

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène Faculté
de Mathématiques



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
en MATHÉMATIQUES

Spécialité: Recherche Opérationnelle / *M*athématiques de *G*estion

par:

M^{elle} Karima GUELLALI

Thème

**Contribution à l'étude de la classe
des graphes de cercles tangents**

Soutenu publiquement le ١١/٠٦/٢٠١٢, devant le jury composé de :

M^r R. OUAFI, Professeur à l'USTHB

Président

M^r M. ABBAS, Professeur à l'USTHB

Directeur de mémoire

M^e Z. BENMEZIANE, Maître de conférences à l'USTHB

Examinatrice

*D*édicaces



À ma mère et à mon père

À la mémoire de ma grand-mère

À mon ange Sara

À mes sœurs et frères

À tous ceux qui me sont chers



*R*emerciements



Au terme de ce travail, il est agréable d'adresser mon remerciement à tous ceux qui m'ont prêté main forte pour sa réalisation.

*En premier lieu, j'exprime ma profonde et respectueuse gratitude à Monsieur **ABBAS Moncef**, Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene pour l'honneur qu'il m'a fait de bien vouloir encadrer mon travail et de me diriger patiemment.*

*J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur **Rachid OUAFI**, Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, pour l'honneur et le plaisir qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.*

*Mes remerciements vont également à Madame Zineb **BENMEZIANE**, Maître de conférences à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, qui a bien voulu examiner ce mémoire et participer au jury.*

Finalement, un merci tout spécial à ma famille pour son support inconditionnel ,et mes amis de m'avoir toujours soutenu.





T *able des matières*

Dédicaces.....	i
Remerciements.....	ii
Table des matières	iii
Table des Figures	v
Liste des Algorithmes	vii
Introduction générale.....	1
DÉFINITIONS ET NOTATIONS.....	4
1 Rappels sur les graphes :	5
1.1 Graphes non orientés :	6
1.2 Graphes orientés :	7
1.3 Définitions complémentaires :	8
2 Algorithme, complexité et optimisation :	9
3 Relations binaires :	11
3.1 Définitions et Propriétés :	11
3.2 Structures de préférence, définitions et représentations :	13
3.2.1 Représentation numérique :	13
3.2.2 Représentation graphique :	13
LES GRAPHES D'INTERSECTIONS.....	15
1 Quelques classes de graphes :	16
1.1 Graphes parfaits :	16
1.2 Graphes triangulés :	17
1.3 Graphes de comparabilité :	18
1.4 Graphes de co-comparabilités :	20
1.5 Graphes d'intervalles :	22
2 Graphes et ordres de cercles tangents :	24
2.1 Introduction et définitions :	24
2.2 Représentation numérique d'un ordre de cercles tangents :	26
3 Relations entre les graphes (ordres) de cercles tangents et d'autres classes de graphes (types d'ordres) :	28
3.1 Graphes de cercles tangents et les graphes d'intervalles :	28
3.2 Graphes de cercles tangents et les graphes sans \diamond :	
.....	28
3.3 Graphes de cercles tangents et les graphes scindés :	30

3.4	Graphes de cercles tangents et les graphes de trapèzes :	30
3.5	Graphes de cercles tangents et les graphes d'ellipses tangentes :	31
4	Conditions nécessaires pour un ordre (graphe) de cercles tangents :	32

LA PARTITION EN CLIQUES ET LA COLORATION DANS LES GRAPHE DE CTT..... 36

1	De la coloration minimum à la partition minimum en cliques :	37
2	La transitivité dans les graphes de cercles tangents :	37
2.1	La finitude et la complexité de l'algorithme :	38
2.2	Justification de l'algorithme 1 :	39
2.3	Exemples d'application :	39
2.3.1	Sur un cas transitif :	39
2.3.2	Sur un cas non transitif :	42
3	Problème de la partition minimum en cliques :	43
3.1	La coloration et les graphes parfaitement ordonnables :	44
3.2	La partition minimum en cliques dans les graphes de cercles tangents transitifs :	45
3.2.1	La finitude et la complexité de l'algorithme :	46
3.2.2	Justification de l'algorithme 3 :	46
3.2.3	Exemple d'application :	47
4	Problème de coloration :	50
4.1	La coloration dans les graphes de cercles tangents transitifs :	50
4.1.1	La finitude et la complexité de l'algorithme :	51
4.1.2	Justification de l'algorithme 4 :	52
4.1.3	Exemple d'application :	53

SOUS CLASSES DES GRAPHE DE CERCLES TANGENTS TRANSITIFS..... 57

1	Graphes sans \diamond et l'ordre total :	58
2	Graphes sans \diamond et le préordre total :	58
3	Graphes et ordres d'intervalles :	59
4	Graphes d'indifférence et structure de quasi-ordre :	60
5	Les graphes à seuil et les graphes de cercles tangents :	62
5.1	Définitions et propriétés :	62
5.2	Représentation des graphes à seuil par des cercles tangents :	63
5.3	Exemple d'application :	67
6	Graphe (ordre) d'arborescence comparabilité :	68
6.1	Définitions et propriétés :	68
6.2	Représentation des graphes d'arborescence comparabilité par des cercles tangents :	70
6.3	Exemple d'application :	73
7	Graphes d'arbres :	75
7.1	Définitions :	75
7.2	Représentation des graphes d'arbres par des cercles tangents :	76
7.3	Exemple d'application :	77

CONCLUSION GÉNÉRALE..... 81

BIBLIOGRAPHIE 83

Table des Figures



Figure I.1 : Graphe simple	6
Figure I.2 : Un multi graphe	6
Figure I.3 : Exemples de graphes complets	7
Figure I.4 : Représentation graphique d'une structure de préférence	14
Figure II.1 : Configurations minimales interdites pour un graphe de comparabilité (1.a) ou leurs complémentaires (1.b).....	20
Figure II.2 : Un graphe de Co-comparabilité et sa représentation par intersection d'un diagramme de fonctions.....	21
Figure II.3 : Configurations minimales interdites pour un ordre de co-comparabilité.....	21
Figure II.4 : Représentation d'intervalles sur une droite	22
Figure II.5 : Configurations minimales interdites pour un ordre d'intervalles.....	24
Figure II.6 : Intersection de cercles tangents	25
Figure II.7 : Ordre de cercles tangents	26
Figure II.8 : Graphe de cercles tangents	26
Figure II.9 : Représentation dans un plan euclidien	27
Figure II.10 : Exemple du complémentaire d'un graphe de cercles tangents qui n'est pas de cercles tangents	28
Figure II.11 : 	29
Figure II.12 : 	29
Figure II.13 : C_{\diamond} et sa représentation par des cercles tangents	29
Figure II.14 : Exemple d'un graphe de cercles tangents qui n'est pas représentatif de trapèzes.....	31
Figure II.15 : Exemple d'ordre de trapèzes qui n'est pas représentatif de cercles tangents	31
Figure II.16 : Exemple d'ordre d'ellipses tangentes qui n'est pas représentatif de cercles tangents.....	32
Figure II.17 : Une configuration interdite de type $\diamond(0, \diamond, 0)$ (dans cet exemple $\diamond = 3$)	32
Figure II.18 : Configurations minimales interdites contenues dans $\diamond(0, \diamond, 0)$	33
Figure II.19 : Configurations minimales interdites de type $\diamond(\diamond, 0, \diamond)$	34
Figure II.20 : Configurations minimales interdites de type $\diamond\diamond(1,0,0)$ $\diamond\diamond(0,0,1)$ $\diamond\diamond(1,0,1)$	34
Figure II.21 : Un contre-exemple d'ordre de cercles tangents à 9 sommets.....	35
Figure III.1 : Représentation d'intersection de cercles tangents	40
Figure III.2 : Le graphe associé à la représentation d'intersection de cercles tangents (Figure III.1).....	40
Figure III.3 : Représentation d'intersection de cercles tangents et son graphe associé	42
Figure III.4 : Partition minimum d'un ensemble de cercles tangents transitifs en cliques ..	49
Figure III.5 : Partition minimum en cliques des sommets du graphe de cercles tangents transitifs	50

Figure III.6 : Coloration de la représentation du graphe de cercles tangents transitifs 50

Figure III.7 : Le graphe associé à la coloration de cercles tangents transitifs..... 56


Figure IV.1 :  58



Figure IV.2 :  59

Figure IV.3 : Graphe d'intervalles propres et sa représentation par des intervalles 64

Figure IV.ξ : 	70
Figure IV.ο : Configurations minimales interdites pour un graphe d'indifférence	71
Figure IV.ϑ : Configurations minimales interdites pour un quasi-ordre.	71
Figure IV.ϒ : Configurations minimales interdites pour un graphe à seuil	72
Figure IV.ϛ : Exemple d'un graphe à seuil	73
Figure IV.Ϝ : Une représentation d'un graphe à seuil (Figure IV.ϛ) par intervalles	73
Figure IV.ϝ : Une représentation d'un graphe à seuil (Figure IV.ϛ) par intervalles ayant deux longueurs distinctes	74
Figure IV.Ϟ : Représentation d'un graphe à seuil (figure IV.ϛ) par des cercles tangents..	74
Figure IV.ϟ : Configurations minimales interdites pour un graphe d'arborescence- comparabilité.....	78
Figure IV.Ϡ : Graphe d'intervalles élémentaires	79
Figure IV.ϡ : Un arbre d'intersection de cliques d'un graphe d'arborescence comparabilité	70
Figure IV.Ϣ : Exemple d'un graphe d'arborescence comparabilité	73
Figure IV.ϣ : Une représentation du graphe d'arborescence comparabilité (Figure IV.Ϣ) par intervalles.....	74
Figure IV.Ϥ : Représentation d'un graphe d'arborescence comparabilité (Figure IV.Ϣ) par des cercles tangents.....	75
Figure IV.ϥ : Un arbre	76
Figure IV.Ϧ : Une forêt	76
Figure IV.ϧ : Un graphe d'arbre	77
Figure IV.Ϩ : Une représentation d'un graphe d'arbre (figure IV.ϧ) par cercles tangents	79
Figure IV.ϩ : Classes de graphes parfaits qui sont en relation avec les graphes de cercles tangents	80

Liste des Algorithmes

Algorithme 1 :	<i>Algorithme testant la transitivité d'un graphe de cercles tangents.....</i>	<i>38</i>
Algorithme 2 :	<i>Algorithme glouton pour la résolution du problème de coloration.....</i>	<i>45</i>
Algorithme 3 :	<i>Algorithme de partition minimum en cliques des sommets d'un graphe de cercles tangents transitifs.....</i>	<i>40</i>
Algorithme 4 :	<i>Algorithme de coloration d'un graphe de cercles tangents transitifs.....</i>	<i>01</i>

Introduction générale

On regroupe généralement sous le titre de « théorie des graphes », des problèmes assez variés ont tous comme caractérisation commune de pouvoir être visualisés : des points (appelés sommets) représentant des individus, des objets, des situations, sont joints par des flèches ou des lignes (appelés arcs ou arêtes) symbolisant les relations existantes entre eux.

D'abord apparue sous forme de curiosités mathématiques (les ponts de Königsberg) puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (Kirchhoff), la théorie des graphes est un très vaste domaine, elle suscite un grand intérêt, car elle est utilisée dans un grand nombre de disciplines (mathématiques, physique, chimie, économie... etc.).

Beaucoup de problèmes sont difficiles à résoudre pour des graphes généraux, mais faciles pour des graphes particuliers. Quand on a affaire à un graphe, il est donc important de savoir à quelle classe de graphes il appartient. En effet, selon la catégorie du graphe, on peut utiliser la théorie correspondante.

Parmi ces catégories de graphes :

- Les graphes parfaits qui constituent une des classes de graphes les plus étudiées dans la littérature. (Berge et Chvátal [10]) ou (Ramirez Alfonsín et Reed [11]).
- Les graphes d'intersections, qui sont définis en considérant une famille \mathcal{F} d'ensembles non vides. En lui associant le graphe d'intersection $\diamond_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} obtenu comme suit : chaque ensemble de \mathcal{F} est représenté par exactement un sommet de $\diamond_{\mathcal{F}}$, et deux sommets de $\diamond_{\mathcal{F}}$ sont adjacents si et seulement si les ensembles correspondants de \mathcal{F} sont intersectés. On dira que la famille \mathcal{F} est un modèle d'intersection de $\diamond_{\mathcal{F}}$.

Ces derniers possèdent de nombreuses propriétés et peuvent modéliser de multiples problèmes de recherche opérationnelle, biologie, compilation... etc.

L'aide à la décision, comme le souligne Vincke (1989), vise à fournir à un décideur des outils lui permettant de progresser dans la résolution d'un problème de décision, où plusieurs points de vue, souvent contradictoires, doivent être pris en compte.

Particulièrement, les graphes parfaits sont à la base du développement de la théorie de la modélisation des préférences. En effet, des chercheurs ont traduit certains résultats connus sur la théorie des graphes en modélisation des préférences et vice-versa (Golumbic 1980, Fishburn 1980, Abbas 1994).

Dans ce présent travail, on essaiera d'ajouter un plus aux graphes de cercles tangents. Cette classe de graphe introduite par M. Abbas (1994) [12] dans sa dissertation de doctorat



(voir aussi l'article de M. Abbas (1994) [1]) et qui n'a pas subi à notre connaissance, d'autres études approfondies. À la fois, une classe de graphe d'intersection, héréditaire, admet une représentation géométrique dans le plan et la structure d'ordre correspondante est quasi-transitive. Cette structure peut être d'important intérêt en aide multicritère à la décision en général.

Ce mémoire est répertorié en quatre chapitres :

Les deux premiers chapitres sont consacrés à quelques définitions nécessaires pour la compréhension du reste de ce mémoire.

Dans le premier chapitre, nous donnerons les éléments essentiels et communs aux différents chapitres. Après avoir introduit la notion des graphes simples et des graphes parfaits en section 1, nous rappellerons celle d'algorithme et de la théorie de la complexité en section 2, et finalement nous définirons la notion de relation binaire et la structure de préférence en section 3.

Le deuxième chapitre est consacré aux graphes d'intersections qui se décomposent en plusieurs catégories.

En premier lieu on définira les graphes d'intersection, puis on rappellera les définitions et les propriétés connues sur quelques classes de graphes d'intersection. En particulier les graphes et les ordres de cercles tangents, ainsi que leurs représentations, propriétés et relations avec d'autres classes de graphes (types d'ordres), et en fin on citera quelques conditions nécessaires pour qu'un ordre (graphe) soit de cercles tangents.

Dans le troisième chapitre, on traitera deux problèmes d'optimisation dans la classe des graphes de cercles tangents transitifs à savoir le problème de la partition minimum en cliques, et le problème de coloration.

Après une introduction, on évoquera le passage de la coloration minimum d'un graphe à la partition minimum en cliques dans le graphe complémentaire. En particulier, dans les graphes parfaitement ordonnables qui possèdent des propriétés remarquables concernant la coloration des graphes transitivement orientables. Pour cela, on donnera un algorithme testant la transitivité dans un graphe de cercles tangents, ensuite on proposera deux algorithmes polynomiaux de complexité $O(n^2)$ pour des problèmes connus NP difficiles dans le cas général : le problème de la partition minimum en cliques et la coloration minimum dans les graphes de cercles tangents transitifs (CTT).



Le chapitre IV sera consacré à l'étude de l'inclusion de trois classes de graphes dans la classe des graphes de cercles tangents à savoir, les graphes à seuil [1] [15] [20], les graphes d'arborescence comparabilité (Wolk [16] [17] et Golombic [18]) et les graphes d'arbres.

Après un rappel sur quelques structures de préférence qui sont des cas particuliers de la structure d'ordre d'intervalles, et leurs classes de graphes correspondantes, on proposera une méthode constructive de représentation des graphes précédemment cités, par des cercles tangents. Enfin, on donnera une hiérarchie de l'ensemble de ces classes.

*“La science ne sert qu'à donner une idée
de l'étendue de notre ignorance.”*

Lamennais



DÉFINITIONS ET NOTATIONS



1	Rappels sur les graphes :.....	5
1.1	Graphes non orientés :.....	6
1.2	Graphes orientés :.....	7
1.3	Définitions complémentaires :.....	8
2	Algorithme, complexité et optimisation :.....	9
3	Relations binaires :.....	11
3.1	Définitions et Propriétés :.....	11
3.2	Structures de préférence, définitions et représentations :.....	13
3.2.1	Représentation numérique :.....	13
3.2.2	Représentation graphique :.....	13



Nous introduisons dans ce chapitre, les définitions de bases ainsi que les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes qui seront utilisés tout au long de ce document.

Nous tâcherons aussi, à présenter les principaux concepts utilisés en modélisation des préférences, munis des définitions et résultats les plus classiques et qui ont un lien avec les ordres et les graphes présentés dans ce mémoire. Pour plus de détails sur ces concepts, voir Aleskerov et Monjardet (2002) [5], Fishburn (1980) [28] Fishburn (1970) [29] Krantz, Luce, Suppes et Tversky (1971) [49], Pirlot et Vincke (1997) [59], Roberts (1979) [60] ou Roubens et Vincke (1980) [66].

Ce chapitre est organisé comme suit. On définit en section 1 quelques notions et définitions de base de la théorie des graphes. La section 2 est consacrée aux définitions d’algorithme, complexité et optimisation. On définit en section 3 la notion de relation binaire qui est l’outil central dans la plupart des modèles de préférence. Ainsi que la définition et les représentations d’une structure de préférence.

Tous les ensembles considérés par la suite sont supposés finis et non vides.

¶ **Rappels sur les graphes :**

Un graphe représente une relation entre divers éléments d'un ensemble. La théorie des graphes permet de rendre compte de manière efficace d'une multitude de problèmes dans tous les domaines. Voici quelques définitions et notations essentielles, issues pour la plupart des ouvrages de Claude Berge [^] [^], Gondran, M. et Minoux, M. [^] ainsi que West [^] et M. Golumbic [^]. Tout d'abord, définissons la notion de graphe.

Définition ¶ : (graphe)

Un graphe $G = (V, E)$ est le couple constitué par :

- un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
- une famille $E = \{(v_i, v_j) / v_i \in V, v_j \in V\}$.

Les éléments de V seront appelés *sommets* ou *nœuds*. Si les éléments de V sont orientés, le graphe sera dit *orienté* et ces éléments seront appelés *arcs*, sinon le graphe sera dit *non orienté* et l'on parlera d'*arêtes*. Graphiquement, c'est un trait qui symbolise une *arête*, et un *arc* peut se représenter à l'aide d'une flèche.

Dans le cas d'un graphe orienté, un arc (v_i, v_j) a pour *extrémité initiale* le sommet

v_i appelé aussi *prédécesseur* de v_j , et pour *extrémité terminale* le sommet v_j appelé aussi

successeur de v_i ; si c'est une arête, on parlera indifféremment d'extrémités. Les sommets

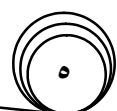
v_i et v_j sont alors dits *adjacents* ou *voisins* dans le graphe et ils sont *incidents* à l'arête (v_i, v_j) . L'*ordre* d'un graphe G correspond à son nombre de sommets. Un arc de la forme (v_i, v_i) est appelé une *boucle*.

Le *degré* d'un sommet est égal à son nombre de voisins. Dans le cas d'un graphe orienté, on parlera de *degré entrant* d'un sommet v_i pour les arcs dont v_i est l'extrémité terminale, et de *degré sortant* pour les arcs dont v_i est l'extrémité initiale. Un sommet ayant le degré égal à 0 est dit sommet *isolé*.

Classe de graphe :

Ensemble (qui peut être infini) de graphes (finis) défini par une propriété caractéristique.

Exemple : arbres, graphes triangulés, graphes bipartis.



1.1 Graphes non orientés :

Les notions suivantes sont définies pour les graphes non orientés.

Définition 1 : (sous-graphe engendré (induit))

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sous graphe G' de G engendré par $V' \subseteq V$ est défini par (V', E') tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq \{(u, v) \in E / u, v \in V'\}$.

Un tel graphe est dit aussi sous-graphe induit de G .

Définition 2 : (sous-graphe partiel)

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sous graphe partiel de G est un graphe

$G' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq \{(u, v) \in E / u, v \in V'\}$.

Autrement dit, le sous- graphe partiel G' correspond au sous-graphe de G engendré par V' duquel on aurait enlevé un ensemble d'arêtes.

Définition 3 : (Graphe simple)

Un graphe G est dit simple si :

- il est sans boucles,
- il n'y a jamais plus d'une arête entre deux sommets quelconques.

Un graphe qui n'est pas simple est appelé multigraphe.

Dans ce document, sauf mention du contraire, le terme « graphe » désigne toujours un graphe simple.

Exemples :

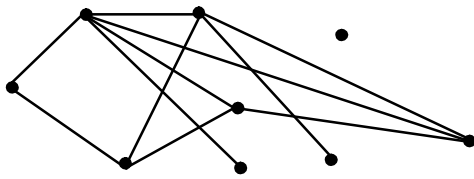


Figure I.1 : Graphe simple

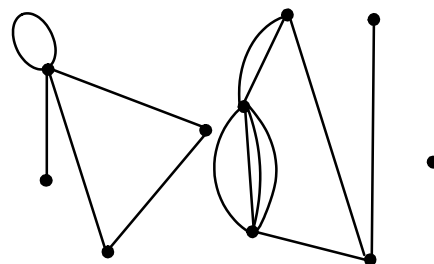


Figure I.2 : Un multi graphe

Définition 4 : (Graphe complémentaire)

Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$, le graphe complémentaire $\bar{G} = (V, \bar{E})$ a le même ensemble de sommets que G et comme arêtes, les arêtes complémentaires à E définies par $\{(u, v) \in \bar{E} / (u, v) \notin E\}$.

Définition 5 : (chaîne)

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe non orienté.



Une chaîne C du graphe G est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_n telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \text{ on a } \{v_i, v_{i+1}\} \in E.$$

On dit que le sommet v_1 (resp. v_n) *extrémité* de $C = v_1 v_2 \dots v_n$.
L'entier $n - 1$

s'appelle la longueur de la chaîne C . Lorsque $v_1 = v_n$, on dit que C est un *cycle*.

De plus, une chaîne qui ne contient pas deux fois la même arête est dite *simple* et une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*

Définition \forall : (Graphe connexe)

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si et seulement si pour toute paire de sommets distincts v et w , il existe une chaîne reliant ces deux sommets.

Définition \wedge : (composante connexe)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

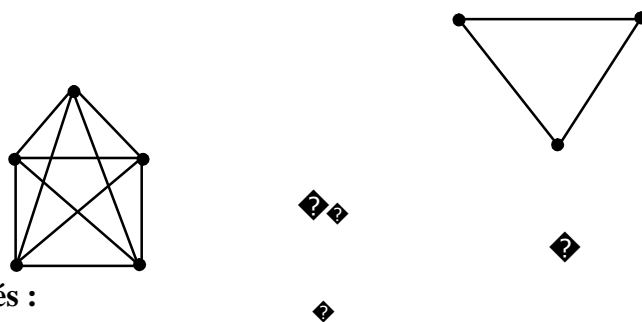
On appelle composante connexe de G , un sous-graphe $G' = (V', E')$ connexe maximal (pour l'inclusion) : il n'est pas possible d'ajouter à V' d'autres sommets en conservant la connexité du sous-graphe.

Définition \forall : (Graphe complet)

Un graphe $G = (V, E)$ est complet lorsque tous les sommets de V sont deux à deux adjacents.

On note en général, un graphe complet à n sommets K_n et on l'appelle clique à n sommets. La taille de la plus grande clique d'un graphe s'appelle *le nombre de densité* et est notée $\omega(G)$.

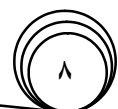
Exemples :



1.2 Graphes orientés :

Figure I.2 : Exemples de graphes complets

Dans de nombreuses situations, on doit considérer des graphes orientés dits aussi



~~digraphes, ce qui revient à donner un sens de parcours aux arcs. L'intérêt est évident~~

pour les circuits électriques, la circulation routière ou encore les arbres généalogiques.

Nous introduisons maintenant certains concepts relatifs aux graphes orientés utilisés

dans ce document, les mêmes notions existent, mais sous d'autres appellations.

Définition 1.1 : (chemin)

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.

un chemin du graphe G est une suite de sommets $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de V telle que pour tout

$i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

On dit que v_1 est l'extrémité initiale, v_n l'extrémité finale et $n - 1$ la longueur du chemin C .

Le chemin C est dit *simple* s'il ne contient pas deux fois le même arc, et *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet. Lorsque $v_1 = v_n$ on dit que C est un *circuit*.

Définition 1.2 : (Graphe fortement connexe)

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.

G est dit *fortement connexe* si pour tout couple (u, v) de sommets distincts de V , il existe un chemin de u à v et un chemin de v à u .

Un sous-graphe fortement connexe maximal est appelé *composante fortement connexe*.

1.3 Définitions complémentaires :

En cite quelques définitions complémentaires utilisées dans ce mémoire.

Définition 1.3 : (Corde)

Une corde est un arc qui relie deux sommets non consécutifs d'un cycle ou d'un circuit élémentaire.

Définition 1.4 : (trou et anti-trou)

Un trou est un cycle sans cordes. Un anti-trou est le complémentaire d'un trou.

Définition 1.5 : (Ensemble stable)

Soit un graphe simple $G = (V, E)$; un ensemble $S \subset V$ est dit stable si deux sommets distincts quelconques de S ne sont jamais adjacents.

Le *nombre de stabilité* d'un graphe G est $\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|$, où \mathcal{S} est la famille des

ensembles stables du graphe G .



Un ensemble stable sera dit *maximum* si son cardinal est égal au nombre de stabilité, et *maximal* si l'ajout d'un sommet quelconque à cet ensemble lui fait perdre sa propriété de stabilité.

Définition 1.10 : (Coloration et k-coloration)

Une coloration du graphe $G = (V, E)$ est l'affectation d'une couleur $c(v)$ à chaque sommet tel que $c(v) \neq c(w)$ pour toute arête $(v, w) \in E$. Si le nombre de couleurs utilisé est k , la coloration de G est dite une k -coloration.

La valeur minimale de k pour laquelle une k -coloration est réalisable est appelée *nombre chromatique du graphe*, noté $\chi(G)$. Résoudre le problème de coloration pour un graphe consiste à trouver son nombre chromatique.

Définition 1.11 : (Classe héréditaire)

Si G un graphe tel que $G \in \mathcal{C}$, et G' sous-graphe induit de G , alors $G' \in \mathcal{C}$.

Exemple : graphes bipartis, forêts, mais pas arbres en général.

Définition 1.12 : (Graphes semi-orientés)

Nous désignerons par un graphe semi-orienté un graphe construit sur un ensemble de sommets et dont les liens peuvent être des arcs ou des arêtes.

Définition 1.13 : (graphe linéaire)

Un graphe linéaire est un graphe dont les sommets respectent un ordonnancement linéaire (c.-à-d. ordre sur une droite).

1.4 Algorithme, complexité et optimisation :

Un Algorithme est une méthode de résolution de problème énoncée sous la forme d'une série d'opérations à effectuer.

L'importance de la réduction du temps de calcul pour minimiser les coûts engendrés par les machines a incité les chercheurs en théorie des graphes à trouver des algorithmes efficaces et polynomiales pour résoudre les problèmes, d'où la notion de *complexité algorithmique*.

La *complexité d'un algorithme* est la mesure du nombre d'opérations élémentaires (c.-à-d. indivisibles) qu'il effectue sur les entrées du problème. Elle est par conséquent exprimée en fonction de la taille des entrées du problème.



Dans l'idéal, un algorithme devrait être facile à comprendre, utiliser une place mémoire minimale et avoir un temps d'exécution optimal. Mais en pratique, il n'est pas toujours facile de concilier tous ces objectifs. Dans ce but, J-Edmonds a introduit en 1970 [16] la notion d'algorithme efficace ou polynomial.

Un algorithme est dit *polynomial* ou *efficace* si le nombre d'opérations élémentaires $O(n)$ nécessaires pour résoudre un exemple de taille n est borné par un polynôme en n , c.-à-d. $O(n) \leq c \cdot n^d$ (c et d étant des constantes). Un tel algorithme a une complexité

$O(n^d)$.

Étant donnés deux algorithmes A et B pour résoudre un problème, A est dit *plus efficace* que B si sa complexité est inférieure à celle de B.

Un problème est dit de *décision* lorsque la réponse à la question qu'il pose est soit *oui*, soit *non*. Cette réponse est fournie par un algorithme dont le temps d'exécution traduit la complexité du problème.

- La classe P est l'ensemble des problèmes de décision solubles en temps polynomial, c.-à-d. pour lesquels il existe un algorithme qui s'exécute en un nombre d'opérations élémentaires proportionnel à un polynôme en la taille de l'instance. On dit que les problèmes de la classe P sont *faciles*.
- La classe NP (non déterministe polynomial) désigne l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels il existe un certificat permettant de prouver en temps polynomial que la réponse, pour une instance donnée, est bien « oui ».

Dans le cadre des problèmes de décision, une réduction permet de ramener la décidabilité d'un problème à celle d'un autre problème. Étant donnés deux problèmes de décision A et B , une *réduction polynomiale* de A à B est une fonction qui à une instance

x de A associe une instance $f(x)$ de B en temps polynomial, et telle que x et $f(x)$ ont des réponses équivalentes.

- La classe **NP-difficile** est l'ensemble des problèmes de décision auxquels n'importe quel problème de **NP** peut se réduire polynomialement. Ces problèmes n'admettent à priori pas d'algorithme polynomial pour les résoudre.
- La classe **NP-complet** est l'ensemble des problèmes NP-difficiles appartenant à la

classe NP. Ce sont donc les problèmes de NP les plus difficiles à résoudre.

Les quatre problèmes classiques d'optimisation combinatoire dans un graphe (stable maximum, clique maximum, coloration minimale, partition minimale en cliques) sont des exemples de problèmes NP – complets.

Le lecteur intéressé trouvera dans le livre de Gary et Jonson [34] une longue liste de problèmes NP-complets et NP-difficiles. Pour plus de détails voir aussi (Cormen T., Leiserson C. et Rivest R. (1994)) [19] et (Tarjan R.E. (1983)) [77].

2 Relations binaires :

L'objet de cette section est de rappeler un ensemble de définitions, notations et théorèmes liés aux relations binaires, structure de préférence et aide à la décision en général, qui seront utilisés tout au long de ce document.

Les définitions et les résultats rappelés ici sont pris de Roubens et Vincke (1980) [76].

2.1 Définitions et Propriétés :

Définition 19 : (relation binaire)

Soit V un ensemble fini, non vide, d'éléments x, y, z, \dots (Objets, décisions, candidats, alternatives... etc.). Une relation binaire R sur V est un sous-ensemble du produit cartésien $V \times V$ ($R \subset V \times V$). Si le couple (x, y) est un élément de R , on notera indifféremment $(x, y) \in R$ ou xRy .

Nous rappelons les définitions suivantes :

- La relation inverse de $R : R^{-1} = \{(x, y) \in V \times V : (y, x) \in R\}$ Notée également R^* .
- La relation complémentaire de $R : R^c = \{(x, y) \in V \times V : (x, y) \notin R\}$.
- La relation duale de $R : R^d = \{(x, y) \in V \times V : (y, x) \notin R\}$.
- La partie symétrique de $R : R^s = \{(x, y) \in R : (y, x) \in R\}$.
- La partie asymétrique de $R : R^a = \{(x, y) \in R : (y, x) \notin R\}$.

Une relation binaire définie sur un ensemble V est :

- Réflexive $xRx, \forall x \in V$
- Irréflexive $\neg(xRx), \forall x \in V$
- Symétrique $xRy \Rightarrow yRx, \forall x, y \in V$
- Antisymétrique $xRy, yRx \Rightarrow x = y, \forall x, y \in V$
- Asymétrique $xRy \Rightarrow \neg(yRx), \forall x, y \in V$

- Complète ou Totale $\mathbb{R} \mathbb{R}, \forall, \in, \neq$

- Fortement complète $\forall x, y \in E, \exists z \in E, x \mathcal{R} z \wedge y \mathcal{R} z$
- Transitive $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z, \forall x, y, z \in E$
- Relation de ferrers $x \mathcal{R} y, y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z, \forall x, y, z \in E$

Soient deux relations binaires \mathcal{R} et \mathcal{S} définies sur un même ensemble V , on note :

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \iff \forall x, y \in V: x \mathcal{R} y \Rightarrow x \mathcal{S} y$$

Ces propriétés permettent de définir les relations particulières suivantes

Un *ordre partiel* P est caractérisé par une paire $P = (E, \leq_P)$ appelé *poset*. E étant un ensemble d'éléments, et " \leq_P " (" $x \leq_P y$ " " $x \leq y$ ") une relation d'ordre partiel sur E , donc toute relation \leq_P sur $E \times E$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Pour

$x, y \in E, x \leq_P y$ est interprété comme x est plus petit ou égal à y . De la même façon,

$x <_P y$ signifie que $x \leq_P y \wedge x \neq y$. On dit que x est couvert par y dans P lorsque

$x <_P y$ dans P et il n'existe pas de point $z \in E$ tel que $x <_P z <_P y$. Un élément x

est minimal (respectivement maximal) dans P s'il n'existe aucun élément y tel que

$y \leq_P x$ (respectivement $x \leq_P y$).

Soit $P = (E, \leq_P)$ un poset et $x, y \in E, x \neq y$. On dit que x et y sont

comparables dans P si on a : $x <_P y$ ou $y <_P x$ dans P . Si ni $x <_P y$ ni $y <_P x$ dans P , alors

x et y sont *incomparables*.

Un ordre partiel $P = (E, \leq_P)$ est un ordre total (aussi appelé *ordre linéaire* ou ordre complet) si pour tout couple $(x, y) \in E \times E$, la relation $x \leq_P y$ ou la relation $y \leq_P x$ est vérifiée. Dans ce cas, toute paire de E est comparable dans P .

A un ensemble ordonné sont naturellement associés différents graphes. Chacun de ces graphes correspond à des aspects particuliers de l'ensemble ordonné et intervient dans l'étude de celui-ci. Nous définissons seulement les graphes de comparabilité et d'incomparabilité qui nous serviront par la suite.

On associe à un poset $P = (E, \leq_P)$ deux graphes $G_P = (E, \mathcal{C}_P)$ et $G'_P = (E, \mathcal{I}_P)$

vérifiant :

- $\mathcal{C} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe de comparabilité dont les éléments de \mathcal{C} consistent en les paires de sommets comparables dans P ;
- $\mathcal{C}' = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$ est un graphe d'incomparabilité dont les éléments de \mathcal{C}' consistent en les paires de sommets incomparables dans P ;
- $\mathcal{C} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et $\mathcal{C}' = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$ étant complémentaires.

- Un arc de \diamond vers \diamond (resp. de \diamond vers \diamond) si \diamond est préféré à \diamond (resp. \diamond préféré à \diamond),
- Une arête entre \diamond et \diamond s'il y a indifférence entre \diamond et \diamond .
- Ni arc, ni arête entre \diamond et \diamond s'il ya incomparabilité.

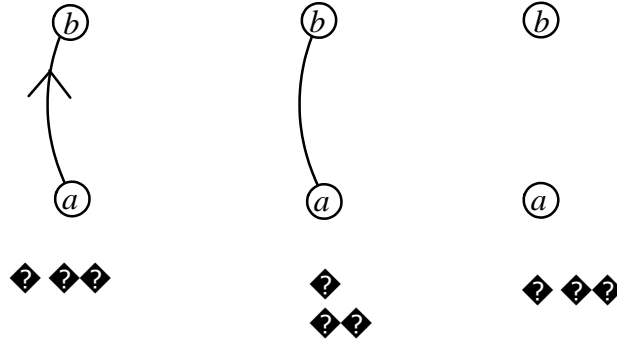


Figure I.4 : Représentation graphique d'une structure de préférence

Dans tout ce qui suit, \diamond est supposé vide.

Ce type de représentation permet de traduire directement certains résultats sur la théorie des graphes en modélisation des préférences et vice versa. Il a été largement étudié par Abbas(1994) [3] qui a construit plusieurs structures de préférence en partant d'une classe de graphe bien précise. Il a été également utilisé auparavant par Fishburn (1980) [28] pour faire le lien entre les graphes d'intervalles et les ordres d'intervalles.

LES GRAPHES D'INTERSECTIONS



1	Quelques classes de graphes :	16
1.1	Graphes parfaits :	16
1.2	Graphes triangulés :	17
1.3	Graphes de comparabilité :	18
1.4	Graphes de co-comparabilités :	20
1.5	Graphes d'intervalles :	22
2	Graphes et ordres de cercles tangents :	24
2.1	Introduction et définitions :	24
2.2	Représentation numérique d'un ordre de cercles tangents :	26
3	Relations entre les graphes (ordres) de cercles tangents et d'autres classes de graphes (types d'ordres) :	28
3.1	Graphes de cercles tangents et les graphes d'intervalles :	28
3.2	Graphes de cercles tangents et les graphes sans \diamond :	28
3.3	Graphes de cercles tangents et les graphes scindés :	30
3.4	Graphes de cercles tangents et les graphes de trapèzes :	30
3.5	Graphes de cercles tangents et les graphes d'ellipses tangentes :	31
4	Conditions nécessaires pour un ordre (graphe) de cercles tangents : ...	32



La famille de graphes d'intersection se décompose en plusieurs catégories, qui possèdent des particularités plus ou moins remarquables. Ainsi, certains problèmes qui sont NP-complets dans le cas général peuvent trouver ici des solutions polynomiales, selon le type de graphe.

Ce chapitre se compose de cinq sections, après la définition de graphes d'intersections on rappellera en section 1, les définitions de quelques classes de graphes d'intersections et leurs propriétés connues. Dans la section 2, on parlera des graphes et des ordres de cercles tangents, leur représentation numérique et leurs propriétés. La section 3 est consacrée aux relations entre les graphes (ordres) de cercles tangents et d'autres classes de graphes (types d'ordres). Dans la section 4, on donnera quelques conditions nécessaires pour qu'un ordre (graphe) soit de cercles tangents.

Définition 1 :

Soit \mathcal{F} une famille d'ensembles non vides. Le graphe des intersections de \mathcal{F} est obtenu en représentant chaque ensemble de \mathcal{F} par un sommet et en reliant deux sommets par une arête si et seulement si leurs ensembles correspondants intersectés.

Pour plus de détails sur les graphes d'intersection voir [10].

1 Quelques classes de graphes :

Dans cette section, nous définissons précisément quelques classes de graphes d'intersections. Certaines d'entre elles n'apparaîtront que brièvement, d'autres seront omniprésentes comme par exemple les graphes d'intervalles et les graphes de comparabilités.

1.1 Graphes parfaits :

Suite aux travaux de C.E Schannon [13] [14] en théorie de l'information sur la capacité d'un canal de communication, C. Berge a introduit la notion de graphes parfaits [15] [16]. Un graphe G est parfait si et seulement si il ne contient aucun trou et aucun anti-trou comme sous-graphe induit. C. Berge a proposé deux conjectures afin de caractériser cette catégorie, et qui portent les noms du théorème faible des graphes parfaits et le théorème fort des graphes parfaits depuis qu'elles ont été démontrées en 1972, respectivement [17]. La première par Lovasz [18] et la deuxième par Chudnovsky et al. [19, 20] (Voir aussi [21]).

Ces graphes ont des propriétés qui rendent certains problèmes plus faciles à résoudre (Golombic [22]). Ce livre contient de nombreuses références sur le sujet des graphes parfaits (voir aussi [23, 24, 25]). Et pour voir les structures importantes liées aux graphes parfaits, le lecteur peut consulter l'article de P. Seymour [26].

La plupart des graphes que nous allons présenter par la suite sont parfaits.

Présentant maintenant quelques relations et propriétés relatives aux graphes de cette classe.

La première relation lie le nombre de stabilité avec le nombre minimum de cliques qui partitionnent l'ensemble des sommets, appelé aussi nombre de couverture de \mathcal{F} , $\chi(\mathcal{F})$. Dans le cas général, on a $\chi(\mathcal{F}) \leq \alpha(\mathcal{F})$ [9].

Définition 1 : (Graphe α -parfait)

Un graphe $G = (V, E)$ est α -parfait si $\forall A \subset V$ le sous graphes G_A de G induit par A

vérifie

$$\chi(G_A) = \alpha(|A|)$$

La deuxième relation lie le nombre chromatique du graphe avec la taille de la plus grande clique. Dans le cas général, la relation entre ces deux grandeurs est la suivante:

$$\chi(G) \geq \omega(G) \quad [9]$$

Définition 2 : (graphe χ -parfait)

Un graphe $G = (V, E)$ est χ -parfait si $\forall A \subset V$ le sous graphes G_A de G induit par A vérifie

$$\chi(G_A) = |A|$$

Il est établi que G est χ -parfait si et seulement si G est α -parfait. Ce résultat a été démontré par Lovasz en 1972 [10].

Théorème 1 : (Théorème faible des Graphes parfaits [10] (Lovasz))

Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.

Un cycle élémentaire impair sans corde de longueur supérieure à 3 n'est pas un graphe parfait, de même que le graphe complémentaire d'un tel cycle. Si un graphe est parfait, alors il ne contient pas comme sous-graphe induit de cycle impair sans corde de longueur supérieure à 3 (C_{2k+1} ($k \geq 2$)), ni de complémentaires de tels cycles ($\overline{C_{2k+1}}$ ($k \geq 2$)). Berge a conjecturé que cette condition est suffisante pour assurer la perfection. Une conjecture qui est devenue un théorème en 2002.

Théorème 2 : (Théorème fort des Graphes parfaits [11]).

Un graphe est parfait si et seulement s'il est sans trou impair ni anti-trou impair.

Pour tout graphe G , $\chi(G) = \overline{\omega(G)}$, et de même $\omega(G) = \overline{\chi(G)}$.

Voyons maintenant quelques catégories de graphes d'intersections.

1.2 Graphes triangulés :

La notion de graphe triangulé a été introduite par Hajnal et Suranyi [46].

Définition 4 : (graphe triangulé)

Un graphe G est dit graphe triangulé si tout cycle de longueur > 3 admet une corde $[x, y]$.

Tout sous graphe d'un graphe triangulé est un graphe triangulé. Les graphes triangulés sont des graphes parfaits. [46]

Une autre caractérisation des graphes triangulés est donnée par les ordres d'élimination simplicial.

Définition 5 : (sommet simplicial)

On dit qu'un sommet est simplicial si son voisinage induit un sous-graphe complet, une clique.

Les graphes triangulés sont caractérisés par l'existence d'un schéma d'élimination simplicial [47]. Donc ils peuvent être construits (ou réduits) en ajoutant (ou supprimant) un à un des sommets simpliciaux.

Théorème 6 :

Un graphe G est triangulé si et seulement s'il admet un ordre d'élimination simplicial.

La preuve de ce théorème se trouve par exemple dans [48].

Une autre caractérisation très utile du point de vue algorithmique a été proposée par Gavril [49] en 1974. Les graphes triangulés correspondent exactement aux graphes d'intersection des sous-arbres dans un arbre. Cela signifie en fait que les cliques maximales peuvent être arrangées sous forme d'un arbre tel que les cliques contenant un sommet donné induisent un sous-arbre. Un tel arbre est appelé un arbre de cliques. Cette caractérisation leur confère certaines applications dans le domaine de la classification. Pour plus de détails sur ces graphes, leurs propriétés et leurs applications voir [48].

1.3 Graphes de comparabilité :

Un graphe simple $G = (V, E)$ est appelé *graphe de comparabilité* si on peut produire un graphe $G' = (V, E')$ d'une relation d'ordre, en orientant les arêtes de G , soit avec :

$$\begin{aligned} (x, y) \in E, (y, x) \in E &\Rightarrow (x, y) \in E' \\ (x, y) \in E' \wedge (y, x) \in E' &\Rightarrow (x, y) \notin E' \end{aligned}$$

Une telle orientation des arêtes s'appelle une *orientation transitive* du graphe. Par exemple, les graphes complets et les graphes bipartis sont des graphes de comparabilité, de même que tout graphe à moins de ∞ sommets. Les graphes de comparabilité ont été caractérisés par Ghouila-Houri (1962) [36] et Gilmore et Hoffman (1964) [37].

Une caractérisation des graphes de comparabilité, par sous-graphes exclus, a été donnée par Gallai [33] (1967). Pour plus de détails sur cette classe de graphes, voir l'ouvrage de Golombic [40] (1980) – cf. aussi Golombic, Rotem et Urrutia [41] (1983), Kelly [48] (1980) et Möhring [56] (1984).

Théorème 4 : [40]

Tout graphe de comparabilité est un graphe parfait.

Tout sous-graphe d'un graphe de comparabilité est un graphe de comparabilité.

Le résultat suivant dû à Gallai (1967) donne une caractérisation des graphes de comparabilité par des configurations interdites.

Théorème 5 :

Soit \diamond un graphe, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) \diamond est un graphe de comparabilité.
- (ii) \diamond est un graphe ne contenant pas de sous-graphe induit isomorphe à l'un des graphes Γ_{\diamond} ($1 \leq \diamond \leq 4$), (voir la figure 1.a) ou l'un des complémentaires des graphes Γ_{\diamond} ($5 \leq \diamond \leq 18$), (voir la figure 1.b).

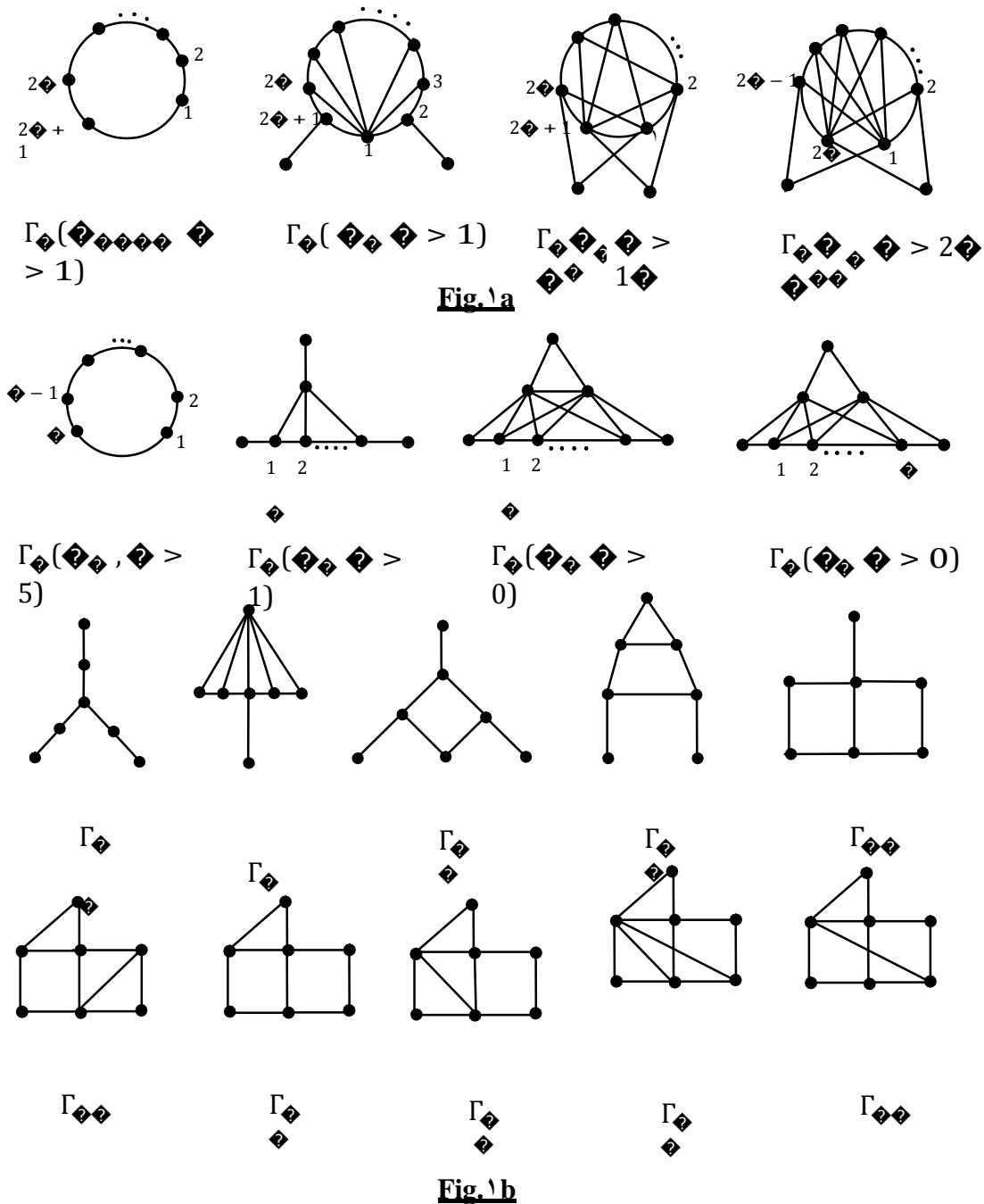


Figure II.1 : Configurations minimales interdites pour un graphe de comparabilité (1.a) ou leurs complémentaires (1.b).

1.4 Graphes de co-comparabilités :

D'après le théorème faible des Graphes parfaits, un graphe \diamond est parfait si et seulement si, son complémentaire est parfait. Et comme tout graphe de comparabilité est parfait, nous en déduisons que tout graphe de co-comparabilité est un graphe parfait.

Théorème 1 : [13]

Soit $\diamond = (\diamond, \diamond)$ un graphe. Les assertions suivantes sont

équivalentes : (i) \diamond est un graphe de co-comparabilité.

(ii) \diamond est le graphe d'intersection d'un diagramme de fonctions.

(iii) \diamond possède un ordre sur ses sommets $(\diamond_1, \diamond_2, \dots, \diamond_n)$ tel que

$$\forall x < y, x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow x \in \mathcal{C}(y) \vee y \in \mathcal{C}(x)$$

La preuve de l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) se trouve indépendamment dans Kratochvil et al. [10] et Golumbic et al. [11]. La preuve des implications (ii) \Rightarrow (iii) et (iii) \Rightarrow (i) se trouve dans [12].

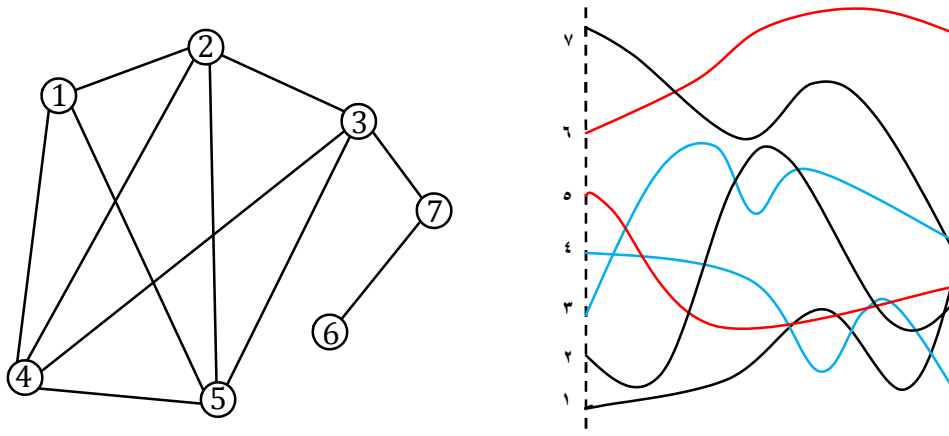


Figure II.2 : Un graphe de Co-comparabilité et sa représentation par intersection d'un diagramme de fonctions

La caractérisation de la structure d'ordre de co-comparabilité par des configurations minimales interdites due à Abbas, M. (1994) est comme suit :

Lemme 1 : (Abbas(1994)) [13]

Soient \prec et \succ deux relations binaires sur un même ensemble \mathcal{C} . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\{\prec, \succ\}$ est une structure d'ordre de co-comparabilité sur \mathcal{C} .
- (ii) $\{\prec, \succ\}$ est une structure de préférence sur \mathcal{C} n'admettant pas de sous-graphes induits isomorphes aux configurations minimales suivantes :

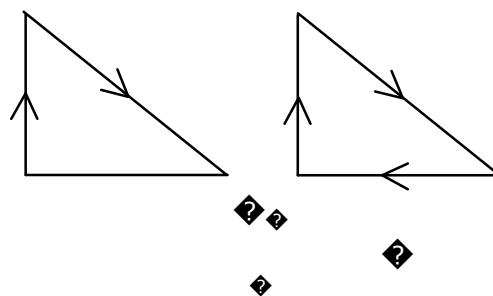


Figure II.3 : Configurations minimales interdites pour un ordre de co-comparabilité.

1.° Graphes d'intervalles :

Définition 1 : (intervalle)

Un intervalle $I = [a, b]$ est l'ensemble des points sur la droite réelle comprise entre les deux points extrémités a et b .

Définition 2 :

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalles si c'est le graphe d'intersection d'une famille d'intervalles.

Les graphes d'intervalles sont liés à une famille d'intervalles sur une droite. À un intervalle correspond un nœud dans le graphe, et deux nœuds sont voisins si les intervalles correspondants se chevauchent. (Voir figure II.4)

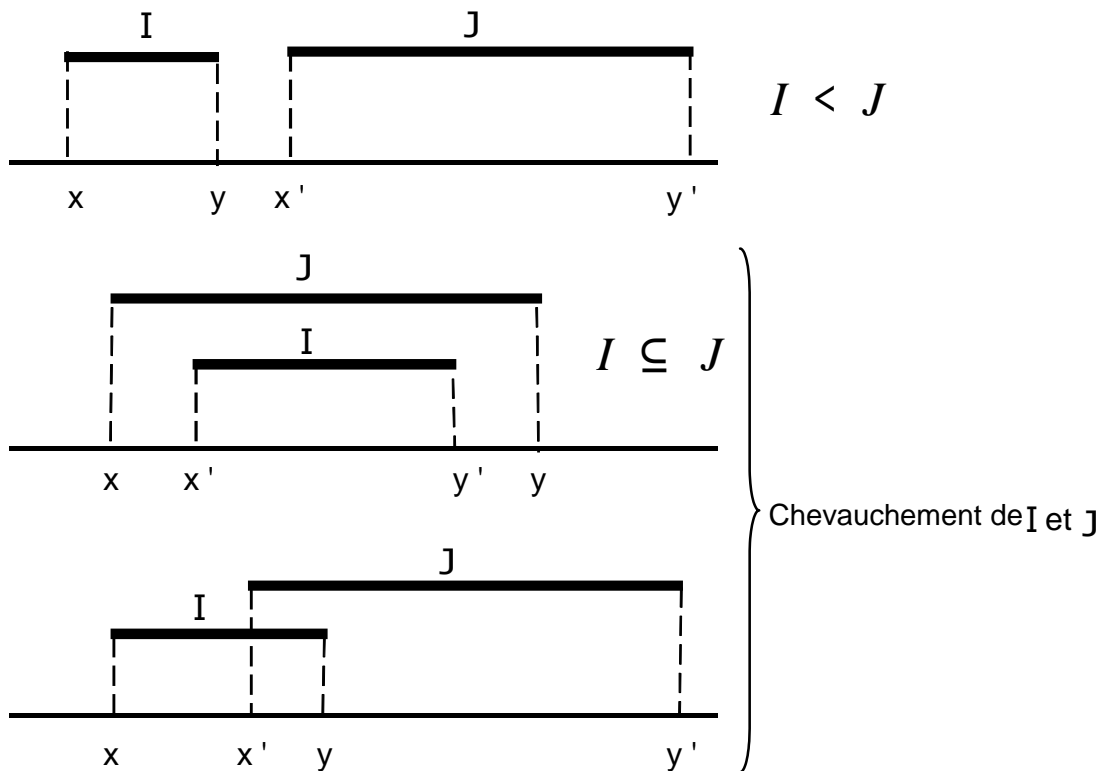


Figure II.4 : Représentation d'intervalles sur une droite

La classe de graphes d'intervalles est étudiée de manière intensive depuis son introduction en 1914 par N. Wiener [10] vu la variété des domaines d'applications de ces graphes comme en génétique, ordonnancement, psychologie et archéologie. Golumbic (1980) [11], Roberts(1976) [12].

Pour plus de détails sur les graphes d'intervalles et leurs applications, nous renvoyons le lecteur à [12] [13] [11] et [14].

Théorème \forall :

Un graphe d'intervalles est triangulé.

Les graphes d'intervalles sont donc des graphes parfaits [9]

Les graphes d'intervalles sont des graphes de co-comparabilité et sont caractérisés par l'existence d'un arrangement consécutif de leurs cliques maximales, à savoir un ordre total des cliques maximales tel que pour tout sommet v , les cliques maximales contenant

v sont consécutives. [37]

Théorème \wedge : (Gilmore et Hoffman, 1964) [37]

Pour tout graphe $G = (V, E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) G est un graphe d'intervalles ;
- (2) G est un graphe triangulé et \overline{G} un graphe de comparabilité ;
- (3) les cliques maximales de G peuvent être ordonnées linéairement tel que pour tout sommet $v \in V$, les cliques maximales contenant v apparaissent consécutivement dans cet ordre.

Théorème \exists : [37]

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe un ordre d'intervalles sur l'ensemble de ses sommets.

Les ordres d'intervalles ont été caractérisés par Fishburn P.C. (1970b) [30] comme suit :

Théorème 1.1 : [30]

Soient R_1, R_2, R_3 deux relations binaires définies sur un même ensemble V . (V, R_1, R_2, R_3) est une structure d'ordre d'intervalles sur l'ensemble V , si et seulement si :

$$\exists f: V \rightarrow \mathbb{R}, g: V \rightarrow \mathbb{R}, h: V \rightarrow \mathbb{R} \forall v, w \in V :$$

$$R_1(v, w) \Leftrightarrow f(v) > f(w) + g(w)$$

$$R_2(v, w) \Leftrightarrow \begin{cases} f(v) \leq f(w) + g(w), \\ g(v) \leq g(w) + h(w). \end{cases}$$

Voici une autre caractérisation des ordres d'intervalles par sous graphes minimaux

interdits due à Abbas, M. (1994). [5]

Lemme 2 : (Abbas(1994))

Soient \prec et \succ deux relations binaires sur un même ensemble E . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\{\prec, \succ\}$ est une structure d'ordre d'intervalles sur E .
- (ii) $\{\prec, \succ\}$ est une structure de préférence sur E n'admettant pas de sous-graphes induits isomorphes aux configurations minimales suivantes :

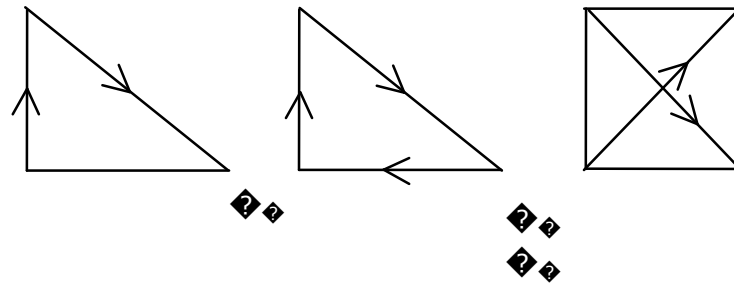


Figure II.2 : Configurations minimales interdites pour un ordre d'intervalles.

Le livre de P.C. Fishburn, 1980 [28] est intégralement consacré à cette classe d'ordres. Ce livre et les livres de B.S.W Schröder, 2003 [69] et de W.T. Trotter, 1992 [78] regroupent les principales caractérisations de ces ordres.

Une autre définition importante est celle des graphes d'intervalles propres et des graphes d'intervalles unitaires que nous étudierons au chapitre IV.

2 Graphes et ordres de cercles tangents :

M. Abbas a présenté dans sa thèse de doctorat (1994) [2] une structure de préférence pour laquelle la relation de préférence stricte (\prec) peut ne pas être transitive, mais elle vérifie une certaine propriété qu'il a appelée « quasi transitivité ». Cette structure est la *structure d'ordre de cercles tangents* dont les graphes correspondants, appelés *graphes de cercles tangents*.

2.1 Introduction et définitions :

Notons qu'un autre type d'ordre de cercles représentés dans un même plan a été largement étudié par Scheinerman et Wierman (1988) [64], Fraïssé et Lygerôs (1991) [31] ; qui s'intéressent plus particulièrement à la relation d'inclusion.

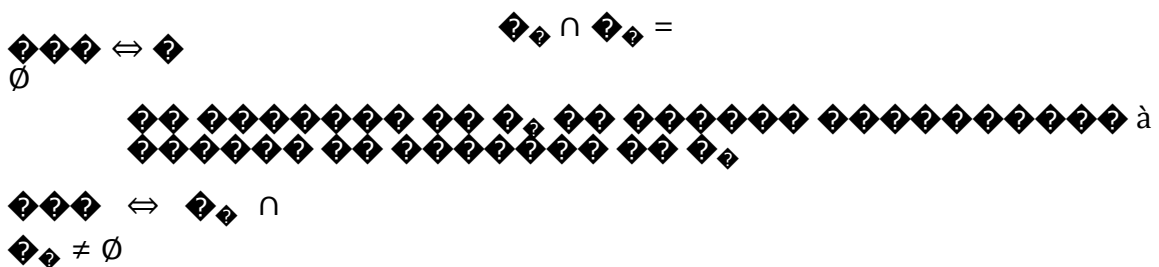
Un ordre de cercles tangents est la structure décrivant l'ordonnement d'un ensemble de cercles de diverses tailles tous tangents à une ligne horizontale, orientée, tracée dans le plan euclidien. Sans perte de généralité, nous supposons dans tout cela que

la ligne est orientée de la gauche vers la droite et que tous les cercles se trouvent au-dessus de cet axe (voir la figure II.6.). Nous définissons la structure de préférence de cercles tangents (SPCT) au sens défini dans [16] comme composé d'une relation binaire asymétrique P , appelée « ordre » de cercles tangents (OCT) et une relation symétrique réflexive I , appelée graphe de cercles tangents (GCT). Leur définition est tout à fait semblable à celle de l'ordre d'intervalle et du graphe d'intervalle.

Nous rappelons la définition géométrique de cette structure comme elle a été définie dans [9].

Considérons dans \mathbb{R}^2 un demi-plan (π) déterminé par la donnée d'une ligne droite (d) qui, sans nuire à la généralité, peut être supposée horizontale. Soit (C) un ensemble non vide et $(C) = \{C_1, C_2 \in (C)\}$ Une collection de cercles situés dans le demi-plan (π) et tangents à la même droite (d) (Voir figure II.6.).

Soient les deux relations binaires suivantes définies sur (C) :



La paire de relations binaires $\{P, I\}$ Constitue une structure d'ordre de cercles tangents sur (C) .

Soit (C) un ensemble de cercles tangents à une droite horizontale. En associant à chaque cercle un sommet, et en ajoutant une arête entre deux sommets si l'intersection des cercles correspondants n'est pas vide, on définit ainsi **le graphe de cercles tangents**.

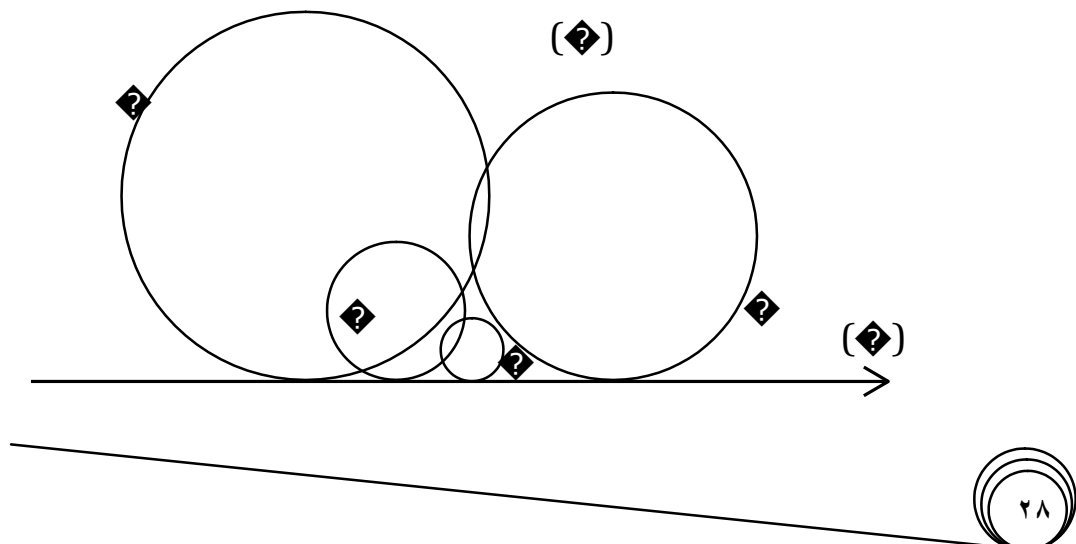


Figure II.6 : Intersection de cercles tangents



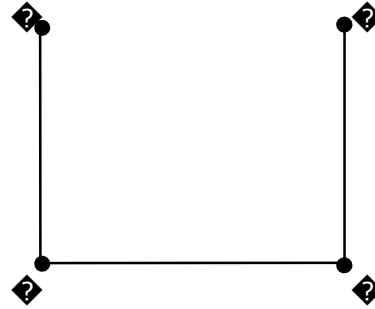
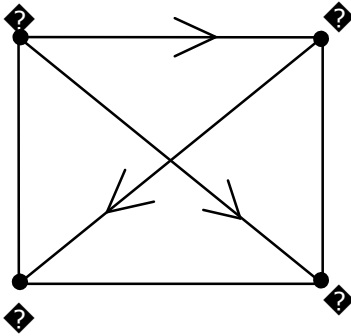


Figure II.v : Ordre de cercles tangents Figure II.^ : Graphe de cercles tangents

Il est à noter qu'un même graphe peut avoir plusieurs représentations par des cercles tangents.

2.2 Représentation numérique d'un ordre de cercles tangents :

Nous pouvons associer à chaque élément \diamond d'un graphe (ordre) de cercles tangents, un couple $\diamond\diamond(\diamond)$, $\diamond(\diamond)\diamond$ qui représente le centre du cercle \diamond_\diamond de rayon $\diamond(\diamond)$ (Voir figure II.9). Nous pouvons alors représenter l'ordre de cercles tangents de la manière suivante :

$\forall \diamond, \diamond \diamond \diamond$, on a :

$$\begin{aligned} \diamond\diamond\diamond &\Leftrightarrow \begin{cases} \diamond(\diamond) > \diamond(\diamond). \\ \diamond(\diamond, \diamond) > \diamond(\diamond) + \diamond(\diamond). \end{cases} \\ \diamond\diamond\diamond &\Leftrightarrow \diamond(\diamond, \diamond) \leq \diamond(\diamond) + \diamond(\diamond) \end{aligned}$$

Où $\diamond(\diamond, \diamond) = \sqrt{[\diamond(\diamond) - \diamond(\diamond)]^2 + [\diamond(\diamond) - \diamond(\diamond)]^2}$ représente la distance euclidienne du centre $\diamond\diamond(\diamond)$, $\diamond(\diamond)\diamond$ du cercle \diamond_\diamond au centre $\diamond\diamond(\diamond)$, $\diamond(\diamond)\diamond$ du cercle \diamond_\diamond (Voir figure II.9).

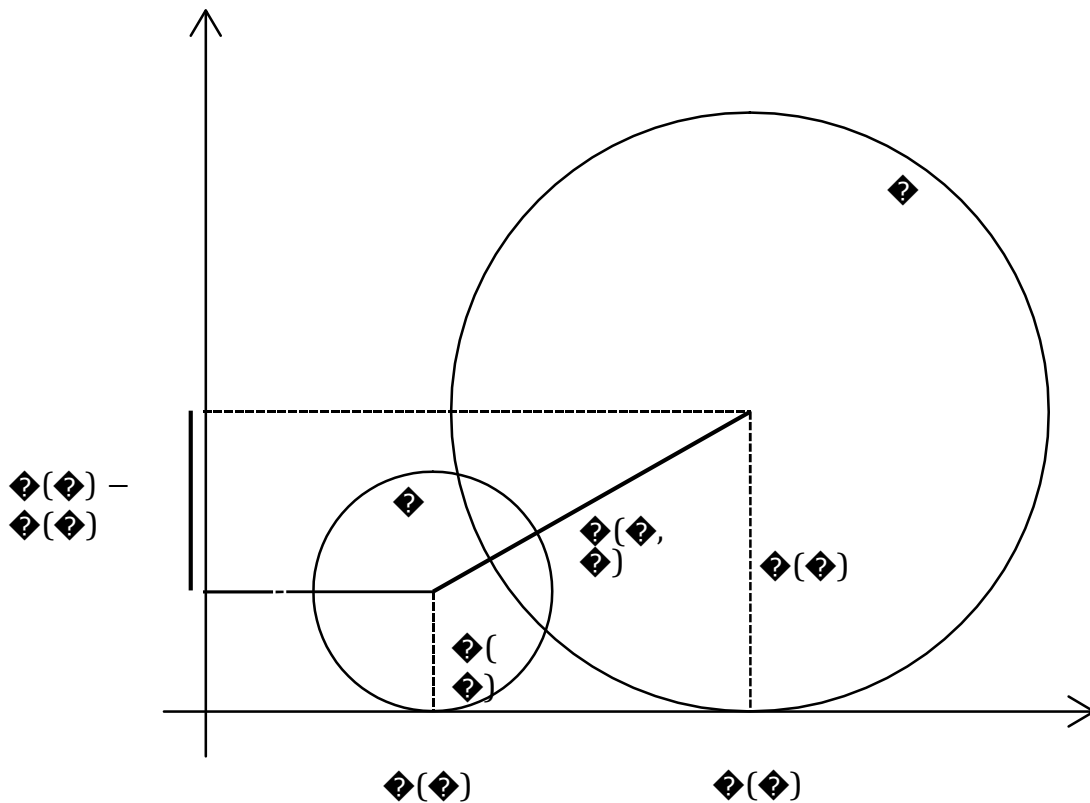


Figure II.4 : Représentation dans un plan euclidien

Une caractérisation des ordres de cercles tangents est donnée par le théorème suivant :

Théorème 11 : Abbas, M. (1994) [7]

Soient \diamond et \diamond deux relations binaires définies sur un même ensemble non vide \diamond .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\{\diamond, \diamond\}$ est une structure d'ordre de cercles tangents (SOCT).
- (ii) $\exists \diamond: \diamond \rightarrow \mathbb{R} \diamond \diamond \diamond: \diamond \rightarrow \mathbb{R} \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \forall \diamond, \diamond \in \diamond :$
 $\diamond \diamond \diamond \Leftrightarrow \diamond(\diamond) - \diamond(\diamond) > 2 \diamond \diamond \diamond(\diamond) \diamond(\diamond)$
 $\diamond \diamond \diamond \Leftrightarrow |\diamond(\diamond) - \diamond(\diamond)| \leq 2 \diamond \diamond \diamond(\diamond) \diamond(\diamond)$
- (iii) $\exists \diamond \diamond: \diamond \rightarrow \mathbb{R} \diamond \diamond \diamond \diamond: \diamond \rightarrow \mathbb{R} \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \forall \diamond, \diamond \in \diamond :$
 $\diamond \diamond \diamond \Leftrightarrow \diamond \diamond(\diamond) - \diamond \diamond(\diamond) > \diamond \diamond(\diamond) \diamond \diamond(\diamond)$
 $\diamond \diamond \diamond \Leftrightarrow |\diamond \diamond(\diamond) - \diamond \diamond(\diamond)| \leq \diamond \diamond(\diamond) \diamond \diamond(\diamond)$

Propriétés : Abbas, M. (1994) [7]

Définition \wedge :

Une relation \diamond définie sur un ensemble \diamond est dite quasi-transitive si et seulement si :

$$\forall \diamond, \diamond, \diamond, \diamond \in \diamond: (\diamond \diamond \diamond), (\diamond \diamond \diamond) \diamond \diamond(\diamond \diamond \diamond) \Rightarrow (\diamond \diamond \diamond) \diamond \diamond(\diamond \diamond \diamond)$$

Soit \mathcal{G} une relation quasi transitive définie sur un ensemble non vide E . On a :

- $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est sans circuit de longueur \forall si et seulement si $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est sans circuit.
- Si $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est une \mathcal{G} , alors \mathcal{G} est une relation quasi transitive.
- Soit $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ une \mathcal{G} sur un ensemble non vide E et $\{a, b\}$ sa représentation

numérique, $\forall a, b, c \in E$ $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ nous avons :

$$a(\mathcal{G}) > b(\mathcal{G}) \Rightarrow a(\mathcal{G}) < c(\mathcal{G}).$$

- Si $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est une structure d'ordre d'intervalles sur un ensemble non vide E , il existe une \mathcal{G} $\{a, b\}$ sur le même ensemble E , telle que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$.
- Le complémentaire d'un graphe de cercles tangents n'est pas nécessairement un graphe de cercles tangents. [1]

Voici un contre - exemple minimal (Figure II.10)

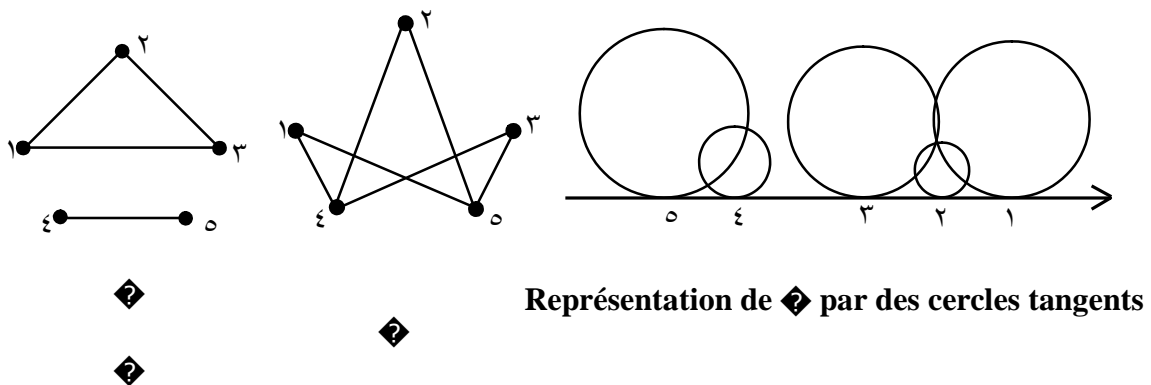


Figure II.10 : Exemple du complémentaire d'un graphe de cercles tangents qui n'est pas de cercles tangents

2 Relations entre les graphes (ordres) de cercles tangents et d'autres classes de graphes (types d'ordres) :

2.1 Graphes de cercles tangents et les graphes d'intervalles :

L'inclusion de la classe des graphes d'intervalles dans la classe des graphes de cercles tangents est un problème ouvert [1], cependant on étudiera l'inclusion de quelques sous-classes de cette classe dans les graphes de cercles tangents au chapitre IV.

2.2 Graphes de cercles tangents et les graphes sans \mathcal{G} :

~~La classe des graphes des ordres pairs de série parallèle appelé aussi graphes~~

correspondent exactement aux graphes sans \diamond (D. Seinsche (1974)) [1].

Le complément d'un cographe étant aussi un cographe, ceux-ci forment une sous-classe des graphes de permutation.

Théorème 12 : [16]

La famille des cographes est exactement la famille des graphes sans \diamond_2 induit.

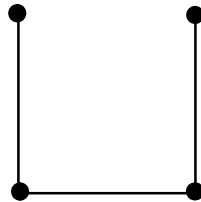


Figure II.11 :



La famille des cographes a été étudiée et redécouverte dans de nombreux contextes différents (voir D.P. Sumner (1973) [16], D.G. Corneil, H. Lerchs, and L.K. Stewart-Burlingham (1981) [17], D.G. Corneil, Y. Perl, and L.K. Stewart (1980) [18] pour des références).

- Le graphe de la figure II.11 est sans \diamond_2 mais il n'est pas représentatif de cercles tangents.

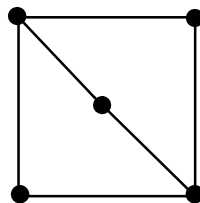


Figure II.12 :



- Le graphe de la figure II.13 est un graphe de cercles tangents contenant \diamond_2 .

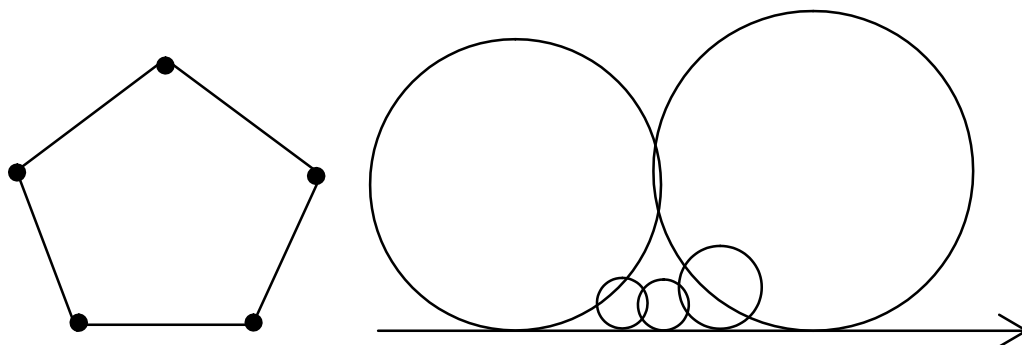


Figure II.13 : \diamond_2 et sa représentation par des cercles tangents

2.3 Graphes de cercles tangents et les graphes scindés :

Un graphe scindé est un graphe dont les sommets admettent une partition en deux sous-ensembles S et C où S un stable et C une clique.

Le complémentaire d'un graphe scindé est aussi un graphe scindé. Pour plus de détails sur cette classe de graphe, voir Golumbic (1980) [10].

- Le graphe C_n n'est pas un graphe scindé, mais il est représentatif de cercles tangents (voir Figure II.13).

2.4 Graphes de cercles tangents et les graphes de trapèzes :

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est appelé graphe de trapèzes si à tout sommet v de V on peut associer un trapèze T_v tel que :

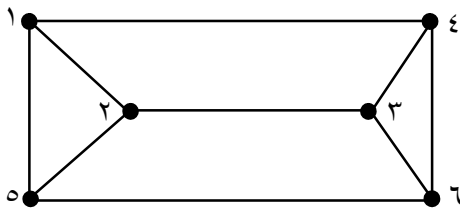
$$\{v, w\} \in E \text{ si et seulement si } T_v \cap T_w \neq \emptyset.$$

Une structure de préférence $\{<, >\}$ sur V ($V \neq \emptyset$) est une structure d'ordre de trapèzes, si à tout v de V on peut associer un trapèze T_v , tel que : $v < w$ si et seulement si T_w se trouve totalement à droite de T_v .

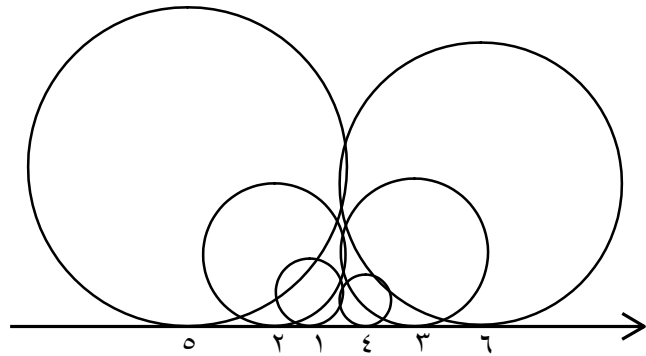
Cette classe de graphes est contenue dans la classe des graphes de co-comparabilité et généralise, à la fois, la classe des graphes d'intervalles et celle des graphes de permutations. Elle a été introduite et étudiée, indépendamment, par Corneil et Kamula (1987) [20], Dagan, Golumbic et Pinter (1988) [21].

La classe des graphes de trapèzes et l'ordre correspondant ont été également étudiés par : Cheah (1990) [22], Habib et Möhring (1990) [23], Felsner, Müller et Wernisch (1994) [24].

- Un graphe de cercles tangents n'est pas en général représentatif de trapèzes. [25]
Le graphe de la figure II.14a est représentatif de cercles tangents (figure II.14b) mais pas de trapèzes.



II.14a



II.14b

Figure II.14 : Exemple d'un graphe de cercles tangents qui n'est pas représentatif de trapèzes

- Un ordre (graphe) de trapèzes n'est pas une structure d'ordre de cercles tangents en général.

Voici un contre exemple minimal tiré de [7] (Abbas, M. (1994)). (Voir Figure II.15).

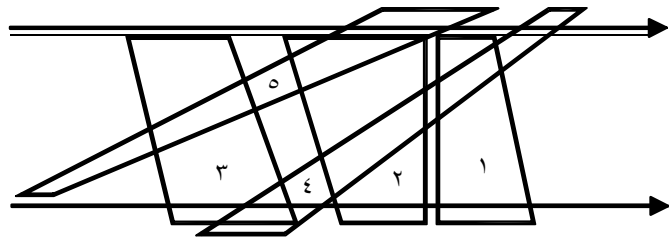
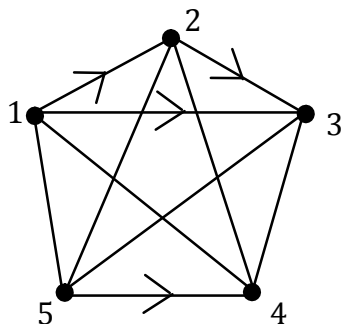


Figure II.15 : Exemple d'ordre de trapèzes qui n'est pas représentatif de cercles tangents

3.5 Graphes de cercles tangents et les graphes d'ellipses tangentes :

La structure d'ellipses tangentes est définie d'une manière analogue à celle des ordres de cercles tangents en remplaçant ces derniers par des ellipses. [7]

- Une structure d'ellipses tangentes n'est pas en général une structure de cercles tangents.

Voici un contre-exemple minimal d'une structure d'ordre d'ellipses tangentes qui n'est pas représentatif de cercles tangents. [7] (voir Figure II.16)

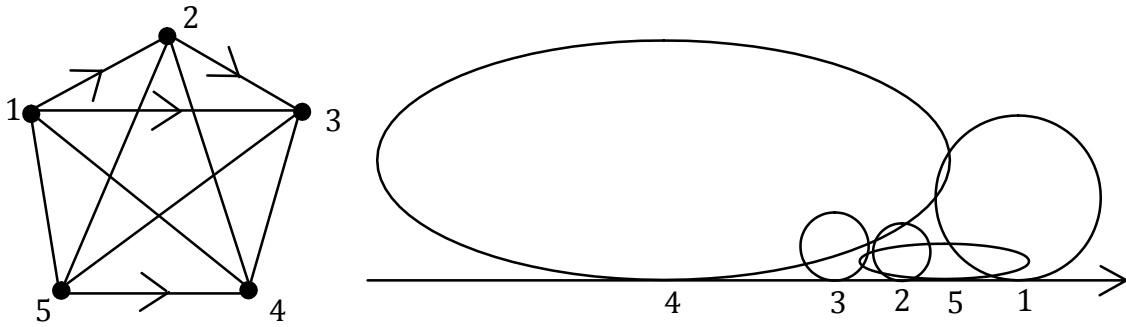


Figure II.16 : Exemple d'ordre d'ellipses tangentes qui n'est pas représentatif de cercles tangents

4 Conditions nécessaires pour un ordre (graphe) de cercles tangents : [4]

Lemme 3 : [4]

Si $\{a, b\}$ est une SOCT sur un ensemble non vide E , alors :

$$\forall a, b, c, d \in E : (a, b, c), (a, c, b, d), (a, b, c, d) \Rightarrow (a, b, d) .$$

(où (a, b, c, d) signifie qu'il existe un chemin de a vers d dans le graphe (a, b)).

- $(0, a, 0)$: une configuration isomorphe à la configuration définie par $(a, b, c), (a, c, b, d), (a, b, c, d)$ sachant que la première et la dernière coordonnée signifient qu'il n'y a aucun sommet intermédiaire entre les sommets considérés (a et b respectivement c et d) relativement à la relation (a, b) , de même

(a, b) est le nombre de sommets intermédiaires du chemin allant de a vers b

relativement à la relation (a, b) . (voir la figure II.17)

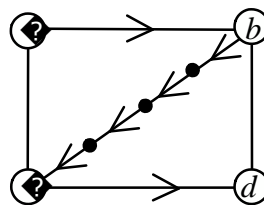


Figure II.17 : Une configuration interdite de type (a, b) (dans cet exemple $(a, b) = (c, d)$)

Corollaire 1 :

Si $\{a, b\}$ est une SOCT sur un ensemble non vide E , alors la

$(0, \diamond, 0), \diamond \in \mathbb{N}$ est interdite.

- $\diamond'(0,1,0)$: une configuration obtenue à partir de $\diamond(0,1,0)$, en ajoutant au plus une arête ou un arc, selon le cas, sans former ni un circuit, ni une configuration isomorphe à $\diamond(0,0,0)$. (voir figure II.11)

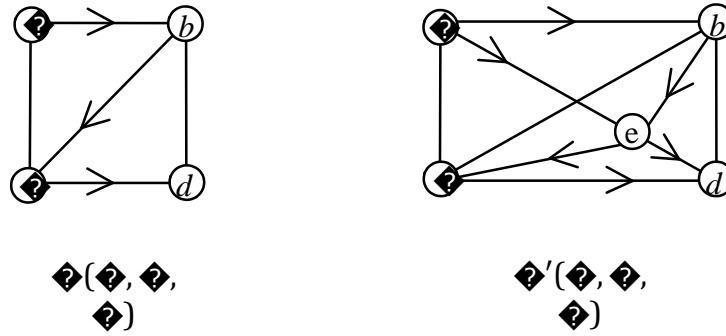


Figure II.11 : Configurations minimales interdites contenues dans $\diamond(2,2,2)$

Proposition 1 :

Si $\{\diamond, \diamond'\}$ est une SOCT sur un ensemble non vide \diamond , alors la configuration

$\diamond(0, \diamond, 0)$, $\diamond \in \mathbb{N}$, $\diamond \geq 2$ contient $\diamond(0,0,0)$ ou $\diamond'(0,1,0)$ comme sous graphe induit. (voir figure II.11).

Lemme 4 :

Si $\{\diamond, \diamond'\}$ est une SOCT sur un ensemble non vide \diamond , alors les configurations

$\diamond(0,0,0)$ et $\diamond'(0,1,0)$ sont interdites et minimales.

Lemme 5 :

Si $\{\diamond, \diamond'\}$ est une SOCT sur un ensemble non vide \diamond , alors :

$$\forall \diamond_1, \diamond_2, \diamond_3, \diamond_4 \in \diamond : (\diamond_1 \diamond_2 \diamond_3), (\diamond_1 \diamond_2 \diamond_4), (\diamond_1 \diamond_3 \diamond_4), \diamond_1 \diamond_2 \diamond_3 \diamond_4 \Rightarrow (\diamond_1 \diamond_2 \diamond_3)$$

- $\diamond(2, \diamond, \diamond)$ Une configuration isomorphe à la configuration définie par

$$\diamond_1 \diamond_2 \diamond_3 \diamond_4, (\diamond_1 \diamond_2 \diamond_3), (\diamond_1 \diamond_2 \diamond_4), \diamond_1 \diamond_2 \diamond_3 \diamond_4, (\diamond_1 \diamond_2 \diamond_3) \diamond_4 (\diamond_1 \diamond_2 \diamond_3)$$

où \diamond_i : le nombre de sommets intermédiaires du chemin allant de \diamond_i vers \diamond_{i+1}

relativement à la relation \diamond .

\diamond_i : il n'y a aucun sommet intermédiaire entre \diamond_i et \diamond_{i+1} relativement à la relation \diamond .

~~Le nombre de sommets intermédiaires du chemin allant de v vers~~

~~w~~

relativement à la relation ~~\prec~~ .



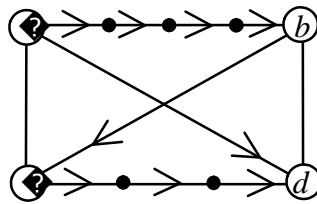


Figure II.19 : Configurations minimales interdites de type $\diamond(\diamond, \diamond, \diamond)$
 (Dans cette exemple $\diamond = 3$ et $\diamond = 2$)

Corollaire 2 :

Si $\{\diamond, \diamond\}$ est une SOCT sur un ensemble non vide \diamond , alors la configuration

$\diamond(\diamond, 0, \diamond), \diamond, \diamond \in \mathbb{N}$ est interdite. (Figure II.19)

- $\diamond'(\diamond, \diamond, \diamond)$: une configuration obtenue à partir de $\diamond(\diamond, \diamond, \diamond)$, en ajoutant au plus une arête ou un arc, selon le cas, sans former ni un circuit, ni une configuration isomorphe à $\diamond(\diamond, \diamond, \diamond)$.
- $\diamond'(\diamond, \diamond, \diamond)$: même signification que la configuration $\diamond'(1,0,0)$ en considérant la configuration $\diamond(1,0,0)$.
- $\diamond'(\diamond, \diamond, \diamond)$: la configuration obtenue à partir de $\diamond(\diamond, \diamond, \diamond)$, en ajoutant au plus une arête ou un arc, selon le cas, sans former ni un circuit, ni une configuration isomorphe à $\diamond(\diamond, \diamond, \diamond)$, ni une configuration isomorphe à $\diamond(\diamond, \diamond, \diamond)$.

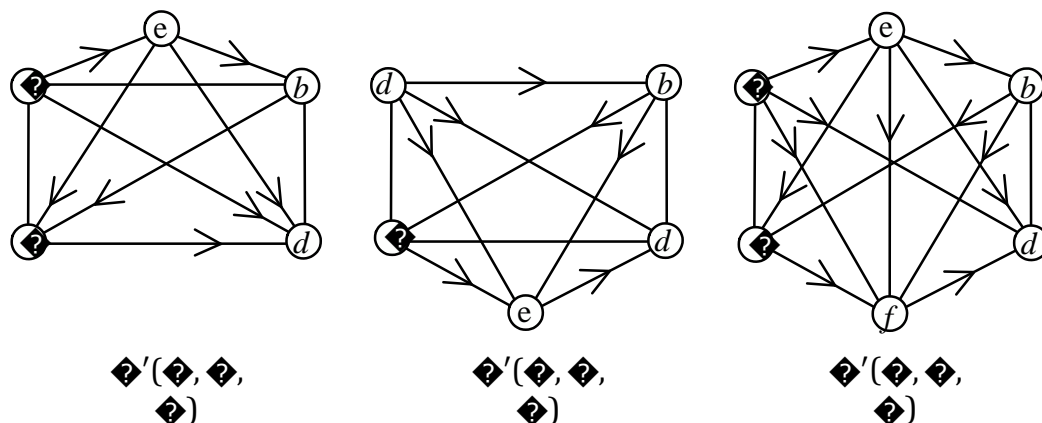


Figure II.20 : Configurations minimales interdites de type
 $\diamond'(\diamond, \diamond, \diamond)$ $\diamond'(\diamond, \diamond, \diamond)$
 $\diamond'(\diamond, \diamond, \diamond)$

~~Proposition 1.1~~

La configuration $\mathcal{C}(n, 0, n), n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, n \geq 2$ contient $\mathcal{C}(0,0,0), \mathcal{C}'(1,0,0), \mathcal{C}'(0,0,1),$ ou $\mathcal{C}'(1,0,1)$ comme sous-graphe induit.

Lemme $\nu : [\xi]$

Si $\{\diamond, \heartsuit\}$ est une SOCT sur un ensemble non vide \heartsuit , alors les configurations

$\heartsuit'(1,0,0)$, $\heartsuit'(0,0,1)$ $\heartsuit\heartsuit\heartsuit'(1,0,1)$ sont interdites et minimales.

M. Abbas a donné en annexe dans sa dissertation de doctorat toutes les configurations minimales interdites pour une structure d'ordre de cercles tangents $\{\diamond, \heartsuit\}$ sur un ensemble \heartsuit , dont le cardinal est inférieur ou égal à ν . Mais le nombre de sommets des configurations interdites pour cette structure d'ordre n'est pas majoré par ν comme le

montre le contre-exemple tiré de [1] (Abbas, M. (1994)) construit sur ν sommets.

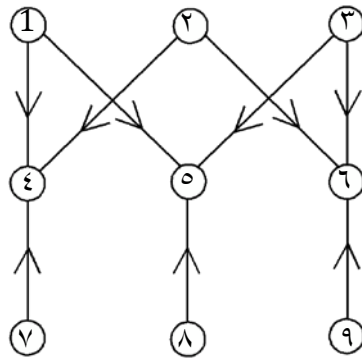


Figure II.11 : Un contre-exemple d'ordre de cercles tangents à ν sommets [1]

**LA PARTITION EN CLIQUES
ET LA COLORATION DANS
LES GRAPHES DE CTT**



1	De la coloration minimum à la partition minimum en cliques :	37
2	La transitivité dans les graphes de cercles tangents :	37
2.1	La finitude et la complexité de l'algorithme :	38
2.2	Justification de l'algorithme 1 :	39
2.3	Exemples d'application :	39
2.3.1	Sur un cas transitif :	39
2.3.2	Sur un cas non transitif :	42
3	Problème de la partition minimum en cliques :	43
3.1	La coloration et les graphes parfaitement ordonnables :	44
3.2	La partition minimum en cliques dans les graphes de cercles tangents transitifs :	45
3.2.1	La finitude et la complexité de l'algorithme :	46
3.2.2	Justification de l'algorithme 3 :	46
3.2.3	Exemple d'application :	47
4	Problème de coloration :	50
4.1	La coloration dans les graphes de cercles tangents transitifs :	50
4.1.1	La finitude et la complexité de l'algorithme :	51
4.1.2	Justification de l'algorithme 4 :	52
4.1.3	Exemple d'application :	53



Nous nous intéressons aux graphes parfaits, car c'est une classe de graphes très importante du point de vue algorithmique : on peut y résoudre de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire, à savoir les problèmes du stable maximum, de la clique maximum, de la coloration minimum et de la partition minimum en cliques.

Les problèmes d'optimisation combinatoire cités ci-dessus sont NP-complets dans le cas général, mais ils peuvent être résolus en temps polynomial dans le cas des graphes parfaits.

En effet, des algorithmes polynomiaux, basés sur la méthode des ellipsoïdes ont été développés pour la résolution de chacun [44]. Ces algorithmes ne sont pas très efficaces en pratique, ce qui a conduit à la recherche d’algorithmes combinatoires efficaces d’un point de vue pratique.

Pour plusieurs classes de graphes parfaits, de tels algorithmes ont été développés, ils sont basés sur des propriétés combinatoires spécifiques de ces classes. Parmi ces graphes, on cite les graphes triangulés, les graphes d’intervalles et les graphes de comparabilité qu’on va se servir de la transitivité d’orientation de leurs arêtes pour résoudre le problème de coloration, et le problème de partition minimum en cliques dans la classe de graphes de cercles tangents transitifs.

¶ De la coloration minimum à la partition minimum en cliques :

Le problème de la coloration minimum des sommets d’un graphe G est celui de l’attribution à chacun de ces sommets, une couleur telle que deux sommets quelconques reliés par une arête ne portent pas la même couleur, et que le nombre total de couleurs distinctes attribuées soit minimal.

Colorier un graphe avec le minimum de couleurs est un problème NP-difficile (voir Karp (1972) [45]).

Alors que les problèmes de coloration sont généralement difficiles pour des graphes quelconques, la classe des graphes parfaits a la particularité de comprendre des graphes pour lesquels le nombre chromatique peut être calculé en temps polynomial voir Grötschel, Lovasz et Schrijver (1988) [46].

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité si et seulement s’il est possible d’orienter ses arêtes de façon à obtenir un graphe représentant une relation transitive.

Il s’avère que le problème de la coloration minimum est polynomial dans les graphes de comparabilité [47]. (Even, S., Lempel, A. et Pnueli, A. (1972)).

Pour ces graphes, l’algorithme de coloration est particulièrement simple une fois que l’orientation est définie. Pour cela on cherche, en premier lieu un algorithme testant la transitivité d’un graphe de cercles tangents, afin de passer à l’étude de quelques problèmes combinatoires dans cette classe de graphes.

¶ La transitivité dans les graphes de cercles tangents :

Une représentation d’un graphe par des cercles tangents G est dite transitive si :

$$\forall C_1, C_2, C_3 \in G \text{ tels que } C_1 \cap C_2 \neq \emptyset, C_2 \cap C_3 \neq \emptyset, \text{ si } C_1 \cap C_3 = \emptyset$$

$$= \emptyset \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \cap \diamond \diamond = \emptyset$$

La réalisation de cette condition dans une représentation par cercles tangents induit que le graphe correspondant est de co-comparabilité. Il est dit dans ce cas, graphe de cercles tangents transitifs.

Tester si une orientation est transitive ou non dans un graphe donné se réduit au problème de la multiplication de matrices, pour lequel le meilleur algorithme connu prend un temps $O(n^3)$.

Notations :

\mathcal{C}_i : Un ensemble de n_i cercles $\mathcal{C}_i = \{C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{in_i}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tous tangents à une même droite réelle et situés dans le même plan.

Soient $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j \in \mathcal{C}$, nous noterons $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$ si \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j intersectés, et $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ si non.

Algorithme 1 : Algorithme testant la transitivité d'un graphe de cercles tangents

Entrée :

$G = (V, E)$ un graphe de cercles tangents où V représente l'ensemble \mathcal{C} de n cercles

$\mathcal{C}_i = \{C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{in_i}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tous tangents à une même droite réelle situés dans le même plan, et E l'ensemble d'arêtes représentant les intersection des cercles;

Sortie :

Le graphe G est transitif ou non.

1. Trier \mathcal{C} selon les \mathcal{C}_i croissants ;
2. Définir l'ensemble $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \{C_{ik} \in \mathcal{C}_i \mid C_{ik} \cap C_{jk} \neq \emptyset\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$;
3. Pour $i = 1$ jusqu'à n (dans l'ordre) faire ;
 - (i) Si $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ et $i < j - 1$ passer à $i + 1$;
 - (ii) Si $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ et $i \geq j - 1$ fin. Le graphe G est transitif ; (iii) Si non ; vérifier
 - Si $\exists C_{ik} \in \mathcal{C}_i$ tel que $C_{ik} \notin \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ fin. le graphe G n'est pas transitif.
 - Si non passer à $i + 1$.

2.1 La finitude et la complexité de l'algorithme :

Le nombre de cercles dans la représentation $|C_k| = c_k$ est fini. Le retour de c_k dans la boucle induit l'augmentation de la valeur de c_k après chaque itération jusqu'à $c_k = c_k$.
Donc l'algorithme se termine.



Théorème 1 :

La complexité de l'algorithme 1 est de l'ordre de :

$$O(n^2 \log n)$$

Preuve :

Le tri peut se faire en temps et espace $O(n \log n)$. La définition des ensembles

$$\sum_{i=1}^n |C_i| = \frac{n(n+1)}{2} \text{ Donc, en } O(n^2). \text{ Le balayage des cercles dans la boucle en } O(n-1)$$

et pour chaque cercle C_i , la vérification de l'existence de $C_j \in \mathcal{C}$ tel que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$

en $O(n-1)$ ce qui nous donne un coût de $O(n^2)$. Les autres étapes se réalisent en temps $O(1)$ chacune d'où la complexité de l'algorithme est de $O(n^2)$.

□

2.2 Justification de l'algorithme 1 :

Théorème 2 :

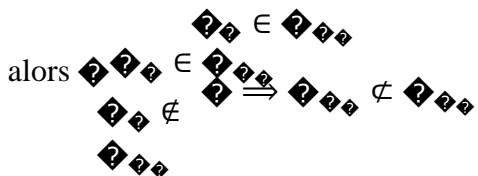
L'algorithme testant la transitivité d'un graphe de cercles tangents est correct.

Preuve :

Si le graphe traité par l'algorithme n'est pas transitif, alors il existe au moins trois

cercles C_1, C_2, C_3 dans l'ordre selon les r_i croissants tels que

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset, C_2 \cap C_3 = \emptyset, \text{ donc } C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$$



Donc on a $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ tel que $C_i \cap C_k \neq \emptyset$ d'où le résultat.

□

2.3 Exemples d'application :

2.3.1 Sur un cas transitif :

~~Voici un exemple d'intersection d'un ensemble \mathcal{C} de 13 cercles tangents (Figure III.4).~~

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_{13}\} \quad C_1 = C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13} \in \{1, 2, \dots, 13\};$$

et le graphe de cercles tangents correspondant à cette représentation (Figure III.5).

Appliquons l'algorithme précédent sur cet exemple pour tester sa transitivité.

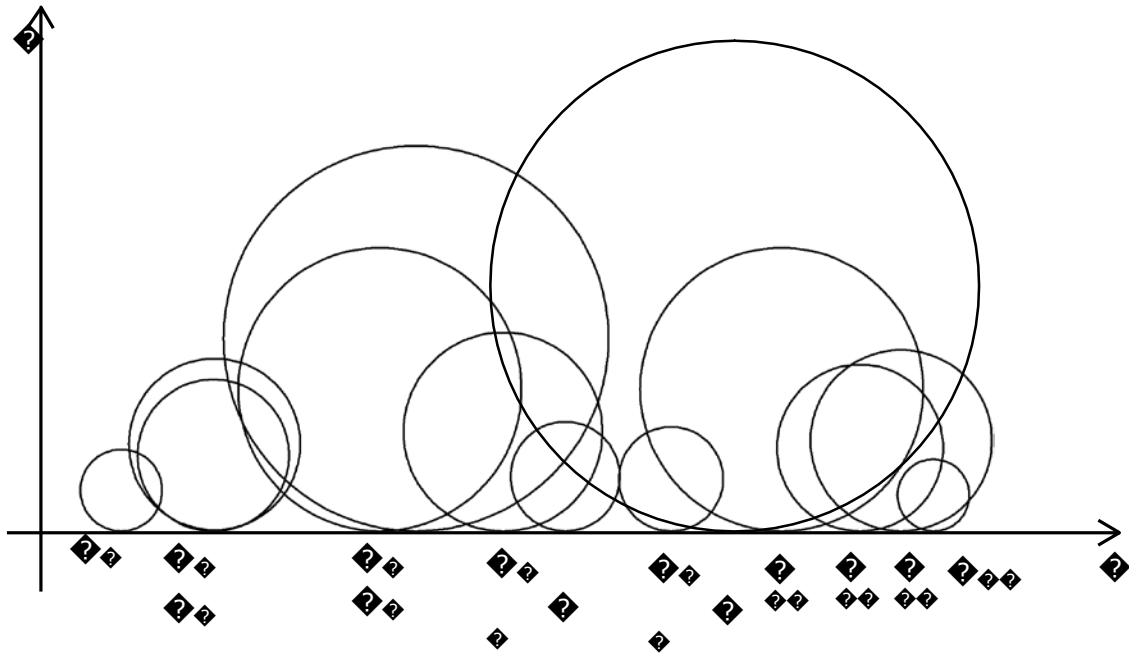


Figure III.1 : Représentation d'intersection de cercles tangents

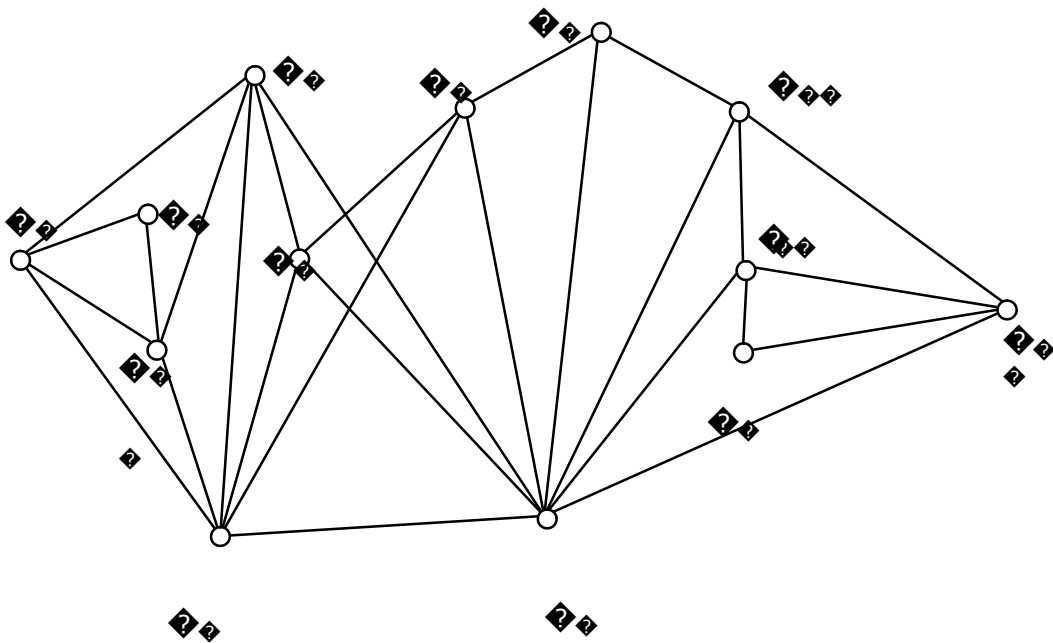


Figure III.2 : Le graphe associé à la représentation d'intersection de cercles tangents (Figure III.1).

1). Les cercles ordonnés selon les $\diamond_{2,2}$ croissants comme suit :

$$\begin{aligned} &\diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \\ &\diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \diamond_{2,2} < \end{aligned}$$

∩. La définition des ensembles \mathcal{C}_k :

$\mathcal{C}_k = \{C \in \mathcal{C} \mid C = k\}$	Le cercle \mathcal{C}_k
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}$	\mathcal{C}_1
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\}$	\mathcal{C}_2
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9\}$	\mathcal{C}_3
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}\}$	\mathcal{C}_4
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\}$	\mathcal{C}_5
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}\}$	\mathcal{C}_6
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}\}$	\mathcal{C}_7
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$	\mathcal{C}_8
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}\}$	\mathcal{C}_9
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}\}$	\mathcal{C}_{10}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}\}$	\mathcal{C}_{11}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}\}$	\mathcal{C}_{12}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}\}$	\mathcal{C}_{13}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}\}$	\mathcal{C}_{14}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}\}$	\mathcal{C}_{15}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}\}$	\mathcal{C}_{16}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}\}$	\mathcal{C}_{17}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}\}$	\mathcal{C}_{18}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}\}$	\mathcal{C}_{19}
$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}\}$	\mathcal{C}_{20}

∩. Pour $k = 1$: $\mathcal{C}_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}\}$;

$C_1 \in \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}\}$;

$\forall C_i \in \mathcal{C}_1, C_i \subset \mathcal{C}_1$.

$k = 2$: $\mathcal{C}_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}\}$;

$\forall C_i \in \mathcal{C}_2, C_i \subset \mathcal{C}_2$.

$k = 3$: $\mathcal{C}_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}\}$;

$\forall C_i \in \mathcal{C}_3, C_i \subset \mathcal{C}_3$.

$k = 4$: $\mathcal{C}_4 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}\}$;

$\forall C_i \in \mathcal{C}_4, C_i \subset \mathcal{C}_4$.

$k = 5$: $\mathcal{C}_5 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25}, C_{26}\}$;

$$\forall \{v_i\} \in \{v_i, v_j, v_k, v_l, v_m\} \subset \{v_i, v_j, v_k, v_l, v_m\}.$$

$$\diamond = 6 : \mathcal{C}_{\diamond} = \{\mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}\};$$

$$\forall \mathcal{C}_{\diamond} \in \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \subset \mathcal{C}_{\diamond}.$$

$$\diamond = 7 : \mathcal{C}_{\diamond} = \{\mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}\};$$

$$\forall \mathcal{C}_{\diamond} \in \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \subset \mathcal{C}_{\diamond}.$$

$$\diamond = 8 : \mathcal{C}_{\diamond} = \{\mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}; \mathcal{C}_{\diamond}\};$$

$$\forall \mathcal{C}_{\diamond} \in \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \subset \mathcal{C}_{\diamond}.$$

$$\diamond = 9 : \mathcal{C}_{\diamond} = \{\mathcal{C}_{\diamond}\};$$

$$\forall \mathcal{C}_{\diamond} \in \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \subset \mathcal{C}_{\diamond}.$$

$$\diamond = 10 : \mathcal{C}_{\diamond} = \{\mathcal{C}_{\diamond}\};$$

$$\forall \mathcal{C}_{\diamond} \in \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \mathcal{C}_{\diamond} \subset \mathcal{C}_{\diamond}.$$

$$\diamond = 11 : \mathcal{C}_{\diamond} = \{\emptyset\};$$

$$\mathcal{C}_{\diamond} = \emptyset \text{ et } 11 \neq \diamond - 1 \text{ on passe à } \diamond = 12.$$

$$\diamond = 12 : \mathcal{C}_{\diamond} = \{\emptyset\};$$

$$\mathcal{C}_{\diamond} = \emptyset \text{ et } 12 = \diamond - 1 \text{ fin. Le graphe de cercles tangents}$$

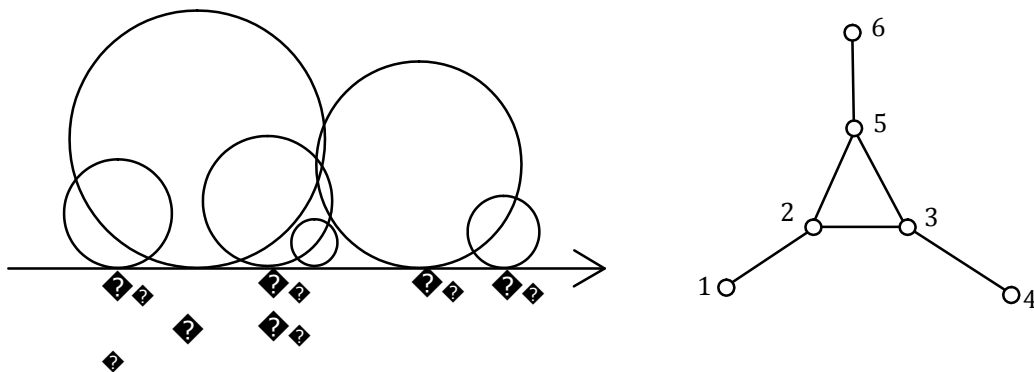
est transitif.

3.3.2 Sur un cas non transitif :

Un autre exemple d'intersection d'un ensemble \mathcal{C} de 6 cercles tangents (Figure III.3).

$\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_6\}$ $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$; et le graphe de cercles tangents correspondant à cette représentation.

Appliquons l'algorithme précédent sur cet exemple pour tester sa transitivité.



1. Les cercles ordonnés selon les α_i croissants comme suit :



2. La définition des ensembles \mathcal{C}_i :

$\mathcal{C}_i = \{ \alpha_j, \alpha_k, \dots, \alpha_l \} \in \mathcal{C}_i$	Le cercle α_i
$\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$	α_1
$\{ \alpha_2, \alpha_3 \}$	α_2
$\{ \alpha_3 \}$	α_3
$\{ \alpha_4, \alpha_5 \}$	α_4
$\{ \emptyset \}$	α_5
$\{ \emptyset \}$	α_6

3. Pour

$$\alpha_1 = 1 : \mathcal{C}_1 = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \};$$

$$\mathcal{C}_2 = \{ \alpha_2 \} \subset \{ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \};$$

$$\mathcal{C}_3 = \{ \alpha_3, \alpha_4 \} \subset \{ \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \};$$

$$\mathcal{C}_4 = \{ \emptyset \};$$

$$\mathcal{C}_5 = \{ \emptyset \}.$$

$$\alpha_2 = 2 : \mathcal{C}_1 = \{ \alpha_2, \alpha_3 \};$$

$$\mathcal{C}_2 = \{ \alpha_3, \alpha_4 \} \not\subset \{ \alpha_3, \alpha_4 \} \text{ en effet } \alpha_2 \in \mathcal{C}_2 \text{ mais } \alpha_2 \notin \mathcal{C}_2;$$

Le graphe de cercles tangents n'est pas transitif.

3 Problème de la partition minimum en cliques :

Le problème de la détermination de la partition minimum en cliques dans un graphe est appelé problème de la partition minimum en cliques.

Il est évident que, dans un graphe quelconque G , une partition minimum en cliques de ses sommets correspond dans son complémentaire \bar{G} à une coloration minimum (il suffit d'attribuer aux sommets appartenant à une même clique de la partition minimum une même couleur dans la coloration minimum). [12]

On a vu que le problème de la coloration minimum est polynomial sur les graphes de comparabilité [10] (Even, S., Lempel, A. and Pnueli, A. (1972)). Or le graphe complémentaire d'un graphe de cercles tangents transitifs est un graphe de comparabilité.

Par conséquent, le problème de la partition minimum en cliques des sommets d'un graphe de cercles tangents transitifs peut être résolu en un temps polynomial en déterminant une coloration minimum sur son graphe complémentaire.

Pour cela définissant une classe de graphes introduite par Chvátal, dite classe de graphes parfaitement ordonnables.

3.1 La coloration et les graphes parfaitement ordonnables :

Définition 1 :

Un graphe est parfaitement ordonnable [11] s'il admet un ordonnancement $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ des sommets tels qu'aucun $v_i [v_j, v_k, v_l, v_m]$ n'ait $v_i < v_j < v_k < v_l < v_m$.

Un v_i interdit s'appelle une *obstruction* ; l'ordre imposé sur l'ensemble des sommets par cette orientation s'appelle *ordre parfait*.

Un graphe est dit fortement parfait [12] si chacun de ses sous-graphes induits contient un stable intersecté avec toutes ses cliques maximales.

Théorème 3 : (Chvátal [11])

Un graphe parfaitement ordonnable est fortement parfait ; de plus, la coloration obtenue par l'algorithme glouton utilisant l'ordre parfait est optimale.

Les graphes de comparabilité sont parfaitement ordonnables, car une orientation transitive induit un ordre parfait.[11]

Donc, l'algorithme glouton appliqué à un graphe de comparabilité utilisant l'ordre " $<$ " colorie le graphe avec un nombre minimum de couleurs.

Rappelons que les algorithmes sont dits gloutons (ou voraces, en anglais : *greedy*) s'ils construisent une solution de façon incrémentale, en choisissant à chaque étape la direction qui est la plus prometteuse. Ce choix localement optimal n'a aucune raison de conduire à une solution globalement optimale. Cependant, certains problèmes peuvent être résolus ainsi, comme notre cas.

Algorithme 3 : *Algorithme glouton pour la résolution du problème de coloration.* [16]

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ non orienté et un ordre linéaire " $<$ " sur les sommets

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Sorties : une coloration de

v_i . Pour v_i de 1 à v_n faire

donner à v_i la plus petite couleur qui n'a pas été utilisée par ses voisins

Retourner la coloration obtenu.

Si l'ordre " $<$ " est parfait alors l'ensemble de couleurs est une partition minimum en stables, mais dans le graphe complémentaire c'est une partition minimum en cliques.

Chaque sommet v_i dans le graphe complémentaire est représenté par un cercle, et les voisins déjà colorés de v_i correspond aux cercles placés à la droite de v_i tels que l'intersection entre chacun de ces cercles et le cercle v_i est vide.

3.2 La partition minimum en cliques dans les graphes de cercles tangents transitifs :

Notations :

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \text{ un ensemble de } n \text{ cercles tangents transitifs.}$$

Nous travaillons ici sur une représentation par cercles tangents plutôt que sur le graphe de cercles tangents lui-même.

Algorithme 4 : *Algorithme de partition minimum en cliques des sommets d'un graphe de cercles tangents transitifs*

Entrée :

Un ensemble C de n cercles tangents transitifs $c_1 = (x_1, y_1, r_1), c_2 = (x_2, y_2, r_2), \dots, c_n = (x_n, y_n, r_n) \in \{1, 2, \dots, n\}$ tous tangents a une même droite réelle situés dans le même plan.

Sortie :

Une partition $C = C_1 \cup \dots \cup C_{|C|}$ de C en un nombre minimum de cliques ;

Étape 1 :

Trier C selon les x_i

croissants ; Soit $C_1 = \emptyset$

Soit $C_1 = \{c_1\}$;

$C_2 =: C_1 \cup C_2$



Pour chaque $k \in \{2, 3, \dots, n\}$
faire

Rechercher dans les $k \in \{1, \dots, |V|\}$ le plus petit indice k tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, |V|\} \quad \sum_{i=1}^k |C_i| \leq 2 \sum_{i=1}^k |C_i|, \quad k \in \{1, 2, 3, \dots, |V|\}$$

Soit k cet indice ;

Si $k \in \{1, \dots, |V|\}$ faire

$$C_k =: C_k \cup$$

$\{C_k\}$; Si non faire

$$\text{Soit } |C_k| = \{C_k\} ;$$

$$C_k =: C_k \cup$$

$$\{C_k\} ;$$

Étape 2 :

Retourner C_k ;

2.2.1 La finitude et la complexité de l'algorithme :

Le nombre de cercles dans la représentation $|C_k| = k$ est fini. La séquence formée par les valeurs prises par k au fil des itérations est strictement croissante jusqu'à $k = n$. Donc, l'algorithme se termine.

Complexité :

La complexité de l'algorithme de partition minimum en cliques des sommets d'un graphe de cercles tangents transitifs est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4 :

La complexité de l'algorithme 2 est de l'ordre de :

$$O(n \log n)$$

Preuve :

Le tri peut se faire en temps et espace $O(n \log n)$. Le balayage des cercles dans la boucle en $O(n - 1)$ et la recherche dans les $k \in \{1, \dots, |V|\}$ au pire des cas en $O(n - 1)$. Les autres étapes se réalisent en temps $O(1)$ chacune d'où la complexité de l'algorithme

est de $O(n \log n)$.





3.2.2 Justification de l'algorithme 3

: Théorème 3 :

La solution donnée par l'algorithme 3 est optimale.

Preuve :

Lorsqu'on traite un sommet v_i représenté par le cercle C_i , on recherche dans les cliques C_k , $k \in \{1 \dots, |C|\}$ le plus petit

indice k tel que $\forall v_j \in C_k, v_j - v_i \leq$

$2 \cdot |C_k|$, $k \in \{1, 2, 3 \dots, |C|\}$ qui signifie la recherche de plus petit indice d'une clique

déjà existé C_k tel que $\forall v_j \in C_k, C_k \cap C_i \neq \emptyset$. L'existence d'un tel indice implique l'ajout du cercle C_i à cette clique. Si un tel indice n'existe pas, alors C_i

sera le premier cercle d'une nouvelle clique $C_{k+1} = C_k \cup C_i$ qui signifie dans le sous graphe G' engendré par

$\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\}$, l'existence d'un stable de longueur k' constitué d'un sommet de chaque clique de G' déjà existé avec $k' \leq |C_k|$ mais dans le cas général on a $k' \geq |C_k|$ d'où

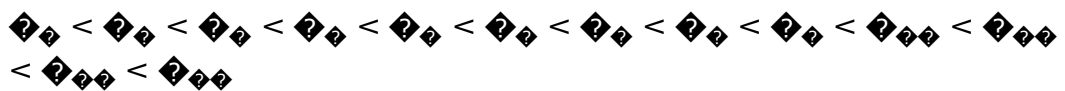
l'optimalité de la partition.

□

3.2.3 Exemple d'application :

Voici une application de cet algorithme sur l'exemple précédent.

Les cercles ordonnés selon les $|C_k|$ croissants comme suit :



Soit $C_1 = \emptyset$

Soit $C_2 = \{v_1\}$;

$C_3 = C_2$

- Pour C_4 on a $C_4 = C_3 = \{v_1\}$ et $C_5 - C_4$
 $C_5 \leq 2 \cdot |C_4|$ donc le plus petit indice $k = 1$

$$C_6 = C_4 \cup \{v_2\} = \{v_1, v_2\}$$

$$C_7 = C_6$$

- Pour C_8 on a $\forall v_j \in C_7, C_8 - C_7 \leq 2 \cdot |C_7|$, $k \in \{1, 2, 3 \dots, |C|\}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_2 &=: \mathcal{C}_1 \cup \{\mathcal{C}_2\} \text{ -à- } \mathcal{C}_1. \quad \mathcal{C}_2 = \\
 &\quad \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\} \\
 &\quad \mathcal{C}_1 = \\
 &\quad \mathcal{C}_2
 \end{aligned}$$

- Pour \mathcal{C}_2 on a $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1 > \overline{2\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1}$ donc le plus petit indice $\mathcal{C}_1 \neq 1$ sachant que $|\mathcal{C}_1| = 1$

$$\text{Soit } \mathcal{C}_1 |_{\mathcal{C}_2} = \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \{\mathcal{C}_1\};$$

$$\mathcal{C}_2 =: \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\} \cup \{\mathcal{C}_2\};$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ et $\mathcal{C}_{2,2}$, le plus petit indice $\mathcal{C} \neq 1$, car ils ne vérifient pas la condition pour $\mathcal{C}_{2,2}$

Mais ils sont intersectés avec $\mathcal{C}_{2,2}$ donc $\mathcal{C} = 2$

$$\mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\};$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\};$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ on a $\mathcal{C}_{2,2,2} - \mathcal{C}_{2,2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2}}$ donc le plus petit indice $\mathcal{C} \neq 1$ et

$$\mathcal{C}_{2,2,2} - \mathcal{C}_{2,2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2,2}}$$

Donc $\mathcal{C} \notin \{1 \dots, |\mathcal{C}|\}$, alors

$$\text{Soit } \mathcal{C}_{|\mathcal{C}||\mathcal{C}_{2,2,2}} = \mathcal{C}_{2,2,2,2} = \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}\};$$

$$\mathcal{C} =: \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\};$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ le plus petit indice $\mathcal{C} \neq 1$ et $\mathcal{C} \neq 2$ pour les mêmes raisons que $\mathcal{C}_{2,2}$

Mais il est intersecté avec $\mathcal{C}_{2,2}$.

$$\mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\}$$

$$\mathcal{C} =: \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\}$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ on a $\mathcal{C}_{2,2,2} - \mathcal{C}_{2,2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2}}$ donc le plus petit indice $\mathcal{C} \neq 1$

Par contre $\mathcal{C}_{2,2}$ est intersecté avec $\mathcal{C}_{2,2}$, $\mathcal{C}_{2,2}$ et $\mathcal{C}_{2,2}$ donc $\mathcal{C} = 2$

$$\mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\}$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2,2}$ on a $\mathcal{C}_{2,2,2,2} - \mathcal{C}_{2,2,2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2,2}}$ donc le plus petit indice $\mathcal{C} \neq 1$

$$\mathcal{C}_{2,2,2,2} - \mathcal{C}_{2,2,2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2,2,2}}$$

$$\mathcal{C}_{2,2,2,2} - \mathcal{C}_{2,2,2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2,2,2}}$$

$\mathcal{C} \notin \{1 \dots, |\mathcal{C}|\}$, alors

$$\text{Soit } \mathcal{C}_{|\mathcal{C}||\mathcal{C}_{2,2,2,2}} = \mathcal{C}_{2,2,2,2,2} = \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2,2,2}\};$$

$$\mathcal{C} =: \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2,2,2}\}$$



- Pour $\mathcal{C}_{2,2,2}$ pour les mêmes raisons que $\mathcal{C}_{2,2,2}$, $\mathcal{C} \neq 1$, $\mathcal{C} \neq 2$ et $\mathcal{C} \neq 3$.

Mais $\mathcal{C}_{2,2,2}$ est intersecté avec $\mathcal{C}_{2,2,2}$ d'où $\mathcal{C} = 4$

$$\mathcal{C}_{2,2} = \{ \mathcal{C}_{2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2} \}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{ \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2} \} \cup \{ \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2} \} \cup \{ \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2} \} \cup \{ \mathcal{C}_{2,2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2} \}$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2,2}$ pour les mêmes raisons que $\mathcal{C}_{2,2,2}$, $\mathcal{C} \neq 1$, $\mathcal{C} \neq 2$ et $\mathcal{C} \neq 3$.

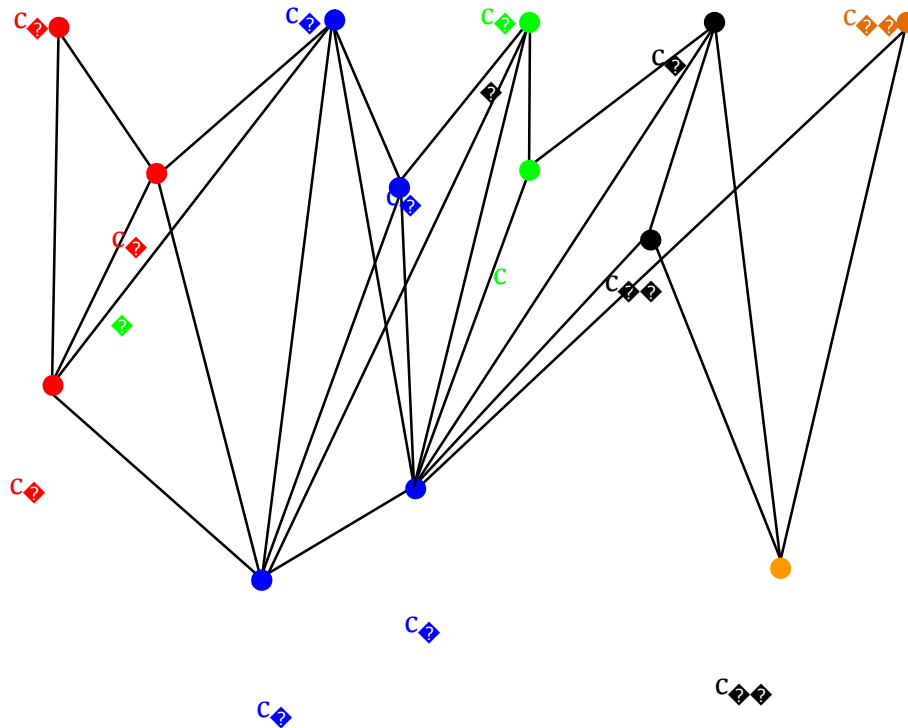


Figure III.9 : Partition minimum en cliques des sommets du graphe de cercles tangents transitifs

4 Problème de coloration :

Le problème de coloration de graphes est un problème central de l'optimisation combinatoire. Il a de nombreuses applications pratiques, telles que les problèmes d'emploi du temps, de gestion d'entrepôts, ou encore d'allocation de fréquences.

Une coloration d'un graphe $G = (V, E)$ consiste en une partition de V en ensembles stables. Chaque ensemble stable est associé à une couleur.

4.1 La coloration dans les graphes de cercles tangents transitifs :

Nous présentons un algorithme polynomial de coloration optimal d'une représentation de cercles tangents transitifs. Sachant que le graphe correspondant a une telle représentation est dans la classe des graphes de cocomparabilité. Une classe de graphes pour laquelle le problème de coloration a été résolu en un temps $O(n^2)$. [38]

La classe de graphes de cercles tangents est trivialement héréditaire, car lorsque l'on enlève un sommet, on obtient toujours un graphe d'intersection de cercles tangents. on applique le coloriage glouton à un graphe des cercles tangents transitifs G , où les cercles sont triés selon les r_i croissants.

Nous admettrons posséder en entrée de l'algorithme une représentation

$G = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$ par cercles tangents transitifs. Chaque cercle C_i ; $i \in$

~~$(1, 2, \dots, n)$ est défini par son centre (x, y) et son rayon r .~~

Algorithme 4 : Algorithme de coloration d'un graphe de cercles tangents transitifs

Entrée :

Un ensemble \mathcal{C} de n cercles tangents transitifs $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, $C_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tous tangents à une même droite réelle situés dans le même plan.

Sortie :

Une partition $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{|\mathcal{C}|}$ de \mathcal{C} en un minimum de stables ;

Étape 1 :

Trier \mathcal{C} selon les r_i

croissants ; Soit $\mathcal{C}_1 = \emptyset$

Pour chaque stable \mathcal{C}_i faire :

Définir un couple (C_i, C_{i+1}) avec $C_i = C_1$ (du premier cercle de \mathcal{C}_i) et

$C_{i+1} = C_n$ (du dernier cercle de \mathcal{C}_i).

Soit $\mathcal{C}_i = \{C_i\}$;

$\mathcal{C} =: \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_i$

Pour chaque $C_i, C_j \in \{2, 3, \dots, n\}$ faire

Rechercher selon $C_i, C_j \in \{1, \dots, |\mathcal{C}|\}$ le plus petit indice C_k tel que

$$C_k - C_i > 2 \overline{C_i C_j}$$

Soit C_k cet indice ;

Si $C_i \in \{1, \dots, |\mathcal{C}|\}$ faire

$$\mathcal{C}_i =: \mathcal{C}_i \cup \{C_k\} ;$$

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i$$

Si non faire

$$\text{Soit } \mathcal{C}_{|\mathcal{C}|+1} = \{C_i\} ;$$

$$\mathcal{C}_{|\mathcal{C}|+1} = \mathcal{C}_i \text{ et } \mathcal{C}_{|\mathcal{C}|+1} = \mathcal{C}_i$$

$$\mathcal{C} =: \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{|\mathcal{C}|+1} ;$$

Étape 2 :

Retourner \mathcal{C}

;

4.1.1 La finitude et la complexité de l'algorithme :

Le même cas que l'algorithme de partition en cliques d'un ensemble de cercles



La séquence formée par les valeurs prises par α au fil des itérations est strictement croissante, il y a donc un moment où $\alpha = \beta$. Donc l'algorithme se termine.

Complexité :

La complexité de l'algorithme de coloration est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1 :

La complexité de l'algorithme ϵ est de l'ordre de :

$$O(|V| \log |V|) = O(n \log n)$$

Preuve :

Le tri peut se faire en temps et espace $O(n \log n)$. Le balayage des cercles dans la boucle en $O(n - 1)$ et la recherche d'indice i_{k+1} selon les i_k , $i_k \in \{1 \dots, |V|\}$ en $O(|V|)$ qui est égal au pire des cas $O(n)$. Les autres instances se réalisent en temps $O(1)$ chacune d'où la complexité de l'algorithme est de $O(n \log n)$.

□

3.1.2 Justification de l'algorithme ϵ :

Théorème 2 :

La solution donnée par l'algorithme de coloration d'un graphe de cercles tangents transitifs est optimal.

Preuve :

lorsqu'on traite un sommet v_i représenté par le cercle C_i , on recherche le plus petit indice i_{k+1} tel que $i_{k+1} - i_k > 2r_i$ qui signifie la recherche de plus petit indice

d'un stable déjà existé tel que $C_i \cap C_{i_{k+1}} = \emptyset$ avec C_{i_k} le dernier cercle du stable.

L'existence d'un tel indice implique l'ajout du cercle C_i à ce stable. Si un tel indice n'existe pas alors on attribue une nouvelle couleur α au sommet v_i ce qui est équivalent dans l'algorithme à la naissance d'un nouveau stable $S_{\alpha} = \{v_i\}$, cela

signifie dans le sous graphe engendré par $\{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ que les couleurs 1 à $i - 1$ étaient déjà affectées à des prédécesseurs de v_i . Comme G est un graphe de cercles tangents transitifs, tous ces cercles prédécesseurs sont intersectés avec le cercle correspondant à v_i , donc ils forment une clique de taille i avec $i \leq \chi(G(v_i))$ mais dans le cas général, on a : $\chi(G(v_i)) \leq \chi(G)$ d'où l'optimalité de la coloration.

4.1.3 Exemple d'application :

Voici un exemple de graphe de cercles tangents transitifs avec sa représentation par un ensemble de cercles tangents partitionnés en un nombre minimum de stables.

Les cercles ordonnés selon les α_i croissants comme suit : (si $\exists \alpha_i, \alpha_j \neq \alpha_k$ tels que $\alpha_i \alpha_j = \alpha_k \alpha_l$, alors α_i et α_j seront ordonnés selon les α_i croissant).

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6 < \alpha_7 < \alpha_8 < \alpha_9 < \alpha_{10} < \alpha_{11} < \alpha_{12} < \alpha_{13} < \alpha_{14} < \alpha_{15} < \alpha_{16} < \alpha_{17} < \alpha_{18} < \alpha_{19} < \alpha_{20} < \alpha_{21} < \alpha_{22} < \alpha_{23} < \alpha_{24} < \alpha_{25} < \alpha_{26} < \alpha_{27} < \alpha_{28} < \alpha_{29} < \alpha_{30} < \alpha_{31} < \alpha_{32} < \alpha_{33} < \alpha_{34} < \alpha_{35} < \alpha_{36} < \alpha_{37} < \alpha_{38} < \alpha_{39} < \alpha_{40} < \alpha_{41} < \alpha_{42} < \alpha_{43} < \alpha_{44} < \alpha_{45} < \alpha_{46} < \alpha_{47} < \alpha_{48} < \alpha_{49} < \alpha_{50} < \alpha_{51} < \alpha_{52} < \alpha_{53} < \alpha_{54} < \alpha_{55} < \alpha_{56} < \alpha_{57} < \alpha_{58} < \alpha_{59} < \alpha_{60} < \alpha_{61} < \alpha_{62} < \alpha_{63} < \alpha_{64} < \alpha_{65} < \alpha_{66} < \alpha_{67} < \alpha_{68} < \alpha_{69} < \alpha_{70} < \alpha_{71} < \alpha_{72} < \alpha_{73} < \alpha_{74} < \alpha_{75} < \alpha_{76} < \alpha_{77} < \alpha_{78} < \alpha_{79} < \alpha_{80} < \alpha_{81} < \alpha_{82} < \alpha_{83} < \alpha_{84} < \alpha_{85} < \alpha_{86} < \alpha_{87} < \alpha_{88} < \alpha_{89} < \alpha_{90} < \alpha_{91} < \alpha_{92} < \alpha_{93} < \alpha_{94} < \alpha_{95} < \alpha_{96} < \alpha_{97} < \alpha_{98} < \alpha_{99} < \alpha_{100}$$

Soit $\alpha_1 = \emptyset$

Soit $\alpha_2 = \{\alpha_1\}$

$\alpha_3 = \alpha_2$

- Pour α_4 on a $\alpha_4 = \alpha_3 = \{\alpha_1\}$ et $\alpha_4 \alpha_5 - \alpha_3 \alpha_6 \leq 2 \alpha_4 \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9$ donc le plus petit indice

$$\alpha_4 \alpha_5 \neq 1 \text{ sachant que } |\alpha_4| = 1$$

Soit $\alpha_4 |_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 = \alpha_4 = \{\alpha_1\}$;

$$\alpha_4 \alpha_5 = \alpha_4 \alpha_6 = \alpha_4$$

$$\alpha_4 = \alpha_4 \cup \alpha_4 = \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_1\}$$

- Pour α_5 on a $\forall \alpha_i \in \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_4 \alpha_7 \alpha_8 \leq 2 \alpha_4 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}, \alpha_i \in \{1, 2, 3, \dots, \alpha_4\}$ donc le plus petit indice $\alpha_5 \alpha_6 \neq 1$ et $\alpha_5 \alpha_6 \neq 2$

Soit $\alpha_5 |_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 = \alpha_5 = \{\alpha_1\}$;

$$\alpha_5 \alpha_6 = \alpha_5 \alpha_7 = \alpha_5$$

$$\alpha_5 = \alpha_4 \cup \alpha_4 \cup \alpha_4 = \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_1\}$$

- Pour α_6 on a $\alpha_6 \alpha_7 - \alpha_5 \alpha_8 > 2 \alpha_4 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}$ donc le plus petit indice $\alpha_6 \alpha_7 = 1$

$\alpha_6 =: \alpha_4 \cup \{\alpha_4\}$ c.-à-d. $\alpha_6 = \{\alpha_1, \alpha_1\}$;

$$\alpha_6 \alpha_7 = \alpha_6 \alpha_8 \text{ et } \alpha_6 \alpha_8 = \alpha_6 \alpha_9 ;$$

$$\alpha_6 = \alpha_4 \cup \alpha_4 \cup \alpha_4 = \{\alpha_1, \alpha_1\} \cup \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_1\}$$

- Pour $\alpha_7 \forall \alpha_i \in \{1, \dots, \alpha_6\}$ on a $\alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 - \alpha_6 \alpha_{10} \alpha_{11} \leq 2 \alpha_4 \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14}$

Donc soit $\alpha_7 |_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 = \alpha_7 = \{\alpha_1\}$;

$$\alpha_7 \alpha_8 = \alpha_7 \alpha_9 = \alpha_7$$

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{C_1, C_2\} \cup \{C_3\} \cup \{C_4\} \cup \{C_5\}$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$: $\mathcal{C}_{2,2}$ intersecté avec $\mathcal{C}_{2,2}$ donc le plus petit indice

$$\mathcal{C}_{2,2} \neq 1$$

mais $\mathcal{C}_{2,2} - \mathcal{C}_{2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2}\mathcal{C}_{2,2}}$ d'où $\mathcal{C}_{2,2} = 2$

$$\mathcal{C}_{2,2} =: \mathcal{C}_{2,2} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\};$$

$$\mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2} \text{ et } \mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2};$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\}.$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ on a $\mathcal{C}_{2,2} - \mathcal{C}_{2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2}\mathcal{C}_{2,2}}$ donc le plus petit indice $\mathcal{C}_{2,2} = 1$

$$\mathcal{C}_{2,2} =: \mathcal{C}_{2,2} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\}$$

$$\mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2} \text{ et } \mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\}.$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ le plus petit indice $\mathcal{C}_{2,2} \neq 1$ pour les mêmes raisons que $\mathcal{C}_{2,2}$

Mais $\mathcal{C}_{2,2} - \mathcal{C}_{2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2}\mathcal{C}_{2,2}}$ d'où le plus petit indice est bien \forall

$$\mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\};$$

$$\mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2} \text{ et } \mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2};$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\}$$

- Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ on a

$$\mathcal{C}_{2,2} - \mathcal{C}_{2,2} \leq \overline{2\mathcal{C}_{2,2}\mathcal{C}_{2,2}} \neq 1$$

$$\mathcal{C}_{2,2} - \mathcal{C}_{2,2} \leq \overline{2\mathcal{C}_{2,2}\mathcal{C}_{2,2}} \neq 2$$

Mais $\mathcal{C}_{2,2} - \mathcal{C}_{2,2} > \overline{2\mathcal{C}_{2,2}\mathcal{C}_{2,2}}$ d'où $\mathcal{C}_{2,2} = 3$

$$\mathcal{C}_{2,2} =: \mathcal{C}_{2,2} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\}$$

$$\mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2} \text{ et } \mathcal{C}_{2,2} = \mathcal{C}_{2,2};$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}\}$$

• Pour $\mathcal{C}_{2,2}$ on a $\mathcal{C}_{2,2,2} - \overline{\mathcal{C}_{2,2,2}} > 2\mathcal{C}_{2,2,2,2}$ donc le plus petit indice $\mathcal{C}_{2,2,2} = 1$

$$\mathcal{C}_{2,2} =: \mathcal{C}_{2,2} \cup \{\mathcal{C}_{2,2,2}\} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2}\}$$

$$\mathcal{C}_{2,2,2} = \mathcal{C}_{2,2,2,2} \text{ et } \overline{\mathcal{C}_{2,2,2}} = \mathcal{C}_{2,2,2};$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2,2} \cup \mathcal{C}_{2,2,2} = \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\} \cup \{\mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{2,2}\}$$

• Pour $\mathcal{C}_{2,2,2}$: $\mathcal{C}_{2,2,2,2,2} - \overline{\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}} = \mathcal{C}_{2,2,2,2,2} - \overline{\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}} \leq 2\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}$
donc $\mathcal{C}_{2,2,2} \neq 1$

Mais $\mathcal{C}_{2,2,2,2,2} - \overline{\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}} = \mathcal{C}_{2,2,2,2,2} - \overline{\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}} > 2\mathcal{C}_{2,2,2,2,2}$
d'où $\mathcal{C}_{2,2,2} = 2$

$$C_{2,2} = C_{2,2} \cup \{C_{2,2,2}\} = \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2}\}$$

$$C_{2,2,2} = C_{2,2,2} \text{ et } C_{2,2,2} = C_{2,2,2,2};$$

$$C_2 = C_{2,2} \cup C_{2,2,2} \cup C_{2,2,2,2} \cup C_{2,2,2,2,2} = \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2}\} \cup \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2,2}\} \cup \{C_{2,2,2,2,2}\}$$

• Pour $C_{2,2,2}$ on a

$$C_{2,2,2,2,2} - C_{2,2,2,2,2} > 2 C_{2,2,2,2,2} C_{2,2,2,2,2} \text{ d'où } C_{2,2,2} = 1$$

$$C_{2,2,2} = C_{2,2,2} \text{ et } C_{2,2,2} = C_{2,2,2,2,2}$$

$$C_{2,2} = C_{2,2} \cup \{C_{2,2,2}\} = \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2}, C_{2,2,2}\}$$

$$C_2 = C_{2,2} \cup C_{2,2,2} \cup C_{2,2,2,2,2} \cup C_{2,2,2,2,2,2} = \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2}, C_{2,2,2,2,2}\} \cup \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2,2,2}\} \cup \{C_{2,2,2,2,2,2}\}$$

• Pour $C_{2,2,2,2,2}$ on a $C_{2,2,2,2,2,2} - C_{2,2,2,2,2,2} = C_{2,2,2,2,2,2} - C_{2,2,2,2,2,2} \leq 2 C_{2,2,2,2,2,2} C_{2,2,2,2,2,2}$
d'où $C_{2,2,2,2,2} \neq 1$

$$C_{2,2,2,2,2,2} - C_{2,2,2,2,2,2} = C_{2,2,2,2,2,2} - C_{2,2,2,2,2,2} > 2 C_{2,2,2,2,2,2} C_{2,2,2,2,2,2} \text{ donc } C_{2,2,2,2,2} = 2$$

$$C_{2,2,2,2,2} = C_{2,2,2,2,2} \text{ et } C_{2,2,2,2,2} = C_{2,2,2,2,2,2};$$

$$C_{2,2} = C_{2,2} \cup \{C_{2,2,2}\} = \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2}, C_{2,2,2}\}$$

$$C_2 = C_{2,2} \cup C_{2,2,2} \cup C_{2,2,2,2,2} \cup C_{2,2,2,2,2,2} = \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2}, C_{2,2,2,2,2}\} \cup \{C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2}, C_{2,2,2,2,2}, C_{2,2,2,2,2,2}\} \cup \{C_{2,2,2,2,2,2}\}$$

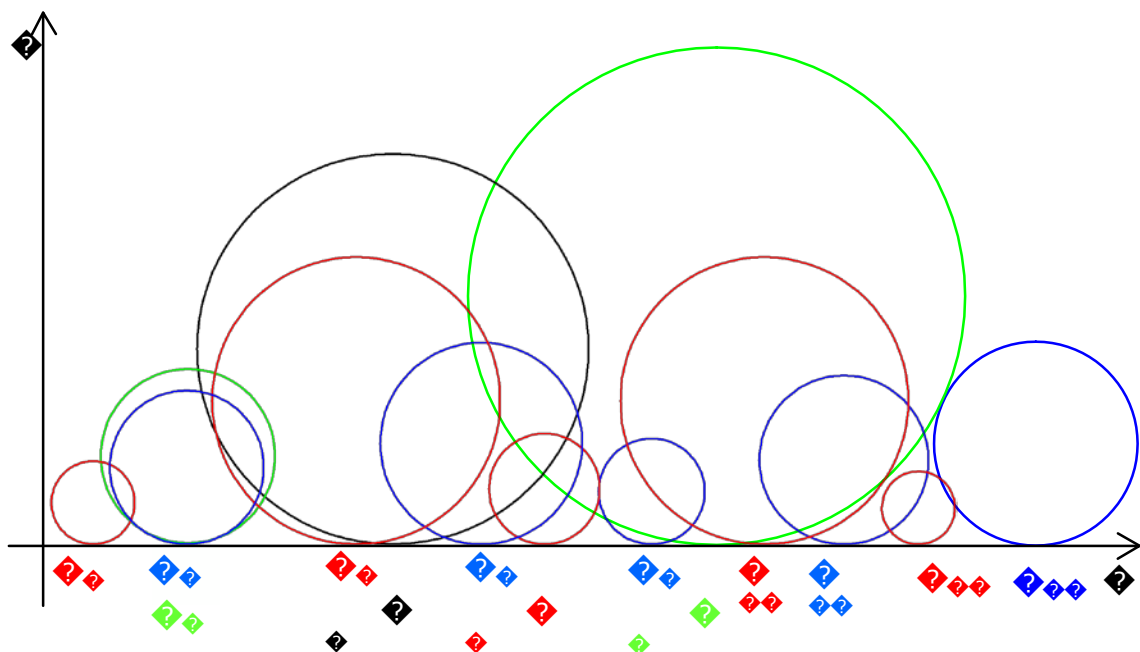


Figure III.6 : Coloration de la représentation du graphe de cercles tangents transitifs

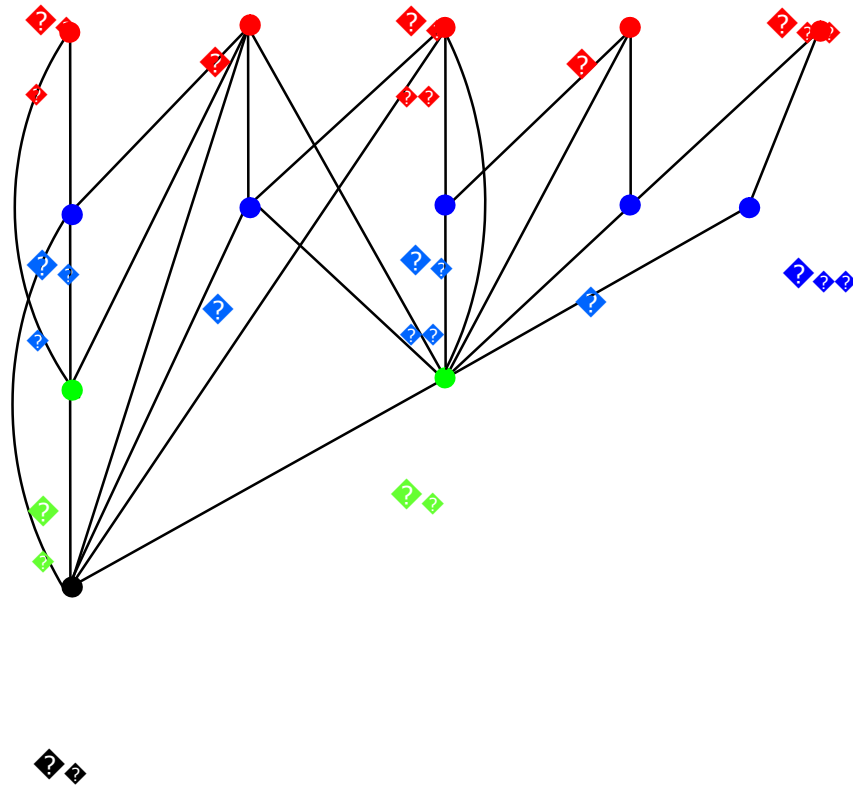


Figure III.v : Le graphe associé à la coloration de cercles tangents transitifs

SOUS CLASSES DES GRAPHEs DE CERCLES TANGENTS TRANSITIFS



1	Graphes sans \diamond et l'ordre total :	58
2	Graphes sans \diamond et le préordre total :	58
3	Graphes et ordres d'intervalles :	59
4	Graphes d'indifférence et structure de quasi-ordre :	60
5	Les graphes à seuil et les graphes de cercles tangents :	62
5.1	Définitions et propriétés :	62
5.2	Représentation des graphes à seuil par des cercles tangents :	63
5.3	Exemple d'application :	67
6	Graphes (ordre) d'arborescence comparabilité :	68
6.1	Définitions et propriétés :	68
6.2	Représentation des graphes d'arborescence comparabilité par des cercles tangents :	70
6.3	Exemple d'application :	73
7	Graphes d'arbres :	75
7.1	Définitions :	75
7.2	Représentation des graphes d'arbres par des cercles tangents :	76
7.3	Exemple d'application :	77



Nous présentons dans ce chapitre des structures de préférence qui sont des cas particuliers de la structure d'ordre d'intervalles, et dont les classes de graphes correspondantes ont été identifiées et caractérisées comme des graphes parfaits. En particulier les graphes à seuil [6] [17] [40] et les graphes d'arborescence comparabilités (Wolk [81] [82] Golombic [39]) et l'on propose une représentation dans le plan par des cercles tangents pour chacune de ces classes et aussi pour une sous-classe de la classe de graphes de comparabilité qui est la classe des graphes d'arbres.

Nous donnerons à la fin de ce chapitre une hiérarchie de l'ensemble de ces classes et autres qui ont un lien avec les graphes de cercles tangents (voir figure IV.22).

1 Graphes sans \diamond_{\diamond} et l'ordre total :

Dans une structure d'ordre total, la relation d'incomparabilité est vide ($\diamond = \emptyset$) et la relation d'indifférence \diamond est limitée aux couples identiques $\diamond = \{(\diamond, \diamond) : \diamond \in \diamond\}$. La relation de préférence stricte \diamond est transitive.

La structure d'ordre total consiste donc en un rangement des éléments de \diamond du meilleur au moins bon (via la relation \diamond) sans qu'il y ait d'ex aequo possible.

Proposition 1 :

Une structure de préférence $\{\diamond, \diamond\}$ sur un ensemble fini \diamond est une structure d'ordre total si et seulement si :

$\exists \diamond : \diamond \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall \diamond, \diamond \in \diamond$:

$$\begin{aligned} \diamond & \diamond \diamond \diamond \Leftrightarrow \diamond(\diamond) > \\ & \diamond(\diamond) \\ \diamond(\diamond) = \diamond(\diamond) & \Rightarrow \diamond \\ & = \diamond \end{aligned}$$

Remarque 1 :

- La structure d'ordre total peut être représentée par des points sur la droite des réels.
- Un ordre total est un ordre de cercles tangents.

Remarque 2 :

- Le graphe associé à la structure d'ordre total est le graphe sans \diamond_{\diamond} .

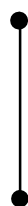


Figure IV.1 : \diamond_{\diamond}

- Le graphe sans \diamond_{\diamond} est représentable par des cercles tangents disjoints.

2 Graphes sans \diamond_{\diamond} et le préordre total :

Proposition 2 : [2]

Soient \diamond et \diamond deux relations binaires définies sur un même ensemble non vide \diamond . $\{\diamond, \diamond\}$ est une structure de préordre total sur \diamond , si et seulement si :

$\exists \varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et une constante $q: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que $\forall \mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
 \diamond \diamond \diamond \diamond &\Leftrightarrow \diamond(\diamond) - \diamond(\diamond) > \\
 &\quad \diamond(\diamond) - \diamond(\diamond) \\
 \diamond \diamond \diamond &\Leftrightarrow \diamond(\diamond) - \diamond(\diamond) = \\
 &\quad \diamond(\diamond) - \diamond(\diamond)
 \end{aligned}$$

Remarque Ƴ :

- Un préordre total est un ordre de cercles tangents.

Remarque Ʒ :

- Le graphe associé à la structure de préordre total est le graphe sans $\diamond \diamond$.

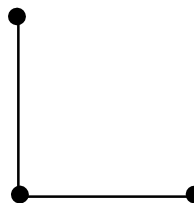


Figure IV.Ƴ :



Ƴ Graphes et ordres d'intervalles :

Les graphes d'intervalles en général, comme on l'a déjà vu au chapitre II, n'ont pas été prouvé que ce sont des graphes de cercles tangents, ni l'ordre correspondant est un ordre de cercles tangents.

Les graphes d'intervalles propres et les graphes d'intervalles unitaires ont été introduits par Roberts [61, 62] pour modéliser l'indifférence en théorie du choix social et en psychologie.

Un graphe est un graphe *d'intervalles propres* s'il admet une représentation par intervalles dans laquelle aucun intervalle n'en contient proprement un autre (voir Figure IV.Ƴ) ; une telle représentation est appelée *représentation par intervalles propres*. De la même manière, un graphe est un graphe *d'intervalles unitaires* s'il admet une représentation dans laquelle tous les intervalles sont de même taille ; une telle représentation est appelée *représentation par intervalles unitaires*.

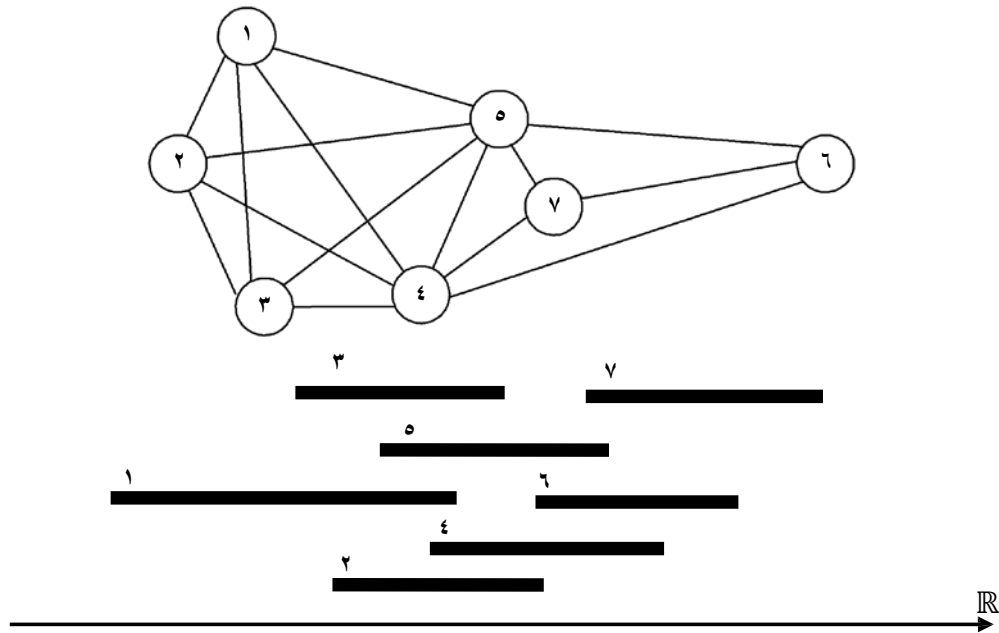


Figure IV.3 : Graphe d'intervalles propres et sa représentation par des intervalles

Théorème 1 : (Roberts [12])

Un graphe d'intervalles est un graphe d'intervalles unitaire si et seulement s'il ne contient pas de sous graphes induit isomorphe à $K_{2,2}$. (Figure IV.4)

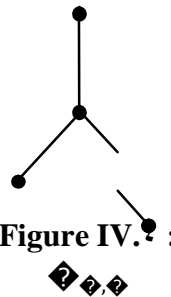


Figure IV.4 :

4 Graphes d'indifférence et structure de quasi-ordre :

Définition 1 :

$G(n, n)$ est un graphe d'indifférence si et seulement si c'est un graphe d'intervalles sans $K_{2,2}$.

Théorème 2 : [12]

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un graphe G soit un graphe d'indifférence :

- (i) G est un graphe représentatif d'une famille d'intervalles \mathcal{I} à n incomparables par l'inclusion.
- (ii) G est un graphe représentatif d'une famille d'intervalles de même longueur.

(iii) \diamond n'admet aucun sous graphe isomorphe à ceux de la figure IV.°.

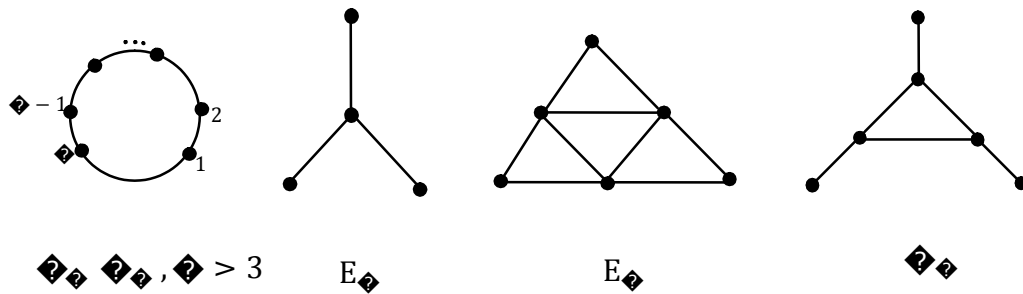


Figure IV.° : Configuration minimales interdites pour un graphe d'indifférence

Proposition ¶ : (Scott et Suppes (1959)) [V.]

$\{\diamond, \heartsuit\}$ est une structure de quasi-ordre sur l'ensemble \diamond , si et seulement si :

$\exists \heartsuit : \diamond \rightarrow \mathbb{R}$ et une constante positive \heartsuit telles que $\forall \heartsuit, \heartsuit \in \diamond$:

$$\begin{aligned} \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit &\Leftrightarrow \heartsuit(\heartsuit) - \\ &\heartsuit(\heartsuit) > \heartsuit \\ \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit &\Leftrightarrow |\heartsuit(\heartsuit) - \\ &\heartsuit(\heartsuit)| \leq \heartsuit \end{aligned}$$

Lemme ¶ : Abbas, M. (1994) [V]

Soient \heartsuit et \heartsuit deux relations binaires définies sur un même ensemble non vide \diamond .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\{\heartsuit, \heartsuit\}$ est une structure de quasi-ordre sur \diamond .
- (ii) $\{\heartsuit, \heartsuit\}$ est une structure de préférence sur \diamond n'admettant pas de sous-graphes induits isomorphes aux configurations minimales de la figure IV.¶

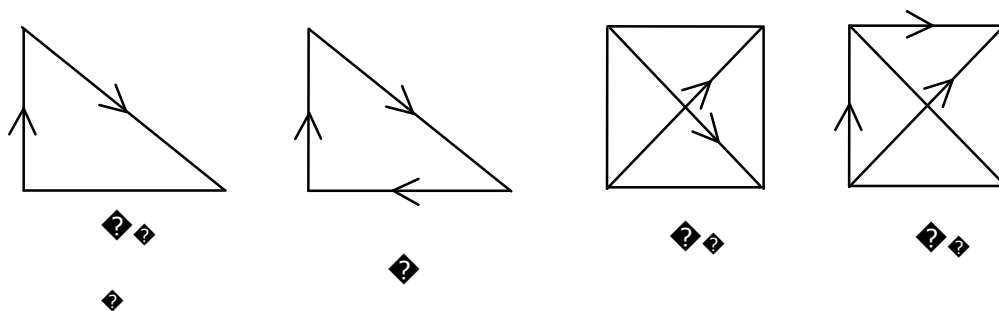


Figure IV.¶ : Configurations minimales interdites pour un quasi-ordre.

Corollaire ¶ : [V]

Un quasi-ordre est un ordre de cercles tangents.

Remarque ° :

La représentation de cercles tangents associée à la structure de quasi-ordre peut être

~~On considère les intervalles comme projection de cercles de même rayon sur une~~
tangente commune.

◦ Les graphes à seuil et les graphes de cercles tangents :

Il existe plusieurs caractérisations des graphes à seuil. Voir ([10] [11] [12]) pour plus d'informations.

◦.1 Définitions et propriétés :

Une caractérisation de la classe de graphes à seuil due à Chvatàl et Hammer donnée par le théorème suivant :

Théorème 1 : (Chvatàl et Hammer, 1977) [11]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe G soit à seuil est qu'il ne possède pas de sous-graphe induit isomorphe à $2K_2$, K_3 ou K_4 (voir figure IV.1).

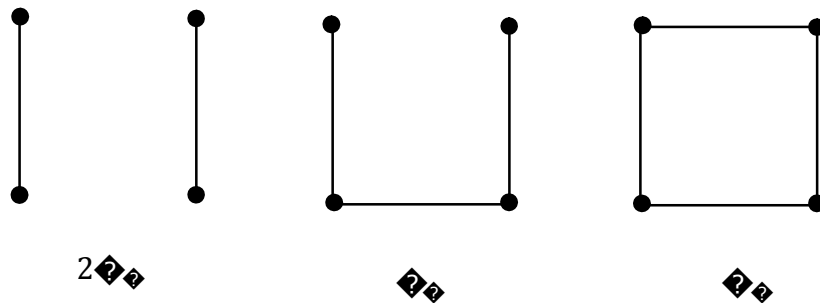


Figure IV.1 : Configurations minimales interdites pour un graphe à seuil

Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe à seuil si à chaque sommet $v \in V$ peut être associé un entier positif d_v de manière à ce que $V \subseteq V$ soit un stable si et seulement si $\sum_{v \in V} d_v \leq k$ avec k une constante entière (appelé seuil).

Les graphes à seuil ont une structure très particulière : tout graphe à seuil est représentable par une clique $K_r = K_{r_1} \cup \dots \cup K_{r_r}$ et un stable $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$ ($r \leq r$ et S_1, \dots, S_r non vides pour $i = 1, \dots, r$) tel qu'un sommet de K_{r_i} est adjacent à un sommet de S_{r_i} si et seulement si $d_{r_i} > k$ pour tout $r_i, S_{r_i} \in \{1, \dots, r\}$. [10]

Le fait que la classe de graphes à seuil est incluse dans la classe de graphes d'intervalles nous permet de représenter les graphes à seuil par des intervalles sur la droite des réels.

Exemple :

Voici un exemple d'une représentation d'un graphe à seuil par des intervalles.

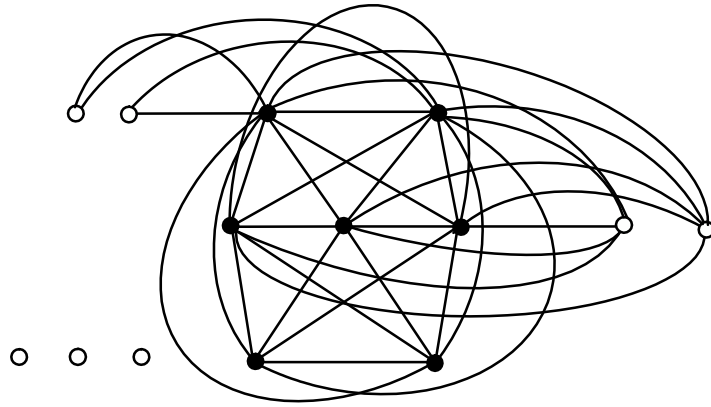


Figure IV.8 : Exemple d'un graphe à seuil

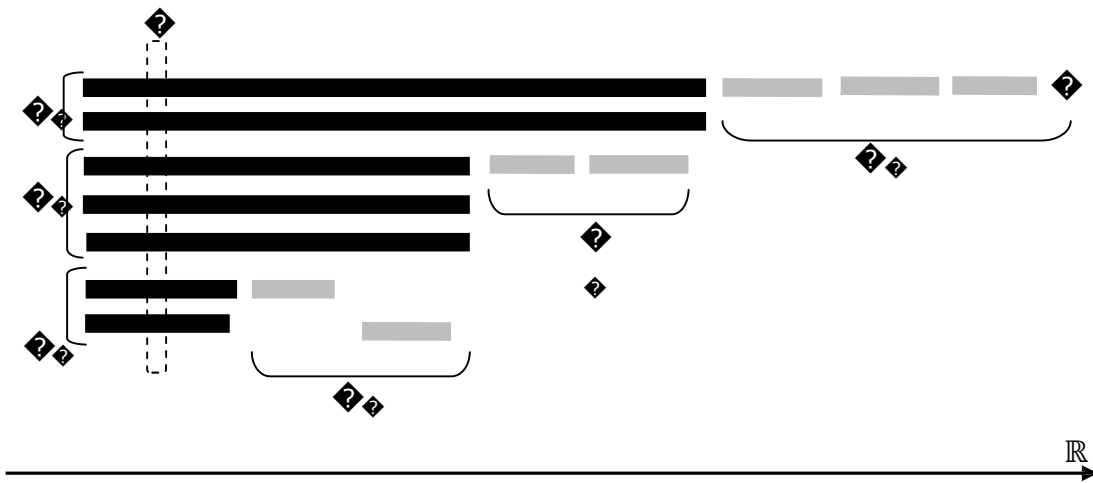


Figure IV.9 : Une représentation d'un graphe à seuil (Figure IV.8) par intervalles

◦.2 Représentation des graphes à seuil par des cercles tangents :

Leibowitz dans sa dissertation de doctorat [10] a démontré par construction qu'un graphe à seuil est représentable par des intervalles ayant au plus deux longueurs différentes.

Propriété 1 : (Leibowitz ; 1978) [10]

Tout graphe à seuil possède une représentation par des intervalles ayant deux longueurs distinctes au plus.

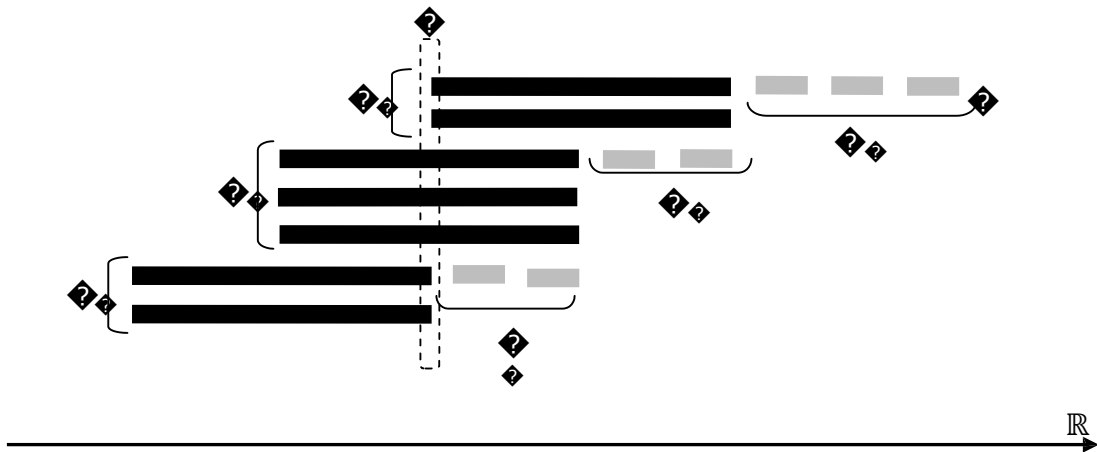


Figure IV.10 : Une représentation d'un graphe à seuil (Figure IV.9) par intervalles ayant deux longueurs distinctes

Voici une démonstration constructive qu'un graphe à seuil est représentable par des cercles tangents en admettant avoir au début une partition de l'ensemble de sommets du graphe en un stable S et une clique C vérifiant, $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$ et $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$ ($r \leq r$) et C_i, S_i non vides pour $i = 1, \dots, r$) tel qu'un sommet de C_i est adjacent à un sommet de S_j si et seulement si $i > j$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, r\}$.

Proposition 4 :

Tout graphe à seuil possède une représentation par des cercles tangents ayant deux rayons distincts au plus.

Démonstration :

Supposons que le graphe est connexe, sinon on traitera séparément les composantes connexes.

Un graphe à seuil est partitionné en une clique $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$ et un stable $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$ ($r \leq r$ et C_i, S_i non vides pour $i = 1, \dots, r$)

- 1) Les sommets de $C_i, 1 \leq i \leq r$ sont représentés par des cercles de même rayon et de même centre (on peut les considérer comme un seul cercle).
- 2) Le cercle représentatif de C_i est intersecté avec les cercles correspondants aux sommets du stable $S_j = S_1 \cup \dots \cup S_r$

- ζ) Les cercles représentatifs de \mathcal{C}_n sont de même rayon $\frac{1}{2n}$, et les cercles représentatifs de stable \mathcal{C}_n sont de même rayon $\frac{1}{2n}$.
 ξ) Les sommets du stable \mathcal{C}_n sont représentés par des cercles tel que $\forall 1 < i \leq n$
 $\frac{1}{2}(\frac{1}{2n}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2n}) = 2 \cdot \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}; \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

avec (c_j, c_{j+1}) : le cercle correspondant au sommet de S .

Soient :

- ✓ $|C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_\ell| = \ell$
- ✓ C_j : le cercle représentatif des sommets de la clique K_j avec $C_j = (c_j, c_{j+1})$,
- ✓ C_j : le j -ième cercle du j -ième stable avec $C_j = (c_j, c_{j+1})$.

Définissons les valeurs de α_j et β_j :

Pour la borne inférieure de α_j en fonction de β_j ; ℓ et α_j il faut assurer l'intersection de C_j avec tous les cercles représentatifs de stable K_j .

On a :

$$\alpha_j - \beta_j \leq 2\beta_j \dots\dots\dots (')$$

$$\alpha_j - \beta_j \leq 2\beta_j$$

Puisque $\ell \alpha_j = \beta_j + (\ell - 1)\alpha_j + 2(\ell - 1)\beta_j$

$$\alpha_j + (\ell - 1)(2\beta_j + \alpha_j) - \beta_j \leq 2\beta_j \dots\dots\dots (')$$

On additionne (') et (') on aura :

$$(\ell - 1)(2\beta_j + \alpha_j) \leq 4\beta_j$$

.....(I) Donc

$$\frac{(\ell - 1)(\alpha_j + 2\beta_j)}{16\beta_j} \leq \alpha_j$$

De plus on a :

$$2\ell\beta_j + (\ell - 1)\alpha_j \leq 2\beta_j$$

Alors

$$\frac{(\ell - 1)(\alpha_j + 2\beta_j)}{16\beta_j} \geq \alpha_j \dots\dots\dots (II)$$

Les conditions à satisfaire sont les suivantes :

$$\frac{(\ell - 1)(\alpha_j + 2\beta_j)}{16\beta_j} \leq \alpha_j$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 & (\ell - 1) \binom{\ell}{1} \\
 & + 2\ell \binom{\ell}{2} \\
 & = \frac{2}{2} \binom{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

$$\binom{\ell}{2}$$

(

ℓ

-

1

)

(

2

)

1

6

(

)

=

$\binom{\ell}{2}$

$$= \frac{(\ell - 1) \binom{\ell}{2} + \binom{\ell}{2}}{16} - \frac{(\ell - 1) \binom{\ell}{2} + \binom{\ell}{2}}{2}$$

$$r_{i+1} - r_i = \left[\frac{1}{4} (r_i - r_{i-1}) \right] - r_i$$

$$= \frac{1}{4} (r_i - r_{i-1}) - r_i + 2\sqrt{2} r_i - 3 - 2\sqrt{2} r_i$$

Si $r_i \in [3 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 3]$; il suffit de prendre

$$r_{i+1} \geq \frac{(r_i - r_{i-1}) + r_i}{4}$$

Si $r_i \in]0, 2\sqrt{2} + 3[\cup]2\sqrt{2} - 3, +\infty[$, alors il faut prendre

$$\geq \frac{(r_i - r_{i-1})^2 (r_i + r_{i-1})}{4 r_i}$$

Comme résumé on a :

Soient

- * r_i : le rayon des cercles correspondants aux sommets du stable S_i .
- * $r_i \in \mathbb{R}^+$ tel que $r_i(r_{i+1}) - r_{i-1}(r_i) = 2r_i + r_{i-1}$; $\forall 1 < i \leq n$.
- * $r_i = \frac{(r_{i-1})^2 + r_{i-1}}{4}$.

On définit r_{i+1} le rayon des cercles correspondants aux sommets de la clique S_{i+1} comme suit :

Si $r_i \in [3 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 3]$; alors on prend

$$r_{i+1} \geq \frac{(r_i - r_{i-1}) + r_i}{4}$$

Si $r_i \in]0, 2\sqrt{2} + 3[\cup]2\sqrt{2} - 3, +\infty[$, alors on prend

$$r_{i+1} \geq \frac{(r_i - r_{i-1})^2 (r_i + r_{i-1})}{4 r_i}$$

Par construction, on tenant compte des conditions précédentes ; une fois le cercle S_{i+1} représentatif des sommets de la clique S_{i+1} placé, nous disposons dans l'ordre les cercles représentatifs des sommets du stable $S_i = S_{i-1} \cup \dots \cup S_1$ à la droite du cercle représentatif des

Chaque clique C_{i+1} est représentée par un cercle du rayon r_{i+1} à la droite de premier cercle C_i

tel que $\frac{r_{i+1}}{r_i} = 2 \quad \forall i \in \{1, \dots, r-1\}$

C_r : le cercle représentatif de sommet le plus à droite du stable S .

□

◦.3 Exemple d'application :

Le graphe de la figure IV.1 représenté par intervalles dans la figure IV.2 a une représentation par cercles tangents (Figure IV.3) en appliquant la procédure précédente comme suit :

$q = 0,4$
 $\varepsilon = 0,25$
 $\ell = 4$

$$r = \frac{(\ell - 1)\varepsilon + 2\ell q}{2}$$

$$r = \frac{(4 - 1)0,25 + 2 \times 4 \times 0,4}{2} = 1,975$$

$1,975 \in [3 - 2\sqrt{2}q, 2\sqrt{2}q + 3] = [2, 4]$ donc il suffit de prendre

$$r \geq \frac{(\ell - 1)\varepsilon + 2\ell q}{2} \geq 1,975$$

Soit $r = 2$.

C_1

$\chi(C_1) = 3$

$\chi(C_2) = (r - r_{i+1})^2 = (2 - 2,5)^2 = (2,5)^2 = 6,25$

$\chi(C_3) = \chi(C_2) + r_{i+1} + q = 3 + 2,5 + 0,4 = 5,9$ $\chi(C_4) = \chi(C_3) + 2r_{i+1} + q = 6,95$

$\chi(C_5) = \chi(C_4) + 2r_{i+1} + q = 8$ $\chi(C_6) = \chi(C_5) + 2r_{i+1} + q = 9,05$

$\chi(C_7) = \chi(C_6) + 2r_{i+1} + q = 10,1$ $\chi(C_8) = \chi(C_7) + 2r_{i+1} + q = 11,15$

$\chi(C_9) = \chi(C_8) + 2r_{i+1} + q = 12,2$ $\chi(C_{10}) = \chi(C_9) + 2r_{i+1} + q = 13,25$

$2\sqrt{2}r_{i+1} = 2\sqrt{2,5} \times 0,4 = 2$

$\chi(C_{10}) - \chi(C_9) = 2r_{i+1} + q \Leftrightarrow \chi(C_{10}) - 2$ d'où $\chi(C_{10}) = 6,95 - 2 = 4,95$

$$n(\mathbb{Z}_n) = n(\mathbb{Z}_n) - 2 = 9.05 - 2 = 7.05$$

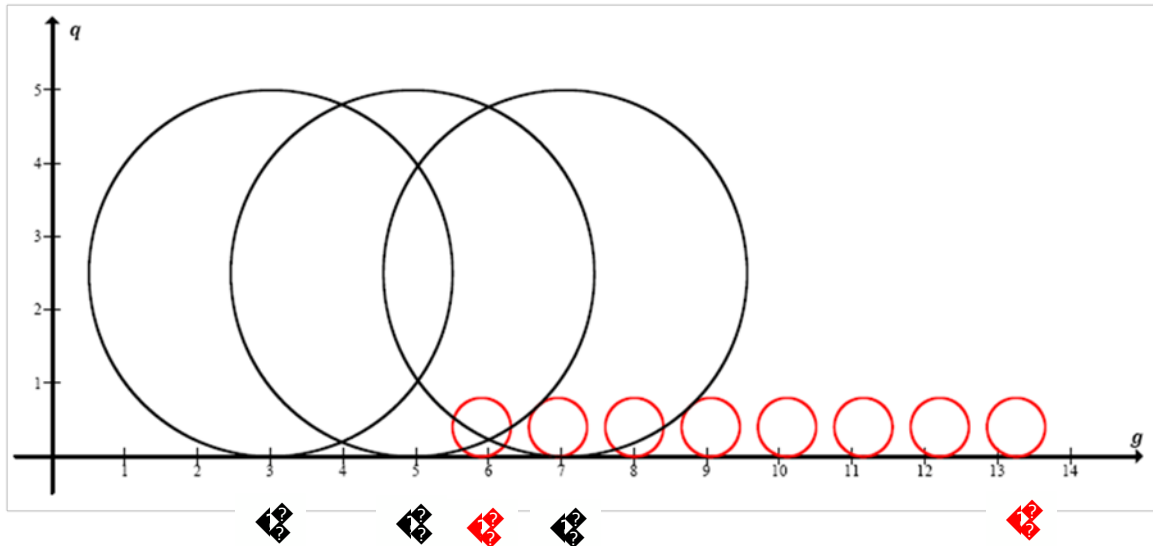


Figure IV.11 : Représentation d'un graphe à seuil (figure IV.8) par des cercles tangents

Remarque 6 : cette représentation n'est qu'un exemple, c'est-à-dire que d'autres représentations peuvent exister sous d'autres conditions.

6 Graphe (ordre) d'arborescence comparabilité :

6.1 Définitions et propriétés :

Les graphes trivialement parfaits appelés aussi graphes d'arborescence-comparabilité ont été étudiés par Wolk [81] [82] et Golombic [39]. Le théorème suivant dû à Golombic caractérise cette classe de graphe par des configurations minimales interdites.

Théorème 4 : (Wolk 1962[81], Golombic 1978[39])

Soit $G(G, E)$ un graphe simple. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) G est le graphe de comparabilité d'un ordre d'arborescence ;

(ii) G est trivialement parfait ;

(iii) G est un graphe sans sous-graphe induit isomorphe à C_4 ou $C_2 \times C_2$.

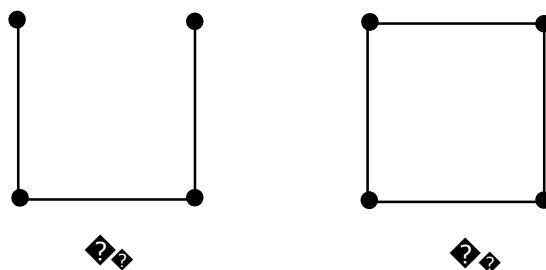


Figure IV.12 : Configurations minimales interdites pour un graphe

d'arborescence-comparabilité

Définition 2 :

Soient \prec, \succ deux relations binaires définies sur un même ensemble E . Une structure de préférence $\{\prec, \succ\}$ sur l'ensemble E est dite structure d'ordre d'arborescence comparabilité si et seulement si :

- (i) $\forall x, y, z \in E: x \prec y, x \prec z \Rightarrow y \prec z$
- (ii) $\forall x, y, z, w \in E$ (x à w distincts) :
 $x \prec y, x \prec z, y \prec w, z \prec w \Rightarrow x \prec (y \wedge z) \wedge w$

Définition 3 : [\wedge]

Un poset $(E, <)$ est un ordre d'arborescence si pour tout $x \in E, \{y: y < x\}$ est une sous classe linéairement ordonnée.

Une autre caractérisation des graphes trivialement parfaits due à Parral, A., Schefflerb, P. (1997) [10] donnée sous forme d'un lemme qu'on va énoncer après la définition d'une classe de graphes d'intervalles dite graphe d'intervalles élémentaires.

Considérons une structure binaire \prec . Un intervalle I de E est *élémentaire* [\wedge, ξ]

lorsque pour tout intervalle J de E , si $I \cap J \neq \emptyset$, alors $I \subset J$ ou $J \subset I$.

Définition 4 : [\wedge]

On dit qu'un graphe G est un graphe d'intervalles élémentaires si G est un graphe d'intersection d'intervalles, tels que deux intervalles quelconque sont soit disjoints,

soient l'un d'eux est contenu dans l'autre. (Voir Figure IV.13).

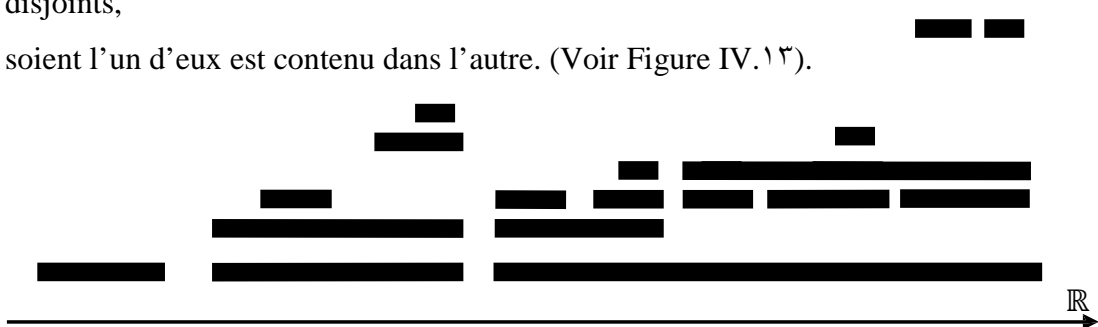


Figure IV.13 : Graphe d'intervalles élémentaires

Lemme [\wedge] :

Un graphe G est trivialement parfait si et seulement si G est un graphe d'intervalles élémentaires.

4.2 Représentation des graphes d'arborescence comparabilité par des cercles tangents :

Par analogie avec la représentation d'un graphe d'arborescence comparabilité par des intervalles sur la droite des réels, on définit l'arbre d'intersection de cliques de ce graphe comme suit : (voir fig. IV.14)

- La clique $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ forme une clique avec chaque clique de la représentation.
- S'il existe un chemin entre deux cliques, alors ces deux cliques forment une clique.
- Pas d'intersection entre deux cliques de la même couche.

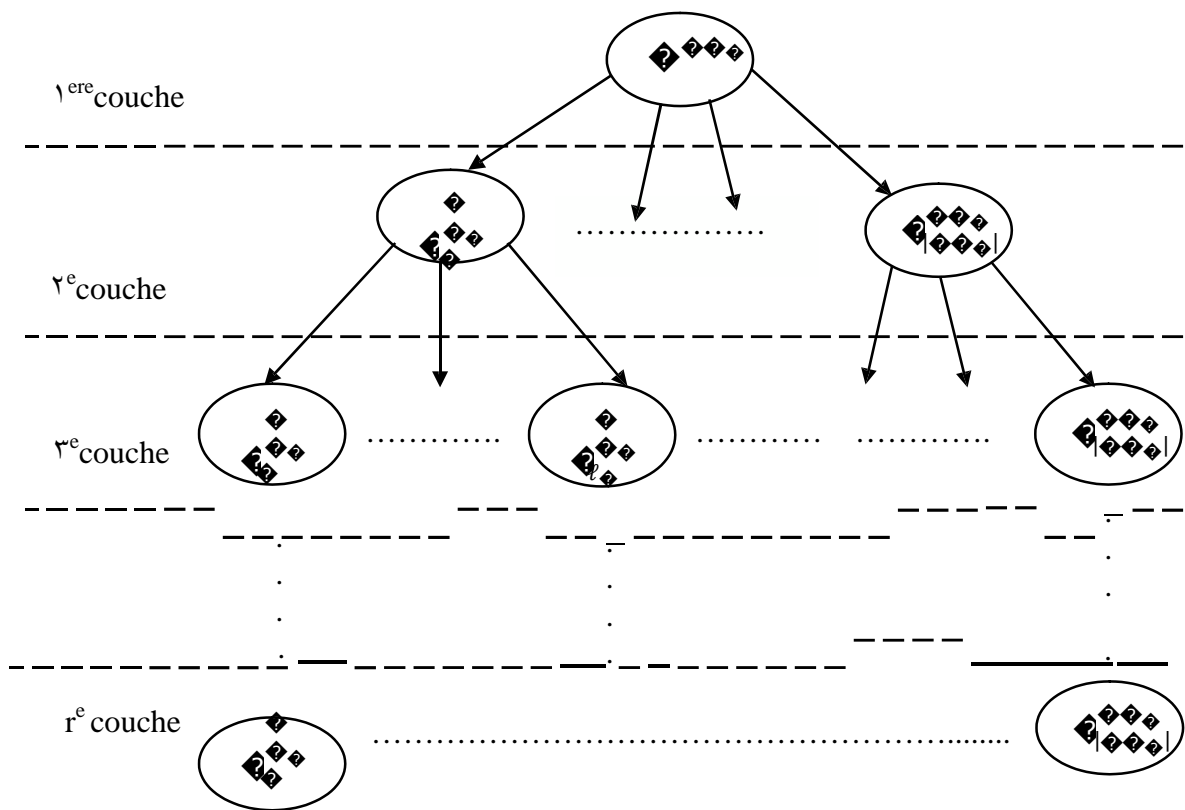


Figure IV.14 : Un arbre d'intersection de cliques d'un graphe d'arborescence comparabilité

Proposition 1 :

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'arborescence comparabilité.

G est représentable par cercles tangents ayant $2|V|$ rayons distincts au plus.

Démonstration :

Dans notre représentation d'un tel graphe par des cercles tangents, les sommets de chaque clique d'une couche sont représentés par des cercles de même rayon et de même centre (on peut les considérer comme un seul cercle).

~~D'une manière générale, le graphe se partage en \diamond classes.~~

1^{ere} couche : représenté par un seul cercle $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$.

\mathbb{C}_{ℓ} couche : représenté par des cercles $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$.

$\mathbb{C}_{\ell} \in \{1; \dots; |\mathbb{C}_{\ell} h_{\ell}|\}$ $2 \leq \mathbb{C}_{\ell} \leq \mathbb{C}_{\ell}$.

Avec $|\mathbb{C}_{\ell} h_{\ell}|$: le nombre de cliques dans la \mathbb{C}_{ℓ} couche. On note :

\mathbb{C}_{ℓ} : le plus grand nombre de cliques filles d'une clique de la couche $(\mathbb{C}_{\ell} - 1)$.

\mathbb{C}_{ℓ} : $\mathbb{C}_{\ell} \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}_{\ell}}$ tel que pour tout cercle $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$ représentatif d'une clique de la couche $(\mathbb{C}_{\ell} - 1)$, les cercles correspondants aux cliques filles de $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$ vérifient

$$\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) - \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) = 2\mathbb{C}_{\ell} + \mathbb{C}_{\ell}; \forall 1 < \mathbb{C}_{\ell} \leq \ell$$

Pour déterminer les rayons des cercles dans la représentation, il faut assurer l'intersection de chaque cercle représentatif d'une clique de la \mathbb{C}_{ℓ} couche avec :

- ✓ $\ell_{\mathbb{C}_{\ell}}$ cercles de la couche $(\mathbb{C}_{\ell} + 1)$.
- ✓ $\prod_{\mathbb{C}_{\ell}} \ell_{\mathbb{C}_{\ell}}$ cercles de rayon \mathbb{C}_{ℓ} .

1. L'intersection d'un cercle représentatif d'une clique de la \mathbb{C}_{ℓ} couche avec

$\ell_{\mathbb{C}_{\ell}}$ cercles représentatifs de ces cliques filles dans la couche $(\mathbb{C}_{\ell} + 1)$:

En effet, chaque clique d'une couche \mathbb{C}_{ℓ} forme un graphe à seuil avec ces cliques filles de la couche $(\mathbb{C}_{\ell} + 1)$. Alors, il suffit de satisfaire les conditions concernant la représentation d'un graphe à seuil par des cercles tangents en considérant le sous graphe induit par les sommets des deux couches en question, et étant données $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$, $\ell_{\mathbb{C}_{\ell}}$ et \mathbb{C}_{ℓ} .

Alors pour deux couches $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$, déterminons \mathbb{C}_{ℓ} comme suit :

Soit $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$.

Si $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) \in \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) - 2\sqrt{2} \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) + 3 \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$, alors on prend

$$\frac{(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) - \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}))}{\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})} \leq \mathbb{C}_{\ell} < \frac{(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) + \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}))}{\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})} + \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell})$$

Si $\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) \in \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) - 2\sqrt{2} \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) + 3 \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) \cup \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) - 2\sqrt{2} \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) - 3 \mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell}(\mathbb{C}_{\ell})); \mathbb{C}_{\ell}) : + \infty$, alors on prend

$$\begin{array}{c}
 (\diamond \diamond \diamond \diamond - \diamond) \diamond (\diamond + \\
 \diamond \diamond \diamond \diamond) \diamond \\
 \diamond \diamond \diamond \\
 \diamond \diamond
 \end{array}
 \leq \begin{array}{c}
 \diamond \diamond \\
 \diamond
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (\diamond \diamond \diamond \diamond + \diamond) \diamond (\diamond + \\
 \diamond \diamond \diamond \diamond) \diamond \\
 \diamond \diamond \diamond \diamond \\
 \diamond \diamond
 \end{array}$$

Remarque \forall :

$\ell_{i,i+1}$: désigne le plus grand nombre de cliques filles d'une clique de la couche

\forall . Alors que dans la représentation d'un graphe à seuil par des cercles tangents,

$$\ell = |\ell_{i,i+1} \cup \ell_{i+1,i+2} \cup \dots|$$

\forall . Pour l'intersection d'un cercle représentatif d'une clique de la i couche avec

$$\prod_{i=1}^{\ell} \ell_{i,i+1} \text{ cercles de rayon } r_i :$$

Il suffit que le cercle soit intersecté avec deux cercles parmi les $\prod_{i=1}^{\ell} \ell_{i,i+1}$, le plus à droite r_{ℓ} et le plus à gauche r_1 .

Dans le plus pire des cas, on aura $\ell_{i,i+1} - r_{i+1} = 2r_{i+1}\ell_{i,i+1} + (\ell_{i,i+1} - 1)r_i - 2r_i \dots$ (*)

$$\ell_{i,i+1} - r_{i+1} \leq 2r_{i+1}\ell_{i,i+1} \dots \dots \dots (\forall)$$

$$\ell_{i,i+1} - r_i \leq 2r_i \ell_{i,i+1} \dots \dots \dots (\forall')$$

La somme de (\forall) et (\forall') nous donne $\ell_{i,i+1} - r_{i+1} - r_i \leq 4r_{i+1}\ell_{i,i+1} \dots \dots \dots (\xi)$

On remplace (*) dans (ξ) on aura $2r_{i+1}\ell_{i,i+1} + (\ell_{i,i+1} - 1)r_i - 2r_i \leq 4r_{i+1}\ell_{i,i+1}$

$$(2r_{i+1}\ell_{i,i+1} + (\ell_{i,i+1} - 1)r_i - 2r_i)^2 \leq 16r_{i+1}^2 \ell_{i,i+1}^2$$

$$r_{i+1} \geq \frac{(r_{i+1}\ell_{i,i+1} + (\ell_{i,i+1} - 1)r_i - r_i)^2}{4r_{i+1}^2 \ell_{i,i+1}^2} \quad \forall r_i \in \{r_1, r_2, \dots, r_{i-1}\}$$

Soit $r_{i+1} = \frac{(r_{i+1}\ell_{i,i+1} + (\ell_{i,i+1} - 1)r_i - r_i)^2}{4r_{i+1}^2 \ell_{i,i+1}^2}$

Si $r_{i+1} \in [3 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 3] : r_{i+1} \geq r_i$, alors on prend

$$\frac{(r_{i+1}\ell_{i,i+1} - r_i)^2}{4r_{i+1}^2 \ell_{i,i+1}^2} \leq r_{i+1}$$

Si $r_{i+1} \in [0, 3 - 2\sqrt{2} \cup 2\sqrt{2} + 3, +\infty)$, alors on prend

$$\frac{\sum_{i=1}^{r-1} (c_i - c_{i+1}) + c_r}{\sum_{i=1}^{r-1} c_i} \leq c_r$$

Après la définition des $c_i \in \{1, \dots, r - 1\}$ on dispose le cercle représentatif de la $i^{\text{e}}\text{me}$ couche

$(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i)$ on fixant la valeur de (c_1, \dots, c_{i-1}) .

Pour un cercle $\diamond_{i,j}(\diamond(\diamond_{i,j}), \diamond_{i,j})$ représentatif d'une clique \diamond de la couche $i \in \{1, \dots, j\}$ on représente ces cliques filles par des cercles de rayon $\frac{1}{2} \diamond_{i,j}$ tels que :

- $\frac{1}{2} \diamond_{i,j} = \frac{(\diamond_{i,j}(\diamond_{i,j}))(\diamond_{i,j}(\diamond_{i,j}))}{2}$ sachant que $\diamond_{i,j}$ désigne le cercle représentatif de la clique fille la plus à gauche de la clique représenté par $\diamond_{i,j}$.
- Si $\diamond_{i,j}, \diamond_{i,j+1}$ deux cercles consécutifs parmi eux, alors ils vérifient $\frac{1}{2} \diamond_{i,j} + \frac{1}{2} \diamond_{i,j+1} = \frac{1}{2} \diamond_{i,j+1} + \frac{1}{2} \diamond_{i,j}$

Il est évident que $\frac{1}{2} \diamond_{i,j} \leq \frac{1}{2} \diamond_{i,j+1}$, et comme le nombre de rayons différents dans la représentation est égale au nombre de couches, alors le graphe est représentable par cercles tangents ayant $\frac{1}{2} \diamond_{i,j}$ rayons différents au plus.

□

4.3 Exemple d'application :

Voici un exemple de graphe d'arborescence comparabilité et sa représentation par intervalles sur la droite des réels.

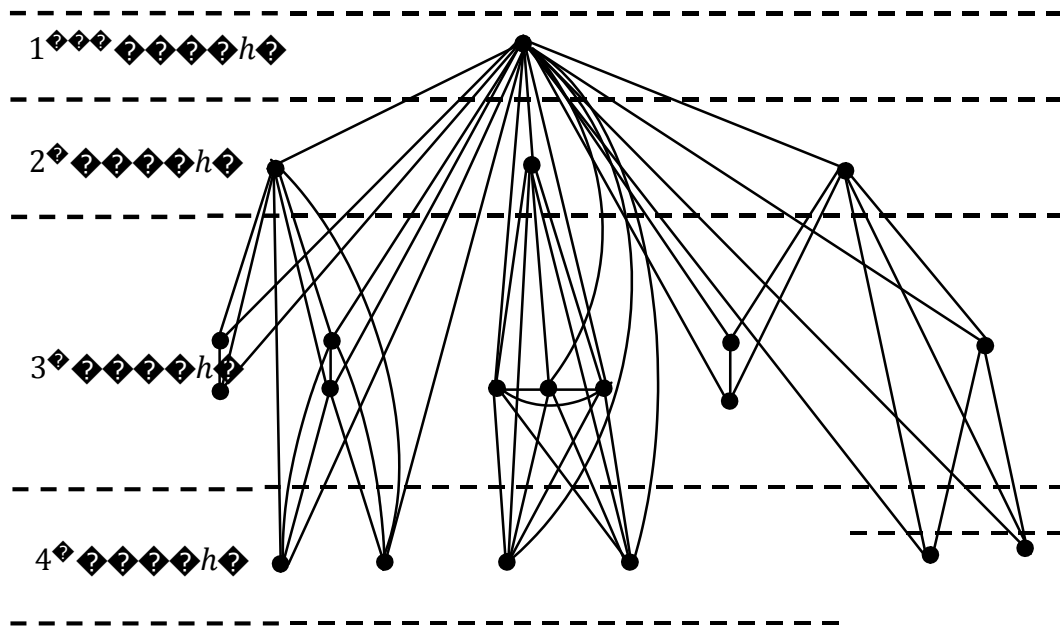


Figure IV.10 : Exemple d'un graphe d'arborescence comparabilité

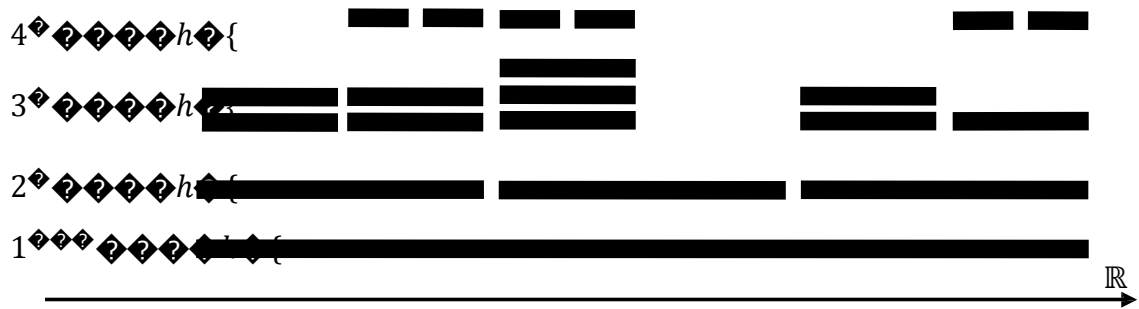


Figure IV.16 : Une représentation du graphe d'arborescence comparabilité (Figure IV.15) par intervalles

Appliquons la procédure précédente pour représenter le graphe de la figure IV.15 par des cercles tangents.

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 ; \quad l_5 = l_6 = l_7 = l_8$$

On a $l_1 = 2$

$$l_1 = \frac{(l_1 - 1)l_1 + (2 - 1)0.1 + 2 \times 2 \times 0.25}{2l_1} = 0.25$$

$l_1 \in]0, 3 - 2\sqrt{2} \cup]2\sqrt{2} + 3, \infty[$, alors on prend

$$l_1 \geq \frac{(l_1 - 1)l_1 + (2 - 1)0.1 + 2 \times 2 \times 0.25}{2l_1} \text{ c.à.d. } l_1 \geq 0.25$$

Soit $l_1 = 0.25$.

$$l_2 = \frac{(l_2 - 1)l_2 + (2 - 1)0.1 + 2 \times 2 \times 0.25}{2l_2} = 0.55$$

$l_2 \in]0, 3 - 2\sqrt{2} \cup]2\sqrt{2} + 3, \infty[$, alors on prend

$$l_2 \geq \frac{(l_2 - 1)l_2 + (2 - 1)0.1 + 2 \times 2 \times 0.25}{2l_2} \text{ c.à.d. } l_2 \geq 0.55$$

Soit $l_2 = 0.55$.

$$l_3 = \frac{(l_3 - 1)l_3 + (3 - 1)0.1 + 2 \times 3 \times 0.58}{2l_3} = 1.84$$

$l_3 \in]0, 3 - 2\sqrt{2} \cup]2\sqrt{2} + 3, \infty[$, alors on prend

$$\frac{\sum_{i=1}^n (l_i^2 - 2l_i + 2) \binom{n}{i} \binom{n-i}{i}}{\sum_{i=1}^n (l_i^2 - 2l_i + 2) \binom{n}{i} \binom{n-i}{i}} \text{ c.à.d. } \sum_{i=1}^n (l_i^2 - 2l_i + 2) \binom{n}{i} \binom{n-i}{i} \geq 7.569$$

Soit $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2$

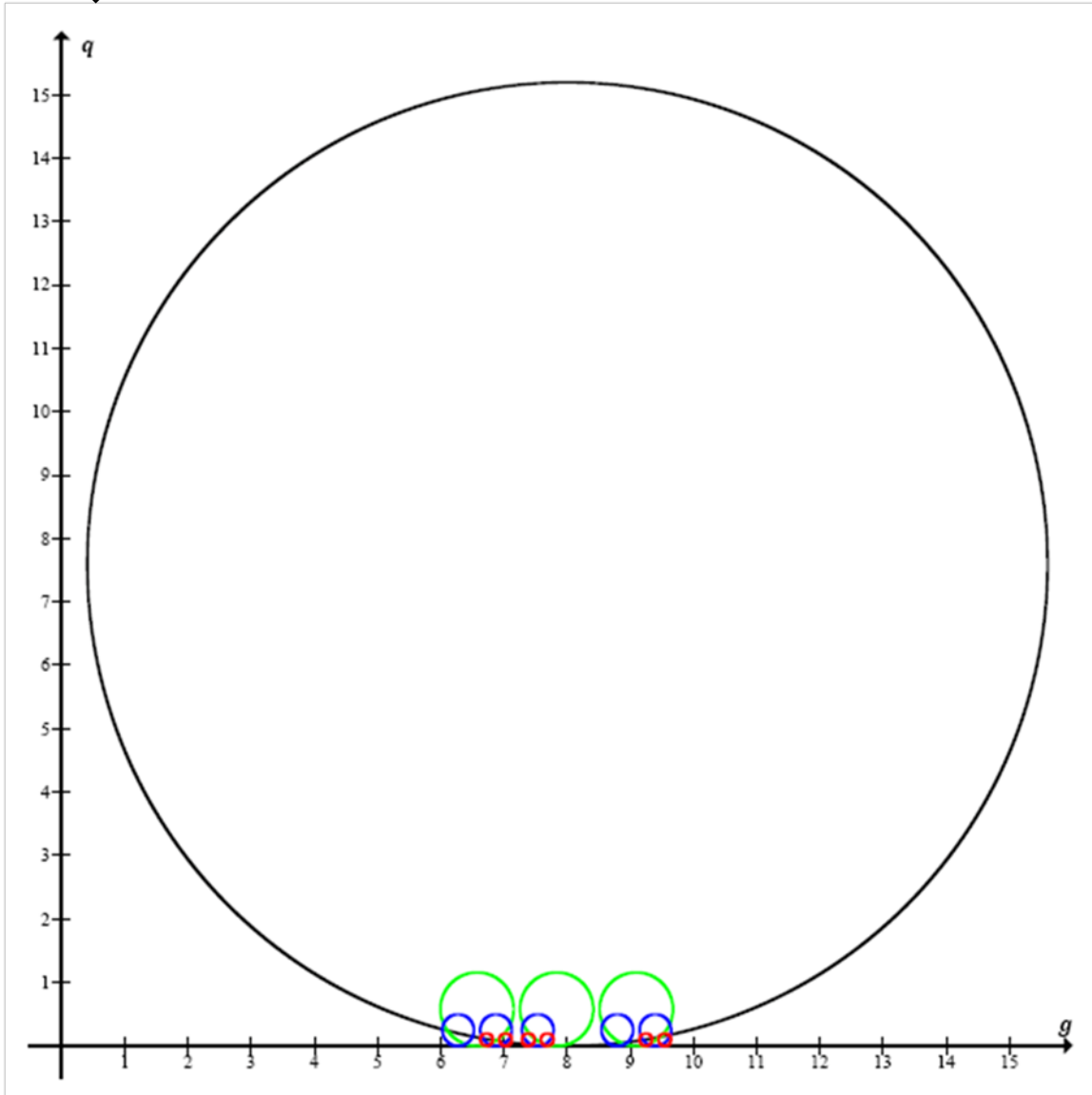


Figure IV.14 : Représentation d'un graphe d'arborescence comparabilité (Figure IV.13) par des cercles tangents

4 Graphes d'arbres :

4.1 Définitions :

Définition 1 :

Un arbre est un graphe non orienté, connexe, acyclique.

Une forêt est un graphe non orienté acyclique. Chaque composante connexe d'une forêt est un arbre.

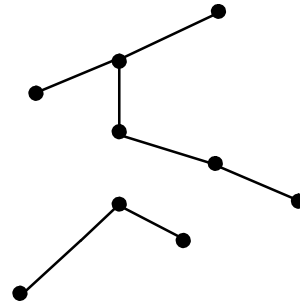


Figure IV.18 : Un arbre

Figure IV.19 : Une forêt

Définition 1 :

Une arborescence est un arbre où chaque sommet n'admet qu'un seul précédent, sauf un qui n'en a pas. Ce sommet est appelé racine de l'arbre.

4.2 Représentation des graphes d'arbres par des cercles tangents :

Proposition 1 :

Soit $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe d'arbres.

\mathcal{G} est représentable par des cercles tangents.

Démonstration :

Soit $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe d'arbre.

On considère le sommet de plus grand degré comme racine du graphe d'arbre et on le représente par un cercle $\mathcal{C}_0(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$.

Soient $\mathcal{C}_1(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3), \mathcal{C}_2(\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5), \dots, \mathcal{C}_\ell(\mathcal{C}_\ell, \mathcal{C}_\ell)$ les cercles représentatifs des sommets

fils de la racine.

$$2\mathcal{C}_\ell(\mathcal{C}_\ell) - \mathcal{C}_0(\mathcal{C}_0) = \dots \quad \text{donc } 2\mathcal{C}_\ell = \mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_\ell$$

$$\mathcal{C}_\ell(\mathcal{C}_\ell) - \mathcal{C}_0(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_\ell$$

$$\mathcal{C}_\ell = \frac{\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_\ell}{2\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{C}_\ell(\mathcal{C}_\ell) = \mathcal{C}_0(\mathcal{C}_0) + \mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_\ell$$

Et pour tout autre cercle $\mathcal{C}_\ell, \ell - 1 \geq \mathcal{C}_\ell \geq 1$ représentant d'un sommet fils de la racine

alors

$$\begin{aligned} \ell & \qquad \qquad \qquad \ell \\ \diamond_{\ell} &= 3 \diamond_{\ell-1} - 2 \diamond_{\ell-2} - 2 \diamond_{\ell-3} - 2 \diamond_{\ell-4} - 2 \diamond_{\ell-5} \\ \diamond(\diamond_{\ell}) &= \diamond(\diamond_{\ell-1}) + \diamond_0 - 2 \diamond_{\ell-1} - \diamond_{\ell-2} \end{aligned}$$

Après la représentation de la racine et ses fils, on poursuit la définition des rayons et la représentation de la même façon en considérant chaque sommet avec ses fils.

Si le graphe est une forêt, alors on applique la procédure sur chaque composante connexe.

□

4.3 Exemple d'application :

Appliquant la procédure sur le graphe de la figure IV.4 :

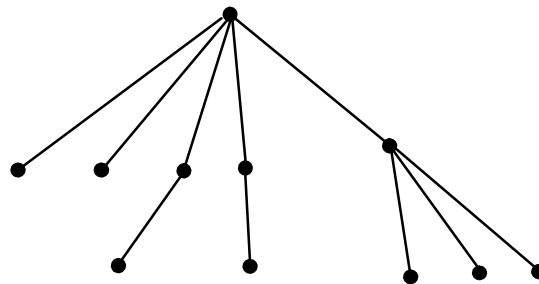


Figure IV.4 : Un graphe d'arbre

Pour le sommet racine et ses fils : $\ell = 5$, $\diamond_5 = 7.5$, $\diamond = 0.05$, $\diamond(\diamond_5) = 8$

$$\diamond_4 = \diamond_5 - \sqrt{2} \diamond_5 \approx 1.29$$

$$\diamond(\diamond_5) = \diamond(\diamond_4) + \diamond_0 - \diamond_5 = 8 + 7.5 - 1.29 \approx 14.21$$

$$\diamond_3 = \diamond_4 - \sqrt{2} \diamond_4, \quad \diamond(\diamond_4) = \diamond_4 + \diamond_0 - \diamond_5$$

$$\diamond_2 = 3 \diamond_3 - 2 \diamond_2 - 2 \diamond_1 - 2 \diamond_0$$

$$\diamond_1 = 3 \diamond_2 - 2 \diamond_1 - 2 \diamond_0 \approx 0.62$$

$$\diamond(\diamond_4) = \diamond(\diamond_3) + \diamond_0 - 2 \diamond_4 - \diamond_3 = \diamond(\diamond_5) - \diamond_5 - \diamond_4 = 14.21 - 7.5 - 1.29 - 0.62 = 12.3$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{G}_2) &= \mathcal{G}_2 \cdot \mathcal{G}_2 \\ \mathcal{G}_2 &= \mathcal{G}_2 \cdot \mathcal{G}_2, \chi(\mathcal{G}_2) = \mathcal{G}_2 \cdot \mathcal{G}_2 & \mathcal{G}_2 &= \mathcal{G}_2 \cdot \mathcal{G}_2, \\ \chi(\mathcal{G}_2) &= \mathcal{G}_2 \cdot \mathcal{G}_2 \end{aligned}$$

Pour les fils de $\mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2) : \mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2)$
 $(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2) :$

$$\mathcal{G}_2 = 3 - \sqrt{2} \approx 0.23, \mathcal{G}(\mathcal{G}_2) = \mathcal{G}(\mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_2 = 14.21 + 1.29 - 0.23 = 15.27$$

$$\mathcal{G}_2 = 2.22, \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_2) = \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_2) \mathcal{G}_2 = 2.22, \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_2) = 2.22, \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_2) = 2.22$$

$$\mathcal{G}_2 = 2.22, \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_2) = 2.22$$

Pour le fils de $\mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2) : \mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2)$

$$\mathcal{G}_2 = 3 - \sqrt{2} \approx 0.11, \mathcal{G}(\mathcal{G}_2) = \mathcal{G}(\mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_2 = 12.3 + 0.62 - 0.11 = 12.81$$

$$\mathcal{G}_2 = 2.22, \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_2) = 2.22$$

Pour le fils de $\mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2) : \mathcal{G}_2(\mathcal{G}(\mathcal{G}_2), \mathcal{G}_2)$

$$\mathcal{G}_2 = 3 - \sqrt{2} \approx 0.13, \mathcal{G}(\mathcal{G}_2) = \mathcal{G}(\mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_2 = 11.31 + 0.37 - 0.13 = 11.55$$

$$\mathcal{G}_2 = 2.22, \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_2) = 2.22$$

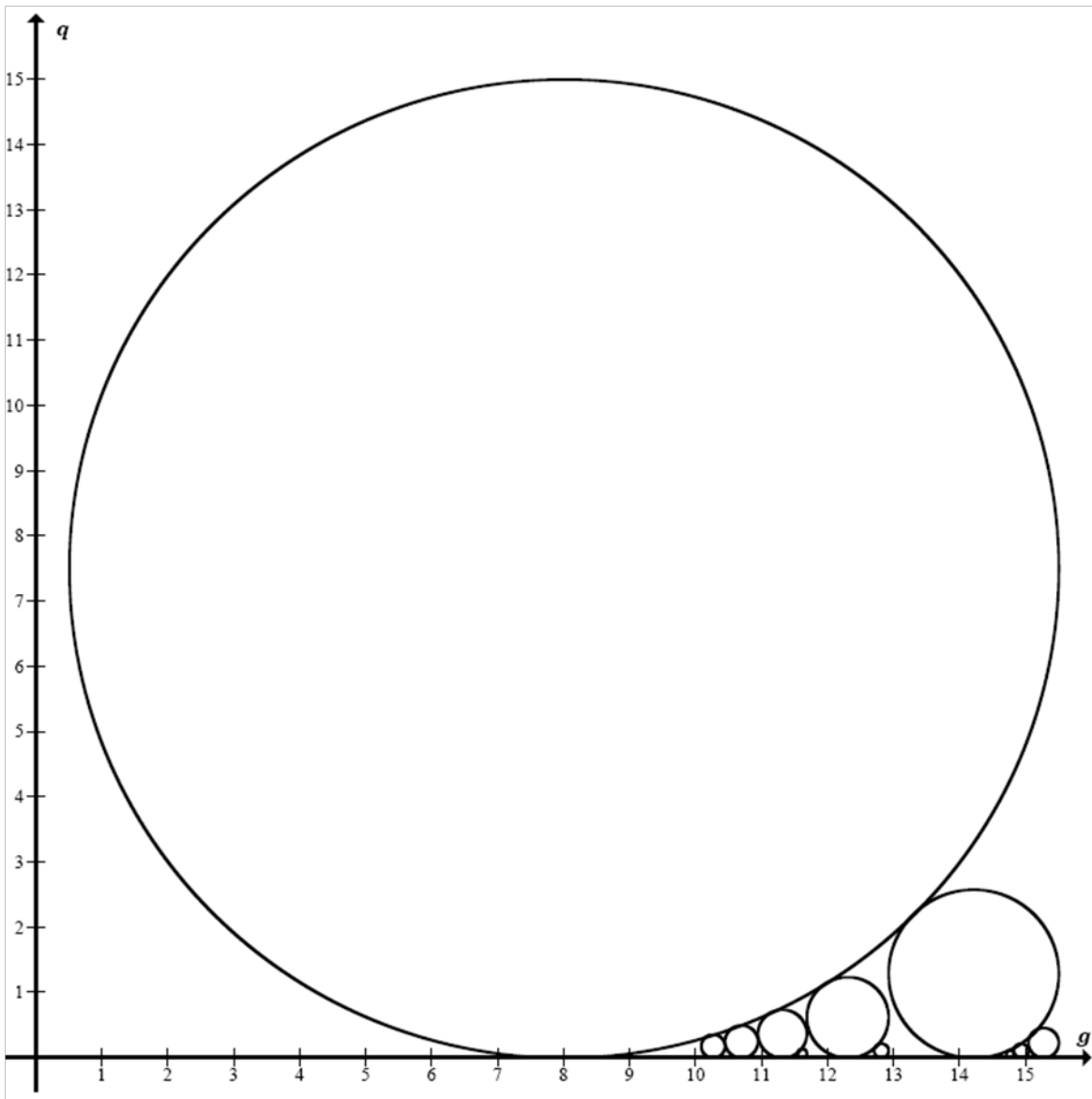


Figure IV.21 : Une représentation d'un graphe d'arbre (figure IV.20) par cercles tangents

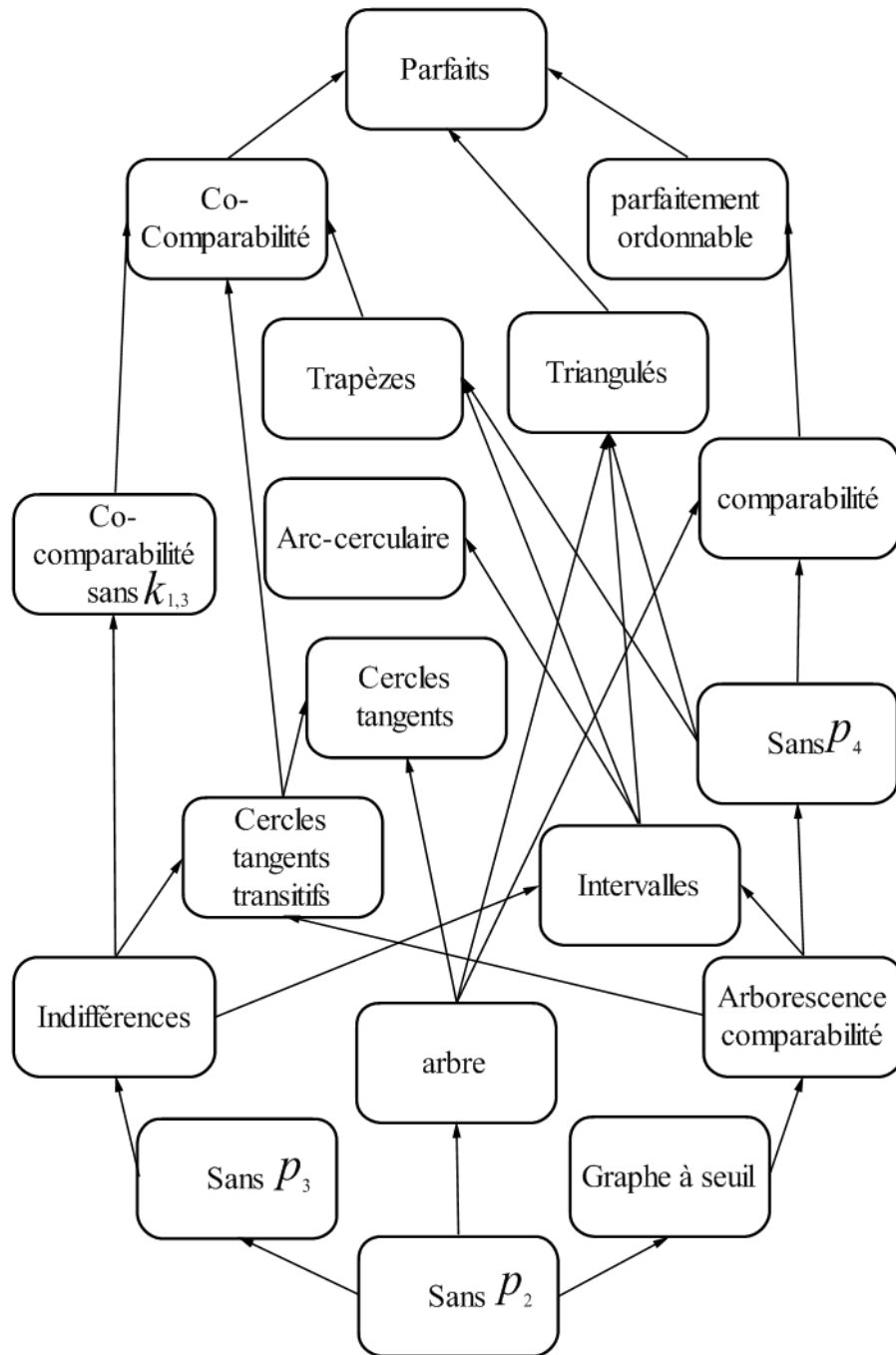


Figure IV.22 : Classes de graphes parfaits qui sont en relation avec les graphes de cercles tangents



CONCLUSION GÉNÉRALE

Les graphes d'intersection ont suscité un intérêt croissant dû à leurs utilisations dans de nombreux domaines.

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de la classe des graphes de cercles tangents et la structure d'ordre correspondante introduite par Moncef Abbas, Marc Pirlot, Philippe et Vincke, qui n'a pas fait l'objet d'une étude approfondie. Une classe de graphes d'intersection, héréditaire, et qui admet une représentation dans le plan et la structure d'ordre correspondante est quasi-transitive. Cette structure peut être d'un important intérêt en aide multicritère en général.

Dans un premier temps, nous avons développé deux algorithmes, l'un pour résoudre le problème de la partition minimum en cliques dans les graphes de cercles tangents transitifs, et l'autre pour résoudre le problème de la coloration dans la même classe de graphes. Ensuite, nous avons montré l'inclusion de deux sous-classes de graphes d'intervalles dans les graphes de cercles tangents à savoir les graphes d'arborescence comparabilité et les graphes à seuil, comme on a aussi proposé une méthode de représentation des graphes d'arbres par des cercles tangents.

Hormis les résultats présentés dans ce travail, on pense qu'il serait intéressant d'étudier les problèmes d'optimisation dans les graphes de cercles tangents en général, à savoir la coloration minimale, la partition minimum en cliques, le stable maximum et la clique maximale. Ainsi que l'étude des problèmes de reconnaissance d'une structure d'ordre de cercles tangents et la caractérisation de la structure d'ordre de cercles tangents transitifs qui nécessite l'étude de structure plus générale que celle-ci, par exemple l'ordre d'ellipses

Conclusion générale

tangentes, en se basant sur la propriété de l'hérédité et de la représentation géométrique dans le plan. Sachant que cette structure généralise la structure usuelle de l'ordre d'intervalles. Mais l'ordre (graphe) d'intervalles est-il un ordre (graphe) de cercles tangents ? Demeure un problème ouvert.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abbas, M. and Vincke, Ph. (1993). *Preference structures and threshold models*. J. of Multi-Criteria Decision Analysis. Vol.2, 171-178.
- [2] Abbas, M. (1994). *Contribution au rapprochement de la théorie des graphes et de l'aide à la décision : graphes parfaits et modèles de préférence*, Doctoral dissertation, Université Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium, 1994.
- [3] Abbas, M. (1990). *Any complete preference structure without circuit admits an interval representation*, Theory and Decision 39 (2) (1990) 110-126.
- [4] Abbas, M., Pirlot, M., Vincke, P. (2007). *Tangent circle graphs and orders*, Disc. Appl. Math. Volume 100, issue 4, 10 February 2007, pages 429-441.
- [5] Aleskerov, F. et Monjardet, B. (2002). *Utility Maximization, Choice and Preference*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [6] Benzaken, C., Hammer, P.L., De Werra, D. (1981). *Threshold digraphs*. R.R. IMAG n° 237, Février 1981.
- [7] Berge, C. (1961). *Färbung von graphen, deren sämtliche bzw. Deren ungerade Kreise starrsind*. Wiss.Z. Mrtin-Luther-Univ. Halle-Wittenberge Math.-Natur. Reihe 10 (1961), 114.
- [8] Berge, C. (1967). *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, 1967.
- [9] Berge, C. (1970). *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1970.
- [10] Berge, C. and Chvátal, V. (1984).editors, *Topics on perfect graphs*, Annals of Discrete Mathematics 21, North Holland, Amsterdam (1984).

- [11] Berge, C., Duchet, P. (1983). *Strongly perfect graphs*, dans Topics on perfect Graphs, Math. Stud.⁸⁸ (C. Berge, V. Chvátal, eds.)(1983), 57-62.
- [12] Brandstädt, A., Le, V.B. et Spinrad, J.P. (1999). *Graph Classes : A survey*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications 3, SIAM Publications, Philadelphie, PA.
- [13] Cheah, H.K. (1990). *A recognition algorithm for II-graph*. Technical report 236. Departement of Computer Science. University of Toronto.
- [14] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P.D. et Thomas, N. (2003). *Progress on perfect graphs*. Mathematical Programming Series B 97, pp. 40-422.
- [15] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P. and Thomas, R. (2006). *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics 163 (2006) 51-229.
- [16] Chvátal, V. (1983). *Perfectly ordered graphs*, in Topics on Perfect Graphs, Math. Stud.⁸⁸ (C.Berge, V.Chvátal, eds.), 1983, 63-66.
- [17] Chvatal, V., Hammer, P.L. (1977). *Agregations of inequalities in integer programming*. Ann. of Discrete math.1 (1977) 150-162.
- [18] Coppersmith, D and Winograd, S. (1987). *Matrix multiplication via arithmetic progressions*, 19th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1-6, 1987.
- [19] Cormen, T., Leiserson, C. et Rivest, R. (1993). *Introduction à l'algorithmique*. Dunod, Paris, France. (edition française).
- [20] Corneil, D.G. and Kamula, P.A. (1987). *Extensions of permutation and interval graphs*. Congressus numerantium 58, 267-270.
- [21] Corneil, D.G., Lerchs, H. and Stewart, L.K. Burlingham. (1981). *Complement reducible graphs*, Discrete Applied Mathematics 3 (1981), no. 1, 163-174.
- [22] Corneil, D.G., Perl, Y. and Stewart, L.K. (1980). *A linear time recognition algorithm for cographs*, SIAM Journal on Computing 14 (1980), no. 4, 926-934.
- [23] Cornuejols, G. (2002). *The strong perfect graph conjecture*. In Proceedings of the Intenational Congress of Mathematiciens, Vol. 3, pp. 047-009. Higher Education

Press of China, Pékin (Beijing), Chine.
<http://intrger.gsia.cmu.edu/webpub/SPGCsurvey.pdf>

- [24] Dagan, I., Golumbic, M.C. and Pinter, R.Y. (1988). *Trapezoid graphs and their coloring*. Discrete Applied Math. 21, 35-46.
- [25] Even, S., Lempel, A. et Pnueli, A. (1972). *Permutation graphs and transitive graphs*, Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 19, n°3, p. 400-410, 1972.
- [26] Edmonds, J. (1960). *Paths, trees, and flowers*. Canadian Journal of Mathematics, 12 : 449-467, 1960.
- [27] Felsner, S., Müller, R. and Wernisch, L. (1994). *Trapezoid graphs and generalizations, geometry and algorithms*. In Algorithm theory-SWAT '94 (Aarhus, 1994), volume 824 of Lecture Notes in Comput. Sci., pages 143-154. Springer, Berlin, 1994.
- [28] Fishburn, P.C. (1980). *Interval Orders and Interval Graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, John Wiley & Sons, New York, NY.
- [29] Fishburn, P.C. (1970). *Utility theory for decision-making*, Wiley, New-York.
- [30] Fishburn, P.C. (1970b). *An interval graph is not a comparability graph*, J. Comb. Theory A (1970b) 4:42-43.
- [31] Fraïsse, R. et Lygerôs, N. (1991). *Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et « compenseurs »*. C.R.Acad.Sci. Paris, t. 313, Série I, P. 417-420.
- [32] Fulkerson, D.R. and Gross, O.A. (1960). *Incidence matrices and interval Graphs*. Pacific Journal Math; 10 : 830-850, 1960.
- [33] Gallai, T. (1967). *Transitiv orientierbare graphen*, Acta Mathematica Hungarica, 18, 20-66.
- [34] Gary, M.R. and Johnson, D.S. (1979). *Computers and Intractability*. A guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman & Co, San Francisco, CA.
- [35] Gavril, F. (1974). *The intersection graphs of a path in a tree are exactly the chordal graphs*. Journal of Combinatorial Theory, 16:47-56, 1974.

- [36] Ghouila Houria, A. (1962). *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 204, Paris, 1370-1371.
- [37] Gilmore, P.C. and Hoffman, A.J. (1964). *A characterization of comparability graphs and of interval graphs*, Canadian Journal of Mathematics, 16, 539-548.
- [38] Golombic, M.C. (1977). *The complexity of comparability graph recognition and coloring*, computing 18 (1977), 199-208.
- [39] Golombic, M.C. (1978). *Trivially perfect graphs*, Discrete Math. 24(1978), 105-107.
- [40] Golombic, M.C. (1980). *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980; second ed., Annals of Discrete Mathematics, vol. 07, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [41] Golombic, M.C., Rotem, D. and Urrutia, J. (1983). *Comparability graphs and intersection graphs*. Discrete Math., 43:37-46, 1983.
- [42] Gondran, M. and Minoux, M. (1980). *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 2nd edition, 1980.
- [43] Grötschel, M. Lovasz, L. and Schrijver A. (1988). *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [44] Grötschel, M. Lovasz, L. and Schrijver A. (1981). *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*, Combinatorica 1 (1981), 169-197, see also CORRIGENDUM: Combinatorica 4 (1984), 291-290.
- [45] Habib, M. and Möhring, R.H. (1990). *Recognition of partial orders with interval dimension two via transitive orientation with side constraints*. Preprint reihhe mathematik n°244. Technische Universität, Berlin.
- [46] Hajnal, A. and Suranyi, J. (1908). *Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen*. Ann. Univ. Sc. Budapestinensis, vol. 1, 1908, p. 113-121
- [47] Karp, R.M. (1972). *Reducibility among combinatorial problems*. In Complexity of Computer Computations (sous la direction de R.E. Miller et J.W. Thatcher), pp.10-103. Plenum Press, New York, NY.

- [48] Kelly, D. (1980). *Comparability graphs*, in: Graphs and Orders (ed. I. Rival) D. Reidel, Dordrecht, 3-41.
- [49] Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. et Tversky, A. (1971), *Foundations of measurement*, vol. 1 : *Additive and polynomial representations*, Academic Press, New-York.
- [50] Kratochvil, J., Goljan, M. and Kučera P. (1987). *String graphs*. Rozpravy Československé Akad. Věd Řada Mat. Přírod. Věd, 93(3), 1987.
- [51] Leibowitz, R. (1978). *Interval counts and threshold numbers of graphs*. Thesis. Rutgers University.
- [52] Lovasz, L. (1975a). *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, Discret Math. 2, 203-218.
- [53] Luce, R.D. (1966). *Semiorders and a theory of utility discrimination*. *Econometrica* 34, 178-191.
- [54] Maffray, F. and Peissmann, M. (2001). A translation of Tibor Gallai's paper : *Transitiv orientierbare Graphen*, in : perfect graphs, J.L. Ramirez-Alfonsin and B.A Reed (Ed.), J. Wiley (2001). 20-66.
- [55] McKee, T.A. and McMorris, F.R. (1999). *Topics in intersection graph theory*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- [56] Möhring, R.H. (1984). *Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs*, in: Graphs and Orders (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 41-101.
- [57] Olariu, S. (1991). *An optimal greedy heuristic to color interval graphs*. *Information processing Letters*, 37(1): 21-25, 1991.
- [58] Parral, A., Schefflerb, P. (1997). *Characterizations and applications of chordal graph embeddings*. *Discrete Applied Mathematics* 79 (1997) 171-188.
- [59] Pirlot M. et Vincke, Ph. (1997). *Semiorders. Properties, représentations, applicatios*, Kluwer, Dordrecht.

- [٦٠] Ramirez, Alfonsin, J.L. and Reed, B.A. (٢٠٠١). editors, *perfect graphs*, Serie in Discrete Mathematics and optimization, Wiley-Interscience(٢٠٠١).
- [٦١] Roberts, F.S. (١٩٦٨). *Representations of indifference relations*. Thèse de Doctorat. Stanford University, Stanford, CA.
- [٦٢] Roberts, F.S. (١٩٦٩). *Indifference graphs*, in: F. Harary (Ed.), *Proof Techniques in Graph Theory*, Academic Press, New York, ١٩٦٩, pp. ١٣٩-١٤٦.
- [٦٣] Roberts, F.S. (١٩٧٦). *Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [٦٤] Roberts, F.S. (١٩٧٨). *Graph Theory and its Application to Problems of Society*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics ٢٩, SIAM publications, Philadelphie, PA.
- [٦٥] Roberts, F.S. (١٩٧٩). *Measurement theory with applications to decision making*, utility and the social sciences, Addison-Wesley, Reading.
- [٦٦] Roubens, M. et Vincke, Ph. (١٩٨٥). *Preference modelling*, lecture Notes in Economics and Mathematical systems ٢٥٠, Springer, Berlin ١٩٨٥.
- [٦٧] Roy, B. (١٩٨٥). *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*. Economica. Paris.
- [٦٨] Scheinerman, E.R., Wierman, J.C. (١٩٨٨). *On circle containment orders*, Order ٤(١٩٨٨) ٣١٥-٣١٨.
- [٦٩] Schröder, B. S. W. (٢٠٠٣). *Ordered sets*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. An introduction.
- [٧٠] Scott, D.S. and Scuppes, P. (١٩٥٨). *Foundation aspects of theories of measurement*, J. Symb. Logi. ٢٣ (١٩٥٨) ١١٣-١٢٨.
- [٧١] Seinsche, D. (١٩٧٤). *On a property of the class of n-colorable graphs*. Journal of Combinatorial Theory Series B ١٦, pp. ١٩١-١٩٣.
- [٧٢] Seymour, P. (٢٠٠٦). *How the proof of the strong perfect graph conjecture was found*. Gazette des Mathématiciens, ٢٠٠٦.
- [٧٣] Shannon, C.E. (١٩٤٨). *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal, vol. ٢٧, p. ٣٧٩-٤٢٣ and ٦٢٣-٦٥٦, July and October, ١٩٤٨.

- [٧٤] Shannon, C.E. (١٩٤٩). *Communication Theory of Secrecy Systems*, Bell System Technical Journal, Vol ٢٨, p. ٦٥٦-٧١٥, Oct ١٩٤٩.
- [٧٥] Spinrad, J. (٢٠٠٣). *Efficient Graph Représentations*, Field Institute Monographs, vol. ١٩, AMS, ٢٠٠٣.
- [٧٦] Sumner, D.P. (١٩٧٣). *Graphs indecomposable with respect to the x -join*, Discrete Mathematics ٦ (١٩٧٣), ٢٨١-٢٩٨.
- [٧٧] Tarjan, R.E. (١٩٨٣). *Data Structures and Network Algorithms*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics ٤٤, SIAM Publications, Philadelphie, PA.
- [٧٨] Trotter, W. T. (١٩٩٢). *Combinatorics and partially ordered sets*. Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD. Dimension theory.
- [٧٩] West, D. (٢٠٠١). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, ٢٠٠١.
- [٨٠] Wiener, N. (١٩١٤). *A contribution to the theory of relative position*. In Proceedings of the Cambridge Philosophic Society, volume ١٧, pages ٤٤١-٤٤٩.
- [٨١] Wolk, E.S. (١٩٦٢). *The comparability graph of a tree*. proc. Amer. Math. Soc. ١٣, ٧٨٩ - ٧٩٥.
- [٨٢] Wolk, E.S. (١٩٦٥). *A note on the comparability graph of a tree*. proc. Amer. Math. Soc. ١٦, ١٧- ٢٠.
- [٨٣] Wood, D.R. (٢٠٠٦). *Caractérisations of Intersection Graphs by Vertex Orderings*. (Research supported by NSERC and COMBSTRU). School of Computer Science Carleton University, Ottawa, Canada. Department of Applied Mathematics Charles University, Prague, Czech Republic. October ٣٠, ٢٠٠٦.

Résumé

Ce manuscrit s'est porté sur l'étude d'une classe de graphes d'intersection et l'ordre correspondant introduit par ABBAS et VINCKE (1994), appelée graphe (ordre) de cercles tangents.

Un graphe \diamond non orienté est appelé graphe de cercles tangents si ses sommets peuvent être mis en correspondance biunivoque avec un ensemble \diamond de cercles tangents à une droite supposée horizontale de telle manière à ce que deux sommets soient reliés par une arête de \diamond si et seulement si leurs cercles correspondants intersectés. Ces graphes sont une représentation d'un modèle d'une structure d'ordre dont la relation de préférence stricte \diamond n'est pas nécessairement transitive.

On a rappelé ses propriétés et les rapports avec d'autres graphes (ordres) bien connus. Notamment, on a montré l'inclusion de deux sous-classes de graphes d'intervalles dans les graphes de cercles tangents : les graphes d'arborescence comparabilité et les graphes à seuil, comme on a aussi proposé une méthode de représentation des graphes d'arbres par des cercles tangents.

Ainsi, on a discuté les problèmes d'optimisations dans cette catégorie de graphe plus exactement le problème de coloration et le problème de partition minimum en cliques dans les graphes de cercles tangents transitifs.

Mots-clés : graphe de cercles tangents, ordre de cercles tangents, graphe d'arborescence comparabilité, graphe à seuil, arbre, coloration, partition en cliques.

Abstract

This manuscript went on the study of a class of intersection graphs and the order corresponding introduced by ABBAS and VINCKE (1994), called tangent circles graph (order).

A non-directed graph \diamond is called tangent circles graph if its vertex can be put one by one in correspondence with a set \diamond of tangent circles on a presumably horizontal line in such manner so that two vertex are connected by an edge of \diamond if and only if their corresponding circles are intersected. These graphs are a representation of a model of an order structure whose strict preferably relation \diamond is not necessarily transitive.

One pointed out its properties and the relationship with other graphs (orders) well-known. In particular, we showed the inclusion of two subclasses of interval graphs in the tangent circles graphs : the arborescence comparability graphs and the threshold graphs, as we also proposed a method of acyclic graphs representation by tangent circles.

Thus, we discussed the optimizations problems in this category of graph more exactly the problem of coloring and the problem of minimum partition clique in the transitive tangent circles graphs.

Keywords : tangent circle graph, tangent circle order, arborescence comparability graph, threshold graph, tree, coloration, clique partition.