	Vitesse radiale adimensionnelle.
$w$	Vitesse radiale similaire. $w = v - \frac{\partial f}{\partial \tau}$
$x$	Coordonnée axiale adimensionnelle.



*Introduction  
Générale*

Introduction Générale:

Le coût de plus en de plus élevé de l'énergie, l'exploitation abusive de ses sources, l'impact sur l'environnement, les effets de serre dus au  $\text{CO}_2$ , la destruction des couches d'ozones due aux émissions des CFC, la nécessité de satisfaire aux différents protocoles (KYOTO...)... etc nous forcent à réduire notre consommation d'énergie. Cela ne peut être accompli que grâce à une utilisation plus efficace de nos installations et équipements industriels et à l'optimisation des conditions de fonctionnement de ces équipements. Dans ce contexte, le second principe de la thermodynamique et à travers lui la quantification des processus irréversibles en terme de production d'entropie constitue une méthode des plus intéressantes. C'est ainsi que nous assistons depuis deux décennies à un intérêt croissant en direction de ce domaine.

Selon le second principe de la thermodynamique, le processus idéal est défini comme étant le processus entraînant une dégradation minimale de l'énergie utile. La mesure de l'écart entre un processus, idéal et un processus réel se fait à travers le taux de génération d'entropie. Dans ce qui suit, nous donnerons un bref aperçu des récents travaux qui concernent cet aspect. Notre but étant d'étudier une pompe péristaltique dans ses aspects dynamique, thermique et thermodynamique, on reviendra dans une seconde étape sur les principaux travaux qui ont été entrepris dans le domaine des écoulements pulsés à travers des systèmes rigides et/ou déformable.

❖ [Y. Demirel \(2000\)](#) a fait l'analyse thermodynamique d'un écoulement de couette plan et cylindrique afin d'étudier la génération d'entropie d'un fluide Newtonien en écoulement stationnaire. Les parois sont maintenues à la même température. Son étude fait sortir deux nombres adimensionnels qui sont : le nombre de Brinkman (**Br**) défini par  $Br = \mu u_1^2 / k (T_1 - T_2)$  et le nombre de Bejan (**Be**). Il a étudié leurs effets sur le taux production d'entropie.

Les profils de température des deux écoulements avec et sans gradient de pression, sont présentés graphiquement. La production d'entropie est donnée sous forme de deux termes. Le premier est dû aux gradients de température, le second est dû à la dissipation d'énergie dans le système.

Pour l'écoulement de couette cylindrique il trouve que le rétrécissement de l'espace annulaire augmente l'entropie d'une manière brusque.

Le premier est dû aux gradients de température, le second est dû à la dissipation d'énergie dans le système.

Pour l'écoulement de couette cylindrique il trouve que le rétrécissement de l'espace annulaire augmente l'entropie d'une manière brusque.

❖ [S.Mahmud et R.A.Fraser. \(2002\)](#) ont fait L'analyse thermodynamique d'un écoulement entre deux plaques parallèles chauffées. Le fluide est non Newtonien et l'écoulement est stationnaire. Les expressions de la génération d'entropie adimensionnelle (**Ns**), de la distribution de l'irréversibilité  $\Phi$  et du nombre de Bejan (**Be**) sont établies. Les profils de ces grandeurs sont tracés et analysés selon la direction transversale en fonction du nombre de Peclet (**Pe**), du nombre d'Eckert (**Ec**), du nombre de Prandtl (**Pr**) et du rapport des températures adimensionnel  $\Omega$  tel que :  $\Omega = \frac{\Delta T}{T_0}$ . (**Ns**) est étudié en fonction de la distance

transversale  $y$ , pour différents indice  $n$  de fluide. Ils remarquent que Pour les pseudo plastique ( $n < 1$ ) et les fluides dilatants ( $n > 1$ ), la génération d'entropie est inversement proportionnelle à  $n$ . Ils trouvent que pour ( $n < 1$ ) l'entropie maximale se produit au centre du canal. Alors que pour ( $n > 1$ ) un deuxième maximum du nombre de Bejan (**Be**) est observé dans la région fluide.

❖ Dans le même journal, [S.Mahmud et R.A.Fraser \(2002\)](#) ont publié un article qui porte sur l'analyse du second principe de la thermodynamique d'un écoulement de couette cylindrique. Ils ont étudié la possibilité de minimiser la génération d'entropie (**S**) et le nombre de Bejan (**Be**) lors de cet écoulement. Le taux de la production d'entropie est d'autant plus élevé que les gradients de vitesse et de température le sont. Les effets du rapport des rayons  $\pi$ , des vitesses  $\lambda$  et du paramètre (**Br/ $\Omega$** ) sur le nombre de Bejan  $Be$ , sur la génération d'entropie (**S**) et sur l'irréversibilité sont étudiés. Ils trouvent que (**S**) varie proportionnellement avec le paramètre (**Br/ $\Omega$** ), la position du minimum du nombre de Bejan (**Be**) se décale en fonction de l'augmentation de  $\lambda$ . En l'absence du mouvement de rotation entre les cylindres ( $\lambda = 1$ ), le taux moyen de la production d'entropie est non nul et indépendant des paramètres (**Br/ $\Omega$** ), **Br** et  $\pi$ .

❖ [S.H.Tasmin, M.Shohel, M.A.H.Mamun \(2002\)](#) ont étudié la génération d'entropie (**S**) dans un canal vertical poreux en présence d'un champ

magnétique.  $(S)$  est donnée sous la forme  $(S = S_c + S_d)$  où  $S_c$  est la production d'entropie de conduction et  $S_d$ , celle de la dissipation. Ils ont considéré une convection mixte à l'intérieur du canal pour un écoulement stationnaire, laminaire et complètement développé. Les parois verticales du canal sont supposées isothermes. Les profils de vitesse, de température, la génération d'entropie adimensionnelle  $(Ns)$  et la distribution de l'irréversibilité  $\Phi$ , sont évalués et représentés graphiquement en fonction du nombre de Hartmann  $(M)$  et de l'inverse du nombre de Darcy  $(A)$ . Ils montrent que  $(Ns)$  la génération d'entropie adimensionnelle croît avec l'augmentation de  $\Phi$  (la fonction de dissipation). Dans le milieu poreux  $(Ns)$  est étudiée en fonction de  $\Phi_p$  dans la plage  $0 < \Phi_p < 40$ . Cette grandeur varie peu avec l'inverse du nombre de Darcy  $(A)$ ; le taux moyen de la génération d'entropie  $(Ns_{Av})$  varie linéairement avec  $\Phi$ . On note que la génération d'entropie due à la conduction  $(S_c)$  est entièrement dominante. Alors que le profil de la génération d'entropie totale est uniforme quelque soit  $\Phi_p$ , et présente un minimum à  $y = 0.5$ .

❖ [G.Ibanèz, S.Guevas et M.Lopéz \(2003\)](#) ont étudié la minimisation de la génération d'entropie totale  $(S)$  lors d'un écoulement de couette en refroidissant les parois externes. L'influence des conditions thermiques pariétales (nombre de Biot)  $Bi$  au niveau de chaque paroi :  $Bi_1 = \frac{h_{eff1}a}{k}$ ,  $Bi_2 = \frac{h_{eff2}a}{k}$  du nombre de Nusselt  $(Nu)$ , de la température adimensionnelle  $\theta$  :  $\theta = \frac{k(T - T_a)}{\eta U^2}$  et du rapport de vitesse  $G$  est étudiée.

Il montre que si  $(Bi_1 = Bi_2 = Bi)$ ,  $\theta_a = 5, 7, 9$  et  $G = 0, 2$ , la production d'entropie  $(S)$  est une fonction croissante et monotone de  $Bi$ . Elle atteint une valeur limite pour chaque valeur de  $\theta_a$  pour les grandes valeurs de  $Bi$ . Pour une valeur optimale de  $\theta_a$ , le nombre de Nusselt, donc le transfert de chaleur est maximal, et la production d'entropie totale est minimale.

❖ [L .B . Erbay et al \(2003\)](#) se sont intéressés à la génération d'entropie  $(S)$  due à un transfert de chaleur convectif pour un écoulement laminaire entre deux plaques parallèles isothermes. La plaque inférieure se déplace dans la direction opposée de celle de l'écoulement.

La résolution numérique est basé sur le principe des volumes finis .Les profils de vitesse et de température sont évalués et utilisés pour le calcul de la génération d'entropie (**S**). Cette grandeur est favorisée par le mouvement inverse de la plaque inférieure, elle est maximale si le mouvement de la plaque est parallèle à l'écoulement. Dans cette étude (**S**) dépend essentiellement du nombre de Reynolds (**Re**) et du rapport (**Br /  $\Omega$** ).

- ❖ [Z. Ahmet, Sahin et al \(2003\)](#) ont fait une analyse expérimentale de la génération d'entropie (**S**) pour un écoulement laminaire développé dans une conduite circulaire avec un flux imposé à la paroi. Les trois fluides utilisés sont : un huile industriel, l'eau et le fréon. Ils trouvent les résultats suivants :
  - La production d'entropie croît près de la paroi, puis elle décroît brusquement et garde une valeur constante le long de la conduite.
  - Le taux de la production d'entropie obtenu est, à 20% près, égal à celui obtenu par les calculs théoriques.

- ❖ [G.Ibanéz et al \(2003\)](#) ont étudié un écoulement visqueux entre deux plaques parallèles infinies. Le but de cette étude est d'obtenir la possibilité de minimiser le taux de la génération d'entropie totale en refroidissant la surface externe. Ils trouvent que la production d'entropie (**S**) dépend explicitement de la température ambiante adimensionnelle  $\theta_a$  et du nombre de Biot (**Bi**). Les effets du (**Bi**) sont plus important que ceux de  $\theta_a$  . Ils ont étudié aussi l'influence du nombre de Nusselt (**Nu**) sur la génération d'entropie (**S**). Ces deux grandeurs sont inversement proportionnel, tel que pour une certaine température ambiante notée  $\theta_a$  critique, les auteurs ont obtenus un minimum de (**S**) qui correspond à un nombre de Nusselt (**Nu**) maximum.

- ❖ [B.H.Abbassi et al \(2003\)](#) ont fait l'analyse de la génération d'entropie (**S**) dans un écoulement de Poiseuille-Benard. Cette étude est basée sur la résolution numérique des équations du mouvement et d'énergie avec l'approximation classique de Bossinesq.Le schéma numérique utilise la méthode des volumes finis à travers l'algorithme « **Simpler** ». Dans ce travail, la génération d'entropie globale (**S**) est donnée sous la forme :
 

(**S**= **S<sub>c</sub>**+**S<sub>d</sub>**), conduction et dissipation, (**S**) atteint son maximum à la paroi à cause des fort gradients dans cette zone. L'influence de la fonction d'irréversibilité  $\Phi$  sur les différents termes de (**S**) est étudiée. La valeur critique  $\Phi_1$  de la fonction d'irréversibilité pour laquelle **S<sub>c</sub>** et **S<sub>d</sub>** sont égaux, est évaluée.

Ils ont trouvé que  $\Phi_1$  est une fonction décroissante en fonction de Ra dans la gamme  $5 \cdot 10^{-4} < Ra < 10^{-3}$ .

❖ **S.Mahmud, R.A.Fraser (2003)** se sont intéressés à l'analyse de la deuxième loi de la thermodynamique pour un problème de transfert convectif. Ils ont considéré deux cas différents de conditions aux limites : Parois isothermes et flux constant. Le nombre de la génération d'entropie (**Ns**), le nombre de Bejan (**Be**) et la fonction d'irréversibilité  $\Phi$  sont évalués et représentés graphiquement. Dans cette étude aussi, (**Ns**) est décomposé en deux termes, le premier est dû aux gradients de température donné par (**Nc+Ny**), tel que :  $\mathbf{Nc} = \frac{1}{Pe^2} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial X} \right]^2$  et

$\mathbf{Ny} = \left[ \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right]^2$ . Le second est dû aux frottements du fluide (la dissipation visqueuse)  $\mathbf{Nf} = \frac{Br}{\Omega} \left[ \frac{\partial U}{\partial Y} \right]^2$ .

Ils ont défini la fonction d'irréversibilité  $\Phi$  par le rapport  $\Phi = \frac{Nf}{Nc + Ny}$ ,

Ainsi que le nombre de Bejan (**Be**) par  $Be = \frac{Nc + Ny}{Ns} = \frac{1}{1 + \Phi}$ . Ce travail est

intéressant car il a fait apparaître huit écoulements différents : Un écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles immobiles ; Un écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles fixes ; une convection dans un tube cylindrique ; une convection à travers un espace annulaire ; un écoulement entre deux cylindres coaxiaux ; le cas de deux cylindres concentriques en rotation ; l'écoulement d'un fluide non newtonien dans un tube circulaire et enfin l'écoulement d'un fluide non newtonien entre deux plaques parallèles.

❖ **M.Q.Al-Odat et al (2004)** ont étudié l'effet du champ magnétique sur la production d'entropie (**S**) lors d'une convection forcée sur une plaque plane horizontale. Cette étude a illustré les caractéristiques de (**S**) et sa relation avec les différentes variables adimensionnelles. Ce système est gouverné par le nombre d'Eckert (**Ec**), le nombre de Prandtl (**Pr**) et le nombre de Hartmann (**Ha**) défini par  $Ha^2 = \sigma B_y^2 \vartheta / u_\infty^2 \rho$ . Il ont étudié les effets de ces nombres et du paramètre  $\theta_\infty = T_\infty / \Delta T$ . La résolution est effectuée dans les gammes suivantes :  $0.5 < Ha^2 < 3$ ,  $10^{-2} < Ec < 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $1 < Pr < 5$  et  $1.1 < \theta_\infty < 2.5$ . Les

résultats montrent que **(S)** est une fonction croissante de **(Ha)** et de **(Ec)**, alors qu'elle est décroissante en fonction de **(Pr)** et de  $\theta_{\infty}$ .

❖ Dans leur étude, [B. S. Yilbas et al \(2004\)](#), se sont intéressés à l'analyse de la production d'entropie **(S)** pour un fluide non-newtonien dans un espace annulaire cylindrique. Les profils de vitesse et de température sont évalués afin de calculer les deux termes de la production d'entropie globale **(S=Sc+Sd)**.

Cette analyse montre que les propriétés non-newtoniennes du fluide rendent la vitesse et la température dans l'espace annulaire plus élevées. Le nombre de la génération d'entropie **(Ns)** atteint sa valeur maximale à l'intérieur de l'espace annulaire. Une augmentation du nombre de Brinkman **(Br)** entraîne une augmentation de **(S)** particulièrement dans cette région.

❖ [I.T. Al Zaharanah et B.S.Yilbas \(2004\)](#), ont étudié l'influence d'une viscosité fonction de la température sur la génération d'entropie **(S)** dans une conduite à parois isothermes. Il ont trouvé que l'influence de la viscosité du fluide est considérable sur la distribution de température, en particulier près de la paroi. D'autre part les propriétés variables réduisent la taille de la région où les gradients de température sont élevés. Dans ce cas le taux de production d'entropie est plus élevé comparé au cas où les propriétés sont constantes. Les gradients de la température près de la paroi font augmenter le taux de la génération d'entropie d'une manière considérable pour le premier cas. Alors que c'est le cas d'une viscosité constante qui favorise plus la production d'entropie totale.

❖ [S.Chikh et N.Allouache \(2004\)](#) ont fait l'analyse thermodynamique d'un écoulement annulaire. Cette étude a été consacrée au calcul de la génération d'entropie **(S)** due aux échanges thermiques ainsi qu'aux frottements du fluide, dans l'espace annulaire d'un échangeur de chaleur en présence d'un milieu poreux. Le but de ce travail est de trouver les conditions qui rendent la production d'entropie minimale. Dans ce but, un schéma numérique basé sur la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre le problème dans les deux milieux, fluide et poreux.

L'effet de l'épaisseur de la couche poreuse, de la perméabilité et de la conductivité thermique effective a été étudié. L'analyse a montré que l'insertion d'une couche poreuse dont l'épaisseur est au-dessus d'une certaine valeur critique, favorise le transfert de chaleur et réduit la génération d'entropie totale

**(S)**. Cette valeur critique dépend essentiellement, de la perméabilité de la matrice poreuse ainsi que du rapport des conductivités thermiques qui doit être supérieur à 1.

❖ [O.M Hadad, M.K.Alkan et M.T.Khasawneh \(2004\)](#) ont fait l'étude de La génération d'entropie **(S)** lors d'une convection forcée dans un espace annulaire. Les effets des différents paramètres de l'écoulement et des conditions aux limites sur la génération d'entropie **(S)** sont évalués et représentés graphiquement . Cette quantité est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds **(Re)** et à la température d'entrée, alors quelle varie proportionnellement au nombre de Eckert **(Ec)** et au rapport des rayons N. Les résultats de ce travail montrent que pour une plage de valeurs de **(Ec)** (0.001 ; 0.01 ; 0.1), l'entropie due aux gradients de température est généralement dominante et que la production d'entropie totale **(S)** augmente avec l'importance de l'espace annulaire.

❖ [O.D.Makinde et E.Osalusi\(2005\)](#) ont étudié la génération d'entropie **(S)** dans un canal en présence d'un milieu poreux .La paroi supérieure du canal est adiabatique, alors que la plaque inférieure est chauffée. Les profils de vitesse et de température sont obtenus pour un nombre de Darcy **(Da)** élevé ainsi que pour une gammes de **(Br / Ω)** de (0 ; 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 et 1). Ces profils permettent l'étude du nombre de la génération d'entropie **(Ns)** donné par **(Ns = Nx + Ny + Nf)** et le rapport d'irréversibilité  $\Phi = \frac{N_f}{N_x + N_y}$ . **(Nx + Ny)** est la génération d'entropie de conduction et **(Nf)** est celle de la dissipation du fluide. **(Ns)** et  $\Phi$  sont représentés en fonction de y pour différentes valeurs du paramètre **(Br / Ω)** et un nombre de Peclet **(Pe)=20**.

On remarque que tous les travaux précédents sont gouvernés par les mêmes groupes adimensionnels, notons le nombre d'Eckert **(Ec)**, le paramètre **(Br / Ω)**, le nombre de Prandtl **(Pr)** et la température adimensionnelle  $\Omega$ . Quant à notre travail il portera sur l'étude de l'influence du nombre de Biot **(Bi)** et du nombre d'Eckert **(Ec)** et de l'effet de chaque nombre sur la génération d'entropie.

Nous remarquons que tous ces travaux portent sur des géométries et systèmes relativement simples.

La tendance actuelle dans le domaine de la mécanique des fluides porte sur les systèmes avec paroi mobile et/ou déformable. Cela est principalement motivé par le désir de la comité scientifique de contribuer d'une manière efficace à la résolution des problèmes soulevés par les systèmes des fluides physiologiques

(sang, urine,...). On rencontre ce type d'écoulement dans les organismes vivants où ce genre de fluide est mut par des contractions musculaires. Dans ce papier on se propose d'étudier et d'appliquer le second principe à une pompe péristaltique. Elle est constituée d'un tube contractile fermé dans sa partie amont par une valve adiabatique. Dans ce type de pompe, la contraction de la paroi propulse le contenu fluide du tube en aval et constitue la force motrice de l'écoulement qui en résulte. Dans ce qui suit, nous donnons un bref aperçu des travaux les plus intéressants qui concernent ce sujet.

❖ [S.Uchida et H.Aoki\(1977\)](#) ont fait l'étude d'un écoulement instationnaire dans un tube à paroi mobile. Ils ont montré que le problème admettait une solution similaire dans le temps et dans l'espace, si le rayon devait varier en fonction du temps selon la fonction :  $R = \bar{R}\sqrt{1 + \alpha t}$ .

❖ [Kamm et H. Shapiro \[1979\]](#) ont traité l'écoulement instationnaire pulsé unidirectionnel dans un tube à paroi déformable, avec l'hypothèse d'une grande longueur d'onde comparée au diamètre du tube. Ils ont supposé que l'écoulement était unidirectionnel, et la pression uniforme  $P(x, t)$  et que la vitesse à l'entrée était du type profil plat  $U(t)$ . Leurs résultats ont été comparés avec des résultats expérimentaux et ont montré une bonne concordance. Ces études ont révélé de nouveaux et inattendus phénomènes. Par exemple, ils ont montré que l'écoulement dû à une pression externe uniforme dans l'espace pouvait produire une onde de « choc » suite à la diminution brusque de la section droite du tube.

❖ [S.Takabateck et KAyukawa \(1982\)](#) ont fait une étude numérique bidimensionnelle pour un écoulement péristaltique. Ils ont utilisé la méthode classique 'SOR Upwind' pour obtenir les champs de vitesse, et de pression, ainsi que la contrainte à la paroi pour plusieurs écoulements pulsés. Leurs résultats montrent que ce modèle doit être limité à une gamme du nombre de Reynolds plus étroite par rapport à ce qui avait été prévu.

❖ [M.Heil \(1997\)](#) a utilisé les équations 3D stationnaires de Stokes pour analyser l'écoulement visqueux lent dans un tube dont la déformation est décrite par la théorie non linéaire des coques. Les résultats numériques concernant l'écoulement et la déformation de la paroi sont comparés aux résultats expérimentaux. Il a montré que quand le tube s'effondre, le point où la vitesse axiale est maximale se déplace de l'axe central de tube vers les deux branches

latérales qui restent ouvertes quand les parois opposées entrent en contact. La partie supérieure du tube s'effondre d'une façon plus significative vers l'axe central au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, alors que sur les cotés, la paroi se gonfle vers l'extérieur (latéralement). La vitesse transversale renverse sa direction quand le tube rouvre. Dans un papier ultérieur (1998), le même auteur présente une procédure qui converge rapidement pour les équations 3 D de Stocks stationnaires couplées à l'équation de coque non linéaire qui décrit une grande déformation de la paroi du tube. Les résultats révèlent des caractéristiques spécifiques à la géométrie 3 D (l'écoulement se divise en deux lobes qui restent séparés).

❖ [N.Benyahia et F.Souidi \(2006\),\(sous presse\)](#) ont fait l'étude numérique du problème de l'interaction fluide-structure à l'entrée d'une conduite à paroi déformable. Ils ont considéré l'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien régi par les équations de la couche limite instationnaire. Les équations ont été réduites à celles de la couche limite classique pour un tube rigide avec deux termes supplémentaires fortement non linéaires, un terme source dans l'équation de la conservation de masse et une force induite dans l'équation de conservation de quantité de mouvement. Ces termes traduisent le mouvement de la paroi. La loi à la paroi est dérivée de l'équation d'état générale. Ils ont introduit le coefficient d'élasticité  $\beta$  qui relie les paramètres de la paroi (structure) aux paramètres de l'écoulement. Les résultats obtenus montrent l'importance du coefficient d'élasticité  $\beta$  et l'influence de la force induite  $\mathbf{G}(\mathbf{x},\eta,\tau)$  et du terme source  $\mathbf{S}(\mathbf{x},\eta,\tau)$ . Ce modèle a la propriété d'isoler les termes qui représentent l'interaction fluide-structure. La force induite ' $\mathbf{G}$ ' influence considérablement l'écoulement tandis que le terme source ' $\mathbf{S}$ ' agit sur la forme de la conduite. Si la rigidité de la paroi est plus importante que la pression dynamique ( $\beta > 1$ ), le tube ne peut plus soutenir la charge et se contracte sous l'action d'une pression transmurale négative. La déformation tend à être importante et brusque. L'hypothèse qui justifie l'approximation de premier ordre de la loi du tube est violée et des instabilités numériques apparaissent.

A notre tour nous voulons nous pencher sur ce type de problème. Nous voulons plus précisément répondre aux questions suivantes : Quels sont les groupes adimensionnels qui gouvernent notre problème ?

Quelle serait alors la combinaison idéale pour avoir les meilleures conditions de travail de la pompe péristaltique ? Quelles sont les gammes de valeurs de ces groupes adimensionnels qui nous permettent de minimiser la dégradation de l'énergie à travers la minimisation de l'entropie ? Comment se traduit la contraction sur les aspects thermo hydrauliques et thermodynamiques du système ?

Notre travail s'articule autour des principaux axes qui sont dans l'ordre :

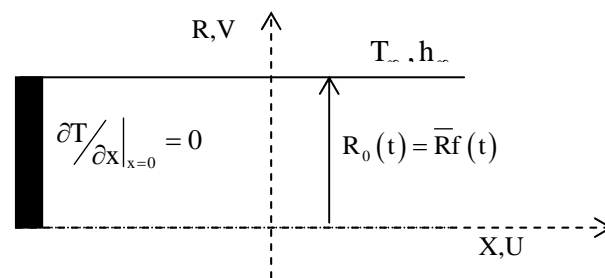
- ❖ Le premier chapitre est une introduction générale suivie d'une recherche bibliographique actualisée.
- ❖ Le second chapitre portera sur la modélisation du système physique, la formulation mathématique du problème ainsi que les conditions aux limites et initiales qui lui sont associées.
- ❖ La méthode numérique des différences finies, sa mise en oeuvre pour la discrétisation des équations sont exposées dans le troisième chapitre.
- ❖ Enfin le quatrième chapitre présentera les résultats auxquels nous avons aboutis et leurs interprétations ; suivra alors une conclusion générale dans laquelle nous reprendrons à certaines des questions posées précédemment et nous terminerons par quelques suggestions pour un travail à venir.



*Chap : I*  
*Formulation Mathématique*

Formulation mathématique :1-Position du problème :

Pour modéliser une pompe péristaltique, on considère l'écoulement dû à la contraction de la paroi d'un tube semi infini fermé en amont par une valve adiabatique et imperméable. (Voire Figure 1)

**Figure (1)**

La formulation mathématique du problème a été faite dans le cadre des hypothèses simplificatrices suivantes :

- ❖ L'écoulement est laminaire et à symétrie axiale.
- ❖ Le fluide est Newtonien et incompressible.
- ❖ Les propriétés du fluide sont constantes ( $c_p$ ,  $\mu$ ,  $k$ ).
- ❖ La diffusion axiale est négligeable.

Dans cette étude, la dissipation visqueuse est prise en considération. Avec ces hypothèses les équations fondamentales de l'écoulement sont les équations classiques de Navier-Stokes dans la région de développement.

2-Modélisation :

Dans le cadre des hypothèses précédentes, les équations régissant le phénomène physique étudié, découlent respectivement du principe de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

**2-1- Aspects dynamique et thermique :****a- Equations dimensionnelles :****❖ Conservation de masse :**

$$\frac{\partial (RU)}{\partial X} + \frac{\partial (RV)}{\partial R} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

**❖ Conservation du quantité de mouvement axiale:**

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + v \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right) \dots\dots\dots(2)$$

**❖ Conservation d'énergie:**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial R} = \frac{k}{\rho c} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial T}{\partial R} \right) \right) + \frac{\mu}{\rho c} \Phi \dots\dots\dots(3)$$

Avec  $\Phi$  donnant la dissipation visqueuse :  $\Phi = \left( \frac{\partial U}{\partial R} \right)^2$  est la fonction dissipation.

**Conditions initiales :**

$$\text{➤ } U = -2x \frac{1}{R_0} \frac{dR_0}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\text{➤ } V=0$$

$$\text{➤ } T=T_0$$

**Conditions aux limites :**

A la paroi

$$\text{➤ } U=0$$

$$\text{➤ } V = \frac{dR_0(t)}{dt}$$

$$\text{➤ } h_{\infty} (T_w - T_{\infty}) = -k \frac{\partial T}{\partial R} \Big|_{R_0(t)}$$

Sur l'axe ;

$$\text{➤ } \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial T}{\partial R} = 0$$

A l'entrée :

- $U=V=0$
- $P=P_0$
- $\frac{\partial T}{\partial X} = 0$

On rend ces équations et leurs conditions aux limites adimensionnelles, afin de comparer l'importance relative des différents termes de nos équations. Pour cela nous devons dégager d'abord les paramètres de références :

Variables indépendantes :

- Distance radiale :  $\bar{R}$  .
- Distance axiale :  $L$  ( c'est une longueur fictive).
- Temps :  $\alpha^{-1}$  .( $\alpha$  sera explicité plus tard).

Variables indépendantes :

- Vitesse radiale :  $V_0 = \alpha \bar{R}$  .
- Vitesse axiale :  $U_0 = V_0 \frac{L}{\bar{R}}$  .

Avec :

Pression au niveau de la valve :  $P_0$  .

Pression adimensionnelle :  $p = \frac{P - P_0}{\rho U_0^2}$  .

Température adimensionnelle :  $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$  .

$T_\infty$  : température ambiante ;  $T_0$  : température initiale.

Pour l'étude numérique, il nous faut rendre le domaine stationnaire. A cette fin,

on introduit la variable similaire  $\eta = \frac{R}{R_0(t)} = \frac{r}{f(\tau)}$  avec  $r = \frac{R}{\bar{R}}$  .  $\eta$  varie entre 0 et 1

∇ t L'introduction de cette variable similaire nous permet aussi de transformer notre problème en un problème classique de poiseuille auquel s'ajoutent une source  $S_0$  dans l'équation de continuité et une force  $F_0$  dans l'équation de quantité de mouvement. Ces deux termes rendent compte de la dynamique de la paroi.

Les dérivés deviennent :  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$  ,  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta}$  ,  $\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \eta}$  ,  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \rightarrow \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$

Les équation se réduisent à :

**b- Equations adimensionnelles:**

❖ **Equation dynamique :**

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta w)}{\partial \eta} = S_0 \dots\dots\dots (a) \\
 & \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + F_0 \dots\dots\dots (b) \\
 & R_e = \frac{V_0 \bar{R}}{\nu} = \frac{\alpha \bar{R}^2}{\nu} \dots\dots\dots (c) \\
 & w = v - \frac{\partial f}{\partial \tau} \dots\dots\dots (d) \\
 & S_0 = \eta(1-f) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \dots\dots\dots (e) \\
 & F_0 = \frac{1-f^2}{f^2} \frac{1}{R_e} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{f-1}{f} w \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\eta-1) \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \eta} \dots\dots\dots (f)
 \end{aligned} \right\} (4)$$

**Condition initiale :**

➤  $u(x, \eta, 0) = -2x \frac{1}{f} \frac{df}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$

**Conditions aux limites dynamiques :**

A la paroi :

- $u(x, 1, \tau) = 0$
- $w(x, 1, \tau) = 0$

Sur l'axe :

➤  $\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$

A l'entrée :

- $u(0, \eta, \tau) = 0$
- $p(0, \tau) = 0$

On a deux équations de conservation (continuité, équation du mouvement) avec trois inconnues (u, w, p). Pour fermer notre problème, on introduit l'équation de

continuité intégrale :  $\int_0^1 u(x, \mu, \tau) \eta d\eta = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} x \dots (5)$  de cette formule on tire

l'expression de la vitesse moyenne  $\bar{U}$  sur une section :  $\int_0^{R_0} U 2\pi R dR = -2\pi R_0 \frac{dR_0}{dt} X$

$$\Rightarrow \pi R_0^2 \langle U \rangle = -2\pi R_0 \frac{dR_0}{dt} X \Rightarrow \langle U \rangle = -2 \frac{1}{R_0} \frac{dR_0}{dt} X .$$

Sous forme adimensionnelle, elle est traduite par :  $u(x, \eta, \tau) = -2x \frac{1}{f} \frac{df}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$

Revenons à nos conditions sur la vitesse axiale ; la vitesse initiale c'est la limite

de la vitesse moyenne  $\bar{U}$  quand  $t \rightarrow 0$  ,  $u(x, \eta, 0) = -2x \frac{1}{f} \frac{df}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$  .

❖ **Equation thermique :**

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{1}{R_e} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{Ek}{R_e f^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + q \dots \dots \dots (a) \\ Pr &= \frac{\mu c}{k}, \quad Ek = \frac{u_0^2}{c(T_0 - T_\infty)} \\ q &= \frac{1-f^2}{f^2} \frac{1}{R_e} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1-f}{f} w \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (\eta-1) \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \dots \dots \dots (b) \end{aligned} \right\} (6)$$

**Condition initiale :**

➤  $\theta(x, \eta, 0) = 1$

**Conditions aux limites :**

➤  $\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 .$

➤  $\frac{1}{f} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + Bi \theta_w = 0 .$

**c- Le nombre de Nusselt:**

Il est donné par :

$$Nu(x, \tau) = \frac{1}{\theta_w - \langle \theta \rangle} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \right) = \frac{1}{f} (Nu)_{\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}} (Nu)_{\theta_w} \dots \dots \dots (7)$$

$\langle \theta \rangle$  est la température moyenne adimensionnelle (the mixing cup temperature),

elle est définie par :  $\langle \theta \rangle (x, \tau) = \frac{\int_0^1 u(x, \eta, \tau) \theta(x, \eta, \tau) \eta d\eta}{\int_0^1 u \eta d\eta} \dots\dots\dots(8)$

$(Nu)_{\frac{\partial \theta}{\partial \eta}|_{\eta=1}}$  est le nombre de Nusselt pour un problème à flux fixé à la

paroi .  $(Nu)_{\theta_w}$  Est le nombre de Nusselt pour un problème à paroi isotherme.

La température de paroi est connue.

## 2-2- Aspect thermodynamique :

### 2-2-a- Généralités :

Lorsque on aborde l'étude thermodynamique, on est frappé par le contraste entre ses modestes origines et l'importance qu'elle a acquise de nos jours. Partie de l'équivalence chaleur-travail, elle touche aujourd'hui à un large éventail de disciplines jusqu'à entrer dans le secret même de la vie cellulaire. Le souci de pouvoir convertir la chaleur disponible en travail utile est à l'origine de cette science (thermo=chaleur, dynamique=mouvement). Joule a démontré que ces deux formes d'énergie, travail et énergie étaient interchangeables au cours d'un cycle.  $\Delta W + \Delta Q = 0$ . C'est un simple bilan d'énergie. C'est le premier principe de la thermodynamique, il n'impose aucune restriction quant à la direction de l'écoulement de la chaleur. Cependant l'expérience de tous les jours nous enseigne que cette énergie ne peut évoluer que dans la direction des gradients de température négatifs et jamais dans le sens inverse. Ce principe ne peut pas prévoir si une transformation est réalisable ou pas d'où la nécessité d'un deuxième principe dont l'objectif serait de caractériser le sens de l'évolution d'une transformation. Un principe qui interdit justement à la chaleur d'évoluer dans la direction des gradients de température positifs. Les scientifiques comme Carnot, Clausius, Gibbs et beaucoup d'autres, se sont penchés sur cette question et ont donné chacun, un énoncé particulier à ce que nous connaissons aujourd'hui comme : le second principe de la thermodynamique.

**Clausius (1850)**, le premier donna au second principe un aspect plus pratique. Selon lui : « au cours d'un cycle, il est impossible à un système de transformer toute la chaleur qu'il reçoit d'une source chaude en travail mécanique, une partie est nécessairement cédée à une source froide ».

**Carnot** à son tour utilisa cet énoncé du second principe pour imaginer un cycle opérant entre 2 sources, une source chaude à la température  $T_c$  et une source froide à  $T_f$  au cours duquel toutes les transformations sont réversibles. Le rendement d'un tel cycle réversible est :  $\eta = 1 + \frac{T_f}{T_c}$

Ce résultat pourrait nous sembler manquer de rigueur physique, vu que les transformations étant réversibles, leur rendement devrait être égal à 1. Un énoncé de Carnot plus rigoureux du second principe serait le suivant : « *Au cours d'un cycle parfait de Carnot un système transforme une certaine quantité de chaleur prise à la source chaude en travail, le reste est dégradé par et uniquement par les transformations irréversibles qu'il subit ».*

Cette chaleur perdue à cause des irréversibilités est quantifiée par une fonction d'état qui est l'entropie  $S$  c'est-à-dire que l'entropie générée par les transformations irréversibles nous donne une mesure de l'énergie « *dégradée* ».

$$Q = Q \frac{T_c - T_f}{T_c} + Q \frac{T_f}{T_c} = Q \left( 1 - \frac{T_f}{T_c} \right) + Q \frac{T_f}{T_c} = \eta Q + Q \frac{T_f}{T_c}$$

$Q \frac{T_f}{T_c}$  : la quantité de chaleur dégradée. Quant à  $\eta Q$ , il représente le travail utilisable.

Conformément au second principe de la thermodynamique, une transformation idéale est celle qui délivre un maximum de travail. Ce travail maximum ne peut être obtenu que si l'on impose au système une série de contraintes quant à son comportement. Par exemple, on impose au système d'être en contact qu'avec un environnement à température fixe  $T_0$ , le travail maximum que l'on peut obtenir est donné par la variation de l'énergie libre de Helmholtz  $F$  :  $\Delta W = -\Delta F$  et  $F = U - T_0 S$ , avec  $U$  : énergie interne du système. Si le système est en contact avec son environnement à la température  $T_0$  et la pression  $P_0$ , alors c'est la variation de l'énergie libre de Gibbs qui mesure le travail maximum  $\Delta W = -\Delta G$  et  $G = U + P_0 V - T_0 S$ .

Si de plus la transformation entre l'état initial et l'état final est adiabatique, le travail maximum est obtenu par la variation de l'enthalpie  $\Delta W = -\Delta H$  et  $H = U + P_0 V$ . Dans ce dernier cas, il a souvent été signalé que l'état final de la transformation idéale est différent de celui de la transformation réelle.

Aucune de ces transformations idéales n'a de portée générale. Chacune se réfère à une situation propre et n'a donc qu'une portée limitée.

Une première tentative de généralisation fut entreprise par Gibbs (1931). Il introduit la fonction  $\Phi = U + P_0V - T_0S$ ,  $T_0$  et  $P_0$  étant la température et la pression de l'environnement avec lequel le système est en contact. Il montra que le travail maximum que l'on peut obtenir d'un système en contact avec l'atmosphère quand il passe d'un état à un autre état est donné par :

$$W_{\max} = -\Delta = -(\Phi - \Phi_{\min}) \dots\dots\dots(9)$$

Avec  $\Phi_{\min}$  =valeur minimum de  $\Phi$  pour tous les états possibles.

A son tour Keenan(1951)introduisait la notion d'irréversibilité. L'irréversibilité est le travail maximum que l'on peut obtenir d'un système au cours d'une transformation entre deux états duquel nous avons extrait le travail maximum exploitable (utile) :

$$I = W_{\max} - W_{\text{utile}} \dots\dots\dots(10)$$

Il montre qu'elle est égale à l'augmentation d'entropie  $\Delta S$  de tout système impliqué dans la transformation, que multiplie la température de l'atmosphère :

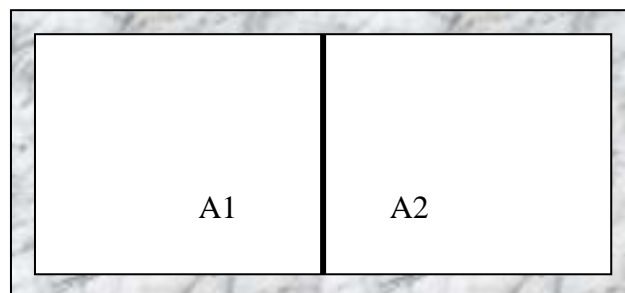
$$I = T_0 \cdot \Delta S \dots\dots\dots(11)$$

Ainsi l'entropie est cette propriété dont la variation est une mesure de l'irréversibilité d'une transformation ou de la quantité d'énergie qui n'est plus disponible : Energie dégradée.

**2-2-b-Thermodynamique irréversible :**

On considère un système isolé A constitué de deux sous systèmes A1 et A2.

(Voire figure 2



**Fig(2) :** système isolé

On considère une variable extensive X, dont la valeur dans A<sub>1</sub> est x<sub>1</sub>, et dans A<sub>2</sub> est x<sub>2</sub> : x<sub>1</sub> + x<sub>2</sub> = X = constan t.

Si  $x_1$  et  $x_2$  ne sont soumises à aucune contrainte, elles évoluent jusqu'à ce que la

quantité  $f_x = \left( \frac{\partial S}{\partial x_1} \right)_X = \left( \frac{\partial (S_1 + S_2)}{\partial x_1} \right)_X$  s'annule. Le système est alors en

équilibre. Si cette quantité  $f_x = \left( \frac{\partial (S_1 + S_2)}{\partial x_1} \right)_X = \left( \frac{\partial S_1}{\partial x_1} - \frac{\partial S_2}{\partial x_2} \right)_X = F_1 - F_2$  n'est pas

nulle, une transformation irréversible à lieu qui conduit le système vers l'équilibre. Ainsi, la quantité  $f_x = F_1 - F_2$  agit comme une force généralisée qui

entraîne le système vers son état d'équilibre. Ces deux forces sont appelées affinité. A titre d'exemple : considérons X comme l'énergie interne U, alors

$f_x = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$  si  $dv=0$ , T étant la température. Si  $f_x = 0$ ,  $T_1 = T_2$  il n'y a pas de

flux de chaleur entre les deux sous systèmes. Nous avons un état d'équilibre.. Si

X représente le volume, alors  $\left( \frac{\partial S}{\partial x_1} \right) = -\frac{P}{T}$  et l'affinité s'écrit  $\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}$ .

La réponse du système à cette force (affinité) représente le taux d'évolution de la

variable extensive X. Le flux de X est défini par  $J_x = \frac{dX}{dt}$ . Il y a nécessairement

une relation entre les flux et les affinités. Si les seconds s'annulent, les premiers aussi.

Considérons un système dont l'entropie ne dépend que des grandeurs extensives  $S = S(X_1, X_2, X_3, \dots)$ .

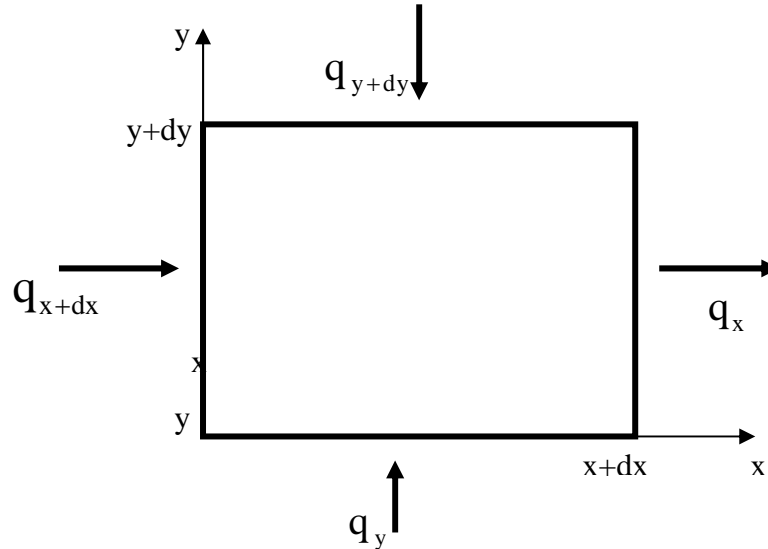
$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_k J_k f_k$ , ainsi le taux de production d'entropie est

donné par la somme des produits de chaque flux par l'affinité qui lui est associée. Pour les milieux continus, la différence est remplacée par un gradient.

L'équation précédente se réduit à  $\dot{S} = \sum_k \vec{\nabla} F_k \vec{J}_k$ .

**2-2-c-Taux de génération d'entropie**

On considère un élément de volume, sur lequel on applique la conservation d'entropie.



**Fig(3) : volume de contrôle**

A partir de ce volume de contrôle, le taux de génération d'entropie par unité de volume peut être estimé en écrivant la second loi de la thermodynamique pour un système ouvert (Bejan 1996) telle que :

$$S dx dy = \left( \frac{q}{T} \Big|_{x+dx} - \frac{q}{T} \Big|_x \right) dy + \left( \frac{q}{T} \Big|_{y+dy} - \frac{q}{T} \Big|_y \right) dx + \left( s + \frac{\partial s}{\partial x} dx \right) \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) dy$$

$$+ \left( s + \frac{\partial s}{\partial y} dy \right) \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy \right) dx - s v_x \rho dy - s v_y \rho dx + \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} dx dy$$

Le premier terme est l'entropie associée au transfert de chaleur, le second représente l'entropie qui traverse le système, le dernier représente le taux d'entropie accumulé dans le volume de contrôle dx dy. En divisant tous les termes par dx dy, le taux de génération d'entropie devient :

$$S = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) - \frac{1}{T^2} \left( q_x \frac{\partial T}{\partial x} - q_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} \right) dy$$

.....(12)

$$+ s \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right)$$

En se basant sur la conservation de masse :  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0$ , où  $D/Dt$  est la

dérivée matérielle donnée par :  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}$ .

Le taux d'entropie devient :

$$S = \frac{1}{T} \nabla \cdot q - \frac{1}{T^2} q \cdot \nabla T + \rho \frac{Ds}{Dt} \dots\dots\dots (13)$$

La 1ere loi de la thermodynamique pour un milieu convectif s'écrit sous la forme (Bejan 1996) :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = - \nabla \cdot q - p (\nabla \cdot v) + \mu \phi \dots\dots\dots (14)$$

Dans cette expression, le taux d'échange de l'énergie interne par unité de volume est égal au transfert de chaleur par conduction, auquel s'ajoute le transfert dû au travail de compression, et le travail associé à la dissipation visqueuse.

Avec :  $du = T ds - P d(1/\rho) \Rightarrow \rho ds = \frac{\rho}{T} du - \frac{P}{T\rho} d\rho$

En passant par la dérivée matérielle et en remplaçant dans l'équation (10) on

trouve :  $S = - \frac{1}{T^2} q \cdot \nabla T + \frac{\mu}{T} \phi$

Avec la loi de fourrier :  $q = -k\nabla T$ , l'expression de S devient :

$$S = - \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{\mu}{T} \phi \dots\dots\dots (15)$$

$\Phi$  étant la dissipation visqueuse.

Pour notre problème, le taux de génération d'entropie devient :

$$S = k \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial R} \right)^2 + \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial R} \right)^2 \dots\dots\dots (16)$$

Il est composé de deux termes :

Le premier terme mesure la dégradation de l'énergie thermique quand la chaleur diffuse des régions à hautes températures vers les régions à basses températures. C'est la production d'entropie thermique. Le second terme donne l'énergie mécanique « détruite », quand l'énergie cinétique est transformée en chaleur par dissipation visqueuse. C'est la production d'entropie dynamique.

Sous forme adimensionnelle, le taux de génération d'entropie est donné par :

$$S = \frac{S}{S_k + S_\mu} = \frac{1}{1 + \text{Ek.Pr}} \left( \frac{1}{f} \frac{1}{(\theta + \omega)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\text{Ek.Pr}}{1 + \text{Ek.Pr}} \left( \frac{1}{(\theta + \omega)} \right) \left( \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \dots\dots\dots(17)$$

Avec  $\omega$  la température externe adimensionnelle :  $\omega = \frac{T_\infty}{T_0 - T_\infty}$  .

$S_k = \frac{k}{R^2}$  et  $S_\mu = \frac{\mu U_0^2}{R^2 \Delta T}$  sont les entropies dimensionnelles de diffusion et de dissipation.

**2-2-c-Le nombre de Bejan :**

Dans ses travaux, Bejan a introduit un rapport entre la génération d'entropie de conduction et l'entropie totale, afin de mesurer l'importance relative entre les deux termes du taux de production d'entropie. C'est le nombre de Bejan noté Bj :

$$Bj(x, \eta, \tau) = \frac{k \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial R} \right)^2}{k \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial R} \right)^2 + \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial R} \right)^2} \dots\dots\dots(18)$$

Sous forme adimensionnelle, le nombre de Bejan s'écrit sous la forme :

$$Bj = \frac{\frac{1}{1 + \text{Ek.Pr}} \left( \frac{1}{f} \frac{1}{(\theta + \omega)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2}{\frac{1}{1 + \text{Ek.Pr}} \left( \frac{1}{f} \frac{1}{(\theta + \omega)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\text{Ek.Pr}}{1 + \text{Ek.Pr}} \left( \frac{1}{(\theta + \omega)} \right) \left( \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2} \dots\dots\dots(19)$$

D'où :

$$Bj = \left( \frac{\left( \frac{1}{f} \frac{1}{(\theta + \omega)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2}{\left( \frac{1}{f} \frac{1}{(\theta + \omega)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 + \text{Ek.Pr} \left( \frac{1}{(\theta + \omega)} \right) \left( \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2} \right) \dots\dots\dots(20)$$

On remarque bien que le nombre de Bejan ne dépend que du produit (Ek.Pr).

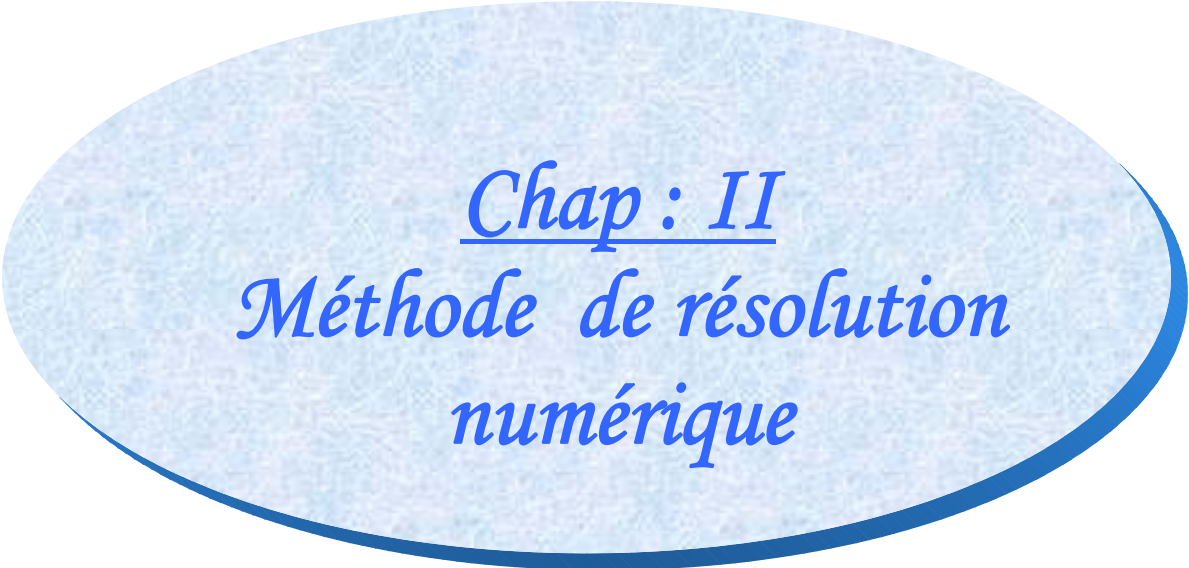
- Si  $Ek.Pr \rightarrow 0 \Rightarrow Bj \rightarrow 1$ , le taux de génération d'entropie est dû uniquement à la diffusion thermique de chaleur
- Si  $Ek.Pr \rightarrow \infty \Rightarrow Bj \rightarrow 0$ , le taux de génération d'entropie est dû essentiellement à la dissipation visqueuse.

### 3- Conclusion :

Ce chapitre a été consacré à la description du système physique, à la modélisation et la mise en équations du problème avec les conditions aux limites et initiales associées. Notre étude est essentiellement gouvernée par quatre nombres adimensionnels qui sont :

Le nombre de Biot (**Bi**) ;  $Bi = \frac{h_{\infty} \bar{R}}{k}$  qui décrit les échanges thermiques entre le fluide et le milieu extérieur. Le nombre d'Eckert (**Ek**) ;  $Ek = \frac{U_0^2}{c(T_0 - T_{\infty})}$  qui renseigne sur la dissipation visqueuse à l'intérieur du fluide. Le nombre de Prandtl (**Pr**) ;  $Pr = \frac{\mu c}{k}$  qui caractérise le fluide lui-même et enfin le nombre de Reynolds (**Re**) ;  $Re = \frac{\bar{R}^{-2}}{\alpha^{-1} \nu}$  qui nous informe sur la dynamique du problème.

Nous allons dans la suite de notre travail, analyser l'influence de chacun de ces groupes sur les propriétés thermiques du système (profil de température, nombre de Nusselt) et sur la dégradation de l'énergie. On s'intéressera en particulier à déterminer la combinaison optimum entre ces groupes adimensionnels qui entraîneraient un taux de production minimum.



*Chap : II*  
*Méthode de résolution  
numérique*

## *Méthode de résolution numérique*

### 1- Introduction :

L'analyse d'un phénomène physique a pour but de déterminer les valeurs des différentes variables qui le caractérisent. Cette analyse peut être effectuée par trois méthodes qui sont :

- La méthode expérimentale.
- La méthode analytique.
- La méthode numérique.

Les équations établies dans le chapitre précédent, sont des équations aux dérivées partielles, non linéaires, elliptiques dans la direction radiale et couplées. Elles ne peuvent être résolues analytiquement. Nous faisons donc appel à une résolution numérique.

Il y a deux grandes familles de méthodes numériques :

- Les méthodes d'approximation des équations. Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées car les opérateurs différentiels sont discrétisés sur un maillage (la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis).
- Les méthodes d'approximation des solutions. Selon ces méthodes on cherche une solution approchée à partir des équations exactes. Les solutions sont écrites comme des séries de fonctions tronquées aux ordres de précisions désirées (les méthodes spectrales et la méthode des éléments finis).

### 2- Méthode de résolution :

La méthode choisie dans notre travail est celle des différences finies qui est souvent appliquée pour la recherche des solutions des équations partiellement paraboliques. Elle permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques.

Ce dernier est obtenu à partir de la discrétisation des équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en approchant chaque dérivée partielle par une série de Taylor pour obtenir des équations algébrique reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins. La méthode de résolution choisi dans notre étude fait suite à celle utilisée dans le travail de BENYAHIA. N., SOUIDI. F (2005). Cette méthode présente des avantages et des inconvénients :

### **Avantages de la méthode**

- simplicité de mise en oeuvre ;
- encombrement mémoire raisonnable (matrice de type bande) et temps de calcul raisonnable.

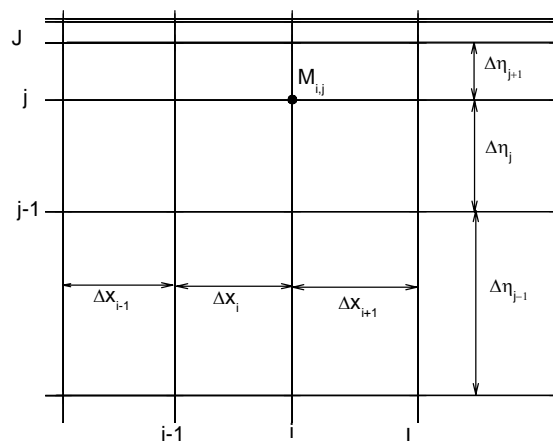
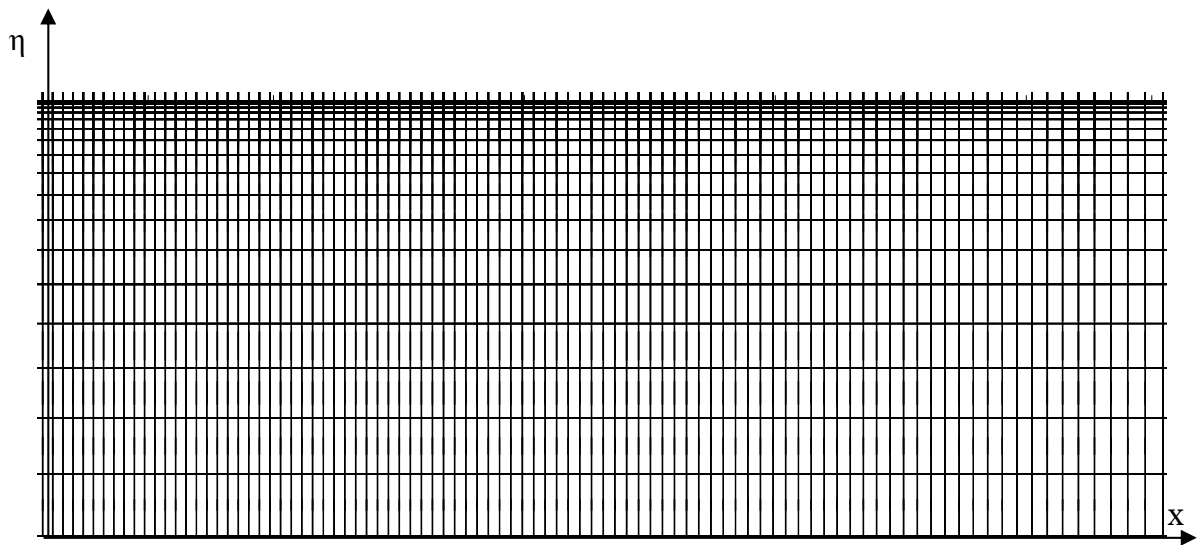
La méthode est totalement implicite, c'est-à-dire que toutes les variables pour un temps fixe et pour un plan  $x$ , sont liées entre elles et ne peuvent être obtenues que par la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires.

On remplace le domaine des variables indépendantes  $(x, \eta, \tau)$  par un ensemble de valeurs discrétisées en des points appelés : 'nœuds'. Ces dernières forment un maillage qui convenablement choisi lui assure la convergence de la méthode.

### **3- Maillage :**

La première étape, consiste à choisir un maillage approprié pour notre système physique. Ce sera dans notre cas un maillage rectangulaire non uniforme de cotés  $(\Delta x, \Delta \eta)$ , serré à la paroi ; cela afin de mieux rendre compte des forts gradients dans cette région (le mouvement du fluide est engendré par le mouvement de la paroi). Viendra ensuite la discrétisation des équations différentielles.

Pour cela, on utilisera la méthode des différences finies basées sur le développement en séries de Taylor. Le système d'équations algébriques obtenu sera résolu itérativement pour tenir compte du caractère non linéaire des termes de convection.



**fig 1 : Le maillage**

Tout point  $M_{i,j}$  du domaine discrétisé est repéré par ses coordonnées :

$$x = i \cdot dx; \quad \eta = \left( 1 - \left( \frac{j - (j-1)}{j} \right)^\varepsilon \right) d\eta \quad 1 \leq i \leq I+1, \quad 1 \leq j \leq J+1$$

avec :  $j = 1, \dots, J$

$i = 1, \dots, I$

Où :  $\varepsilon$  est le coefficient du maillage,  $j$  et  $i$  sont les indices correspondant à  $\eta$  et  $x$  respectivement.

J est le nombre total de points dans la direction radiale et I, le nombre total de points dans la direction axiale.

Les opérateurs de dérivation sont approchés par des opérateurs de différences finies. Une différence centrée est utilisée pour l'approximation des dérivées, tenant compte du pas variable dans la direction radiale ( $\Delta\eta_{i-1} \neq \Delta\eta_i \neq \Delta\eta_{i+1}$ ). Au voisinage des frontières ( $\eta=0$  et  $\eta=1$ ), et afin de respecter l'ordre de précision, une différence décentrée amont et aval à trois ou à quatre points est utilisée (annexe 1).

Pour la dérivée par rapport à la variable x, une discrétisation régressive d'ordre un est employée vu la nature parabolique des équations. La linéarisation est faite dans le temps.

La discrétisation des équations mène à un système d'équations algébriques linéaires résolu à l'aide de la méthode de Gauss avec pivotation partielle. Pour ce cas le schéma utilisé est le suivant :

- ❖ Estimer la valeur de la vitesse radiale  $w(x, \eta, \tau)$ .
- ❖ A partir de l'équations (2), on calcule la vitesse longitudinale  $u(x, \eta, \tau)$
- ❖ Une nouvelle valeur de  $w(x, \eta, \tau)$  sera tirée de l'équation (1) et comparée à celle estimée au début.
- ❖ Un test entre la valeur calculée de  $w(x, \tau)$  entre deux itération est effectué

$$\left| \frac{w^{n+1} - w^n}{w^n} \right| \leq \xi. \text{ La procédure itérative continue jusqu'à la convergence.}$$

#### **4- Compatibilité, stabilité et convergence :**

L'analyse de la convergence de ce problème est difficile, cela est dû au fait que l'expression finale de l'erreur de discrétisation est donnée en termes de paramètres pour lesquels, aucune limite supérieure ne peut être estimée. Cependant, nous pouvons l'analyser en terme de stabilité et de compatibilité (théorème de laxe).

Concernant la stabilité, on note que le schéma étant complètement implicite, il est inconditionnellement stable si aucun renversement de courant n'est observé dans le système (tube expansif, dilatable exclu). En effet, durant les calculs, on n'a remarqué aucune instabilité due à l'erreur d'arrondie.

Le nombre d'itérations pour avoir un résultat numérique augmentait avec le temps mais dans des limites raisonnables. Pour la compatibilité (consistency), on se contentera d'un test de validation du schéma et d'un test de conservation de débit.

Concernant la procédure de calcul : les équations (4-a) et (5) sont deux formes différentes de la même équation de continuité et ne peuvent pas être résolues simultanément. Pour un  $\tau$  et un  $x$  fixés, on donne une valeur à la composante radiale de la vitesse  $w$ , puis on utilise l'équation (4-b) et (5) pour calculer la composante axiale de la vitesse et la pression. L'équation (4-a) donne la nouvelle valeur de la vitesse radiale  $w$  qu'on compare à la précédente. On répète ce processus jusqu'à la convergence.



*Chap : III*  
*Résultats et analyse*

Résultats et analyse**1- Introduction :**

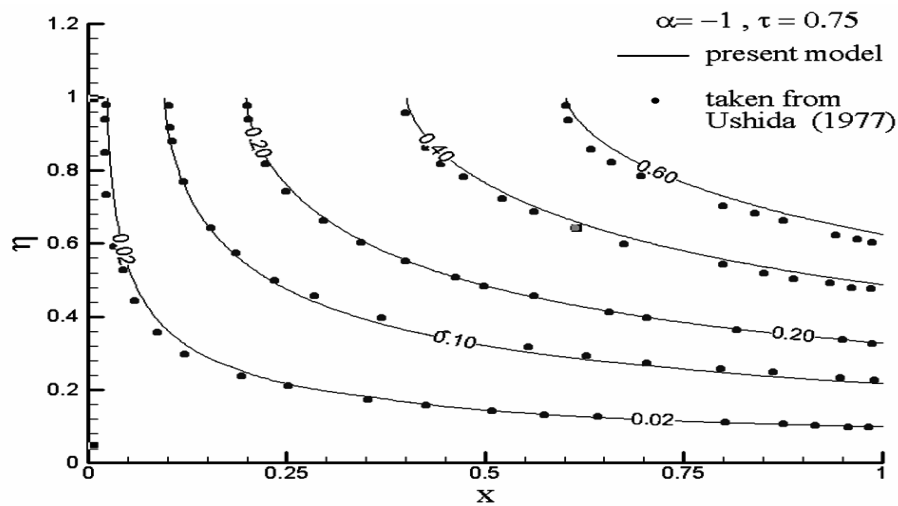
Dans ce chapitre, nous exposons les différents résultats obtenus ainsi que les commentaires qui s'y rapportent.

On commencera par valider le code, nous ferons ensuite une analyse qui portera sur les effets de la contraction de la paroi et sur les propriétés thermo hydrauliques du système, on s'intéressera en particulier aux différentes forces impliquées, telles que la force de pression et la force induite  $F_0$  ; à la source  $S_0$  ; aux profils de vitesse et de température ; au nombre de Nusselt  $Nu$  ; au taux de génération d'entropie  $S$ , et enfin au nombre de Bejan.

**2- Validation du schéma numérique :**

Par souci de validation, nous utiliserons notre modèle pour l'étude dynamique du problème. Les lignes de courant obtenues sont comparées à celles données analytiquement par S.Uchida et H. Aoki (1977). Les auteurs ont montré que le problème du tube contractile admettait une solution similaire dans le temps et dans l'espace, si le rayon devait varier dans le temps selon la fonction  $R_0(t) = \bar{R}\sqrt{1+\alpha t} \Rightarrow f = \frac{R_0(t)}{\bar{R}} = \sqrt{1-\tau}$ . Le paramètre  $\alpha$  est une mesure de la

vitesse de contraction.  $\bar{R}$  est le rayon initial. Les lignes de courant données par le présent modèle et celles obtenues par les auteurs (1977) sont portées dans la Figure (III-1). Nous remarquons qu'il existe une grande concordance entre les deux modèles.



**Fig (III-1) :** Les lignes de courants pour un tube contractile

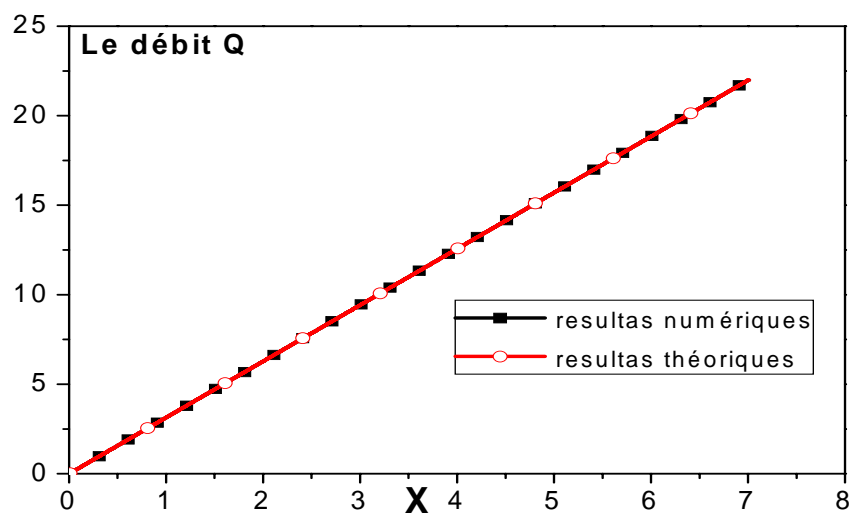
❖ **Conservation du débit :**

La Figure (III-2) compare le débit calculé par le modèle numérique à l'aide de l'intégral de Simpson adaptée à un maillage non uniforme (annexe2)

$$Q_n(x) = 2\pi f^2 \int_0^1 u(x, \eta, \tau) \eta d\eta \quad \text{et celui donné par le modèle analytique}$$

$$Q_a(x) = 2\pi f \left| \frac{df}{dt} \right|_x = \pi |\alpha| x \quad \text{(1977)}.$$

Les résultats numériques convergent parfaitement vers la solution théorique.

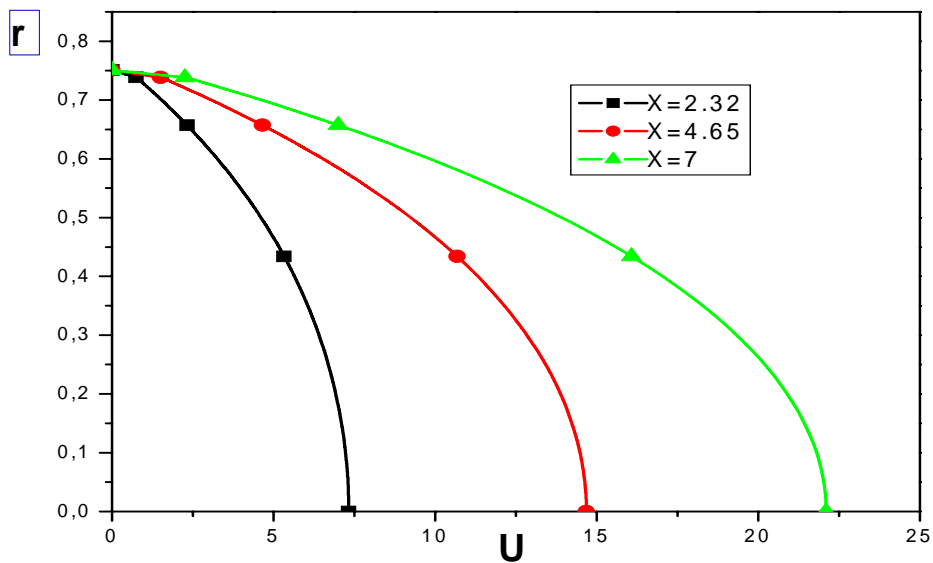


**Fig (III-2) :** La conservation du débit

❖ Profils de vitesse :

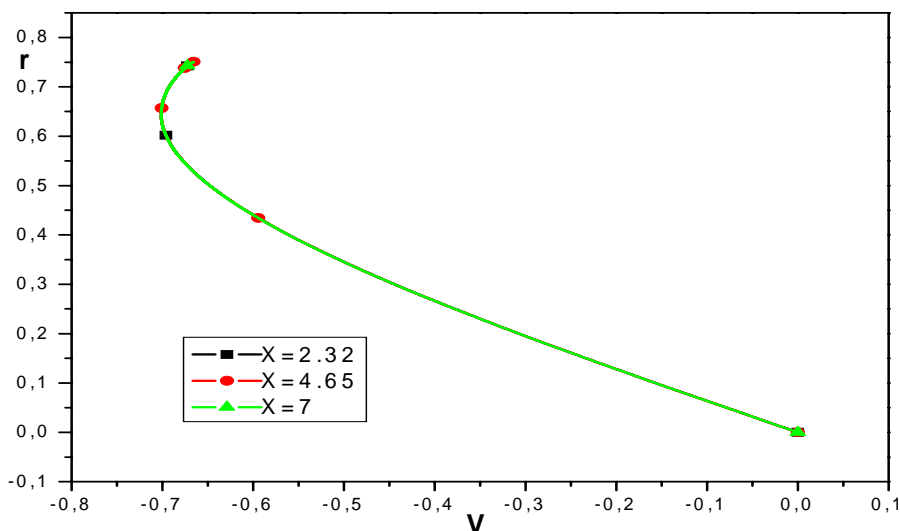
La Figure (III-3) montre que la vitesse axiale croît linéairement avec  $x$ . Cela est dû à la variation du débit qui augmente linéairement dans la direction axiale. En effet le débit est alimenté par le fluide chassé par la contraction. Ce fluide occupait un volume dont la section est  $2\pi r \frac{dr}{dt}$  et dont la longueur est  $x$ . Soit

sous forme adimensionnelle, le débit est  $Q(x, \tau) = 2\pi f(\tau) \left| \frac{df}{d\tau} \right| x$ .



**fig (III-3) :** Profil de vitesse axiale

La vitesse radiale est représentée dans la Figure (III-4) pour trois positions le long de l'axe. Elle est complètement indépendante de la coordonnée axiale  $x$ .



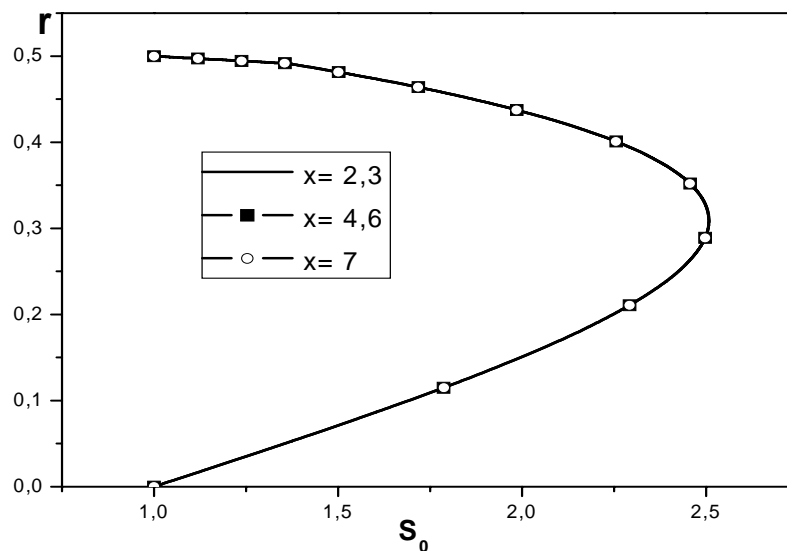
**fig (III-4) :** Profil de vitesse radiale

Ces résultats confirment ceux obtenus par les auteurs précédents (1977).

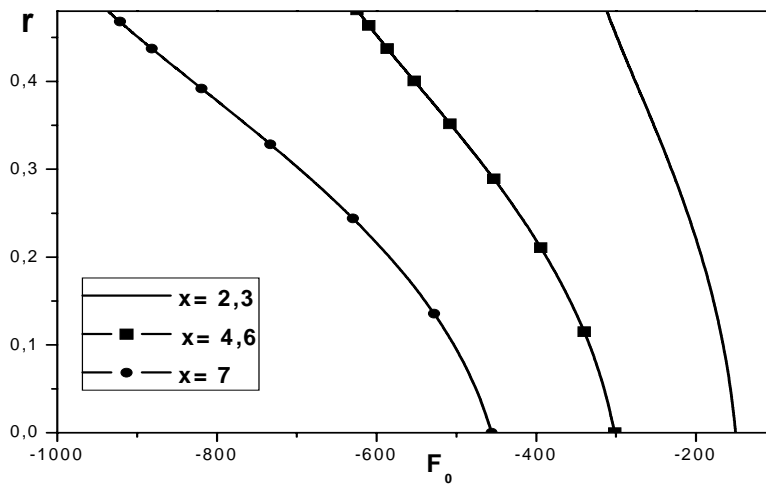
Cette bonne concordance entre les résultats du travail présent et ceux obtenus par (1977), nous conforte dans notre modèle mathématique et dans l'analyse numérique qui lui est associée.

### 3-Résultats Préliminaires :

Sur la Figure (III-5) et la Figure (III-6), nous représentons respectivement. Les profils de la source  $S_0$  et de la force  $F_0$  induites par le mouvement de la paroi à trois positions axiales différentes. Concernant  $S_0$ , on note qu'elle est indépendante de la position  $x$ .

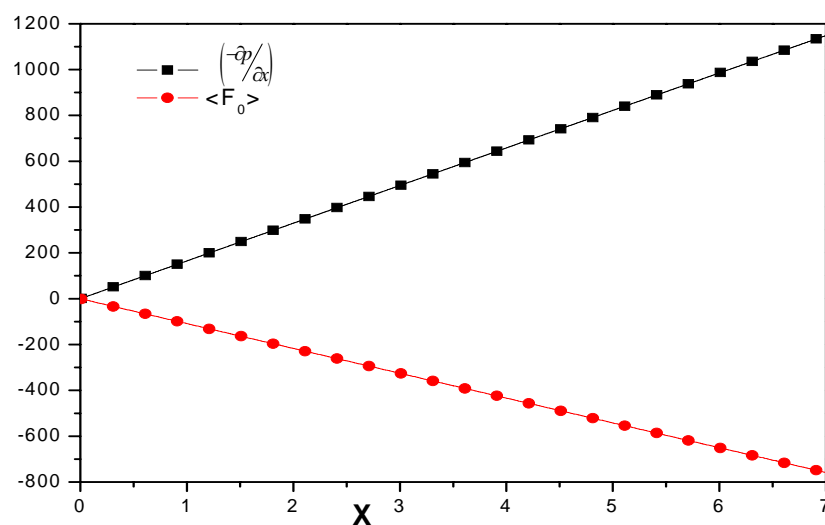


**fig (III-5) :** Le profil de la source  $S_0$



**fig (III-6) :** Le profil de la force  $F_0$

Ce résultat est en parfait accord avec l'augmentation linéaire du débit. Pour la force induite  $F_0$ , on remarque d'après le graphe que c'est une force décélétratrice dont les effets sont plus importants au voisinage de la paroi. La seule force motrice de cet écoulement c'est la force de pression  $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)$  qui est représentée dans la Figure (III-7) avec l'évolution le long de l'axe de la force induite  $F_0$  moyennée sur la section.



**fig (III-7) :** la force de pression et la force induite moyennée

Cette figure représente l'évolution de la force induite  $F_0$  moyennée sur une section ainsi que celle de la force de pression  $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ . On remarque que cette dernière est une fonction croissante et linéaire de  $x$ . Elle montre que la seule force motrice, est la force de pression.

Ce résultat pourrait paraître dans un premier temps surprenant en ce sens que l'écoulement est dû essentiellement à la contraction du tube ; la force qui en découle devrait être une force motrice, c'est-à-dire positive. Une analyse plus

attentive de l'expression de  $F_0$  : 
$$F_0 = \frac{1-f^2}{f^2} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{f-1}{f} w \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\eta-1) \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

montre que cette dernière est constituée d'un terme de viscosité  $\left(\frac{1-f^2}{f^2} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)\right)$  et

d'un terme d'inertie  $\left(\frac{f-1}{f} w \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\eta-1) \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$  et ces deux termes s'opposent

nécessairement au mouvement et constituent des forces retardatrices. Le premier est fonction du gradient de vitesse et le second de la vitesse elle-même, ces deux quantités comme nous l'avons déjà fait observer, augmentent au cours de la contraction.

Concernant la source  $S_0$ , l'expression  $\left(S_0 = \eta(1-f) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\right)$  montre qu'elle dépend du gradient  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , avec  $u$  une fonction linéaire de  $x$ ,  $S_0$  est donc indépendante de  $x$ .

#### 4- Résultats et commentaires :

Les profils sont tracés à la côte  $x=L_t/3$ ,  $L_t$  étant la longueur totale considérée pour la résolution numérique ; pour  $\text{Re}=1$  et  $\omega=0.5$ . On s'est intéressé aux effets de chacun des groupes adimensionnels qui gouvernent notre problème sur les propriétés thermiques et thermodynamiques, du système, à savoir :  $\text{Pr}$  ;  $\text{Bi}$  ;  $\text{Ek}$  ;  $\text{Re}$ . On introduit la notion de valeurs moyennées sur une section pour le taux de

génération d'entropie :  $\langle s \rangle = \int_0^1 s(x, \eta, \tau) \eta d\eta$ , et pour le nombre de Bejan :

$$\langle B_j \rangle = \int_0^1 B_j(x, \eta, \tau) \eta d\eta .$$

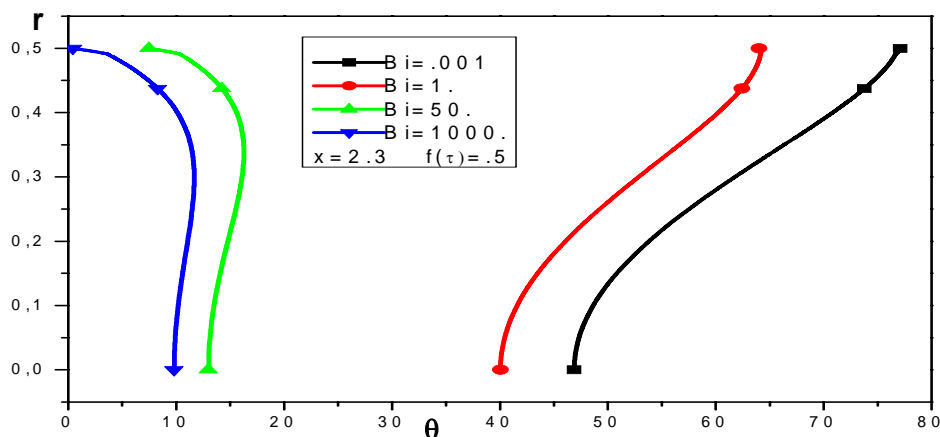
#### 4-a – Les effets du nombre de Biot :

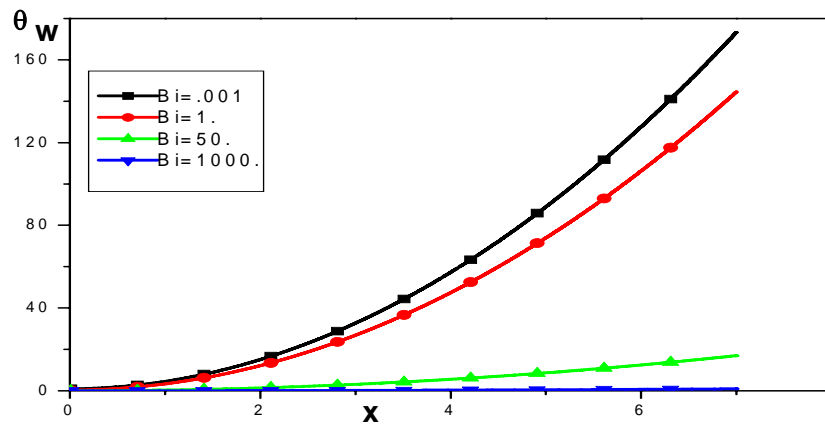
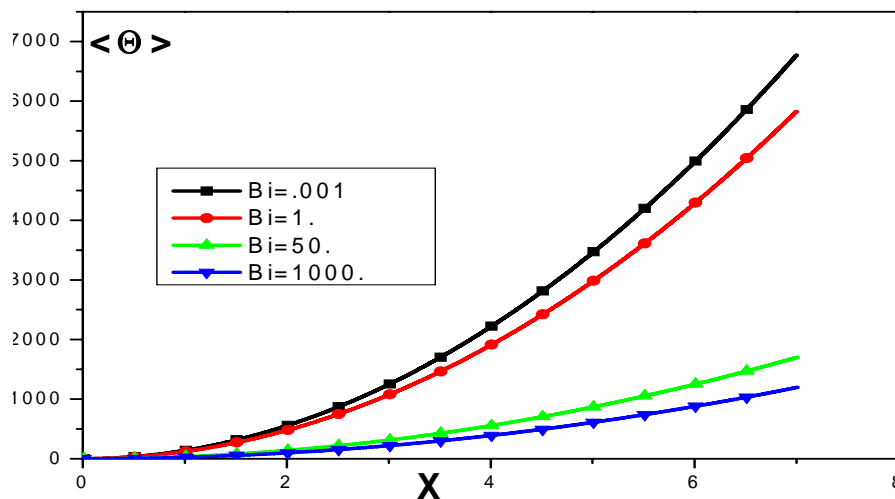
C'est un nombre adimensionnel qui nous renseigne sur les échanges thermiques avec le milieu extérieur. Dans notre étude on le fait varier dans la gamme (0.001 ; 1 ; 50 ; 1000). La condition aux limites thermiques à la paroi

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \text{Bi} (\theta_w - \theta_\infty) \text{ montre que :}$$

- ❖ Si  $\text{Bi} \rightarrow 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} \rightarrow 0$  : cas d'une paroi adiabatique.
- ❖ Si  $\text{Bi} \gg \gg 1 \Rightarrow \theta_w = \theta_\infty$  : cas d'une paroi isotherme.

Les Figures (III-8), (III-9) et (III-10) représentent le profil de température, la température de paroi ainsi que la température moyennée sur une section pour différentes valeurs du nombre de Biot. Pour les petits nombres de Bi, la paroi est adiabatique, la chaleur générée par la dissipation visqueuse entraîne une augmentation de la température du fluide et de celle de la paroi. Pour les grands nombres de Bi, la chaleur est évacuée par la paroi vers le milieu extérieur. Dans ce cas, le fluide est maintenu à une température basse avec un profil relativement uniforme. A la paroi, il se forme une couche limite thermique de faible épaisseur. Pour  $\text{Bi}=1000$ , la résistance thermique à la convection externe ( $1/h_\infty$ ) est pratiquement nulle. La paroi épouse donc la température du milieu ambiant ( $\theta_w = 0$ ).



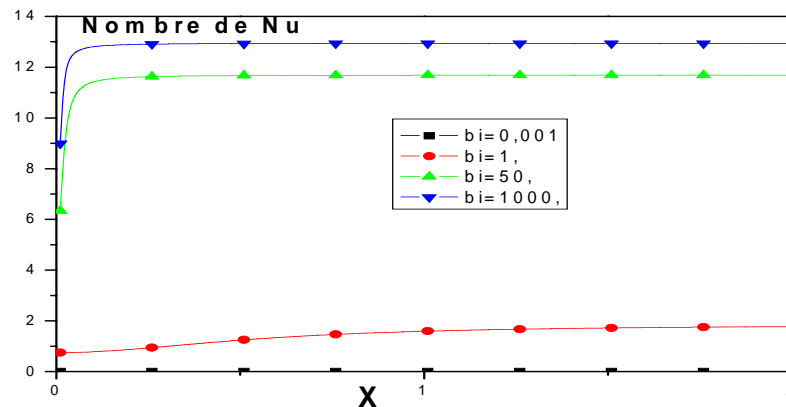
**fig (III-8) : le profil de température pour différent Bi****fig (III-9) :la température de paroi pour différents Bi****fig (III-9) :la température moyenne pour différents Bi**

L'équation de l'énergie associée à la variation linéaire en x de la vitesse axiale d'une part et à la constance de la composante radiale d'autre part, admet comme solution une variation quadratique en x pour  $\theta$ , ( $\theta \approx x^2$ ).

Cela se voit à travers la température de paroi  $\theta_w$  et la température moyenne  $\bar{\theta}$  qui présentent toutes les deux une forme quadratique en fonction de x ( $\theta_w \approx \bar{\theta} \approx x^2$ ). On remarque aussi que  $\theta_w$  est une fonction décroissante de Bi. Pour le cas adiabatique ( $Bi=0.001$ ), il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur. La chaleur s'accumule à l'intérieur du fluide à cause de la dissipation

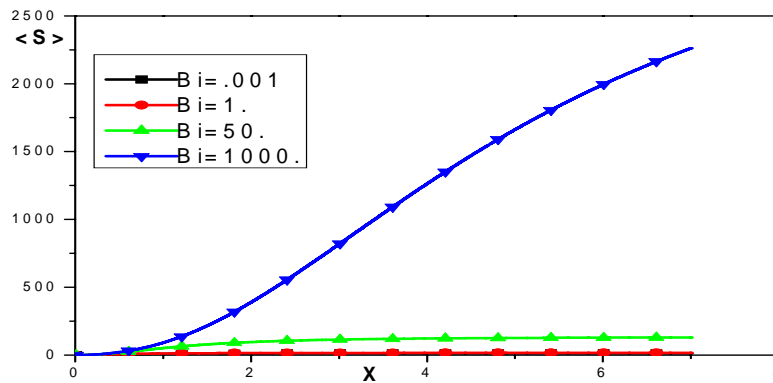
visqueuse et chauffe fortement la paroi. Pour ( $Bi=1000$ ) l'échange thermique est très important,  $\theta_w$  diminue et épouse la température ambiante ( $\theta_w=0$ ).

On représente sur la Figure (III-11) le développement du nombre de Nusselt le long de  $x$  pour toutes les valeurs de  $Bi$  considérées. Pour les faibles  $Bi$  (cas adiabatique), il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur donc pas de gradient de température, cela entraîne un nombre de  $Nu$  pratiquement nul comme le montre la figure en question. Quand la valeur de  $Bi$  croît, les échanges thermiques à la paroi suivent et donc le nombre de Nusselt. Plus loin en aval, les courbes s'uniformisent et prennent des valeurs constantes car  $\theta$  et  $\frac{\partial\theta}{\partial\eta}$ , varient tout deux en  $x^2$ .



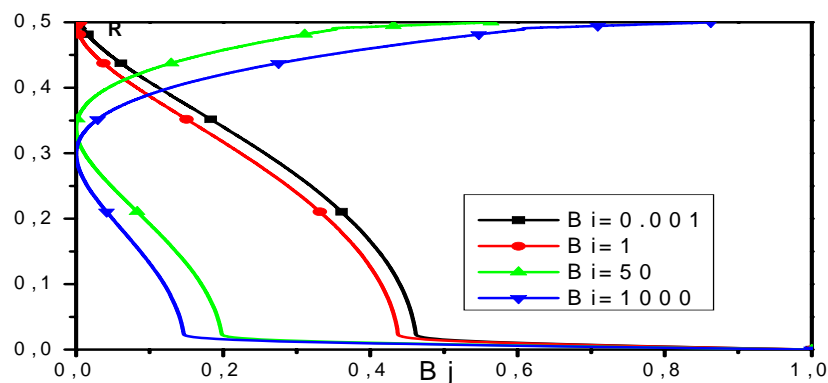
**fig (III-11) :** le développement du nombre de Nusselt le long de  $x$  pour différents  $Bi$

La Figure (III-12) montre l'évolution le long de l'axe de l'entropie moyennée  $\langle S \rangle$  sur une section. Comme on l'a déjà mentionné les grands  $Bi$  donnent de forts gradients de température à la paroi et de faibles niveaux de température de fluide, ce qui a pour conséquence un taux de génération d'entropie élevé. Pour les faibles  $Bi$ , la paroi est adiabatique, la température du fluide augmente, cela entraîne un faible taux de génération d'entropie. En progressant le long de  $x$ , ce taux croît à cause du débit qui en augmentant, entraîne de forts gradients de vitesse et donc de dissipation visqueuse.



**fig (III-12) :** l'entropie moyennée pour différentes  $B_i$

La Figure (III-13) représente le profil du nombre de  $B_j$  pour différentes valeurs du nombre de  $B_i$ . Pour  $B_i=0.001$  et  $1$ , les gradients de température à la paroi sont nuls (cas d'une paroi adiabatique). L'irréversibilité dans cette région est due seulement aux gradients de vitesse :  $B_j \rightarrow 0$ . L'inverse est obtenu pour les grands nombres de  $B_i$  ( $B_i > 50$ ), la paroi réagit comme un concentrateur d'irréversibilité thermique, cela est dû au fort gradient de température dans cette région ( $B_j > 60\%$ ). Au voisinage de l'axe, l'irréversibilité dynamique domine, particulièrement pour les grandes valeurs de  $B_i$ .

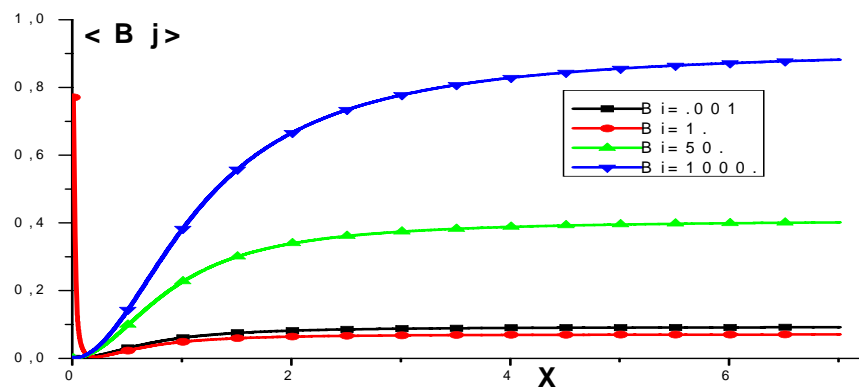


**fig (III-13) :** le profil de  $B_j$  pour différents  $B_i$

On remarque que pour toutes les valeurs de  $B_i$ , le nombre de  $B_j$  tend vers 1 sur l'axe. Cela est dû au fait que tous les gradients tendent vers 0 simultanément

(pour  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \rightarrow 0 \Rightarrow B_j \rightarrow 1$ ).

La Figure (III-14) montre l'évolution le long de l'axe du nombre de  $B_j$  moyenné  $\langle B_j \rangle$  sur une section pour la même plage de valeurs du nombre de  $B_i$ .



**fig (III-14) :** le nombre de  $B_j$  moyenné pour différents  $B_i$

Pour les grands  $B_i$  ( $B_i > 50$ ), le flux de chaleur à la paroi (où la contribution aux quantités moyennes est plus importante à cause de la géométrie cylindrique de la conduite) ainsi que les gradients de température sont une fonction croissante de  $B_i$ , contrairement à la température du fluide Figure (III-9). Par conséquent l'entropie générée par l'irréversibilité thermique augmente avec  $B_i$ . Pour les faibles  $B_i$ , les gradients de température à la paroi sont très faibles et tendent vers zéro quand  $B_i$  tend vers zéro. Ce qui donne un faible pourcentage de production d'entropie générée par la diffusion de chaleur dans le fluide.

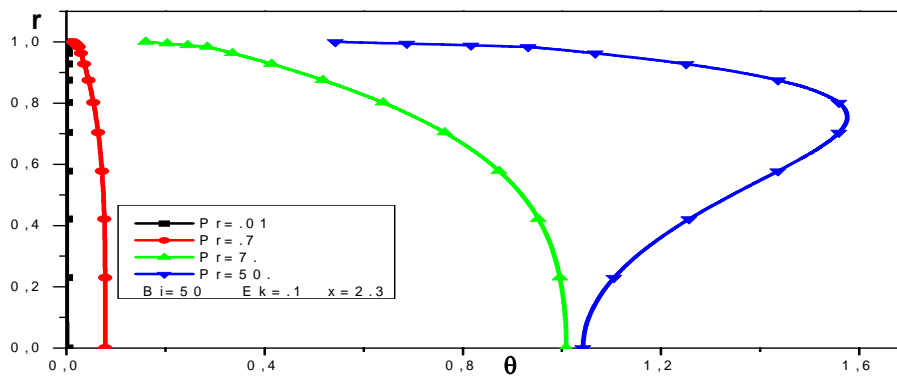
À  $x=0$ , on note une valeur importante du nombre de  $B_j$  (Figure III-14). Elle est due à l'effet de la valve adiabatique au voisinage de laquelle, les gradients de température et la vitesse sont nuls. On note aussi que plus loin en aval, pour les grands  $B_i$ , l'irréversibilité thermique représente (80%) de l'irréversibilité totale, alors qu'elle n'est de (8%) pour les faibles  $B_i$ .

#### 4-b- Les effets du nombre de Prandtl :

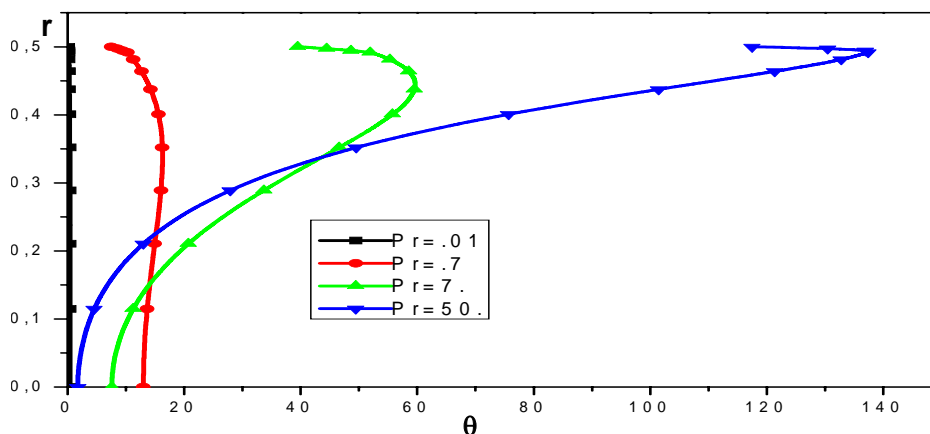
Spécialement pour le nombre de  $Pr$ , On s'est d'abord intéressé au cas stationnaire avec une vitesse d'entrée non nulle, et ce afin d'examiner les effets de la contraction sur les profils de température et du taux de génération d'entropie. Le nombre de Prandtl caractérise le fluide, c'est le rapport entre le coefficient de diffusion dynamique et le coefficient de diffusion thermique. Nous le ferons varier dans la gamme ( $Pr=0,01 ; 0,7 ; 7 ; 50$ ). C'est à dire depuis :

$Pr=0.01$  (les métaux liquides), jusqu'à  $Pr=50$  (gaz), en passant par  $Pr=0.7$  (liquides). On analyse ses effets pour ( $Bi=50$  et  $Ek=0.1$ ).

Les Figures (III-15) et (III-16) représentent les profils de température pour différentes valeurs du nombre de Prandtl dans les cas stationnaire et instationnaire. Pour les faibles  $Pr$  ( $Pr=0.01-0.7$ ), le coefficient de diffusion thermique est important et la chaleur générée par la dissipation visqueuse diffuse à travers le fluide. A la paroi elle est évacuée vers l'extérieur à cause de la valeur du nombre de  $Bi$ . Pour les  $Pr$  élevés ( $Pr=7-50$ ), la résistance thermique  $\left(\frac{\bar{R}}{k}\right)$  est suffisamment grande et entraîne une faible diffusion. On observe une augmentation locale de la température près de la paroi ou les gradients de vitesse et donc la fonction de dissipation sont importants.



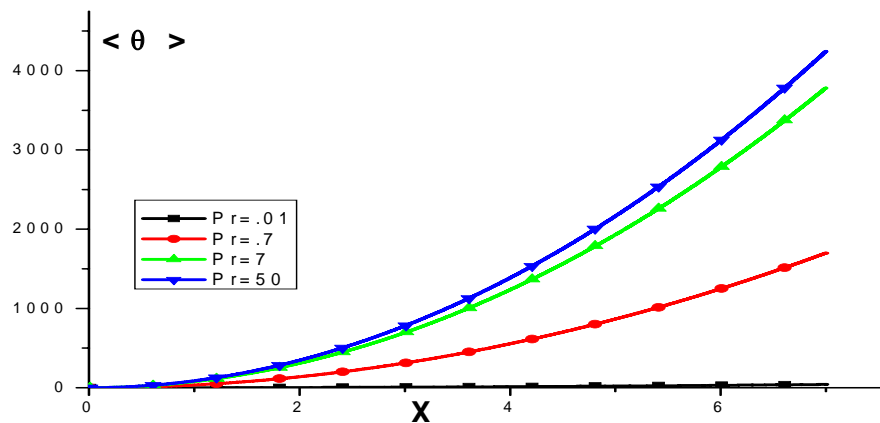
**fig (III-15) :** le profil de température pour différents  $Pr$  (stationnaire)



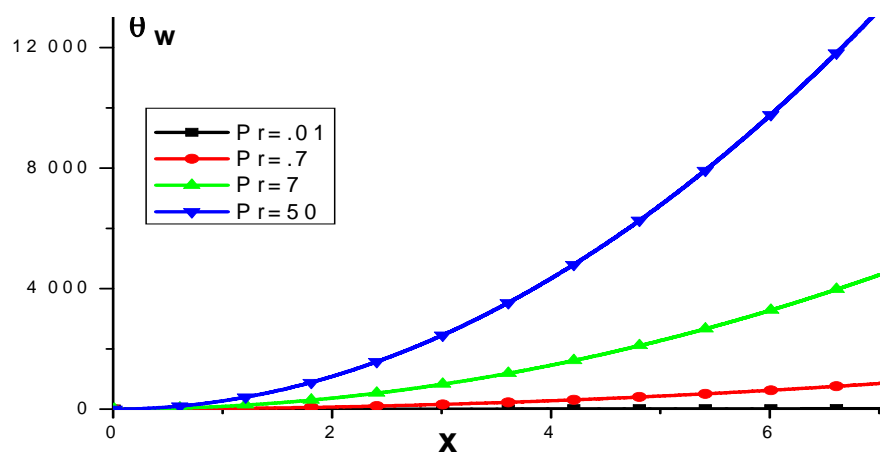
**fig (III-16):** le profil de température pour différents  $Pr$  (instationnaire)

Pour le cas stationnaire Figure (III-15), on remarque que sur l'axe la température augmente avec le nombre de Pr. Dans le cas instationnaire, la croissance linéaire du débit entraîne une forte dissipation visqueuse qui se traduit par une température du fluide beaucoup plus élevée (dans le rapport  $\propto \frac{1}{100}$ ).

Les Figures (III-17) et (III-18) représentent la température moyenne du mélange  $\langle \theta \rangle$  ainsi que la température de paroi  $\theta_w$  pour différentes valeurs du nombre de Pr dans le cas instationnaire.



**fig (III-17) :** la température moyenne du mélange  $\langle \theta \rangle$  pour différents Pr

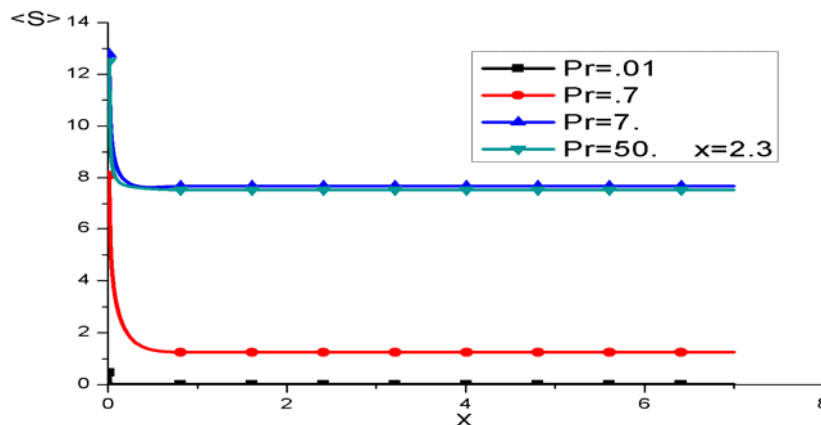


**fig (III-18) :** la température de paroi  $\theta_w$  pour différents Pr

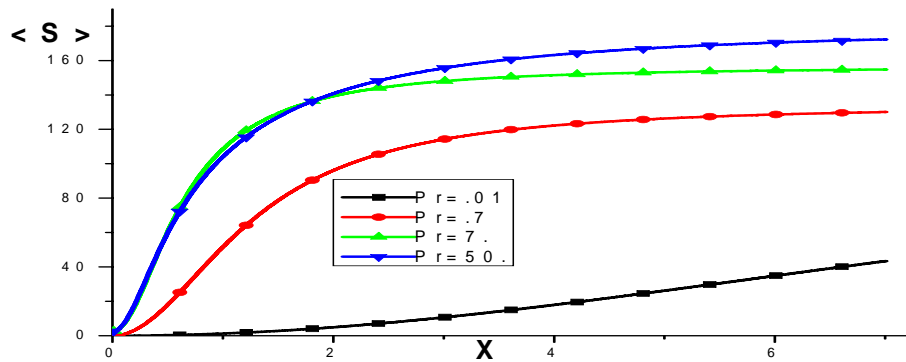
Les courbes confirment l'évolution parabolique des deux températures ( $\theta_w \approx \theta \approx x^2$ ). On note que les deux températures sont fonction croissante de Pr. Pour les grands Pr, on a une faible diffusion donc une température plus élevée à l'intérieur du fluide ainsi qu'à la paroi.

Les Figures (III-19) et (III-20) montrent le développement du taux de génération d'entropie dans les deux cas, stationnaire et instationnaire. Quand Pr augmente, le coefficient de diffusion thermique diminue et le coefficient de diffusion dynamique  $\nu$  croît. Cela entraîne une plus grande génération d'entropie dynamique ( $S_\mu$ ), donc d'entropie totale. Le nombre de Bjan,  $\langle B_j \rangle$  diminue.

Les conditions d'entrée sont différentes pour le cas stationnaire et instationnaire, cela se reflète dans la production d'entropie. Dans le cas stationnaire une couche limite dynamique prend naissance juste à l'entrée. Les gradients de vitesse sont importants à la paroi et entraînent un fort taux de génération d'entropie dynamique ( $S_\mu$ ), en particulier pour les grands Pr. Pour le deuxième cas, ce phénomène n'est pas rencontré car il n'y a pas de vitesse d'entrée. Nous remarquons que dans les deux cas,  $\langle S \rangle$  croît avec Pr.



**fig (III-19)** : l'entropie moyennée pour différents Pr (stationnaire)



**fig (III-20) :** L'entropie moyennée pour différents Pr (instationnaire)

L'évolution du nombre de Bejan moyenné  $\langle \mathbf{Bj} \rangle$  sur une section dans les deux cas est représentée sur les Figures (III-21) et (III-222).

Nous remarquons que dans les deux cas, stationnaire et instationnaire, le nombre de Bejan n'est pas une fonction monotone de Pr. Le profil de vitesse n'étant pas fonction de Pr, le nombre de Bejan  $\langle \mathbf{Bj} \rangle$  est spécialement déterminé

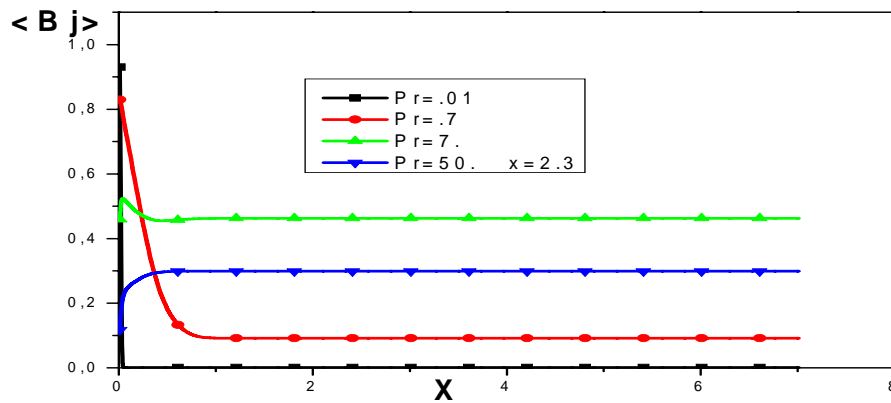
par le gradient de température ( $\mathbf{Bj} \approx \frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2$ ). Pour les faibles nombre de Pr, les

figures (III-15) et (III-16) montrent que le profil de température est relativement uniforme. Il s'en suit un nombre de  $\langle \mathbf{Bj} \rangle$  de faible amplitude augmentant avec Pr ( $0.01 \leq Pr \leq 7$ ). Pour Pr=50, elle présente un pic important au voisinage de la paroi et entraîne une diminution de  $\langle \mathbf{Bj} \rangle$ . Dans le cas instationnaire, cet effet de la température se fait sentir déjà pour Pr=7. En aval,  $\langle \mathbf{Bj} \rangle$  et  $\langle \mathbf{S} \rangle$  ne changent plus

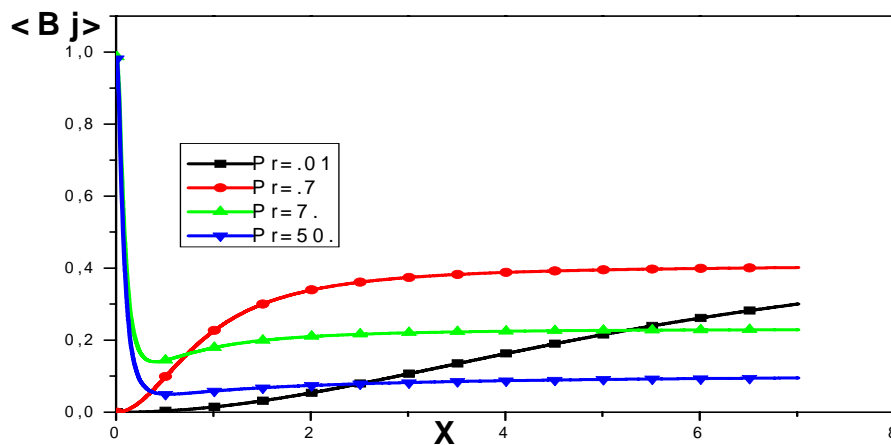
pour des raisons déjà exploitées ( $\theta \approx \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \approx x^2$  et  $\frac{\partial u}{\partial \eta} \approx x$ ). Le résultat global obtenu

est une croissance de l'entropie totale ( $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}_k \rangle$ ) avec Pr d'une part et la

décroissance du nombre de Bejan moyen  $\langle \frac{\mathbf{S}_k}{\mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}_k} \rangle$  d'autre part.

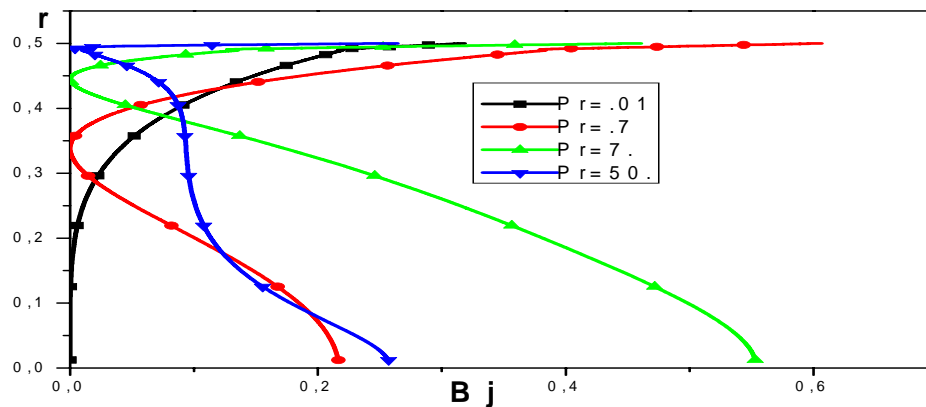


**fig (III-21)** :Le nombre de Bj moyenné pour différents Pr (stationnaire)



**fig (III-22)** :Le nombre de Bj moyenné pour différents Pr (instationnaire)

Ces résultats sont en accord avec ceux représentés sur la Figure (III-23) montrant le profil du nombre de Bj à  $x=2.3$ . Les courbes représentées sur la figure, ne peuvent pas être interprétées car elles n'obéissent pas à des lois de variations simples ; tantôt le nombre de  $\langle B_j \rangle$  croît avec Pr (faibles Pr), tantôt il décroît. Cela serait principalement dû aux nombres élevés paramètres (4) qui interviennent dans le modèle et aussi à l'absence de grandeurs caractéristiques, tant pour les variables dépendantes que pour les variables indépendantes dans la direction axiale.



**fig (III-23) : le profil de  $B_j$  pour différents  $Pr$**

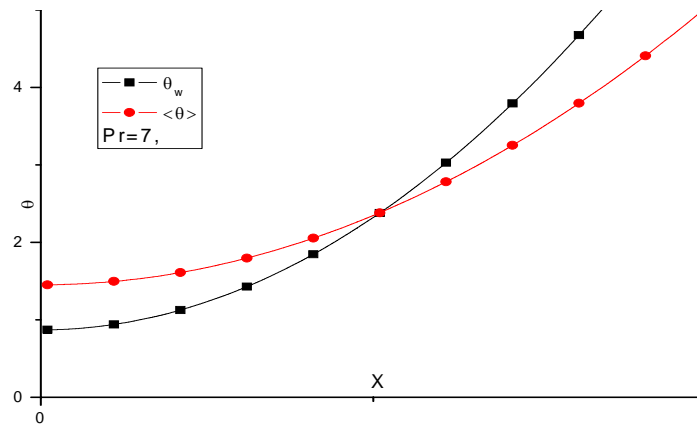
En progressant en aval, le débit croît avec  $x$  provoquant une irréversibilité dynamique qui va entrer en compétition avec l'irréversibilité thermique. Plus loin, en aval  $\langle S \rangle$  et  $\langle B_j \rangle$  ne changent plus avec  $x$  pour les raisons déjà mentionnées auparavant.

Finalement, il est important de mentionner que l'effet péristaltique favorise la production d'entropie et donc entraîne une destruction du travail utile. Pour la même combinaison de paramètres, les Figures de (III-15) jusqu'au (III-22) montrent que le comportement du système est très différent, selon que ce dernier soit contractile ou à paroi stationnaire. La faible quantité de chaleur générée par la dissipation visqueuse dans ce dernier cas a pour conséquence une faible température du fluide et un profil de température pratiquement constant quand on progresse avec  $x$ .

La Figure (III-25) représente le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) le long de  $x$ , pour toutes les valeurs du nombre de  $Pr$  considérées. Nous rappelons que le nombre de  $Nu$  est inversement proportionnel à la différence entre  $\theta_w$  et  $\langle \theta \rangle$

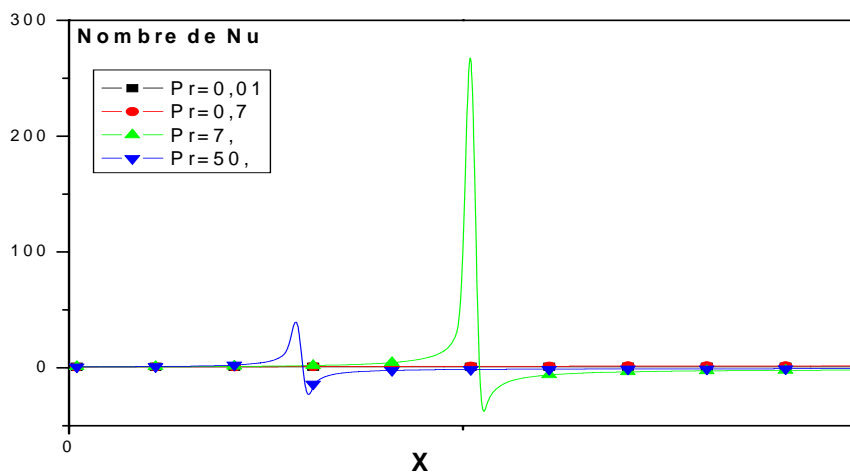
$$Nu(x, \tau) = \frac{1}{\theta_w - \langle \theta \rangle} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \right) = \frac{1}{f} (Nu)_{\frac{\partial \theta}{\partial \eta}|_{\eta=1}} (Nu)_{\theta_w}. \quad \text{Ces deux}$$

températures croissent avec  $x$  mais pas à la même vitesse. Les courbes de  $\theta_w$  et  $\langle \theta \rangle$  montrent qu'elles se rejoignent en un point  $x$  ( $x = x_c$ ) qui dépend de  $Pr$  Figure (III-24).



**fig (III-24) :** la température moyenne  $\langle \theta \rangle$  et la température de paroi  $\theta_w$

En ce point critique, la différence de température est nulle et  $Nu \rightarrow \infty$ . Ce genre de comportement du nombre de  $Nu$  n'est remarqué que pour certaines valeurs du nombre de  $Pr$ . En amont du point critique,  $Nu < 0$  et le fluide cède de la chaleur à la paroi. En aval de  $x_c$ , le phénomène se renverse.



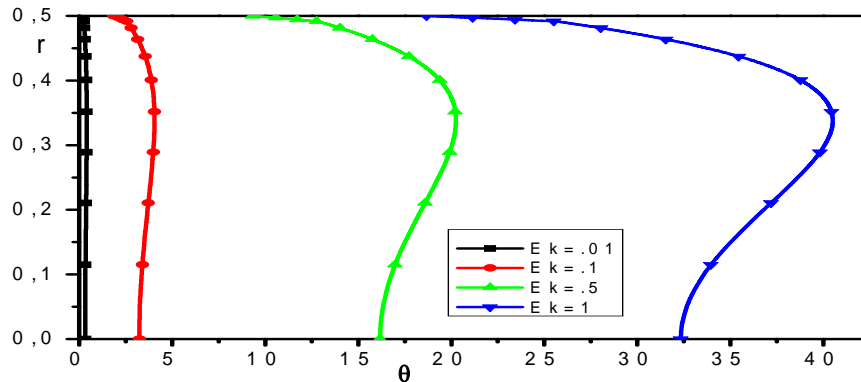
**fig (III-25) :** le développement du nombre de Nusselt le long de  $x$  pour différents  $Pr$

#### 4-c - Les effets du nombre d'Eckert:

Ce nombre mesure l'énergie cinétique transformée en chaleur par la dissipation visqueuse. On le fera varier entre ( $Ek=0.01$  ;  $0.1$  ;  $0.5$  ;  $1$ ), et on étudiera ses effets pour les valeurs ( $Bi=50$  ;  $Pr=0.7$ ).

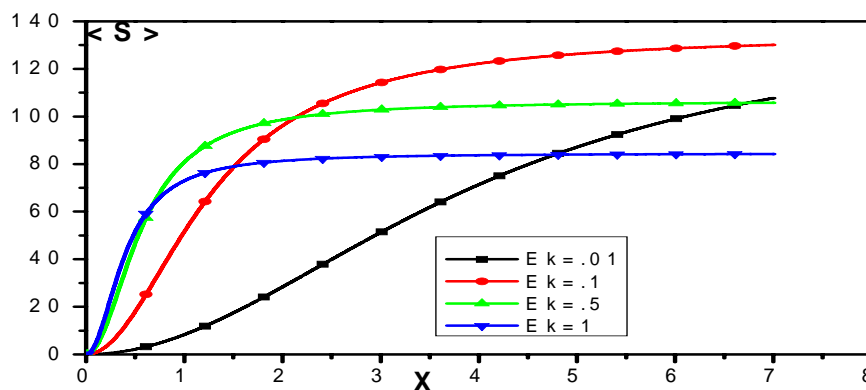
La Figure (III-26) représente le profil de température pour les différentes valeurs du nombre d'Eckert. Pour les faibles  $Ek$  ( $Ek=0.01$  ;  $0.1$ ) aucune source de chaleur n'est présente à l'intérieur du système. La température du fluide est

relativement faible et présente un profil uniforme. Pour les grands nombres de  $Ek$  ( $Ek=1$ ) l'énergie cinétique est transformée en chaleur, et entraîne une élévation de la température. Cette chaleur est transférée par convection et par diffusion vers l'axe. Elle entraîne une augmentation de la température du fluide dans cette région. Elle diffuse à la paroi vers le milieu extérieur à cause de la valeur intermédiaire du nombre de  $Bi$ . Ce résultat est confirmé par le fort gradient de température observé dans cette région.

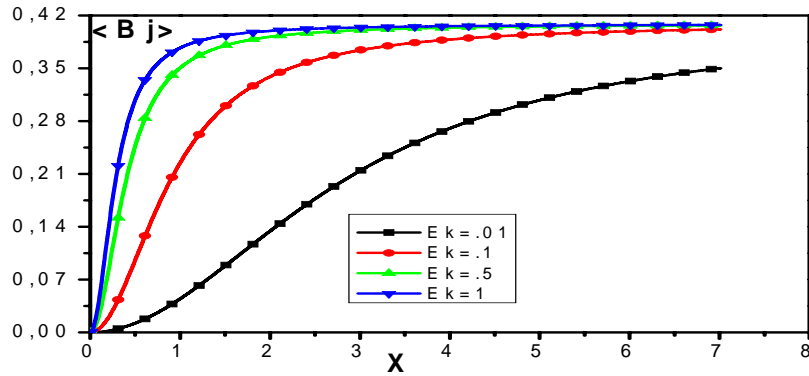


**fig (III-26) : le profil de température pour différents  $Ek$**

Pour les mêmes valeurs du nombre d' $Ek$ ,  $\langle S \rangle$  et  $\langle Bj \rangle$  sont représentées dans les Figures (III-27) et (III-28) respectivement.



**fig (III-27) : l'entropie moyennée pour différents  $Ek$**



**fig (III-28)** :Le nombre de Bj moyenné pour différents Ek

Le nombre de Ek n'influence pas le profil de vitesse, nous devons donc porter notre attention uniquement sur le gradient de température pour analyser  $\langle \mathbf{S} \rangle$  et

$\langle \mathbf{B}_j \rangle$ . Aux faibles valeurs de Ek ( $Ek=0.01, 0.1$ ),  $\frac{Pr \cdot Ek}{1 + Pr \cdot Ek} \rightarrow 0 \Rightarrow S \approx \left( \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2$  et  $\langle \mathbf{S} \rangle$

croît avec Ek, confirmant les résultats de la courbe (III-26).

Pour les valeurs de Ek plus élevées ( $Ek=0.5, 1$ ), la température du fluide s'élève sensiblement et entraîne une chute dans  $\langle \mathbf{S} \rangle$ . Les effets de la température sur

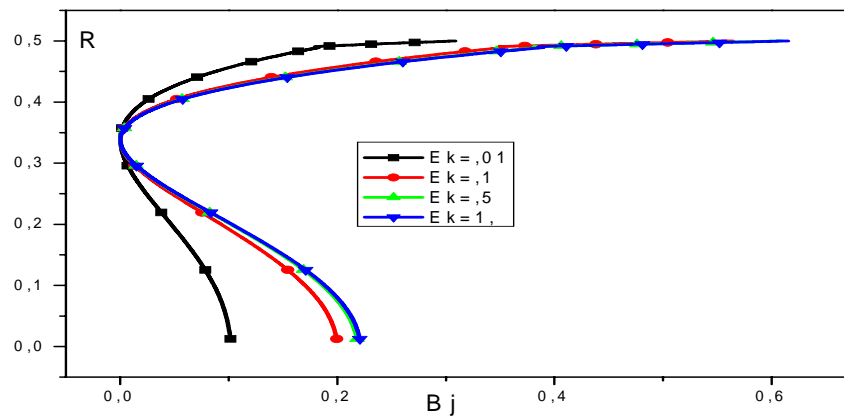
$\langle \mathbf{B}_j \rangle$  sont moins prononcés ( $S \approx \frac{1}{\theta^2}, B_j \approx \frac{1}{\theta}$ ) et le gradient semble le facteur

déterminant.  $\left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$  Croît avec Ek, comme illustré dans la figure (III-26). Il en

résulte un nombre de  $\langle \mathbf{B}_j \rangle$  croissant avec Ek.

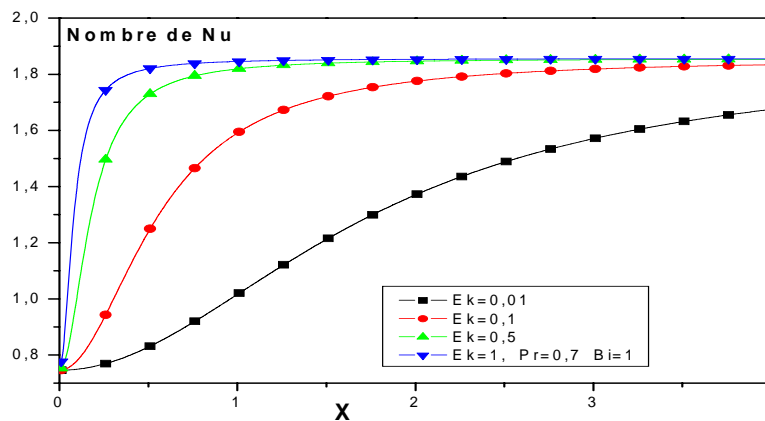
En aval,  $\langle \mathbf{S} \rangle$  et  $\langle \mathbf{B}_j \rangle$  ne dépendent pas de x (rappelons que  $\theta \approx \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \approx x^2$  et  $\frac{\partial u}{\partial \eta} \approx x$ ). A l'entrée,  $x=0$  les effets de la valve adiabatique sont considérables. Ces effets ont une plus grande portée pour les faibles Ek ( $Ek=0.01$ ).

La Figure (III-29) représente le profil du nombre de Bj. Il est important de noter que d'une part, l'entropie est générée essentiellement par l'irréversibilité dynamique. D'autre part, loin des effets de la valve, le nombre de Bj ne dépend pas du nombre d'Ek. Les effets du nombre de Ek ne sont pas déterminants concernant le profil du nombre de Bj.



**fig (III-29) : le profil de  $B_j$  pour différents  $E_k$**

On montre l'évolution du nombre de Nusselt le long de  $x$ , pour les différentes valeurs d' $E_k$  sur la Figure (III-30). On note que  $Nu$  est une fonction croissante de  $E_k$ . Cela s'explique par le fait que la chaleur générée dans le fluide par la dissipation visqueuse est évacuée à la paroi vers le milieu extérieur, elle croît avec la valeur du nombre de  $E_k$ . En aval, on retrouve toujours la stabilité de  $Nu$ . Il tend vers une constante à l'instar du cas du nombre de  $Bi$ .



**fig (III-30) : le développement du nombre de Nusselt le long de  $x$  pour différents  $E_k$**

**4-d - Les effets du nombre de Reynolds:**

Pour ce problème particulier, le nombre de Re est défini comme :

$$Re = \frac{\alpha \bar{R}}{\nu \bar{R}^{-1}} \approx \frac{\text{vitesse de contraction de paroi à } t=0}{\text{vitesse de diffusion de l'impulsion dans le fluide}}$$

On fait varier le nombre de Re dans la gamme (1,500).

La Figure (III-31) représente le profil de température pour différentes valeurs du nombre de Re. Pour les grands nombres de Re :  $Re \gg 1 \Rightarrow \nu \bar{R}^{-1} \ll \alpha \bar{R}$ , le fluide est considéré pratiquement stagnant (au repos), la chaleur est transportée par conduction seulement et uniquement au niveau de la paroi. La dissipation visqueuse n'est pas présente. Cela donne une température faible à travers toute la conduite sauf à  $\eta = 1$  où le fluide prend la température de paroi. Pour un nombre de Re relativement faible ( $Re=10$ ), on a  $\nu \bar{R}^{-1} \geq \alpha \bar{R}$ , la diffusion de l'impulsion est assez importante pour provoquer la dissipation visqueuse, spécialement près de la paroi où on observe un pique de température. Nous pouvons aussi considéré Re comme le rapport de deux longueurs :

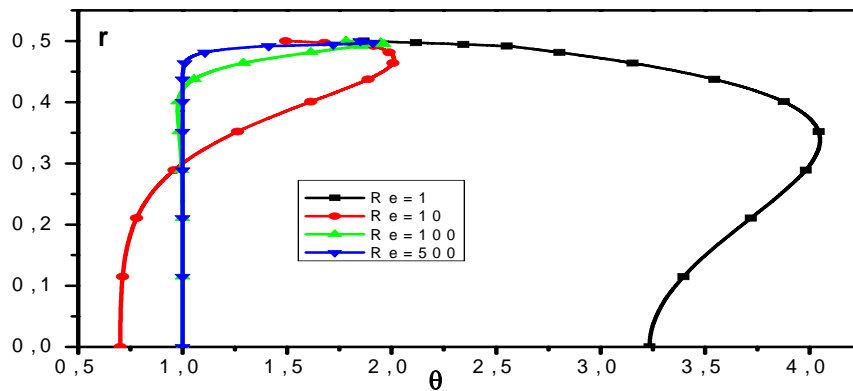
$$Re = \frac{\bar{R}^2}{\nu \alpha^{-1}} \approx \left( \frac{\bar{R}}{\delta_\mu} \right)^2, \quad \delta_\mu : \text{épaisseur de la couche limite dynamique. Pour Pr}$$

choisi ;  $Pr=0.7$ , on a :  $Pr = \left( \frac{\delta_\mu}{\delta_\theta} \right)^2 \Rightarrow \left( \frac{\delta_\mu}{\delta_\theta} \right) = \sqrt{Pr} = \sqrt{0.7} \approx 0.85$ . On peut considérer

que pour  $Pr = .7 \Rightarrow \delta_\theta \approx \delta_\mu$ .  $\delta_\theta$  étant l'épaisseur de la couche limite thermique ;

dans ce cas  $Re \approx \left( \frac{\bar{R}}{\delta_\theta} \right)^2$ . Si le nombre de Re est grand, les couches limites

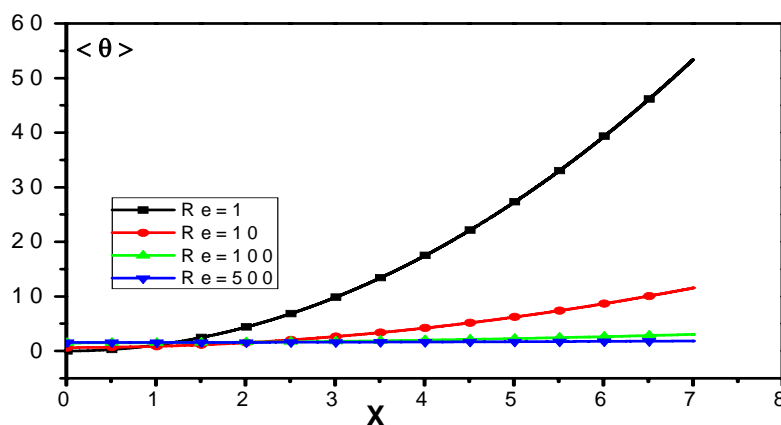
dynamique et thermique sont fines. L'impulsion de la paroi diffuse moins dans le fluide. La dissipation visqueuse n'est pas importante et provoque une faible température sauf à  $\eta = 1$  où l'épaisseur de la couche limite thermique varie en  $R^{-0.5}$ . Pour les faibles Re, la couche limite s'étend sur toute la section du tube et la diffusion de l'impulsion est plus importante.



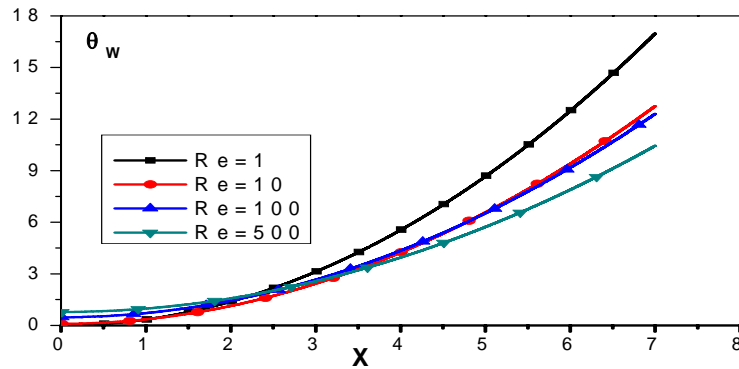
**fig (III-31) :** le profil de température pour différents  $Re$

La température du mélange  $\langle \theta \rangle$  ainsi que la température de paroi  $\theta_w$  sont représentées sur les Figures (III-32) et (III-33) respectivement. On remarque clairement l'aspect parabolique pour ces deux températures ( $\langle \theta \rangle \approx \theta_w \approx x^2$ ).

Pour  $\langle \theta \rangle$ ,  $Re$  très grand ( $Re=100,500$ ) implique  $\alpha \bar{R} \gg \nu R^{-1}$ , la vitesse de contraction de la paroi est très élevée par rapport à la vitesse de diffusion de l'impulsion à l'intérieur du fluide. Comme on l'a déjà mentionné, la dissipation visqueuse n'est pas encore déterminante, ce qui entraîne une faible température du fluide. Pour le deuxième cas ( $Re=1,10$ ), la source de chaleur est présente et diffuse dans le fluide, ce qui provoque l'accroissement de  $\langle \theta \rangle$  le long de  $x$ .

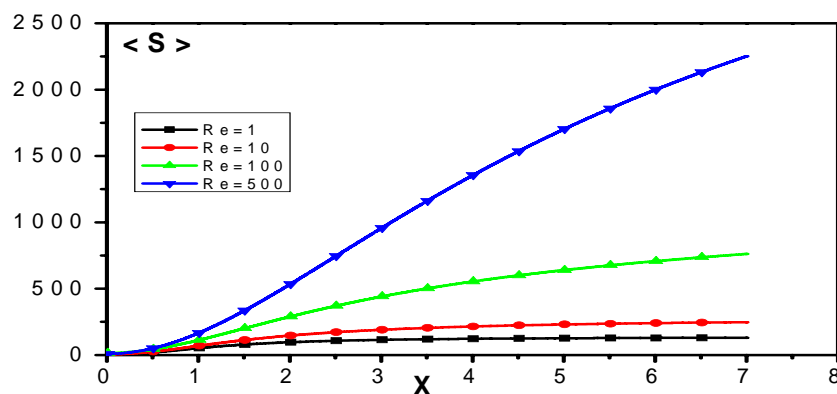


**fig (III-32) :** La température moyennée pour différents  $Re$

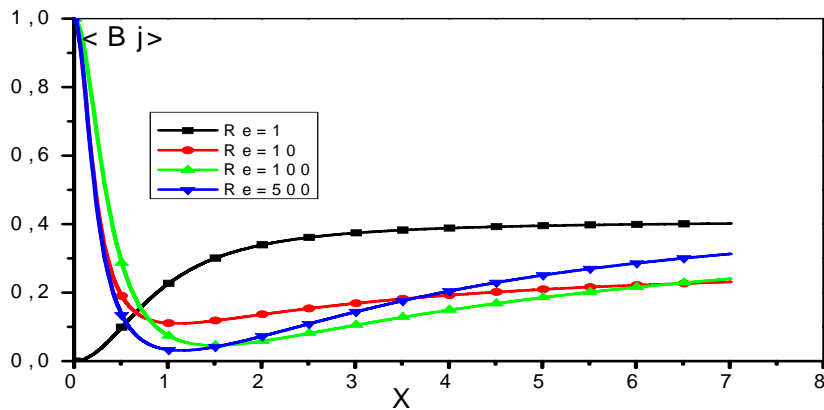


**fig (III-33)** :La température de paroi moyenné pour différents Re

Les Figures (III-34) et (III-35) représentent l'évolution du taux de génération d'entropie et du nombre de Bj moyennés sur une section pour toutes les valeurs du nombre de Re considérées. A l'entrée, l'effet de la valve adiabatique et imperméable est nettement perceptible sur l'évolution de  $\langle S \rangle$  et  $\langle B_j \rangle$ . On note que  $\langle S \rangle$  est une fonction croissante du nombre de Re. Pour les grands valeurs de Re,  $\delta_\mu$  et  $\delta_\theta$  ont une faible épaisseur, ce qui implique de très forts gradients à la paroi, là où la contribution aux valeurs moyennes est la plus forte. Le taux de production d'entropie moyennée sur une section est donc plus important. Pour les faibles valeurs de Re, les couches limites et les gradients sont moins prononcés.



**fig (III-34)** :l'entropie moyennée pour différents Re




**fig (III-35)** :Le nombre de Bj moyenné pour différents Re

On remarque que  $\langle B_j \rangle$  ne dépasse pas 40%, ce qui implique toujours que la génération d'entropie est due essentiellement à l'irréversibilité dynamique.

Pour les grands Re (Re=500), la dissipation visqueuse est plus importante que la diffusion thermique et on observe une décroissance de  $\langle B_j \rangle$ . On note aussi que le nombre de Re est une mesure de la vitesse de contraction  $\alpha$ . Plus important est ce paramètre  $\alpha$ ; Plus important est le débit; plus important sont la fonction de dissipation, donc un taux de génération d'entropie plus élevé. Au voisinage de la valve, la vitesse du fluide est nulle et l'entropie est générée par la diffusion thermique seulement. Pour le cas particulier Re=1, on a  $\delta_\mu \approx \delta_\theta \approx \bar{R}$ , la couche limite thermique, s'étend sur toute la section, et le profil de température est relativement uniforme :  $\langle B_j \rangle \rightarrow 0$ .

## 5- Conclusion:

On a vu dans ce chapitre l'influence des différents paramètres sur le taux de génération d'entropie totale. Ce travail montre qu'un tube contractile génère plus d'entropie qu'un tube à paroi fixe. La contraction de la paroi provoque une forte dissipation à l'intérieur du fluide à cause de la croissance du débit et entraîne une irréversibilité dynamique plus importante que l'irréversibilité thermique.



*Conclusion  
Générale*

*Conclusion Générale :*

Selon la thermodynamique des phénomènes irréversibles, l'état stationnaire est l'état attractif pour les systèmes hors équilibre. Il est caractérisé par un minimum de génération d'entropie et constitue l'état de référence pour les processus réels transitoires.

Dans ce travail, on s'est intéressé à l'évaluation des performances, sur la base de considérations thermodynamiques d'une pompe péristaltique. Nous avons comparé le taux de génération d'entropie obtenu pour cet équipement à celui obtenu dans le cas classique de l'écoulement de poiseuille.

On a considéré l'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien régi par les équations de la couche limite. Les équations ont été réduites à celles de la couche limite classique pour un tube à paroi fixe avec deux termes supplémentaires fortement non linéaires, un terme source dans l'équation de la conservation de la masse et une force induite dans l'équation de conservation de quantité de mouvement. Ces termes traduisent le mouvement de la paroi.

L'étude montre qu'un tube contractile génère beaucoup plus d'entropie qu'un tube à paroi fixe. L'effet péristaltique favorise fortement la production d'entropie. Cette croissance est due au comportement dynamique de l'écoulement. Le débit à l'intérieur de la conduite n'est pas constant, il augmente linéairement en aval ; il en résulte de forts gradients de vitesse et donc une forte irréversibilité dynamique. Il est aussi noté que la température du fluide et le gradient de température ont des effets antagonistes sur le taux de génération d'entropie. Le premier à un effet destructeur, alors que le second à un effet amplificateur. Une température élevée du fluide avec un profil uniforme constituent les meilleures conditions d'opération. Cela consiste à prendre :


- Un faible nombre de  $Re$ , ce qui implique une large couche limite thermique ou dynamique. (pour  $Pr \approx 1$ ).
- Un faible nombre de  $Bi$  pour avoir une paroi adiabatique et donc des gradients de température nuls à la paroi.(système isolé)
- Un faible nombre de  $Pr$ , par conséquent un grand coefficient de diffusion et de faibles gradients de température.
- Un fort nombre d' $Ek$  qui provoque une forte source de chaleur à l'intérieur du fluide et donc une température plus élevée.

L'étude que nous avons réalisée nous a permis de mettre en évidence les mécanismes de base de la pompe péristaltique. Mais il reste encore un travail très important à réaliser pour compléter cette étude.

Notre étude est limitée à la région d'établissement (région d'entrée), les équations utilisées sont celle de la couche limite, il est souhaitable d'utiliser les équations de Navier-Stokes dans leur globalité qui permettent d'étudier le cas où il y a des zones de renversement de l'écoulement.

Le modèle présent ne peut pas traiter les problèmes de renversement de l'écoulement que l'on rencontrerait dans un tube dont le rayon croîtrait en fonction du temps.

Il serait de même intéressant qu'un travail expérimental soit entrepris afin de confirmer et renforcer nos résultats numériques.



*Références  
Bibliographiques*

---

---

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

**[1] J. Willard. Gibbs:**

The collected works of J. Willard. Gibbs, p39. London: Longmans, Green and Co, Ltd (1931).

**[2] J.H. Keenan :**

Availability and irreversibility in thermodynamic. M.I.T. Mass. USA (1951).

**[3] H.B. Callen :**

Thermodynamics. Wiley. New York, London (1959).

**[4] S. Uchida et H. Aoki :**

Unsteady flows in a semi-infinite contracting or expanding pipe J Fluid Mech. 82 (1977) 371-387.

**[5] A. Bejan :**

A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer, J Heat Transfer, 101 (1979) 718-725.

**[6] S. Takabateck , et K. Ayukawa :**

Numerical study of two dimensional peristaltic flows. J Fluid Mech. 12 (1982) 439-465.

**[7] A. Bejan :**

Entropy Generation Minimization, CRC Press, Boca Raton, New York 1996.

**[8] M. Heill :**

Stokes flow in collapsible tubes-Computation and experiment. Journal of Fluid Mech. (1997), vol. 353, pp. 285-312.

**[9] Y. Demirel :**

Thermodynamic analysis of thermomechanical coupling in coquette flow. I J of Heat and Mass Transfer 43 (2000) 4205-4212

**[10] S. Mahmud et R.A. Fraser:**

Thermodynamic analysis of flow and heat transfer inside channel with two parallel plates, Exergy. 2 (2002) 140-146.

---

---

**[11] S.Mahmud et R.A.Fraser:**

Second law analysis of heat transfer and fluid flow inside a cylindrical annular space, *Exergy*. 2 (2002) 322-329.

**[12] S.H.Tasnim ,M.Sohel et M.A.H.Mamoun :**

Entropy generation in a porous channel with hydromagnetic effect, *Exergy*, 2 (2002) 300-308.

**[13] G.Ibanéz, S.Guevas et M.Lopéz :**

Heat transfer in asymmetric convective cooling and optimized entropy generation rate, *Revista Mexicana De Fisica*49(4)(2003)338-343.

**[14] L.B.Erbay et al :**

Entropy Generation during Fluid Flow between Two Parallel Plates with moving bottom plate, *Entropy*, 5(2003)506-518.

**[15] Z.Ahmet, Sahin et al:**

Entropy Generation In Fluid Flow Through a Circular Pipe, *Entropy*, 5(2003)404-416.

**[16] B.H.Abbassi et al :**

Entropy Generation in Poiseuille-Benard Channel Flow, *International Journal of Thermal Sciences*,42(2003)1081-1088.

**[17] S.Mahmud et R.A.Fraser:**

The Second Law Analysis In Fundamental Convective Heat Transfer Problems. *International Journal of Thermal Sciences*, 42 (2003) 177-186.

**[18] L.B.Erbay, Z.Altac et B.Sülüs:**

An Analysis Of The Entropy Generation In A Square Enclosure. *Entropy*, 5(2003)496-505.

**[19] M.Q.Al.Odat et al :**

Effect of Magnetic Field on Entropy Generation Due to Laminar Forced Convection Past a Horizontal Flat Plate. *Entropy* 4(3)(2004)293-303.

**[20] B.S.Yilbas et al :**

Entropy Analysis for Non-Newtonian Fluid Flow in Annular Pipe: Constant Viscosity Case. *Entropy* 6(2004)304-315.

---

---

**[21] I.T.Al Zaharanah et B.S.Yilbas:**

Influence of Variable Viscosity en Entropy Generation. Entropy 6(2004)344-363.

**[22] N.Allouache et S.Chikh:**

Thermodynamic analysis in Parallel Flow Annular Heat Exchanger. ECOMAS 2004.

**[23] O.M.Hadad,M.K.Alkan et M.T.Khasawneh:**

Entropy Generation Due To Laminar Forced Convection In The Entrance Region Of Concentric Annulus. Energy,29(2004)35-55.

**[24] O.D.Makinde et E.Osalusi:**

Second Law Analysis Of Laminar Flow In A Cannel Filled Whith Saturated Porous Media. Entropy,7(2),(2005)148-160.

**[25] H.Yapici,N.Kayatas et al:**

Numerical Study On Local Entropy Generation In Compressible Flow Through A Suddenly Expanding Pipe. Entropy,7(1),(2005)38-67.

**[24] Benyahia N., Souidi F :**

Interaction Fluide-Paroi, Ecoulement à Travers Un Tube à Paroi Elastique. Thèse de magistère (2005).

**[26] Benyahia.N et Souidi.F:**

Fluid-structure interaction in pipe flow, Prog Compu Fluid Dyn. (in print).

**[27] M.Magherbi,H.Abbassi et al :**

Second Law Analysis In Convective Heat And Mass Transfer. Entropy,8(1),(2006)1-7.

**[28] K.Ayachi, F.Souidi et N. Benyahia :**

Entropy Generation Rate Of A Peristaltic Pump, International Conference On Modelling And Simulation (MS'07 Algeria),(2007).

**[29] George ,E et Mase,ph.D :**

Theory And Problems Of Continuum Mechanics.Mc Graw-Hill Book Company.



*ANNEXES*

**Discrétisation des opérateurs différentiels pour un pas non uniforme :**

**1-dans le champ :**

1-1-derivéé progressive :

On développe  $f_{j+1}$  et  $f_{j-1}$  en série de Taylor autour de  $f_j$  de la manière classique.

$$f_{j+1} = f_j + ap_1 f'_j + bp_1 f''_j + cp_1 f'''_j$$

$$f_{j-1} = f_j + am_1 f'_j + bm_1 f''_j + cm_1 f'''_j$$

On développe  $f_{j+2}$  en série de Taylor autour de  $f_{j+1}$ , puis on calcule les dérivées successives de  $f_{j+1}$  à partir de son développement autour de  $f_j$ , on obtient :

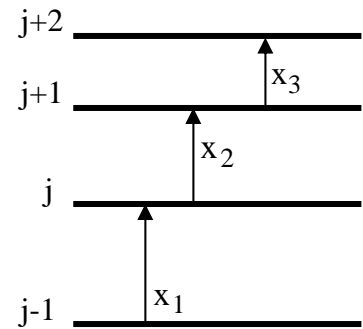
$$f_{j+2} = f_{j+1} + ap_2 f'_j + bp_2 f''_j + cp_2 f'''_j$$

Avec :

$$ap_2 = x_3, \quad ap_1 = x_2, \quad am_1 = -x_1$$

$$bp_2 = x_3 x_2 + \frac{x_3^2}{2} = \frac{3x_3^2}{2}, \quad bp_1 = \frac{x_2^2}{2}, \quad bm_1 = \frac{x_1^2}{2}$$

$$cp_2 = \frac{x_2 x_3}{2} (x_1 + x_2) + \frac{x_3^3}{6} = 7 \frac{x_3^3}{6}, \quad cp_1 = \frac{x_2^3}{6}, \quad cm_1 = -\frac{x_1^3}{6}$$



Les développements  $f_{j+1}$ ,  $f_{j-1}$  et  $f_{j+2}$  sont multipliés respectivement par  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$\alpha f_{j+1} + \beta f_{j-1} + \gamma f_{j+2}$ , donne :

$$\gamma f_{j+2} + (\alpha - \gamma) f_{j+1} - (\alpha + \beta) f_j + \beta f_{j-1} = (\alpha ap_1 + \beta am_1 + \gamma ap_2) f'_j + (\alpha bp_1 + \beta bm_1 + \gamma bp_2) f''_j + (\alpha cp_1 + \beta cm_1 + \gamma cp_2) f'''_j \dots \dots \dots (1)$$

1-1-a-Dérivée première :

➤ A trois points:

On élimine le coefficient de  $f'''_j$  et on pose  $\gamma = 0$ , on obtient une équation pour les

inconnues  $\alpha$  et  $\beta$  :  $\alpha bp_1 = -\beta bm_1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{bm_1}{bp_1} \dots \dots \dots (2)$

$$(1) \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} f_{j+1} - \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) f_j + f_{j-1} = \left( \frac{\alpha}{\beta} ap_1 + am_1 \right) f'_j + \left( \frac{\alpha}{\beta} cp_1 + cm_1 \right) f'''_j$$

$$f'_j = \frac{\frac{\alpha}{\beta} f_{j+1} - \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) f_j + f_{j-1}}{\left(\frac{\alpha}{\beta} a p_1 + a m_1\right)} + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} c p_1 + c m_1\right) f''_j}{\left(\frac{\alpha}{\beta} a p_1 + a m_1\right)} \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b m_1}{b p_1} = -\frac{x_1^2/2}{x_2^2/2} = -\frac{x_1^2}{x_2^2} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\beta} a p_1 + a m_1 = -\frac{x_1^2}{x_2^2} x_2 - x_1 = -\frac{x_1^2}{x_2} - x_1$$

D'où :

$$\Rightarrow f'_j = \frac{-\frac{x_1^2}{x_2^2}}{\left(-\frac{x_1^2}{x_2} - x_1\right)} f_{j+1} - \frac{\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2} + 1\right)}{\left(-\frac{x_1^2}{x_2} - x_1\right)} f_j + \frac{1}{\left(-\frac{x_1^2}{x_2} - x_1\right)} f_{j-1}$$

$$\Rightarrow f'_j = \frac{x_1^2}{\left(x_2 x_1^2 + x_1 x_2^2\right)} f_{j+1} + \frac{-x_1^2 + x_2^2}{\left(x_2 x_1^2 + x_1 x_2^2\right)} f_j + \frac{1}{\left(x_2 x_1^2 + x_1 x_2^2\right)} f_{j-1} \dots\dots\dots(4)$$

Pour un pas uniforme, on a :  $x_1 = x_2 = x$  , l'équation (4) devient alors :

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2x} + \Delta(x^2) \dots\dots\dots(5)$$

➤ A quatre points:

On élimine les coefficients de  $f''_j$  et  $f'''_j$  dans l'équation (1), on obtient :

$$(*) \begin{cases} \alpha b p_1 + \beta b m_1 + \gamma b p_2 = 0 \\ \alpha c p_1 + \beta c m_1 + \gamma c p_2 = 0 \end{cases}$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\gamma f_{j+2} + (\alpha - \gamma) f_{j+1} - (\alpha + \beta) f_j + \beta f_{j-1} = (\alpha a p_1 + \beta a m_1 + \gamma a p_2) f'_j + \dots\dots\dots(6)$$

La résolution du système (\*) donne les solutions  $\alpha, \beta$  suivantes :

$$\alpha = \frac{\gamma(b m_1 c p_2 - b p_2 c m_1)}{\Delta} = \gamma A \quad , \quad \beta = \frac{\gamma(b p_2 c p_1 - b p_1 c p_2)}{\Delta} = \gamma B$$

Avec :  $\Delta = b p_1 c m_1 - b m_1 c p_1$ .

De l'équation (6), on tire :

$$(6) \Rightarrow f'_j = a p f_{j+2} + b p f_{j+1} + c p f_j + d p f_{j-1} + \theta(\Delta x^3) \dots\dots\dots(7)$$

Avec :

$$ap = \frac{\gamma}{\text{deno}} = \frac{\gamma A}{\text{deno}} = \frac{1}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2}, bp = \frac{(\alpha - \gamma)}{\text{deno}} = \frac{(A - 1)}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2},$$

$$cp = \frac{-(\beta - \alpha)}{\text{deno}} = \frac{-(B - A)}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2}, dp = \frac{\beta}{\text{deno}} = \frac{B}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2}$$

$$\text{deno} = \alpha ap_1 + \beta am_1 + \gamma ap_2 = \gamma A ap_1 + \gamma B am_1 + \gamma ap_2$$

$$(7) \Rightarrow f'_j = \frac{1}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2} f_{j+2} + \frac{A - 1}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2} f_{j+1} + \frac{-(B - A)}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2} f_j + \frac{B}{A.ap_1 + B.am_1 + ap_2} f_{j-1} + \theta(\Delta x^3) \dots \dots \dots (8)$$

Pour un pas uniforme, on retrouve bien l'expression classique:

$$f'_j = \frac{-f_{j+2} + 6f_{j+1} - 3f_j - 2f_{j-1}}{6x} + \Delta(x^3) \dots \dots \dots (9)$$

1-1-b-Dérivée seconde :

➤ A trois points:

Cette dérivée n'existe pas avec une erreur de  $\Delta(x^2)$  pour un pas non uniforme.

➤ A quatre points:

On élimine les coefficients de  $f'_j$  et  $f''_j$  de l'équation (1), on obtient le système (\*\*):

$$(**) \begin{cases} \alpha ap_1 + \beta am_1 + \gamma ap_2 = 0 \\ \alpha cp_1 + \beta cm_1 + \gamma cp_2 = 0 \end{cases}$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\gamma f_{j+2} + (\alpha - \gamma) f_{j+1} - (\alpha + \beta) f_j + \beta f_{j-1} = (\alpha bp_1 + \beta bm_1 + \gamma bp_2) f''_j \dots \dots \dots (10)$$

La résolution du système (\*\*) donne les solutions  $\alpha, \beta$  en fonction de  $\gamma$  :

$$\alpha = \frac{\gamma(am_1 cp_2 - ap_2 cm_1)}{\Delta} = \gamma A, \quad \beta = \frac{\gamma(ap_2 cp_1 - ap_1 cp_2)}{\Delta} = \gamma B$$

$$\text{deno} = \alpha bp_1 + \beta bm_1 + \gamma bp_2 = \gamma(Abp_1 + Bbm_1 + bp_2) \text{ et } \Delta = ap_1 cm_1 - am_1 cp_1$$

De l'équation (10) on tire :

$$f_j'' = \frac{1}{(A.bp_1 + B.bm_1 + bp_2)} f_{j+2} + \frac{A-1}{(A.bp_1 + B.bm_1 + bp_2)} f_{j+1} - \frac{B+A}{(A.bp_1 + B.bm_1 + bp_2)} f_j + \frac{B}{(A.bp_1 + B.bm_1 + bp_2)} f_{j-1} + \theta(\Delta x^2) \dots \dots \dots (11)$$

**2-Sur l'axe :**

On développe  $f_{j+1}$  et  $f_{j+2}$  en série de Taylor autour de  $f_{j-1}$  de la manière classique.

$$f_{j+1} = f_j + a_2 f_j' + b_2 f_j'' + c_2 f_j''' \dots$$

$$f_{j+2} = f_{j+1} + a_3 f_{j+1}' + b_3 f_{j+1}'' + c_3 f_{j+1}''' \dots$$

On développe  $f_j$  en série de Taylor autour de  $f_{j-1}$ , puis on calcule les dérivées successives de  $f_j$  à partir de son développement autour de  $f_{j-1}$ , on obtient :

$$f_j = f_{j-1} + a_1 f_{j-1}' + b_1 f_{j-1}'' + c_1 f_{j-1}''' \dots$$

Les développements  $f_{j+1}$ ,  $f_j$  et  $f_{j+2}$  sont multipliés respectivement par  $\alpha, \beta, \gamma$ , alors

$\alpha f_{j+1} + \beta f_j + \gamma f_{j+2}$  donne :

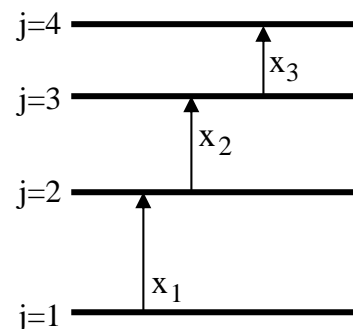
$$\gamma f_{j+2} + (\beta - \gamma) f_{j+1} - (\alpha - \beta) f_j - \alpha f_{j-1} = (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) f_{j-1}' + (\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3) f_{j-1}'' + (\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3) f_{j-1}''' \dots \dots \dots (12)$$

Avec :

$$a_1 = x_1, a_2 = x_2, a_3 = x_3$$

$$b_1 = \frac{x_1^2}{2}, b_2 = x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2}, b_3 = x_3(x_1 + x_2) + \frac{x_3^2}{2}$$

$$c_1 = \frac{x_1^3}{6}, c_2 = \frac{x_1 x_2}{2} (x_1 + x_2) + \frac{x_2^3}{6}, c_3 = \frac{x_3(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3)}{2}$$



**2-1-a-Dérivée première :**

➤ A trois points:

On élimine le coefficient de  $f_{j-1}''$  et on pose  $\gamma = 0$ , on obtient une équation pour les inconnues  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\alpha b_1 + \beta b_2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b_2}{b_1}$$

De l'équation (12), on tire  $f_{j-1}'$  et en remplace les coefficients, on trouve :

$$f'_{j-1} = -\frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} f_{j+1} + \frac{b_2 + b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} f_j - \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} f_{j-1} + \theta(\Delta x^2) \dots (13)$$

Pour un pas uniforme, on retrouve l'expression classique :

$$f'_{j-1} = \frac{-f_{j+1} + 4f_j - 3f_{j-1}}{2x} + \theta(\Delta x^2) \dots (14)$$

➤ A quatre points:

On élimine les coefficients de  $f''_{j-1}$  et  $f'''_{j-1}$  de l'équation (12), on obtient un système pour  $\alpha, \beta$ :

$$(*) \quad \begin{cases} (\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3) = 0 \\ (\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3) = 0 \end{cases}$$

Il reste :

$$\gamma f_{j+2} + (\beta - \gamma) f_{j+1} - (\alpha - \beta) f_j - \alpha f_{j-1} = (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) f'_{j-1} \dots (15)$$

La résolution du système (\*\*\*) donne :

$$\alpha = \gamma(b_2 c_3 - b_3 c_2) / \Delta = \gamma.A, \quad \beta = \gamma(c_1 b_3 - c_3 b_1) / \Delta = \gamma.B, \quad \Delta = b_1 c_2 - b_2 c_1.$$

De l'équation (15), on tire :

$$f'_{j-1} = -a p_0 f_{j+2} + b p_0 f_{j+1} + c p_0 f_j + d p_0 f_{j-1} + \theta(\Delta x^3) \dots (16)$$

Les coefficients sont calculés à partir de (15):

$$a p_0 = \frac{\gamma}{\text{deno}} = \frac{1}{A.a_1 + B.a_2 + a_3}, \quad b p_0 = \frac{(\beta - \gamma)}{\text{deno}} = \frac{B - 1}{A.a_1 + B.a_2 + a_3},$$

$$c p_0 = \frac{(\alpha - \beta)}{\text{deno}} + \frac{A - B}{A.a_1 + B.a_2 + a_3}, \quad d p_0 = \frac{-\gamma}{\text{deno}} = \frac{-1}{A.a_1 + B.a_2 + a_3}.$$

$$\text{deno} = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = \gamma(A.a_1 + B.a_2 + a_3)$$

Pour un pas uniforme, on retrouve l'expression :

$$f'_{j-1} = \frac{2f_{j+2} + 9f_{j+1} + 18f_j - 11f_{j-1}}{6x} + \theta(\Delta x^3) \dots (17)$$

### 3-A la paroi :

On développe  $f_j$  et  $f_{j-1}$  en série de Taylor autour de  $f_j$  de la manière classique.

$$f_j = f_{j+1} + a_2 f'_{j+2} + b_2 f''_{j+2} + c_2 f'''_{j+2}$$

$$f_{j-1} = f_j + a_3 f'_{j+2} + b_3 f''_{j+1} + c_3 f'''_{j+1}$$

On développe  $f_{j+1}$  en série de Taylor autour de  $f_{j+2}$ , puis on calcule les dérivées successives de  $f_{j+1}$  à partir de son développement autour de  $f_{j+2}$ , on obtient :

$$f_{j+1} = f_{j+2} + a_1 f'_{j+2} + b_1 f''_{j+2} + c_1 f'''_{j+2}$$

Les développements  $f_{j+1}, f_j$  et  $f_{j-1}$  sont multipliés respectivement par  $\alpha, \beta, \gamma : \alpha f_j + \beta f_{j-1} + \gamma f_{j+1}$ , donne :

$$-\alpha f_{j+2} + (\alpha - \beta) f_{j+1} + (\beta - \gamma) f_j + \gamma f_{j-1} = (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) f'_{j+2} + (\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3) f''_{j+2} + (\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3) f'''_{j+2} \dots \dots \dots (21)$$

Avec :

$$a_1 = -x_3 = -x, a_2 = -x_2 = -x, a_3 = -x_1 = -x$$

$$b_1 = \frac{x_3^2}{2} = \frac{x^2}{2}, b_2 = x_2 x_3 + \frac{x_2^2}{2} = \frac{3x^2}{2}, b_3 = x_1(x_2 + x_3) + \frac{x_1^2}{2} = \frac{5x^2}{2}$$

$$c_1 = \frac{-x_3^3}{6}, c_2 = \frac{-x_3 x_2}{2} (x_3 + x_2) - \frac{x_2^3}{6} = -\frac{7x^3}{6}, c_3 = \frac{-x_1(x_3 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3)}{2} - \frac{x_1^3}{6} = -19 \frac{x^3}{6}$$

3-1-a-Dérivée première :

➤ A trois points:

On élimine le coefficient de  $f''_{j+2}$  et on pose  $\gamma = 0$ , on obtient une équation pour les inconnues  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$-\alpha f_{j+2} + (\alpha - \beta) f_{j+1} + \beta f_j + \gamma f_{j-1} = (\alpha a_1 + \beta a_2) f'_{j+2} \dots \dots \dots (22)$$

$$\alpha b_1 + \beta b_2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b_2}{b_1}$$

On fait sortir  $f'_{j+2}$  de l'équation (22) et en remplace par  $\frac{\alpha}{\beta}$ , on trouve :

$$f'_{j+2} = -\frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} f_{j+2} + \frac{b_2 + b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} f_{j+1} - \frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} f_j + \theta(\Delta x^2) \dots \dots \dots (29)$$

Pour un pas uniforme, on l'expression :

$$f'_{j+2} = \frac{3f_{j+2} - 4f_{j+1} + f_j}{6x} + \theta(\Delta x^2) \dots \dots \dots (30)$$

➤ A quatre points:

On élimine les coefficients de  $f''_{j+2}$  et  $f'''_{j+2}$  de l'équation (21), on obtient le système :

$$(***) \begin{cases} (\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3) = 0 \\ (\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3) = 0 \end{cases}$$

Il reste :

$$-\alpha f_{j+2} + (\alpha - \beta)f_{j+1} + (\beta - \gamma)f_j + \gamma f_{j-1} = (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3)f'_{j+2} \dots\dots\dots(31)$$

La résolution du système (\*\*\*\*) donne les solutions  $\alpha, \beta$  en fonction de  $\gamma$  :

$$\alpha = \gamma(b_2c_3 - b_3c_2)/\Delta, \quad \beta = \gamma(b_3c_1 - b_1c_3)/\Delta, \quad \Delta = b_1c_2 - b_2c_1$$

L'équation (23) devient :

$$f'_{j+2} = -ap_1f_{j+2} + bp_1f_{j+1} + cp_1f_j + dp_1f_{j-1} + \theta(\Delta x^3) \dots\dots\dots(24)$$

avec :

$$ap_1 = \frac{\gamma}{\text{deno}}, \quad bp_1 = \frac{(\alpha - \beta)}{\text{deno}}, \quad cp_1 = \frac{(\beta - \alpha)}{\text{deno}}, \quad dp_1 = \frac{\gamma}{\text{deno}},$$

$$\text{deno} = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$$

Pour un pas uniforme, on retrouve l'expression classique :

$$f'_{j+2} = \frac{11f_{j+2} - 18f_{j+1} + 9f_j - 2f_{j-1}}{6x} + \theta(\Delta x^3) \dots\dots\dots(25)$$

## L'intégrale de Simpson à pas non uniforme

Pour calculer l'intégrale de Simpson, On considère une courbe d'équation parabolique pour chaque tranche. Dans une tranche  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ , la fonction prend la forme :

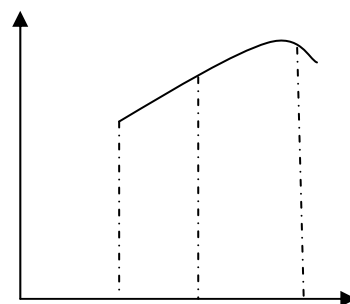
$$\left. \begin{array}{l} y_N = ax^2 + bx + c \\ y_{i-1} = ax_{i-1}^2 + bx_{i-1} + c \\ y_i = ax_i^2 + bx_i + c \\ y_{i+1} = ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{i-1}^2 & x_{i-1} & 1 \\ x_i^2 & x_i & 1 \\ x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$$

Les étapes à suivre sont les suivantes :

- ❖ Calculer les coefficients :  $a(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1})$   
 $b(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1})$   
 $c(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1})$

- ❖ Intégrer :  $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y dx = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = s_i$

- ❖ Sommer sur toutes les tranches  $i$  :  $S = \sum_{i=1}^{N-1} s_i$



On obtient :

$$\frac{y_{i-1} - y_i}{6\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \left[ \Delta x_1^2 (2\Delta x_1 + 3\Delta x_2) - (\Delta x_2^3) \right] + \frac{y_{i+1} - y_i}{6\Delta x_{i+1} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \left[ \Delta x_{i+1}^2 (2\Delta x_{i+1} + 3\Delta x_i) - (\Delta x_i^3) \right] + y_i (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$$

On fait  $\Delta x_i = \Delta x_{i+1} = \Delta x$ , on retrouve bien l'intégrale de Simpson classique :

$$S = \frac{1}{3} [y_{i-1} + y_{i+1} + 4y_i].$$

## LES EQUATIONS DE CONSERVATION

### Transformation de coordonnées

$$(\tau, x, r) \rightarrow (\tau, x, \eta) \text{ avec } \eta = \frac{r}{f(\tau)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\eta}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

### II Equation de continuité

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial \tau} = 0$$

Faisons  $v = w - \frac{\partial f}{\partial \tau}$  et appliquons les règles de transformation (1)

$$\eta f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \left( \eta \left( w - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \right)}{\partial \eta} = \eta f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\eta w)}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \Rightarrow \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta w)}{\partial \eta} = (1-f)\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \Rightarrow \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta w)}{\partial \eta} = S_0$$

### II Equation de l'impulsion

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( w - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\eta}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \eta} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( w - \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e f^2} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

En ajoutant de chaque coté du signe égal :  $w \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{R_e} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$  et en

réarrangeant, on aboutit à :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + F_0 \text{ avec : } F_0 = \frac{1-f^2}{f^2} \frac{1}{R_e} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{f-1}{f} w \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\eta-1) \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

### III Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie procède du même développement.