

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE



FACULTE DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En physique

Spécialité : ELECTRONIQUE QUANTIQUE

Par: MOHAMMED EL-HADJ Khelifa

Sujet:

Calcul de la contribution des collisions électron-électron dans l'interaction d'un champ électrique haute fréquence avec un plasma homogène

Soutenu publiquement le 06/12/2005, devant le jury composé de :

Mr F. Boubnider	Professeur	USTHB	<i>Président</i>
K. Bendib-Kalache	Maître de Conférences	USTHB	<i>Directeur de thèse</i>
Mr. M. Djebli	Maître de Conférences	USTHB	<i>Examineur</i>
Mr. M. Hachemane	Maître de Conférences	USTHB	<i>Examineur</i>
Mr. T. Kerdja	Maître de Recherche	CDTA	<i>Examineur</i>

Je dédie ce modeste travail...

À mes très chers parents...

À ma sœur et mes deux frères...

À ma future femme...

À ma grande famille...

À tous mes amis.

*Aux deux petites filles: Djamila (Fatima) et Chaimaa
qu'a la plus petite Nora*

☆☆Remerciements☆☆

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire Electronique Quantique de la faculté de physique de l'USTHB.

Ce travail a été réalisé dans le cadre de la coopération Algéro-Française (CMEP 02 MD458) entre le laboratoire Electronique Quantique (USTHB) et la laboratoire de Physique des gaz et des Plasmas (LPGP) de l'Université Paris-Sud d'Orsay.

Je remercie respectueusement Monsieur F. BOUBNIDER, Professeur à l'USTHB, de m'avoir fait l'honneur de présider de jury de thèse.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Madame K. BENDIB-KALACHE, Maître de conférences à l'USTHB, pour m'avoir encadré tout au long de ce travail.

Monsieur M. DJEBLI, Maître de Conférences à l'USTHB, m'a enseigné l'analyse numérique durant ma graduation, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance d'avoir accepté de juger ce travail en faisant partie de ce jury de thèse.

Monsieur M. HACHEMANE, Maître de Conférences à l'USTHB, a bien voulu participer à ce jury de thèse, je lui présenté mes plus vifs remerciements.

Je remercie vivement Monsieur T. KERDJA, Maître de recherche au Centre de Développement des Technologies Avancées (CDTA), d'avoir bien voulu accepter de participer au jury de ce mémoire.

Je veux également remercier Monsieur A. BENDIB, Professeur à l'USTHB pour son appui et ses précieux conseils.

Je remercie également mes collègues du laboratoire Electronique Quantique, S. Mesbah, A. Tahraoui et N. Laidoune pour leur soutien moral durant ce travail.

Je tiens remercier mes parents pour leur confiance inébranlable dans mes capacités, et finalement je veux remercier mon frère pour sa compréhension et son appui durant ce travail.

Je ne saurais oublier de remercier toute autre personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'achèvement de ce travail.

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	
I. Introduction	9
II. Equation de Fokker-Planck	
II. 1 Présentation générale de l'équation de Fokker-Planck	9
II. 2 Formulation de l'équation de Fokker-Planck en termes de potentiels de Rosenbluth.	14
II. 2a Calcul explicite des potentiels de Rosenbluth sur la base du tenseur cartésien	17
II. 2b Calcul des opérateurs de collision	
1)- Calcul de l'opérateur de collision électron-ion	21
2)- Calcul de l'opérateur de collision électron-électron	23
III. Bremsstrahlung inverse	24
III. 1 Taux d'absorption	25
III. 2 Description cinétique des effets du Bremsstrahlung inverse	26
III. 2a. Résultat de Langdon	27
III. 2b. Résultat de Matte et al	30
III. 2c. Résultat de Bendib et al	31
IV Conclusion	33

CHAPITRE II : Contribution des collisions électron-électron à l'opérateur "bremsstrahlung inverse "

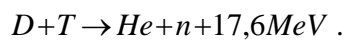
I. Introduction	34
II. 1 Equation de base du modèle	
II. 1 Equation de Fokker-Planck	34
II. 2 Approximations utilisées	35
II.3 Equations haute-fréquence et basse-fréquence de Fokker-Planck	36
III Résolution de l'équation haute fréquence de Fokker-Planck	37
IV. Calcul de l'opérateur Bremsstrahlung inverse	38
IV.1 Développement de l'équation Fokker-Planck sur la base des Polynômes de Legendre.	39
IV.2 Contribution des collisions électron-ion au calcul de l'opérateur Bremsstrahlung inverse	41
IV.3 Contribution des collisions électron-électron au calcul de l'opérateur Bremsstrahlung inverse	44
V Calcul du taux d'absorption de l'énergie par le mécanisme du bremsstrahlung inverse	51
VI discussion et applications	55
Conclusion générale	58
Références	60
VII Appendice	62

Introduction

Générale

Introduction Générale

Une source d'énergie quasi-inépuisable et des déchets minimes, tels sont les principales caractéristiques de la fusion thermonucléaire contrôlée qui en font une source d'énergie très prometteuse pour l'humanité. Son principe consiste à faire fusionner des noyaux d'atomes légers et récupérer l'énergie libérée lors de la réaction de fusion. La réaction la plus intéressante est celle qui fait intervenir les noyaux de deutérium et de tritium, deux isotopes du noyau d'hydrogène :



Cette réaction est très exothermique ($17,6MeV$). A titre d'exemple, un gramme de mélange de deutérium-tritium (D-T) libère $3.4 \cdot 10^{11} J$. Cependant, pour réaliser cette réaction, il est nécessaire de chauffer le mélange thermonucléaire à des températures très élevées (de l'ordre de $10^8 K$). Ainsi, les noyaux atteindront des vitesses d'agitation thermique suffisantes pour franchir par effet tunnel, la barrière coulombienne.

Pour pouvoir créer de telles conditions de températures mais aussi de grandes densités afin d'augmenter la probabilité de collisions, deux voies sont actuellement explorées. Tout d'abord, la fusion par confinement magnétique [1] qui consiste à chauffer le combustible thermonucléaire, peu dense ($10^{20} m^{-3}$) dans une chambre à vide et à l'empêcher de se dilater pendant un temps relativement long (1s) grâce à de puissants champs magnétiques. La structure magnétique la plus efficace actuellement est celle qui correspond à un tore et le réacteur porte le nom de tokamak.

L'autre voie est la fusion par confinement inertiel [2]. Elle constitue le cadre dans lequel notre travail a été effectué. Dans cette voie, le but est d'obtenir des densités très élevées ($10^{32} m^{-3}$) pendant des temps de confinement courts (1ns) en utilisant des lasers de grande puissance (de l'ordre du TéraWatt). Le confinement et le chauffage sont obtenus en irradiant une micro-bille contenant le mélange de D-T, à l'aide d'un laser de puissance. Celui-ci provoque l'ablation des couches externes de la cible, et par réaction, l'implosion de la cible. Dans le cœur de la cible, les réactions de fusion peuvent alors s'amorcer et se propager à tout le combustible.

Deux types de configurations [3] sont possibles. La première appelée « attaque directe » consiste à focaliser plusieurs faisceaux laser sur la micro-bille (figure 1a). L'énergie lumineuse est absorbée, puis elle se propage par conduction thermique vers des zones plus denses. Ces régions brusquement chauffées se détendent violemment. La matière est éjectée vers l'extérieur de la cible ce qui en réaction a pour effet de former une onde de compression (ou choc) à l'intérieur du mélange de D-T. Les températures et les densités obtenues au centre de la cible (près de 1000 fois la densité du D-T solide) vont permettre l'amorçage des réactions de fusion puis leur propagation dans tout le combustible thermonucléaire.

Dans la seconde configuration, appelée « attaque indirecte » (figure 1b), la micro-bille est placée dans une cavité dont la surface interne est constituée d'un matériau de numéro atomique élevé. Les faisceaux laser sont envoyés sur les parois de la cavité qui vont à leur tour émettre des rayons X. Ces rayons X vont jouer le même rôle que le rayonnement laser dans l'approche directe décrite plus haut. Ils vont donc chauffer et comprimer la cible par inertie.

La première méthode est plus efficace pour transférer l'énergie à la cible, mais très sensible à la qualité de l'uniformité spatiale de l'irradiation laser, un grand nombre de faisceaux sont donc requis. L'attaque indirecte présente les avantages d'être moins sensible au manque d'uniformité d'irradiation et de conduire à une meilleure stabilité hydrodynamique. Cependant, cette dernière méthode génère un plus grand volume de plasma sous-dense dans lequel le laser doit se propager. Dans les deux cas, on cherche à maximiser l'uniformité d'irradiation ainsi que l'absorption.

Dans les deux configurations, directe ou indirecte, le rayonnement laser irradie la cible et transforme les couches ablatées en un plasma (gaz fortement ionisé) dans un temps très inférieur à la durée d'une impulsion. Le gros de l'impulsion se propage alors dans un plasma chaud en expansion. Ainsi, dans les deux configurations, l'étude de l'interaction d'une impulsion laser avec un plasma est d'importance primordiale pour la qualité de la compression.

Lorsqu'un faisceau laser est focalisé sur une cible solide, un plasma fortement ionisé est rapidement produit à la surface du solide. La propagation du rayonnement laser est alors modifiée. La relation reliant le nombre d'onde (k) à la fréquence (ω) de l'onde incidente est

donnée par la relation de dispersion : $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$, où ω_{pe} est la fréquence plasma électronique, et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Ainsi, le rayonnement pénètre le

plasma, caractérisé par une densité n_e croissante dans la direction de propagation. Il se réfléchit sur la couche dite critique lorsque la fréquence du laser devient égale à la fréquence plasma

électronique, soit $\omega = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_c e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ (où n_c est la densité critique, ϵ_0 est la permittivité du vide, e

la charge élémentaire et m_e la masse de l'électron). Le domaine $n_e < n_c$ est appelé couronne ou

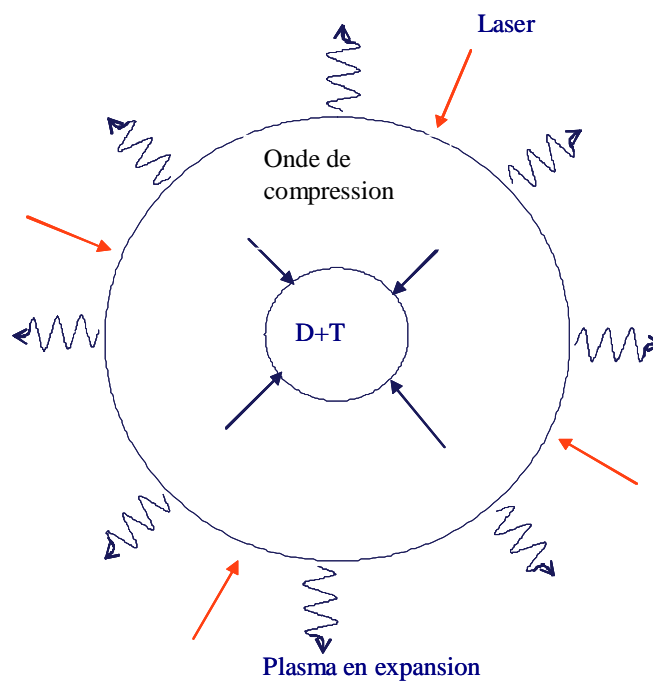


Figure 1a

Schéma du principe de la fusion thermonucléaire inertielle par attaque directe.

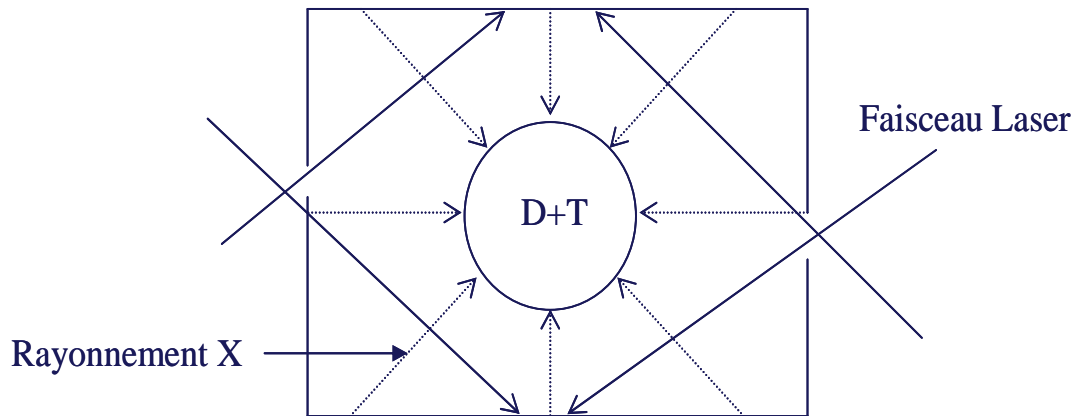


Figure 1b

*Schéma du principe de la fusion thermonucléaire
inertielle par attaque indirecte.*

=====

plasma sous-dense par opposition à la zone $n_e > n_c$ qualifiée de dense. Le dépôt d'énergie s'effectuant dans la couronne, cette énergie sera ensuite transférée à la zone dense par conduction thermique.

L'interaction laser-plasma, dans la couronne est le siège de nombreux phénomènes physiques. Dans la figure 2, nous avons représenté le profil de densité électronique en fonction de la distance à la cible ainsi que les principaux phénomènes physiques mis en jeu :

a) Les instabilités paramétriques

Celles-ci se développent à la suite d'un couplage non linéaire de l'onde laser incidente avec des modes propres du plasma [4]. Ces instabilités donnent lieu, soit à une perte d'énergie par diffusion du rayonnement incident (instabilités Brillouin et Raman), soit à un manque d'uniformité d'éclairement (instabilités de filamentation et d'autofocalisation), soit à la création d'électrons suprathermiques (instabilités de « décomposition paramétrique » et « deux plasmons »). Toutes ces instabilités sont néfastes dans le contexte de la fusion par confinement inertiel dans la mesure où elles affectent le rendement de l'implosion de la cible.

b) Absorption par bremsstrahlung inverse

L'énergie laser peut être absorbée par le mécanisme du bremsstrahlung inverse [5]. Celui-ci correspond à l'absorption d'un photon par un électron lors d'une collision coulombienne électron-ion. La fréquence de collision électron-ion étant proportionnelle à la densité électronique, cette absorption est efficace au voisinage de la couche critique $n_e \approx n_c$.

c) Absorption résonnante

Elle correspond à l'absorption de l'énergie laser à la couche critique sous l'effet du couplage de l'onde laser avec un plasma inhomogène [6] qui va engendrer des ondes de Langmuir. Ces ondes longitudinales vont céder leur énergie aux particules par amortissement Landau. Ce processus d'absorption a lieu lorsque le champ électrique laser présente une composante parallèle au gradient de densité. Comme dans le cas des instabilités de « décomposition paramétrique » et « deux plasmons », ce mécanisme de chauffage présente des nuisances pour la fusion puisqu'il est responsable de la génération d'électrons suprathermiques.

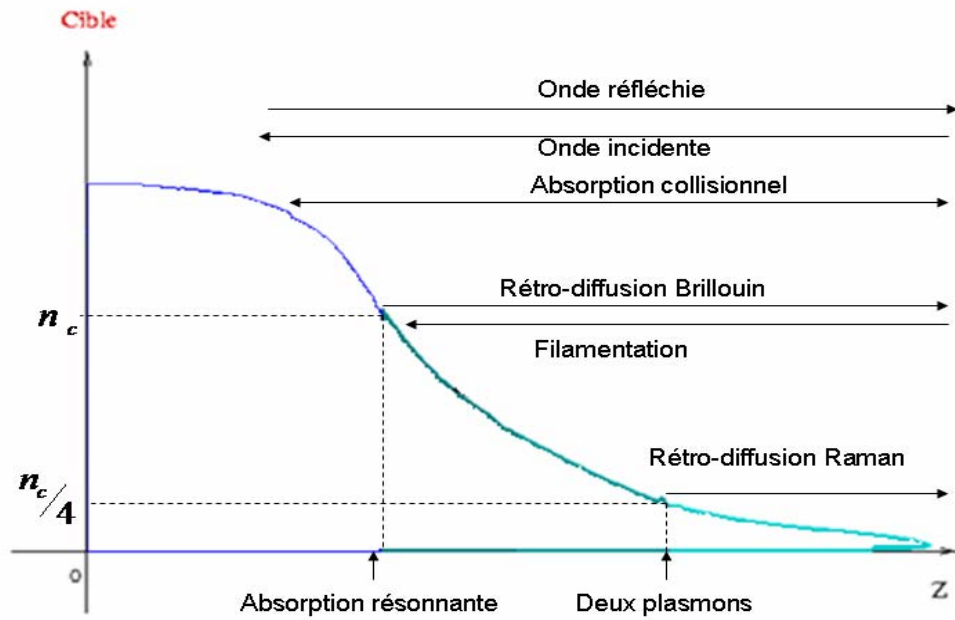
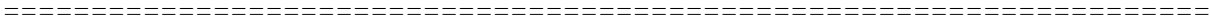


Figure 2

Profil de densité électrique en fonction de la distance à la cible – principaux mécanismes physique rencontrés.

=====

d) Génération de champs magnétiques

Des champs magnétiques intenses (de l'ordre du mégagauss) peuvent être générés par l'instabilité de Weibel [7] et par des effets thermoélectriques [4]. Ces champs magnétiques sont néfastes dans les expériences de la fusion inertielle car ils inhibent le transport thermique et créent des structures en filaments qui peuvent entraver notamment la compression isotrope de la cible.

Motivation et présentation du travail

Cette thèse traite d'un problème de physique fondamentale qu'est la contribution des collisions électron-électron au calcul des termes qui contiennent le champ laser dans les équations cinétiques qui décrivent les plasmas chauds. Nous avons établi un opérateur qui décrit l'interaction à trois corps, électron-photon-électron, dans l'équation de Fokker-Planck pour des plasmas homogènes de numéro atomique Z arbitraire.

La motivation de notre travail provient essentiellement des plasmas rencontrés dans les expériences de fusion inertielle qui sont caractérisés par des numéros atomiques faibles. Dans ces plasmas, les collisions électron-électron ne peuvent plus être négligées par rapport aux collisions électron-ion. Notre objectif dans ce travail est de tenir compte des collisions électron-électron dans les termes isotropes (dans l'espace des vitesses) et anisotropes qui interviennent dans les équations de transport. Notre étude nous a permis d'une part, de retrouver les principaux résultats de la littérature [8-10] et d'autre part de calculer la contribution des collisions électron-électron au terme induit par la seconde anisotropie du plasma.

Le plan de ce mémoire s'articule autour de deux chapitres. Dans le premier chapitre, une étude bibliographique centrée sur les principaux résultats de la littérature portant sur l'absorption de l'énergie laser par bremsstrahlung inverse et des termes de pression anisotropes induits par le champ laser dans les expériences de l'interaction laser-plasma, est présentée. L'effet de l'absorption sur la déformation de la fonction de distribution électronique est également exposé. En préliminaire, dans ce chapitre une présentation de l'équation de Fokker-Planck qui constitue l'équation centrale du travail est également présentée.

Le deuxième chapitre est consacré au calcul explicite de l'opérateur qui tient compte des corrélations électron-électron dans les termes de battements du champ électrique dans la description de la fonction de distribution électronique. Le modèle théorique est basé sur l'équation de Fokker-Planck qui décrit un plasma homogène en présence d'un champ électrique

=====

haute-fréquence en tenant compte des corrélations électron-électron et électron-ion. Les collisions entre les particules chargées ont été modélisées par l'opérateur de Landau. La résolution analytique de cette équation a été effectuée en utilisant la méthode de séparation des échelles de temps correspondant à l'échelle hydrodynamique (basse-fréquence) et à l'échelle temporelle de l'onde laser (haute-fréquence) ainsi que la méthode itérative basée sur une vitesse d'oscillation des électrons dans le champ laser très petite devant leur vitesse thermique.

Chapitre I

Etude Bibliographique

Chapitre I

Etude Bibliographique

I. Introduction

Dans l'équation de Fokker-Planck le champ électrique laser est présent dans différents termes de battement entre ce champ et la réponse haute-fréquence du plasma. Dans les plasmas créés par laser les termes de battement importants sont les termes de chauffage collisionnel et les termes de pression anisotropes.

Nous présentons dans ce chapitre, une étude bibliographique sur la contribution du champ laser dans les plasmas de numéro atomique élevé ($Z \gg 1$), ce qui permet de négliger la contribution des collisions électron-électron. Plus précisément, nous présentons les principaux résultats de la littérature relatifs à l'effet de ce champ laser sur la déformation de la fonction de distribution électronique.

En préliminaire, nous consacrons une large présentation de l'équation de Fokker-Planck étant donné son importance dans ce travail puis qu'elle constitue l'équation centrale à partir de laquelle sont développés nos calculs.

II. Equation de Fokker-Planck

II. 1 Présentation générale de l'équation de Fokker-Planck

Un plasma est un gaz quasi-neutre composé d'un très grand nombre de particules chargées (électrons et ions) et éventuellement neutres. L'évolution des propriétés du plasma se rattache aux divers mouvements individuels des particules qui sont en interaction incessante les unes avec les autres. Il est aisé de se convaincre que cela représente une tâche insurmontable de décrire la dynamique de chaque particule du plasma. On utilise par conséquent une approche statistique du système en termes de fonction de distribution. On attache à un plasma autant de fonctions de distribution qu'il y a d'espèces différentes de particules. De telles fonctions de distribution f_s dépendent par définition de la vitesse \vec{v} et de la position \vec{r} des particules à un instant t . Elles représentent le nombre de particules de l'espèce 's' considérée, situées à l'instant t dans l'élément de volume $d\vec{r}$ et ayant des vitesses comprises entre \vec{v} et $\vec{v}+d\vec{v}$, *i.e.*,

$$dn_s = f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}. \quad (\text{I.1})$$

Il en résulte la condition de normalisation

$$n_s(\vec{r}, t) = \int f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (\text{I.2})$$

où $n_s(\vec{r}, t)$ est la densité de l'espèce 's' de particules au point (\vec{r}, t) .

La dynamique du plasma est donc décrite par les équations d'évolution auxquelles satisfont les fonctions de distribution. Ces équations sont appelées équations cinétiques. La formulation des équations cinétiques dépendra du type d'interaction entre les particules du plasma. Leur expression générale se présente sous la forme :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (\text{I.3})$$

Le membre de gauche décrit l'évolution dans le temps de la fonction de distribution f_s dans l'espace des phases (\vec{r}, \vec{v}) . Le terme $\frac{\partial f_s}{\partial t}$ exprime la dépendance explicite de f_s par rapport au temps (effets non stationnaires), le terme $\vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}}$ exprime l'influence des phénomènes de diffusion (terme de transport) tandis que le terme $\frac{\vec{F}}{m_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}}$ traduit l'action de la résultante \vec{F} des forces appliquées aux particules de masse m_s . Ce dernier est dû aussi bien aux forces internes qui résulte de l'interaction entre les particules du plasma qu'aux forces créées par des sources externes.

Le membre de droite de l'équation (I.3), écrit sous forme symbolique, représente le taux de changement de la fonction de distribution f_s sous l'effet des collisions.

Dans les plasmas chauds et complètement ionisés, c'est à dire constitués exclusivement d'ions et d'électrons, auxquels nous nous intéressons dans ce travail, l'interaction entre deux particules chargées est coulombienne. En raison de la portée infinie de la force de Coulomb, il y a lieu de distinguer deux régions:

-La région des collisions située typiquement à des distances inférieures à la longueur d'écran de Debye λ_{Ds} . Dans cette zone, les particules subissent des déviations et des échanges d'énergie suites à des collisions de types binaires.

-La région des interactions collectives supérieures à la longueur de Debye. Dans cette zone naissent des champs électrique et magnétique à la suite de la séparation de charges et à des courants circulant dans le plasma. Toutes les particules sont en interaction simultanée, donnant ainsi lieu à un comportement collectif du plasma. La longueur de Debye dans les plasmas représente la longueur d'écran d'une charge par toutes les autres charges du plasma. A l'équilibre thermique, elle est définie par

$$\lambda_{Ds} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_s}{n_s q_s^2}} \quad (\text{I. 4})$$

où ε_0 est la permittivité du vide, k_B est la constante de Boltzmann, q_s et T_s sont respectivement la charge et la température de l'espèce de 's' de particules du plasma. On posera, $s=e$ pour les électrons et $s=i$ pour les ions.

L'équation cinétique la plus adaptée pour décrire les plasmas chauds et complètement ionisés est l'équation de Vlasov-Landau appelée aussi équation de Fokker-Planck par analogie à l'équation de Fokker-Planck qui décrit des processus stochastiques [11]. Cette équation se présente sous la forme :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll} \quad (\text{I. 5})$$

Cette appellation d'équation de Vlasov-Landau provient du fait que si on supprime l'opérateur de collision $\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll}$, on aboutit à l'équation de Vlasov [12] et l'opérateur de collision est celui établi par Landau [13] à partir de l'opérateur de collision de Boltzmann [14]. Dans l'équation (I.5), les champs \vec{E} et \vec{B} sont dus aux charges d'espace du plasma (champs auto-consistants) ainsi qu'à des sources externes. Les deux premiers termes du membre de gauche de l'équation décrivent l'advection tandis que le troisième terme décrit les interactions lointaines supérieures à la longueur de Debye λ_{Ds} . Le membre de droite de

l'équation (I.5) rend compte des collisions entre particules à des distances inférieures à la longueur de Debye λ_{Ds} . C'est précisément ce terme que nous allons à présent déterminer dans le cas du modèle de collisions du type Fokker-Planck. En effet, dans les plasmas chauds et complètement ionisés, l'interaction coulombienne communique aux particules chargées des impulsions fort nombreuses et de petite amplitude, ce qui suggère de les représenter par des processus aléatoires markoviens. C'est l'effet cumulé des nombreuses collisions avec les autres particules qui entraîne un changement sensible en module et en direction du vecteur vitesse.

On suppose qu'à un instant t , la fonction de distribution de l'espèce 's' de particules est $f_s(\vec{v} - \Delta\vec{v}, t)$. Au bout de l'intervalle de temps Δt , elle devient $f_s(\vec{v}, t + \Delta t)$ car la vitesse de la particule a subit une variation $\Delta\vec{v}$ suite à une collision. En définissant $P(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v})$, la probabilité pour que ce changement de vitesse se produise, la fonction de distribution à l'instant $t + \Delta t$ s'écrit

$$f_s(\vec{v}, t + \Delta t) = \int P(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v}) f_s(\vec{v} - \Delta\vec{v}, t) d\Delta\vec{v}, \quad (\text{I.6})$$

où l'intégration sur $\Delta\vec{v}$ prend en considération toutes les valeurs possibles de la variation de la vitesse. L'équation (I.6) décrit les processus de types markoviens. En effet, l'événement défini à l'instant $t + \Delta t$ ne dépend que de l'état du système à l'instant t , indépendamment de l'historique du système avant l'instant t . Afin d'envisager adéquatement les collisions coulombiennes comme des processus Markoviens, il est nécessaire de considérer dans l'équation (I.6), l'intervalle de temps Δt , suffisamment long pour que de nombreuses collisions puissent se produire et en même temps suffisamment court pour que la variation du vecteur vitesse $\Delta\vec{v}$ reste faible par rapport à \vec{v} , i.e.; $\Delta\vec{v} \ll \vec{v}$. On peut par conséquent effectuer un développement en série de Taylor de l'équation (I.6)

$$f_s(\vec{v}, t + \Delta t) = f_s(\vec{v}, t) + \Delta t \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right) + \dots \quad (\text{I.7})$$

et

$$\begin{aligned} f_s(\vec{v} - \Delta\vec{v}, t) P(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v}) &= f_s(\vec{v}, t) P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial v_{\mu}} f_s(\vec{v}, t) P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) \Delta v_{\mu} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial v_{\mu} \partial v_{\nu}} f_s(\vec{v}, t) P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) \Delta v_{\mu} \Delta v_{\nu} \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

où $\left(\frac{\delta f_s}{\delta t}\right)_{coll}$ décrit la variation de la fonction de distribution due aux collisions, Δv_μ est une composante du vecteur $\Delta \vec{v}$ et $\Delta v_\mu \Delta v_\nu$ est une composante du tenseur $(\Delta \vec{v} \Delta \vec{v})$. Par ailleurs, par définition de la probabilité de transition, nous pouvons écrire

$$\int P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) d \Delta \vec{v} = 1 \quad (I.9)$$

et en définissant la valeur moyenne sur les variations de la vitesse

$$\langle \Delta v_\mu \rangle = \int P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) \Delta v_\mu d \Delta \vec{v} / \Delta t \quad (I.10)$$

$$\langle \Delta v_\mu \Delta v_\nu \rangle = \int P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) \Delta v_\mu \Delta v_\nu d \Delta \vec{v} / \Delta t \quad (I.11)$$

alors l'équation (I. 6) couplée avec les équations (I. 7)-(I. 11) donne

$$\left(\frac{\delta f_s}{\delta t}\right)_{coll} = - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial v_\mu} [f_s \langle \Delta v_\mu \rangle] + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial v_\mu \partial v_\nu} [f_s \langle \Delta v_{\mu\nu} \rangle]. \quad (I.12)$$

L'équation (I.12) est connue sous le nom d'équation de Fokker-Planck. Elle décrit l'évolution de la fonction de distribution sous l'effet de petites variations du vecteur vitesse lors de collisions. Les coefficients de transport $\langle \Delta v_\mu \rangle$ et $\langle \Delta v_\mu \Delta v_\nu \rangle$ décrivent respectivement le phénomène de friction dynamique et le phénomène de diffusion dans l'espace des vitesses. Notons ici, que l'équation (I.12) a été établie par une approche phénoménologique. Sous cette forme, il est impossible de déterminer explicitement les coefficients de transport à partir des équations (I.10) et (I.11), dans la mesure où le rôle des centres diffuseurs n'a pas été précisé. De manière générale, ces coefficients sont des fonctions de la vitesse \vec{v} des particules diffusées et de la fonction de distribution $F(\vec{v})$ des particules cibles.

Dans les plasmas chauds, plusieurs travaux ont été rapportés dans la littérature pour décrire les processus collisionnels. Nous pouvons citer à titre d'exemple l'opérateur de collisions de Landau [13] établi à partir de l'opérateur de collisions de Boltzmann [14] en supposant des déflexions de faibles magnitudes dans l'espace des vitesses comme cela a été présenté plus haut, ou bien la description de Rosenbluth qui utilise les potentiels dits de Rosenbluth [15]. On peut aussi citer l'opérateur de collisions de Lennard-Balescu [16] qui

s'exprime en fonction de la fonction diélectrique du plasma. Dans ce travail, nous adopterons la description de Rosenbluth [15]. Cette description est équivalente à celle de Landau. Cependant, les développements utilisés dans la description de Rosenbluth font apparaître clairement les termes anisotropes des opérateurs de collisions.

II. 2 Formulation de l'équation de Fokker-Planck en termes de potentiels de Rosenbluth.

Un calcul général des coefficients de transport dans l'espace des vitesses a été rapporté par MacDonald, Rosenbluth et Judd [17] en fonction des potentiels $H(\mathbf{v})$ et $G(\mathbf{v})$ appelés potentiels de Rosenbluth. Ces potentiels sont définis par la fonction de distribution $F(\vec{V})$ des centres diffuseurs comme suit :

$$H(\mathbf{v}) = \frac{M+m}{M} \int \frac{F(\vec{V}) d\vec{V}}{U} \quad (\text{I.13})$$

et

$$G(\mathbf{v}) = \int F(\vec{V}) U d\vec{V} \quad (\text{I.14})$$

où $U = |\vec{v} - \vec{V}|$ est le module de la vitesse relative entre la particule diffusée de masse m et de vecteur vitesse \vec{v} et le centre diffuseur de masse M et de vitesse \vec{V} .

Le calcul des coefficients de transport en fonction des potentiels de Rosenbluth est développé dans l'appendice A. Il conduit aux formules suivantes

$$\langle \Delta v_\mu \rangle = Y \frac{\partial H}{\partial v_\mu} \quad (\text{I.15})$$

et

$$\langle \Delta v_\mu \Delta v_\nu \rangle = Y \frac{\partial^2 G}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \quad (\text{I.16})$$

où

$$Y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{ZZ' e^2}{m} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (\text{I.17})$$

Z , Z' sont respectivement le numéro atomique de la particule diffusée et de la particule cible, et $\ln \Lambda$ est le logarithme coulombien. Ce dernier correspond au logarithme du rapport du paramètre d'impact maximum au paramètre d'impact minimum, *i.e.*, $\Lambda = p_{\max} / p_{\min}$. Dans les plasmas cinétiques considérés dans ce travail, p_{\max} est de l'ordre de la longueur de Debye λ_{Ds} et p_{\min} correspond au paramètre d'impact dû à une déflexion d'un angle de $\pi/2$.

En remplaçant les équations (I.15) et (I.16) dans l'équation (I.12), on obtient l'équation de Fokker-Planck en termes de potentiels de Rosenbluth

$$\left(\frac{\delta f_s}{\delta t} \right)_{coll} = -Y \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial v_{\mu}} \left[f_s(\vec{v}, t) \frac{\partial H}{\partial v_{\mu}} \right] + \frac{Y}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial v_{\mu} \partial v_{\nu}} \left[f_s(\vec{v}, t) \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\mu} \partial v_{\nu}} \right]. \quad (\text{I.18})$$

En notation vectorielle, valable quel que soit le système de coordonnées, la généralisation de l'équation (I.18) est

$$\left(\frac{\delta f_s}{\delta t} \right)_{coll} = -Y \nabla \cdot \left[f_s(\vec{v}, t) \nabla H - \frac{1}{2} \nabla \cdot [f_s(\vec{v}, t) \nabla \nabla G] \right] = -Y \nabla \cdot (f_s(\vec{v}, t) \nabla H) + \frac{Y}{2} \nabla \nabla : f_s(\vec{v}, t) \nabla \nabla G \quad (\text{I.19})$$

où $\nabla \cdot$ et ∇ désignent respectivement l'opérateur divergence et l'opérateur gradient dans l'espace des vitesses \vec{v} , et $\nabla \nabla :$ et $\nabla \nabla$ sont les tenseurs correspondants. L'opérateur $\nabla \nabla :$ agit sur un tenseur $\bar{\bar{T}}$ d'ordre 2 comme suit

$$\nabla \nabla : \bar{\bar{T}} = \frac{\partial^2 T_{\mu\nu}}{\partial v_{\mu} \partial v_{\nu}}$$

où la règle de sommation des indices répétés est utilisée.

L'équation (I.19) peut encore s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{\delta f_s}{\delta t} \right)_{coll} = -Y \left(\nabla \cdot \nabla H + \frac{\nabla \nabla : \nabla \nabla G}{2} \right) \cdot f_s(\vec{v}, t) + Y [\nabla \cdot \nabla \nabla G - \nabla H] \cdot \nabla f_s(\vec{v}, t) + \frac{Y}{2} \nabla \nabla G : \nabla \nabla f_s(\vec{v}, t). \quad (\text{I.20})$$

Afin de simplifier la forme de l'équation (I.20), nous allons à présent établir les relations entre les potentiels $H(\mathbf{v})$ et $G(\mathbf{v})$.

A partir de l'équation (I.14), et étant donné que $U = \left((v_x - V_x)^2 + (v_y - V_y)^2 + (v_z - V_z)^2 \right)^{1/2}$ et $\nabla U = \frac{\vec{v} - \vec{V}}{U}$, il résulte

$$\nabla G(\mathbf{v}) = \int F(\vec{V}) \frac{\vec{v} - \vec{V}}{U} d\vec{V}. \quad (\text{I.21})$$

En combinant l'équation (I.21) avec l'équation (I.13), on obtient l'expression de $H(\mathbf{v})$ en fonction de $G(\mathbf{v})$:

$$\nabla^2 G(\mathbf{v}) = 2 \int \frac{F(\vec{V})}{U} d\vec{V} = \frac{2M}{M+m} H(\mathbf{v}) \quad (\text{I.22})$$

où la relation $\nabla \cdot \frac{\vec{v} - \vec{V}}{U} = \frac{2}{U}$ a été utilisée. Par ailleurs, il est aisé de vérifier que les fonctions

$H(\mathbf{v})$ et $\nabla^2 G(\mathbf{v})$ sont respectivement solutions des équations

$$\nabla^2 H = -4\pi \frac{M+m}{M} F \quad (\text{I.23})$$

et

$$\nabla^4 G = -8\pi F. \quad (\text{I.24})$$

Finalement, en utilisant les équations (I.22)-(I.24) et après quelques étapes de calcul, l'équation (I.20) s'écrit :

$$\left(\frac{\delta f_s}{\delta t} \right)_{coll} = 4\pi Y \frac{m}{M} F(\vec{V}) f_s(\vec{v}, t) + \frac{M-m}{M+m} \nabla H(\mathbf{v}) \cdot \nabla f_s(\vec{v}, t) + \frac{Y}{2} \nabla \nabla G(\mathbf{v}) : \nabla \nabla f_s(\vec{v}, t). \quad (\text{I.25})$$

Cette équation traduit à tout instant la variation de la fonction de distribution dans l'espace des vitesses due aux collisions coulombiennes électron-électron et électron-ion. Nous rappelons que ce terme rend compte des collisions entre particules chargées à l'intérieur de la sphère de Debye, à l'inverse du terme du champ électrique [voir équation (I.5)] qui rend

compte des interactions coulombiennes entre les particules chargées sur des distances supérieures à longueur de Debye λ_{Ds} (effets collectifs).

II.2a Calcul explicite des potentiels de Rosenbluth sur la base du tenseur cartésien

Afin d'avoir des expressions explicites des opérateurs de collisions électron-ion et électron-électron, il est nécessaire de calculer à partir des équations (I.13) et (I.14) les potentiels $H(\mathbf{v})$ et $G(\mathbf{v})$. Pour cela, il est pratique de développer les fonctions de distributions $f(\vec{v})$ et $F(\vec{V})$ sur la base des harmoniques sphériques Y_{lms} ou sous la forme équivalente en termes du tenseur cartésien [18], et les fonctions $U(\mathbf{v})$ et $1/U(\mathbf{v})$ sur la base des polynômes de Legendre P_n [19]:

$$f(\vec{v}) = \sum_l \sum_{m,s} Y_{lms}(\theta_1, \phi_1) f_{lms}(\mathbf{v}) = \sum_l \vec{f}_l(\mathbf{v}) \cdot \frac{\vec{v}^{(l)}}{v^{(l)}} = f_0 + \vec{v} \cdot \frac{\vec{f}_1}{v} + \frac{\vec{v}\vec{v} : \vec{f}_2}{v^2} + \dots \quad (\text{I.26})$$

$$F(\vec{V}) = \sum_l \sum_{m,s} Y_{lms}(\theta_2, \phi_2) F_{lms}(V) = \sum_l \vec{F}_l(\mathbf{v}) \cdot \frac{\vec{V}^{(l)}}{V^{(l)}} = F_0 + V \cdot \frac{\vec{F}_1}{V} + \frac{\vec{V}\vec{V} : \vec{F}_2}{V^2} + \dots \quad (\text{I.27})$$

$$U = |\vec{v} - \vec{V}| = v_M \left(1 - 2(v_m/v_M) \cos\theta + (v_m/v_M)^2 \right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(v_m/v_M)^2}{2n+3} - \frac{1}{2n-1} \right) \frac{v_m^n}{v_M^{n-1}} P_n(\cos\theta) \quad (\text{I.28})$$

et

$$\frac{1}{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_m^n}{v_M^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (\text{I.29})$$

où \vec{v} et \vec{V} sont définis dans le système des coordonnées sphériques par $\vec{v} = (v, \theta_1, \phi_1)$, $\vec{V} = (V, \theta_2, \phi_2)$ et θ est l'angle formé entre \vec{v} et \vec{V} , défini par $\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$ [voir figure 3]. v_m et v_M sont respectivement la valeur de la plus petite vitesse et la plus grande vitesse entre v et V : $v_m = \min(v, V)$ et $v_M = \max(v, V)$.

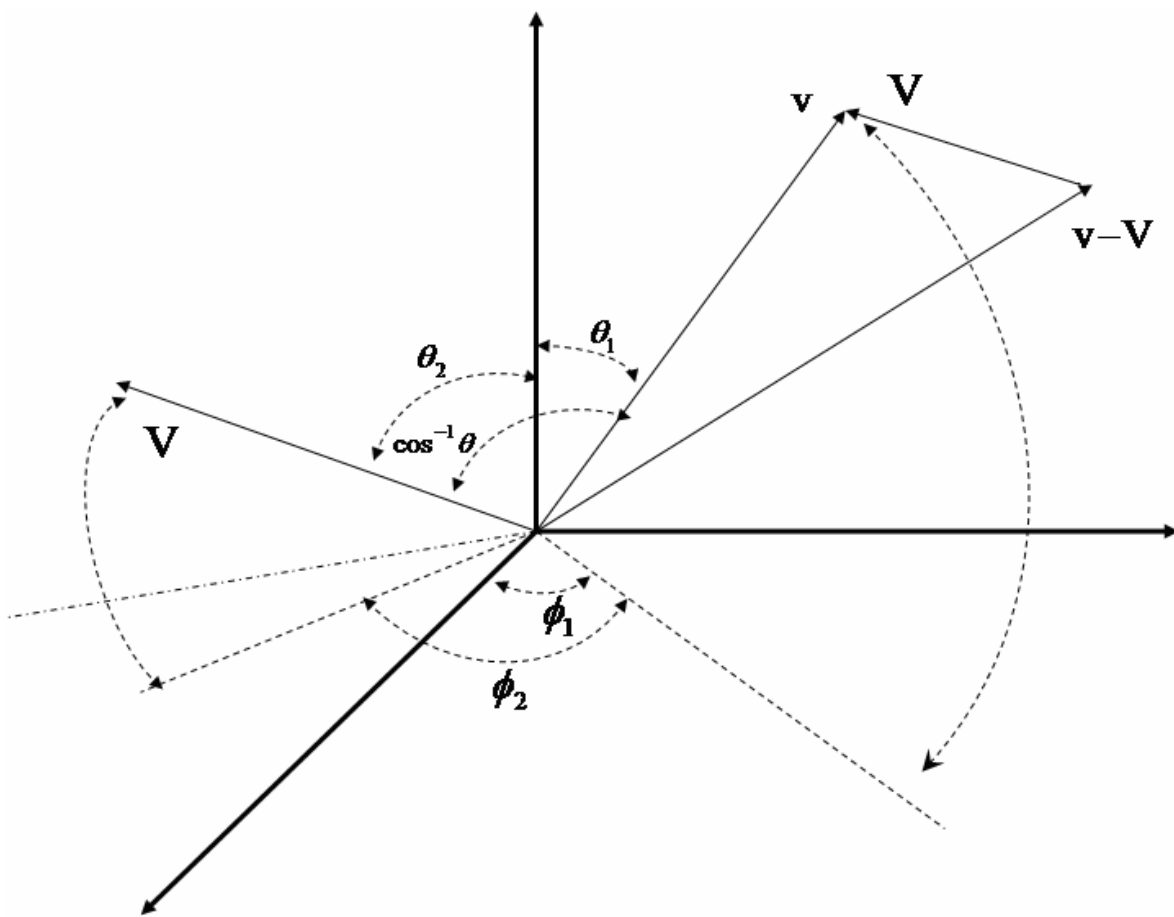


Figure 3

Représentation des vecteurs vitesse \vec{v} , \vec{V} et $\vec{v} - \vec{V}$

En substituant l'équation (I.29) dans l'équation (I.13), il résulte

$$H(\mathbf{v}) = \frac{M+m}{M} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\phi_2=0}^{2\pi} \left(\int_0^v V^2 dV \sin\theta_2 d\theta_2 d\phi_2 F(V) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{V^{n+1}} P_n(\cos\theta) + \int_v^{\infty} V^2 dV \sin\theta_2 d\theta_2 d\phi_2 F(V) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{V^{n+1}} P_n(\cos\theta) \right) \quad (\text{I.30})$$

En introduisant, le développement (I.27) de $F(\vec{V})$ et en utilisant la propriété suivante entre les harmoniques sphériques Y_{lms} et les polynômes de Legendre P_n

$$\int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^{\pi} \sin\theta_2 d\theta_2 Y_{lms}(\theta_2, \phi_2) P_n(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{nms}(\theta_1, \phi_1) \delta_{nl} \quad , \quad (\text{I.31})$$

l'équation (I.30) se simplifie comme suit

$$H(\mathbf{v}) = \frac{M+m}{Mv} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{1}{v^n} \int_0^v F_{nms}(V) Y_{nms}(\theta_1, \phi_1) V^{2n+1} dV + v^{n+1} \int_v^{\infty} F_{nms}(V) Y_{nms}(\theta_1, \phi_1) V^{1-n} dV \right) \quad (\text{I.32})$$

ou encore en introduisant le tenseur cartésien [voir équation (I.27)], le potentiel de Rosenbluth $H(\mathbf{v})$ s'exprime comme

$$H(\mathbf{v}) = \frac{M+m}{Mv} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{1}{v^n} \int_0^v \vec{F}_n(V) \cdot \frac{\vec{v}^{(n)}}{v^n} V^{2n+1} dV + v^{n+1} \int_v^{\infty} \vec{F}_n(V) \cdot \frac{\vec{v}^{(n)}}{v^n} V^{1-n} dV \right) \quad (\text{I.33})$$

Par ailleurs on définit deux types d'intégrales de la forme

$$\vec{I}_j^i(\mathbf{v}) = \frac{4\pi}{v^j} \int_0^v \vec{F}_i V^{j+2} dV \quad (\text{I.34})$$

$$\vec{J}_j^i(\mathbf{v}) = \frac{4\pi}{v^j} \int_{\mathbf{v}} \vec{F}_i V^{j+2} dV. \quad (\text{I.35})$$

Ces intégrales obéissent aux relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \vec{I}_j^i = 4\pi v^2 \vec{F}_i - \frac{j \vec{I}_j^i}{v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \vec{J}_j^i = -4\pi v^2 \vec{F}_i - \frac{j \vec{J}_j^i}{v}. \quad (\text{I.36})$$

Nous pouvons alors écrire l'équation (I.33) comme

$$\begin{aligned} H(\mathbf{v}) &= \frac{M+m}{Mv} \sum_{n=0}^{\infty} [I_n^n + J_{-1-n}^n] \cdot \frac{\vec{v}^{(n)}}{(2n+1)v^n} \\ &= \frac{M+m}{Mv} \left[I_0^0 + J_{-1}^0 + \left(\vec{I}_1^1 + \vec{J}_{-2}^1 \right) \frac{\vec{v}}{3v} + \left(\vec{I}_2^2 + \vec{J}_{-3}^2 \right) \frac{\vec{v}\vec{v}}{5v^2} + \dots \right] \\ &= H_0 + \vec{H}_1 \cdot \frac{\vec{v}}{v} + \vec{H} : \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

De même, à partir des équations (I. 28) pour $U(\mathbf{v})$ et (I. 14) pour le potentiel $G(\mathbf{v})$, on montre que

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}) &= v \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{I_{n+2}^n + J_{-1-n}^n}{2n+3} - \frac{I_n^n + J_{1-n}^n}{2n-1} \right] \cdot \frac{\vec{v}^{(n)}}{(2n+1)v^n} \\ &= v \left[I_0^0 + J_1^0 + \frac{I_2^0}{3} + \frac{J_{-1}^0}{3} + \left(\frac{\vec{I}_3^1}{15} + \frac{\vec{J}_{-2}^1}{15} - \frac{\vec{I}_1^1}{3} - \frac{\vec{J}_0^1}{3} \right) \frac{\vec{v}}{v} + \left(\frac{\vec{I}_4^2}{35} + \frac{\vec{J}_{-3}^2}{35} - \frac{\vec{I}_2^2}{15} - \frac{\vec{J}_{-1}^2}{15} \right) \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} + \dots \right] \\ &= G_0 + \vec{G}_1 \cdot \frac{\vec{v}}{v} + \vec{G} : \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{I. 38})$$

Notons que les équations (I.37) et (I.38) sont exprimées suivant un développement tensoriel jusqu'à l'ordre deux. Cette approximation est largement suffisante pour décrire les effets physiques courants dans les plasmas chauds. Les équations (I.37) et (I.38) vont nous permettre d'établir les expressions explicites de l'opérateur de collision $\left(\frac{\delta f_s}{\delta t} \right)_{coll}$ qui

rappelons le, contiennent aussi bien l'opérateur de collision électron-ion C_{ei} que l'opérateur de collision électron-électron C_{ee} , i. e.;

$$\left(\frac{\delta f_s}{\delta t}\right)_{coll} = C_{ei}(f_s) + C_{ee}(f_s). \quad (\text{I.39})$$

II.2b Calcul des opérateurs de collision

1) Calcul de l'opérateur de collision électron-ion

Dans ce cas les centres diffuseurs sont des ions et les particules diffusées des électrons : Alors, $M = M_i$, $F = F_i$, $m = m_e$, et $f = f_e$ sont respectivement la masse et la fonction de distribution ionique ainsi que la masse et la fonction de distribution électronique. Nous développons l'opérateur de collision C_{ei} sur les trois premières composantes du tenseur cartésien. Ces projections donnent la variation due aux collisions électron-ion de la composante isotrope ainsi que de la première et de la seconde anisotropie de la fonction de distribution des électrons. A partir des équations (I. 25)-(I. 27), (I. 37) et (I. 38), et après de longues manipulations mathématiques nous obtenons l'équation isotrope

$$\left(\frac{\mathcal{J}_{e0}}{\mathcal{A}}\right)_{ei} = C_{ei}(f_{e0}, F_{i0}) = \frac{Y_{ei}}{3v} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial v^2} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{Y_{ei}}{3v^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \left(2J_{-1}^0 - I_2^0 + 3I_0^0 \frac{m_e}{M_i}\right) + 4\pi Y_{ei} f_{e0} \frac{m_e F_{i0}}{M_i} \quad (\text{I. 40})$$

et les équations anisotropes suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{\mathcal{J}}_{e1}}{\mathcal{A}}\right)_{ei} &= C_{ei}(\vec{f}_{e1}, F_{i0}) + C_{ei}(f_{e0}, \vec{F}_{i1}) \\ &= \frac{Y_{ei}}{3v} \frac{\partial^2 \vec{f}_{e1}}{\partial v^2} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{Y_{ei}}{3v^2} \frac{\partial \vec{f}_{e1}}{\partial v} \left(2J_{-1}^0 - I_2^0 + 3I_0^0 \frac{m_e}{M_i}\right) + \frac{Y_{ei}}{3v^3} \vec{f}_{e1} (-2J_{-1}^0 + I_2^0 - 3I_0^0) \\ &\quad + 4\pi Y_{ei} (\vec{f}_{e1} F_{i0} + \vec{F}_{i1} f_{e0}) \frac{m_e}{M_i} + \frac{Y_{ei}}{5v} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial v^2} (\vec{I}_3^0 + \vec{J}_{-2}^0) + \frac{Y_{ei}}{15v^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \left[-3\vec{I}_3^1 + \left(7 - \frac{5m_e}{M_i}\right) \vec{J}_{-2}^1 + \left(-5 + 10 \frac{m_e}{M_i}\right) \vec{I}_1^1\right] \end{aligned} \quad (\text{I. 41})$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\bar{\bar{f}}_{e2}}{\delta t}\right)_{ei} &= C_{ei}(\bar{\bar{f}}_{e2}, F_{i0}) + C_{ei}(f_{e0}, \bar{\bar{F}}_{i2}) \\
&= \frac{Y_{ei}}{3v} \frac{\partial^2 \bar{\bar{f}}_{e2}}{\partial v^2} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{Y_{ei}}{3v^2} \frac{\partial \bar{\bar{f}}_{e2}}{\partial v} \left(2J_{-1}^0 - I_2^0 + 3I_0^0 \frac{m_e}{M_i} \right) + \frac{Y_{ei}}{3v^3} \bar{\bar{f}}_{e2} (-2J_{-1}^0 + I_2^0 - 3I_0^0) \\
&\quad + 4\pi Y_{ei} \left(\bar{\bar{f}}_{e2} F_0 + \bar{\bar{F}}_{i2} f_{e0} \right) \frac{m_e}{M_i} + Y_{ei} \frac{\bar{\bar{f}}_{e2}}{v^3} (I_2^0 - 2J_{-1}^0 - 3I_0^0) + \frac{Y_{ei}}{v} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial v^2} \left[\frac{6}{35} (\bar{\bar{I}}_4^2 + \bar{\bar{J}}_{-3}^2) - \frac{1}{15} (\bar{\bar{I}}_2^2 + \bar{\bar{J}}_{-3}^2) \right] \\
&\quad + \frac{Y_{ei}}{v^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \left[-\frac{6}{35} \bar{\bar{I}}_4^2 + \frac{3}{7} \bar{\bar{J}}_{-3}^2 - \frac{1}{3} \bar{\bar{I}}_2^2 + \frac{1}{15} \bar{\bar{J}}_{-1}^2 + \frac{m_e}{5M_i} (-3\bar{\bar{I}}_2^2 - 2\bar{\bar{J}}_{-3}^2) \bar{\bar{I}}_1^1 \right].
\end{aligned} \tag{I.42}$$

$$\text{où } Y_{ei} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{Ze^2}{m_{ei}} \right)^2 \ln \Lambda.$$

Notons que dans le cas où l'on néglige la dynamique des ions à cause de leur grande inertie, l'opérateur C_{ei} présente des simplifications importantes. En effet, dans cette situation la fonction de distribution ionique est Maxwellienne $F_i \sim \exp(-x^2)$ où $x = M_i V^2 / 2k_B T_i$. Elle présente donc une symétrie sphérique, $i. e.$; $\bar{F}_1 = 0$ et $\bar{F}_2 = 0$. Les intégrales $\bar{I}_j^i(v)$ et $\bar{J}_j^i(v)$ ainsi que leurs dérivées se calculent alors aisément à l'aide des fonctions Erreur $\Phi(x)$ définies par [16] :

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy. \tag{I.43}$$

De plus, en négligeant les termes proportionnels au rapport des masses m_e / M_i , les équations (I.40)-(I.42) se simplifient comme suit

$$\left(\frac{\delta f_{e0}}{\delta t}\right)_{ei} = C_{ei}(f_{e0}) \cong 0 \tag{I.44}$$

$$\left(\frac{\delta \bar{f}_{e1}}{\delta t}\right)_{ei} = C_{ei}(\bar{f}_{e1}, f_{e0}) \cong -Y_{ei} I_0^0 \frac{\bar{f}_{e1}}{v^3} \tag{I.45}$$

$$\left(\frac{\bar{\mathcal{F}}_{e2}}{\bar{\mathcal{A}}} \right)_{ei} = C_{ei}(\bar{f}_{e2}, f_{e0}) \cong -3Y_{ei} I_0^0 \frac{\bar{f}_{e2}}{v^3}. \quad (\text{I.46})$$

Il en résulte que l'opérateur de collision électron-ion devient indépendant de la fonction de distribution ionique F_i . De plus, il n'agit pas sur la partie isotrope de la fonction de distribution et agit comme un opérateur aux valeurs propres sur les autres anisotropies. Ce résultat retrouve l'expression de l'opérateur de collision établie par Landau [13]

$$C_{ei}(f_e)_{Landau} = Y_{ei} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \cdot \left[\frac{v^2 \bar{I} - \bar{v}\bar{v}}{v^3} \right] \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \bar{v}} + \mathcal{G} \left(\frac{m_e}{M_i} \right) \quad (\text{I.47})$$

où \bar{I} est le tenseur unité d'ordre 2. Il est important de noter qu'en négligeant dans l'équation (I.47) les termes proportionnel au rapport des masses $\frac{m_e}{M_i}$, l'opérateur de collision électron-ion de Landau $C_{ei}(f_e)_{Landau}$ admet comme fonctions propres les harmoniques sphériques.

2) Calcul de l'opérateur de collision électron-électron

Dans ce cas $M = m = m_e$ et $F = f = f_e$ sont respectivement la masse de l'électron et la fonction de distribution électronique. L'expression de C_{ee} se présente sous une forme similaire à celle de l'opérateur de collision électron-ion donnée par les équations (I.40)-(I.42). Contrairement aux collisions électron-ion, l'opérateur de collision électron-électron C_{ee} n'admet pas de simplifications importantes. Son expression se présente sous une forme intégral-différentielle relativement complexe. Comme pour l'opérateur de collision électron-ion C_{ei} , nous donnons ici le développement de l'opérateur de collision électron-électron C_{ee} sur le tenseur cartésien jusqu'à l'ordre deux suffisant pour les applications développées dans ce travail:

$$\left(\frac{\mathcal{F}_{e0}}{\mathcal{A}} \right)_{ee} = C_{ee}(f_{e0}, f_{e0}) = 4\pi Y_{ee} f_{e0} f_{e0} + \frac{Y_{ee}}{3v} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial v^2} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{Y_{ee}}{3v^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} (2J_{-1}^0 - I_2^0 + 3I_0^0) \quad (\text{I.48})$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\vec{f}_{e1}}{\partial t}\right)_{ee} &= C_{ee}(\vec{f}_{e1}, f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0}, \vec{f}_{e1}) \\
&= \frac{Y_{ee}}{3v} \frac{\partial^2 \vec{f}_{e1}}{\partial v^2} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{Y_{ee}}{3v^2} \frac{\partial \vec{f}_{e1}}{\partial v} (2J_{-1}^0 - I_2^0 + 3I_0^0) + \frac{Y_{ee}}{3v^3} \vec{f}_{e1} (-2J_{-1}^0 + I_2^0 - 3I_0^0) \\
&+ 4\pi Y_{ee} (\vec{f}_{e1} f_{e0} + \vec{f}_{e1} f_{e0}) + \frac{Y_{ee}}{5v} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial v^2} (\vec{I}_3^1 + \vec{J}_{-2}^1) + \frac{Y_{ee}}{15v^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} [-3\vec{I}_3^1 + 2\vec{J}_{-2}^1 + 5\vec{I}_1^1]
\end{aligned} \tag{I.49}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\vec{f}_{e2}}{\partial t}\right)_{ee} &= C_{ee}(\vec{f}_{e2}, f_{e0}) + C_{ee}(f_{e0}, \vec{f}_{e2}) \\
&= \frac{Y_{ee}}{3v} \frac{\partial^2 \vec{f}_{e2}}{\partial v^2} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{Y_{ee}}{3v^2} \frac{\partial \vec{f}_{e2}}{\partial v} (2J_{-1}^0 - I_2^0 + 3I_0^0) + \frac{Y_{ee}}{3v^3} \vec{f}_{e2} (-2J_{-1}^0 + I_2^0 - 3I_0^0) \\
&+ 4\pi Y_{ee} (\vec{f}_{e2} f_{e0} + \vec{f}_{e2} f_{e0}) + Y_{ee} \frac{\vec{f}_{e2}}{v^3} (I_2^0 - 2J_{-1}^0 - 3I_0^0) + \frac{Y_{ee}}{v} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial v^2} \left[\frac{6}{35} (\vec{I}_4^2 + \vec{J}_{-3}^2) - \frac{1}{15} (\vec{I}_2^2 + \vec{J}_{-3}^2) \right] \\
&+ \frac{Y_{ee}}{v^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \left[-\frac{6}{35} \vec{I}_4^2 + \frac{3}{7} \vec{J}_{-3}^2 - \frac{1}{3} \vec{I}_2^2 + \frac{1}{15} \vec{J}_{-1}^2 + \frac{1}{5} (-3\vec{I}_2^2 - 2\vec{J}_{-3}^2) \vec{I}_1^1 \right].
\end{aligned} \tag{I.50}$$

$$\text{où } Y_{ee} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^4}{m_e^2} \ln \Lambda.$$

III Bremsstrahlung inverse.

Le mécanisme de l'absorption de l'énergie laser par bremsstrahlung inverse qui signifie rayonnement de freinage inverse, est une interaction à trois corps : un électron, un ion et un photon. Lors de cette interaction, le photon incident transfère une partie de son énergie à un électron en présence du champ électrique d'un ion. Ce transfert d'énergie est usuellement appelé absorption collisionnelle étant donné que l'énergie est transmise à l'électron lors d'une collision électron-ion. Ce phénomène correspond d'un point de vue quantique à la transition libre-libre du système électron-ion après avoir absorbé un photon. Dans les plasmas chauds créés par laser auxquels nous nous intéressons dans ce travail, l'énergie thermique d'un électron $k_B T_e$ est plus importante que l'énergie du photon du laser incident $\hbar\omega$, *i. e.* ; $\hbar\omega \ll k_B T_e$ où $\hbar = h/2\pi$, h étant la constante de Planck, ω est la fréquence angulaire du laser et k_B est la constante de Boltzmann. Cette condition justifie le traitement classique du phénomène d'absorption par bremsstrahlung inverse dans les plasmas créés laser. Il est

évident que dans le cas contraire où $\hbar\omega \gg k_B T_e$, seul un traitement purement quantique permet une description rigoureuse de l'interaction électron-ion-photon.

III.1 Taux d'absorption

Le calcul du taux d'absorption de l'énergie laser par bremsstrahlung inverse dans les plasmas créés par laser peut se faire à partir des équations hydrodynamiques. Pour cela, on considère le mouvement d'un électron dans le champ d'une onde électromagnétique représentée par le champ électrique haute-fréquence \vec{E}_{hf} , dans l'approximation dipolaire correspondant à un vecteur d'onde nul, soit :

$$\vec{E}_{hf} = \text{Re}[\vec{E}_0 \exp(i\omega t)] \quad (\text{I.51})$$

où le symbole Re désigne la partie réelle de \vec{E}_{hf} . Nous ne tiendrons pas compte de l'effet du

champ magnétique car il est négligeable étant donné que typiquement nous avons $\left(\frac{E_{hf}}{B_{hf}} \sim c \right)$,

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. L'énergie absorbée par le plasma par unité de temps et de volume sur une période de l'onde $T = 2\pi / \omega$, établie dans le cadre de la théorie de l'électrodynamique classique est donnée par la relation:

$$A_{coll} = \langle \vec{E}_{hf} \cdot \vec{j}_{hf} \rangle \quad (\text{I.52})$$

$$\text{où } \vec{j}_{hf} = -en_e \vec{V}_{hf} \quad (\text{I.53})$$

est la densité de courant électronique induite par l'onde électromagnétique, n_e et \vec{V}_{hf} sont respectivement la densité et la vitesse moyenne des électrons dans le champ de l'onde. Les ions sont supposés fixes à cause de leur grande inertie. A son tour, la densité de courant peut être calculée à partir de l'équation du mouvement des électrons avec un terme de friction

$$\frac{\partial \vec{V}_{hf}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}_{hf} - \nu \vec{V}_{hf} \quad (\text{I.54})$$

où ν est une fréquence introduite de façon phénoménologique dans l'équation (I.54). Elle est proportionnelle à la fréquence de collision électron-ion ν_{ei} qui rend compte du transfert d'impulsion lors des collisions. Des équations (I.52)-(I.54) on déduit le taux d'absorption d'énergie

$$A_{coll} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \nu \omega_p^2}{\nu^2 + \omega^2} E_0^2 \quad (\text{I.55})$$

où $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ est la fréquence plasma électronique. Dans l'approximation linéaire, le taux d'absorption A_{coll} est proportionnel à l'intensité de l'onde $I \sim E_0^2$. Pour des intensités de l'onde relativement importantes où typiquement l'amplitude de la vitesse d'oscillation de l'électron dans le champ de l'onde, $v_0 = \sqrt{\frac{eE_0}{m_e \omega}}$ est plus importante que la vitesse thermique électronique $v_t = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$, *i. e.* ; ($v_0 \geq v_t$), l'équation (I.55) n'est plus valable. La prise en compte des effets non linéaires conduit en fait à réduire le taux d'absorption [20]. Par ailleurs, l'expression du coefficient d'absorption (I.55) dépend d'un paramètre phénoménologique ν qui ne peut être calculé explicitement que par l'approche cinétique.

III.2 Description cinétique des effets du bremsstrahlung inverse.

Les effets d'un champ électrique haute-fréquence dans les plasmas peuvent être pris en compte au niveau microscopique dans l'équation de Fokker-Planck. Ces effets sont diverses, cependant les plus importants sont l'absorption dite par bremsstrahlung inverse, la pression de radiation et la force pondéromotrice. Dans la suite de ce travail, nous appelons tous ces effets physiques, « effets du bremsstrahlung inverse ».

Dans la référence [8], Langdon fut le premier à établir l'opérateur qui décrit le bremsstrahlung inverse en vue d'étudier l'absorption de l'énergie laser dans les expériences de l'interaction laser-plasma. Depuis, de nombreux travaux sont rapportés dans la littérature

liés au chauffage du plasma par bremsstrahlung inverse. Nous allons présenter dans ce paragraphe les résultats de Langdon [8], de Matte et al [21] ainsi que de Bendib et al [9]. Le résultat de la référence [9] généralise le résultat de Langdon par la prise en compte des effets du bremsstrahlung inverse dans la partie anisotrope de l'équation de Fokker-Planck.

III. 2a Résultat de Langdon

Dans ce travail, le plasma est supposé uniforme de densité n_e et de température T_e électroniques constantes. Les ions sont considérés fixes et constituant un fond neutralisant. L'onde l'électromagnétique est traitée dans l'approximation dipolaire, *i. e.* ; $\vec{E}_{hf} = \vec{E}_0 \cos \omega t$. L'équation de Fokker-Planck pour les électrons s'écrit

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{q_e}{m_e} \vec{E}_{hf} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = C_{ei}(f_e) + C_{ee}(f_e). \quad (\text{I.56})$$

En négligeant la contribution des termes proportionnels au rapport des masses électronique et ionique m_e / M_i , l'opérateur de collision électron-ion a pour expression (voir Eq. (I.47)).

$$C_{ei}(f_e) = \frac{v_t^4}{2\lambda_{ei}} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\frac{v^2 \vec{I} - \vec{v}\vec{v}}{v^3} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} \right] \quad (\text{I.57})$$

où $\lambda_{ei} = \frac{4\pi\epsilon_0^2 k_B^2 T_e^2}{n_e e^4 Z \ln \Lambda}$ est le libre parcours moyen des électrons. Dans la référence [8] Langdon

a supposé que le rôle des collisions électron-électron est faible devant celui des collision électron-ion. Cela revient à considérer exclusivement des plasmas de grand numéro atomique ($Z \gg 1$). Il a donc négligé l'opérateur C_{ee} dans la partie anisotrope de l'équation (I.57). Il faut noter que le rôle des collisions électron-électron est de faire tendre le système vers l'équilibre thermodynamique, par conséquent leur prise en compte dans le calcul de la composante isotrope de la fonction de distribution est nécessaire.

Pour de faibles intensités du champ \vec{E}_{hf} , on peut décomposer la fonction de distribution en une composante isotrope $f_0(v)$ d'ordre zéro et une perturbation anisotrope $f_{1hf}(v)$ induite par le champ électrique soit

$$f_e(\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + f_{1hf}(\mathbf{v}) \cos \theta \quad (\text{I.58})$$

où θ est l'angle entre \vec{v} et \vec{E}_{hf} . L'expression linéarisée de l'équation (I.56) s'écrit

$$\frac{\partial f_{1hf}}{\partial t} + \frac{q_e}{m_e} E_{hf} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu_{ei} \frac{v_t^3}{v^3} f_{1hf}. \quad (\text{I.59})$$

où $\nu_{ei} = \frac{v_t}{\lambda_{ei}}$ est la fréquence de collision électron-ion. La solution est donnée par

$$f_{1hf} = \nu_{ei} \frac{v_0}{\omega} \frac{v_t^3}{v^3} g(v) \left(\cos \omega t + \frac{\omega}{\nu_{ei}} \sin \omega t \right) \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (\text{I.60})$$

$g(v) = \left[1 + \left(\frac{\nu_{ei}}{\omega} \frac{v_t^3}{v^3} \right)^2 \right]^{-1}$. En calculant la densité de courant induite par le champ électrique

haute-fréquence

$$\vec{j}_{1hf} = -e \int f_1(\mathbf{v}) \cos \theta \vec{v} d\vec{v}, \quad (\text{I.61})$$

nous déduisons le taux d'absorption moyen

$$A_{coll} = \langle \vec{E}_{hf} \cdot \vec{j}_{1hf} \rangle = -\frac{n_e Z e^4 \ln \Lambda}{6 \epsilon_0 m_e} v_0^2 \int_0^\infty g(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv. \quad (\text{I.62})$$

Dans l'approximation haute fréquence $\omega \gg \nu_{ei}$, la quantité $g(v) \sim 1$, et l'équation (I.62) devient alors

$$A_{coll} = \frac{n_e Z e^4 \ln \Lambda}{6 \epsilon_0 m_e} v_0^2 f_0(0). \quad (\text{I.63})$$

Il apparaît que seuls les électrons qui ont des vitesses nulles contribuent au taux d'absorption. Cependant, pour évaluer cette contribution, il est nécessaire de calculer la fonction de

distribution f_0 . Pour cela, Langdon a établi l'équation d'évolution de f_0 en gardant la partie basse fréquence et en prenant la moyenne angulaire de l'équation cinétique (I.56) :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{n_e Z e^4}{24 \pi m_e \varepsilon_0^2 \ln \Lambda} \frac{v_0^2}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{g(v)}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] + C_{ee}(f_0). \quad (\text{I.64})$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (I.64) décrit la contribution du « bremsstrahlung inverse » dans l'équation cinétique. Dans l'équation (I.64), il apparaît clairement que la forme de la fonction de distribution f_0 va dépendre aussi bien du processus d'absorption de l'énergie laser que des collisions électron-électron. Ces deux effets physiques vont rentrer en compétition. Dans la limite où les collisions électron-électron sont importantes correspondant à la condition $Z \frac{v_0^2}{v_t^2} \ll 1$, nous pouvons négliger le terme dû au champ électrique haute-fréquence dans l'équation (I.64). On obtient la solution à l'équilibre thermodynamique donnée par la fonction de distribution de Maxwell :

$$f_0(v) = f_M(v) = \frac{n_e}{(2\pi)^{3/2} v_t^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_t^2}\right) \quad (\text{I.65})$$

Dans l'autre limite où $Z \frac{v_0^2}{v_t^2} \gg 1$, les collisions ne sont pas assez efficaces pour rétablir l'équilibre thermodynamique. Dans ce cas en approximant $g(v) \sim 1$, il résulte une solution self-similaire de l'équation (I.64) :

$$f_0(v, t) \sim \frac{1}{u^3} \exp\left[-\frac{1}{5} \left(\frac{v}{u}\right)^5\right] \quad (\text{I.66})$$

où

$$u(t) = \left(\frac{5n_e e^4 Z \ln \Lambda}{24\pi \varepsilon_0^2 m_e^2} v_0^2 t \right)^{1/5}. \quad (\text{I.67})$$

Il apparaît que l'effet du bremsstrahlung inverse conduit à un plasma hors de l'équilibre thermodynamique. La fonction de distribution (I.66) contient moins de particules de vitesses

nulles que la fonction de distribution de Maxwell. Cela conduit à une réduction du taux d'absorption. Plus précisément, il a été montré que cette réduction est environ de moitié par rapport au cas collisionnel.

III. 2. b. Résultat de Matte et al

Dans la référence [21], Matte et al ont utilisé la simulation numérique pour calculer la fonction de distribution isotrope f_0 , solution de l'équation (I.64). Le code Fokker-Planck FPI, a été utilisé pour décrire un plasma homogène en présence d'une onde haute-fréquence. L'onde laser attaque le plasma avec une incidence normale. En faisant varier l'intensité de l'onde laser, ils ont balayé une large gamme de valeur du paramètre pertinent du problème

$Z \frac{v_0^2}{v_t^2}$. Ils ont ensuite établi des ajustements numériques très précis de la fonction de

distribution isotrope f_0 . Ils ont montré que la fonction de distribution isotrope qui tient compte aussi bien du bremsstrahlung inverse que des collisions électron-électron peut-être modélisée par des fonctions de la forme

$$f_0^{(m)} = \frac{n_e}{v_t^3} \frac{m}{4\pi\Gamma(3/m)} \left(\frac{\Gamma(5/m)}{\Gamma(3/m)} \right)^{3/2} \exp(-by^{m/2}) \quad (\text{I. 68})$$

où $b = \left(\frac{2 \Gamma(5/m)}{3 \Gamma(3/m)} \right)^{m/2}$, $y = \frac{v^2}{2v_{te}^2}$, Γ est la fonction d'Euler et m est un paramètre qui tient

compte de la contribution du bremsstrahlung à la fonction de distribution électronique. Ce paramètre s'exprime sous la forme

$$m = 2 + \frac{3}{1 + \beta}, \text{ où } \beta = 1,66 \left(\frac{Zv_0^2}{v_t^2} \right)^{-0.724} \quad (\text{I.69})$$

permettant ainsi de relier explicitement le paramètre m à l'intensité I du laser incident ($v_0^2 \sim E_0^2 \sim I$).

Il a été montré que les fonctions de distribution (I.68) décrivent correctement les comportements asymptotiques $Z \frac{v_0^2}{v_t^2} \ll 1$ et $Z \frac{v_0^2}{v_t^2} > 1$, rapportés dans la référence [8].

III.2c Résultat de Bendib et al.

Dans la référence [9] la contribution d'un champ électrique haute-fréquence de polarisation longitudinale et transversale, au calcul de l'opérateur bremsstrahlung inverse a été établie explicitement. Dans ce travail, nous limitons la présentation au résultat de la polarisation longitudinal.

L'équation de base est l'équation de Fokker-Planck (I. 56) qui décrit un plasma homogène en présence d'un champ électrique haute fréquence. Les collisions électron-électron sont négligées par rapport aux collisions électron-ion ($Z \gg 1$), et le champ électrique est considéré dans l'approximation dipolaire. La fonction de distribution électronique f_e est composée d'une partie basse fréquence f_s et d'une partie haute fréquence f_h oscillant à la fréquence ω du champ électrique :

$$f_e(\mathbf{v}, t) = f_s(\bar{\mathbf{v}}, t) + \text{Re}[f_h(\bar{\mathbf{v}})\exp(i\omega t)] \quad (\text{I.70})$$

La séparation des échelles de temps dans l'équation (I.56) conduit aux équations cinétiques basse-fréquence et haute-fréquence suivantes :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - \left\langle \frac{e}{m_e} \bar{\mathbf{E}}_{hf} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \bar{\mathbf{v}}} \right\rangle = C_{ei}(f_s) \quad (\text{I.71})$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} - \frac{e}{m_e} \bar{\mathbf{E}}_{hf} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \bar{\mathbf{v}}} = C_{ei}(f_h) \quad (\text{I.72})$$

où le symbole $\langle \rangle$ désigne la valeur moyenne sur une période du champ électrique $T = 2\pi / \omega$. L'opérateur de collision électron-ion est donné par l'équation (I.57). Dans le cas d'une polarisation linéaire suivant l'axe Ox , le champ électrique s'exprime comme

$$\bar{\mathbf{E}}_{hf} = \text{Re}[E_0 \exp(i\omega t)]\bar{\mathbf{x}} \quad (\text{I.73})$$

et la fonction de distribution s'écrit :

$$f_e(\bar{\mathbf{v}}, t) = f_s(\mathbf{v}, \mu, t) + \text{Re}[f_h(\mathbf{v}, \mu)\exp(i\omega t)] \quad (\text{I.74})$$

où $\mu = \cos \theta = \frac{v_x}{v}$. En utilisant les équations (I.57), (I.73) et (I.74), les équations (I.71) et

(I.72) deviennent :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - \frac{v_t^4}{2\lambda_{ei}} \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1-\mu^2) \frac{\partial f_s}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{eE_0^*}{m_e} \left(\mu \frac{\partial f_h}{\partial v} + \frac{1}{v} (1-\mu^2) \frac{\partial f_h}{\partial \mu} \right) \right] \quad (\text{I.75})$$

$$i\omega f_h - \frac{v_t^4}{2\lambda_{ei}} \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1-\mu^2) \frac{\partial f_h}{\partial \mu} = \frac{eE_0}{m_e} \left[\mu \frac{\partial f_s}{\partial v} + \frac{1}{v} (1-\mu^2) \frac{\partial f_s}{\partial \mu} \right] \quad (\text{I.76})$$

où la notation *, signifie ‘complexe conjugué’. Pour résoudre le système d’équations (I.75) et (I.76), les fonctions de distribution f_s et f_h sont développées sur la base des polynômes de Legendre $P_l(\mu)$:

$$f_s = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} P_l(\mu) f_{s_l}(v) \quad (\text{I.77})$$

$$f_h = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} P_l(\mu) f_{h_l}(v). \quad (\text{I.78})$$

En utilisant les relations de récurrence des polynômes de Legendre [16], et après quelques manipulations mathématiques l’équation (I.76) s’écrit dans l’approximation haute-fréquence $\omega \gg v_{ei}$:

$$f_{h_l}(v) = \left[-\frac{ieE_0}{\omega m_e} + \frac{eE_0}{\omega^2 m_e} \frac{v_t^4}{2\lambda_{ei}} \frac{l(l+1)}{v^3} \right] \left[l v^{l-1} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\bar{f}_{s_{l-1}}}{v^{l-1}} + \frac{2l+1}{2l+3} \frac{1}{v^{l+2}} \frac{\partial}{\partial v} v^{l+2} \bar{f}_{s_{l+1}} \right]. \quad (\text{I.79})$$

En substituant cette équation (I.78) dans (I.75), on déduit l’équation basse-fréquence pour un ordre d’anisotropie l arbitraire

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{s_l}}{\partial t} + \frac{v_t^4}{2\lambda_{ei}} \frac{1}{v^3} l(l+1) f_{s_l} = \frac{v_t^4 v_0^2}{4\lambda_{ei}} \left[\frac{l^2(l-1)}{2l+1} v^{l-1} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l-1}{2l-3} \frac{1}{v^4} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\bar{f}_{s_{l-2}}}{v^{l-2}} + \frac{l}{2l+1} \frac{1}{v^{2l+3}} \frac{\partial}{\partial v} v^{l+1} \bar{f}_{s_l} \right) \right] + \\ \frac{v_t^4 v_0^2}{4\lambda_{ei}} \left[\frac{(l+1)^2(l+1)}{2l+3} \frac{1}{v^{l+2}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l+1}{2l+1} v^{2l-1} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\bar{f}_{s_l}}{v^l} + \frac{l+2}{2l+5} \frac{1}{v^4} \frac{\partial}{\partial v} v^{l+3} \bar{f}_{s_{l+2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.80})$$

Cette équation (I.80) généralise l'équation (I.64) à des anisotropie d'ordre l arbitraires. Notons ici que pour $l = 0$, l'équation isotrope (I.64) établie par Langdon [18] est bien retrouvée. Par ailleurs pour $l = 2$, on peut noter que la contribution du bremsstrahlung est importante. Dans la référence [9], ce terme a été utilisé comme terme de source pour exciter l'instabilité de Weibel [7] dans les plasmas chauffés par laser.

IV. Conclusion

Nous avons dans ce chapitre présenté l'effet d'un champ électrique haute-fréquence sur les électrons d'un plasma chaud par le mécanisme du bremsstrahlung inverse. En particulier, la contribution de ce mécanisme dans l'équation cinétique (équation de Fokker-Planck) a été présentée. Cette contribution est appelée usuellement opérateur de Langdon. Cet opérateur intervient dans le calcul de la fonction de distribution au même titre que les opérateurs de collisions.

Dans les plasmas homogènes en l'absence du bremsstrahlung inverse, la fonction de distribution isotrope est une Maxwellienne globale $f_0 \sim \exp\left(-\left(v/\sqrt{2}v_t\right)^2\right)$ induite par les collisions électron-électron. Dans l'autre limite où le bremsstrahlung inverse domine les processus collisionnels, la fonction de distribution se comporte comme une super-Maxwellienne $f_0 \sim \exp\left(-\left(v/\sqrt{2}v_t\right)^5\right)$. Enfin, dans une situation intermédiaire, typique aux plasmas créés par laser la fonction de distribution se comporte comme une super-Maxwellienne $f_0 \sim \exp\left(-\left(v/\sqrt{2}v_t\right)^m\right)$ où $m=2-5$ est un paramètre qui dépend de l'intensité du champ haute-fréquence présent dans le plasma.

Dans une dernière partie, la contribution du bremsstrahlung inverse à la partie anisotrope de l'équation cinétique de Fokker-Planck a été présentée.

Chapitre II

*Contribution des collisions électron-électron
à
l'opérateur du bremsstrahlung inverse*

CHAPITRE II

Contribution des collisions électron-électron à l'opérateur « bremsstrahlung inverse »

I. Introduction

Ce chapitre est consacré au calcul de la contribution des collisions électron-électron au mécanisme d'interaction entre un photon et un électron en présence d'un ion. Le plasma étudié est un plasma homogène chauffé par un champ électrique haute fréquence homogène (approximation dipolaire). Cela signifie que l'on ne considère pas les phénomènes de transport mais seulement l'effet de l'onde laser sur les électrons du plasma à l'échelle hydrodynamique. Pour cela, nous allons calculer les opérateurs qui décrivent ces effets dans l'équation de Fokker-Planck en tenant compte aussi bien des interactions électron-ion qu'électron-électron. Nous avons limité notre étude à des ondes haute-fréquence de faible amplitude comme cela se fait dans la littérature et rapporté dans le chapitre précédent.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans une première partie, nous présentons le modèle théorique utilisé qui est basé sur l'équation de Fokker-Planck (ou de Vlasov-Landau). Nous résolvons ensuite cette équation en utilisant la méthode de séparation des échelles de temps ainsi que la méthode itérative. Enfin, nous discutons et résumons nos principaux résultats dans un dernier paragraphe.

II. Equations de base du modèle

II.1 Equation de Fokker-Planck

Pour décrire un plasma complètement ionisé où les interactions entre les particules se font par le biais des interactions coulombiennes, nous utilisons l'équation de Fokker-Planck présentée dans le chapitre I. Pour les électrons, elle s'écrit dans le repère du laboratoire sous la forme :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = C_{ee}(f_e, f_e) + C_{ei}(f_e, F_i) \quad . \quad (\text{II.1})$$

où f_e et F_i sont respectivement les fonctions de distribution des électrons et des ions, m_e est la masse des électrons, e est la charge élémentaire, \vec{E} et \vec{B} sont les champs électrique et magnétique présents dans le plasma et, $C_{ee}(f_e, f_e)$ et $C_{ei}(f_e, F_i)$ sont respectivement les opérateurs de collision électron-électron et électron-ion. On peut noter que rigoureusement, cette équation (II.1) doit être couplée avec l'équation cinétique des ions qui décrit l'évolution de la fonction ionique F_i , afin de rendre le problème auto-consistent. Cette équation n'est pas, en fait, nécessaire car dans notre problème nous négligeons la dynamique des ions.

Dans l'équation (II.1), nous avons effectué quelques approximations qui se justifient physiquement dans les plasmas créés par laser. En outre, ces approximations vont simplifier l'écriture de l'équation cinétique, ce qui va permettre sa résolution analytique.

II.2 Approximations utilisées

i) *Approximation d'un plasma homogène*

Dans le but de ne tenir compte que des « effets bremsstrahlung inverse », nous négligeons les effets de l'inhomogénéité du plasma. Cette approximation consiste à négliger le champ électrique dû aux charges d'espace dans le plasma ainsi que le terme de transport $\left(\frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} \approx 0\right)$. Ceci suppose par conséquent que les effets de l'inhomogénéité du plasma sur les "effets bremsstrahlung inverse" sont négligeables.

ii) *Approximation d'un plasma non magnétisé.*

Elle consiste à négliger les champs magnétiques dus à des sources externes et à des courants électriques dans le plasma qui peuvent générer des champs magnétiques intenses. Cette approximation ne peut se justifier que si la fréquence cyclotron des électrons due à la présence d'un champ magnétique quasi-statique dans le plasma est faible devant la fréquence de collision. Par ailleurs, la contribution du champ magnétique haute-fréquence de l'onde laser est négligeable devant la contribution du champ électrique haute-fréquence puisque typiquement, $E_{hf} / B_{hf} \sim c$.

iii) *Approximation sur les ions*

Dans ce travail, à cause de leur grande inertie nous négligeons la réponse des ions aux sollicitations du champ électrique haute-fréquence. Cette hypothèse est systématiquement utilisée dans la littérature pour analyser la réponse d'un plasma soumis à un champ laser. De même, nous

supposons que l'effet de l'hydrodynamique du plasma sur l'interaction onde-plasma est négligeable. Ceci se justifie par le fait que la vitesse d'expansion du plasma créé par laser est de

l'ordre de $C_s = \sqrt{\frac{ZT_e}{M_i}}$ qui est très faible par rapport à la vitesse thermique des électrons

$v_t = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$. Cette hypothèse revient à travailler avec un plasma au repos par rapport au repère du

laboratoire.

Enfin, tous les termes dans l'équation cinétique proportionnels au rapport de la masse des

électrons sur celle des ions, $\left(\frac{m_e}{M_i} \ll 1\right)$ qui sont nettement moins importants que les autres termes

seront négligés dans ce travail. L'une des conséquences de ces approximations est que l'opérateur de collision électron-ion, C_{ei} , ne dépend pas de la fonction de distribution ionique.

II.3 Equations de Fokker-Planck haute-fréquence et basse-fréquence

En tenant compte des ces approximations, l'équation (II.1) prend la forme :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} - \frac{e}{m_e} \vec{E}_{hf} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = C_{ee}(f_e, f_e) + C_{ei}(f_e) \quad (\text{II.2})$$

où \vec{E}_{hf} est le champ électrique haute-fréquence donné par

$$\vec{E}_{hf} = \vec{E}_0 \cos \omega t, \quad (\text{II.3})$$

\vec{E}_0 et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence du champ électrique.

Pour résoudre cette équation nous considérons deux échelles de temps, une échelle basse-fréquence (hydrodynamique) et une échelle haute-fréquence (champ laser). Par conséquent, la fonction de distribution électronique f_e peut s'écrire comme la somme d'une fonction de distribution quasi-statique f_s qui varie lentement dans le temps et d'une fonction de distribution haute-fréquence f_{hf} qui suit la variation temporelle du champ électrique \vec{E}_{hf} :

$$f_e(\vec{v}, t) = f_s(\vec{v}, t) + f_{hf}(\vec{v}, t). \quad (\text{II.4})$$

Les notations sur les indices « s » et « hf » se rapportent aux échelles de temps séculaire (basse-fréquence) et haute-fréquence respectivement et elles seront utilisées tout le long de ce travail.

La séparation des échelles de temps dans l'équation (II.2) conduit aux équations cinétiques basse-fréquence et haute-fréquence suivantes :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - C_{ee}(f_s, f_s) - C_{ei}(f_s) = \left\langle \frac{e}{m_e} \vec{E}_{hf} \cdot \frac{\partial f_{hf}}{\partial \vec{v}} \right\rangle + \langle C_{ee}(f_{hf}, f_{hf}) \rangle \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial f_{hf}}{\partial t} - \frac{e}{m_e} \vec{E}_{hf} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = C_{ee}(f_s, f_{hf}) + C_{ee}(f_{hf}, f_s) + C_{ei}(f_{hf}) \quad (\text{II.6})$$

où le symbole $\langle \rangle$ désigne la valeur moyenne sur une période du champ électrique, $T = 2\pi / \omega$.

Les équations (II.5) et (II.6) constituent les équations de base de notre travail. Elles se présentent sous forme d'un système d'équations couplées. Le membre de droite de l'équation (II.5) constitué des termes de battement rend compte de la contribution du champ laser dans la description de la fonction de distribution séculaire. L'objet de notre travail est précisément le calcul explicite des ces termes de battement. Pour calculer ces termes, nous allons dans un premier temps calculer la fonction de distribution f_{hf} en fonction de f_s en résolvant l'équation (II.6).

III. Résolution de l'équation haute-fréquence de Fokker-Planck

Dans les plasmas créés par laser, typiquement la fréquence angulaire ω de l'onde laser est plus importante que les fréquences de collision électron-électron, ν_{ee} , et électron-ion, ν_{ei}

$\left(\frac{\nu_{ee}}{\omega} \ll 1 \text{ et } \frac{\nu_{ei}}{\omega} \ll 1 \right)$. Par conséquent, dans l'équation (II.6), les termes C_{ee} et C_{ei}

proportionnels respectivement aux fréquences de collision ν_{ee} et ν_{ei} sont plus faibles par rapport

au terme temporel $\frac{\partial f_{hf}}{\partial t} \sim \omega f_{hf}$. Cet ordre de grandeur va nous permettre de résoudre l'équation

(II.6) en posant

$$f_{hf}(\vec{v}) = f_{hf}^0(\vec{v}) + \mathcal{G}\left(\frac{v_{ee,ei}}{\omega}\right) f_{hf}^1(\vec{v}) \quad (\text{II.7})$$

où les indices supérieurs 0 et 1 désignent l'ordre de grandeur correspondant. A l'ordre le plus bas, nous négligeons les termes collisionnels dans l'équation (II.6), obtenant:

$$\frac{\partial f_{hf}^0}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \vec{E}_{hf} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}}. \quad (\text{II.8})$$

La solution de cette équation est triviale et elle s'exprime comme

$$f_{hf}^{(0)}(\vec{v}) = \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} \sin \omega t \quad (\text{II.9})$$

où $\bar{v}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m_e\omega}$ est la vitesse d'oscillation des électrons dans le champ électrique \vec{E}_{hf} .

Nous résolvons ensuite itérativement l'équation (II.6) en utilisant la solution $f_{hf}^{(0)}$, d'où,

$$f_{hf}(\vec{v}) = \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} \sin \omega t - \frac{\cos \omega t}{\omega} \left[C_{ei} \left(\bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} \right) + C_{ee} \left(f_s, \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} \right) + C_{ee} \left(\bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}}, f_s \right) \right] \quad (\text{II.10})$$

L'expression (II.10) représente la composante haute-fréquence de la fonction de distribution électronique dans les plasmas homogènes. Notons que cette solution (II.10) est exprimée sous une forme non explicite. Son écriture explicite nécessite de développer les expressions des opérateurs de collision.

IV. Calcul de l'opérateur bremsstrahlung inverse

La dernière étape de nos calculs est la détermination des termes de battement dus aux « effets bremsstrahlung inverse » dans l'équation (II.5). L'équation d'évolution de la fonction de distribution séculaire f_s se déduit en substituant la solution (II.10) dans l'équation (II.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} - C_{ei}(f_s) - C_{ee}(f_s, f_s) = & -\frac{1}{2} \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}} C_{ei} \left(\bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \bar{v}} \right) - \frac{1}{2} \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left[C_{ee} \left(f_s, \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \bar{v}} \right) + C_{ee} \left(\bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \bar{v}}, f_s \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} C_{ee} \left(\bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \bar{v}}, \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \bar{v}} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Le premier terme du membre de droite (II.11) décrit l'effet du champ électrique \vec{E}_{hf} par le mécanisme du bremsstrahlung inverse lors de collisions électron-ion tandis que les deux derniers termes tiennent compte des « effets bremsstrahlung inverse » lors de collisions électron-électron.

Dans le cadre de la fusion thermonucléaire contrôlée, les cibles dans les expériences de l'interaction laser-cible solide sont généralement planes ou sphériques. Ces deux géométries vont introduire des simplifications mathématiques importantes dans les équations qui décrivent le problème. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la géométrie plane qui est couramment étudiée dans la littérature. Dans cette géométrie, nous supposons une symétrie cylindrique autour de l'axe Ox . Dans ce cas, la fonction de distribution s'écrit

$$f_s(\vec{v}, t) = f_s(v, v_x, t) = f_s(v, \mu, t) \quad (\text{II.12})$$

où $\mu = \frac{v_x}{v}$. Dans cette géométrie, l'équation (II.11) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} - C_{ei}(f_s) - C_{ee}(f_s, f_s) = & -\frac{1}{2} v_0^2 \frac{\partial}{\partial v_x} C_{ei} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right) \\ & - \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\partial}{\partial v_x} \left[C_{ee} \left(f_s, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v}, f_s \right) \right] - \frac{1}{2} v_0^2 C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v}, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

IV.1 Développement de l'équation Fokker-Planck sur la base des polynômes de Legendre.

La symétrie cylindrique autour de l'axe Ox que nous avons adoptée dans ce travail est pratique pour développer la fonction de distribution f_s et l'équation de Fokker-Planck sur la base

des polynômes de Legendre $P_n(\mu)$. Les polynômes de Legendre sont définis par la relation de récurrence suivante [19]

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{d\mu} \right)^n (\mu^2 - 1)^n \quad (\text{II.14})$$

et ils vérifient la relation d'orthonormalisation:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = 2\delta_{nm} \quad (\text{II.15})$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker. A titre d'exemple, les trois premiers polynômes qui seront utilisés dans nos calculs sont

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu \quad \text{et} \quad P_2(\mu) = \frac{3}{2} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Le développement de la fonction de distribution f_s sur la base des polynômes de Legendre s'écrit

$$f_s(\mathbf{v}, \mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) f_{sn}(\mathbf{v}, t) \quad (\text{II.16})$$

Ce développement permet de séparer la fonction de distribution en une partie angulaire contenue dans $P_n(\mu)$ et une partie énergie contenue dans les composantes $f_{sn}(\mathbf{v})$. Notons que puisque $P_0(\mu) = 1$, le premier terme du développement (II.16) correspond à la composante isotrope f_{s0} , et par conséquent, les autres composantes f_{sn} ($n \geq 1$) décrivent l'anisotropie du plasma dans l'espace des vitesses. Notons aussi, que les polynômes de Legendre sont également les fonctions propres de l'opérateur de collision électron-ion de Landau, que nous utilisons dans ce travail. En revanche, le terme de collision électron-électron se présente sous forme intégral-différentielle, qui de façon générale, rend très difficile la résolution mathématique de l'équation de Fokker-Planck.

Dans ce travail, nous calculons les « effets du bremsstrahlung inverse » dans des plasmas anisotropes. Cette anisotropie en l'absence de gradient des grandeurs hydrodynamiques (température, densité, expansion, ...) est induite par le champ électrique haute-fréquence. Nous calculerons les effets du bremsstrahlung inverse sur la composante isotrope f_{s0} de la fonction de distribution ainsi que sur la seconde anisotropie f_{s2} , qui représentent les composantes les plus importantes en ordre de grandeur par rapport aux autres composantes de la fonction de distribution, comme cela a été démontré dans la référence [9]. Notons cependant, que l'ordre de grandeur de la composante anisotrope f_{s2} est plus petit que celui de la composante isotrope f_{s0} . Ceci est dû au fait que l'intensité du champ électrique haute-fréquence est de magnitude relativement faible, soit $v_0^2/v_t^2 \ll 1$.

IV.2 Contribution des collisions électron-ion au calcul de l'opérateur bremsstrahlung inverse

Nous allons à présent calculer explicitement l'opérateur du bremsstrahlung inverse en gardant la contribution des collisions électron-ion, S_{BI}^{ei} , correspondant au premier terme du membre de droite de l'équation (II.13) :

$$S_{BI}^{ei} = -\frac{1}{2}v_0^2 \frac{\partial}{\partial v_x} C_{ei} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right). \quad (\text{II.17})$$

Son calcul nécessite dans un premier temps d'exprimer l'opérateur de collision électron-ion C_{ei} en tenant compte de la symétrie cylindrique. Les collisions électron-ion sont décrites par l'opérateur de Landau (équation I.47) qui s'écrit en utilisant les coordonnées (μ, v) :

$$C_{ei}(f_s) = \frac{v_{ei}(v)}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f_s}{\partial \mu}. \quad (\text{II.18})$$

où $\nu_{ei}(\mathbf{v}) = \frac{n_e e^4 Z \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v^3}$ est la fréquence de collision électron-ion. L'opérateur angulaire

$\frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu}$, admet comme fonctions propres les polynômes de Legendre $P_n(\mu)$ et $[-n(n+1)]$

comme valeur propre, soit

$$C_{ei}(P_n(\mu)) = \frac{\nu_{ei}(\mathbf{v})}{2} (-n(n+1)) P_n(\mu). \quad (\text{II.19})$$

d'où il s'en suit

$$C_{ei}(P_n(\mu) f_{sn}(\mathbf{v})) = -n(n+1) \frac{\nu_{ei}(\mathbf{v})}{2} P_n(\mu) f_{sn}(\mathbf{v}) \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (\text{II.20})$$

En gardant le terme dominant du développement de la fonction de distribution séculaire f_s sur la base des polynômes de Legendre, *i.e.*; la composante isotrope f_{s0} , et appliquant (II.20) sur $P_1(\mu)$, nous obtenons

$$C_{ei} \left(\frac{\mathbf{v}_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right) = C_{ei} \left(\mu \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) = -\nu_{ei}(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, \quad (\text{II.21})$$

Il en résulte donc

$$\frac{\partial}{\partial v_x} C_{ei} \left(\frac{\mathbf{v}_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) = -\frac{\partial}{\partial v_x} \nu_{ei}(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \quad (\text{II.22})$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial v_x} C_{ei} \left(\frac{\mathbf{v}_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) = -\nu_{ei}(\mathbf{v}) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{\mathbf{v}_x}{v} \right) - \left(\frac{\mathbf{v}_x}{v} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\nu_{ei}(\mathbf{v}) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right). \quad (\text{II.23})$$

En calculant $\frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{\mathbf{v}_x}{v} \right) = \frac{1}{v} - \frac{\mathbf{v}_x^2}{v^3}$, l'équation (II.23) devient

$$\frac{\partial}{\partial v_x} C_{ei} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) = v_{ei}(v) \frac{1}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} - \frac{v_{ei}(v)}{v} \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} - \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right). \quad (\text{II.24})$$

Il apparaît que le membre de droite de l'équation (II.24) est une expression anisotrope dans l'espace des vitesses. En réarrangeant cette expression en fonction des polynômes de Legendre, il apparaît un terme isotrope et un terme anisotrope d'ordre deux :

$$\frac{\partial}{\partial v_x} C_{ei} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) P_0(\mu) + \frac{2}{3} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) - \frac{1}{v} v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right] P_2(\mu). \quad (\text{II.25})$$

Finalement, l'opérateur du bremsstrahlung inverse S_{BI}^{ei} [Eq. II.17)] s'écrit

$$S_{BI}^{ei} = \frac{1}{6} \frac{v_0^2}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) P_0(\mu) + \frac{1}{3} \frac{v_0^2}{v^2} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) - \frac{1}{v} v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right] P_2(\mu) \quad (\text{II.26})$$

Dans l'équation (II.26), le premier terme retrouve l'opérateur de Langdon établi dans la référence [8]. Notons ici, que l'expression $g(v)$ contenue dans cet opérateur (voir équation (I.64)) n'apparaît pas dans nos calculs. Cela est dû au fait que dans l'approximation haute-fréquence $\left(\frac{v_{ei}}{\omega} \ll 1 \right)$ considérée dans notre travail, $g(v) \sim 1$. L'opérateur de Langdon est responsable de l'absorption d'un photon laser lors d'une collision électron-ion par le mécanisme du bremsstrahlung inverse. Comme cela a été décrit au chapitre I, ce terme rentre en compétition avec l'opérateur de collision électron dont le rôle est de faire tendre le système vers l'équilibre thermodynamique. Il s'en suit une fonction de distribution isotrope appauvrie en particules de faibles vitesses par rapport à la fonction de distribution de Maxwell. Cela conduit en particulier à une réduction du taux d'absorption d'un facteur deux par rapport à un plasma décrit par une Maxwellienne.

Le second terme de l'équation (II.26) est celui établi dans la référence [9]. Ce terme complète l'opérateur de Langdon par la prise en compte des « effets du bremsstrahlung inverse » dans la partie anisotrope de l'équation de Fokker-Planck. Dans la référence [9], ce terme a été utilisé comme terme de source pour exciter l'instabilité de Weibel [7] dans les plasmas chauffés

par laser. En particulier, il a été montré que l'instabilité de Weibel excitée par le champ laser peut être aussi importante voire plus, que celle due au transport.

IV.3 Contribution des collisions électron-électron au calcul de l'opérateur bremsstrahlung inverse

Ce paragraphe est consacré au calcul explicite de l'opérateur bremsstrahlung inverse en tenant compte seulement de la contribution des collisions électron-électron. Cette contribution est représentée par les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (II.13), soit

$$S_{BI}^{ee} = -\frac{1}{2}v_0^2 \frac{\partial}{\partial v_x} \left[C_{ee} \left(f_s, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v}, f_s \right) \right] - \frac{1}{2}v_0^2 C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v}, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right). \quad (\text{II.27})$$

Nous allons dans une première étape calculer le premier terme de l'équation (II.27), $S_{BI,1}^{ee}$ en gardant, comme dans le paragraphe précédant, seulement le terme dominant f_{s0} , du développement de la fonction de distribution f_s sur la base des polynômes de Legendre, d'où:

$$S_{BI,1}^{ee} = -\frac{1}{2}v_0^2 \frac{\partial}{\partial v_x} \left[C_{ee} \left(f_{s0}, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, f_{s0} \right) \right]. \quad (\text{II.28})$$

Pour décrire les collisions électron-électron, nous utilisons la formulation de l'opérateur de collision C_{ee} en terme de potentiel de Rosenbluth présentée dans le chapitre I. Nous pouvons observer que le terme entre crochets de l'équation (II.28) est un terme anisotrope d'ordre un, ($\sim P_1(\mu)$). Au lieu de l'établir par un calcul direct, nous pouvons utiliser une expression analogue développée dans la littérature [17] (voir équation (I.49)). Celle-ci représente l'opérateur bilinéaire C_{ee} par rapport aux arguments $f_{e0}(\mathbf{v})$ et $\vec{f}_{e1}(\mathbf{v}) \cdot \frac{\vec{v}}{v}$ correspondant aux premières composantes de la fonction de distribution électronique $f_e(\vec{v})$, développée sur le tenseur cartésien d'ordre l , \vec{v}^l [Eq. (I.26)]. Dans l'approximation d'une symétrie cylindrique, utilisée dans notre travail, le développement tensoriel dégénère en un développement sur la base des polynômes de Legendre :

$$f_e(\vec{v}) = f_{e0}(v) + \vec{f}_{e1}(v) \cdot \frac{\vec{v}}{v} + \dots = f_{e0}(v)P_0(\mu) + f_{e1}(v)P_1(\mu) + \dots \quad (\text{II.29})$$

En utilisant l'équation (I.49), dans le cas d'une symétrie cylindrique, et le développement (II.29) pour la fonction de distribution séculaire f_s , le terme entre crochets de l'équation (II.28) s'écrit alors

$$\begin{aligned} C_{ee} \left(f_{s0}, P_1 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(P_1 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, f_{s0} \right) = Y_{ee} P_1(\mu) \left\{ 8\pi f_{s0} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} + \frac{1}{3v} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (2J_{-1}^0 - I_2^0 + 3I_0^0) \right. \\ \left. + \frac{1}{3v^3} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (-2J_{-1}^0 + I_2^0 - 3I_0^0) + \frac{1}{5v} \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} \left(I_3^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}} + J_{-2}^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{15v^2} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \left(-3I_3^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}} + 2J_{-2}^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}} + 5I_1^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

où

$$Y_{ee} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{e^4}{m_e^2} \ln \Lambda = v^3 \frac{v_{ei}(v)}{Z}. \quad (\text{II.31})$$

Les intégrales I_j^i , J_j^i , $I_j^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}}$ et $J_j^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}}$ sont définies par

$$I_j^i(v) = \frac{4\pi}{v^j} \int_0^v f_{si} w^{j+2} dw \quad (\text{II.32})$$

$$J_j^i(v) = \frac{4\pi}{v^j} \int_v^\infty f_{si} w^{j+2} dw. \quad (\text{II.33})$$

$$I_j^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}}(v) = \frac{4\pi}{v^j} \int_0^v \frac{\partial f_{s0}}{\partial w} w^{j+2} dw = 4\pi v^2 f_{s0} - \frac{j+2}{v} I_{j-1}^0 \quad (\text{II.34})$$

et

$$J_j^{\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}}(v) = \frac{4\pi}{v^j} \int_0^v \frac{\partial f_{s0}}{\partial w} w^{j+2} dw = -4\pi v^2 f_{s0} - \frac{j+2}{v} J_{j-1}^0 \quad (\text{II.35})$$

et elles obéissent aux relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial v} I_j^i = 4\pi v^2 f_{si} - j \frac{I_j^i}{v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial v} J_j^i = -4\pi v^2 f_{si} - j \frac{J_j^i}{v}. \quad (\text{II.36})$$

En utilisant les équations (II.34)-(II.36), l'équation (II.30) se réécrit comme :

$$C_{ee} \left(f_{s0}, P_1 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(P_1 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, f_{s0} \right) = P_1(\mu) A(v). \quad (\text{II.37})$$

où

$$A(v) = Y_{ee} \left\{ \frac{1}{3v} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (3I_0^0 - 4I_2^0 + 2J_{-1}^0) \right. \\ \left. + \frac{1}{3v^3} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (4I_2^0 - 6I_0^0 - 2J_{-1}^0) + 8\pi f_{s0} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right\}. \quad (\text{II.38})$$

En substituant le résultat (II.37) dans l'équation (II.28), et après quelques manipulations mathématiques, nous obtenons :

$$S_{BI,1}^{ee} = -\frac{1}{6} \frac{v_0^2}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 A(v)) P_0(\mu) - \frac{1}{3} v_0^2 \left(\frac{\partial A(v)}{\partial v} - \frac{A(v)}{v} \right) P_2(\mu) \quad (\text{II.39})$$

puis, en développement les calculs de l'équation (II.39), et en utilisant la relation (II.31), la composante isotrope $S_{BI,1}^{ee,0}$ s'écrit

$$S_{BI,1}^{ee,0} = -\frac{1}{18} \frac{v_0^2}{v^2} \frac{v_{ei}(v)}{Z} \left\{ v^4 \frac{\partial^4 f_{s0}}{\partial v^4} (I_2^0 + J_{-1}^0) + v^3 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (3I_0^0 + 4J_{-1}^0 - 5I_2^0) + v^2 \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (12I_2^0 - 6I_0^0 + 12\pi v^3 f_{s0}) \right. \\ \left. + v \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (-12I_2^0 + 6I_0^0 + 48\pi v^3 f_{s0}) + 24\pi v^5 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right\} P_0(\mu) \quad (\text{II.40})$$

et la composante anisotrope

$$S_{BI,1}^{ee,2} = -\frac{1}{9} \frac{v_0^2}{v^2} \frac{v_{ei}(v)}{Z} \left\{ v^4 \frac{\partial^4 f_{s0}}{\partial v^4} (I_2^0 + J_{-1}^0) + v^3 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (3I_0^0 + J_{-1}^0 - 8I_2^0) + v^2 \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (24I_2^0 - 6J_{-1}^0 - 15I_0^0 + 12\pi v^3 f_{s0}) \right. \\ \left. + v \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (24I_0^0 + 6J_{-1}^0 - 24I_2^0 - 24\pi v^3 f_{s0}) + 24\pi v^5 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right\} P_2(\mu). \quad (\text{II.41})$$

Nous allons maintenant nous intéresser au deuxième terme $S_{BI,2}^{ee}$ de l'équation (II.27):

$$S_{BI,2}^{ee} = -\frac{1}{2} v_0^2 C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right). \quad (\text{II.42})$$

Nous pouvons noter que les arguments de l'opérateur de collision électron-électron C_{ee} sont proportionnels au polynôme de Legendre $P_1(\mu)$. Ce terme n'est pas diagonal dans la base des polynômes de Legendre, et donc nous ne le retrouvons pas dans les développements habituels de l'équation de Fokker-Planck, rapportés dans la littérature. Nous allons par souci de cohérence par rapport au calcul du terme $S_{BI,1}^{ee}$, calculer ce terme en utilisant le développement de la fonction de distribution f_s sur le tenseur cartésien jusqu'à l'ordre 1,

$$f_s(\vec{v}) = f_{s0}(v) + \vec{f}_{s1}(v) \cdot \frac{\vec{v}}{v} + \dots \quad (\text{II.43})$$

A partir de l'équation (I.25) en posant $M = m = m_e$ et $F = f = f_s$, et du développement (II.43), nous obtenons

$$C_{ee} \left(\vec{f}_{s1} \cdot \frac{\vec{v}}{v}, \vec{f}_{s1} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) = 4\pi Y_{ee} f_{s1}(v, t) f_{s1}(v, t) + Y_{ee} \frac{\nabla \nabla \left(\vec{G}_1(v) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) : \nabla \nabla \left(\vec{f}_{s1}(v) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right)}{2}. \quad (\text{II.44})$$

où $\vec{G}_1(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \left(\frac{\vec{I}_3^1}{15} + \frac{\vec{J}_{-2}^1}{15} - \frac{\vec{I}_1^1}{3} - \frac{\vec{J}_0^1}{3} \right)$ est la composante d'ordre un, du potentiel de Rosenbluth

$G(\mathbf{v})$ sur le tenseur cartésien, établie dans le chapitre I (voir Eq. (I.38)). Par ailleurs, étant donné que

$$\nabla \left(\vec{f}_{s1} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) = \left(\frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\vec{f}_{s1}}{v} \right) \cdot \frac{\vec{v}\vec{v}}{v} + \frac{\vec{f}_{s1}}{v},$$

il en résulte

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \left(\vec{f}_{s1} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) &= \left(\frac{\partial^2 \vec{f}_{s1}}{\partial \mathbf{v}^2} - \frac{3}{v} \frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{3\vec{f}_{s1}}{v^2} \right) \cdot \frac{\vec{v}\vec{v}\vec{v}}{v^3} + \left[\left(\frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\vec{f}_{s1}}{v} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{v^2} \right] \\ &+ \left[\frac{\vec{v}}{v^2} \left(\frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\vec{f}_{s1}}{v} \right) \right] + \frac{\vec{f}_{s1}}{v} + \vec{I}_2 \left(\frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\vec{f}_{s1}}{v} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{v^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

De même pour $\vec{G}_1 \cdot \frac{\vec{v}}{v}$, en utilisant les relations (I.36) et après quelques manipulations mathématiques, nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \left(\vec{G}_1 \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) &= \frac{(\vec{I}_3^1 - \vec{I}_1^1) \vec{v}\vec{v}\vec{v}}{v^4} + \frac{(-3\vec{I}_3^1 + 2\vec{J}_{-2}^1 + 5\vec{I}_1^1)}{15v^2} \vec{v} \\ &+ \vec{v} \frac{(-3\vec{I}_3^1 + 2\vec{J}_{-2}^1 + 5\vec{I}_1^1)}{15v^2} + \vec{I}_2 \frac{(-3\vec{I}_3^1 + 2\vec{J}_{-2}^1 + 5\vec{I}_1^1)}{15v^2} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Nous pouvons à présent effectuer le double produit scalaire de l'équation (II.44). Des équations (II.45) et (II.46), après quelques étapes de calculs nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[\nabla \nabla \left(\vec{G}_1(\mathbf{v}) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) : \nabla \nabla \left(\vec{f}_{s1}(\mathbf{v}) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) \right] &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\vec{I}_3^1 - \vec{I}_1^1) \cdot \vec{v}}{v} \right] \left[\left(\frac{\partial^2 \vec{f}_{s1}}{\partial v^2} - \frac{3}{v} \frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial v} + \frac{3}{v^2} \vec{f}_{s1} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right] \\
&+ \frac{3}{2} \left[\frac{(\vec{I}_3^1 - \vec{I}_1^1) \cdot \vec{v}}{v} \right] \left[\left(\frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial v} - \frac{1}{v} \vec{f}_{s1} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{v^2} \right] \\
&+ \frac{3}{2} \left[\frac{(-3\vec{I}_3^1 + 2\vec{J}_{-2}^1 + 5\vec{I}_1^1) \cdot \vec{v}}{15v} \right] \left[\left(\frac{\partial^2 \vec{f}_{s1}}{\partial v^2} - \frac{3}{v} \frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial v} + \frac{3}{v^2} \vec{f}_{s1} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right] \\
&+ \frac{9}{2} \left[\frac{(-3\vec{I}_3^1 + 2\vec{J}_{-2}^1 + 5\vec{I}_1^1) \cdot \vec{v}}{15v} \right] \left[\left(\frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial v} - \frac{1}{v} \vec{f}_{s1} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right] \\
&\left(\frac{-3\vec{I}_3^1 + 2\vec{J}_{-2}^1 + 5\vec{I}_1^1}{15v} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{f}_{s1}}{\partial v} - \frac{1}{v} \vec{f}_{s1} \right).
\end{aligned} \tag{II.47}$$

Dans la symétrie cylindrique, l'équation (II.47) s'écrit

$$\frac{1}{2} \left[\nabla \nabla \left(\vec{G}_1(\mathbf{v}) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) : \nabla \nabla \left(\vec{f}_{s1}(\mathbf{v}) \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) \right] = X_{iso} P_0(\mu) + X_{anis} P_2(\mu) \tag{II.48}$$

où

$$X_{iso} = \frac{1}{6} \left(\frac{I_3^1 - I_1^1}{v} \right) \frac{\partial^2 f_{s1}}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{-3I_3^1 + 2J_{-2}^1 + 5I_1^1}{15v} \right] \left[\frac{\partial^2 f_{s1}}{\partial v^2} + \frac{2}{v} \frac{\partial f_{s1}}{\partial v} - \frac{2}{v^2} f_{s1} \right] \tag{II.49}$$

et

$$X_{anis} = \frac{2}{15} \left(\frac{I_3^1 + J_{-2}^1}{v} \right) \frac{\partial^2 f_{s1}}{\partial v^2}. \tag{II.50}$$

En posant $f_{s1} = \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}$ et en utilisant les équations (II.34) et (II.35), les termes X_{iso} et X_{anis} se réécrivent comme

$$X_{iso} = -\frac{I_2^0}{3v^2} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} + \frac{I_2^0 - I_0^0}{v^3} \left(\frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) \quad (\text{II.51})$$

et

$$X_{anis} = -\frac{2 I_2^0}{3 v^2} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3}. \quad (\text{II.52})$$

Finalement, des équations (II.44), (II.48)-(II.52), l'opérateur de collision électron-électron

$C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right)$ s'écrit

$$C_{ee} \left(\frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, \frac{v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) = Y_{ee} \left\{ \frac{4\pi}{3} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} - \frac{I_2^0}{3v^2} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} + \frac{I_2^0 - I_0^0}{v^3} \left(\frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) \right\} P_0(\mu) +$$

$$Y_{ee} \frac{2}{3} \left\{ 4\pi \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} - \frac{I_2^0}{v^2} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} \right\} P_2(\mu). \quad (\text{II.53})$$

En substituant l'équation (II.53) dans l'équation (II.42) et en utilisant la relation (II.31), nous déduisons l'expression explicite du terme $S_{BI,2}^{ee}$.

$$S_{BI,2}^{ee} = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{v^2} \frac{v_{ei}(v)}{Z} \left\{ -\frac{I_2^0}{3} v^3 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} + v^3 \left(\frac{I_2^0 - I_0^0}{v} \right) \left(\frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + \frac{4\pi}{3} v^5 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right\} P_0(\mu)$$

$$- \frac{1}{3} \frac{v_0^2}{v^2} \frac{v_{ei}(v)}{Z} \left\{ -I_2^0 v^3 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} + 4\pi v^5 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right\} P_2(\mu). \quad (\text{II.54})$$

Nous sommes en mesure à présent de déduire l'expression de l'opérateur du bremsstrahlung inverse S_{BI}^{ee} qui tient compte de la contribution des collisions électron-électron. Des équations (II.40) et (II.54), nous déduisons sa composante isotrope

$$S_{BI}^{ee,0} = -\frac{1}{18} \frac{v_0^2 v_{ei}(v)}{v^2 Z} \left\{ v^4 \frac{\partial^4 f_{s0}}{\partial v^4} (I_2^0 + J_{-1}^0) + v^3 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (3I_0^0 + 4J_{-1}^0 - 8I_2^0) + v^2 \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (21I_2^0 - 15I_0^0 + 12\pi v^3 f_{s0}) \right. \\ \left. + v \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (-21I_2^0 + 15I_0^0 + 48\pi v^3 f_{s0}) + 36\pi v^5 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right\} P_0(\mu) \quad (\text{II.55})$$

et des équations (II.41) et (II.54) la composante anisotrope

$$S_{BI}^{ee,2} = -\frac{1}{9} \frac{v_0^2 v_{ei}(v)}{v^2 Z} \left\{ v^4 \frac{\partial^4 f_{s0}}{\partial v^4} (I_2^0 + J_{-1}^0) + v^3 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (3I_0^0 + J_{-1}^0 - 11I_2^0) + v^2 \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (24I_2^0 - 6J_{-1}^0 - 15I_0^0 + 12\pi v^3 f_{s0}) \right. \\ \left. + v \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (24I_0^0 + 6J_{-1}^0 - 24I_2^0 - 24\pi v^3 f_{s0}) + 36\pi v^5 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right\} P_2(\mu). \quad (\text{II.56})$$

Le terme (II.55) est celui établi récemment dans la référence [10]. Il corrige l'opérateur de Langdon par la prise en compte des corrélations électron-électron dans les « effets bremsstrahlung inverse ».

Enfin, le terme (II.56) complète les résultats établis dans la littérature par la prise en compte des collisions électron-électron dans la partie anisotrope de l'équation de Fokker-Planck. Ce résultat [22] couplé aux autres termes va permettre de décrire des plasmas chauds de numéro atomiques arbitraires en présence d'une onde laser.

V Calcul du taux d'absorption de l'énergie par le mécanisme du bremsstrahlung inverse

Ce paragraphe est consacré au calcul du taux d'absorption de l'énergie laser par le mécanisme du bremsstrahlung inverse. Plus précisément, nous allons vérifier qu'il n'y a pas de d'absorption d'un photon par un électron en présence du champ électrique d'un autre électron. Rappelons que l'énergie absorbée par le plasma par unité de temps et de volume sur une période de l'onde $T = 2\pi / \omega$ est donnée par :

$$A_{coll} = \langle \vec{E}_{hf} \cdot \vec{J}_{hf} \rangle \quad (\text{II.57})$$

$$\text{où } \vec{J}_{hf} = -e \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v} f_{hf}(\vec{v}) d\vec{v} \quad (\text{II.58})$$

est la densité de courant électronique et $f_{hf}(\vec{v})$ est la composante haute-fréquence de la fonction de distribution des électrons établie dans le paragraphe III, (Eq. (II.10)). Dans la symétrie cylindrique, et en gardant le terme dominant du développement de la fonction de distribution f_s sur la base des polynôme de Legendre celle-ci s'écrit

$$f_{hf}(v_x, v) = \frac{e}{m_e} \frac{v_0 v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \sin \omega t - \frac{e}{m_e} \frac{\cos \omega t}{\omega} \left[C_{ei} \left(\frac{v_0 v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(f_{s0}, \frac{v_0 v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(\frac{v_0 v_x}{v} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, f_{s0} \right) \right]. \quad (\text{II.59})$$

En développant la fonction f_{hf} sur la base des polynômes de Legendre, il apparaît clairement que

ce terme est proportionnelle au polynôme de Legendre $P_1(\mu) = \frac{v_x}{v} = \mu$, soit

$$f_{hf}(v, v_x) = P_1(\mu) f_{hf}^{(1)}(v) \quad (\text{II.60})$$

où

$$f_{hf}^{(1)}(v) = \frac{e}{m_e} v_0 \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \sin \omega t - \frac{e}{m_e} \frac{\cos \omega t}{\omega} v_0 \left[-v_{ei}(v) \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} + C_{ee} \left(f_{s0}, \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(f_{s0}, \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) \right]. \quad (\text{II.61})$$

Dans l'équation (II.61), les relations (II.21) et (II.37) ont été utilisées. Par ailleurs en fonction des variables μ et v , la densité de courant (II.58) se réécrit

$$J_{hf} = -2\pi e \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \int_0^{+\infty} v^3 f_{hf}^{(1)}(v) dv \quad (\text{II.62})$$

ou encore en effectuant l'intégration sur la variable μ ,

$$J_{hf} = -\frac{4\pi e}{3} \int_0^{+\infty} v^3 f_{hf}^{(1)}(v) dv. \quad (\text{II.63})$$

Dans la mesure où nous nous intéressons à la contribution des corrélations électron-électron au taux d'absorption A_{coll} , nous gardons dans l'expression (II.61) seulement les termes de collisions C_{ee} . Dans ce cas, des équations (II.57), (II.61) et (II.63), le taux d'absorption de l'énergie laser A_{coll}^{ee} s'écrit alors.

$$A_{coll}^{ee} = \frac{2\pi e^2 E_0^2}{3 m \omega^2} \int_0^\infty v^3 \left[C_{ee} \left(f_{s0}, \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right) + C_{ee} \left(\frac{\partial f_{s0}}{\partial v}, f_{s0} \right) \right] dv. \quad (\text{II.64})$$

Son expression explicite s'obtient en substituant l'équation (II.38) dans l'équation (II.64), soit

$$A_{coll}^{ee} = \frac{2\pi e^2 E_0^2}{9 m \omega^2} \int_0^\infty v^3 \left[\frac{1}{v} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (3I_0^0 - 4I_2^0 + 2J_{-1}^0) \right. \\ \left. + \frac{1}{v^3} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (4I_2^0 - 6I_0^0 - 2J_{-1}^0) + 24\pi f_{s0} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right] dv. \quad (\text{II.65})$$

Nous calculons l'intégrale de l'équation (II.65), en posant

$$I = \int_0^\infty v^3 \left[\frac{1}{v} \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (I_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (3I_0^0 - 4I_2^0 + 2J_{-1}^0) \right. \\ \left. + \frac{1}{v^3} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (4I_2^0 - 6I_0^0 - 2J_{-1}^0) + 24\pi f_{s0} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \right] dv = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (\text{II.66})$$

où

$$I_1 = \int_0^\infty v^2 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} (I_2^0 + J_{-1}^0) dv \quad (\text{II.67})$$

$$I_2 = \int_0^\infty v \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} (3I_0^0 + 2J_{-1}^0 - 4I_2^0) dv \quad (\text{II.68})$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} (4I_2^0 - 6I_0^0 - 2J_{-1}^0) dv \quad (\text{II.69})$$

et

$$I_4 = \int_0^{\infty} 24\pi v^3 f_{s0} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} dv. \quad (\text{II.70})$$

En exprimant les quantités I_2^0 et J_{-1}^0 à partir des équations (II.32) et (II.33), I_1 se réécrit comme

$$I_1 = \int_0^{\infty} v^2 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} \left(\frac{4\pi}{v^2} \int_0^v v^4 f_{s0} dv + 4\pi v \int_v^{\infty} v f_{s0} dv \right) dv. \quad (\text{II.71})$$

En intégrant par partie les deux intégrales entre parenthèse de l'équation (II.71), nous obtenons

$$I_1 = -4\pi \int_0^{\infty} 3v^2 \frac{\partial^3 f_{s0}}{\partial v^3} \left(\int_v^{\infty} v f_{s0} dv \right) dv. \quad (\text{II.72})$$

Par ailleurs des équations (II.32) et (II.33) I_2 s'écrit

$$I_2 = 4\pi \int_0^{\infty} v \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} \left(3 \int_0^v f_{s0} v^2 dv + 2v \int_v^{\infty} f_{s0} v dv - \frac{4}{v^2} \int_0^v f_{s0} v^4 dv \right) dv \quad (\text{II.73})$$

En additionnant les équations (II.72) et (II.73),

$$I_1 + I_2 = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 f_{s0}}{\partial v^2} \left(3v \int_0^v f_{s0} v^2 dv - v^2 \int_v^{\infty} f_{s0} v dv - \frac{4}{v} \int_0^v f_{s0} v^4 dv \right) dv. \quad (\text{II.74})$$

puis en effectuant l'intégration par partie de l'intégrale (II.74), nous obtenons

$$I_1 + I_2 = 4\pi \left(-3 \int_0^{\infty} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \int_0^v f_{s0} v^2 dv + 2 \int_0^{\infty} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} v \int_v^{\infty} f_{s0} v dv - 4 \int_0^{\infty} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \frac{1}{v^2} \int_0^v f_{s0} v^4 dv \right) dv. \quad (\text{II.75})$$

De même des équations (II.32) et (II.33), I_3 s'écrit

$$I_3 = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \left(\frac{4}{v^2} \int_0^v f_{s0} v^4 dv - 2v \int_v^{\infty} v f_{s0} dv - 6 \int_0^v v^2 f_{s0} dv \right) \quad (\text{II.76})$$

L'addition des équations (II.75) et (II.76)

$$I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi \int_0^\infty \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \left(-9 \int_0^v f_{s0} v^2 dv \right) dv \quad (\text{II.77})$$

puis l'intégration par partie de (II.77) donne

$$I_1 + I_2 + I_3 = 36\pi \int_0^\infty v^2 f_{s0} f_{s0} dv. \quad (\text{II.78})$$

Finalement en calculant l'intégrale I_4 (Eq. (II.70)),

$$I_4 = -36\pi \int_0^\infty v^2 f_{s0} f_{s0} dv, \quad (\text{II.79})$$

il en résulte bien

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad (\text{II.80})$$

et par conséquent, un taux d'absorption $A_{coll}^{ee} = 0$.

Par ce calcul, nous avons montré, qu'il n'y a pas de transfert d'énergie à un électron dans le champ électrique d'un autre électron. L'absorption de l'énergie laser par bremsstrahlung inverse dans les plasmas complètement ionisés ne peut se faire que lors d'une collision coulombienne entre un électron et un ion.

VI. Discussion et conclusion

Dans ce travail, nous avons calculé un opérateur qui prend en considération les corrélations électron-électron dans l'opérateur « bremsstrahlung inverse ». Cet opérateur a été calculé en tenant compte de l'anisotropie de la fonction de distribution dans l'espace des vitesses induite par un champ électrique haute-fréquence. Bien que son expression ait été établie pour des plasmas homogènes, son domaine de validité peut être étendu aux plasmas inhomogènes, non stationnaires et magnétisés. En effet, cet opérateur agit dans l'espace des vitesses et il ne tient pas compte des gradients et de l'évolution temporelle des grandeurs fluides du plasma qu'à travers les valeurs locales et instantanées de la température $T(\vec{r}, t)$ et de la densité $n(\vec{r}, t)$. Par ailleurs, il est bien connu que l'influence du champ magnétique sur les mécanismes collisionnels ne peut

être effective que lorsque le rayon de Larmor des électrons $r_L = \frac{v_t}{\omega_c}$ (où ω_c est la fréquence cyclotron) est comparable ou plus petit que la longueur de Debye λ_{De} [23], i. e ; $r_L \leq \lambda_{De}$. Dans le cas usuel des plasmas créés par laser, $r_L \gg \lambda_{De}$ et par conséquent nos résultats restent valables pour des plasmas magnétisés.

Il résulte alors, que l'équation cinétique qui décrit les plasmas chauds inhomogènes, non stationnaires et magnétisés en présence d'une onde laser, se présente sous la forme

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = C_{ee}(f_e, f_e) + C_{ei}(f_e) + S_{BI}^{ee} + S_{BI}^{ei} \quad (\text{II.81})$$

Il est à noter que l'opérateur S_{BI}^{ee} apparaît sous une forme relativement complexe à l'opposé de la contribution S_{BI}^{ei} . Puisque c'est un opérateur integro-différentiel et non linéaire. Il est alors exclu d'essayer de chercher des solutions self-similaires comme celles établies par Langdon [8] en ne gardant que la contribution S_{BI}^{ei} . Seule l'approche numérique permet donc de traiter les plasmas chauffés par laser à faibles numéros atomiques.

De nombreuses applications dues aux « effets bremsstrahlung inverse » dans les plasmas créés par laser peuvent être développées à partir de l'équation (II.81).

Nous pouvons citer le calcul du transport induit par les champs haute-fréquence. Dans ces plasmas en plus des gradients de température et de la vitesse fluide, de nouvelles contributions au transport sont induites par des termes de battements dus à l'onde laser. La vitesse d'oscillation \vec{v}_o des électrons dans le champ de l'onde laser joue un rôle comparable aux autres potentiels thermodynamiques dans le plasma. L'une des conséquences de la prise en compte du champ laser haute-fréquence dans les équations hydrodynamiques à travers les coefficients de transport est la modification des équations de couplages des modes propres du plasma qui décrivent les instabilités paramétriques.

La fonction de distribution électronique peut être fortement modifiée en présence d'un champ laser et cela conduit à influencer toutes les propriétés macroscopiques du plasma. A titre d'exemple, Langdon a démontré que la situation où les collisions électron-électron sont dominées

par les mécanismes du bremsstrahlung inverse, la fonction de distribution devient une super-

gaussienne $\sim \left(\exp\left(-\frac{v}{v_t}\right) \right)^5$ très appauvrie d'électrons de faibles vitesses, et il s'ensuit

une absorption collisionnelle réduite d'un facteur deux.

Enfin, comme application potentielle des « effets bremsstrahlung inverse » sur le plasma, nous pouvons évoquer l'instabilité de Weibel qui est excitée par ce mécanisme. Plus précisément, cette instabilité se développe lorsque le plasma présente une anisotropie en température. Dans ce cas, cette anisotropie est induite par le champ laser qui va chauffer préférentiellement les électrons suivant la direction du champ électrique. Les modes Weibel excités peuvent générer des champs magnétiques quasi-statiques de l'ordre du mégagauss [9].

*conclusion
générale*

Conclusion Générale

Dans ce travail, l'interaction d'un champ électrique haute-fréquence avec un électron en présence d'une autre charge (interaction à trois corps) dans les plasmas chauds a été étudiée avec le formalisme de la théorie cinétique. Un opérateur qui prend en compte ces effets physiques (effets bremsstrahlung inverse) dans l'équation de Fokker-Planck a été établi explicitement de façon analytique.

Notre approche analytique repose sur trois méthodes de résolution.

La première méthode est basée sur la résolution de l'équation de Fokker-Planck en utilisant la méthode de séparation des échelles de temps qui consiste à considérer l'échelle de temps hydrodynamique relativement lente, et l'échelle de temps induite par le champ haute-fréquence, nettement plus rapide.

La deuxième méthode utilisée est la méthode itérative qui est basée sur une vitesse d'oscillation des électrons dans le champ laser v_0 , très petite devant leur vitesse thermique v_t , *i.e.*; $\frac{v_0}{v_t} \ll 1$. Cet ordre de grandeur est usuel dans les plasmas créés par laser.

Enfin, nous avons développé l'équation de Fokker-Planck sur la base des polynômes de Legendre. Ce développement a permis de procéder à une troncature (donc à une simplification) jusqu'au polynôme de Legendre d'ordre deux, suffisant pour décrire les phénomènes physiques dominants dans les plasmas chauds en présence d'un champ haute-fréquence.

Nos résultats ont permis de retrouver ceux de la littérature:

- L'opérateur isotrope établi par Langdon [8] pour des plasmas de grands numéros atomiques ($Z \gg 1$).

- L'opérateur isotrope établi récemment par Fourkal et *al* [10] pour des plasmas de numéros atomiques arbitraires.

- L'opérateur anisotrope d'ordre deux établi par Bendib et *al* [9] dans l'approximation $Z \gg 1$.

En outre, un résultat original [22] a été établi dans ce travail, qui vient compléter les travaux de la référence [9] par la prise en compte des corrélations électron-électron dans l'expression de l'opérateur anisotrope d'ordre deux.

Ces résultats ont permis d'établir l'équation de Fokker-Planck qui décrit les plasmas chauds de numéros atomiques arbitraires en présence d'une onde laser.

Nous avons aussi montré dans ce travail qu'il n'y a pas de transfert d'énergie à un électron dans le champ électrique d'un autre électron. L'absorption de l'énergie laser par bremsstrahlung inverse dans les plasmas complètement ionisés ne peut se faire que lors d'une collision coulombienne entre un électron et un ion.

Comme perspective de ce notre travail, nous pouvons étudier l'instabilité de Weibel qui peut être excitée par la seconde anisotropie du plasma induite par le champ laser.

REFERENCES

- [1] J. G. Cordey, R. J. Goldston and R. R. Parker, *Physics Today* **45**, 22 (1992).
- [2] D. Pesme, *La fusion thermonucléaire contrôlée par laser*, Ed. R. Dautrey et J. P. Watteau (Eyrolles, Paris 1993).
- [3] J. D. Lindl, R. L. McCroy and E. M. Campbell, *Progress towards and burn propagation in inertiel confinement fusion*, *Phys. Today*, **34**, (1992).
- [4] C. E. Max, *Physics of the coronal plasma in laser target*, Les Houches (Session XXXIV), North Holland Publishing Company (1982); K. Mima and K. Nishikawa, *Parametric Instabilities and Wave Dissipation in Plasmas*, Handbook of Plasma Physics, Ed. M. N. Rosenbluth and R. Z. Sateev (1984).
- [5] T. W. Johnston and J. Dawson, *Phys. Fluids* **16**, 722 (1973).
- [6] V. L. Ginsburg, *Propagation of Electromagnetic waves in Plasma*, Pergamon N. Y. (1973).
- [7] E. S. Weibel, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 83 (1959).
- [8] A. B. Langdon, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 575 (1980).
- [9] A. Bendib, K. Bendib and A. Sid, *Phys. Rev. E* **55**, 7522 (1997).
- [10] E. Fourkal, V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, R. Sydora, C. Kirkby, C. E Capjack, S. H. Glenzer and H. A. Baldis, *Phys. Plasmas* **8**, 550 (2001).
- [11] J. L. Delcroix et A. Bers, *Physique des Plasmas*, CNRS Editions (1994); N. Krall and A. W. Triebelpeice, *Principles of Plasma Physics*, Mac Graw Hill, New York (1973).
- [12] [9] A.A. Vlasov, *J. Phys.* **9**, 25 (1945)
- [13] L. D. Landau, *J. Exptl. Theoret. Phys. USSR* **7**, 203 (1937).
- [14] L. Boltzmann, *Wien. Ber.* **66**, 275 (1872).
- [15] M. N. Rosenbluth, W. M. Mac Donald and D. L. Judd, *Phys. Rev.* **1**, 107 (1957).
- [16] R. Balescu, *Equilibrium and Non Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley-intersciences, New York (1975).
- [17] I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston and M. P. Bachynski, *The particule Kinetic of Plasmas*, (Addison-Wesley) 1966.
- [18] T. W. Johnston, *Phys. Rev.* **120**, 1103 (1960).
- [19] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York 1970).
- [20] P. Alaterre, J. P. Matte and M. Lamoureux, *Phys. Rev. A* **34**, 1578 (1986).

- [21] J. P. Matte, M. Lamoureux, C. Moller, R. Y. Yin, J. Delletrez, J. Virmont and T. W. Johnston, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **30**, 1665 (1988).
- [22] A. Bendib, A. Tahraoui, K. Bendib, K. Mohammed EL Hadj and S. Hüller, *Phys. Plasma* **12** (2005).
- [23] S. I. Braginskii, in *Review of Plasma Physics*, édité par M. A. Leontovich, Consultant Bureau, New York (1965), Vol 1, p; 205

Appendice

Appendice

Calcul des coefficients de transport dans l'espace des vitesses

Cet appendice est consacré au calcul des coefficients de friction dynamique et de diffusion dans l'espace des vitesses lors d'une collision coulombienne entre les particules d'un plasma en fonction des potentiels de Rosenbluth $H(v)$ et $G(v)$.

A. Calcul du coefficient de friction dynamique $\langle \Delta \vec{v} \rangle$

Considérons un grand nombre de particules de masse m et de vitesse \vec{v} , (particules diffusées) effectuant des collisions binaires élastiques de faibles déviations et de faibles variations du vecteur vitesse (hypothèse de Fokker-Planck) sur des particules de masse M et de vitesse \vec{V} (particules cibles). On désigne par :

$\vec{v} + \Delta \vec{v}$ et $\vec{V} + \Delta \vec{V}$ leurs vitesses respectives après la collision ;

\vec{U} et $\vec{U} + \Delta \vec{U}$ les valeurs de la vitesse relative avant et après la collision.

Les quantités $\Delta \vec{v}$, $\Delta \vec{V}$, \vec{U} et $\Delta \vec{U}$ sont indépendantes du système de coordonnées dans lequel on les mesure. En se plaçant dans le système de centre de masse, on peut donc écrire:

$$\frac{\vec{v}}{M} = -\frac{\vec{V}}{m} = \frac{\vec{U}}{m+M} \quad (\text{A1})$$

avec $\vec{U} = \vec{v} - \vec{V}$. De l'équation (A1), on déduit la relation entre $\Delta \vec{v}$ et $\Delta \vec{U}$:

$$\Delta \vec{v} = \frac{M}{m+M} \Delta \vec{U}. \quad (\text{A2})$$

Dans une collision binaire élastique le vecteur \vec{U} garde un module constant et effectue une simple rotation qui le conduit de la position initiale \vec{U} à la position finale \vec{U}' comme indiqué sur la figure 4:

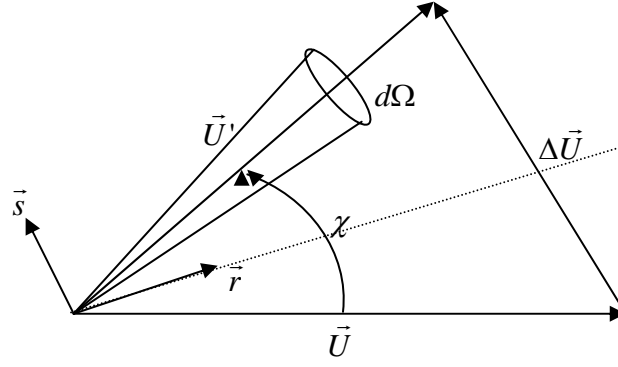


Figure 4 : rotation du vecteur vitesse relative dans une collision binaire élastique.

On voit donc sur la figure 4 que l'on a :

$$\Delta \vec{U} = 2U \sin \frac{\chi}{2} \vec{s} \quad (\text{A3})$$

où χ est l'angle de déviation et \vec{s} le vecteur unitaire porté par la bissectrice extérieure de l'angle (\vec{U}, \vec{U}') . Considérons des collisions avec les particules cibles dont le vecteur vitesse est dans l'élément $d\vec{V}$ autour d'une valeur moyenne \vec{V} et pour lesquelles le vecteur U' est dans l'élément d'angle solide $d\Omega$ autour de la position moyenne U' (voir figure 4). Le nombre probable de ces collisions par unité de temps pour chaque particule diffusée est

$$dp = F(\vec{V}) d\vec{V} \sigma(\chi) U d\Omega \Delta t \quad (\text{A4})$$

où $F(\vec{V})$ est la fonction de distribution des centres diffuseurs et $\sigma(\chi)$ est la section efficace de diffusion donnée par la formule de Rutherford :

$$\sigma(\chi) = \left(\frac{ZZ'e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{m+M}{mM} \frac{1}{U^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad (\text{A5})$$

où Z et Z' sont respectivement les numéros atomiques des particules diffusée et des particules cibles. Par ailleurs, d'après l'équation (A4), la valeur moyenne sur les variations de vitesse $\Delta \vec{v}$ s'écrit alors

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = \int \int_{\vec{v}\Omega} \Delta \vec{v} F(\vec{V}) d\vec{V} \sigma(\chi) U d\Omega \quad (\text{A6})$$

ou encore en utilisant la relation (A2)

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = \int \int_{\vec{v}, \Omega} \frac{M}{m+M} \Delta \vec{U} F(\vec{v}) d\vec{v} \sigma(\chi) U d\Omega. \quad (\text{A7})$$

L'intégrale de l'équation (A7) se calcule en deux temps. Dans une première étape, on garde \vec{V} constant et on calcule la quantité :

$$\vec{A} = \langle \Delta \vec{U} \rangle = \int \Delta \vec{U} U \sigma(\chi) d\Omega. \quad (\text{A8})$$

En utilisant les équations (A3) et (A5), l'équation (A8) devient

$$\vec{A} = \int 2U^2 \sin \chi / 2\vec{s} \left(\frac{ZZ'e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{m+M}{mM} \frac{1}{U^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega. \quad (\text{A9})$$

Dans ce calcul, \vec{v} et \vec{V} étant constants, \vec{U} l'est aussi et il est évident que par raison de symétrie \vec{A} est dirigé suivant \vec{U} ; on a donc :

$$\vec{A} = A_z \frac{\vec{U}}{U} \quad (\text{A10})$$

où

$$A_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{ZZ'e^2}{mM} \frac{m+M}{U} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\cos \chi/2}{\sin^4 \chi/2} d\chi/2. \quad (\text{A11})$$

Cette dernière intégrale diverge à cause de sa borne $\chi = 0$ qui correspond aux collisions lointaines. On élimine cette divergence en effectuant la coupure physiquement raisonnable de Debye. En introduisant cette coupure dans l'intégrale précédente, on obtient :

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{ZZ'e^2}{m} \right]^2 \frac{(m+M)^2}{M^2} \ln \Lambda \frac{\vec{U}}{U^3} \quad (\text{A12})$$

où $\Lambda = p_{\max} / p_{\min} \cdot p_{\max}$ est le paramètre d'impact maximum correspondant à la longueur de Debye λ_{Ds} , et p_{\min} est le paramètre d'impact minimum correspondant au paramètre d'impact dû à une déflexion d'un angle de $\pi/2$. Par ailleurs, étant donné que

$$\frac{\bar{U}}{U^3} = -\frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left(\frac{1}{U} \right), \quad (\text{A13})$$

l'équation (A12) s'écrit alors :

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{ZZ'e^2}{m} \right]^2 \frac{(m+M)^2}{M^2} \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left(\frac{1}{U} \right) \quad (\text{A14})$$

En introduisant le résultat (A14) dans l'intégrale (A7), il en résulte :

$$\langle \Delta \bar{v} \rangle = Y \frac{\partial}{\partial \bar{v}} H \quad (\text{A15})$$

avec

$$Y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{ZZ'e^2}{m} \right] \ln \Lambda \quad (\text{A16})$$

et

$$H(v) = \frac{m+M}{M} \int \frac{1}{U} F(\bar{v}) d\bar{v} \quad (\text{A17})$$

B. Calcul du coefficient de diffusion $\langle \Delta \bar{v} \Delta \bar{v} \rangle$

Nous allons à présent calculer le coefficient de diffusion $\langle \Delta \bar{v} \Delta \bar{v} \rangle$ dans l'espace des vitesses en fonction du potentiel de Rosenbluth $G(v)$. De façon analogue au calcul précédent de $\langle \Delta \bar{v} \rangle$, on déduit immédiatement à partir des équations (A2) et (A4) l'expression suivante du coefficient de diffusion

$$\langle \Delta \bar{v} \Delta \bar{v} \rangle = \iint_{\bar{v}\Omega} \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \Delta \bar{U} \Delta \bar{U} U \sigma(\chi) d\Omega F(\bar{v}) d\bar{v} \quad (\text{A18})$$

ou encore

$$\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle = \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \int \overline{\overline{B}} F(\vec{V}) d\vec{V} \quad (\text{A19})$$

avec :

$$\overline{\overline{B}} = \langle \Delta \vec{U} \Delta \vec{U} \rangle = \int \Delta \vec{U} \Delta \vec{U} U \sigma(\chi) d\Omega. \quad (\text{A20})$$

En utilisant la relation (A3), le tenseur $\overline{\overline{B}}$ s'écrit

$$\overline{\overline{B}} = \int 4U^3 \sin^2 \chi / 2 \vec{s} \vec{s} \sigma(\chi) d\Omega. \quad (\text{A21})$$

Pour le calcul de l'intégrale (A21), les vecteurs \vec{v} , \vec{V} et par conséquent \vec{U} sont constants. En prenant la direction de \vec{U} suivant l'axe Oz et en désignant par φ un angle d'azimut dans le plan perpendiculaire à \vec{U} . Les composantes de \vec{s} sont alors :

$$s_x = \cos \frac{\chi}{2} \cos \varphi \quad (\text{A22})$$

$$s_y = \cos \frac{\chi}{2} \sin \varphi \quad (\text{A23})$$

$$s_z = -\sin \frac{\chi}{2}. \quad (\text{A24})$$

Il apparaît dans l'intégrale (A21) que l'intégration sur φ annule tous les termes non diagonaux

$$B_{xy} = B_{yx} = B_{yz} = B_{zy} = B_{xz} = B_{zx} = 0, \quad (\text{A25})$$

et que l'on a pour les termes diagonaux :

$$B_{xx} = B_{yy} \neq B_{zz} \neq 0 \quad (\text{A26})$$

Calculons donc successivement B_{xx} et B_{zz} . L'intégration sur φ donne pour ces termes un facteur π , ensuite l'intégration sur χ , donne :

$$B_{zz} = \int_0^\pi 4U^3 \sin^4 \frac{\chi}{2} \sigma(\chi) \pi \sin \chi d\chi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0^2 U} \left(ZZ' e^2 \frac{m+M}{mM} \right)^2 \quad (\text{A27})$$

et

$$B_{xx} = B_{yy} = 4\pi U^3 \int_0^\pi \sin^2 \left(\frac{\chi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\chi}{2} \right) \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (\text{A28})$$

ou encore

$$B_{xx} = B_{yy} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2 U} \left(ZZ' e^2 \frac{m+M}{mM} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\cos^3 \chi/2}{\sin \chi/2} d \left(\frac{\chi}{2} \right) \quad (\text{A29})$$

Cette intégrale diverge; on effectue pour la rendre convergente la coupure de Debye, utilisée dans le paragraphe précédent, [Eq. (A12)], il vient alors :

$$B_{xx} = B_{yy} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2 U} \left(ZZ' e^2 \frac{m+M}{mM} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (\text{A30})$$

Pour les plasmas cinétiques classiques, $\ln \Lambda \gg 1$, par conséquent en comparant (A27) et (A.30), on voit que l'on peut négliger B_{zz} devant B_{xx} et B_{yy} , et écrire

$$\bar{\bar{B}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(ZZ' e^2 \frac{m+M}{mM} \right)^2 \ln \Lambda \frac{1}{U} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{A31})$$

Dans le système de coordonnées où nous nous sommes placés on peut voir facilement que l'on a :

$$\frac{1}{U} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\bar{\bar{I}} - \bar{U}\bar{U}}{U^3} \quad (\text{A32})$$

où $\bar{\bar{I}}$ est le tenseur diagonal unitaire. Mais sous cette dernière forme le résultat est écrit de façon tensorielle exacte et est donc indépendant du système de coordonnées choisi. On peut d'autre part facilement montrer que l'on a l'identité suivante

$$\vec{\nabla}_{\vec{v}} \vec{\nabla}_{\vec{v}} U = \frac{\bar{I}U^2 - \vec{U}\vec{U}}{U^3}. \quad (\text{A33})$$

En reportant les résultats (A32) et (A33) dans l'expression (A31) on obtient :

$$\bar{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left(ZZ' e^2 \frac{m+M}{mM} \right)^2 \ln \Lambda \vec{\nabla}_{\vec{v}} \vec{\nabla}_{\vec{v}} U. \quad (\text{A34})$$

D'où, en remontant à la formule (A19), le coefficient de diffusion s'écrit en fonction du potentiel de Rosenbluth

$$\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle = Y \vec{\nabla}_{\vec{v}} \vec{\nabla}_{\vec{v}} G(\vec{v}) \quad (\text{A35})$$

avec

$$G = \int U F(\vec{V}) d\vec{V} \quad (\text{A36})$$

Y étant défini par la relation (A16).

Fin