

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des Mathématiques



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUE

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : **MOULAY Meriem**

Sujet

Sur la classe des prismes complémentaires

Soutenu publiquement, le 18/02/2015, devant le jury composé de :

M ^r AÏDER Méziane	Professeur à l'USTHB	Président
M ^{lle} BOUCHEMAKH Isma	Professeur à l'USTHB	Directrice de mémoire
M ^r BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur à l'USTHB	Examineur
M ^{me} KAHOU L Nawel	Maître de Conférence/B à l'USTHB	Invitée

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu ma directrice de mémoire, Mlle BOUCHEMAKH Isma, Professeur à l'USTHB pour avoir accepté de m'encadrer en mémoire de Magister, pour ses nombreux conseils, mais surtout pour sa disponibilité et sa patience.

Je remercie sincèrement Mr AÏDER Méziane, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur en acceptant de présider le jury de soutenance de mon mémoire.

Je remercie également Mr BERRACHEDI Abdelhafid, Professeur à l'USTHB et Melle KAHOUH Nawel, MCB à l'USTHB pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury.

Je tiens à remercier plus personnellement ma grand mère, mes parents, mes frères et ma sœur pour le soutien et l'encouragement qu'ils m'ont apportés durant toutes mes années d'études, ainsi que tous ceux qui m'ont de près ou de loin aidée.

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents, Sliman et Samira,

Ma grand-mère,

Ma soeur : Atika,

Mes frères : Mohamed El Mamoun et Abdallah,

A toute ma famille Houcini et Moulay,

A tous mes chères amis pour leur amitié, leurs encouragements, leur

soutien : Lamia, Amel et Nadjat.

Table des matières

Introduction	9
1 Terminologie et notations	11
1.1 Définitions générales	11
1.2 Voisinage et degré	13
1.3 Chaîne et cycle	13
1.4 Distance	13
1.5 Sous-graphe	14
1.6 Graphes particuliers	14
1.6.1 Graphe connexe	14
1.6.2 Graphe complet	15
1.6.3 Graphe biparti	15
1.6.4 Stable et clique	16
1.6.5 Graphe triangulé	16
1.6.6 Arbre	17
1.7 Quelques Opérations sur les graphes	19
1.7.1 Produit cartésien de deux graphes	19
1.7.2 Produit tensoriel	19
1.7.3 Produit fort	20
1.8 Domination	21

1.8.1	Indépendance	22
1.8.2	Packing	22
1.8.3	Efficacité	23
1.8.4	Domination double	23
1.8.5	Domination totale	23
1.9	Théorie de la complexité algorithmique	24
1.9.1	Problème de décision	24
1.9.2	Classe P	24
1.9.3	Classe NP	24
1.9.4	Réduction polynômial	24
1.9.5	Problèmes <i>NP</i> -complets	25
2	Broadcasts dans les graphes	26
2.1	Notions fondamentales sur les fonctions broadcasts	26
2.2	Bornes sur γ_b et Γ_b	29
2.3	Graphes avec un petit nombre de broadcast domination	34
2.4	Nombre de broadcast domination du produit de deux graphes	35
2.4.1	Produit cartésien	35
2.4.2	Produit tensoriel	36
2.4.3	Produit fort	37
2.5	Invariants dans les broadcasts	37
2.5.1	Broadcast indépendant	37
2.5.2	Broadcast dominant indépendant	42
2.5.3	Broadcast efficace	43
2.5.4	Broadcast packing	44
2.6	Complexité algorithmique	46
2.6.1	Problème de broadcast domination	46
2.6.2	Problème de broadcast domination restreint	47

2.6.3	Formulation du problème de broadcast domination	47
3	Prismes complémentaires	50
3.1	Produit complémentaire de deux graphes	50
3.2	Domination dans les prismes complémentaires	53
3.2.1	Domination et domination totale dans les prismes complémentaires	53
3.2.2	Domination stable	57
3.2.3	Domination double	59
4	Broadcasts dans les prismes complémentaires	61
4.1	Nombre de broadcast domination et nombre d'indépendance	61
4.2	Nombre de broadcast packing	65
4.3	Nombre de broadcast efficacité	77
4.4	Nombre de broadcast dominant indépendant	80
	Conclusion et perspectives	92
	Bibliographie	92

Table des figures

1.1	Exemple d'un graphe	12
1.2	Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$	12
1.3	Un graphe non connexe	15
1.4	Un graphe complet K_4	15
1.5	Un graphe biparti complet $K_{3,3}$	16
1.6	Un arbre enraciné	17
1.7	L'arbre binaire $A_{3,2}$	18
1.8	La grille $P_4 \square P_5$	19
1.9	$P_5 \times P_3$	20
1.10	$P_5 \boxtimes P_3$	21
1.11	Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 1$ et $\Gamma_b(G) = 5$	22
2.1	Broadcasts dominants sur le graphe G	28
2.2	(a)Un broadcast radial-(b)Un broadcast diamétral	29
2.3	Le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,4}$	31
2.4	Jonction de $S(K_{1,6})$ et P_8	32
2.5	Le graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$	35
2.6	Un stable maximal et un broadcast stable maximal sur P_4	39
2.7	Le graphe de PETERSEN	39
2.8	Un graphe G vérifiant $\gamma_b(G) = i_b(G) = 3 < 5 = p(G) < P(G)$	40
2.9	Un broadcast efficace sur P_7	43

2.10 (a) packing maximal-(b) broadcast packing maximal	44
3.1 Prisme complémentaire $K_3\overline{K}_3$	52

Liste des tableaux

2.1	Inégalités entre les invariants de broadcast.	46
-----	---	----

Introduction

La Théorie des Graphes est aujourd'hui très présente dans notre société moderne. Cette branche des Mathématiques, dont on fait remonter l'origine à Euler, a connu un essor spectaculaire au cours des cinquante dernières années, notamment grâce aux travaux de Claude Berge. La Théorie des Graphes permet de modéliser des problèmes de réseaux informatiques, de transport, d'emplois du temps,... Cette théorie a bénéficié d'un engouement considérable non seulement de la part des mathématiciens, mais également de la communauté scientifique toute entière : On observe ainsi depuis quelques années un grand nombre de publications ayant trait à des problèmes en biochimie, en génétique ou encore en sociologie, en relation direct avec la théorie des graphes.

Un *graphe* est un schéma constitué de points (*sommets*) et de lignes (*arêtes*) reliant ces points. Il est utilisé pour illustrer certains liens existant entre des objets d'un même système.

Le problème de *domination* est l'un des problèmes les plus connus en théorie des graphes. Il consiste, étant donné un graphe, de trouver un sous-ensemble de sommets D du graphe de cardinal minimum tel que tout sommet qui n'appartient pas à D possède au moins un voisin dans D .

Le problème de la *broadcast domination* est une variante du problème de domination. Ce problème a été introduit en 2001 par D. J. Erwin [9] et consiste à attribuer des entiers positifs (poids) aux sommets du graphe de sorte que tout sommet de poids nul soit à distance au plus k d'un sommet de poids égal à k , et que la somme des poids de tous les sommets soit minimum. Le prisme complémentaire $G\overline{G}$ de G est le graphe formé par l'union disjointe de G et de son complémentaire $\overline{G}$, en y rajoutant des arêtes qui forment un couplage parfait entre les sommets correspondants de G et de $\overline{G}$.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Dans le premier, nous rappelons toutes les définitions de la théorie des graphes nécessaires à une bonne compréhension de la suite du mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous énonçons les résultats établis sur les broadcasts.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la famille des prismes complémentaires. Nous énonçons les résultats établis dans la littérature sur le nombre de domination dans les prismes complémentaires.

Dans le dernier chapitre, nous étudions les invariants de broadcast : broadcast indépendant, broadcast dominant indépendant, broadcast efficace et broadcast packing, dans les prismes complémentaires. Nous déterminons soit des valeurs exactes soit des bornes pour quelques classes de graphes.

Nous clôturons le mémoire par une conclusion générale et des perspectives de recherche.

Chapitre 1

Terminologie et notations

Dans ce premier chapitre, nous rappelons toutes les définitions de la théorie des graphes nécessaires à une bonne compréhension de la suite du mémoire et que nous retrouvons dans les ouvrages [1] et [2].

1.1 Définitions générales

un *graphe* est un ensemble de points ou *sommets* dont certaines paires sont reliées, formant ainsi les extrémités d'une *arête*. Plus formellement :

Définition 1.1. Un graphe G est un couple (V, E) , où :

- V est l'ensemble des sommets de G , et
- $E \subset \{\{x, y\}, x \in V, y \in V\}$ et l'ensemble des arêtes de G .

Une *boucle* est une arête de la forme $\{x, x\}, x \in V$.

Si $e = \{x, y\} \in E$, x et y représentent les *extrémités* de l'arête e et x et y sont dits *adjacents*.

Exemple : Soit le graphe $G = (V, E)$ où $V = \{x, y, z, t\}$ et

$E = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, t\}, \{t, x\}, \{x, z\}\}$. La Figure 1.1 représente le graphe G .

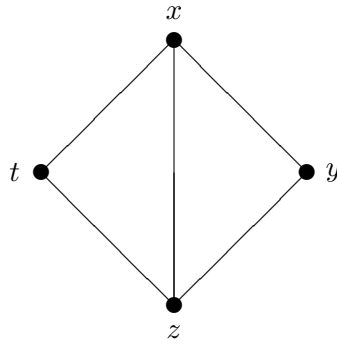
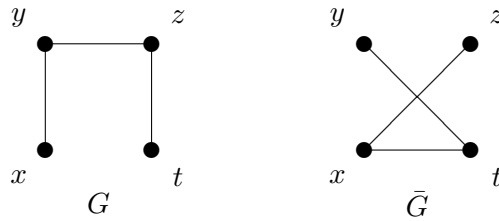


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe

L'*ordre* d'un graphe $G = (V, E)$ est le nombre de ses sommets. La *taille* d'un graphe est le nombre de ses arêtes. On note par $n = |V|$ et $m = |E|$ respectivement l'ordre et la taille de G .

Un graphe est *fini* si le nombre de ses sommets est fini. Un graphe est dit *trivial* si $|V| = 1$. Le *complémentaire* de G , noté $\bar{G}$, est un graphe tel que $V(\bar{G}) = V(G)$ et $E(\bar{G}) = \{\{x, y\} | \{x, y\} \notin E(G)\}$ (Figure 1.2).

FIGURE 1.2 – Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$

S'il existe plusieurs arêtes entre deux sommets de G , alors G est appelé un *multi-graphe*.

Un graphe G est dit *simple* s'il ne contient ni arêtes multiples ni boucles.

Dans la suite, les graphes considérés sont simples, finis et non triviaux.

1.2 Voisinage et degré

- Le *voisinage ouvert* d'un sommet v , noté $N(v)$, est l'ensemble des sommets qui sont adjacents à v .
- Le *voisinage fermé* d'un sommet v est $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.
- Un sommet *isolé* est un sommet qui vérifie $N(v) = \emptyset$.

Soit S un sous ensemble de sommets de G .

- Le *voisinage ouvert* de S est $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$.
- le *voisinage fermé* de S est $N[S] = N(S) \cup S$.

Le degré d'un sommet v , noté $d(v)$, est le nombre de ses voisins, càd $d(v) = |N(v)|$.

Le degré minimum (resp. maximum) d'un graphe G , noté $\delta(G)$ (resp. $\Delta(G)$) est $\delta(G) = \min_{v \in V} \{d(v)\}$ (resp. $\Delta(G) = \max_{v \in V} \{d(v)\}$).

1.3 Chaîne et cycle

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *chaîne* de G est une suite $P_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de sommets vérifiant, pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$. L'entier $k-1$ est appelé *longueur* de P_k et Les sommets v_1 et v_k sont les extrémités de la chaîne P_k .

Une chaîne est *simple* si chaque arête apparaît au plus une fois.

Une chaîne est *élémentaire* si chaque sommet apparaît au plus une fois.

Un *cycle* C_k est une chaîne simple dont les deux extrémités sont identiques.

un *cycle élémentaire* est un cycle dont les sommet sont distincts.

Une *corde* d'un cycle élémentaire est une arête qui relie deux sommets non consécutifs.

1.4 Distance

Soit $G = (V, E)$ un graphe. La *distance* entre deux sommets u et v , notée $d_G(u, v)$, est la plus petite des longueurs des chaînes qui relient u à v .

L'*excentricité* d'un sommet u dans un graphe G est la plus grande distance entre le sommet u et n'importe quel autre sommet v de G , c'est à dire

$$e(u) = \max_{v \in V} \{d_G(u, v)\}.$$

Le *diamètre* d'un graphe G est la plus grande excentricité dans le graphe G , c'est à dire

$$\text{diam}(G) = \max_{u \in V} \{e(u)\}.$$

Le *rayon* du graphe G est l'excentricité minimum sur tous les sommets de G , c'est à dire

$$\text{rad}(G) = \min_{u \in V} \{e(u)\}.$$

1.5 Sous-graphe

Un graphe $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe* de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$, où les extrémités de E' sont dans V' .

Un graphe $G' = (V', E')$ est un *graphe partiel* de $G = (V, E)$ si $V' = V$ et $E' \subset E$.

Un *sous-graphe partiel* est un graphe partiel d'un sous-graphe.

Un sous-graphe de $G = (V, E)$ induit par $V' \subseteq V$, noté $G[V']$, est le sous-graphe ayant pour ensemble de sommets V' et pour ensemble d'arêtes toutes les arêtes de E ayant leurs deux extrémités dans V' .

1.6 Graphes particuliers

1.6.1 Graphe connexe

Un graphe *connexe* est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une chaîne.

Une *composante connexe* est un sous-graphe induit connexe maximal.

Le graphe illustré dans la Figure 1.3 est formé de deux composantes connexes.

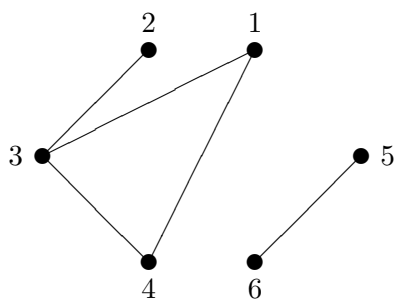
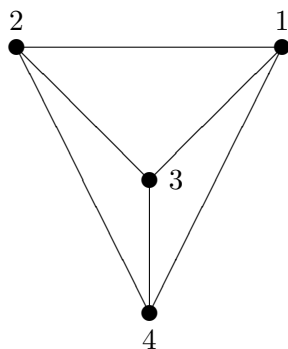


FIGURE 1.3 – Un graphe non connexe

1.6.2 Graphe complet

Le graphe *complet* d'ordre n , noté K_n , est le graphe où chaque sommet est adjacent aux $n - 1$ autres sommets.

FIGURE 1.4 – Un graphe complet K_4

1.6.3 Graphe biparti

Un graphe *biparti* est un graphe qui admet une partition de l'ensemble de ses sommets en deux ensembles A et B non vides, telle que toute arête admet une extrémité dans A et l'autre dans B . On note alors $G = (A, B; E)$.

Un graphe *biparti complet* est un graphe biparti $G = (A, B; E)$, où tout sommet de A est adjacent à tout sommet de B . On le note $K_{n,m}$ où $n = |A|$ et $m = |B|$.

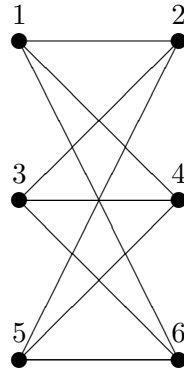


FIGURE 1.5 – Un graphe biparti complet $K_{3,3}$

1.6.4 Stable et clique

Un *stable* est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

Un stable est aussi appelé un *indépendant*.

Une *clique* est un ensemble de sommets deux à deux adjacents.

Le nombre de stabilité, noté $\beta_0(G)$ (ou $\alpha(G)$) est le nombre maximum de sommets de G deux-à-deux non-adjacents. en d'autre mots,

$$\beta_0(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$$

1.6.5 Graphe triangulé

Un graphe est *triangulé* si tout cycle de longueur supérieure à 4 contient au moins une corde.

1.6.6 Arbre

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle .

Les propriétés suivantes sont équivalentes et caractérisent un arbre d'ordre n .

1. G est un arbre.
2. G est sans cycle et connexe.
3. G est sans cycle et comporte $n - 1$ arêtes.
4. G est connexe et comporte $n - 1$ arêtes.
5. Chaque paire u, v de sommets distincts est reliée par une unique chaîne.

Les sommets d'un arbre A appelés *nœuds*, sont de deux type : les *feuilles*, (ou nœuds externes, sommets pendants) correspondant aux sommets de degré 1, et les nœuds *internes*, correspondant aux autres nœuds de l'arbre.

Un *arbre enraciné* est un arbre pour lequel :

- Il existe un nœud particulier appelé *racine*.
- Tout nœud v , autre que la racine, est relié par une arête à un unique antécédent p appelé *père*. Dans ce cas, v est appelé *fil*s de p .
- On peut atteindre la racine à partir de n'importe quel nœud de l'arbre, en se déplaçant de fils en père.

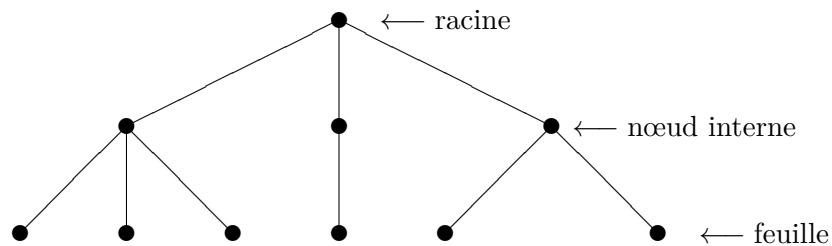


FIGURE 1.6 – Un arbre enraciné

Arbre n-aire complet

Pour tous entiers $k \geq 1$ et $t \geq 1$, on appelle arbre t -aire complet de profondeur k , le graphe $A_{k,t}$ défini intuitivement comme suit :

$A_{1,t}$ est le graphe biparti complet $K_{1,t}$.

Pour $k \geq 2$, $A_{k,t}$ est obtenu à partir de t copies disjointes de $A_{k-1,t}$ et d'un sommet relié par une arête à l'unique sommet de degré t de chacune des t copies de $A_{k-1,t}$.

L'unique sommet r de $A_{k,t}$ de degré t est la racine de $A_{k,t}$.

Soit i un entier, $0 \leq i \leq k$. Le $i^{\text{ème}}$ niveau de $A_{k,t}$ est l'ensemble $V_i(A_{k,t}) = \{u \in V(A_{k,t}), d(u, r) = i\}$.

Pour un sommet $v \in V_i(A_{k,t})$, on écrit $l(v) = i$, et on dit que i est la *profondeur* de v . Pour tout sommet $u \in V(A_{k,t})$, on note par $A_{k,t}(u)$ l'unique sous-arbre complet de $A_{k,t}$ de racine u et de profondeur $k - l(v)$.

Si $t = 2$, $A_{k,2}$ est appelé arbre binaire complet de profondeur k .

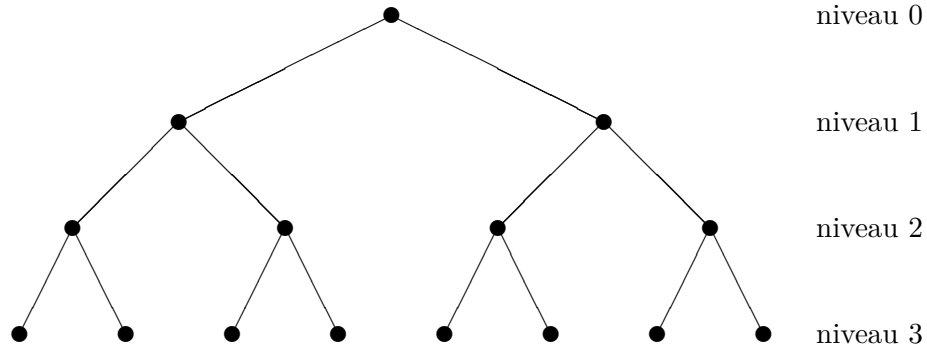


FIGURE 1.7 – L'arbre binaire $A_{3,2}$

1.7 Quelques Opérations sur les graphes

Nous allons présenter dans cette partie, quelques opérations sur les graphes mais plus particulièrement sur les produits de graphes :

1.7.1 Produit cartésien de deux graphes

Soient G et H deux graphes. Le *produit cartésien* $G \square H$ de G et H est le graphe, avec $V(G) \times V(H)$ comme ensemble de sommets. Deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $V(G) \times V(H)$ sont reliés par une arête si et seulement si $x_1 x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$ ou $y_1 y_2 \in E(H)$ et $x_1 = x_2$.

Exemples :

Une grille $P_m \square P_n$ est le produit cartésien de deux chaînes P_m et P_n .

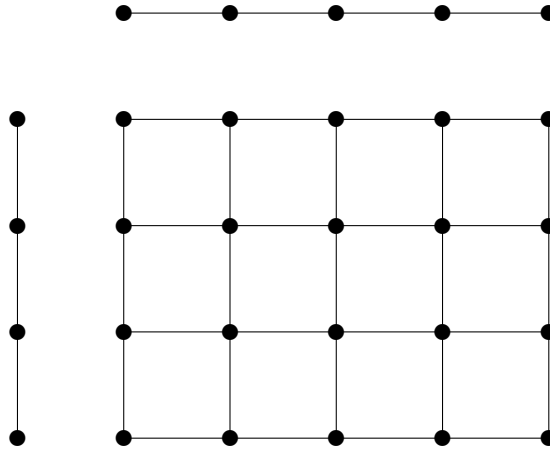


FIGURE 1.8 – La grille $P_4 \square P_5$

1.7.2 Produit tensoriel

Etant donné deux graphes G et H , le *produit tensoriel* $G \times H$ est le graphe avec $V(G) \times V(H)$ comme ensemble de sommets. Deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si

seulement si $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(H)$.

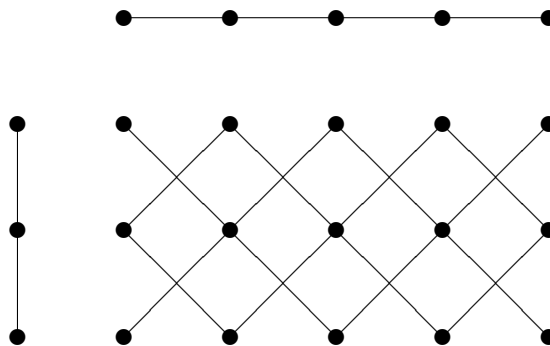


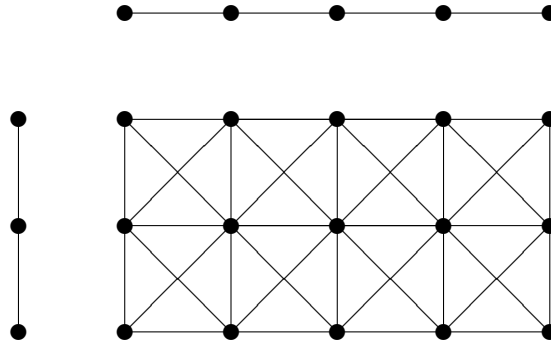
FIGURE 1.9 – $P_5 \times P_3$

1.7.3 Produit fort

Etant donné deux graphes G et H , le *produit fort* $G \boxtimes H$ est le graphe avec $V(G) \times V(H)$ comme ensemble de sommets. Deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $V(G) \times V(H)$ sont reliés par une arête si et seulement si $x_1 = x_2$ ou $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(G)$.

On remarque que :

$$E(G \boxtimes H) = E(G \times H) \cup E(G \square H).$$

FIGURE 1.10 – $P_5 \boxtimes P_3$

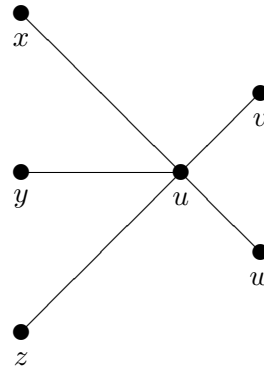
1.8 Domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Un sous-ensemble de sommets $S \subset V$ est un *dominant* de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S , c'est-à-dire si $N[S] = V$.

Le cardinal d'un plus petit ensemble dominant de G est appelé nombre de domination, et est noté par $\gamma(G)$. Un ensemble dominant D de G avec $|D| = \gamma(G)$ est appelé un ensemble dominant minimum de G ou un γ -ensemble.

Le cardinal maximum d'un ensemble dominant D de G est appelé nombre de domination supérieur, et est noté par $\Gamma(G)$. Un ensemble dominant minimal D de G avec $|D| = \Gamma(G)$ est appelé un Γ -ensemble.

FIGURE 1.11 – Un graphe G avec $\gamma_b(G) = 1$ et $\Gamma_b(G) = 5$

1.8.1 Indépendance

Rappelons qu'un sous-ensemble de sommets S d'un graphe G est un *indépendant* (ou *stable*) le sous-graphe induit par S ne contient aucune arête.

Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de G noté $i(G)$ (resp $\beta_0(G)$), est appelé le nombre de domination stable (resp. le nombre de stabilité) de G . Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal [15], on a :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G). \quad (1)$$

1.8.2 Packing

Un sous-ensemble de sommets S de G est un *packing* de G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \leq 1$. Autrement dit, S est un packing de G si et seulement si aucune paire de sommets distincts de S n'est reliée par une arête. En particulier, tout packing est un ensemble indépendant. Le *nombre de packing* $P(G)$ et le *nombre inférieur de packing* $p(G)$ sont respectivement le cardinal maximum et minimum d'un packing maximal dans G . Les différents paramètres définis sont reliés par la chaîne d'inégalités suivante [15] :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G). \quad (2)$$

1.8.3 Efficacité

Un ensemble dominant S de G est dit *efficace* si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| = 1$, c'est-à-dire que tout sommet est dominé par un unique sommet de S .

De la définition précédente, on voit immédiatement que tout ensemble dominant efficace est un packing. Ainsi, on déduit grâce à la chaîne d'inégalités (2) que si un graphe G possède un ensemble dominant efficace, alors celui-ci est forcément un $\gamma(G)$ -ensemble. Par ailleurs, il existe des graphes qui ne possèdent aucun ensemble dominant efficace. Citons, à titre d'exemple, le cycle C_5 .

1.8.4 Domination double

Un sous-ensemble de sommets S est un *dominant double* de G si tout sommet de G est dominé par au moins deux sommets de S , c'est-à-dire si $x \in V \setminus S$ alors x a au moins deux voisins dans S et si $x \in S$ alors x a au moins un voisin dans S .

Le nombre de domination double, noté par $\gamma_{\times 2}(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant double de G .

Théorème 1.1. [15] *Si est un graphe sans sommet isolé, alors $\gamma(G) + 1 \leq \gamma_{\times 2}(G)$*

1.8.5 Domination totale

Un dominant total S est un sous ensemble de sommets de G tel que tout sommet de V est adjacent à au moins un sommet de S . En d'autre termes, S vérifie $N(S) = V$.

Le nombre de domination totale $\gamma_t(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un dominant total. Le *nombre de domination totale supérieure*, noté $\Gamma_t(G)$, représente le cardinal maximum d'un ensemble dominant total minimal. Il est facile de voir que tout graphe G vérifie :

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \Gamma_t(G) \leq 2\gamma(G) \quad (3)$$

1.9 Théorie de la complexité algorithmique

Nous ne donnons ici qu'un bref aperçu sur la théorie de la complexité nécessaire à la compréhension de ce qui suit.

1.9.1 Problème de décision

Un problème de décision est un problème dont l'ensemble des réponses se trouve dans $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$. A tout problème d'optimisation combinatoire on peut associer un problème de décision.

Un algorithme polynomial est un algorithme dont la complexité est $O(p(n))$ où p est une fonction polynomiale et n dénote la longueur de données.

1.9.2 Classe P

On appelle "classe P " la classe regroupant tous les problèmes de décision admettant pour leur résolution un algorithme polynômial. On dit que les problèmes de la classe P sont "faciles".

1.9.3 Classe NP

Un problème appartient à la classe NP si, lorsqu'une solution à ce problème est proposée, alors on peut vérifier en temps polynomial que la réponse correspondante est VRAI.

1.9.4 Réduction polynômial

Soient A et B deux problème de décision. On dit que A se réduit polynômialement en B s'il existe un algorithme pour A utilisant (comme sous-programme) un algorithme de B , et si cet algorithme de résolution de A s'exécute en temps polynômial lorsque la durée d'exécution de chaque appel de l'algorithme de B est comptabilisée comme une seule opération élémentaire. On notera alors $A \leq B$.

1.9.5 Problèmes NP -complets

Un problème de décision est dit " NP -complet" si tout problème de la classe NP se réduit polynomialement à lui. Un problème d'optimisation combinatoire dont le problème de décision associé est NP -complet est dit NP -dur.

Chapitre 2

Broadcasts dans les graphes

Dans ce chapitre, nous énonçons les résultats établis dans la littérature sur les broadcasts. Nous ne manquerons pas de présenter les résultats sur la complexité algorithmique du problème de la broadcast domination.

2.1 Notions fondamentales sur les fonctions broadcasts

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

Une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$ est appelée *broadcast* sur G si $f(v) \leq e(v)$ pour tout sommet v de G .

Un sommet v est *f-dominant* (ou *f-broadcast dominant* ou *sommet broadcast*) si $f(v) \geq 1$ et l'ensemble $V_f^+(G) = \{v \in V(G) : f(v) \geq 1\}$ des sommets *f-dominants* est appelé un ensemble *f-dominant*.

Un sommet *f-dominant* v *f-domine* tout sommet u avec $d(u, v) \leq f(v)$, tandis que les sommets de $V(G) - V_f^+$ ne *f-dominent* aucun sommet de G .

L'ensemble des sommets qui *f-dominent* le sommet v est noté par $H_f(v)$ ou $H(v)$ lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté.

$$H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u, v) \leq f(u)\}$$

Un sommet u qui est f -dominé par v , est un f -voisin de v . L'ensemble des f -voisins de v est appelée f -voisinage de v et est noté par $N_f[v]$. Le f -voisinage d'un ensemble $S \subseteq V$ est l'ensemble $N_f[S] = \bigcup_{u \in S} N_f[u]$.

Un f -voisin privé de v est un sommet u vérifiant $H(u) = \{v\}$.

L'ensemble des f -voisins privés de v est appelé f -voisinage privé de v et est noté par $PN_f[v]$.

Un broadcast *dominant* sur G est un broadcast f tel que tout sommet est f -dominé par au moins un sommet de $V_f^+(G)$. En d'autre termes, f est un broadcast dominant sur G si et seulement si $N_f[V_f^+(G)] = V(G)$.

Par conséquent, f est un broadcast dominant si et seulement si $|H(v)| \geq 1$ pour tout sommet $v \in V$.

Un broadcast dominant f est *minimal* (resp. *maximal*) si tout broadcast dominant g , autre que f , ne vérifie pas : $g(v) \leq f(v)$ (resp. $g(v) \geq f(v)$), $\forall v \in V(G)$.

Théorème 2.1. [12] *Soit f un broadcast dominant sur un graphe G . Alors, f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Chaque sommet v vérifiant $f(v) \geq 2$ a un f -voisinage privé qui est à distance $f(v)$ de v .*
2. *Chaque sommet v vérifiant $f(v) = 1$ a un f -voisinage privé dans $N_f[v]$.*

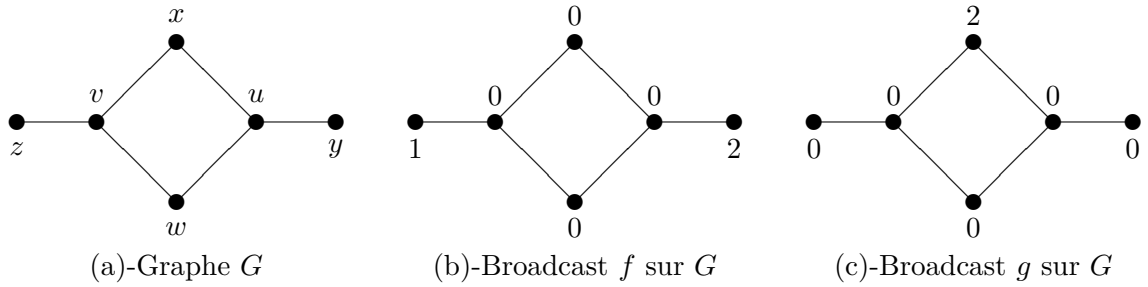
Pour un broadcast f sur un graphe $G = (V, E)$, on appelle *coût* de f , le nombre $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$.

le *nombre de broadcast domination* $\gamma_b(G)$ de G est la valeur minimum de $f(V)$ sur l'ensemble des broadcast f -dominants sur G .

Un broadcast dominant f sur G pour lequel $f(V) = \gamma_b(G)$ est un γ_b -broadcast sur G et $V_f^+(G)$ un γ_b -ensemble sur G .

On appelle *nombre de broadcast domination supérieure* d'un graphe $G = (V, E)$ et on note par $\Gamma_b(G)$, le coût maximum d'un broadcast dominant minimal sur G . Un broadcast f sur G vérifiant $f(V) = \Gamma_b(G)$ est appelé un Γ_b -broadcast sur G et $V_f^+(G)$ un Γ_b -ensemble de G .

Les graphes de la Figures 2.1 illustrent deux broadcasts dominants f et g , où l'ensemble f -dominant est $V_f^+ = \{z, y\}$, et l'ensemble g -dominant est $V_g = \{x\}$. Le sommet y f -domine y, u, x, w et le sommet x g -domine tous les sommets de V . Le f -voisinage de y est $N_f[y] = \{y, u, x, w\}$ et le g -voisinage de x est V . On a $H_f(v) = \{z\}$ et $H_g(v) = \{x\}$. Les couts des fonctions f et g sont égaux respectivement à $f(V) = 3$ et $g(V) = 2$. En fait, il n'est pas difficile de voir que $\gamma_b(G) = 2$ et g est un γ_b -broadcast.


 FIGURE 2.1 – Broadcasts dominants sur le graphe G

Proposition 1. [12] *Soit f un broadcast dominant minimum sur un graphe connexe G . Alors $V_f^+ = \{v\}$ si et seulement si $f(v) = e(v) = \text{rad}(G)$.*

Proposition 2. [12] *Soit G un graphe et f un broadcast dominant minimum sur G . Si $v \in V_f^+$, alors $f(v) = \gamma_b(\langle N_f[v] \rangle) = \text{rad}(\langle N_f[v] \rangle)$.*

Théorème 2.2. [11] *Soit G un graphe connexe. Alors $\gamma_b(G) = \gamma(G)$ si et seulement s'il existe un broadcast dominant f de coût minimum sur G telle que V_f^+ est un ensemble dominant.*

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe non trivial et $f_S : V \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$.

Remarque 2.1. 1. La fonction caractéristique f_S d'un ensemble dominant minimal S dans un graphe G est un broadcast dominant minimal et donc $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$.

2. Soit $u \in V$ et soit $f_u : V \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$ la fonction définie par :

$$f_u(v) = \begin{cases} e(u) & \text{si } v = u, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le broadcast f_u est un dominant minimal, puisque chaque sommet est f -dominé par u .

Si u est un sommet dans le centre de G (càd $e(u) = \text{rad}(G)$), f_u est appelé broadcast radial.

De même, si $e(u) = \text{diam}(G)$, f_u est appelé broadcast diamétral.

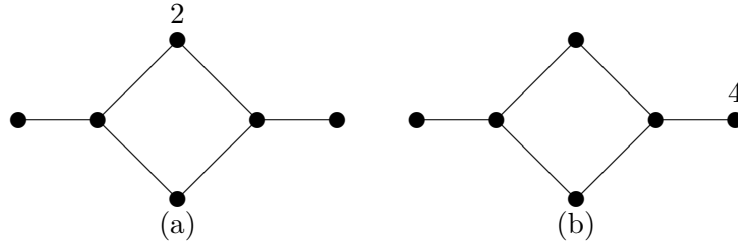


FIGURE 2.2 – (a)Un broadcast radial-(b)Un broadcast diamétral

Un graphe G est γ_b -radial (resp. γ_b -diamétral) si $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$ (resp. $\gamma_b(G) = \text{diam}(G)$).

2.2 Bornes sur γ_b et Γ_b

Dans [12], *Erwin* détermina une borne inférieure pour le nombre de broadcast domination d'un graphe arbitraire identique à celle de $\gamma(G)$ puisque $\gamma(G) \geq \lceil \frac{\text{diam}(G)+1}{3} \rceil$ est connue pour le nombre de domination :

Théorème 2.3. [12] *Pour tout graphe G , on a :*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{\text{diam}(G)+1}{3} \rceil.$$

Cette borne est atteinte pour les cycles d'ordre 3 et d'ordre 6.

Pour les chaînes, les nombres de domination et broadcast domination sont égaux.

Théorème 2.4. [12] *Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Pour les cycles C_n , on a un résultat identique à celui des chaînes.

Théorème 2.5. [12] *Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$\gamma_b(C_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Il existe d'autres bornes qui dépendent du rayon. Pour un γ_b -broadcast f , notons par $M = \max\{f(x) : x \in V_f\}$:

Lemme 2.6. [12] *Soit G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G . Alors*

$$rad(G) \leq 2\gamma_b(G) + |V_f| - M - 1.$$

Corollaire 1. [11] *Soit G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G . Alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{rad(G) + M + 1 - |V_f|}{2} \rceil.$$

Dans le théorème suivant, Bresar et Spacapan donnent une borne inférieure pour le nombre de broadcast domination d'un graphe G , en fonction du rayon de G . Puisque $diam(G) \geq rad(G)$, on a :

Théorème 2.7. [3] *Si G est un graphe connexe, alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{2rad(G)}{3} \rceil.$$

Pour tout graphe connexe G d'ordre n , $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

Corollaire 2. [12] *Pour tout graphe connexe G d'ordre n ,*

$$\gamma_b(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

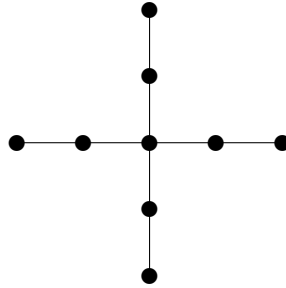
Pour tout graphe connexe G , le nombre de broadcast domination γ_b et Γ_b vérifient une chaîne d'inégalités.

Observation 2.1. [10] Pour tout graphe G ,

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} \leq \max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\} \leq \Gamma_b(G).$$

Pour tout entier positif $t \geq 3$, on appelle *étoile* et on note par $K_{1,t}$ l'arbre à t sommets pendants reliés à l'unique sommet de degré t .

On appelle graphe subdivisé d'un graphe G le graphe $S(G)$ obtenu en insérant un sommet sur chaque arête de G .



$S(K_{1,4})$

FIGURE 2.3 – Le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,4}$.

Soit $T = S(K_{1,t})$ le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,t}$. Puisque aucun sommet ne domine T , alors $\gamma_b(T) \geq 2$, et puisqu'un broadcast radial domine T , alors $\gamma_b(T) \leq \text{rad}(T) = 2$. Ainsi l'inégalité $\gamma_b(G) \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\}$ peut être atteinte. Par ailleurs, la différence entre $\min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ et entre $\Gamma_b(G)$ et $\max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\}$ peut être très grande. En effet, considérons l'exemple suivant :

Soit k un entier positif et soit H_k le graphe obtenu en joignant un sommet pendant de $S(K_{1,2+k})$ à un sommet pendant de la chaîne P_{2k} .

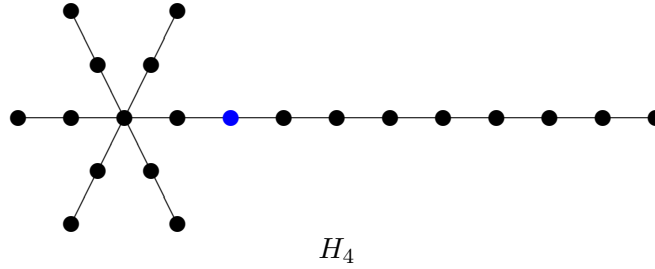


FIGURE 2.4 – Jonction de $S(K_{1,6})$ et P_8 .

Alors $\Gamma(H_k) = 2k + 3$ et $\text{diam}(H_k) = 2k + 4$, donc $\max\{\Gamma(H_k), \text{diam}(H_k)\} = 2k + 4$. Soit v l'extrémité de P_{2k} qui est extrémité de H_k . Soit le broadcast $f : V(H_k) \rightarrow \{0, 1, 2k + 2\}$ défini par $f(v) = 2k + 2$, $f(x) = 1$ pour tout extrémité de H_k distincte de v et $f(x) = 0$ pour tout autre sommet. Alors f est un broadcast dominant minimal sur H_k de coût $3k + 3$ et par suite $\Gamma_b(H_k) \geq 3k + 3$. Nous avons donc

Observation 2.2. [10] Pour tout entier positif k ,

$$\Gamma(H_k) - \max\{\Gamma_b(H_k), \text{diam}(H_k)\} \geq k - 1.$$

On présente dans ce qui suit un théorème qui donne la borne supérieure sur le nombre supérieur de broadcast domination d'un graphe G .

Théorème 2.8. [10] *Si G est un graphe de taille m , alors $\Gamma_b(G) \leq m$ et l'égalité est atteinte si et seulement si G est une étoile ou une chaîne non triviale.*

Pour tout entier $k \geq 0$, on appelle graphe k -subdivisé du graphe G le graphe obtenu à partir de G en insérant k sommets sur chaque arête de G . Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$, on note par $S_{k,t}$ le graphe k -subdivisé du graphe t -étoile $K_{1,t}$. Le centre de $S_{k,t}$ est l'unique sommet c de $S_{k,t}$ d'excentricité $e(c) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1$.

En 2001, Erwin montre que le graphe k -subdivisé du graphe étoile $K_{1,t}$ est γ_b -radial pour $k \geq 0$ et $t \geq 5$ puis il proposa la conjecture qui stipule la véracité du résultat pour $t \in \{3, 4\}$ et en 2009 I.Bouchemakh et R.Sahbi [4] ont répondu à la conjecture :

Théorème 2.9. [4] *Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$,*

$$\gamma_b(S_{k,t}) = \text{rad}(S_{k,t}) = k + 1.$$

Théorème 2.10. [4] *Soit k un entier, $k \geq 3$, et soit $S'_{k,3}$ le sous graphe de $S_{k,3}$ à 3 sommets pendants v_1, v_2 et v_3 tels que $d(c, v_1) = k + 1$, $d(c, v_2) = k$ et $d(c, v_3) = k - 1$. Alors $S'_{k,3}$ est $\gamma_b(S_{k,3})$ -radial.*

Les arbres t -aire complets sont aussi γ_b -radiaux.

Théorème 2.11. [4] *Pour tous entiers $k \geq 3$ et $t \geq 2$, on a :*

$$\gamma_b(A_{k,t}) = \text{rad}(A_{k,t}) = k$$

La valeur de $\gamma_b(G)$ peut être facilement calculée si le rayon ou le nombre de broadcast domination ont une valeur n'excédant pas 3.

Proposition 3. [12] *Soit G un graphe connexe. Si $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.*

2.3 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination

Pour un graphe non trivial connexe G . Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 1 admettent une caractérisation similaire à celle des graphes avec un nombre de domination égal à 1.

Proposition 4. [12] *Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 1$ si et seulement si $rad(G) = 1$.*

Pour un graphe biparti complet, les nombres de domination et broadcast domination sont égaux.

Théorème 2.12. [8] *Pour tout graphe biparti complet $K_{p,q}$, on a :*

$$\gamma_b(K_{p,q}) = \gamma(K_{p,q}) \leq 2$$

On présente dans ce qui suit un théorème qui donne la caractérisation des graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 2 en fonction du rayon de G .

Théorème 2.13. [12] *Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 2$ si et seulement si*

$$\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 2.$$

Proposition 5. [12] *Si G est un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$, alors*

1. $rad(G) = 2$, ou,
2. $rad(G) = 3$ et $\gamma(G) = 2$.

Proposition 6. [12] *Si G est un graphe tel que $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 3$, alors $\gamma_b(G) = 3$.*

Erwin résume la Proposition 4, le Théorème 2.12 et la Proposition 6 par :

Proposition 7. [11] *Soit G un graphe. Si $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.*

Erwin montre que le résultat de la Proposition 7 n'est pas vérifié lorsque $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$. Il considère le graphe G obtenu en joignant une extrémité de $S(K_{1,4})$ à une extrémité de P_3 et il montre que $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$.

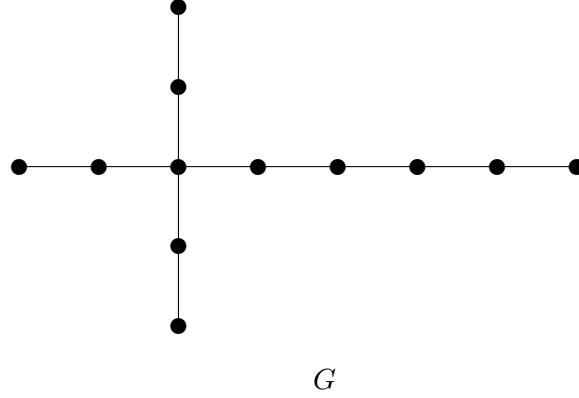


FIGURE 2.5 – Le graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$

2.4 Nombre de broadcast domination du produit de deux graphes

2.4.1 Produit cartésien

Les distances entre deux sommets du produit cartésien vérifient $d_{G \square H}((u, x), (v, y)) = d_G(u, v) + d_H(x, y)$. D'où $rad(G \square H) = rad(G) + rad(H)$. Ainsi,

$$\gamma_b(G \square H) \leq rad(G \square H) = rad(G) + rad(H) \leq \frac{3}{2}(\gamma_b(G) + \gamma_b(H))$$

Concernant le nombre de broadcast domination d'un produit cartésien de deux chaînes $P_m \square P_n$, noté $G_{m,n}$ il a été prouvé par Erwin :

Théorème 2.14. [11] *pour toute paire d'entiers m et n , avec $2 \leq m \leq n$,*

$$\gamma_b(G_{m,n}) = rad(G_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Le nombre de broadcast domination d'un produit cartésien de deux cycles $C_m \square C_n$ a été déterminé par Bresar et Spacapan. Notons d'abord que :

$$rad(C_m \square C_n) = \begin{cases} \frac{m+n}{2} & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont pairs,} \\ \frac{m+n-2}{2} & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont impairs,} \\ \frac{m+n-1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.15. [3] *Si m ou n est pair alors : $\gamma_b(C_m \square C_n) = rad(C_m \square C_n)$, sinon $\gamma_b(C_m \square C_n) = rad(C_m \square C_n) - 1$.*

2.4.2 Produit tensoriel

Pour deux graphes G et H , Bresar et Spacapan ont déterminé une borne supérieure pour le nombre de broadcast domination de $G \times H$.

Théorème 2.16. [3] *Si $G \times H$ est le produit tensoriel de G et H , alors*

$$\gamma_b(G \times H) \leq \begin{cases} 3\gamma_b(G) & \text{si } rad(G) > rad(H), \\ 3\min\{\gamma_b(G), \gamma_b(H)\} & \text{si } rad(G) = rad(H). \end{cases}$$

Le nombre de broadcast domination d'un produit tensoriel de deux chaînes $P_m \times P_n$ a été prouvé par Boumali [8] :

- Si $m = 1$, $P_1 \times P_n$ est un stable de taille n et donc $\gamma_b(P_1 \times P_n) = n$.
- Si $m = 2$, $P_2 \times P_n$ est isomorphe à l'union de deux chaînes de longueur n et donc $\gamma_b(P_2 \times P_n) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Théorème 2.17. [8] *Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, tels que $3 \leq m \leq n$, $\gamma_b(P_m \times P_n) = \left\lceil \frac{\lceil \frac{m \times n}{2} \rceil}{m+1} \right\rceil + \left\lceil \frac{\lfloor \frac{m \times n}{2} \rfloor}{m+1} \right\rceil$.*

2.4.3 Produit fort

En ce qui concerne le nombre de broadcast domination d'un produit fort de deux graphes G et H , il n'est connu à notre connaissance qu'une borne supérieure :

Proposition 8. [3] *Si $G \boxtimes H$ est le produit fort de G et H , alors*

$$\gamma_b(G \boxtimes H) \leq \frac{3}{2} \max\{\gamma_b(G), \gamma_b(H)\}.$$

2.5 Invariants dans les broadcasts

Nous nous intéressons dans cette section à d'autres paramètres de broadcast.

2.5.1 Broadcast indépendant

Soit G un graphe. Un broadcast f est dit *indépendant* si tout sommet f -dominant n'est f -dominé que par lui-même, c'est-à-dire si pour tout sommet $v \in V_f^+$, $N_f[v] \cap V_f^+ = \{v\}$, ou encore $|H_f(v)| = 1$. Un broadcast indépendant n'est pas nécessairement dominant. Le coût maximum d'un broadcast indépendant de G est appelé *nombre de broadcast indépendance* et est noté par $\beta_b(G)$. *Le nombre de broadcast indépendance inférieure $i_b(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast indépendant maximal de G .*

Observation 2.3. [10] Pour tout graphe G , $i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq \beta_b(G)$.

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute paire de sommets u et v de M , $d(u, v) = \text{diam}(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de G .

La borne $\text{diam}(G)$ de $\beta_b(G)$ peut être considérablement améliorée.

Proposition 9. [10] *Pour tout graphe G ,*

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(\text{diam}(G) - 1) \geq 2(\text{diam}(G) - 1).$$

Les graphes $S(K_{1,t})$, $t \geq 2$, vérifient $\beta_b(S(K_{1,t})) = 2(\text{diam}(G) - 1)$.

Pour une chaîne Erwin [11] a donné la valeur exact du nombre de broadcast indépendance.

Proposition 10. [11] *Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\beta_b(P_n) = 2(n - 2).$$

Concernant le nombre de broadcast indépendance d'un produit cartésien de deux chaînes $P_m \square P_n$, il a été prouvé par I.Bouchemakh et M.Zemir [5] :

Théorème 2.18. [5] *Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\beta_b(G_{2,n}) = 2(n - 1).$$

Théorème 2.19. [5] *Pour tout entier $n \geq 3$,*

$$\beta_b(G_{3,n}) = 2n.$$

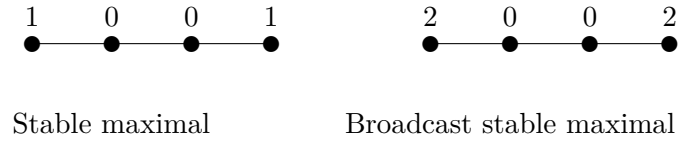
Théorème 2.20. [5] *Pour tout entier $n \geq 4$,*

$$\beta_b(G_{4,n}) = 2(n + 1).$$

Théorème 2.21. [5] *Pour toute paire d'entiers m et n avec $5 \leq m \leq n$, $(m, n) \neq (5, 5), (5, 6)$,*

$$\beta_b(G_{m,n}) = \left\lceil \frac{mn}{2} \right\rceil.$$

La fonction caractéristique f_s d'un ensemble S indépendant maximal dans un graphe G est un broadcast indépendant, et donc $i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$, mais f_s n'est pas nécessairement un broadcast indépendant maximal.

FIGURE 2.6 – Un stable maximal et un broadcast stable maximal sur P_4

Dans la suite, on notera par $\mu \diamond \mu'$ pour signifier que μ et μ' sont deux paramètres incomparables.

En général, les paramètres $\gamma(G)$ et $i(G)$ sont incomparables avec $i_b(G)$. En effet, si G est une chaîne d'ordre 6, on peut voir que $\gamma(P_6) = i(P_6) = 2 < 3 = i_b(P_6)$. Par contre pour le graphe $S(K_{1,t})$, on a $\gamma(S(K_{1,t})) = i(S(K_{1,t})) = t > 2 = i_b(S(K_{1,t}))$.

De même, $p(G)$ et $P(G)$ sont incomparables avec $i_b(G)$. En effet, le graphe de Petersen (noté PG) vérifie $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \gamma_b(PG) = i_b(PG)$, voir Figure 2.7. Maintenant si G est le graphe formé de l'union de trois copies disjointes de P_5 en ajoutant trois arêtes pour former un triangle au centre, alors $\gamma_b(G) = i_b(G) = 3 < 5 = p(G) < P(G)$, voir Figure 2.8.

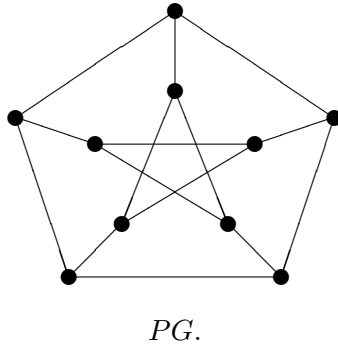
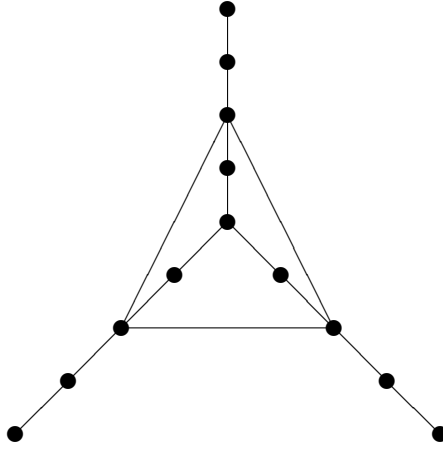


FIGURE 2.7 – Le graphe de PETERSEN

FIGURE 2.8 – Un graphe G vérifiant $\gamma_b(G) = i_b(G) = 3 < 5 = p(G) < P(G)$

Observation 2.4. [10] Pour tout graphe G ,

1. $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$,
2. $\{\gamma(G), i(G)\} \diamond i_b(G)$,
3. $\{p(G), P(G)\} \diamond \{\gamma_b(G), i_b(G)\}$.

Dans [10], Dunbar et al ont montré la chaîne d'inégalités suivante :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G).$$

Une question naturelle se pose : A-t-on la chaîne d'inégalités : $\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \leq \Gamma_b(G)$?

La réponse est donnée dans les deux résultats qui suivent.

Pour tout sommet $v \in V_f^+$, soit $d^+(v) = \min\{d(u, v), u \in V_f^+ - \{v\}\}$. Le théorème suivant donne la relation entre les deux invariants $\gamma_b(G)$ et $i_b(G)$.

Théorème 2.22. [12] Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G . Si $V^+ = \{v\}$, alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Autrement dit, si $|V_f^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. f est dominant et,
2. pour tout sommet $v \in V_f^+$, $f(v) = d^+(v) - 1$

Ainsi, Dunbar et al ont pu conclure que $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$. Par contre $\beta_b(G)$ et $\Gamma_b(G)$ sont incomparables puisque $\beta_b(P_4) = 4 > \Gamma_b(P_4) = 3$, et pour le graphe de Petersen PG , $\beta_b(PG) = 4 < \Gamma_b(PG) = 5$.

Corollaire 3. [10] *Pour tout graphe G ,*

1. $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$,
2. $\beta_b(G) \diamond \Gamma_b(G)$, et
3. $\beta_b(G) \diamond \Gamma(G)$.

La proposition qui suit, donne une chaîne d'inégalités entre $\beta_0(G)$ et les nombres de broadcast indépendance :

Proposition 11. [10] *Pour tout graphe G , $i_b(G) \leq rad(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$.*

Corollaire 4. [10] *Pour tout graphe G , si $\gamma_b(G) = rad(G)$, alors $i_b(G) = rad(G)$*

D'après le Théorème 2.9, $\gamma_b(S_{k,t}) = rad(S_{k,t}) = k + 1$. Du Corollaire 4, on déduit la valeur $i_b(S_{k,t})$.

Corollaire 5. [22] *Pour tout entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$,*

$$i_b(S_{k,t}) = k + 1.$$

Théorème 2.23. [22] *Soient $T = (V, E)$ un arbre et $\tau = (U, F)$ un sous-arbre induit de T . Alors, $\gamma_b(T) \geq \gamma_b(\tau)$.*

Du Théorème 2.23 et le Corollaire 5, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 6. [22] *Pour un entier $k \geq 0$, soit $T = (V, E)$ un arbre de rayon $k + 1$ contenant un sous-arbre induit $\tau = (U, F)$ isomorphe à $S_{k,3}$. Alors, $\gamma_b(T) = i_b(T) = rad(T) = k + 1$.*

D'après le Théorème 2.11 et le Corollaire 4, on obtient la valeur de $i_b(A_{k,t})$.

Corollaire 7. [22] *Pour tous entiers $k \geq 1$ et $t \geq 2$, on a $i_b(A_{k,t}) = \gamma_b(A_{k,t}) = k$.*

2.5.2 Broadcast dominant indépendant

Un broadcast f est dit *dominant indépendant* s'il est à la fois indépendant et dominant. Le coût maximum d'un broadcast indépendant dominant minimal sur G est appelé *nombre supérieur de broadcast indépendant de domination* et est noté par $\Gamma_{ib}(G)$. Le *nombre de broadcast indépendant de domination* $\gamma_{ib}(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast dominant indépendant sur G . On a donc les inégalités, $\gamma_{ib}(G) \leq i(G)$ et $\Gamma_{ib}(G) \geq \beta_0(G)$, puisque la fonction caractéristique de tout ensemble stable maximal est un broadcast dominant stable minimal.

Soient A et B deux ensembles. Si A est sous-ensemble propre de B , on écrit $A \subset B$:

Théorème 2.24. [10] *Si f est un broadcast dominant non indépendant sur un graphe $G = (V, G)$, alors il existe un broadcast g sur G qui est dominant indépendant avec $g(V) \leq f(V)$ et $V_g \subset V_f$.*

Corollaire 8. [10] *Tout graphe G possède un γ_b -broadcast qui est indépendant, c'est-à-dire que pour tout graphe G ,*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G).$$

Proposition 12. [10] *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Pour le nombre supérieur de broadcast indépendant de domination, nous avons ce qui suit :

Proposition 13. [10] *Pour tout graphe G ,*

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

D'autre part, Dunbar et al [10] montrèrent que les paramètres $\Gamma_{ib}(G)$ et $\Gamma(G)$ sont incomparables. En effet, pour le graphe de Petersen PG et la chaîne P_{10} , on a $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$ et $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$.

Pour l'arbre $A_{1,t}$ et $A_{2,t}$, $t \geq 2$, la valeur exacte de Γ_{ib} est déterminée.

Théorème 2.25. [22] *Pour tout entier $t \geq 2$,*

$$\Gamma_{ib}(A_{1,t}) = \Gamma_b(A_{1,t}) = \Gamma(A_{1,t}) = t.$$

Théorème 2.26. [22] *Pour tout entier $t \geq 2$,*

$$\Gamma_{ib}(A_{2,t}) = \Gamma_b(A_{2,t}) = \Gamma(A_{2,t}) = t^2 + 1.$$

2.5.3 Broadcast efficace

Un broadcast f est *efficace* si tout sommet est f -dominé exactement par un seul sommet f -dominant, c'est-à-dire que pour tout sommet $v \in V$, $|H_f(v)| = 1$. Le coût maximum d'un broadcast efficace noté Γ_{eb} est appelé le *nombre d'efficacité supérieure*, et le coût minimum d'un broadcast efficace, noté γ_{eb} , et appelé le nombre d'efficacité.

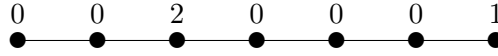


FIGURE 2.9 – Un broadcast efficace sur P_7

Théorème 2.27. [10] *Tout graphe possède un γ_b -broadcast qui est efficace.*

Par définition, $\gamma_b(G) \leq \gamma_{eb}(G)$ et le théorème implique de plus que $\gamma_b(G) = \gamma_{eb}(G)$.

Corollaire 9. [10] *Tout graphe G possède un γ_b -broadcast f pour lequel la distance entre deux sommets f -dominants u, v est supérieure à $f(u) + f(v)$.*

Chaque broadcast dominant efficace est indépendant et dominant minimal. Par conséquent on a pour tout graphe G ,

$$\gamma_{eb}(G) \leq \min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{eb}(G)\}.$$

D'autre part, chaque broadcast diamétral est un broadcast dominant efficace. Il s'ensuit une chaîne d'inégalités.

Corollaire 10. [10] *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

On peut voir que ni $p(G)$ ni $P(G)$ est comparable avec $\Gamma_{eb}(G)$. Par exemple, pour le graphe de Petersen PG , $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \Gamma_{eb}(PG)$, et pour l'arbre binaire complet T de hauteur 6 ayant 63 sommets, $\Gamma_{eb}(T) = 10 < 13 = p(T)$. En outre, $\gamma(PG) = 3 > 2 = \Gamma_{eb}(PG)$. Ainsi, pour $n \geq 3$, $\Gamma_{eb}(P_n) = n - 1 > \Gamma(P_n)$.

Observation 2.5. [10] *Pour tout graphe G ,*

$$\Gamma_{eb}(G) \diamond \{p(G), P(G), \gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G)\}.$$

2.5.4 Broadcast packing

Un broadcast f est appelé *broadcast packing* si tout sommet admet au plus un sommet f -dominant, c'est-à-dire tout sommet $v \in V$ vérifie $|H(v)| \leq 1$. Le coût maximum d'un broadcast packing de G est appelé *nombre de broadcast packing* et est noté par $P_b(G)$. Le *nombre de broadcast packing inférieur* est égal au coût minimum d'un broadcast packing maximal, et est noté par $p_b(G)$. La fonction caractéristique d'un packing maximal n'est pas forcément un broadcast packing maximal (voir Figure 2.10).



FIGURE 2.10 – (a) packing maximal-(b) broadcast packing maximal

Notons que les invariants, $p(G)$ et $p_b(G)$ sont incomparables. En effet, la chaîne P_5 vérifie $p(P_5) < P_b(P_5)$. Par ailleurs, l'inégalité inverse est vraie pour l'arbre binaire complet T de hauteur

5, ayant 31 sommets. Nous pouvons vérifier que le broadcast radial de T est un broadcast packing maximal de coût égal à 4, alors que $p(T) = 6$. De plus, aucun broadcast radial ou diamétral n'est un broadcast packing et chaque broadcast packing est un broadcast stable.

Observation 2.6. [10] Pour tout graphe G ,

- $p_b(G) \diamond P(G)$,
- $p_b(G) \diamond p(G) \leq P_b(G)$, et
- $p_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq P_b(G) \leq \beta_b(G)$.

Proposition 14. [10] *Chaque broadcast efficace est*

1. *Un broadcast packing maximal*
2. *Un broadcast dominant minimal, et*
3. *Un broadcast dominant stable minimal*

Comme conséquence du Corollaire 10 et de Proposition 14, on a :

Corollaire 11. [10] *Pour tout graphe G ,*

$$p_b(G) \leq \gamma_{eb}(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \min\{P_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}.$$

Observation 2.7. [10] Pour tout graphe G ,

$$P_b(G) \diamond \{\gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G), \Gamma_{ib}(G), \Gamma_b(G)\}.$$

Les inégalités et comparaisons entre les invariants de broadcast sont résumées dans le Tableau 2.1.

	p	P	γ	i	β_0	Γ	γ_b	i_b	β_b	Γ_b	Γ_{ib}	Γ_{eb}	p_b	P_b
p	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$
P	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$
γ	$\geq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
i	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
β_0	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
Γ	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
γ_b	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\leq$
i_b	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\leq$
β_b	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$
Γ_b	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$=$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$
Γ_{ib}	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$
Γ_{eb}	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\geq$	$\leq$
p_b	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\leq$
P_b	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$=$

TABLE 2.1 – Inégalités entre les invariants de broadcast.

2.6 Complexité algorithmique

Dans cette section, nous résumons les notions et les résultats relatifs à la complexité algorithmique dans les broadcast. Pour plus de détail, le lecteur peut se référer aux ouvrages [13] ou [23].

2.6.1 Problème de broadcast domination

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif K . Existe-t-il un broadcast dominant f de G tel que $\sum_{v \in V} f(v) \leq K$?

Théorème 2.28. [18] *Le problème de broadcast domination optimale est polynomial, de complexité $O(n^6)$.*

La complexité du problème de Broadcast dominant est polynomiale en $O(n^3)$ [7] pour la classe des graphe d'intervalles, en $O(nr^4)$ [7] pour la classe des graphes séries-parallèles (r représente le rayon du graphe), en $O(nh)$ [7] pour la classe des arbres (h représente la profondeur de l'arbre).

2.6.2 Problème de broadcast domination restreint

On appelle problème de *broadcast domination optimale restreinte*, le problème suivant : étant donné un graphe $G = (V, E)$ et deux entiers positifs $K, M \leq |V|$, Existe-t-il un broadcast dominant f de G tel que $\sum_{v \in V} f(v) \leq K$ et $\max_{v \in V} f(v) \leq M$?

Théorème 2.29. [19] *Le problème de broadcast domination restreinte est NP-complet.*

2.6.3 Formulation du problème de broadcast domination

On présente ici deux formulations du problème de broadcast domination optimale.

Programmation linéaire en nombres entiers mixte

Soient $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n et f un broadcast sur G . Pour tout sommet $i \in V$, on note par x_i le poids du sommet i . Les variables x_i sont des variables entières. Pour $i, j \in V$, soit y_{ij} la variable binaire qui prend la valeur 1 si le sommet i f -domine le sommet j , et qui prend la valeur 0 sinon. Enfin, on note par d_{ij} la distance du sommet i au sommet j . On obtient alors la IP formulation mixte suivante :

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i \in V} x_i \\
 & \text{sujet à : } x_j + \sum_{i \neq j} y_{ij} \geq 1 \text{ pour tout } j \in V \text{ [Domination]} \\
 & \quad x_i \geq y_{ij} d_{ij} \text{ pour tous } i \neq j \text{ avec } i, j \in V \text{ [Chaînage]} \\
 & \quad y_{ij} \in \{0, 1\} \text{ avec } y_{ii} = 0 \text{ et } i, j \in V \\
 & \quad x_i \geq 0 \text{ entier, et } i \in V
 \end{aligned}$$

Les contraintes de domination forcent chaque sommet à être broadcast-dominant ($x_j \geq 1$), ou alors à être broadcast-dominé par au moins un autre sommet. Les contraintes de chaînage permettent à y_{ij} de prendre la valeur 1 uniquement lorsque x_i est assez grand pour broadcast-dominer j .

Ce programme linéaire admet n contraintes de domination et $n^2 - n$ contraintes de chaînage

pour un nombre total de n^2 contraintes. Il y a $n^2 - n$ variables binaires et n variables entières. Dans la formulation mixte, on n'a eu besoin d'aucune borne supérieure sur les x_i ; cependant, la performance de calcul est généralement améliorée en incluant une borne supérieure [19] . Le rayon du graphe est un choix naturel pour cette borne puisqu'un sommet central du graphe ayant ce poids, peut broadcast-dominer tout le graphe.

Programmation linéaire en nombres entiers à variables bivalentes

Le problème de broadcast domination peut également être formulé comme programme linéaire en nombres entiers à variables bivalentes.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et f un broadcast sur G . On définit la variable x_{ik} comme étant égale à 1 si i est de poids k , et 0 sinon. L'ensemble des k valeurs possibles, à l'exception de 0, est $K = \{1, 2, \dots, rad(G)\}$ avec $x_{i0} = 1$ (ce qui signifie que i est de poids nul). Enfin, les y_{ij} sont définis exactement comme pour la IP formulation mixte du précédent paragraphe. On obtient alors la formulation binaire suivante :

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i \in V} \sum_{k \in K} k \cdot x_{ik} \\
& \text{sujet à : } \sum_{k \in K} x_{jk} + \sum_{i \neq j} y_{ij} \geq 1 \quad \forall j \in V \text{ [Domination]} \\
& \sum_{k \in K} k \cdot x_{ik} \geq y_{ij} d_{ij} i \neq j \quad \forall i, j \in V \times V, i \neq j \text{ [Chaînage]} \\
& \sum_{k \in K \cup \{0\}} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \text{ [Broadcast]} \\
& x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, k \in K \cup \{0\} \\
& y_{ij} \in \{0, 1\} \text{ avec } y_{ii} = 0, i, j \in V
\end{aligned}$$

Les contraintes de domination et de chaînage jouent le même rôle que dans la formulation mixte. Les contraintes de broadcast forcent chaque sommet à avoir exactement une seule valeur associée $f(v)$.

Ce programme linéaire admet n contraintes de domination, $n^2 - n$ contraintes de chaînage et n contraintes de broadcast pour un total de $n^2 + n$ contraintes. Il y a $n \cdot (rad(G) + 1)$ variables x_{ik} et $n^2 - n$ variables y_{ij} , toutes bivalentes. Puisque $rad(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, le nombre total de variables ne

peut pas excéder $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)n + n^2 - n = n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n^2 \leq \frac{3}{2}n^2$.

Chapitre 3

Prismes complémentaires

Nous présentons dans ce chapitre quelques travaux publiés sur la domination d'une famille des graphes connus sous le nom de prismes complémentaires.

3.1 Produit complémentaire de deux graphes

La notion de *produit complémentaire* a été introduite par Haynes, Henning, Slater et van der Merwe [16]. Soit $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ deux graphes avec $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Soit R un sous-ensemble de $V(G)$ et S un sous-ensemble de $V(H)$. Le produit complémentaire est le graphe noté par $G(R) \square H(S)$ dont l'ensemble de sommets est $V(G(R) \square H(S)) = \{(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$ et l'arrête $(u_i, v_j)(u_h, v_k) \in E(G(R) \square H(S))$ si une des conditions suivantes est satisfaite.

1. si $i = h, u_i \in R$, et $v_j v_k \in E(H)$, ou si $i = h, u_i$ n'appartient pas à R et $v_i v_k$ n'appartient pas à $E(H)$ ou
2. si $j = k, v_j \in S$, et $u_i v_h \in E(G)$, ou si $j = k, v_j$ n'appartient pas à S et $u_i u_h$ n'appartient pas à $E(G)$

Autrement dit, pour tout sommet $u_i \in V(G)$, on remplace u_i par une copie de H si $u_i \in R$, et par une copie de son complémentaire $\overline{H}$ si u_i n'appartient pas à R , on remplace aussi chaque

sommet v_j par une copie de G si $v_j \in S$ et une copie de $\overline{G}$ si v_j n'appartient pas à S .

Si $R = V(G)$ (resp, $S = V(H)$), on écrit simplement $G \square H(S)$ (resp, $G(R) \square H$). Ainsi $G \square H(S)$ est le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet v de H par une copie de G si $v \in S$ et par une copie de $\overline{G}$ si v n'appartient pas à S , et en remplaçant chaque sommet u_i par une copie de H .

D'où, si $R = V(G)$ et $S = V(H)$, le produit complémentaire $G(V(G)) \square H(V(H)) = G \square H$ est simplement le produit cartésien $G \square H$.

Le *prisme complémentaire*, noté $G\overline{G}$, est le produit complémentaire $G \square K_2(S)$ avec $|S| = 1$.

Soit G un graphe et $\overline{G}$ le complémentaire de G . Le *prisme complémentaire* du graphe G est le graphe $G\overline{G}$ avec $V(G\overline{G}) = V(G) \cup V(\overline{G})$ comme ensemble de sommets et $E(G\overline{G}) = E(G) \cup E(\overline{G}) \cup \{u_i \overline{u}_i / u_i \in V(G) \text{ et } \overline{u}_i \in V(\overline{G})\}$ comme ensemble d'arêtes.

Le prisme complémentaire du graphe G est donc formé par l'union disjointe de G et $\overline{G}$ en ajoutant des arêtes qui forment un couplage parfait entre les sommets correspondants de G et $\overline{G}$ (voire Figure 3.1).

Pour simplifier la rédaction sur les prismes complémentaires, nous écrirons G et $\overline{G}$ pour désigner le sous graphe induit par G et $\overline{G}$, respectivement, dans $G\overline{G}$. Aussi pour un sommet v de G , on désigne le sommet correspondant dans $\overline{G}$ par $\overline{v}$, et pour un sous ensemble $S \subseteq V(G)$, on désigne par $\overline{S}$ l'ensemble de sommets correspondants dans $V(\overline{G})$.

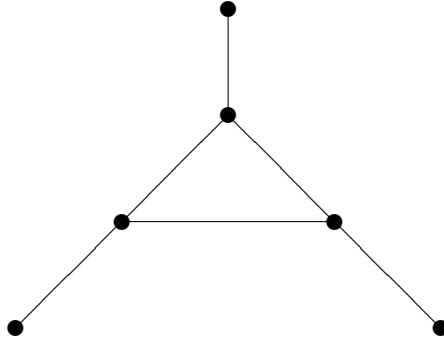


FIGURE 3.1 – Prisme complémentaire $K_3\overline{K}_3$

Observation 3.1. [16] Soit G un graphe d'ordre n . alors

1. $G\overline{G}$ est d'ordre $2n$,
2. Pour toute paire de sommets v et $\bar{v}$, $d_G(v) + d_G(\bar{v}) = n + 1$,
3. $\delta(G\overline{G}) = \min\{\delta(G) + 1, \delta(\overline{G}) + 1\} = \min\{\delta(G) + 1, n - \Delta(G)\}$ et
4. $\Delta(G\overline{G}) = \max\{\Delta(G) + 1, \Delta(\overline{G}) + 1\} = \max\{\Delta(G) + 1, n - \delta(G)\}$.

Théorème 3.1. [16] Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$,

$$\text{diam}(G\overline{G}) = \begin{cases} 2 & \text{si } \text{diam}(G) = \text{diam}(\overline{G}) = 2, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un graphe G est dit 2-diamètre minimal si $\text{diam}(G) = \text{diam}(\overline{G}) = 2$ et la suppression de toute arête de G augmente la valeur du diamètre.

Théorème 3.2. [16] Si $\text{diam}(G) = \text{diam}(\overline{G}) = 2$, alors $G\overline{G}$ est 2-diamètre minimal.

Pour un graphe connexe G et un sommet $u \in V(G)$, la distance $\text{dist}(u)$ est $\sum_{v \in V(G)} d(u, v)$ et la distance totale $\text{dist}(G)$ est la somme des distances $d(u, v)$ sur toutes les paires de sommets u, v de G c'est à dire $\text{dist}(G) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} \text{dist}(u)$.

Théorème 3.3. [16] *Pour tout graphe G d'ordre n , $\text{dist}(G\bar{G}) \leq 4n^2 - 3n$ avec égalité si et seulement si $G \in \{K_n, \bar{K}_n\}$.*

Soit G un graphe. La *circonférence* de G est la longueur maximale de ses cycles. Un graphe G est *c-pancyclic*, pour un nombre entier positif c s'il contient les cycles de toutes les longueurs l possibles avec $3 \leq l \leq c$.

Théorème 3.4. [20] *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 5$, alors $T\bar{T}$ est $(n+2)$ -pancyclic. De plus, la circonférence de $T\bar{T}$ prend la valeur $n+2$ si et seulement si $T = K_{1,n-1}$.*

Le problème de décision [25] associé au problème d'Hamiltoniaticité des prismes complémentaires est donné par :

Hamiltoniaticité des prismes complémentaires

Donnée : $G = (V, E)$ Un graphe .

Question : $G\bar{G}$ admet-il un cycle hamiltonian ?

Lemme 3.5. [20] *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3\Delta(G)(3\Delta(G) + 2) + 1$ et $\delta(G) \geq n - 1 - \Delta(G)$ et pour tout couplage M de G , il existe un cycle hamiltonian C de G avec $M \subseteq E(C)$.*

Théorème 3.6. [20] *Le problème de décision associé au problème d'Hamiltoniaticité des prismes complémentaires $G\bar{G}$ tels que l'ordre n de G vérifie $n \geq 3\Delta(3\Delta + 2) + 1$ peut être résolu en temps polynomial.*

3.2 Domination dans les prismes complémentaires

3.2.1 Domination et domination totale dans les prismes complémentaires

La *couronne* d'un graphe G , notée $C_r(G)$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de G . Le graphe tK_2 est le graphe formé de l'union de t copies disjointes de K_2 .

Haynes, Henning, et Van der Merwe ont étudié la domination et la domination totale dans les prismes complémentaires. Ils ont obtenu des valeurs exactes des paramètres $\gamma(G\bar{G})$ et $\gamma_t(G\bar{G})$ pour différentes classes de graphes.

Proposition 15. [17]

1. Si $G = K_n$, alors $\gamma(G\bar{G}) = n$,
2. Si $G = tK_2$, alors $\gamma(G\bar{G}) = t + 1$,
3. Si $G = C_r(K_t)$ et $t \geq 3$, alors $\gamma(G\bar{G}) = \gamma(G) = t$,
4. Si $G = C_n$ et $n \geq 3$, alors $\gamma(G\bar{G}) = \lceil \frac{n+4}{3} \rceil$,
5. Si $G = P_n$ et $n \geq 2$, alors $\gamma(G\bar{G}) = \lceil \frac{n+3}{3} \rceil$.

Proposition 16. [17]

1. Si $G = K_n$, alors $\gamma_t(G\bar{G}) = n$.
2. Si $G = tK_2$, alors $\gamma_t(G\bar{G}) = n = 2t$.
3. Si $G = C_r(K_t)$ et $t \geq 3$, alors $\gamma_t(G\bar{G}) = \gamma_t(G) = t$.
4. Si $G \in \{C_n, P_n\}$ et $n \geq 5$, alors

$$\gamma_t(G\bar{G}) = \begin{cases} \gamma_t(G) & \text{si } n \equiv 2(\text{mod } 4) \\ \gamma_t(G) + 2 & \text{si } G = C_n \text{ et } n \equiv 0(\text{mod } 4) \\ \gamma_t(G) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Haynes et al [17] ont caractérisé les graphes G pour lesquels le nombre de domination $\gamma(G\bar{G})$ ou le nombre de domination totale $\gamma_t(G\bar{G})$ est petit.

Proposition 17. [17] Soit G un graphe d'ordre n . Alors,

1. $\gamma(G\bar{G}) = 1$ si et seulement si $G = K_1$.
2. $\gamma(G\bar{G}) = 2$ si et seulement si $n \geq 2$ et G possède un ensemble de sommets qui domine $V(G)$ ou $\bar{G}$ possède un ensemble de sommets qui domine $\bar{V}(G)$

Proposition 18. [17] *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ avec $|E(G)| \geq |E(\overline{G})|$. Alors,*

1. $\gamma_t(G\overline{G}) = 2$ si et seulement si $G = K_2$.
2. $\gamma_t(G\overline{G}) = 3$ si et seulement si $n \geq 3$ et $G = K_3$ ou G possède un ensemble de sommets qui domine $V(G)$ ou $\overline{G}$ possède un ensemble de sommets qui domine $V(\overline{G})$

La proposition suivante donne des bornes sur le nombre de domination $\gamma(G\overline{G})$.

Proposition 19. [17] *Pour tout graphe G , $\max\{\gamma(G), \gamma(\overline{G})\} \leq \gamma(G\overline{G}) \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G})$.*

Les mêmes bornes restent valables pour la domination totale.

Proposition 20. [17] *Pour tout graphe G , $\max\{\gamma_t(G), \gamma_t(\overline{G})\} \leq \gamma_t(G\overline{G}) \leq \gamma_t(G) + \gamma_t(\overline{G})$.*

Enfin, Haynes et al [17] ont caractérisé les graphes G pour lesquelles $\gamma(G\overline{G}) = \max\{\gamma(G), \gamma(\overline{G})\}$ et $\gamma_t(G\overline{G}) = \max\{\gamma_t(G), \gamma_t(\overline{G})\}$.

Un sous-ensemble P de sommets dans un graphe G est un packing ouvert si les voisinages ouverts des sommets dans P sont deux à deux disjointes.

Proposition 21. [17] *Un graphe G satisfait $\gamma(G\overline{G}) = \gamma(G) \geq \gamma(\overline{G})$ si et seulement si G possède un sommet isolé ou bien il existe un packing P de G tel que $|P| \geq 2$ et $\gamma(G - P) = \gamma(G) - |P|$.*

Proposition 22. [17] *Soit G un graphe tel que ni G ni $\overline{G}$ ne possède un sommet isolé. Alors $\gamma_t(G\overline{G}) = \gamma_t(G) \geq \gamma_t(\overline{G})$ si et seulement si $G = \frac{n}{2}K_2$ ou bien il existe un packing ouvert $P = P_1 \cup P_2$ dans G satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $|P| \geq 2$,
2. $P_1 \cap P_2 = \emptyset$,
3. si $P_1 \neq \emptyset$, alors P_1 est un packing dans G ,
4. si $P_1 = \emptyset$, alors $|P| \geq 3$ ou $G[P] = \overline{K_2}$,
5. $\gamma_t(G - N[P_1] - P_2) = \gamma_t(G) - 2|P_1| - |P_2|$.

Dans [17], Haynes et al ont déterminé une borne supérieure pour le nombre de domination d'un prisme complémentaire d'un graphe en termes de l'ordre du graphe G , du nombre de domination de G ou de $\overline{G}$.

Théorème 3.7. [17] *Si G est un graphe d'ordre n , alors*

$$\gamma(G\overline{G}) \leq \gamma + \frac{n}{\gamma} - 1.$$

Le théorème suivant donne une relation entre $\gamma(G)$ et $\gamma(\overline{G})$.

Théorème 3.8. [21] *Si G est un graphe d'ordre n et si $G\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2.$$

On déduit à partir de la Proposition 19 et du Théorème 3.8 le résultat :

Proposition 23. [16] *Si G est un graphe d'ordre n et si G et $\overline{G}$ sont sans sommets isolés, alors*

$$\gamma(G\overline{G}) \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2.$$

Haynes et al [16] ont déterminé des bornes sur le nombre de domination totale de $G\overline{G}$ qui dépendent du degré minimum et du nombre de domination total de G ou $\overline{G}$.

Théorème 3.9. [16] *Soit G un graphe non trivial d'ordre n , tel que $\text{diam}(G) \leq \text{diam}(\overline{G})$.*

1. $\gamma(G\overline{G}) = \gamma_t(G\overline{G}) = 2$, si $\text{diam}(G) = 1$,
2. $\gamma(G\overline{G}) \leq \min\{\delta(G) + 1, \delta(\overline{G}) + 1\}$, si $\text{diam}(G) = \text{diam}(\overline{G}) = 2$,
3. $\gamma_t(G\overline{G}) \leq \min\{\delta(G) + 2, \delta(\overline{G}) + 2\}$, si $\text{diam}(G) = \text{diam}(\overline{G}) = 2$,
4. $\gamma(G\overline{G}) \leq \min\{\delta(G) + 1, \gamma(\overline{G}) + 2\}$, si $\text{diam}(G) = 2$, et $\text{diam}(\overline{G}) \geq 3$,
5. $\gamma_t(G\overline{G}) \leq \min\{\delta(G) + 2, \gamma_t(\overline{G}) + 2\}$, si $\text{diam}(G) = 2$, et $\text{diam}(\overline{G}) \geq 3$, et
6. $\gamma(G\overline{G}) \leq \gamma_t(G\overline{G}) \leq 4$, sinon.

Corollaire 12. [16] *Si $e(v) = 2$ dans G , alors*

$$\gamma(G\overline{G}) \leq \deg(v) + 2 \quad \text{et} \quad \gamma_t(G\overline{G}) \leq \deg(v) + 2.$$

3.2.2 Domination stable

Nous nous intéressons dans cette section à la valeur exacte du nombre de domination stable d'un prisme complémentaire $G\overline{G}$ d'un graphe G .

Proposition 24. [14]

1. Si $G = P_n$ et $n \geq 2$, alors $i(G\overline{G}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.
2. Si $G = tK_2$, alors $i(G\overline{G}) = t + 1$.
3. Si $G = C_r(K_t)$ et $t \geq 3$, alors $i(G\overline{G}) = t + 1$.
4. Si $G = C_n$ et $n \geq 5$, alors $i(G\overline{G}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2$.
5. Si $K_{r,s}$ avec $2 \leq r \leq s$, alors $i(G\overline{G}) = r + 1$.
6. Si G est la subdivision de la star $K_{1,t}$, alors $i(G\overline{G}) = t + 1$.

Dans la proposition suivante Góngora, Haynes, et Jum [14] ont caractérisé les graphes pour lesquels $i(G\overline{G})$ est petit.

Proposition 25. [14] Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G)$. Alors

1. $i(G\overline{G}) = 1$ si et seulement si $G = K_1$.
2. $i(G\overline{G}) = 2$ si et seulement si $\delta(G) = 1$ et $\delta(\overline{G}) \leq 1$.

Le nombre de stabilité du prisme complémentaire d'un graphe G diffère au plus d'une unité de la somme des nombres de stabilité de G et de $\overline{G}$.

Théorème 3.10. [14] Pour tout graphe G ,

$$\beta_0(G) + \beta_0(\overline{G}) - 1 \leq \beta_0(G\overline{G}) \leq \beta_0(G) + \beta_0(\overline{G}).$$

Notons que les bornes de $\beta_0(G\overline{G})$ peuvent être atteintes. En effet, le graphe complet K_n atteint la borne inférieure, et la couronne du graphe complet $K_{\frac{n}{2}}$ atteint la borne supérieure. De plus, Haynes et al ont caractérisé les graphes pour lesquels la borne supérieure est atteinte.

Théorème 3.11. [14] *Un graphe G vérifie $\beta_0(G\overline{G}) = \beta_0(G) + \beta_0(\overline{G})$ si et seulement s'il existe deux ensembles de sommets disjoint S et T dans $V(G)$ tels que S est un ensemble stable maximum et T induit une clique maximum dans G .*

Dans ce qui suivra, nous présentons des bornes inférieure et supérieure du nombre de domination stable d'un prisme complémentaire en termes du nombre de domination stable de G et des degrés maximum et minimum de G et de $\overline{G}$.

Théorème 3.12. [14] *Pour tout graphe G , $\max\{i(G), i(\overline{G})\} \leq i(G\overline{G})$.*

Le Théorème suivant caractérise les graphes qui atteignent la borne inférieure du Théorème 3.12

Théorème 3.13. [14] *Un graphe G satisfait $i(G\overline{G}) = i(G) \geq i(\overline{G})$ si et seulement si G possède un sommet isolé.*

Théorème 3.14. [14] *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$. Alors*

$$i(G) \leq 2(n-1) - \max\{\Delta(G), \Delta(\overline{G})\}.$$

L'union d'un dominant stable de G avec celui de $\overline{G}$ n'est pas forcément un dominant stable de $G\overline{G}$

Lemme 3.15. [14] *Pour tout graphe G , soit I_1 un ensemble de sommets dominant stable dans G et soit I_2 un ensemble de sommets dominant stable dans $\overline{G}$. Alors $I_1 \cup I_2$ n'est pas un ensemble dominant stable de $G\overline{G}$ si et seulement s'il existe un unique sommet $v \in I_1$ tel que $\bar{v} \in I_2$.*

Notons que la somme $i(G) + i(\overline{G})$ n'est pas une borne supérieure pour $i(G\overline{G})$. Mieux encore, la différence $i(G\overline{G}) - (i(G) + i(\overline{G}))$ peut être arbitrairement large.

Théorème 3.16. [14] *Pour un graphe G et son prisme complémentaire $G\overline{G}$, la différence $i(G\overline{G}) - (i(G) + i(\overline{G}))$ peut être arbitrairement large.*

Une autre borne supérieure de $i(G\overline{G})$ en fonction de $i(G)$ et $\delta(G)$ est donné par le résultat qui suit :

Théorème 3.17. [14] *Si G est un graphe de degré minimum $\delta(G)$ et sans sommet isolé, alors*

$$i(G\overline{G}) \leq i(G) + \delta(G).$$

Pour les graphes d'ordre n ayant un sommet pendant et de degré maximum $\Delta(G) < n - 1$, on a la valeur exacte de $i(G\overline{G})$.

Théorème 3.18. [14] *Si G est un graphe de degré minimum $\delta(G) = 1$ et $\delta(\overline{G}) \geq 1$, alors*

$$i(G\overline{G}) = i(G) + 1.$$

Notons que la réciproque du Théorème 3.18 n'est pas toujours vraie. Considérons par exemple, le graphe $G = C_5$ de degré minimum $\delta(G) = 2$. Le graphe $G\overline{G}$ est le graphe de Petersen et donc sans sommets isolés. On a $\delta(G) = \delta(\overline{G}) = 2$, $i(G) = 2$ et $G\overline{G}$ est le graphe de Petersen avec $i(G\overline{G}) = 3 = i(G) + 1$.

3.2.3 Domination double

Dans cette partie, nous présentons des résultats sur le nombre de domination double des prismes complémentaires.

Théorème 3.19. [9] *Si $G = C_n$ et $n \geq 5$, alors $\gamma_{\times 2}(G\overline{G}) \leq 2 + \gamma_{\times 2}(G)$.*

Théorème 3.20. [9] *Si G une star avec $n \geq 3$, alors $\gamma_{\times 2}(G\overline{G}) = n + 1$.*

Théorème 3.21. [9] *Si $G = K_n$, alors $\gamma_{\times 2}(G\overline{G}) = 2n$.*

Théorème 3.22. [9] *Si $G = P_n$ et $n \geq 4$, alors $\gamma_{\times 2}(P_n\overline{P}_n) \leq 2 + \gamma_{\times 2}(P_{n-2})$.*

Pour les graphes de petit nombre de domination double, on a les résultats suivant :

Théorème 3.23. [9] *Soit G un graphe d'ordre n . Alors $\gamma_{\times 2}(G\overline{G}) = 2$ si et seulement si $G = K_1$*

Théorème 3.24. [9] *Pour tout graphe non trivial G , $\gamma_{\times 2}(G\overline{G}) \geq 4$.*

Pour la borne inférieure du nombre de domination double en termes du nombre de domination double de G et de $\overline{G}$, on a le résultat suivant :

Théorème 3.25. [9] *Pour tout graphe G sans sommet isolé, $\max\{\gamma_{\times 2}(G), \gamma_{\times 2}(\overline{G})\} \leq \gamma_{\times 2}(G\overline{G}) \leq \gamma_{\times 2}(G) + \gamma_{\times 2}(\overline{G})$.*

La borne inférieure du Théorème 3.25 est atteinte, $\gamma_{\times 2}(G) = \gamma_{\times 2}(G\overline{G})$ pour $G \in \{P_7, P_{10}\}$.

Chapitre 4

Broadcasts dans les prismes complémentaires

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux invariants de broadcasts (de domination, d'indépendance, d'efficacité et de packing) dans les prismes complémentaires. Nous déterminons soit des valeurs exactes soit des bornes dans le cas général ou pour des classes particulières de graphes. Nous caractérisons aussi les graphes qui atteignent la borne supérieure pour le paramètre Γ_{eb} .

4.1 Nombre de broadcast domination et nombre d'indépendance

Théorème 4.1. [6] *Pour tout graphe G , si $rad(G) \geq 3$, alors $diam(\overline{G}) \leq 2$.*

Dans le Théorème 4.2., nous présentons la valeur exacte du nombre de broadcast domination dans les prismes complémentaires quand G est un graphe quelconque.

Théorème 4.2. [6] *Pour tout graphe G , $\gamma_b(G\overline{G}) = 2$.*

Pour le nombre de broadcast indépendance $\beta_b(G\overline{G})$, nous avons $2n$ comme borne supérieure.

Théorème 4.3. [6] *Si G est un graphe tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$. Alors $\beta_b(G\overline{G}) \leq 2n$.*

Caractérisons les graphes pour lesquels la borne du Théorème 4.3. est atteinte.

Observation 4.1. [6] Si G un graphe tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$, alors $\beta_b(G\overline{G}) = 2n$ si et seulement si $G = K_n$ et $n \geq 2$, ou G est un stable.

Théorème 4.4. [6] *Si G est un graphe tel que $\text{diam}(G) = 2$, alors $\beta_b(G\overline{G}) = \beta_0(G\overline{G})$*

Dans [6], I.Boufelgha a donné la valeur exacte de $\beta_b(G\overline{G})$ quand $G \in \{P_n, C_n, A_{k,2}, K_{m,n}\}$.

Commençons par la chaîne P_n ,

Proposition 26. [6] *Pour tout entier positif n , on a*

$$\beta_b(P_n\overline{P}_n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \leq 5, \\ 5 & \text{si } n = 6, \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{si } n \geq 7. \end{cases}$$

Pour le cycle C_n , on a

Proposition 27. [6] *Pour tout entier positif $n \geq 5$,*

$$\beta_b(C_n\overline{C}_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 & \text{si } n \leq 5 \leq 11, \\ 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour l'arbre binaire complet $A_{n,2}$ de profondeur n , on a :

Proposition 28. [6] *Si $A_{n,2}$ est un arbre binaire complet, alors*

$$\beta_b(A_{n,2}\overline{A}_{n,2}) = \begin{cases} \frac{2^{n+2}+2}{3} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{2^{n+2}+1}{3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Concernant le graphe biparti complet $K_{m,n}$, on a le résultat suivant :

Proposition 29. [6] *pour tout entiers positifs m et n ,*

$$\beta_b(K_{m,n}\overline{K_{m,n}}) = \begin{cases} \max\{m,n\} + 1 & \text{si } \max\{m,n\} \geq 4, \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 4.5. *Pour tout graphe non trivial G , $i_b(G\overline{G}) = 2$.*

Preuve : Puisque $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$ [10] pour tout graphe G et $\gamma_b(G\overline{G}) = 2$ [6], on a directement $i_b(G\overline{G}) \geq 2$. Pour prouver l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de construire un broadcast indépendant de coût égal à 2. Pour ce faire, nous distinguons deux cas.

Cas 1 : $\text{diam}(G\overline{G}) = 2$.

Soit v un sommet périphérique et soit f_b une fonction broadcast définie sur $G\overline{G}$ par :

$$f_b(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f_b est un broadcast indépendant maximal sur $G\overline{G}$. En effet, pour tout $\bar{v}_j \in V(\overline{G})$,

$$d(v, \bar{v}_j) = \begin{cases} d(v, v_j) + d(v_j, \bar{v}_j) & \text{si } d(v, v_j) = 1, \\ d(v, \bar{v}) + d(\bar{v}, \bar{v}_j) & \text{si } d(v, v_j) = 2. \end{cases}$$

C.à.d $d(v, \bar{v}) = 2$. De même, comme $\text{diam}(G\overline{G}) = 2$, alors $d(v, v_i) \leq 2, \forall v_i \in V(G\overline{G})$. Il s'ensuit, f_b est un broadcast indépendant maximal sur $G\overline{G}$ et $i_b(G\overline{G}) \leq f_b(v) = 2$.

Cas 2 : $\text{Diam}(G\overline{G}) = 3$.

Si $\text{rad}(G) \leq 2$, soit v un sommet central de G . Considérons la fonction broadcast g_b définie sur $G\overline{G}$ par :

$$g_b(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction g_b est un broadcast indépendant maximal sur $G\overline{G}$. En effet, pour tout $\overline{x}_j \in V(\overline{G})$, $\overline{x}_j = v$, $d(v, \overline{x}_j) = 2$ car :

$$d(v, \overline{x}_j) = \begin{cases} d(v, x_j) + d(x_j, \overline{x}_j) & \text{si } d(v, x_j) = 1, \\ d(v, \overline{v}) + d(\overline{v}, \overline{x}_j) & \text{si } d(v, x_j) = 2. \end{cases}$$

C.à.d $d(v, \overline{x}_j) = 2$. Comme $rad(G) \leq 2$, on a aussi $d(v, x_j) \leq 2 \forall x_j \in V(G)$. On déduit alors que $\forall x_j \in V(G\overline{G})$, $d(v, x_j) \leq 2$.

Si $rad(G) \geq 3$, alors d'après [6], $diam(\overline{G}) \leq 2$:

Soit v' un sommet diamétral de $\overline{G}$. Considérons la fonction broadcast h_b définie sur $G\overline{G}$ comme suit :

$$h_b(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = v', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction h_b est un broadcast indépendant maximal sur $G\overline{G}$. En effet, pour tout $v_j \in V(G)$, $d(v', v_j) = 2$ car :

$$d(v', v_j) = \begin{cases} d(v', \overline{v}_j) + d(\overline{v}_j, v_j) & \text{si } v' \text{ est adjacent à } \overline{v}_j, \\ d(v', v) + d(v, v_j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

C.à.d $d(v', v_j) = 2$.

En conclusion, $i_b(G\overline{G}) \leq h_b(x) = 2$ et par suite, $i_b(G\overline{G}) = 2$.

4.2 Nombre de broadcast packing

Dans le Théorème 4.6., nous présentons une valeur exacte pour le nombre de broadcast packing inférieur p_b dans les prismes complémentaires pour un graphe quelconque G .

Théorème 4.6. *Pour tout graphe non trivial G , $p_b(G\overline{G}) = 2$.*

preuve : Puisque $p_b(G) \leq \gamma_b(G)$ [10] pour tout graphe G et $\gamma_b(G\overline{G}) = 2$ [6], on peut affirmer que $p_b(G\overline{G}) \leq 2$.

Montrons que $p_b(G\overline{G}) = 2$. Supposons que ce n'est pas le cas et qu'on a $p_b(G\overline{G}) = 1$.

Cas 1 : Soit v un sommet de $V(G)$ et soit f_b une fonction broadcast définie sur $G\overline{G}$ par :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $f_b(v) = 1$, alors $\bar{v}$ est dominé par v et tous les sommets adjacents à $\bar{v}$ sont de coût égal à 0. Puisque G est non trivial, il existe un sommet $\bar{v}_i \in \{V(\overline{G}) - \bar{v}\}$ tel que $\forall \bar{v}_i \in V(\overline{G})$, $d(v, \bar{v}_i) \leq 2$ car :

$$d(v, \bar{v}_i) = \begin{cases} d(v, v_i) + d(v_i, \bar{v}_i) & \text{si } v \text{ est adjacent à } v_i, \\ d(v, \bar{v}) + d(\bar{v}, \bar{v}_i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f_b est une fonction broadcast packing non maximal car on peut remplacer $f_b(v) = 1$ par $f_b(v) = 2$ en gardant la propriété de packing. Il s'ensuit alors que G se réduit à un sommet v , ce qui est impossible car G est non trivial.

Cas 2 : Soit $\bar{v}$ un sommet de $V(\overline{G})$ et soit g_b une fonction broadcast définie sur $G\overline{G}$ par :

$$g_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \bar{v}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $g_b(\bar{v}) = 1$, alors v est dominé par $\bar{v}$ et tous les sommets adjacents à v sont de coût égal à 0. Puisque G est non trivial, il existe un sommet $v_i \in \{V(G) - v\}$ tel que $\forall v_i \in V(G)$, $d(\bar{v}, v_i) \leq 2$

car :

$$d(\bar{v}, v_i) = \begin{cases} d(\bar{v}, \bar{v}_i) + d(\bar{v}_i, v_i) & \text{si } \bar{v} \text{ est adjacent à } \bar{v}_i, \\ d(\bar{v}, v) + d(v, v_i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction g_b est une fonction broadcast packing non maximal car on peut remplacer $f_b(\bar{v}) = 1$ par $f_b(\bar{v}) = 2$ en gardant la propriété de packing. Il s'ensuit alors que G se réduit à un sommet v , ce qui est impossible car G est non trivial.

En conclusion, $p_b(G\bar{G}) = 2.$ □

Déterminons la valeur exacte de $P_b(G\bar{G})$ quand $G \in \{P_n, C_n, K_{m,n}, K_n, A_{n,k}\}$

Commençons par la chaîne P_n . Si $n = 1$ alors $P_b(P_1) = 1$.

Proposition 30. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$P_b(P_n\bar{P}_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \leq 6, \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{si } n \geq 7. \end{cases}$$

Preuve :

Soit $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une chaîne d'ordre n . Si $n \leq 6$, il est facile de remarquer que $P_b(P_n\bar{P}_n) = 3$. Plus précisément $D_n = \{v_1\}$ sont des P_b -broadcast de P_n pour $n \leq 6$. Supposons maintenant que $n \geq 7$ et soit $k = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$. Pour un sous ensemble de sommets de G , soit $D \subset V(G)$ tel que $D = \{x_i \in V(G) : i = 3t + 1, t \in \mathbb{Z}^+\}$. Considérons la fonction broadcast f_b définie sur le graphe $P_n\bar{P}_n$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_b(P_n\bar{P}_n) = k + 1 = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor = \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

f_b est une fonction broadcast packing maximal et $P_b(P_n\bar{P}_n) \geq f_b(P_n\bar{P}_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ si $n \geq 7$.

Soit g_b un P_b -broadcast. Notons qu'il n'existe aucun sommet $\bar{v} \in \bar{P}_n$ tel que $g_b(\bar{v}) \geq 2$ car si un tel sommet existe, il dominerait $P_n \bar{P}_n$ et on aurait $P_b(P_n \bar{P}_n) \leq 3$ ce qui est impossible car $P_b(P_n \bar{P}_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ et $n \geq 7$. Ainsi, $\forall \bar{v} \in V(\bar{P}_b), g_b(\bar{v}) \leq 1$.

Par ailleurs, il existe au maximum un sommet $\bar{v}_i$ tel que $g_b(\bar{v}_i) = 1$, et donc ce sommet f_b -domine tous les sommets de l'ensemble $D = \{V(\bar{P}_n) - \{\bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}\}, v_i\}$. Puisque g_b est un broadcast packing, tous les sommets qui sont à distance 2 du sommet $\bar{v}_i$ sont de coût égal à 0. Pour tout sommet $v \in V(P_n \bar{P}_n)$, la distance entre v et $\bar{v}_i$ est égale à la longueur de la chaîne C définie par :

$$C = \begin{cases} \{v\bar{v}_i\} & \text{si } v \in D, \\ \{vv_i, v_i\bar{v}_i\} & \text{si } v \in \{v_{i-1}, v_{i+1}\}, \\ \{vv_j, v_j\bar{v}_i\} & \text{si } v \in V(P_n) - \{v_{i-1}, v_{i+1}, v_i\} \text{ ou } v_j \in D, \\ \{vv_j, v_j\bar{v}_i\} & \text{si } v \in \{v_{i-1}, v_{i+1}\} \text{ ou } v_j \in D. \end{cases}$$

Comme $l(C) \leq 2$, alors $\forall v \in V(P_n \bar{P}_n) - \bar{v}_i, g_b(v) = 0$. D'où $P_b(P_n \bar{P}_n) = 1$ ce qui est impossible. Ainsi $\forall \bar{v} \in V(\bar{P}_n), g_b(\bar{v}) = 0$ et $P_b(P_n \bar{P}_n) = P_b(P_n)$. On déduit alors que chaque triplet de sommets $v_{3i+1}v_{3i+2}v_{3i+3}$ $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor$ doit vérifier $g_b(v_{3i+1}) + g_b(v_{3i+2}) + g_b(v_{3i+3}) \leq 1$. Cette dernière inégalité conduit à la relation $P_b(P_n \bar{P}_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ pour tout entier $n \geq 7$. $\square$

Proposition 31. *Pour tout entier n , on a*

$$P_b(C_n \bar{C}_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 5, \\ 3 & \text{si } n \leq 8 \text{ et } n \neq 5, \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

preuve :

Soit $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ une cycle d'ordre n . Il est facile de vérifier que $P_b(C_5 \bar{C}_5) = 2$ et pour $n \leq 8, n \neq 5$ $P_b(C_n \bar{C}_n) = 3$. Plus précisément $D_5 = \{\bar{v}_1\}$ et $D_n = \{v_1\}$ sont des P_b -broadcast de P_5 et P_n pour $n \leq 8, n \neq 5$. Supposons maintenant que $n \geq 9$ et soit $D = \{x_i \in V(G) : i =$

$3t + 1, t \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$. Considérons la fonction broadcast f_b définie sur le graphe $C_n \overline{C}_n$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_b(V(C_n \overline{C}_n)) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor.$$

f_b est une fonction broadcast packing maximal et donc $P_b(C_n \overline{C}_n) \geq f_b(C_n \overline{C}_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit g_b un P_b -broadcast. Notons qu'il n'existe aucun sommet $\bar{v} \in \overline{C}_n$ tel que $g_b(\bar{v}) \geq 2$ car si un tel sommet existe, il dominerait $C_n \overline{C}_n$ et on aurait $P_b(C_n \overline{C}_n) \leq 3$ ce qui est impossible car $P_b(C_n \overline{C}_n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ et $n \geq 9$. Ainsi, $\forall \bar{v} \in V(\overline{C}_n), g_b(\bar{v}) \leq 1$.

Par ailleurs, il existe au maximum un sommet $\bar{v}_i$ tel que $g_b(\bar{v}_i) = 1$, et donc ce sommet g_b -domine tous les sommets de l'ensemble D tel que $D = \{V(\overline{C}_n) - \{\bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}\}, v_i\}$. Puisque g_b est une fonction broadcast packing, tous les sommets qui sont à distance 2 du sommet $\bar{v}_i$ sont de coût égal à 0. Pour tout sommet $v \in V(C_n \overline{C}_n)$, la distance entre v et $\bar{v}_i$ est égale à la longueur de la chaîne C définie par :

$$C = \begin{cases} \{v\bar{v}_i\} & \text{si } v \in D, \\ \{vv_i, v_i\bar{v}_i\} & \text{si } \{v_{i-1}, v_{i+1}\}, \\ \{vv_j, v_j\bar{v}_i\} & \text{si } v \in V(C_n) - \{v_{i-1}, v_{i+1}, v_i\} \text{ ou } v_j \in D, \\ \{vv_j, v_j\bar{v}_i\} & \text{si } v \in \{v_{i-1}, v_{i+1}\} \text{ ou } v_j \in D. \end{cases}$$

Comme $l(C) \leq 2$, alors $\forall v \in V(C_n \overline{C}_n) - \bar{v}_i, g_b(v) = 0$. D'où $P_b(C_n \overline{C}_n) = 1$ ce qui est impossible. Ainsi $\forall \bar{v} \in V(\overline{C}_n), g_b(\bar{v}) = 0$ et $P_b(C_n \overline{C}_n) = P_b(C_n)$. On déduit alors que chaque triplet de sommets $v_{3i+1}v_{3i+2}v_{3i+3}$, $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor$ doit vérifier $g_b(v_{3i+1}) + g_b(v_{3i+2}) + f_b(v_{3i+3}) \leq 1$. Cette dernière inégalité conduit à la relation $P_b(C_n \overline{C}_n) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ pour tout entier $n \geq 9$. $\square$

Pour les graphes complets et les stables, on a $P_b(G\overline{G}) = 1$ si l'ordre de G vaut 1 et $P_b(G\overline{G}) = 3$

si l'ordre de G vaut 2.

Proposition 32. *Si G le graphe complet ou le stable d'ordre $n \geq 3$, alors $P_b(G\overline{G}) = n$.*

Preuve :

Nous ferons la preuve que pour les graphes complets K_n puisque le complémentaire de K_n est un stable d'ordre n .

Soit $G = K_n$ le graphe complet d'ordre n . Considérons la fonction broadcast f_b définie sur le graphe $G\overline{G}$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V(\overline{G}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\forall \overline{v}_1, \overline{v}_2 \in V(\overline{G}), d(\overline{v}_1, \overline{v}_2) = 3$, alors f_b est une fonction broadcast packing maximal. D'où $P_b(G\overline{G}) \geq f_b(G\overline{G}) = n$. Il reste à prouver l'inégalité dans l'autre sens. Pour cela, soit g_b un P_b -broadcast. Notons qu'il n'existe aucun sommet v de G tel que $g_b(v) = 2$ car si un tel sommet existe, il dominerait $G\overline{G}$ et on aurait $P_b(G\overline{G}) = 2$ ce qui est impossible. Ainsi, $\forall v \in V(G), g_b(v) \leq 1$.

Par ailleurs, s'il existe des sommets de $V(G)$ de poids non nuls, alors il en existerait au maximum un seul. En effet soit $v \in V(G)$ tel que $g_b(v) = 1$. Alors v g_b -domine tous les sommets de G . D'où $P_b(G\overline{G}) = 1$ ce qui est impossible. Il s'ensuit, $\forall v \in V(G), g_b(v) = 0$.

Maintenant s'il existe un sommet $\overline{v} \in \overline{G}$ tel que $g_b(\overline{v}) = 2$, alors $\overline{v}$ g_b -domine tous les sommets de G (resp. $\overline{G}$) et $P_b(G\overline{G}) = 2$ ce qui est impossible. D'où $\forall \overline{v} \in V(\overline{G}), g_b(\overline{v}) \leq 1$. Puisque $\overline{G}$ est un stable alors au maximum chaque sommet est de coût égal à 1. Donc $P_b(G\overline{G}) \leq n$ et f_b est une P_b -broadcast. $\square$

Proposition 33. *Pour tout entiers positifs m, n , on a : $P_b(K_{m,n}\overline{K}_{m,n}) = 3$*

Preuve : Soit $K_{m,n}$ le graphe biparti complet de bipartition V_m et V_n , $m, n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\overline{K}_{m,n}$ est constitué de l'union de deux cliques $\overline{V}_m$ et $\overline{V}_n$.

Soit $\bar{v}$ un sommet quelconque de $\bar{V}_n$. Considérons la fonction broadcast f_b définie sur le graphe $K_{m,n}\bar{K}_{m,n}$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in \bar{V}_n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\forall v \in V(K_{m,n}\bar{K}_{m,n})$, $d(v, \bar{v}) \leq 3$, alors f_b est une fonction broadcast packing maximal.

D'où

$$P_b(K_{m,n}\bar{K}_{m,n}) \geq f_b(V(K_{m,n}\bar{K}_{m,n})) = 3.$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit g_b un P_b -broadcast. Pour tout $v \in V(K_{m,n})$, $g_b(v) \neq 2$ car sinon le sommet v g_b -domine tous les sommets de $K_{m,n}\bar{K}_{m,n}$ et par suite, $P_b(K_{m,n}\bar{K}_{m,n}) = 2$, ce qui est impossible. D'où $\forall v \in V(K_{m,n})$, $g_b(v) \leq 1$.

Par ailleurs, s'il existe des sommets de $V(K_{m,n})$ de poids non nuls, alors il en existera au maximum un seul. En effet, soit $v \in V(V_n)$ tel que $g_b(v) = 1$. Puisque g_b est une fonction broadcast packing alors tous les sommets qui sont à distance 2 du sommet v sont de coût égal à 0. Pour tout sommet $v' \in V(K_{m,n}\bar{K}_{m,n})$ la distance entre v et v' est égale à la longueur de la chaîne C définie par :

$$C = \begin{cases} \{vv'\} & \text{si } v' \in V_m \text{ ou } v' = \bar{v}, \\ \{v\bar{v}, \bar{v}v'\} & \text{si } v' \in \bar{V}_n, \\ \{vv'', v''v'\} & \text{si } v' \in \{V_n, \bar{V}_m\} \text{ ou } v'' \in V_m. \end{cases}$$

Comme $l(C) \leq 2$ alors $P_b(K_{m,n}\bar{K}_{m,n}) = 1$ ce qui est impossible. D'où $\forall v \in V(K_{m,n})$, $g_b(v) = 0$.

Cas 1 : Il existe un sommet $\bar{v}$ de $V(\bar{K}_{m,n})$ de poids égal à 2.

Supposons sans perte de généralité que $\bar{v} \in \bar{V}_n$. Alors tous les sommets de $\bar{V}_n, V_n$ et V_m sont dominés sauf les sommets de $\bar{V}_m$ qui sont à distance égale à 3 du sommet $\bar{v}$. Le fait que V_m soit dominé alors tous les sommets de $\bar{V}_m$ sont de poids égale à 0. D'où $\forall v \in V(K_{m,n}) - \bar{v}$, $f_b(v) = 0$, et $P_b(K_{m,n}\bar{K}_{m,n}) = 2$, ce qui est impossible. On déduit alors qu'il n'existe pas de sommet de $\bar{K}_{m,n}$

qui soit de poids égal à 2.

Cas 2 : Il existe un sommet $\bar{v}$ de $V(\bar{K}_{m,n})$ de poids égal à 1.

Supposons sans perte de généralité que $\bar{v} \in \bar{V}_n$. Alors tous les sommets de $\bar{V}_n$ sont dominés. Comme les sommets de V_n et V_m sont à distance au plus égale à 2 du sommet $\bar{v}$ alors $\forall v \in \{\bar{V}_n, V_n, V_m\}, f_b(v) = 0$. Il reste alors les sommets de $\bar{V}_m$ qui sont à distance égale à 3 du sommet $\bar{v}$. Puisque $\bar{V}_m$ est un graphe complet alors il existe au maximum un sommet de coût égale à 1 dans $\bar{V}_m$. D'où $P_b(K_{m,n}\bar{K}_{m,n}) = 1 + 1 = 2$ ce qui est impossible. On déduit alors qu'il n'existe pas de sommet de $\bar{K}_{m,n}$ qui soit de poids égal à 1.

En conclusion $P_b(K_{m,n}\bar{K}_{m,n}) = 3$ et f_b est un P_b -broadcast. $\square$

Lemme 4.7. *Pour tout entiers positifs n, k , si f_b est un broadcast packing maximum sur l'arbre n -aire complet $A_{n,k}$, alors $P_b(A_{n,k}, \bar{A}_{n,k}) \geq 3$*

Preuve :

Soient n, k deux entiers positif et soit $G_{n,k} = A_{n,k}\bar{A}_{n,k}$. Si $n = 1$, alors $A_{n,k}$ est isomorphe au graphe biparti complet $K_{n,k}$ et donc $P_b(G_{1,k}) = 3$. Supposons maintenant que $n \geq 2$ et soient $N_0, \dots, N_n$ (resp. $\bar{N}_0, \dots, \bar{N}_n$) les niveaux de $A_{n,k}$ (resp. $\bar{A}_{n,k}$) dans $G_{n,k}$ où $N_i = v_1^i, \dots, v_{k^i}^i$ (resp. $\bar{N}_i = \bar{v}_1^i, \dots, \bar{v}_{k^i}^i$). Notons par $v_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, v_{kj}^{i+1}$ (resp. $\bar{v}_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, \bar{v}_{kj}^{i+1}$), l'ensembles des fils de v_j^i (resp. $\bar{v}_j^i$).

Considérons la fonction broadcast f_b définie par

$$f_b(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = \bar{v}_1^0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que la fonction f_b est un broadcast packing maximal. Pour tout $v \in V(A_{n,k})$ et pour tout $\bar{v} \in V(\bar{A}_{n,k})$, $d(\bar{v}_1^0, v) \leq 3$ et $d(\bar{v}_1^0, \bar{v}) \leq 3$ car

$$d(\bar{v}_1^0, v) = \begin{cases} d(\bar{v}_1^0, v) & \text{si } v = v_1^0, \\ d(\bar{v}_1^0, \bar{v}) + d(\bar{v}, v) & \text{si } v_1^0 \text{ n'est pas adjacent à } v, \\ d(\bar{v}_1^0, v_1^0) + d(v_1^0, v) & \text{si } v_1^0 \text{ est adjacent à } v, \end{cases}$$

et

$$d(\bar{v}_1^0, \bar{v}) = \begin{cases} d(\bar{v}_1^0, \bar{v}) & \text{si } v_1^0 \text{ n'est pas adjacent à } v, \\ d(\bar{v}_1^0, v_1^0) + d(v_1^0, v) + d(v, \bar{v}) & \text{si } v_1^0 \text{ est adjacent à } v. \end{cases}$$

Donc f_b est un broadcast packing maximal et par suite, $P_b(A_{n,k}, \bar{A}_{n,k}) \geq 3$. $\square$

Lemme 4.8. *Si f_b est un broadcast packing maximum sur $A_{n,k}\bar{A}_{n,k}$, $n \geq 3$ et $k \geq 2$ alors $f_b(v) \neq 2$, pour tout $v \in V(A_{n,k}\bar{A}_{n,k})$.*

Preuve : Soit n un entier positif $n \geq 4$, et soit $G_{n,k} = A_{n,k}\bar{A}_{n,k}$ le prisme complémentaire de $A_{n,k}$ de niveaux $N_0, \dots, N_n$ (resp. $\bar{N}_0, \dots, \bar{N}_n$) dans $G_{n,k}$ où $N_i = \{v_1^i, \dots, v_{k^i}^i\}$ (resp. $\bar{N}_i = \{\bar{v}_1^i, \dots, \bar{v}_{k^i}^i\}$). Notons par $\{v_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, v_{kj}^{i+1}\}$ (resp. $\{\bar{v}_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, \bar{v}_{kj}^{i+1}\}$) l'ensemble des fils de v_j^i (resp. $\bar{v}_j^i$).

Soit f_b une fonction P_b -broadcast sur $G_{n,k}$. Montrons que $f_b(v) \neq 2, \forall v \in V(G_{n,k})$. Supposons que ce n'est pas le cas, et qu'il existe un sommet $v_0 \in V(G_{n,k})$ tel que $f_b(v_0) = 2$.

Cas 1 : $v_0 = v_j^i \in V(A_{n,k})$

La distance entre v_j^i et $\bar{v}$ est au plus égale à 2 pour tout $\bar{v} \in V(\bar{A}_{n,k})$. En effet,

$$d(v_j^i, \bar{v}) = \begin{cases} d(v_j^i, \bar{v}_j^i) & \text{si } \bar{v} = \bar{v}_j^i, \\ d(v_j^i v_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1}) + d(v_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1} \bar{v}_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1}) & \text{si } \bar{v} = \bar{v}_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1}, \\ d(v_j^i v_{j'}^{i+1}) + d(v_{j'}^{i+1} \bar{v}_{j'}^{i+1}) & \text{si } \bar{v} = \bar{v}_{j'}^{i+1} \text{ et } j' \in \{kj - k + 1, \dots, kj\}, \\ d(v_j^i \bar{v}_j^i) + d(\bar{v}_j^i \bar{v}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc $d(v_j^i, \bar{v}) \leq 2$.

Cette dernière inégalité implique que le sommet v_j^i f_b -domine $\bar{A}_{n,k}$ et donc $\forall \bar{v} \in V(\bar{A}_{n,k}), f_b(\bar{v}) =$

0. Pour le reste des sommets c'est-à-dire ceux de $A_{n,k} - \{v_j^i\}$, ils sont forcément de coût égal à 0 car leurs voisins dans $V(\overline{A}_{n,k})$ sont dominés par v_j^i . D'où la fonction f_b a comme valeurs :

$$f_b(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = v_j^i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est un broadcast packing non maximal car $d(v_j^i, v_j'^i) = d(v_j^i, \overline{v}_j^i) + d(\overline{v}_j^i, \overline{v}_j'^i) + d(\overline{v}_j'^i, v_j'^i) = 3$ si v_j^i n'est pas adjacent à $v_j'^i$ ce qui permet de remplacer $f_b(v_j^i) = 2$ par $f_b(v_j^i) = 3$ en gardant la propriété de packing. Ainsi $f_b(v_j^i) \neq 2 \forall v_j^i \in V(A_{n,k})$.

Cas 2 : $u = \overline{v}_j^i \in V(\overline{A}_{n,k})$.

Pour tout $v \in V(A_{n,k})$, la distance entre $\overline{v}_j^i$ et v est au plus égale à 2. En effet,

$$d(\overline{v}_j^i, v) = \begin{cases} d(\overline{v}_j^i, v_j^i) & \text{si } v = v_j^i, \\ d(\overline{v}_j^i, v_j^i) + d(v_j^i, v) & \text{si } v \text{ est le père ou le fils de } v_j^i, \\ d(v_j^i, \overline{v}) + d(\overline{v}, v) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc $d(\overline{v}_j^i, v) \leq 2$

Cette dernière inégalité implique que le sommet $\overline{v}_j^i$ f_b -domine $A_{n,k}$ et donc $\forall v \in V(A_{n,k})$, $f_b(v) = 0$. Pour le reste des sommets c'est-à-dire ceux de $\overline{A}_{n,k} - \{\overline{v}_j^i\}$, ils sont forcément de coût égal à 0 car leurs voisins dans $V(A_{n,k})$ sont dominés par $\overline{v}_j^i$. D'où :

$$f_b(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = \overline{v}_j^i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc $P_b(G_{n,k}, \overline{G}_{n,k}) = f_b(V(G\overline{G})) = 2$, ce qui est impossible d'après le Lemme 4.7. $\square$

Lemme 4.9. *Soit f_b un broadcast packing maximum sur $A_{n,k}$. S'il existe un sommet de $V(\overline{A}_{n,k})$ de coût égal à 1 alors $P_b(A_{n,k}, \overline{A}_{n,k}) = 2$.*

Preuve : Soit f_b un P_b -packing. S'il existe un sommet $\bar{v}_j^i$ de $V(\bar{A}_{n,k})$ tel que $f_b(\bar{v}_j^i) = 1$, alors pour tout $v \in V(A_{n,k})$, la distance entre $\bar{v}_j^i$ et v est égal à la longueur de la chaîne C définie par :

$$C = \begin{cases} \{\bar{v}_j^i v_j^i\} & \text{si } v = v_j^i, \\ \{\bar{v}_j^i v_j^i, v_j^i v\} & \text{si } v \text{ est le père ou le fils de } v_j^i, \\ \bar{v}_j^i \bar{v}, \bar{v} v & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\forall \bar{v} \in V(\bar{A}_{n,k})$, la distance entre $\bar{v}_j^i$ et $\bar{v}$ est égal à la longueur de la chaîne C' définie par :

$$C' = \begin{cases} \{\bar{v}_j^i \bar{v}\} & \text{si } \bar{v}_j^i \text{ est adjacent à } \bar{v}, \\ \{\bar{v}_j^i \bar{v}', \bar{v}' \bar{v}\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\bar{v}'$ est un sommet quelconque de même niveau que $\bar{v}$. Il s'ensuit alors que pour tous les sommets qui sont à distance égale à 1 du sommet $\bar{v}_j^i$, leur coût est égal à 0. Pour le reste des sommets c-à-d ceux qui sont à distance 2 de $\bar{v}_j^i$, ils sont de coût égal à 0 car leurs voisins sont dominés par $\bar{v}_j^i$. Ainsi, $f_b(A_n^k \bar{A}_n^k) = f_b(\bar{v}_j^i) = 1$.

f_b est un broadcast packing non maximal car on peut mettre 2 à la place de 1 et elle garde la propriété de packing. Impossible car f_b est un P_b -broadcast. Donc $\forall v \in V(\bar{A}_{n,k}), f_b(v) \neq 1$ et $P_b(A_{n,k} \bar{A}_{n,k}) = 2. \square$

Proposition 34. Si $A_{n,k}$ est un arbre n -aire complet alors,

$$P_b(A_{n,k} \bar{A}_{n,k}) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1, \\ \max(3, k) & \text{si } n = 2, \\ \frac{k^{n+2} - k^2}{k^3 - 1} + 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de 3 et } n \geq 3, \\ \frac{k^{n+2} - k^{n-3 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}}{k^3 - 1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve :

Soit n la profondeur de l'arbre $A_{n,k}$ et soit $G_{n,k} = A_{n,k} \overline{A_{n,k}}$ le prisme complémentaire de $A_{n,k}$. Si $n = 1$, alors $A_{1,k}$ est isomorphe à l'étoile d'ordre k et $P_b(G_{1,k}) = 3$. Pour $n = 2$, soient f_b et g_b deux fonctions broadcast définies sur le graphe $G_{2,k}$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = v_1^2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

si $k = 2$ et

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in v_1^2 \cup v_{k+1}^2 \cup v_{2k+1}^2 \cup \dots \cup v_{(k-1)k+1}^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

si $k > 2$.

f_b et g_b sont des fonction broadcast packing maximum sur $G_{2,k}$. D'où $P_b(G_{2,2}) = 3$ et $P_b(G_{2,k}) = k$ si $k > 2$.

Supposons maintenant que $n \geq 3$. et soient $N_0, \dots, N_n$ (resp. $\overline{N}_0, \dots, \overline{N}_n$) les niveaux de $A_{n,k}$ (resp. $\overline{A_{n,k}}$) dans $G_{n,k}$ où $N_i = v_1^i, \dots, v_{k^i}^i$ (resp. $\overline{N}_i = \overline{v}_1^i, \dots, \overline{v}_{k^i}^i$). Notons par $v_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, v_{kj}^{i+1}$ (resp. $\overline{v}_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, \overline{v}_{kj}^{i+1}$) l'ensemble des fils de v_j^i (resp. $\overline{v}_j^i$).

Soient $D_1, D_2 \subset V(G_{n,k})$ tels que $D_1 = \{v_j^{n-3l-1} \in V(G_{n,k}) : l \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}, j \in \{1, \dots, k^{n-3l-1}\}\}$ et $D_2 = \{x_j^{n-3r-1} \in V(G_{n,k}) : r \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}, j \in \{1, \dots, k^{n-3r-1}\}\}$. Considérons la fonction broadcast définie sur le graphe $G_{n,k}$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} f_b^1(x) & \text{si } n \text{ est un multiple de 3,} \\ f_b^2(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où

$$f_b^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un fils d'un sommet de } D_1 \text{ ou } x = v_1^0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$f_b^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un fils d'un sommet de } D_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f_b et g_b sont des fonction broadcast packing maximal sur $G_{n,k}$. On a donc $P_b(G_{n,k}) \geq f_b^1(G_{n,k})$ si n est un multiple de 3 $P_b(G_{n,k}) \geq f_b^2(G_{n,k})$ sinon. D'où

$$P_b(G_{n,k}) \geq \begin{cases} 1 + \sum_{r=0}^{\frac{n}{3}-1} k^{n-3r-1} & \text{si } n \text{ est un multiple de 3,} \\ \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} k^{n-3r-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

c'est à dire

$$P_b(G_{n,k}) \geq \begin{cases} 1 + \frac{k^{n+2}-k^2}{k^3-1} & \text{si } n \text{ est un multiple de 3,} \\ \frac{k^{n+2}-k^{n-3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1}}{k^3-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

et en particulier, $P_b(G_{n,k}) \geq 5$. Par ailleurs, pour toute fonction P_b -broadcast f_b , on a $f_b(v) \leq 2 \forall v \in G_{n,k}$ car sinon un sommet de coût=3 (puisque $\text{diam}(G_{n,k}) = 3$ dans ce cas) dominerait $G_{n,k}$ et $P_b(G_{n,k}) = 3$. Absurde.

Soit f_b un P_b -broadcast maximal sur $G_{n,k}$. On peut supposer sans pert de généralité que $f_b(v) \leq 1, \forall v \in V(G_{n,k})$ (d'après Lemme 4.7) et $\forall w \in \bar{A}_{n,k}, f_b(w) \neq 1$ (d'après Lemme 4.8). D'où $P_b(G_{n,k}) = P_b(A_{n,k})$ et $f_b(v) \leq 1, \forall v \in V(A_{n,k})$.

Maintenant pour chaque triple de niveaux il faut choisir un seule niveau et dans chaque niveau

on prend le nombre maximum des sommets, commencent par le niveau N_n on aura

$$P_b(G_{n,k}) \leq \begin{cases} 1 + \sum_{r=0}^{\frac{n}{3}-1} k^{n-3r-1} & \text{si } n \text{ est un multiple de } 3, \\ \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} k^{n-3r-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

c'est à dire

$$P_b(G_{n,k}) \leq \begin{cases} 1 + \frac{k^{n+2}-k^2}{k^3-1} & \text{si } n \text{ est un multiple de } 3, \\ \frac{k^{n+2}-k^{n-3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor-1}}{k^3-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.3 Nombre de broadcast efficacité

Nous allons maintenant énoncer un Lemme qui sera utilisé dans la détermination de la valeur de $\Gamma_{eb}(G\overline{G})$.

Lemme 4.10. *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$. Si f_b est un broadcast efficace, alors $\forall v \in V(G\overline{G}), f_b(v) \neq 2$.*

Preuve :

Soit G un graphe d'ordre n tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$ et soit V^+ l'ensemble des sommets f_b -broadcast sur $G\overline{G}$. Comme $\text{diam}(G\overline{G}) \leq \Gamma_{eb}(G\overline{G})$ alors on peut dire déjà que $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) \geq 3$. Considérons deux cas :

Cas 1 : Il existe $v \in V(G\overline{G})$ tel que $f_b(v) = 3$ et dans ce cas v est le seule sommet de $G\overline{G}$ de poids positif et $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3$.

Cas 2 : Pour tout $v \in V(G\overline{G}), f_b(v) \leq 2$ et dans ce cas ; s'il existe un sommet $v \in V(G\overline{G})$ tel que $f_b(v) = 2$ alors soit $e(v) = 2$ et donc v f_b -domine tout le graphe et par suite $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 2 < 3$ ce qui est impossible ou bien $e(v) = 3$ et donc v f_b -domine tout le graphe sauf les sommets à distance 3 et donc $\forall v_1$ tel que $d(v, v_1) = 3, f_b(v_1) = 1$. Or le voisin de v_1 est dominé par v ce qui est contradictoire avec la broadcast efficacité de f_b .

D'où $f_b(v) \neq 2$. $\square$

Si G est un graphe d'ordre 1, alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 1$ et $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3$ si l'ordre de G vaut 2.

Dans la suite n est supposé ≥ 3 .

Théorème 4.11. *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$. Alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) \leq n$.*

Preuve : Soit G un graphe d'ordre n tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$ et soit V^+ l'ensemble des sommets f_b -broadcast sur $G\overline{G}$ où f_b est un Γ_{eb} -broadcast, s'il existe $v \in V(G\overline{G})$ tel que $f_b(v) = 3$, alors $f_b(v) = \Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3 \leq n, \forall n \geq 3$. On suppose maintenant que $\forall v \in V(G\overline{G}), f_b(v) \leq 1$ car $f_b(v) \neq 2$, d'après le lemme 4.10. Si $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) \geq n + 1$ alors $|V^+| \geq n + 1$. Or G est d'ordre n alors il existe $v \in V(G)$ tels que $v, \bar{v} \in V^+$ ce qui est contradictoire avec la broadcast efficacité de f_b .

Il s'ensuit, $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) \leq n$. $\square$

Caractérisons les graphes pour lesquels la borne du Théorème 4.11. est atteinte.

Proposition 35. *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 4$, tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$, alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = n$ si et seulement si G est une clique ou un stable.*

Preuve : Soit G un graphe tel que $G = K_n$ (resp. G est un stable). Montrons que $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = n$. D'après Théorème 4.11., $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) \leq n$. Il reste à prouver l'inégalité dans l'autre sens. Pour cela, définissons la fonction broadcast f_b sur $G\overline{G}$ de la manière suivante :

$$f_b(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in V(\overline{G}) \quad (\text{resp. } v \in V(G)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f_b est une fonction broadcast efficace. D'où $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) \geq \sum_{v \in V(G\overline{G})} f_b(v) = n$. Il s'ensuit, $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = n$.

Maintenant soit G un graphe tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$ et $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = n$. Montrons que G est soit un graphe complet soit un stable.

Soit V^+ l'ensemble des sommets f_b -broadcast de $G\overline{G}$ où f_b est une fonction de coût égale à n . On a $|V^+| = n$ car $\forall v \in V^+$, s'il existe un sommet $v \in V(G\overline{G})$ tel que $f_b(v) = 3 = \text{diam}(G\overline{G})$,

alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3 < n$ ce qui impossible. D'où $f_b(v) \leq 1$. De l'efficacité de f_b , on déduit que la distance entre chaque paire de sommets de V^+ vaut 3 et donc ces n sommets se trouvent forcément soit dans $V(G)$ car $\forall v_i \in V(G), \forall v_j \in V(\overline{G}), d(v_i, v_j) = 2$ soit dans $V(\overline{G})$ c'est-à-dire $V^+ = V(G)$ ou $V^+ = V(\overline{G})$. Dans le premier cas G est un stable et $\overline{G}$ une clique et le second cas, $\overline{G}$ est un stable et G est une clique. $\square$

Caractérisons les graphes pour lesquels $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3$.

Proposition 36. *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$, tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$. Alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3$, si et seulement si $G \notin \{K_n, \overline{K}_n\}$.*

Preuve : Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$ tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$ et $G \notin \{K_n, \overline{K}_n\}$, soit V^+ l'ensemble des sommets f_b -broadcast sur $G\overline{G}$ où f_b est un Γ_{eb} -broadcast, s'il existe $v \in V(G\overline{G})$ tel que $f_b(v) = 3$ alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3$. Maintenant si, $\forall v \in V(G\overline{G}), f_b(v) \leq 1$ (car $f_b(v) \neq 2$ d'après lemme1) alors, $\exists v_1 \in V(G)$ (resp. $\bar{v}_1 \in V(\overline{G})$) tel que $0 < |N_G(v_1)| < n - 1$. Si $f_b(v_1) = 1$, alors v_1 f_b -domine $\bar{v}_1$ et $N_G(v_1)$ alors $\forall w \in \{\bar{v}_1, N_G(v_1) \text{ et } N_{\overline{G}}(\bar{v}_1)\}, f_b(w) = 0$. Soit $v_2 \in N_G(v_1), \bar{v}_2$ adjacent a un seule sommet v_2 ou bien a v_2 et a un sommet $\bar{v} \in N_{\overline{G}}(\bar{v}_1)$. Or $f_b(v_2) = 0$ et $f_b(\bar{v}) = 0$ donc $\bar{v}_2$ est non dominé.

Si $f_b(v_1) = 0$ et dans ce cas, soit $f_b(\bar{v}_1) = 1$. Or $0 < |N_{\overline{G}}(\bar{v}_1)| < n - 1$ alors forcément il existe un sommet non dominé, soit $\exists v_3 \in N_G(v_1)$ tels que $f_b(v_3) = 1$ et $0 < |N_G(v_3)| \leq n - 1$, si $0 < |N_G(v_3)| < n - 1$ alors même raisonnement, sinon $|N_G(v_3)| = n - 1$ et dans ce cas v_3 f -domine $G - \{v_3\}$ et $\bar{v}_3$ donc l'ensemble $\overline{G} - \{\bar{v}_3\}$ est non dominé.

Il s'ensuit que $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3$ et il existe un unique sommet broadcast dominant.

Maintenant Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$ tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$. Montrons que $G \notin \{K_n, \overline{K}_n\}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $G \in \{K_n, \overline{K}_n\}$. D'après la Proposition 35 $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = n$ et puisque $n \geq 4$, alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) \geq 4$ ce qui impossible car $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 3$. Il s'ensuit que $G \notin \{K_n, \overline{K}_n\}$.

$\square$

En conséquence du Proposition 35 et Proposition 36 , on énonce le corollaires suivant :

Corollaire 13. *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 3$. Alors*

$$\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ n & \text{si } G \in \{K_n, \overline{K}_n\}, \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le Théorème 4.12, nous présentons une valeur exacte pour le nombre de broadcast efficace dans les prismes complémentaires quand $\text{diam}(G\overline{G}) = 2$ pour un graphe quelconque.

Théorème 4.12. *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 2$. Alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 2$*

Preuve : Soit G un graphe d'ordre n tel que $\text{diam}(G\overline{G}) = 2$ et soit V^+ l'ensemble des sommets f_b -broadcast sur $G\overline{G}$ où f_b est un Γ_{eb} -broadcast. S'il existe un sommet $v \in V(G\overline{G})$ tel que $f_b(v) = 2$, alors $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 2$. Supposons maintenant que $\forall v \in V(G\overline{G}), f_b(v) \leq 1$. S'il existe un sommet tel que $f_b(v) = 1$, alors soit $e(v) = 1$ et donc $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 1 < 2 = \text{diam}(G\overline{G})$, ce qui est impossible, soit $e(v) = 2$ et v f_b -domine tout le graphe sauf ceux à distance égale à 2 et par suite $\forall v_1$ tel que $d(v, v_1) = 2, f_b(v_1) = 1$. Or le voisin de v_1 est dominé par v ce qui est contradictoire avec la broadcast efficacité de f_b .

Donc $\Gamma_{eb}(G\overline{G}) = 2$. $\square$

4.4 Nombre de broadcast dominant indépendant

Dans cette section nous Déterminons la valeur exacte de $\Gamma_{ib}(G\overline{G})$ quand $G \in \{P_n, C_n, A_{n,k}, K_{m,n}\}$.

Proposition 37. *Pour tout entier positif n , on a*

(a) *Si $G = P_n$, alors*

$$\Gamma_{ib}(P_n\overline{P}_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \in \{2, 3\}, \\ 4 & \text{sinon } n = 4, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 & \text{sinon } n \geq 5. \end{cases}$$

(b) Si $G = C_n$ et $n \geq 3$, alors

$$\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \in \{2, 3, 4\}, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) $G = K_{m,n}$, alors

$$\Gamma_{ib}(K_{m,n} \overline{K}_{m,n}) = \begin{cases} \max\{m, n\} + 1 & \text{si } \max\{m, n\} \geq 4, \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) Si $G = K_n$ et $n \geq 2$, ou G est un stable, alors $\Gamma_{ib}(G) = n$.

Preuve :

(a) Soit $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une chaîne d'ordre n . si $n = 2, 3, 4$, il est facile de remarquer que $\Gamma_{ib}(P_n \overline{P}_n) = 3$ si $n \in \{2, 3\}$ et $\Gamma_{ib}(P_4 \overline{P}_4) = 3$.

Supposons maintenant que $n \geq 5$ et soit $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ pour un sous ensemble de sommets de G , soit $D \subset V(G)$ tel que $D = \{x_i \in V(G) : i = 2t + 1, t \in Z^+\}$. considérons la fonction broadcast f_b définie sur le graphe $P_n \overline{P}_n$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \text{ et } x = \overline{x'}, (x' \notin D), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$f_b(P_n \overline{P}_n) = k + 1 + 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 + 1 = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1.$$

f_b est une fonction broadcast stable dominant minimal et $\Gamma_{ib}(P_n \overline{P}_n) \geq f_b(P_n \overline{P}_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ si $n \geq 5$.

Soit g_b un Γ_{ib} -broadcast. Notons qu'il n'existe aucun sommet $\bar{v} \in \overline{P}_n$ tel que $g_b(\bar{v}) \geq 2$ car si un tel sommet existe, il dominera $P_n \overline{P}_n$ et on aura $\Gamma_{ib}(P_n \overline{P}_n) \leq 3$ ce qui est impossible car $\Gamma_{ib}(P_n \overline{P}_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ et $n \geq 5$.

Ainsi, pour tout sommet $\bar{v} \in \bar{P}_n$, $g_b(\bar{v}) \leq 1$. s'il existe des sommets de $\bar{P}_n$ de poids non nul, alors au maximum, il existera que deux sommets $\bar{v}$ et $\bar{v}'$ tels que v et v' sont adjacents dans P_n . s'il existe un sommet $\bar{v} \in \bar{P}_n$ tel que $g_b(\bar{v}) = 1$, alors $g_b(v_i) \leq 1 \forall i = 1, 2, \dots, n$, d'où $\Gamma_{ib}(P_n \bar{P}_n) \leq \beta_0(P_{n-2}) + 2 = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil + 2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

On peut supposer sans perte de généralité que $g_b(v) \leq 1 \forall v \in V(G)$, car si $g_b(v) = 2$, alors v g_b -domine tous les sommets de $\bar{P}_n$ et les sommets de distance inférieur ou égal à 2 dans P_n . Puisque chaque sommet v vérifiant $g_b(v) = 2$ a un g_b -voisinage privé qui est a distance 2 alors on peut remplacer g_b par la fonction h_b définie par :

S'il existe un sommet v , $g_b(v) = 1$ alors $h_b(v) = 1$ et S'il existe un sommet v , $g_b(v) = 2$ alors :

S'il existe un sommet v_k ou milieu de la chaîne P_n de poids 2 entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 2 tel que la distance entre v_k et les deux sommets supérieure ou égale à 4, entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 1, ou bien entre un sommet g_b -broadcasts de poids 1 et un sommet g_b -broadcasts de poids 2 tel que la distance entre ce sommet et v_k supérieure ou égale à 4 alors on peut remplacer le sommet v_k par les sommets $v_{k-1}, v_{k+1}, \bar{v}$ avec $h_b(v_{k-1}) = h_b(v_{k+1}) = h_b(\bar{v}) = 1$ et $h_b(v_k) = 0$. d'où la fonction h_b est une fonction broadcast stable dominant de coût égal à $\Gamma_{ib}(P_n \bar{P}_n) + 1$. impossible.

Sinon

cas1 : si aucun sommet g_b -broadcasts de poids 2 est dans l'extrémité de la chaîne P_n (tous les sommets de poids 2 sont ou milieu de la chaîne P_n), alors forcément le sommet de poids 2 v_k est entre un sommet g_b -broadcast de poids 1 et un sommet g_b -broadcast de poids 2 v_{k+3} tel que la distance entre ce sommet et v_k égale a 3. le voisinage privé de v_k est de coûté du sommet de poids 1 alors v_k est remplacer par v_k et v_{k-2} avec $h_b(v_k) = h_b(v_{k-2}) = 1$. le sommet v_{k+3} est donc entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 1, alors on peut remplacer v_{k+3} par v_{k+2}, v_{k+4} et $\bar{v}_{k+3}$ avec $h_b(v_{k+2}) = h_b(v_{k+4}) = h_b(\bar{v}_{k+3}) = 1$ et $h_b(v_{k+3}) = 0$. d'où la fonction h_b est une fonction broadcast

stable dominant de coût égal à $\Gamma_{ib}(P_n \overline{P}_n) + 1$. impossible.

cas2 : s'il existe un sommet de poids 2 dans l'extrémité de la chaîne P_n . La transformation des sommets g_b -broadcasts de poids 2 ce fait par order des sommets g_b -broadcasts des sommets dans la chaîne P_n .

Soit v_1 le sommet g_b -broadcast de poids 2 (v_1 est dans l'extrémité de la chaîne P_n), on peut remplacer le sommet v_1 par les sommets $v_2, \bar{v}_1$ avec $h_b(v_2) = h_b(\bar{v}_1) = 1$ et $h_b(v_1) = 0$.

Si un sommet g_b -broadcast v_k ou milieu de la chaîne P_n de poids 2 a un voisinage privé dans les coûté noté v_{k-2}, v_{k+2} et si v_k est entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 1 alors on peut remplacer le sommet v_k par v_{k-1}, v_{k+1} avec $h_b(v_{k-1}) = h_b(v_{k+1}) = 1$ et $h_b(v_k) = 0$.

Si v_k a un seul voisinage privé (v_{k-2} ou v_{k+2}) v_{k-2} alors :

cas1 : le sommet v_k est entre un sommet g_b -broadcast de poids 1 et un sommet g_b -broadcast de poids 2 alors :

Si le voisinage privé est de coûté du sommet g_b -broadcast de poids 1 alors v_k est remplacer par v_k et v_{k-2} avec $h_b(v_k) = h_b(v_{k-2}) = 1$.

Si le voisinage privé est de coûté du sommet g_b -broadcast de poids 2 alors v_k est remplacer par v_{k-1}, v_{k+1} avec $h_b(v_{k-1}) = h_b(v_{k+1}) = 1$ et $h_b(v_k) = 0$.

cas2 : si le sommet v_k est entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 2 alors :

Si le voisinage privé de v_k est v_{k-2} alors v_k est remplacer par v_k et v_{k-2} avec $h_b(v_k) = h_b(v_{k-2}) = 1$.

Si le voisinage privé de v_k est v_{k+2} alors forcément après la transformation du sommet g_b -broadcasts précédant de poids 2, le sommet v_k est soit entre un sommet g_b -broadcast de poids 1

et un sommet g_b -broadcast de poids 2 soit un sommet g_b -broadcast avec deux voisinages privés.

Si le sommet v_n est de poids 2 alors on remplace v_n par v_n et v_{n-2} avec $h_b(v_n) = h_b(v_{n-2}) = 1$.

On conclusion la fonction h_b est une fonction broadcast stable dominant de coût supérieure ou égale a $\Gamma_{ib}(P_n \overline{P}_n)$ ce qui est impossible. d'où $\forall v \in V(P_n \overline{P}_n), g_b(v) \leq 1$ et $\Gamma_{ib}(P_n \overline{P}_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

(b) Soit $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un cycle d'ordre n . si $n = 2, 3, 4$, il est facile de remarquer que $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) = 3$ si $n \in \{2, 3, 4\}$.

Supposons maintenant que $n \geq 5$, soit $D \subset V(G)$ tel que $D = \{x_i \in V(G) : i \equiv 0 \text{ mod } 2\}$. considérons la fonction broadcast f_b définie sur le graphe $C_n \overline{C}_n$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \text{ et } x = \overline{v}_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

si n est paire et

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \text{ et } x = \{\overline{v}_1, \overline{v}_n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

si n est impaire

$$f_b(C_n \overline{C}_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \text{ si } n \text{ est paire et } f_b(C_n \overline{C}_n) = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil + 2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \text{ si } n \text{ est impaire.}$$

f_b est une fonction broadcast stable dominant minimal et $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) \geq f_b(C_n \overline{C}_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ si $n \geq 5$.

Soit g_b un Γ_{ib} -broadcast. Notons qu'il n'existe aucun sommet $\overline{v} \in \overline{C}_n$ tel que $g_b(\overline{v}) \geq 2$ car si un tel sommet existe, il dominera $C_n \overline{C}_n$ et on aura $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) \leq 3$ ce qui est impossible car $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ et $n \geq 5$.

Ainsi, pour tout sommet $\bar{v} \in \overline{C}_n$, $g_b(\bar{v}) \leq 1$. s'il existe des sommets de $\overline{C}_n$ de poids non nul, alors au maximum, il existera que deux sommets $\bar{v}$ et $\bar{v}'$ tels que v et v' sont adjacents dans C_n . s'il existe un sommet $\bar{v} \in \overline{C}_n$ tel que $g_b(\bar{v}) = 1$, alors $g_b(v_i) \leq 1 \forall i = 1, 2, \dots, n$, d'où $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) \leq \beta_0(P_{n-2}) + 2 = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil + 2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

On peut supposer sans perte de généralité que $g_b(v) \leq 1 \forall v \in V(G)$, car si $g_b(v) = 2$, alors v g_b -domine tous les sommets de $\overline{C}_n$ et les sommets de distance inférieur ou égal a 2 dans C_n . Puisque chaque sommet v vérifiant $g_b(v) = 2$ a un g_b -voisinage privé qui est a distance 2 alors on peut remplacer g_b par la fonction h_b définie par :

S'il existe un sommet v , $g_b(v) = 1$ alors $h_b(v) = 1$ et S'il existe un sommet v , $g_b(v) = 2$ alors :

s'il existe un sommet v_k de C_n de poids 2 entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 2 tel que la distance entre v_k et les deux sommets supérieure ou égale à 4, entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 1, ou bien entre un sommet g_b -broadcast de poids 1 et un sommet g_b -broadcast de poids 2 tel que la distance entre ce sommet et v_k supérieure ou égale à 4 alors on remplace le sommet v_k par les sommets $v_{k-1}, v_{k+1}, \bar{v}$ avec $h_b(v_{k-1}) = h_b(v_{k+1}) = h_b(\bar{v}) = 1$ et $h_b(v_k) = 0$. d'où la fonction h_b est une fonction broadcast stable dominant de coûtégal à $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) + 1$. impossible.

sinon

Forcément le sommet g_b -broadcast de poids 2 v_k est entre un sommet g_b -broadcast de poids 1 et un sommet g_b -broadcast de poids 2 v_{k+3} tel que la distance entre ce sommet et v_k égale a 3. le voisinage privé de v_k est de coûté du sommet de poids 1 alors v_k est remplacer par v_k et v_{k-2} avec $h_b(v_k) = h_b(v_{k-2}) = 1$. le sommet v_{k+3} est donc entre deux sommets g_b -broadcasts de poids 1, alors on peut remplacer v_{k+3} par v_{k+2}, v_{k+4} et $\bar{v}_{k+3}$ avec $h_b(v_{k+2}) = h_b(v_{k+4}) = h_b(\bar{v}_{k+3}) = 1$ et $h_b(v_{k+3}) = 0$. d'où la fonction h_b est une fonction broadcast stable dominant de coût égal à $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) + 1$. impossible.

On conclusion la fonction h_b est une fonction broadcast stable dominant de coût supérieure ou

égale à $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n)$ ce qui est impossible. d'où $\forall v \in V(C_n \overline{C}_n), g_b(v) \leq 1$ et $\Gamma_{ib}(C_n \overline{C}_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

(c) Comme,

$$\beta_b(K_{m,n} \overline{K}_{m,n}) = \begin{cases} \max\{m, n\} + 1 & \text{si } \max\{m, n\} \geq 4, \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit

$$\Gamma_{ib}(K_{m,n} \overline{K}_{m,n}) \leq \begin{cases} \max\{m, n\} + 1 & \text{si } \max\{m, n\} \geq 4, \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Examinons l'inégalité dans l'autre sens et supposons sans perte de généralité $m \leq n$. Soit $K_{m,n}$, le graphe biparti complet de bipartition $V_m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ et $V_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Il est clair que $\overline{K}_{m,n}$ est constitué de l'union de deux cliques $\overline{V}_m = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_m\}$ et $\overline{V}_n = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_n\}$. Si $1 \leq m \leq n \leq 3$, alors $\Gamma_{ib}(K_{1,2}) = \Gamma_{ib}(K_{2,2}) = \Gamma_{ib}(K_{1,3}) = \Gamma_{ib}(K_{2,3}) = \Gamma_{ib}(K_{3,3}) = 4$. En effet la fonction

$$f_b(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \{\overline{v}_1, \overline{w}_1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est Γ_{ib} -broadcast pour les graphes $K_{m,n}$ si $m \in \{1, 2, 3\}$ et $n \in \{2, 3\}$.

Supposons maintenant que $1 \leq m \leq n$ et $n \geq 4$. Soit $\overline{v}_i$ un sommet quelconque de $\overline{V}_m$. La fonction f_b définie sur le graphe $K_{m,n} \overline{K}_{m,n}$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V_n \text{ ou } x = \overline{v}_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un broadcast stable dominant minimal sur $K_{m,n}\overline{K}_{m,n}$ car $\overline{v}_i$ f_b -domine $\overline{V}_m$ et V_n f_b -domine $V_m \cup \overline{V}_n$. On a donc $\Gamma_{ib}(K_{m,n}\overline{K}_{m,n}) \geq f_b(V(K_{m,n}\overline{K}_{m,n})) = n + 1 = \max(m, n) + 1$. D'où $\Gamma_{ib}(K_{m,n}\overline{K}_{m,n}) = \max(m, n) + 1$ si $n \geq 4$.

Donc

$$\Gamma_{ib}(K_{m,n}\overline{K}_{m,n}) = \begin{cases} \max(m, n) + 1 & \text{si } \max(m, n) \geq 4, \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) Soit G un graphe tel que $G = K_n$ (resp. G est un stable). considérons la fonction broadcast f_b définie sur le graphe $G\overline{G}$ de la manière suivante :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V(\overline{G}) \text{ (resp. } x \in V(G)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f_b est une fonction broadcast stable dominant minimal. D'où $\Gamma_{ib}(G\overline{G}) \geq f_b(G\overline{G}) = n$.

Soit g_b un Γ_{ib} -broadcast. Notons qu'il n'existe aucun sommet $v \in G$ tel que $g_b(v) \geq 2$ car si un tel sommet existe, il dominera $G\overline{G}$ et on aura $\Gamma_{ib}(G\overline{G}) \leq 3$ ce qui est impossible car $\Gamma_{ib}(G\overline{G}) \geq n$ et $n \geq 2$.

Ainsi, pour tout sommet $v \in G$, $g_b(v) \leq 1$. S'il existe des sommets de G de poids non nul, alors au maximum, il existera qu'un seul sommets v . S'il existe un sommet $v \in G$ tel que $g_b(v) = 1$, alors $g_b(\overline{v}_i) \leq 1 \forall i = 1, 2, \dots, n$, d'où $\Gamma_{ib}(G\overline{G}) \leq n - 1 + 1 = n$.

On peut supposer sans perte de généralité que $g_b(\overline{v}) \leq 1 \forall \overline{v} \in V(\overline{G})$, car si $g_b(\overline{v}_1) = 2$, alors $\overline{v}_1$ g_b -domine tous les sommets de G . Puisque $\overline{G}$ est un stable alors $g_b(\overline{v}_i) = 1, \forall i = 2, \dots, n$. impossible car la fonction g_b n'est pas minimal est on peut remplacer g_b par la fonction h_b définie par :

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in V(\overline{G}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On conclusion $\Gamma_{ib}(G\overline{G}) = n.$ □

Pour l'arbre n -aire complet $A_{n,k}$ où n est sa profondeur, on a :

Proposition 38. *Si $A_{n,k}$ est un arbre n -aire complet alors,*

$$\Gamma_{ib}(A_{n,k}\overline{A}_{n,k}) = \begin{cases} \frac{k^{n+2}+k^2-2}{k^2-1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{k^{n+2}+k^2-k-1}{k^2-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : Soit n la profondeur de l'arbre $A_{n,k}$ et soit $G_{n,k} = A_{n,k}\overline{A}_{n,k}$. Si $n = 1$, alors $A_{1,k}$ est isomorphe à l'étoile d'ordre k et $\Gamma_{ib}(G_{1,k}) = k + 1$. Supposons maintenant que $n \geq 2$ et soient $N_0, \dots, N_n$ (resp. $\overline{N}_0, \dots, \overline{N}_n$) les niveaux de $A_{n,k}$ (resp. $\overline{A}_{n,k}$) dans $G_{n,k}$ où $N_i = v_1^i, \dots, v_{k^i}^i$ (resp. $\overline{N}_i = \overline{v}_1^i, \dots, \overline{v}_{k^i}^i$). Notons par $v_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, v_{kj}^{i+1}$ (resp. $\overline{v}_{kj-k+1}^{i+1}, \dots, \overline{v}_{kj}^{i+1}$) les deux ensemble des fils de v_j^i (resp. $\overline{v}_j^i$).

Considérons les fonctions broadcast f_b et g_b sur $G_{n,k}$ définies par

$$f_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N_2 \cup \dots \cup N_n \cup \{\overline{v}_1^0\} \cup \{\overline{v}_1^1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si n est pair et par

$$g_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N_1 \cup \dots \cup N_n \cup \{\overline{v}_1^0\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si n est impair.

f_b et g_b sont des fonctions broadcasts stables dominants minimal sur $G_{n,k}$. Examinons seulement le cas où n est pair. Le sommet $\bar{v}_1^0$ adjacent à tout les elements de l'ensemble $\{(V(\bar{G}) - \{\bar{v}_1^1, \bar{v}_2^1, \dots, \bar{v}_k^1\}) \cup v_1^0\}$ et donc les domine; le sommet $\bar{v}_1^1$ domine $\bar{N}_1 = \{\bar{v}_1^1, \bar{v}_2^1, \dots, \bar{v}_k^1\}$ et chaque niveaux N_i domine N_{i-1} et N_{i+1} . D'où f_b est bien un broadcast dominant stable. On a donc $\Gamma_{ib}(G_{n,k}) \geq f_b(V(G_{n,k}))$ si n est pair et le même raisonnement reste valable pour la fonction g_b . D'où $\Gamma_{ib}(G_n) \geq g_b(V(G_n))$ si n est impair. En passant au coût de f_b et g_b , on obtient :

$$\Gamma_{ib}(G_n) \geq \begin{cases} 1 + 1 + k^2 + k^4 + \dots + k^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 + k + k^3 + k^5 + \dots + k^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\Gamma_{ib}(G_n) \geq \begin{cases} \frac{k^{n+2} + k^2 - 2}{k^2 - 1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{k^{n+2} + k^2 - k - 1}{k^2 - 1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il rest à prouver l'inégalité dans l'autre sens. Il est connu que $\Gamma_{ib} \leq \beta_b(G)$ pour tout graphe G .

Soit f_b une fonction β_b -broadcast sur $G_{n,k}$. Pour toute fonction β_b -broadcast f_b , on a $f_b(v) \leq 2, \forall v \in G_{n,k}$ car sinon un sommet de coût= 3 (puisque $\text{diam}(G_{n,k}) = 3$ dans ce cas) dominerait $G_{n,k}$ et $\beta_b(G_{n,k}) = 3$.

On peut supposer sans perte de généralité que $f_b(v_j^n) \leq 1, \forall j = 1, \dots, 2^n$, car si $\exists j_0 = 1, \dots, 2^n, f_b(v_{j_0}^n) = 2$, alors $v_{j_0}^n$ f_b -domine tous les sommets de $\bar{A}_{n,k}$ et $k + 2$ sommets de $A_{n,k}$.

On peut remplacer f_b par la fonction g_b définie par :

$$g_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{v_{j_0}^n, v_{j_1}^n\}, \\ f_b(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $v_{j_0}^n$ et $v_{j_1}^n$ sont les de $v_{\lceil \frac{j_0}{k} \rceil}^{n-1}$ ($v_{j_0}^n$ différent de $v_{j_1}^n$). g_b est de même coût que f_b .

par ailleurs, si $f_b(v_1^0) = 2$ alors la fonction g_b définie par :

$$g_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{v_1^1, v_2^1, \bar{v}_1^0\}, \\ f_b(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et une fonction broadcast stable de coût égal à $\beta_b(G_{n,k}) + 1$. Impossible, d'où $\forall v \in N_0 \cup N_n, f_b(v) \leq 1$.

On suppose que n est paire (le cas n est impaire se traite de la même manière).

cas1 : $\exists i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, 2^i$ tel que $f_b(v_j^i) = 2$.

Pour tout $\bar{v} \in V(\bar{A}_{n,k})$, la distance entre v_j^i et $\bar{v}$, $d(v_j^i, \bar{v}) \leq 2$ car :

$$d(v_j^i, \bar{v}) = \begin{cases} d(v_j^i, \bar{v}_j^i) & \text{si } \bar{v} = \bar{v}_j^i, \\ d(v_j^i, v_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1}) + d(v_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1}, \bar{v}_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1}) & \text{si } \bar{v} = \bar{v}_{\lceil \frac{j}{k} \rceil}^{i-1}, \\ d(v_j^i v_j^{i+1}) + d(v_j^{i+1} \bar{v}_j^{i+1}) & \text{si } \bar{v} = \bar{v}_j^{i+1} \text{ } j' \in \{kj - k + 1, \dots, kj\}, \\ d(v_j^i \bar{v}_j^i) + d(\bar{v}_j^i \bar{v}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $d(v_j^i, \bar{v}) \leq 2$, v_j^i f_b -domine $\bar{A}_{n,k}$ et $\forall \bar{v} \in V(\bar{A}_{n,k}), f_b(\bar{v}) = 0$. Soit $D = \{v \in V(A_{n,k}), f_b(v) = 2\}$.

Considérons la fonction g_b définie par :

$$g_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I, |I| = 2 \text{ } I \in \text{l'ensemble des fils d'un élément de } D, \\ 0 & \text{si } x \in D, \\ f_b(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

g_b est une fonction broadcast stable de même coût que f_b et $g_b(x) \leq 1, \forall x \in V(G_{n,k})$. D'où d'après le Théorème 3.10 :

$$\beta_b(G_{n,k}) = \beta_0(G_{n,k}) = \beta_0(A_{n,k}) + \beta_0(\overline{A}_{n,k}) - 1.$$

Or $\beta_0(A_{n,k}) = |N_0| + |N_2| + \dots + |N_n|$ car n est pair.

$$= 1 + k^2 + \dots + k^n$$

$$= \frac{k^{n+2}-1}{k^2-1}$$

et $\beta_0(\overline{A}_{n,k}) = 2$ car les éléments d'un stable maximum doivent se trouver sur deux niveaux consécutifs et chaque niveau est un sous graphe complet. Donc : $\beta_b(G_{n,k}) = \frac{k^{n+2}-1}{k^2-1} + 2 - 1 = \frac{k^{n+2}+k^2-2}{k^2-1}$.

$$\text{Cas2 : } \forall i = 1, \dots, n-1, f_b(v_j^i) \leq 1.$$

S'il existe un sommet $\overline{v}_j^i$ de $\overline{A}_{n,k}$ de coût égal à 2, alors pour tout $v \in V(A_{n,k})$, la distance entre $\overline{v}_j^i$ et v $d(\overline{v}_j^i, v) \leq 2$ car :

$$d(\overline{v}_j^i, v) = \begin{cases} d(\overline{v}_j^i, v_j^i) & \text{si } v = v_j^i, \\ d(\overline{v}_j^i, v_j^i) + d(v_j^i, v) & \text{si } v \text{ est le père ou le fils de } v_j^i, \\ d(v_j^i, \overline{v}) + d(\overline{v}, v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $\forall \overline{v} \in V(\overline{A}_{n,k})$, la distance entre $\overline{v}$ et $\overline{v}_j^i$, $d(\overline{v}, \overline{v}_j^i) \leq 2$ car :

$$d(\overline{v}, \overline{v}) = \begin{cases} d(\overline{v}, \overline{v}_j^i) & \text{si } \overline{v}_j^i \text{ est adjacent à } \overline{v}, \\ d(\overline{v}_j^i, \overline{v}') + d(\overline{v}', \overline{v}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $\overline{v}'$ est un sommet quelconque de même niveau que $\overline{v}$. Donc $\overline{v}_j^i$ f_b -domine tous les sommets de $G_{n,k}$ et donc $f_b(V(A_{n,k})) = 0$.

En conclusion, $\forall v \in V(G_{n,k}), f_b(v) \leq 1$ et $\beta_b(G_{n,k}) = \beta_0(G_{n,k}) = \beta_0(A_{n,k}) + \beta_0(\overline{A}_{n,k}) - 1 = \frac{k^{n+2}+k^2-2}{k^2-1}$ et comme $\Gamma_{ib}(G) \leq \beta_b(G)$ on'a $\Gamma_{ib}(G) \leq \frac{k^{n+2}+k^2-2}{k^2-1}$

En conclusion, $\Gamma_{ib}(G) = \frac{k^{n+2}+k^2-2}{k^2-1}$.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des invariants de broadcasts dans les prismes complémentaires. En effet la première partie de notre travail, apporté une valeur exacte du nombre inférieur de broadcast packing p_b d'un prisme complémentaire $G\overline{G}$ lorsque G est un graphe quelconque et la valeur exacte du nombre de broadcast packing $P_b(G\overline{G})$ lorsque G est un stable, une clique, une chaîne, un cycle, un arbre n-aire complet ou un biparti complet.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous nous sommes intéressés au nombre supérieure d'efficacité Γ_{eb} : d'une part, nous avons déterminé une borne supérieure pour Γ_{eb} , ensuite , nous avons caractérisé les graphes qui atteignent cette borne ; d'autre part, nous avons déterminé la valeur exacte de $\Gamma_{eb}(G\overline{G})$ lorsque G est un graphe quelconque.

Enfin, nous avons déterminé la valeur exacte du nombre supérieure de broadcast indépendant $\Gamma_{ib}(G\overline{G})$ lorsque G est un stable, une clique, une chaîne, un cycle, un arbre n-aire complet ou un biparti complet.

Comme perspectives de recherche, nous envisageons d'étudier les points suivants :

- Détermination de $\Gamma_{eb}(T\overline{T})$ et $\Gamma_{ib}(T\overline{T})$ lorsque T est un arbre quelconque.
- Etude des invariants de broadcasts du prisme complémentaire de $G \circ H$ lorsque $\circ$ est une opération donnée dans les graphes.

Bibliographie

- [1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, 1958.
- [2] J. A. BONDY, U. S. R. MURTY, *Graph theory with applications*, American elsevier publishing, 1976.
- [3] B. BRESAR, and S. SPACAPAN, *Broadcast domination of products of graphs*. University of Maribor, Slovenia. March 12, 2006.
- [4] I. BOUCHEMAKH, S. RAFIK, *On a Conjecture of Erwin*, University of Sciences and Technology Houari Boumediene.
- [5] I. BOUCHEMAKH, M. ZEMIR, *On the Broadcast Independence Number of Grid Graph*, Springer 2012.
- [6] I. BOUFELGHA, *Broadcast domination dans les prismes complémentaires*. Mémoire de magister, USTHB. 2013.
- [7] J. R. S. BLAIR, S. HORTON, and F. MANNE *Broadcast Domination Algorithms for Interval Graphs, Series-Parallel Graphs, and Trees*. Congressus Numerantium, 169(2004)55-77.
- [8] A. BOUMALI, *Les nombres de domination et broadcast domination*. Mémoire de magister, USTHB. 2010.
- [9] W.J. DESORMEAUX, T. W. HAYNES, and L. VAUGHAN, *Double Domination in Complementary Prisms*. East Tennessee State University, USA.
- [10] J. E. DUNBAR, D. J. ERWIN, T. W. HAYNES, S. M. HEDETNIEMI, S. T. HEDETNIEMI, *Broadcasts in graphs*, Discrete Applied Mathematics, 154(2006)59-75.

- [11] D. J. ERWIN, *Cost Domination in Graphs*, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.
- [12] D. J. ERWIN, *Dominating broadcast in graphs*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 42(2004)89-105.
- [13] M. R. GAREY, D. S. JOHNSON, *Computers and intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman, 1979.
- [14] J. A. GONGORA, T. W. HAYNES, and E. JUM *Independent domination in complementary prism*. East Tennessee State University. 2009.
- [15] T. W. HAYNES, S. T. HEDETNIEMI, P. J. SLATER, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [16] T. W. HAYNES, M.A. HENNING, P.J. SLATER, and L.C. VAN DER MERWE, *The complementary product of two graphs*. Bull. Instit. Combin. Appl. 51(2007)21-30.
- [17] T. W. HAYNES, M.A. HENNING, and L.C. VAN DER MERWE, *Domination and total domination in complementary prism*. J. Combin. Optim. 18(2009)23-37.
- [18] P. HEGGERNES, D. LOKSHTANOV, *Optimal broadcast domination in polynomial time*, Discrete Mathematics 306(2006)3267-3280.
- [19] S. B. HORTON, *On Some Problems Related to Dominating Set*. Preprint.
- [20] D. MEIERLING, F. PROTTI, D. RAUTENBACH, A. R. D. ALMEIDA *Cycles in Complementary Prisms*. Institute of Optimization and Operations Research, Ulm University Oct. 2013.
- [21] J. PAULRAJ JOSEPH, and S. ARUMUGAM, *Domination in graphs*. Internat. J. Management Systems. 1995.
- [22] S. RAFIK, *Nombre de broadcast domination dans les arbres*. Mémoire de magister, USTHB. 2009.
- [23] M. SAKAROVITCH, *Optimisation Combinatoire "Programmation Discrète"*, Hermann, 1984.