

Nº d'ordre :19/2003-M/MT

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie

Houari Boumediene



Faculté des Sciences Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du grade de

MAGISTER en MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : systèmes dynamiques

Par : **BOUKHELIFA Mohand Saïd**

SUJET

**EQUATIONS DE 4^{ème} ORDRE DE CLASSE
DE PAINLEVE**

Soutenu publiquement le Dimanche 19/10/2003, devant le jury :

R.BEBBOUCHI	Professeur, USTHB	Président.
A.KESSI	Professeur, USTHB	Directeur de thèse.
K.BETINA	Professeur, USTHB	Examineur.
M. ABID	Maître de conférences, USTHB	Examineur.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

♥ **ma mère que dieu la garde.**

♥ **mes sœurs et mes frères.**

♥ **toute ma famille et mes amis.**

♥ **mes professeurs.**

♥ **toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à
l'élaboration de ce travail.**

REMERCIEMENTS

Je remercie monsieur A. KESSI d'avoir, bien dirigé ce travail et permis, grâce à sa générosité scientifique et son enthousiasme, l'aboutissement de celui ci.

Ma haute considération va également à monsieur R.BEBBOUCHI pour l'honneur qu'il me fait en présidant le Jury auquel ce travail est soumis.

Je remercie également Messieurs M.ABID et K.BETINA pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Table des matières

Introduction	...	2
1. Préliminaires	...	5
1.1. Généralités	...	5
1.1.1. Intégration, Singularités critiques, solutions d'une E.D.	...	5
1.1.2. E.D.O. linéaires au voisinage d'un point singulier	...	8
1.1.3. Transformation $T(\lambda, \varphi, \mu)$	...	10
1.1.4. Quelques résultats classiques d'E.D.O. stables	...	11
1.2. Construction de conditions nécessaires pour qu'une E.D. soit stable	...	12
Théorème de POINCARÉ	...	13
Lemme fondamental de stabilité	...	13
Théorème de BUREAU	...	13
Méthode de BUREAU	...	17
2. Equations de quatrième ordre de classe de Painlevé	...	24
2.1. Position du problème	...	24
2.2. Etude du problème	...	25
2.2.1. Etude de l'équation réduite	...	25
2.2.2. Etude des équations complètes	...	63
2.2.3. Intégration et conditions suffisantes de stabilité	...	91
Conclusion	...	110
Annexe	...	112
Bibliographie	...	120

Introduction

L'analyse de PAINLEVE est, au sens large, l'étude de la structure des singularités des équations différentielles ; plus particulièrement, on s'intéresse à la façon dont celles ci (singularités) dépendent sur les conditions initiales, appelées dans ce cas "singularités mobiles". Elle est considérée comme l'une des approches pour l'étude de l'intégrabilité des équations différentielles.

Une équation différentielle est dite avoir la propriété de PAINLEVE (ou stable) si sa solution générale est uniforme au voisinage des singularités mobiles. Cette propriété est très importante ;

- d'un côté, pour la définition de nouvelles fonctions transcendentes comme solutions générales uniformes d'équations différentielles ordinaires (E.D.O.) irréductibles dans le plan complexe, ce qui a motivé de nombreux mathématiciens comme BRIOT et BOUQUET, FUCHS, POINCARÉ, PAINLEVE [16], CHAZY [4], BUREAU [2] et beaucoup d'autres, qui ont réalisé de très importants travaux sur le problème mathématiquement posé

" déterminer toutes les équations différentielles algébriques du 1^{er} ordre, puis du 2^{me} ordre, puis du 3^{me} ordre etc, dont l'intégrale générale est uniforme ",

- de l'autre, à cause de son lien proche avec l'intégrabilité. L'idée a été lancée par S. KOVALEVSKI [13], qui était intéressée à la relation entre l'intégrabilité complète des systèmes mécaniques classiques et la méromorphie de leurs solutions, telle qu'elle a construit un procédé (par la suite formalisé par GAMBIER, puis étendu par WESS et al. [18] pour traiter les E.D.P. non linéaires, et appelé test de PAINLEVE) largement utilisé pour tester la propriété de PAINLEVE. Enfin, l'importance de cette propriété est encore renforcée par la fameuse conjoncture d'ALBOVITZ et al. [1],

" toute E.D.O obtenue par réduction exacte d'une E.D.P. non linéaire intégrable par la méthode I.S.T.¹, a la propriété de PAINLEVE ".

¹Inverse Spectral Transform

L'objet de cette thèse est l'étude de l'équation différentielle de quatrième ordre

$$\begin{aligned}
(E) \quad y'''' &= a(x)yy'''' + b(x)y'y'' + c(x)y^2y'' + d(x)y(y')^2 + e(x)y^3y' + f(x)y^5 \\
&+ a_0(x)y''' + (c_1(x)y + c_0(x))y'' + d_0(x)(y')^2 + e_2(x)y^2y' \\
&+ (e_1(x)y + e_0(x))y' + f_4(x)y^4 + f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 \\
&+ f_1(x)y + f_0(x),
\end{aligned}$$

où $a, b, c, d, e, f, a_0, c_0, c_1, d_0, e_0, e_1, e_2, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ sont des fonctions analytiques de la variable complexe x dans un certain domaine $D \subset \mathbb{C}$. Plus précisément, on se propose de trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients de (E) pour que celle ci soit stable, en d'autres termes, déterminer toutes les classes d'équations stables du type (E).

Le premier qui a considéré ce problème et a obtenu des résultats est CHAZY [4]. Puis, BUREAU [2] a amélioré les résultats de ce dernier en élaborant une méthode qui permet d'étudier ce genre de problème. MARTINOV [15], EXTON [9] et KUDRYASHOV [14] ont trouvé certaines autres équations mais sans compléter la liste. Finalement, COSGROVE [7] a établi une liste exhaustive d'équations stables du type (E).

Le cas où $e = f = 0$ a été complètement étudié dans [2] et [7]. Dans notre travail on va considérer les deux cas complémentaires suivants :

1 - $e \neq 0; f = 0$.

2 - $f \neq 0$ (le cas le plus difficile de ce problème).

Notre travail est développé en deux chapitres. Le premier est composé de deux parties ; dans la première, on donne une définition de l'intégrabilité. On s'étend ensuite aux singularités critiques des fonctions analytiques ainsi que celles des équations différentielles dans le plan complexe. Puis on fait un rappel sur la théorie générale des E.D.O. linéaires au voisinage d'un point singulier régulier. On définit ensuite une transformation notée $T(\lambda, \mu, \varphi)$, avec laquelle on définira "une classe d'équation", et qui jouera un rôle très important pour la meilleure application de la méthode de BUREAU. A la fin de cette partie on donne quelques résultats classiques d'équations stables. Dans la deuxième partie de

ce chapitre, on énonce le théorème de POINCARÉ, et le lemme fondamental de stabilité qui seront utilisés pour démontrer le théorème de BUREAU, qui est, à son tour utilisé pour définir la méthode de BUREAU pour la construction de conditions nécessaires de stabilité.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de notre problème, il est composé de trois parties ; dans la première, on utilise la première et la deuxième étape de la méthode de BUREAU, pour déterminer toutes les équations de type (E) ayant des équations réduites stables, mais cela n'est possible qu'à l'aide de l'outil informatique à cause des équations algébriques engendrées par la méthode, qui ne peuvent être résolues à la main. Un cas où la méthode de BUREAU est non concluante est rencontré, ce qui nous a amené à définir (en utilisant le théorème de POINCARÉ et le lemme fondamental) un autre procédé extrait de la méthode de perturbation de PAINLEVÉ [5,6], adaptée à ce genre de cas. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on utilise la troisième étape de la méthode de BUREAU, pour déterminer toutes les équations complètes stables de type (E). Dans la troisième partie du chapitre, on étudie la suffisance des conditions nécessaires obtenues dans les deux parties précédentes.

On termine ce travail par la conclusion, ainsi qu'une annexe donnée à la fin de cette thèse, là où on donne la liste de classes d'équations stables de type (E) pour le cas ($e = f = 0$), ainsi que les différentes procédures d'un programme informatique utilisé à une certaine étape de notre étude.

Remarque 1 : Une partie de notre travail a fait l'objet d'une publication sous le titre : Fourth-order differential equations with integer indices of FUCHS, dans : **Regular and Chaotic Dynamics, V.6, N° 4, (2001), P.449-453.**

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités :

1.1.1 Intégration, singularités critiques, solutions d'une E.D. :

définition 1 [5, p.24] : Intégrer une équation différentielle (E.D.) au "sens moderne" de PAINLEVE est de trouver pour la solution générale une expression **finie**, pouvant être multiforme en un nombre **fini** de **fonctions**, et valide dans le domaine de définition tout entier.

exemple 1 : l'E.D.O. $2u'u - 1 = 0$ a pour solution générale $u = (x - C)^{\frac{1}{2}}$ (C constante arbitraire), une expression finie mais multiforme en un nombre infini de "fonctions".

Remarques 2 : *i-* Les représentations de la solution par une intégrale, une série ou un produit infini sont acceptables ssi elles expriment une globale connaissance de la solution.

ii- Si une solution générale uniforme d'une E.D. irréductible ne peut être exprimée par des fonctions connues, alors cette solution générale définit une nouvelle fonction qui est elle même utilisée pour intégrer d'autres équations.

Points singuliers critiques :

Définition 2 : on dit que le point $x = x_0$ est un point singulier critique d'une application f si f admet plusieurs déterminations au voisinage de ce point, et on dit que f est multiforme.

Il existe deux types de points singuliers critiques ;

- Points critiques algébriques : dans ce cas il existe $R > 0$ telle que f se développe dans le disque pointé $\{x \neq x_0 : |x - x_0| < R\}$ sous la forme

$$(1.1) \quad f(x) = k + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{\frac{k}{n}}, \quad n, m \text{ des entiers.}$$

exemple 2 : $f(x) = \sqrt{x - x_0}$ admet deux déterminations au voisinage de x_0 .

- Points critiques non algébriques : qui sont appelés, transcendants si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, et essentiels dans le cas contraire,

exemple 3 : $f(x) = \log(x - x_0)$, x_0 est critique transcendant (logarithmique), et f admet une infinité de déterminations.

Pour une application multiforme donnée, il existe deux méthodes classiques d'uniformisation :

- la première est l'utilisation du plan complexe privé d'un certain nombre de demi droites appelées **coupures**, issues chacune d'elle d'un point critique, afin d'éviter les rotations autour de ces points.

- la deuxième est d'étendre le plan complexe à une surface de REIMANN, faite de plusieurs plans parallèles tels que la coupure de chacun d'eux devient un passage obligatoire d'un plan à l'autre.

Solutions d'une E.D. : Soit $(\epsilon) E(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \dots, u, x) = 0$ une E.D.O. non linéaire d'ordre n , alors on distingue 3 types de solutions :

- *solution générale* (S.G.) : est la solution mentionnée dans le théorème d'existence et d'unicité de CAUCHY [11,10], c.a.d. déterminée par des valeurs initiales. Elle dépend de

n constantes arbitraires indépendantes.

- *solution particulière* (S.P.) : est toute solution obtenue de la S.G. en donnant des valeurs aux constantes arbitraires.

- *solutions singulière* (S.S.) : est une solution qui n'est pas particulière. Une telle solution peut seulement exister quand l'équation (ϵ) considérée comme une équation de la dérivé supérieur $u^{(n)}$, possède au moins deux déterminations, dont la coïncidence peut définir une S.S..

exemple 4 : l'équation du type CLAIRAUT : $2(u')^2 - xu' + u = 0$, a la S.G. : $cx - 2c^2$, une S.P. : $x - 2$, et une S.S. : $x^2/8$.

Remarque 3 : d'après la définition au dessus, notre équation (E) n'admet pas de S.S..

Points singuliers d'une E.D. :

Définition 3 : on appelle points singuliers d'une E.D., les points singuliers de ses solutions. On distingue deux types ; **fixes** (indépendants des conditions initiales) et **mobiles** (dépendants des conditions initiales).

exemple 5 : $u' + \frac{u^2}{x} = 0$, de S.G. $u(x) = \frac{1}{\log(x) + c}$, c constante d'intégration, alors $x = 0$ est un point critique transcendant fixe, et $x = e^c$ un pôle mobile.

Remarque 4 : la position et la nature des points singuliers fixes sont données par l'E.D. et au moins la position qui est obtenue en un nombre fini d'étapes sans connaissance des solutions, alors que la position d'une singularité mobile varie avec la variation des conditions initiales. Alors la présence d'une singularité en même temps critique et mobile pour une solution, est un obstacle pour son unifomisation et donc pour définir une fonction.

Définition 4 : une E.D. est dite **stable** (ou avoir la propriété de PAINLEVE (**P.P.**)) si sa solution générale n'a pas de points critiques mobiles.

exemple 6 : l'E.D.O. $u' + \frac{u^2}{x} = 0$ est stable (voir exemple 5).

Proposition 1 : les E.D.O. linéaires sont stables.

Preuve : on considère l'E.D.O. linéaire homogène d'ordre n

$$(1.2) \quad \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + a_n(x) u = 0,$$

soit x_0 un point quelconque du plan complexe au voisinage duquel les coefficients $a_i (i = 1..n)$ soient holomorphes. Alors d'après le théorème d'existence et d'unicité pour les E.D.O.s linéaires [11,p.284], il existe une solution unique qui vérifie avec ses $n - 1$ dérivées n'importe quelles valeurs arbitrairement assignées quand $x = x_0$. Cette solution s'exprime en série entière de $(x - x_0)$, et qui converge au moins à l'intérieur d'un cercle de centre x_0 et dont la circonférence passe à travers le point singulier des coefficients le plus proche de x_0 . Autrement dit les singularités de la solution ne peuvent être autres que les singularités des coefficients, et donc elle n'admet aucune singularité mobile.

Remarque 5 : le dernier théorème a des conséquences importantes ; premièrement, toute E.D.O. linéaire définit une fonction (AIRY, BESSEL, GAUSS, LEGENDRE...). Deuxièmement, une E.D.O. non linéaire est considérée comme intégrable si elle est linéarisable (par une expression linéarisante finie). Troisièmement, afin d'étendre la liste des fonctions connues par moyen d'E.D.O., il est nécessaire de considérer les E.D.O. non linéaires.

1.1.2 E.D.O. linéaires au voisinage d'un point singulier :

Théorème 1 [11,p.365] : une C.N.S.(condition nécessaire et suffisante) pour que x_0 soit un point singulier régulier de l'E.D.O. linéaire (1.2) est : pour tout $k = 1, \dots, n$;

$$(1.3) \quad a_k(x) = (x - x_0)^{-k} A(x) , \text{ avec } A(x) \text{ fonction analytique au voisinage de } x_0 \square$$

Soit x_0 un point singulier régulier de l'équation (1.2) désignée par $E(x, u) = 0$.

Définition 5 : les racines i de l'équation

$$(1.4) \quad \mathcal{I} \equiv x \rightarrow x_0 \lim x^{n-i} E(x, x^i) = a_0(x_0) + a_1(x_0)i + a_2(x_0)i(i-1) + \dots \\ + a_n(x_0)i(i-1)\dots(i-n+1) = 0,$$

sont appelées **indices de FUCHS** de (1.2), et l'équation (1.4) est appelée équation **indicielle**.

Solution générale de (1.2) au voisinage d'un point singulier régulier : Au voisinage d'un point singulier régulier, il existe un ensemble fondamental de solutions

$$(1.5) \quad (x - x_0)^{\rho_i} j = 0 \sum^{m_i} \varphi_{i,j}(x) (\log(x - x_0))^j, \quad i = 1..n,$$

où ρ_i : indices de FUCHS de multiplicité m_i , $\varphi_{i,j}$: série de LAURENT convergente avec une partie principale finie.

• **Conditions d'uniformité de la solution :**

1- D'après (1.5), pour éviter les points critiques algébriques, il est nécessaire et suffisant que les n indices de FUCHS soient entiers.

2- Supposons maintenant qu'il existe au moins deux indices ρ_1 et ρ_2 tels que : $\rho_2 - \rho_1 = m$, avec m entier positif. Pour chercher les conditions de non existence des termes logarithmiques, on remplace dans l'équation (1.2) par

$$(1.6) \quad (x - x_0)^{\rho_1} i = 0 \sum^{+\infty} \beta_i (x - x_0)^i, \quad \beta_i \text{ constantes complexes},$$

ce qui nous donne une série de la forme

$$(1.7) \quad (x - x_0)^p i = 0 \sum^{+\infty} G_i (x - x_0)^i = 0, \quad p \text{ entier},$$

telle que,

$$(1.8) \quad G_i \equiv \mathcal{I}(\rho_1 + i)\beta_i + g_i(\beta_0, \dots, \beta_{i-1}) = 0, \quad i \geq 0,$$

avec ($\mathcal{I} = 0$) l'équation indicelle de (1.2), g_i application dépendante des β_j $j = 0..(i-1)$ et $g_0 = 0$.

Alors une C.N. pour l'absence des termes logarithmiques est :

$$(1.9) \quad \boxed{g_m = 0}$$

1.1.3 Transformation $\mathbf{T}(\lambda, \mu, \varphi)$:

Une transformation linéaire de la fonction y et un changement de variable, définies par les équations

$$(1.10) \quad y(x) = \lambda(x)Y(X) + \mu(x), \quad X = \varphi(x),$$

λ, μ, φ désignant des fonctions analytiques de x , n'altèrent ni la forme de l'équation (E) ni la nature des points critiques fixes ou mobiles de sa solution.

On profite de l'indétermination de ces fonctions pour réduire les équations à des formes canoniques les plus simples possibles.

Définition 6 : On dit que deux E.D. appartiennent à la même **classe** d'équations stables, si l'une d'elle est stable et s'il existe une transformation $\mathbf{T}(\lambda, \mu, \varphi)$ qui transforme l'une à l'autre .

Remarques 6 : *i-* Dans un cas comme le notre (équation d'ordre 4), les coefficients λ, μ, φ de la transformation sont, soit des fonctions algébriques des coefficients de l'équation (E), soit déterminés par quadratures, ou par intégration d'une équation différentielle d'ordre 2 ou 3 dont les coefficients sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation (E).

ii- En prenant $\lambda \equiv 1$ et $\varphi \equiv x$, la transformation $\mathbf{T}(1, \mu, x)$ conserve les coefficients des termes dominants (voir définition 7 au dessous) pour μ fonction analytique quelconque.

1.1.4 Quelques résultats classiques sur les E.D.O. stables :

- E.D.O. d'ordre 1 : la classe complètement étudiée (L.FUCHS, H.POINCARÉ, P.PAINLEVÉ) est celle de la forme

$$(1.13) \quad P(u', u, x) = 0; \quad P \text{ polynôme en } u' \text{ et } u, \text{ analytique en } x.$$

De telles équations sont soit algébriquement intégrables, soit réductibles au type RICATTI de forme générale

$$(1.14) \quad u' = a_2(x)u^2 + a_1(x)u + a_0(x), \quad a_2 \neq 0,$$

et linéarisable puisqu'en posant $u = -\frac{1}{a_2} \frac{v'}{v}$, elle devient

$$(1.15) \quad v'' - \left(\frac{a_2'}{a_2} + a_1\right)v' + a_0a_2v = 0,$$

soit réductibles au type BRIOT-BOUQUET (équations binomiales) de forme

$$(1.16) \quad (u')^n = P_m(u), \quad P_m \text{ polynôme de degré } m,$$

- E.D.O. d'ordre 2 : PAINLEVÉ et GAMBIER ont considéré les équations de la forme

$$(1.17) \quad u'' = R(u', u, x), \quad R \text{ est rationnelle en } u', \text{ algébrique en } u, \text{ et analytique en } x.$$

Ils ont classifié (sous la transformation homographique) 53 équations stables, six de celles ci définissent de nouvelles transcendentes connues sous le nom " transcendentes de PAINLEVÉ " et notées généralement par (P-I, ... ,P-VI) [10,11]. Aujourd'hui ces nouvelles fonctions ont plusieurs applications à travers les sciences physiques, par exemple dynamique des fluides, physique du plasma, fibres optiques, mécanique quantique statistique, relativité générale, etc.

Quelques équations d'ordre 2 et de degré supérieur à un sont étudiées, mais aucune nouvelle transcendantale n'est encore apparue.

- E.D.O. d'ordre supérieur à 2 : l'étude de la majeure partie du problème du 3^{me} ordre

$$(1.18) \quad u''' = R(u'', u', u, x),$$

R rationnelle en u'' et u' , algébrique en u , et analytique en x , a été réalisée par CHAZY [4], GARNIER, BUREAU [2], et COSGROVE [8] et la classification de celui ci est presque terminée. Pour l'ordre 4, certains travaux ont été réalisés par CHAZY [4], BUREAU [2], COSGROVE [7] et autres. Pour l'ordre 5 quelques équations ont été étudiées récemment par COSGROVE [7].

1.2 Construction de conditions nécessaires (C.N.) pour qu'une E.D. soit stable :

Plusieurs méthodes ont été élaborées pour établir des conditions nécessaires pour qu'une E.D. soit stable, on cite la méthode du développement de LAURENT (connue comme le test de PAINLEVE) [5] initiée par S.KOVALEVSKI [13] et P.HOYER, la α -méthode construite par PAINLEVE [5], méthode de BUREAU [2,5] (celle qu'on va utiliser pour notre étude), et la méthode de perturbation de PAINLEVE [5,6].

Dans ce qui suit on énoncera le théorème de POINCARÉ et le lemme fondamental de stabilité qui vont être utilisés pour montrer le théorème BUREAU à l'aide duquel on définira la méthode de BUREAU.

Considérons le système

$$(1.19) \quad \frac{dy}{dx} = f(x; y; \varepsilon),$$

où ε est un paramètre complexe, et $f = (f_1, \dots, f_n)$ un vecteur holomorphe dans un domaine $D \times \Delta$, tel que D contient $(x_0; y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n}))$ et Δ le point $\varepsilon = 0$.

On dit que le système

$$(1.20) \quad \frac{dv_0}{dx} = f(x; v_0; 0),$$

est le système *réduit* (non perturbé) correspondant au système *perturbé* (1.19). Désignons par $y(x; y_0; \varepsilon)$ et $v_0(x; y_0)$ les vecteurs analytiques définis par les solutions locales de CAUCHY des systèmes (1.19) et (1.20) telles que $y(x_0; y_0; \varepsilon) = y_0$ et $v_0(x_0; y_0) = y_0$.

Théorème de POINCARÉ [3,17] : Si L est un arc régulier le long duquel $v(x; y_0)$ peut être prolongé analytiquement de telle manière que le point $(x; v(x; y_0)) \in D$ pour tout $x \in L$, alors $y(x; y_0; \varepsilon)$ peut être prolongé sur L et l'on a le développement :

$$(1.21) \quad y(x; y_0; \varepsilon) = v_0(x; y_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x) \varepsilon^k,$$

absolument et uniformément convergent en ε dans $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ [ε_0 dépendant de D et de $f(x; y; \varepsilon)$], pour tout $x \in L$.

Lemme fondamental de stabilité [11] : Si la solution générale du système différentiel (1.19) est uniforme en x pour toutes valeurs de ε dans Δ sauf (peut être) pour $\varepsilon = 0$, alors elle sera aussi uniforme en $\varepsilon = 0$, de plus les coefficients $v_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) de la série (1.21) sont aussi uniformes.

preuve : on considère dans le plan complexe un chemin fermé l d'origine et d'extrémité x_0 , sur lequel $y(x, \varepsilon) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est analytique, telle que

$$(1.22) \quad y_i(x; \varepsilon) = v_{i,0}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_{i,k}(x) \varepsilon^k, \quad i = 1..n,$$

Ces séries sont convergentes pour x sur tout l pour des valeurs suffisamment petites de $|\varepsilon|$. Soit d_k la différence entre la valeur $v_{i,k}(x)$ et celle de la même fonction après avoir parcouru l , alors on a

$$(1.23) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} d_k \varepsilon^k = 0, \quad \text{pour } 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0,$$

et par conséquent

$$(1.24) \quad d_k = 0, \quad \text{pour tout } k.$$

Il suit que $v_0, v_1, v_2, \dots$ sont uniformes.

Théorème de BUREAU [3]: Soient $k > 0$ un entier, $P(x, z)$ un polynôme en z de degré $\leq k - 2$ pour $k > 2$, identiquement nul pour $k \leq 2$, à coefficients analytiques en x dans un domaine D donné; $H(x; z; u; u'; \dots; u^{(n-1)})$ un polynôme en $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$

à coefficients holomorphes en z dans un certain voisinage de $z = 0$, et analytiques en x dans D ; $h(x, z)$ une fonction holomorphe en z dans le voisinage de $z = 0$, et analytique en x dans D .

Considérons le système différentiel :

$$(1.25) \begin{cases} z' = 1 + zP(x; z) + z^k u, \\ z^n u^{(n)} + c_1 z^{n-1} u^{(n-1)} + \dots + c_{n-1} z u' + c_n u = h(x; z) + \frac{z}{z'} H(x; z; u; u'; \dots; u^{(n-1)}). \end{cases}$$

avec c_i , $i = 1..n$, des constantes complexes.

Pour que $[z(x)]^r$, r entier > 0 , soit stable, il est nécessaire :

-i) que les racines de l'équation

$$(1.26) \quad \theta(\theta - 1) \dots (\theta - n + 1) + c_1 \theta(\theta - n + 2) + \dots + c_{n-1} \theta + c_n = 0,$$

soient distinctes, entières, et différentes de $(-1 - k)$.

-ii) si une des racines est nulle, que $h(x; 0) \equiv 0$.

Remarques 7 :

1) Lorsque $r \neq 1$, la fonction $[z(x)]^r$ peut être stable alors que le système (1.25) est instable, il en est ainsi lorsque z^r admet des zéros ou des pôles mobiles dont l'ordre n'est pas multiple de r .

2) Lorsque $r = 1$ et $H(x; z; u; u'; \dots; u^{(n-1)})$ est divisible par $[1 + zP(x; z) + z^k u]$ on retrouve un résultat de F.J. Bureau [2].

3) Dans toutes notre étude, les notations H ou H_1 représentent un polynôme de mêmes propriétés que celles des hypothèses de ce théorème.

Preuve : Dans le système (1.25), on pose $x = x_0 + \varepsilon t$, $z = \varepsilon v$; x_0 constant, $x_0 \in D$; $\varepsilon \neq 0$, et on obtient

$$(1.27) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = 1 + \varepsilon v P(x_0 + \varepsilon t; \varepsilon v) + \varepsilon^k v^k u, \\ v^n \frac{d^n u}{dt^n} + c_1 v^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + c_2 v^{n-2} \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} + \dots + c_{n-1} v \frac{du}{dt} + c_n u = h(x_0 + \varepsilon t; \varepsilon v) \\ + \varepsilon v \frac{H(x_0 + \varepsilon t; \varepsilon v; u; u'; \dots u^{(n-1)})}{1 + \varepsilon v P(x_0 + \varepsilon t; \varepsilon v) + \varepsilon^k v^k u}. \end{array} \right.$$

Le système réduit s'écrit

$$(2.28) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dv_0}{dt} = 1, & (\xi_1) \\ v_0^n \frac{d^n u_0}{dt^n} + c_1 v_0^{n-1} \frac{d^{n-1} u_0}{dt^{n-1}} + \dots + c_n u_0 = h(x_0; 0). & (\xi_2) \end{array} \right.$$

On a $v_0 = t - C$, C constant, et l'équation (1.28- ξ_2) est une équation d'EULER dont l'équation indiciale est (1.26). Si l'on désigne par θ_j ($j = 1..n$) les racines de (1.26) et par C_j des constantes complexes quelconques, on a les possibilités suivantes :

1°) Tous les θ_j sont distincts, $\theta_j \neq 0$ ($j = 1..n$);

$$(1.29) \quad u_0(t) = \sum_{j=1}^n C_j (t - C)^{\theta_j} + \frac{h(x_0; 0)}{c_n}.$$

2°) θ_k est une racine m -uple, $\theta_k \neq 0$;

$u_0(t)$ contient notamment les termes $(t - C)^{\theta_k} \sum_{j=1}^m A_j [\log(t - C)]^{j-1}$.

3°) $\theta_k = 0$, $c_{n-1} \neq 0$; $u_0(t)$ contient le terme suivant qui est l'expression d'une solution particulière :

$$(1.30) \quad \frac{h(x_0; 0)}{C_0} \log(t - C), \text{ où } C_0 = (-1)^{n-1} (n-1)! + c_1 (-1)^{n-2} (n-2)! + \dots + c_{n-1} \neq 0.$$

4°) $\theta_k = 0$ est une racine m -uple;

$u_0(t)$ contient notamment les termes donnés dans le 2°).

Appliquons le théorème de POINCARÉ en prenant pour contour L une circonférence de centre C . On a

$$(1.31) \quad \begin{cases} v(t; \varepsilon) = v_0(t) + \sum_{p=1}^{\infty} v_p(t) \varepsilon^p, \\ u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \sum_{p=1}^{\infty} u_p(t) \varepsilon^p, \end{cases}$$

d'où

$$(1.32) \quad [v(t; \varepsilon)]^r = v_0^r + \varepsilon r v_0^{r-1} v_1 + \dots + \varepsilon^j [r v_0^{r-1} v_j + \mathcal{P}(v_0, \dots, v_{j-1})] + \dots,$$

où $\mathcal{P}$ est un polynôme en $v_0, \dots, v_{j-1}$.

Si $[z(x)]^r$ est stable, $[v(t, \varepsilon)]^r$ est stable pour tout $\varepsilon \neq 0$ et, d'après le **lemme fondamental de stabilité**, tous les coefficients du développement (1.32) doivent avoir leurs points critiques fixes.

En remplaçant dans (1.27), $v(t; \varepsilon)$ et $u(t; \varepsilon)$ par les développements (1.31), on voit que pour $j < k$, $\frac{dv_j}{dt}$ est un polynôme en $v_0, v_1, \dots, v_{j-1}$ et, vu la forme de v_0 , on déduit de proche en proche que v_j est un polynôme en $(t - C)$. Dès lors

$$(1.33) \quad \frac{dv_k}{dt} = v_0^k u_0 + \mathcal{P}_1(t - C),$$

donc,

$$(1.34) \quad v_k = \mathcal{P}_2(t - C) + \int v_0^k u_0 dt,$$

où $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ désignent des polynômes en $(t - C)$.

Le coefficient de ε^k dans le développement (1.32) est ainsi de la forme

$$(1.35) \quad r(t - C)^{r-1} \int (t - C)^k u_0(t) dt + \mathcal{P}_3(t - C),$$

où $\mathcal{P}_3$ est un polynôme en $(t - C)$. En tenant compte des formes possibles de $u_0(t)$, on vérifie que, pour que l'expression (1.35) ne possède pas de points critiques mobiles, il faut que les conditions annoncées dans le théorème soient satisfaites. Pour montrer que $h(x; 0) \equiv 0$, dans le cas où $\theta_k = 0$, $c_{n-1} \neq 0$, on tiendra compte du fait que x_0 est arbitraire dans D .

Méthode de BUREAU :

On suppose que la solution générale de notre équation au voisinage d'un point singulier quelconque (mobile) x_0 de D est de la forme :

$$(1.36) \quad y(x) = \frac{s(x)}{(x - x_0)^r},$$

où s une fonction holomorphe dans D telle que $s(x_0) \neq 0$, r est un entier positif à déterminer.

Première étape : Dans cette étape on déterminera toutes les valeurs possibles de r et $s(x_0)$.

En remplaçant y par (1.36), telle que

$$(1.37) \quad \begin{cases} y'(x) = -rs(x_0)(x - x_0)^{-r-1}[1 + O(x - x_0)], \\ y''(x) = r(r+1)s(x_0)(x - x_0)^{-r-2}[1 + O(x - x_0)], \\ y'''(x) = -r(r+1)(r+2)s(x_0)(x - x_0)^{-r-3}[1 + O(x - x_0)], \\ y''''(x) = r(r+1)(r+2)(r+3)s(x_0)(x - x_0)^{-r-4}[1 + O(x - x_0)], \end{cases}$$

et $a(x) = a(x_0)(1 + O(x - x_0))$, $\dots$, $f_0(x) = f_0(x_0)(1 + O(x - x_0))$,

l'équation (E) sera équivalente à :

$$(1.38) \quad (j \sum E_j(x - x_0)^{j+p})(1 + O(x - x_0)) = [r(r+1)(r+2)(r+3) s(x_0) (x - x_0)^{-r-4} + r(r+1)(r+2) s(x_0)^2 a(x_0) (x - x_0)^{-2r-3} + \dots - s(x_0)^5 (x - x_0)^{-5r} + r(r+1)(r+2) s(x_0) a_0(x_0) (x - x_0)^{-r-3} + \dots - rs(x_0) f_1(x_0) (x - x_0)^{-r} - f_0(x_0)] (1 + O(x - x_0)) = 0.$$

telle que p est le plus petit entier de la liste (puissances de la série) suivante :

$$(1.39) \quad (-r - 4, -2r - 3, -3r - 2, \dots, -5r, -r - 3, -2r - 2, \dots, -r - 1, -r, 0),$$

alors on choisit r et $s(x_0)$ de telle sorte à avoir les 3 conditions suivantes :

1- condition $s(x_0) \neq 0$: pour satisfaire cette condition on doit avoir l'égalité d'au moins deux éléments de la liste (1.39), et p représente la valeur commune de ces éléments.

2- condition de dominance : p doit être inférieure à tous les autres éléments de la liste.

3- condition d'annulation de la série (1.38) : on détermine $s(x_0)$ de l'annulation du coefficient E_0 du terme à plus petite puissance $(x - x_0)^p$, et qu'on peut représenter par

$$(1.40) \quad E_0 = x \rightarrow x_0 \lim (x - x_0)^{-p} E(x, s(x_0)(x - x_0)^{-r}),$$

Alors la première C.N. de stabilité de notre équation est :

$$(c.1) \quad \boxed{\text{toutes les valeurs possibles de } r \text{ doivent être entières.}}$$

Remarques 8 : *i-* A chaque valeur de r correspond un nombre fini de valeurs $s_0 = s(x_0)$ racines de l'équation (1.40).

ii- Pour la méthode de BUREAU, la dérivée supérieure doit contribuer dans la détermination de r , afin d'être sûr de travailler avec la solution générale et donc éviter les solutions singulières $\square$

Définition 7 : Les termes correspondants aux éléments choisis dans la liste et qui vérifient la condition de dominance sont appelés termes **dominants**, et constituent l'**équation réduite** de l'équation complète (E).

Deuxième étape : On pose

$$(1.41) \quad \begin{cases} y(x) = \frac{s_0}{z(x)^r}, \\ z' = 1 + zu, \end{cases}$$

tel que $s_0 = s(x_0)$ est l'une des racines de l'équation (1.40) correspondant à la valeur r .

En remplaçant dans l'équation (E) dont les coefficients sont exprimés par leurs développements en série de TAYLOR au voisinage de x_0 , on aura le système

$$(1.42) \quad \begin{cases} z' = 1 + zu, \\ z^3 u''' + t_2 z^2 u'' + t_1 z u' + t_0 u = h(x, z) + H(x, z, u, u', u''), \end{cases}$$

qui est de la même forme que (1.25) du théorème de BUREAU ($k = 1$), avec t_i ($i = 0..2$) constantes dépendantes de s_0 et des coefficients de notre équation (E) au point x_0 , et H a les même propriétés que celui de ce théorème.

Avant de continuer avec la méthode, on va donner la définition.

Définition 8 : On appelle équation indicielle associée au système (1.42), l'équation indicielle de l'E.D. linéaire d'EULER

$$(1.43) \quad x^3 u''' + t_2 x^2 u'' + t_1 x u' + t_0 u = 0,$$

qui est le membre gauche de la deuxième équation du système (1.42) avec x à la place de z □

D'après le théorème de BUREAU, la deuxième C.N. de stabilité est donnée par :

(c.2) *les racines de l'équation indicielle associée au système (1.42) doivent être entières distincts et différentes de -2 , et s'il existe un indice nul, alors on doit avoir $h(x, 0) \equiv 0$.*

NOTATION : Dans toute notre étude, la notation $\mathfrak{F} : [s(x_0) ; \theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3]$ caractérise une famille de singularités mobiles, telle que :

- $s(x_0)$ donnée par la première étape de la méthode et représente le coefficient du premier terme du développement en série de y au voisinage de $x = x_0$.
- $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont les indices correspondants à $s(x_0)$ et qui sont racines de l'équation indicielle associée au système (1.42).

Troisième étape : Maintenant supposons que la condition (c.2) est vérifiée pour toutes les familles de singularités mobiles et soit $[s_0 ; \theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3]$ une de ces familles telle qu'elle admet au moins un indice positif, et supposons que θ_1 est le plus petit de ces indices(positifs), alors on pose

$$(1.44) \quad \begin{cases} u = \mathcal{P}_{\theta_1-1}(x, z) + z^{\theta_1}v, \\ \mathcal{P}_{\theta_1-1} = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{\theta_1-1} z^{\theta_1-1}. \end{cases}$$

où v est une fonction inconnue, $\mathcal{P}_{\theta_1-1}(x, z)$ un polynôme en z de degré $(\theta_1 - 1)$ dont les coefficients α_i sont des fonctions analytiques de x qui seront déterminées par la suite.

En remplaçant dans le système (1.42) par (1.44) on aura :

$$(1.45) \quad \begin{cases} z' = 1 + z\mathcal{P}_{\theta_1-1}(x, z) + z^{\theta_1+1}v, \\ z^{\theta_1}[z^3v''' + (t_2 + 3\theta_1)z^2v'' + (t_1 + 2t_2\theta_1 + 3\theta_1(\theta_1 - 1))zv'] = A_0 + A_1z \\ \quad \quad \quad + \dots + A_{\theta_1}z^{\theta_1} + z^{\theta_1+1}H_1(x, z, v), \end{cases}$$

où les coefficients A_i sont de la forme

$$(1.46) \quad A_i \equiv \mathcal{I}(i)\alpha_i(x) + R_i(x, z, \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}).$$

telles que $\mathcal{I}(i) = 0$ est l'équation indicielle associée au système (1.42), et $R_i(x, z, \alpha, \dots, \alpha_{i-1})$ est un polynôme dépendant des α_j , ($j \leq i - 1$).

On choisit les fonctions α_i ($i = 0..(\theta_1 - 1)$) de telle sorte à avoir :

$$(1.47) \quad A_i = 0 \quad (i = 0.. \theta_1 - 1).$$

Puisque l'équation indicielle asociée au système (1.45) admet $\theta = 0$ comme racine alors d'après le théorème de BUREAU, on doit avoir :

$$(c.3) \quad \boxed{A_{\theta_1} \equiv 0.}$$

Remarque 9 : Si θ_1 est le seul indice positif de la famille, la méthode s'arrête ici, sinon on passe à ce qui va suivre $\square$

Pour la suite supposons que $\theta_2 > \theta_1$.

Les racines de l'équation indicelle associée au système (1.45) sont $(0, \theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_1)$.

En procédant avec le même raisonnement que précédemment et en posant

$$(1.48) \quad \begin{cases} v = \mathcal{P}_{\theta_2 - \theta_1 - 1}(x, z) + z^{\theta_2 - \theta_1} \omega, \\ \mathcal{P}_{\theta_2 - \theta_1 - 1} = \alpha_{\theta_1} + \alpha_{\theta_1 + 1} z + \dots + \alpha_{\theta_2 - 1} z^{\theta_2 - \theta_1 - 1}, \end{cases}$$

où ω est une fonction inconnue de x , $\mathcal{P}_{\theta_2 - \theta_1 - 1}$ polynôme en z dont les coefficients α_i ($i = (\theta_1 + 1) \dots (\theta_2 - 1)$) sont des fonctions de x qu'on déterminera par la suite, avec α_{θ_1} arbitraire, et puis en remplaçant dans (1.47) on obtient

$$(1.49) \quad \begin{cases} z' = 1 + z \mathcal{P}_{\theta_1 - 1}(x, z) + z^{\theta_1 + 1} \mathcal{P}_{\theta_2 - \theta_1 - 1}(x, z) + z^{\theta_2 + 1} \omega, \\ z^{\theta_2} [z^3 \omega''' + (t_2 + 3\theta_2) z^2 \omega'' + (t_1 + 2t_2 \theta_2 + 3\theta_2(\theta_2 - 1)) z \omega'] = A_{\theta_1} + A_{\theta_1 + 1} z \\ \quad + \dots + A_{\theta_2} z^{\theta_2} + z^{\theta_2 + 1} H(x, z, \omega, \omega', \omega'', \omega'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions α_i ($i = (\theta_1 + 1) \dots (\theta_2 - 1)$) de telle manière à avoir :

$$(1.50) \quad A_i \equiv 0 \quad (i = (\theta_1 + 1) \dots (\theta_2 - 1)),$$

et l'équation indicelle associée au système (1.49) admet $\theta = 0$ comme racine ; alors du théorème de BUREAU, on a la C.N. de stabilité du système (1.49) suivante

$$(c.4) \quad \boxed{A_{\theta_2} \equiv 0}.$$

Si θ_1, θ_2 sont les seuls indices positifs de la famille, la méthode s'arrête ici, sinon (c.a.d. $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1$), on passe à ce qui suit.

Les racines de l'équation indicelle associée au système (1.49) sont : $(0, \theta_3 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2)$; alors on pose

$$(1.51) \quad \begin{cases} \omega = \mathcal{P}_{\theta_3-\theta_2-1}(x, z) + z^{\theta_3-\theta_2}\lambda(x), \\ \mathcal{P}_{\theta_3-\theta_2-1} = \alpha_{\theta_2} + \alpha_{\theta_2+1}z + \dots + \alpha_{\theta_3-1}z^{\theta_3-\theta_2-1}, \end{cases}$$

où λ est une fonction inconnue de x , $\mathcal{P}_{\theta_3-\theta_2-1}$ polynôme en z dont les coefficients α_i ($i = \theta_2.. \theta_3 - 1$) sont des fonctions de x qu'on déterminera par la suite, avec α_{θ_2} arbitraire.

En remplaçant dans (1.49) on aura :

$$(1.52) \quad \begin{cases} z' = 1 + z\mathcal{P}_{\theta_1-1}(x, z) + z^{\theta_1+1}\mathcal{P}_{\theta_2-\theta_1-1}(x, z) + z^{\theta_2+1}\mathcal{P}_{\theta_3-\theta_2-1}(x, z) + z^{\theta_3+1}\lambda, \\ z^{\theta_3}[z^3\lambda''' + (t_2 - 3\theta_3)z^2\lambda'' + (t_1 + 2t_2\theta_3 + 3\theta_3(\theta_3 - 1))z\lambda'] = A_{\theta_2} + A_{\theta_2+1}z \\ + A_{\theta_2+2}z^2 + \dots + A_{\theta_3}z^{\theta_3} + z^{\theta_3+1}H(x, z, \lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions α_i ($i = (\theta_2 + 1)..(\theta_3 - 1)$) de telle manière à avoir :

$$(1.53) \quad A_i \equiv 0 \quad (i = (\theta_2 + 1)..(\theta_3 - 1)),$$

par conséquent, du théorème de BUREAU on a la C.N. de stabilité du système (1.52) suivante

$$(c.5) \quad \boxed{A_{\theta_3} \equiv 0}.$$

Remarque importante 10 : Au lieu de faire les substitutions (1.44), (1.48), (1.51) successivement, on peut aussi poser

$$(1.54) \quad \begin{cases} u = \mathcal{P}_{\theta_3-1}(x, z) + z^{\theta_3}v, \\ \mathcal{P}_{\theta_3-1}(x, z) = \alpha_0 + \alpha_1z + \dots + \alpha_{\theta_3-1}z^{\theta_3-1}, \end{cases}$$

telle que v est une fonction inconnue de x , et $\mathcal{P}_{\theta_3-1}$ polynôme en z dont les coefficients α_i ($i = 0.. \theta_3 - 1$) sont des fonctions de x à déterminer comme précédemment, avec α_i ($i = \theta_1, \theta_2$) arbitraires. Ainsi nous aurons les mêmes C.N. (c.3, 4, 5). C'est de cette manière qu'on appliquera cette méthode pour notre étude.

Remarques 11 : *i-* Les deuxième et troisième étapes de la méthode sont appliquées pour toutes valeurs de r et toutes valeurs de s_0 correspondantes.

ii- La méthode définie au dessus peut être aussi appliquée pour des équations d'ordre supérieure ou inférieure à 4.

Chapitre 2

Equations de quatrième ordre de classe de Painlevé :

2.1 Position du problème :

Récrivons l'équation différentielle (E) :

$$(2.1) \quad y'''' = a(x)yy'''' + b(x)y'y'' + c(x)y^2y'' + d(x)y(y')^2 + e(x)y^3y' + f(x)y^5 + F(x, y),$$

où,

$$(2.2) \quad F(x, y) = a_0(x)y'''' + (c_1(x)y + c_0(x))y'' + d_0(x)(y')^2 + (e_2(x)y^2 + e_1(x)y + e_0(x))y' + f_4(x)y^4 + f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x),$$

avec $a, b, c, d, e, f, a_0, c_0, c_1, d_0, e_0, e_1, e_2, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ des fonctions analytiques de x dans un certain domaine $D \subset \mathbb{C}$.

Notre travail consiste à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients de l'équation (2.1) pour que celle ci soit stable pour les deux cas : ($e \neq 0, f = 0$) et ($f \neq 0$). En d'autre termes, déterminer toutes les classes d'équations stables de la forme (2.1) pour ces deux cas.

2.2 Etude du problème :

Le membre droit de l'équation (2.1) est polynomial en y ainsi que ses dérivées, et à coefficients analytiques en x ; alors la seule valeur de y pour qui le théorème d'existence et d'unicité de CAUCHY ne s'applique pas pour cette équation est $y = \infty$.

Pour déterminer des conditions nécessaires pour que l'équation (2.1) soit stable, on suppose que dans un voisinage de $x = x_0$ (quelconque), y est de la forme

$$(2.3) \quad y(x) = \frac{s(x)}{(x - x_0)^r},$$

où $r > 0$, et s est une fonction holomorphe dans D telle que $s(x_0) \neq 0$.

Détermination de r et $s(x_0)$: Puisque au moins l'un des $e(x_0)$ et $f(x_0)$ n'est pas nul, alors les termes dominants (voir première étape de la méthode de BUREAU, §1) sont : y'''' , yy'''' , $y'y''$, y^2y'' , $y(y')^2$, y^3y' et y^5 et qui sont respectivement proportionnels à

$$(2.4) \quad (x - x_0)^{-r-4}, (x - x_0)^{-2r-3}, (x - x_0)^{-3r-2}, (x - x_0)^{-4r-1}, \text{ et } (x - x_0)^{-5r},$$

alors on a

$$(2.5) \quad \boxed{r = 1},$$

et que $s(x_0)$ doit satisfaire à l'équation

$$(2.6) \quad f(x_0)s(x_0)^4 - e(x_0)s(x_0)^3 + (2c(x_0)+d(x_0))s(x_0)^2 - 2(3a(x_0)+b(x_0))s(x_0) - 24 = 0.$$

Remarque 12 : Dans le but de simplifier l'écriture dans la partie suivante où on travaillera avec l'équation réduite, les notations $a, b, \dots, f$ et s représenteront les constantes $a(x_0), b(x_0), \dots, e(x_0), f(x_0)$ et $s(x_0)$. Mais en dehors de cette partie ces symboles retrouveront leurs premières "significations", c.a.d. fonctions analytiques de x dans D .

2.2.1 Etude de l'équation réduite :

proposition 2 : Pour que (2.1) soit stable, il est nécessaire que son équation réduite :

$$(2.7) \quad y'''' = ayy'''' + by'y'' + cy^2y'' + dy(y')^2 + ey^3y' + fy^5,$$

où a, b, c, d, e, f sont des constantes complexes,
le soit aussi.

preuve : Il suffit de poser :

$$(2.8) \quad x = x_0 + \varepsilon X, \quad y = \varepsilon^{-1} Y,$$

et en remplaçant dans (2.1) dont les coefficients sont donnés par leurs développements au voisinage de x_0 , on obtient une série de la forme

(2.9) $E(x, y) \equiv i \sum E_i(Y, X, x_0) \varepsilon^i = 0$, telle que : $E_0 = 0$ est exactement l'équation (2.7), et le théorème de POINCARÉ et le lemme fondamental de stabilité nous donnent le résultat voulu $\square$

D'après la deuxième étape de la méthode de BUREAU, on pose

$$(2.10) \quad y(x) = \frac{s}{z(x)}, \quad z' = 1 + zu,$$

et l'équation (2.7) est équivalente au système

$$(2.11) \quad \begin{cases} z' = 1 + zu, \\ z^3 u''' - (5 + as)z^2 u'' + [20 + (4a + b)s - cs^2]zu' - [60 + (12a + 5b)s \\ -(3c + 2d)s^2 + es^3]u = 0, \end{cases}$$

telle que son équation indicelle associée est de la forme

$$(2.12) \quad \theta(\theta - 1)(\theta - 2) - (5 + as)\theta(\theta - 1) + [20 + (4a + b)s - cs^2]\theta - [60 + (12a + 5b)s \\ -(3c + 2d)s^2 + es^3] = 0.$$

proposition 3 : Pour que l'équation (2.7) soit stable il est nécessaire que les racines de l'équation (2.12) soient entières, distincts et différentes de -2 .

preuve : le théorème de BUREAU nous donne immédiatement le résultat voulu $\square$

On pose :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \theta = \chi - 1, \text{ et} \\ P(s) = 96 + 6(3a + b)s - 2(2c + d)s^2 + es^3, \end{cases}$$

ainsi l'équation (2.12) devient

$$(2.14) \quad \chi^3 - (11 + as)\chi^2 + [46 + (7a + b)s - cs^2]\chi - P(s) = 0.$$

Alors nous avons à résoudre le problème suivant :

(★) Déterminer a, b, c, d, e, f telles que les racines de (2.14) soient entières, distincts et différentes de -1 avec s donné par (2.6).

Premier cas : $e \neq 0, f = 0$:

Dans ce cas (2.6) devient

$$(2.15) \quad es^3 - (2c + d)s^2 + 2(3a + b)s + 24 = 0.$$

Soient $(\chi_{i,1}, \chi_{i,2}, \chi_{i,3})$ ($i = 1..3$) solutions entières de (2.14) correspondantes respectivement à s_i ($i = 1..3$) racines de l'équation (2.15).

De (2.14), on a pour tout $i = 1..3$:

$$(2.16) \quad \begin{cases} P_i = P(s_i) = \chi_{i,1} \chi_{i,2} \chi_{i,3}, \end{cases}$$

$$(2.17) \quad \begin{cases} as_i = \sum_{j \leq 3} \chi_{i,j} - 11, \end{cases}$$

$$(2.18) \quad \begin{cases} cs_i^2 = 46 + (7a + b)s_i - \sum_{1 \leq k < j \leq 3} \chi_{i,j} \chi_{i,k}, \end{cases} .$$

Et de (2.15) on obtient :

$$(2.19) \quad \begin{cases} s_1 s_2 s_3 = \frac{-24}{e}, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq 3} s_i s_j = \frac{2(3a + b)}{e}, \\ \sum_{i \leq 3} s_i = \frac{2c + d}{e}, \end{cases} \iff \begin{cases} e = \frac{-24}{s_1 s_2 s_3}, \\ 3a + b = \frac{e}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} s_i s_j, \\ 2c + d = e \sum_{i \leq 3} s_i. \end{cases}$$

En remplaçant dans (2.13) par (2.19) on obtient :

$$(2.20) \quad \begin{cases} P_1 = 24(1 - \frac{s_1}{s_2})(1 - \frac{s_1}{s_3}), \\ P_2 = 24(1 - \frac{s_2}{s_1})(1 - \frac{s_2}{s_3}), \\ P_3 = 24(1 - \frac{s_3}{s_1})(1 - \frac{s_3}{s_2}), \end{cases}$$

d'où

$$(2.21) \quad \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{1}{24}.$$

avec P_i ($i = 1..3$) entiers non nuls.

Remarque 13 : le cas où on a $P(s) = 0$ va être étudié par la suite $\square$

Pour résoudre le problème (★) on procède comme suit :

- Au début, on résout l'équation diophantienne (2.21), telle que les solutions obtenues sont, d'un côté remplacées dans (2.20), et d'un autre, pour chaque P_i on détermine toutes les combinaisons de trois entiers distincts non nuls $(\chi_{i,1}, \chi_{i,2}, \chi_{i,3})$ telles que $P_i = \chi_{i,1} \chi_{i,2} \chi_{i,3}$.

- En posant $t_1 = \frac{s_1}{s_2}$, $t_2 = \frac{s_1}{s_3}$, (2.20) sera équivalent à un système de deux équations à deux inconnues (car (2.21) est obtenue de (2.20)), en plus si $a \neq 0$, alors d'après (2.17) t_1 et t_2 doivent être rationnelles.

- Dans le cas où on a la compatibilité des trois valeurs de $(\frac{s_1}{s_2}, \frac{s_1}{s_3})$ données respectivement par (2.20), (2.17) et (2.18), on obtient une classe d'équations admettant 3 familles de pôles simples mobiles définies par $[as_i; \theta = \chi_{i,1} - 1, \chi_{i,2} - 1, \chi_{i,3} - 1]$ ($i = 1..3$), et dont les coefficients peuvent être exprimés en fonction de l'un d'entre eux.

En effet de (2.19) on a :

$$(2.22) \quad \left[e = -24 \frac{a^3}{(as_1)(as_2)(as_3)}, \right.$$

$$(2.23) \quad \left[b = \frac{e}{2a^2} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (as_i)(as_j) - 3a, \right.$$

de (2.18) on a :

$$(2.24) \left[c = \frac{a^2}{(as_1)^2} [46 + 7(as_1) - \sum_{1 \leq k < j \leq 3} \chi_{1,k} \chi_{1,j}] + \frac{ab}{(as_1)}, \right.$$

de (2.19) on a

$$(2.25) \left[d = \frac{e}{a} \sum_{i \leq 3} (as_i) - 2c, \right.$$

et les valeurs as_i ($i = 1..3$) sont données par (2.17).

Pour réaliser cette résolution, on utilise l'outil informatique, et à l'aide du logiciel MAPLE, on a élaboré des programmes dont les procédures principales sont définies et données à l'**annexe**.

Résultats obtenus :

1) $P_1 \neq 24$ et $a = 0$: Il n'y a qu'un seul cas de compatibilité des valeurs $(\frac{s_i}{s_j})$, donné par le tableau suivant :

solutions de l'équ. (2.21)	P_1			P_2			P_3		
	40			40			-120		
décomp. des P_i en 3 entiers $\neq$	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$
	2	4	5	2	4	5	4	10	-3
bs_i , données par (2.19) et (2.20)	bs_1			bs_2			bs_3		
	$4-4\sqrt{5}$			$4+4\sqrt{5}$			24		
COEFFICIENTS de (2.7)	a	b		c	d		e		f
	0	b		$\frac{1}{8}b^2$	$\frac{1}{4}b^2$		$\frac{1}{64}b^3$		0

tableau 1

Et l'équation aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.26) \quad y'''' = by'y'' + \frac{1}{8}b^2y^2y'' + \frac{1}{4}b^2y(y')^2 + \frac{1}{64}b^3y^3y',$$

avec b une constante complexe non nulle.

En utilisant la transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec

$$(2.27) \quad \begin{cases} \alpha = (\frac{b}{24})^{(-\frac{1}{5})}, \\ \beta = (\frac{24}{b})^{(\frac{4}{5})}, \end{cases}$$

l'équation (2.26) devient

$$(2.28) \quad y'''' = 24y'y'' + 72y^2y'' + 144y(y')^2 + 216y^3y',$$

puis en intégrant une fois (2.28) on obtient

$$(2.29) \quad y''' + 6(y')^2 = 18(y' + y^2)(y' + 3y^2) + C,$$

qui est l'équation stable IX de CHAZY [4].

2) $P_1 \neq 24$ et $a \neq 0$: On obtient un seul cas de compatibilité des valeurs $(\frac{s_i}{s_j})$, défini par

solutions de l'équ. (2.21)	P_1			P_2			P_3		
	15			-24			60		
décomp. des P_i	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$
en 3 entiers $\neq$	1	3	5	1	6	-4	6	-2	-5
as_i , données par (2.17)	as_1			as_2			as_3		
	-2			-8			-12		
COEFFICIENTS de (2.7)	a	b	c		d		e	f	
	a	$\frac{11}{2}a$	$-\frac{1}{2}a^2$		$-\frac{7}{4}a^2$		$\frac{1}{8}a^3$	0	

tableau 2

Et l'équation aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.30) \quad y'''' = ayy''' + \frac{11}{2}ay'y'' - \frac{1}{2}a^2y^2y'' - \frac{7}{4}a^2y(y')^2 + \frac{1}{8}a^3y^3y',$$

avec a une constante complexe non nulle.

En utilisant la transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec

$$(2.31) \begin{cases} \alpha = a^{(-\frac{1}{5})}, \\ \beta = a^{(-\frac{4}{5})}, \end{cases} \text{ on peut supposer } a = 1.$$

Cette équation est stable, pour la démonstration voir "équations de classe **II**" dans la troisième partie du chapitre 2 (intégration et C.S. de stabilité).

3) $P_1 = 24$: Dans ce cas l'équation (2.21) admet une infinité de solutions définies par l'ensemble $\{(24, m, -m) : m \in \mathbb{Z}\}$, et on obtient deux suites de cas de compatibilité :

i) Pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{-1, -4, -6, 1, 4, 6\}$: on a

solutions de l'équ. (2.21)	P_1			P_2			P_3		
	24			4k			-4k		
décomp. des P_i en 3 entiers $\neq$	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$
	4	-2	-3	1	4	k	1	4	-k
as_i , données par (2.17)	as_1			as_2			as_3		
	-12			k-6			-k-6		
COEFFICIENTS de (2.7)	a	b		c	d		e	f	
	a	$-2\frac{k^2+36}{k^2-36}a$		$\frac{12}{k^2-36}a^2$	$\frac{24}{k^2-36}a^2$		$-\frac{2}{k^2-36}a^3$	0	

tableau 3

Et la famille d'équations aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.37) \quad y'''' = ay y''' - 2\frac{k^2+36}{k^2-36}ay'y'' + \frac{12}{k^2-36}a^2y^2y'' + \frac{24}{k^2-36}a^2y(y')^2 - \frac{2}{k^2-36}a^3y^3y',$$

avec a une constante complexe non nulle.

En utilisant la transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec

$$(2.38) \begin{cases} \alpha = (\frac{a}{2})^{(-\frac{1}{5})}, \\ \beta = (\frac{2}{a})^{(\frac{4}{5})}, \end{cases}$$

l'équation (2.37) devient

$$(2.39) \quad y'''' = 2yy''' - 4\frac{k^2+36}{k^2-36}y'y'' + \frac{48}{k^2-36}y^2y'' + \frac{96}{k^2-36}y(y')^2 - \frac{16}{k^2-36}a^3y^3y',$$

puis en intégrant une fois on obtient

$$(2.40) \quad y''' = 2yy'' - 3(y')^2 - \frac{4}{k^2-36}(6y' - y^2)^2 + C,$$

qui est l'équation stable XII de CHAZY [4] telle que ses termes complémentaires sont comme suit :

- pour $k = 2$, $a_1y + a_0$;
- pour $k = 3$, a_0 ,

a_0, a_1 désignant des fonctions analytiques de x ;

- pour $k \neq 2, 3$ elle n'admet pas de termes complémentaires.

Par conséquent l'équation (2.37) n'est pas stable pour $k \neq 2, 3$, et donc se réduit à deux équations qui correspondent respectivement à $k = 2$ et $k = 3$.

ii) Pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{-1, -4, -6, 1, 4, 6\}$ on a :

solutions de l'équ. (2.21)	P_1			P_2			P_3		
	24			24k			-24k		
décomp. des P_i en 3 entiers $\neq$	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$
	2	3	4	4	6	k	4	6	-k
as_i , données par (2.17)	as_1			as_2			as_3		
	-2			k - 1			-k - 1		
COEFFICIENTS de (2.7)	a	b		c	d		e	f	
	a	$3\frac{k^2-9}{k^2-1}a$		$\frac{12}{k^2-1}a^2$	$\frac{24}{k^2-1}a^2$		$-\frac{12}{k^2-1}a^3$	0	

tableau 4

Et la famille d'équations aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.41) \quad y'''' = ay''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}ay'y'' + \frac{12}{k^2-1}a^2y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}a^2y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}a^3y^3y',$$

avec a une constante complexe non nulle.

En utilisant la transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec

$$(2.42) \quad \begin{cases} \alpha = \left(\frac{-2a}{k^2 - 1}\right)^{(-\frac{1}{5})}, \\ \beta = \left(-\frac{k^2 - 1}{2a}\right)^{(\frac{4}{5})}, \end{cases}$$

l'équation (2.41) devient

$$(2.43) \quad y'''' = \frac{1-k^2}{2}yy''' + 3\left(\frac{1-k^2}{2} + 4\right)y'y' - 3(1-k^2)y^2y'' - 6(1-k^2)y(y')^2 + \frac{3}{2}(1-k^2)^2y^3y'$$

puis en intégrant une fois on obtient

$$(2.44) \quad y''' = \frac{1-k^2}{2}yy'' + \left(\frac{1-k^2}{2} + 6\right)(y')^2 - 3(1-k^2)y^2y' + 3\frac{(1-k^2)^2}{8}y^4 + C,$$

qui est l'équation stable XI de CHAZY [4].

Finalement pour le cas ($e \neq 0$, $f = 0$), on obtient cinq classes d'équations aux indices de FUCHS entiers distincts et dont les équations réduites sont stables, classées comme suit :

Equations de classe **I** :

$$(2.45) \quad y'''' = b(x)y'y'' + \frac{1}{8}b(x)^2y^2y'' + \frac{1}{4}b(x)^2y(y')^2 + \frac{1}{64}b(x)^3y^3y' + F(x, y),$$

où F est donnée par (2.2) et b une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, telle que λ, μ, φ sont donnés par

$$(2.46) \quad \begin{cases} \lambda(x) = [b(x)]^{(-4/5)}, \\ \varphi'(x) = [b(x)]^{(1/5)}, \quad \text{on peut supposer : } b \equiv 1, \\ \mu(x) = 0, \end{cases}$$

l'analyticité de b entraine celle de λ et φ dans D . Ainsi l'équation (2.45) admet 3 familles de pôles simples mobiles définies par :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = 4 + 4\sqrt{5}; \theta = 1, 3, 4].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s_2 = 4 - 4\sqrt{5}; \theta = 1, 3, 4].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s_3 = 24; \theta = 3, 9, -4].$$

N.B. : On note la transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$ définie par (2.46) par T_b .

Equations de classe **II** :

$$(2.47) \quad y'''' = a(x)yy''' + \frac{11}{2}a(x)y'y'' - \frac{1}{2}a(x)^2y^2y'' - \frac{7}{4}a(x)^2y(y')^2 + \frac{1}{8}a(x)^3y^3y' + F(x, y),$$

et a une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant la transformation T_a (définie par (2.46), avec $a(x)$ à la place de $b(x)$), on peut supposer $a \equiv 1$, et l'équation (2.47) admet 3 familles de pôles simples mobiles définies par :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = -2, \theta = 0, 2, 4].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s_2 = -8, \theta = 0, 5, -5].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s_2 = -12, \theta = 5, -3, -6].$$

Equations de classe **III** :

C'est l'équation (2.37) pour $k = 2$,

$$(2.48) \quad y'''' = a(x)yy''' + \frac{5}{2}a(x)y'y'' - \frac{3}{8}a(x)^2y^2y'' - \frac{3}{4}a(x)^2y(y')^2 + \frac{1}{16}a(x)^3y^3y' + F(x, y),$$

a une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant la transformation T_a , on peut supposer $a \equiv 1$, et (2.48) admet 3 familles de pôles simples mobiles définies par :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = -4; \theta = 0, 1, 3].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s_2 = -8; \theta = 0, 3, -3].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s_3 = -12; \theta = 3, -3, -4].$$

Equations de classe **IV** :

C'est l'équation (2.37) pour $k = 3$,

$$(2.49) \quad y'''' = a(x)yy''' + \frac{10}{3}a(x)y'y'' - \frac{4}{9}a(x)^2y^2y'' - \frac{8}{9}a(x)^2y(y')^2 + \frac{2}{27}a(x)^3y^3y' + F(x, y),$$

a une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant la transformation T_a , on peut supposer $a \equiv 1$ et (2.49) admet 3 familles de pôles simples mobiles définies par :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = -3; \theta = 0, 2, 3].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s_2 = -9; \theta = 0, 3, -4].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s_3 = -12; \theta = 3, -3, -4].$$

Equations de classe **V** :

$$(2.50) \quad y'''' = a(x)yy''' + 3\frac{k^2 - 9}{k^2 - 1}a(x)y'y'' + \frac{12}{k^2 - 1}a(x)^2y^2y'' + \frac{24}{k^2 - 1}a(x)^2y(y')^2 - \frac{12}{k^2 - 1}a(x)^3y^3y' + F(x, y),$$

avec $k \in \mathbb{Z} - \{-1, -4, -6, 1, 4, 6\}$, et a une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant la transformation T_a , on peut supposer $a \equiv 1$ et (2.50) admet 3 familles de pôles simples mobiles définies par :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = -2, \theta = 1, 2, 3].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s_2 = k - 1, \theta = 3, 5, k - 1].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s_3 = -k - 1, \theta = 3, 5, -k - 1].$$

Deuxième cas : $f \neq 0$:

Soient $(\chi_{i,1}, \chi_{i,2}, \chi_{i,3})$, $i = 1..4$ solutions entières de (2.14) correspondantes respectivement à s_i , $i = 1..4$ racines de l'équation (2.6). En procédant de même que le cas précédent on obtient :

De (2.14) on a pour tout $i = 1..4$:

$$(2.51) \quad \left[P_i = P(s_i) = \chi_{i,1} \chi_{i,2} \chi_{i,3} \chi_{i,4}, \right.$$

$$(2.52) \quad \left[as_i = \sum_{1 \leq j \leq 3} \chi_{i,j} - 11, \right.$$

$$(2.53) \quad \left[cs_i^2 = 46 + (7a + b)s_i - \sum_{1 \leq j < k \leq 3} \chi_{i,j} \chi_{i,k}. \right.$$

Et de (2.6) on a :

$$(2.54) \quad \left[\begin{array}{l} s_1 s_2 s_3 s_4 = \frac{-24}{f}, \\ \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} s_i s_j s_k = \frac{2(3a+b)}{f}, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq 4} s_i s_j = \frac{2c+d}{f}, \\ \sum_{1 \leq i \leq 4} s_i = \frac{e}{f}, \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} f = \frac{-24}{s_1 s_2 s_3 s_4}, \\ 3a+b = \frac{f}{2} \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} s_i s_j s_k, \\ 2c+d = f \sum_{1 \leq i < j \leq 4} s_i s_j, \\ e = f \sum_{1 \leq i \leq 4} s_i. \end{array} \right]$$

En remplaçant dans (2.13) par (2.54) on obtient :

$$(2.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = 24(1 - \frac{s_1}{s_2})(1 - \frac{s_1}{s_3})(1 - \frac{s_1}{s_4}), \\ P_2 = 24(1 - \frac{s_2}{s_1})(1 - \frac{s_2}{s_3})(1 - \frac{s_2}{s_4}), \\ P_3 = 24(1 - \frac{s_3}{s_1})(1 - \frac{s_3}{s_2})(1 - \frac{s_3}{s_4}), \\ P_4 = 24(1 - \frac{s_4}{s_1})(1 - \frac{s_4}{s_2})(1 - \frac{s_4}{s_3}), \end{array} \right.$$

d'où

$$(2.56) \quad \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} = \frac{1}{24},$$

avec P_i ($i = 1..4$) entiers non nuls.

En faisant certaines modifications aux procédures déjà définies pour le cas précédent pour les adapter au nouveau cas ($f \neq 0$), on obtient des programmes informatiques qui peuvent résoudre le problème (★) pour $P_1 \neq 24$.

Résultats obtenus :

Cas où (2.56) a un nombre fini de solutions :

On obtient quatre cas de compatibilité des trois valeurs de $(\frac{s_1}{s_2}, \frac{s_1}{s_3}, \frac{s_1}{s_4})$ données respectivement par (2.55), (2.52) et (2.53) :

1)

sol. de. (2.56)	P_1			P_2			P_3			P_4		
	6			-4			6			-24		
déc. de P_i	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$	$\chi_{4,1}$	$\chi_{4,2}$	$\chi_{4,3}$
	1	2	3	1	2	-2	1	-2	-3	-2	-3	-4
as_i , de (2.52)	as_1			as_2			as_3			as_4		
	-5			-10			-15			-2		
COEFFICIENTS de (2.7)		a	b		c		d		e		f	
		a	$2a$		$-\frac{2}{5}a^2$		$-\frac{3}{5}a^2$		$\frac{2}{25}a^3$		$-\frac{1}{625}a^4$	

tableau 5

Et l'équation aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.57) \quad y'''' = ay y''' + 2ay' y'' - \frac{2}{5}a^2 y^2 y'' - \frac{3}{5}a^2 y (y')^2 + \frac{2}{25}a^3 y^3 y' - \frac{1}{625}a^4 y^5,$$

avec a une constante complexe non nulle.

En utilisant la transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec

$$(2.58) \quad \begin{cases} \alpha = a^{(-\frac{1}{5})}, \\ \beta = a^{(-\frac{4}{5})}, \end{cases} \quad \text{on peut supposer } a = 1,$$

puis en remplaçant dans (2.57) par le changement de variables défini par

$$(2.59) \quad y = -5 \frac{w'}{w},$$

et en multipliant par w les deux membres de l'équation, on aura

$$(2.60) \quad -5w'''' = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 5, par conséquent l'équation (2.57) est stable.

2)

sol. de.	P_1			P_2			P_3			P_4		
(2.56)	36			36			-84			-504		
déc. de	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$	$\chi_{4,1}$	$\chi_{4,2}$	$\chi_{4,3}$
P_i	2	3	6	2	3	6	6	7	-2	6	12	-7
as_i ,de	as_1			as_2			as_3			as_4		
(2.52)	0			0			0			0		
bs_i	bs_1			bs_2			bs_3			bs_4		
	10			-5			15			-20		
COEFFICIENTS de (2.7)		a		b		c		d		e		f
		0		b		$\frac{1}{5}b^2$		$\frac{1}{5}b^2$		0		$-\frac{1}{625}b^4$

tableau 6

Et l'équation aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.61) \quad y'''' = by'y'' + \frac{1}{5}b^2y^2y'' + \frac{1}{5}b^2y(y')^2 - \frac{1}{625}b^4y^5,$$

avec b une constante complexe non nulle.

3)

sol. de.	P_1			P_2			P_3			P_4		
(2.56)	36			36			-144			-144		
déc. de	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$	$\chi_{4,1}$	$\chi_{4,2}$	$\chi_{4,3}$
P_i	2	3	6	2	3	6	6	8	-3	6	8	-3
as_i ,et	$as_1, \quad bs_1$			$as_2, \quad bs_2$			$as_3, \quad bs_3$			$as_4, \quad bs_4$		
bs_i	0			0			0			0		
cs_i^2 ,de	cs_1^2			cs_2^2			cs_3^2			cs_4^2		
(2.53)	10			10			40			40		
COEFFICIENTS de (2.7)		a		b		c		d		e		f
		0		0		c		c		0		$-\frac{3}{50}c^2$

tableau 7

Et l'équation aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.62) \quad y'''' = cy^2y'' + cy(y')^2 - \frac{3}{50}c^2y^5,$$

avec c une constante complexe non nulle.

4)

sol. de. (2.56)	P_1			P_2			P_3			P_4		
	20			60			-60			-120		
déc. de P_i	$\chi_{1,1}$	$\chi_{1,2}$	$\chi_{1,3}$	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,2}$	$\chi_{2,3}$	$\chi_{3,1}$	$\chi_{3,2}$	$\chi_{3,3}$	$\chi_{4,1}$	$\chi_{4,2}$	$\chi_{4,3}$
	1	2	10	10	-2	-3	2	15	-2	1	12	-10
as_i , de (2.52)	as_1			as_2			as_3			as_4		
	2			-6			4			-8		
COEFFICIENTS de (2.7)		a		b		c		d		e		f
		a		$-\frac{17}{2}a$		$\frac{11}{2}a^2$		$-\frac{15}{4}a^2$		$\frac{1}{2}a^3$		$-\frac{1}{16}a^4$

tableau 8

Et l'équation aux indices de FUCHS entiers est de la forme

$$(2.63) \quad y'''' = ay''' - \frac{17}{2}ay'y'' + \frac{11}{2}a^2y^2y'' - \frac{15}{4}a^2y(y')^2 + \frac{1}{2}a^3y^3y' - \frac{1}{16}a^4y^5,$$

avec a une constante complexe non nulle.

Mais en appliquant la troisième étape de la méthode de BUREAU, on montre que cette équation est instable.

L'équation (2.63) admet 4 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [as_1 = 2; \theta = 0, 1, 9].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [as_2 = -6; \theta = 9, -3, -4].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [as_3 = 4; \theta = 14, 1, -3].$$

$$\mathfrak{F}_4 : [as_4 = -8; \theta = 0, 11, -11].$$

En utilisant la transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec α et β donnés par (2.58), on peut supposer $a = 1$.

Si on applique la méthode avec $\mathfrak{F}_1$, on pose

$$(2.64) \quad y = \frac{2}{z} \quad \text{et} \quad z' = 1 + zu,$$

en remplaçant dans (2.62) on obtient le système suivant

$$(2.65) \quad \begin{cases} z' = 1 + zu, \\ -2z^3 u''' + 24z^2 u'' = z^2 H(x, z, u, u', u''), \end{cases}$$

D'après les indices de $\mathfrak{F}_1$ on pose

$$(2.66) \quad u(x) = [i = 0 \sum_{i=0}^8 \alpha_i z(x)^i] + v(x) z(x)^9,$$

avec α_0 et α_1 sont arbitraires et les α_i ($i = 2..8$) vont être déterminés par la suite. En remplaçant dans (2.65) on obtient

$$(2.67) \quad \begin{cases} z' = 1 + \sum_{i=0}^8 \alpha_i z^{i+1} + vz^{10}, \\ z^9 [-2z^3 v''' - 40 z^2 v'' - 180 z v'] = A_0 + A_1 z + \dots + A_9 z^9 \\ \quad \quad \quad + z^{10} H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les α_i ($i = 2..8$) de telle sorte à avoir : $A_i = 0$ ($i = 2..8$) ; par conséquent les C.N. de stabilité du système (2.67) sont

$$(2.68) \quad \boxed{A_i = 0 \ (i = 0, 1, 9)}.$$

Les conditions de stabilités ($A_0 = 0$) et ($A_1 = 0$) sont vérifiées. Et les équations $A_i = 0$ ($i = 2..8$) conduisent respectivement à :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha_0 \alpha_1.$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{36} \alpha_1^2 - \frac{1}{36} \alpha_0^4 + \frac{1}{18} \alpha_1 \alpha_0^2.$$

$$\alpha_4 = -\frac{73}{720}\alpha_0\alpha_1^2 + \frac{17}{720}\alpha_0^5 - \frac{17}{360}\alpha_0^3\alpha_1.$$

$$\alpha_5 = -\frac{11}{160}\alpha_0^2\alpha_1^2 - \frac{31}{1440}\alpha_0^6 + \frac{1}{15}\alpha_0^4\alpha_1 + \frac{17}{720}\alpha_1^3.$$

$$\alpha_6 = \frac{123}{1600}\alpha_0^3\alpha_1^2 + \frac{857}{43200}\alpha_0^7 - \frac{491}{7200}\alpha_0^5\alpha_1 + \frac{367}{10800}\alpha_0\alpha_1^3.$$

$$\alpha_7 = \frac{9761}{129600}\alpha_0^6\alpha_1 + \frac{10127}{129600}\alpha_0^2\alpha_1^3 - \frac{4927}{43200}\alpha_0^4\alpha_1^2 - \frac{529}{25920}\alpha_1^4 - \frac{1231}{64800}\alpha_0^8.$$

$$\alpha_8 = -\frac{36913}{345600}\alpha_0^3\alpha_1^3 - \frac{1129}{172800}\alpha_1^4\alpha_0 - \frac{27103}{345600}\alpha_0^7\alpha_1 + \frac{15479}{115200}\alpha_0^5\alpha_1^2 + \frac{6337}{345600}\alpha_0^9.$$

Mais la condition de stabilité $A_9 = 0$ n'est pas vérifiée, puisque

$$A_9 = \frac{19957}{10800}\alpha_0^8\alpha_1 - \frac{25193}{10800}\alpha_0^6\alpha_1^2 + \frac{7}{135}\alpha_1^5 - \frac{287}{2700}\alpha_0^{10} - \frac{4333}{10800}\alpha_0^4\alpha_1^3 + \frac{10157}{10800}\alpha_1^4\alpha_0^2 \neq 0,$$

pour α_0, α_1 constantes complexes quelconques.

Par conséquent (2.62) est instable.

Cas où (2.56) a un nombre infini de solutions :

On distingue deux sous cas : 1) $P_3 = -P_4$ et 2) $P_1 = 24$.

En appliquant à l'équation (2.7) la transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec

$$(2.69) \quad \begin{cases} \alpha = Z_0^{(-1)}, \\ \beta = Z_0^{(-4)}, \end{cases}$$

et Z_0 racine de : $24Z^{20} + (-6a - 2b)Z^{15} + (2c + d)Z^{10} - eZ^5 + f = 0$,

on peut supposer :

$$(2.70) \quad f - e + (2c + d) - 2(3a + b) - 24 = 0,$$

par conséquent, l'une des racines de l'équation (2.6) est : $\boxed{s = 1}$.

1) $P_3 = -P_4$:

L'équation (2.56) devient

$$(2.71) \quad \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{24},$$

avec comme solutions :

P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
6	-8	15	-40	20	-120	23	-552	27	216	32	96	40	60
8	-12	16	-48	21	-168	25	600	28	168	33	88	42	56
12	-24	18	-72	22	-264	26	312	30	120	36	72	48	48

tableau 9

En prenant $s_1 = 1$, le système (2.55) est équivalent à :

$$(2.72) \quad \begin{cases} P_1 = 24(1 - \frac{1}{s_2})(1 - \frac{1}{s_3})(1 - \frac{1}{s_4}), \\ P_2 = 24(1 - s_2)(1 - \frac{s_2}{s_3})(1 - \frac{s_2}{s_4}), \\ (1 - s_3)(1 - \frac{s_3}{s_2})(1 - \frac{s_3}{s_4}) + (1 - s_4)(1 - \frac{s_4}{s_2})(1 - \frac{s_4}{s_3}) = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème (★) on procède comme suit :

Au début, on détermine toutes les combinaisons de trois entiers distincts non nuls $(\chi_{i,1}, \chi_{i,2}, \chi_{i,3})$ telles que $P_i = \chi_{i,1} \chi_{i,2} \chi_{i,3}$, $i = 1, 2$. Ensuite de (2.52), on calcul la valeur de a puis celle de s_2 . La résolution du système (2.72) nous donne les valeurs de s_3 et s_4 . Ensuite on détermine les coefficients de (2.54) puis on test la compatibilité de la valeur s_2 déjà calculée avec celle donnée par (2.53).

Finalement, le cas $(P_3 = -P_4)$ ne donne aucune classe d'équations stables.

2) $P_1 = 24$:

L'équation (2.56) devient :

$$(2.73) \quad \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} = 0,$$

On remarque bien qu'on ne peut pas limiter les domaines des P_i , et par conséquent l'équation (2.73) admet une infinité de solutions qu'on ne peut traiter avec le procédé déjà utilisé précédemment, ce qui nous amène à chercher un autre (procédé) qui satisfait à notre cas.

Les combinaisons de 3 entiers distincts et différentes de -1 , telle que : $P_1 = 24 = \chi_1\chi_2\chi_3$ sont :

χ_1	χ_2	χ_3	χ_1	χ_2	χ_3	χ_1	χ_2	χ_3	χ_1	χ_2	χ_3
2	3	4	1	2	12	1	-3	-8	-2	-3	4
1	4	6	2	-2	-6	1	-6	-4	-2	3	-4
1	3	8	1	-2	-12	2	-3	-4			

Tableau 10

En remplaçant par $s = 1$ dans les équations (2.52), (2.53) et (2.13) on obtient :

$$(2.74) \quad \begin{cases} a = \sum_{i \leq 3} \chi_i - 11, \\ c = 46 + (7a + b) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \chi_i \chi_j, \\ e = 2(2c + d) - 6(3a + b) - 72, \\ f = e - (2c + d) + 2(3a + b) + 24, \end{cases}$$

Alors pour tout (χ_1, χ_2, χ_3) du tableau 10, on a une équation (en tout 11 équations) de la forme (2.7) dont les coefficients satisfont à (2.74). L'étude de la stabilité de ces équations nous ramène à deux façon de procéder :

- L'une est l'application de la troisième étapes de la méthode de BUREAU aux équations engendrées par les combinaisons à 3 entiers positifs.
- Pour l'autre, on fera appel à une autre méthode qu'on définira par la suite, capable d'extraire des conditions nécessaires pour la stabilité des équations engendrées par les combinaisons à 2 entiers négatifs.

i- Equations engendrées par les combinaisons à 3 entiers positifs :

i.1- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (2, 3, 4)$: De (2.74) on a

$$(2.75) \quad y'''' = -2yy''' + by'y'' + (b+6)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-6)y^3y' + (d-2b-12)y^5,$$

qui admet une famille de pôles simple mobiles $\mathfrak{F} : [s = 1; \theta = 1, 2, 3]$.

Alors on pose

$$(2.76) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = [i = 0 \sum^2 \alpha_i z(x)^i] + v(x) z(x)^3, \end{cases}$$

avec α_1 et α_2 arbitraires, et α_0 va être déterminé par la suite. L'équation (2.75) est équivalente au système

$$(2.77) \quad \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum^2 \alpha_i z^{i+1} + vz^4, \\ z^3[-z^3v''' - 6z^2v'' - 6zv'] = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \\ \quad \quad \quad + z^4H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit α_0 de telle sorte à avoir : $A_0 = 0$, et par conséquent les C.N. de stabilité du système (2.77) sont :

$$(2.78) \quad \boxed{A_i = 0 \ (i = 1, 2, 3)}.$$

- De l'équation $A_0 = 0$ on a : $\alpha_0 = 0$.

A_1 et A_2 sont identiquement nulles. $A_3 = (-12 - 2b + d)\alpha_1^2 = 0 \Rightarrow -12 - 2b + d = 0$, et d'après l'équation (2.75) on a : $f = 0$ (cas déjà étudié).

i.2- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (1, 4, 6)$: De (2.74) on a

$$(2.79) \quad y'''' = by'y'' + (b+12)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-12)y^3y' + (d-2b-24)y^5,$$

qui admet une famille de pôles simples mobiles $\mathfrak{F} : [s = 1; \theta = 0, 3, 5]$.

On pose

$$(2.80) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = [i=0 \sum^4 \alpha_i z(x)^i] + v(x) z(x)^5, \end{cases}$$

avec α_0 et α_3 sont arbitraires et les α_i ($i = 1, 2, 4$) vont être déterminés par la suite. Et l'équation (2.79) est équivalente au système suivant

$$(2.81) \quad \begin{cases} z' = 1 + i=0 \sum^4 \alpha_i z^{i+1} + vz^6, \\ z^5[-z^3v''' - 10 z^2v'' - 18 zv'] = A_0 + A_1z + \dots + A_5z^5 \\ \quad \quad \quad + z^6 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les α_i ($i = 1, 2, 4$) de telle sorte à avoir : $A_i = 0$ ($i = 1, 2, 4$), et les C.N. de stabilité du système (2.81) sont

$$(2.82) \quad \boxed{A_i = 0 \quad (i = 0, 3, 5)}.$$

- A_0 est identiquement nul. Les équations $A_i = 0$ ($i = 1, 2$) conduisent respectivement à

$$\alpha_1 = (-\frac{1}{8}d + \frac{3}{8}b + \frac{19}{4})\alpha_0^2.$$

$$\alpha_2 = (-\frac{31}{12}d + \frac{57}{8}b + \frac{81}{2} - \frac{11}{48}bd + \frac{5}{16}b^2 + \frac{1}{24}d^2)\alpha_0^3.$$

Et puis on a

$$(2.83) \quad A_3 = (-\frac{401}{48}d^2 + \frac{3741}{16}d + \frac{19}{192}d^3 - \frac{207}{4}b^2 - \frac{4649}{8}b - \frac{49}{32}b^3 - \frac{4335}{2} - \frac{3}{4}bd^2 \\ + \frac{359}{192}b^2d + \frac{2011}{48}bd) \alpha_0^4 = 0.$$

d'où :

$$(2.84) \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2}d - 12, \\ b = \frac{1}{3}d - 10, \\ b = \frac{19}{49}d - \frac{578}{49}. \end{cases}$$

1) $b = \frac{1}{2}d - 12$: Dans ce cas on a $f = 0$ (cas déjà étudié).

2) $b = \frac{1}{3}d - 10$: De $A_4 = 0$ on obtient : $\alpha_4 = (\frac{1}{4}d - \frac{5}{2})\alpha_0\alpha_3 - \frac{1}{8}\alpha_0^5$.

Et puis on a : $A_5 = (-3d + 6 + \frac{1}{3}d^2)\alpha_3\alpha_0^2 = 0 \Rightarrow d = 3$ ou $d = 6$, et dans chaque cas l'équation (2.79) admet une famille de singularités mobiles dont les indices sont non entiers :

$$- d = 3 : [s = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{7}; \theta = 5, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{78}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{78}], (I^2 = -1),$$

$$- d = 6 : [s = -3; \theta = -3, \frac{11}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{71}, \frac{11}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{71}],$$

alors l'équation (2.79) est instable dans les deux cas.

3) $b = \frac{19}{49}d - \frac{578}{49}$: De $A_4 = 0$, on obtient :

$$\alpha_4 = (\frac{495035}{46118408} - \frac{56459}{46118408}d^2 + \frac{358}{5764801}d^3 - \frac{41}{46118408}d^4 + \frac{3497}{5764801}d)\alpha_0^5 + (-\frac{113}{98} + \frac{41}{196}d)\alpha_0\alpha_3.$$

Et puis,

$$(2.85) \quad A_5 = (-\frac{326265}{282475249}d^3 - \frac{300}{282475249}d^5 + \frac{4515885}{282475249}d - \frac{209745}{282475249}d^2 - \frac{1470150}{282475249} \\ + \frac{19855}{282475249}d^4)\alpha_0^6 + (\frac{675}{2401}d^2 + \frac{810}{2401} - \frac{2655}{2401}d)\alpha_3\alpha_0^2 = 0,$$

d'où : $d = \frac{1}{3}$ ou $d = \frac{18}{5}$, là aussi l'équation (2.79) admet pour chaque cas une famille de singularités mobiles dont les indices sont non entiers :

$$- d = \frac{1}{3} : [s = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{47}; \theta = 5, -1 - I\sqrt{47}, 4 + I\sqrt{47}],$$

$$- d = \frac{18}{5} : [s = -2; \theta = \frac{1}{15}Z - \frac{301}{3}\frac{1}{Z} + \frac{8}{3}, -\frac{1}{30}Z + \frac{301}{3}\frac{1}{Z} + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}(\frac{1}{15}Z + \frac{301}{3}\frac{1}{Z}), \\ -\frac{1}{30}Z + \frac{301}{3}\frac{1}{Z} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}(\frac{1}{15}Z + \frac{301}{3}\frac{1}{Z})].$$

avec $Z = \sqrt[3]{19450 + 45\sqrt{1870205}}$,

Alors l'équation (2.79) est instable.

i.3- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (1, 3, 8)$: De (2.74) on a

$$(2.86) \quad y'''' = yy''' + by'y'' + (b+18)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-9)y^3y' + (d-2b-24)y^5,$$

qui admet une famille de pôles simples mobiles $\mathfrak{F} : [s = 1; \theta = 0, 2, 7]$.

On pose

$$(2.87) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = [i=0 \sum^6 \alpha_i z(x)^i] + v(x) z(x)^7, \end{cases}$$

avec α_0 et α_2 sont des constantes arbitraires. Et l'équation (2.86) est équivalente au système

$$(2.88) \quad \begin{cases} z' = 1 + i=0 \sum^6 \alpha_i z^{i+1} + vz^8, \\ z^7[-z^3v''' - 15 z^2v'' - 48 zv'] = A_0 + A_1z + \dots + A_7z^7 \\ \quad \quad \quad + z^8 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les α_i ($i = 1, 3..6$) de telle sorte à avoir : $A_i = 0$ ($i = 1, 3..6$), et les C.N. de stabilité du système (2.86) sont

$$(2.89) \quad \boxed{A_i = 0 \quad (i = 0, 2, 7)}.$$

- A_0 est identiquement nul. De $A_1 = 0$, on obtient : $\alpha_1 = (\frac{13}{2} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}d)\alpha_0^2$.

Par la suite on a : $A_2 = (-341 - \frac{117}{2}b + \frac{64}{3}d + \frac{11}{6}db - \frac{1}{3}d^2 - \frac{5}{2}b^2)\alpha_0^3 = 0$,

d'où : $b = -11 + \frac{1}{3}d$ ou $b = -\frac{62}{5} + \frac{2}{5}d$.

1) $b = -11 + \frac{1}{3}d$: Après avoir déterminé les α_i des équations $A_i = 0$, $i = 3..6$, on obtient

$$(2.90) \quad \begin{aligned} A_7 = & (\frac{5}{5832}d^4 - \frac{17}{7776}d^3 - \frac{17}{324}d^2 + \frac{49}{216}d - \frac{2}{9} + \frac{1}{69984}d^5)\alpha_2\alpha_0^5 + (\frac{7}{54}d^2 - \frac{5}{6}d + \frac{1}{54}d^3 \\ & - \frac{11}{3})\alpha_0^2\alpha_2^2 + (-\frac{1}{162}d^2 + \frac{41}{432}d - \frac{55}{15552}d^3 - \frac{5}{11664}d^4 - \frac{1}{139968}d^5 + \frac{37}{36})\alpha_0^8 = 0, \end{aligned}$$

d'où : $d = 6$, ce qui conduit à : $f = 0$.

2) $b = -\frac{62}{5} + \frac{2}{5}d$: Là aussi après avoir déterminé les α_i , $i = 3..6$, on aura :

$$(2.91) \quad A_7 = \left(-\frac{1573}{90000000}d^5 + \frac{244313}{90000000}d^2 + \frac{69377}{324000000}d^3 - \frac{1339}{15187500}d^4 - \frac{2363}{243000000}d^6 + \frac{189893}{11250000}d\right. \\ \left. + \frac{87481}{1875000} + \frac{7}{540000000}d^7\right)\alpha_0^8 + \left(\frac{15901}{25000} + \frac{137}{540000}d^4 - \frac{17}{5625}d^3 - \frac{67}{7200}d^2 - \frac{749}{15000}d\right. \\ \left. + \frac{7}{168750}d^5\right)\alpha_2\alpha_0^5 + \left(\frac{473}{1500}d + \frac{47}{250}d^2 - \frac{2921}{250} + \frac{7}{500}d^3\right)\alpha_0^2\alpha_2^2 = 0,$$

d'où : $d = 6$, et l'équation (2.86) admet une famille de singularités mobiles définie par

$$(2.92) \quad [s = -1; \theta = 4, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{39}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{39}].$$

Alors l'équation (2.86) est instable.

i.4- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (1, 2, 12)$: De (2.74) on a

$$(2.93) \quad y'''' = 4yy''' + by'y'' + (b + 36)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d - b)y^3y' + (d - 2b - 24)y^5,$$

qui admet une famille de pôles simples mobiles $\mathfrak{F} : [s = 1; \theta = 0, 1, 11]$.

On pose

$$(2.94) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = [i = 0 \sum_{i=0}^{10} \alpha_i z(x)^i] + v(x) z(x)^{11}, \end{cases}$$

avec α_0 et α_1 sont des constantes arbitraires. Et l'équation (2.93) est équivalente au système

$$(2.95) \quad \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum_{i=0}^{10} \alpha_i z^{i+1} + vz^{12}, \\ z^7[-z^3v''' - 24 z^2v'' - 132 zv'] = A_0 + A_1z + \dots + A_{11}z^{11} \\ \quad + z^{12}H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les α_i ($i = 2..10$) de telle sorte à avoir : $A_i = 0$ ($i = 2..10$), et les C.N. de stabilité du système (2.85) sont

$$(2.96) \quad \boxed{A_i = 0 \ (i = 0, 1, 11)}.$$

- A_0 est identiquement nul. Et $A_1 = (-3b + d - 42)\alpha_0^2 = 0 \Rightarrow d = 3b + 42$.

Après avoir déterminé les α_i , $i = 2..10$ des équations $A_i = 0$, $i = 2..10$, on aura de l'équation ($A_{11} = 0$) : $b = -10$, (on s'est abstenu d'écrire l'expression de A_{11} à cause de sa longueur). Ainsi l'équation (2.93) admet une famille de singularités mobiles définie par

$$(2.97) \quad \left[s = -\frac{1}{2}; \ \theta = 4, \ 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{26}, \ 1 - \frac{1}{2}I\sqrt{26} \right].$$

Alors l'équation (2.93) est instable.

ii- Equations engendrées par les combinaisons à 2 entiers négatifs :

La méthode de BUREAU n'est pas concluante pour ce cas, à cause d'insuffisance d'indices positifs, et pour remédier à ce problème on va définir un procédé (extrait de la méthode de perturbation de PAINLEVE [5,6]) basé sur une perturbation régulière et l'analyse des E.D.O. linéaires du type de FUCHS.

En remplaçant dans (2.7) (qu'on notera $E(x, y) = 0$) par

$$(2.98) \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n y_n(x), \text{ avec } y_n \text{ fonction de } x.$$

on obtient

$$(2.99) \quad E(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n E_n(x, y_n) = 0,$$

telle que

$$(2.100) \quad E_0 \equiv E(x, y_0) = 0,$$

$$(2.101) \quad E_n \equiv E'(x, y_0) y_n + R_n(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0, \ \forall \ n \geq 1.$$

où

- $E'(x, y_0)$ est la différentielle de E au point y_0 telle que $\forall \ v$,

$$(2.102) \quad E'(x, y_0)v = \lambda \rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{E(x, y_0 + \lambda v) - E(x, y_0)}{\lambda},$$

et donnée par :

$$(2.103) \quad E'(x, y_0) \equiv \frac{d.}{dx^4} \cdot - (a y_0) \frac{d.}{dx^3} - (by_0' + cy_0^2) \frac{d.}{dx^2} + (-ey_0^3 - 2dy_0y_0' - by_0'') \frac{d.}{dx} + (-ay_0''' - d(y_0'')^2 - 2cy_0y_0'' - 3ey_0^2y_0' - 5fy_0^4).$$

- R_n est une application des y_i ($i = 0..(n-1)$).

En plus,

- l'équation (2.100) est l'équation (2.7) pour la fonction y_0 ,
- pour $n = 1$, on a une E.D.O. linéaire homogène ($R_1 \equiv 0$) d'ordre 4.
- pour $n > 1$, on a des E.D.O. linéaires non homogènes de même partie homogène.

D'après le théorème de POINCARÉ et le lemme fondamental de la stabilité, une C.N. de stabilité de (2.7) est :

$$(C) \quad \left[\begin{array}{l} \text{La solution générale de (2.100) et celles de (2.101)} \\ \text{doivent être sans points critiques mobiles.} \end{array} \right]$$

Remarques 14 :

i- En ayant une solution particulière y_0 de (2.100) avec une singularité mobile x_0 (pôle), alors il suffit qu'il existe une solution y_i ($i \geq 1$) de (2.101), admettant x_0 comme point critique pour conclure à la non stabilité de notre équation.

ii- En utilisant le procédé défini au dessus on va montrer que toutes les équations correspondantes aux combinaisons à deux indices négatifs sont instables $\square$

De (2.70), on a $s = 1$ racine de (2.6), alors d'après le comportement dominant de $y(x)$ (voir début de ce chapitre), on a : $y_0(x) = \frac{1}{x - x_0}$ est solution particulière de (2.100) pour toute (χ_1, χ_2, χ_3) du tableau 10, avec $x = x_0$ un pôle mobile.

N.B. Afin de simplifier les calculs, à l'aide de la transformation $(x; x - x_0)$ nous supposons que $x_0 = 0$, sans nuire à la généralité $\square$

L'équation indicielle de (2.101) est de la forme :

$$(2.104) \quad x^4 + (-a-6)x^3 + (b-c+3a+11)x^2 + (2d-e-3b+c-2a-6)x - 120 - 24a \\ + 6c + 4d - 2e - 10b = 0,$$

en posant : $x = X - 1$, elle devient

$$(2.105) \quad (X+1)[X^3 - (a+11)X^2 + (46+7a+b-c)X - (96+6(3a+b)-2(2c+d)+e)] = 0,$$

alors les racines de (2.104) sont :

$$(2.106) \quad (-2), (\chi_1 - 1), (\chi_2 - 1), \text{ et } (\chi_3 - 1),$$

avec (χ_1, χ_2, χ_3) racines de l'équation (2.14) pour $s = 1$, et donc données par le tableau 10. Par conséquent $x = 0$ est un point singulier régulier non critique algébrique pour les équations (2.101), et la C.N. de stabilité (C) au dessus se réduit à ce que $x = 0$ ne soit pas un point critique logarithmique pour les solutions de ces équations.

ii.1- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (2, -2, -6)$: De (2.74) on a

$$(2.107) \quad y'''' = -17yy'''' + by'y'' + (b-69)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-21)y^3y' + (d-2b+18)y^5,$$

En remplaçant par (2.98) on obtient :

$$- y_0(x) = \frac{1}{x}, \text{ solution particulière(S.P.) de } E_0 \equiv E(x, y_0) = 0.$$

$$- y_1(x) = x + \frac{1}{x^3}, \text{ S.P. de } E_1 \equiv E'(x, y_0) y_1 = y_1'''' + \frac{17}{x}y_1''' + \frac{69}{x^2}y_1'' + \frac{42}{x^3}y_1' - \frac{42}{x^4}y_1 = 0,$$

$$- y_2(x) = \frac{-1}{1800}[(54b-126-27d)x^3 + (1800b-3600-450d)x^{-1} + (-150b+25d-2250)x^{-5}],$$

S.P. de $E_2 \equiv E'(x, y_0) y_2 + R_2(x, y_0, y_1) = 0$, avec

$$R_2(x, y_0, y_1) = (18b-42-9d)x^{-1} + (-24b+48+6d)x^{-5} + (6b-d+90)x^{-9}.$$

Et puis,

$$\begin{aligned}
-y_3(x) = & \left(-\frac{65}{32}b + \frac{309}{640}d + \frac{9}{640}d^2 - \frac{13}{128}bd + \frac{673}{320} + \frac{57}{320}b^2\right)x \ln(x) + \left(-\frac{5}{32}b^2 - \frac{103}{64}d - \frac{1}{64}d^2 + \frac{75}{32}\right. \\
& + \frac{125}{16}b + \frac{7}{64}bd\left)\frac{\ln(x)}{x^3} + \left(-\frac{13}{1920}bd + \frac{29}{160}b - \frac{11}{384}d + \frac{111}{320} + \frac{7}{320}b^2 + \frac{1}{1920}d^2\right)\frac{\ln(x)}{x^7} + 2C_2x^{-2} \\
& + \mathcal{P}_1^{(2)}(b, d)x^5 + \left(C_1 + \mathcal{P}_2^{(2)}(b, d)\right)x + (\mathcal{P}_3^{(2)}(b, d) + C_3)x^{-3} + (\mathcal{P}_4^{(2)}(b, d) + C_4)x^{-7},
\end{aligned}$$

S.G. de $E_3 \equiv E'(x, y_0) y_3 + R_3(x, y_0, y_1, y_2) = 0$, avec

$$\begin{aligned}
R_3(x, y_0, y_1, y_2) = & \left(-\frac{171}{25}b - \frac{957}{50} - \frac{9}{10}b^2 + \frac{27}{20}bd - \frac{63}{100}d - \frac{9}{20}d^2\right)x + \left(-\frac{27}{20}d^2 - \frac{2019}{10} - \frac{927}{20}d\right. \\
& - \frac{171}{10}b^2 + \frac{39}{4}bd + 195b\left)x^{-3} + \left(-\frac{75}{2} - \frac{7}{4}bd + \frac{5}{2}b^2 - 125b + \frac{103}{4}d + \frac{1}{4}d^2\right)x^{-7} \\
& + \left(\frac{1}{12}d^2 + \frac{7}{2}b^2 - \frac{13}{12}bd - \frac{55}{12}d + \frac{111}{2} + 29b\right)x^{-11},
\end{aligned}$$

avec $C_i (i = 1..4)$ des constantes complexes d'intégrations, et $\mathcal{P}_i^{(j)}(b, d)$ polynômes en b et d de degré j , et dont les coefficients sont rationnels.

Alors pour que l'équation (2.107) soit stable, il est nécessaire que les coefficients b et d vérifient les 3 équations du système suivant :

$$(2.108) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{65}{32}b + \frac{309}{640}d + \frac{9}{640}d^2 - \frac{13}{128}bd + \frac{673}{320} + \frac{57}{320}b^2 = 0 \\ -\frac{5}{32}b^2 - \frac{103}{64}d - \frac{1}{64}d^2 + \frac{75}{32} + \frac{125}{16}b + \frac{7}{64}bd = 0 \\ -\frac{13}{1920}bd + \frac{29}{160}b - \frac{11}{384}d + \frac{111}{320} + \frac{7}{320}b^2 + \frac{1}{1920}d^2 = 0 \end{array} \right.$$

Mais ce dernier n'admet aucune solution. Par conséquent l'équation (2.107) est instable.

ii.2- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (1, -2, -12)$: De (2.74) on a :

$$(2.109) \quad y'''' = -24yy''' + by'y'' + (b-132)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-84)y^3y' + (d-2b-24)y^5,$$

On a

$$-y_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$- y_1(x) = 1 + \frac{1}{x^3},$$

$$- y_2(x) = \left(-\frac{9}{11}b + \frac{108}{11} + \frac{2}{11}d\right) x^{-2} \ln(x) + \left(\frac{1}{42}d - \frac{1}{14}b\right) x + \left(-\frac{1}{240}d + \frac{9}{10} + \frac{1}{40}b\right) x^{-5},$$

$$\text{d'où : } -\frac{9}{11}b + \frac{108}{11} + \frac{2}{11}d = 0 \Rightarrow \boxed{b = 12 + \frac{2}{9}d}.$$

Par la suite on a

$$\begin{aligned} - y_3(x) &= \left(\frac{132}{175} + \frac{1}{14175}d^2 - \frac{13}{1050}d\right)x^2 + \left(\frac{1}{4536}d^2 + \frac{23}{252}d + \frac{60}{7}\right)x^{-1} + \left(-\frac{4}{135}d - \frac{16}{5} - \frac{1}{19440}d^2\right)x^{-4} \\ &\quad + \left(\frac{23}{5040}d + \frac{54}{35} + \frac{1}{181440}d^2\right)x^{-7}, \end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned} - y_4(x) &= \left(-\frac{1153}{2041200}d^2 - \frac{71}{189}d + \frac{31}{36741600}d^3 - \frac{6976}{175}\right)x^{-3} \ln(x) + \left(\frac{113}{2457}d + \frac{464}{325} + \frac{1}{1105650}d^3\right. \\ &\quad \left.+ \frac{421}{1105650}d^2\right) \ln(x) + \mathcal{P}_1^{(3)}(b, d)x^3 + -\frac{1}{2}C_1x^{-2} + (\mathcal{P}_3^{(3)}(b, d) - \frac{1}{3}C_2)x^{-3} \\ &\quad + -^2\mathcal{P}_2^{(3)}(b, d)x^{-6} + \mathcal{P}_4^{(3)}(b, d)x^{-9} - \frac{1}{13}C_3x^{-13} + C_4, \end{aligned}$$

Alors

$$(3.110) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1153}{2041200}d^2 - \frac{71}{189}d + \frac{31}{36741600}d^3 - \frac{6976}{175} = 0 \\ \frac{113}{2457}d + \frac{464}{325} + \frac{1}{1105650}d^3 + \frac{421}{1105650}d^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{d = -144}.$$

Ainsi l'équation (2.109) admet une famille de singularités mobiles définie par

$$(2.111) \left[s = \frac{1}{4}; \theta = 2, \frac{1}{2}I\sqrt{6}, -\frac{1}{2}I\sqrt{6} \right],$$

et donc elle est instable.

ii.3- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (1, -3, -8)$: De (2.74) on obtient

$$(2.112) \ y'''' = -21yy''' + by'y'' + (b-114)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-75)y^3y' + (d-2b-24)y^5,$$

On a

$$- y_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$- y_1(x) = 1 + \frac{1}{x^4},$$

$$- y_2(x) = \left(-\frac{3}{25} - \frac{2}{25}b + \frac{2}{75}d\right)x + \left(-\frac{4}{9}d + \frac{20}{9}b - \frac{46}{3}\right)x^{-3} + \left(\frac{43}{35} - \frac{2}{105}d + \frac{2}{15}b\right)x^{-7},$$

$$- y_3(x) = \left(-\frac{1626}{25} + \frac{743}{35}b - \frac{223}{175}b^2 - \frac{82}{1575}d^2 - \frac{2164}{525}d + \frac{163}{315}bd\right)x^{-2}\ln(x) + \mathcal{P}_5^{(2)}(b, d)x^2 \\ + \mathcal{P}_7^{(2)}(b, d)x^{-6} + \mathcal{P}_6^{(2)}(b, d)x^{-10},$$

et,

$$- y_4(x) = \left(-\frac{328}{1575}d^2 - \frac{892}{175}b^2 + \frac{652}{315}db - \frac{6504}{25} - \frac{8656}{525}d + \frac{2972}{35}b\right)x^{-5}\ln(x) + \left(-\frac{31984}{297675}db^2 + \frac{23008}{33075}b^2 \right. \\ \left. + \frac{2864}{99225}d^2 - \frac{55232}{4725} + \frac{29056}{127575}b^3 + \frac{1648}{99225}bd^2 - \frac{752}{893025}d^3 - \frac{29776}{99225}db + \frac{1216}{2205}d - \frac{32096}{6615}b\right)\ln(x) \\ + \mathcal{P}_5^{(3)}(b, d)x^3 + \mathcal{P}_6^{(3)}(b, d)x^{-1} + \mathcal{P}_7^{(3)}(b, d)x^{-5} + \mathcal{P}_8^{(3)}(b, d)x^{-13},$$

d'où

$$(2.113) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1626}{25} + \frac{743}{35}b - \frac{223}{175}b^2 - \frac{82}{1575}d^2 - \frac{2164}{525}d + \frac{163}{315}bd = 0, \\ -\frac{328}{1575}d^2 - \frac{892}{175}b^2 + \frac{652}{315}db - \frac{6504}{25} - \frac{8656}{525}d + \frac{2972}{35}b = 0, \\ -\frac{31984}{297675}db^2 + \frac{23008}{33075}b^2 + \frac{2864}{99225}d^2 - \frac{55232}{4725} + \frac{29056}{127575}b^3 + \frac{1648}{99225}bd^2 - \frac{752}{893025}d^3 \\ -\frac{29776}{99225}db + \frac{1216}{2205}d - \frac{32096}{6615}b = 0, \end{array} \right.$$

qui admet les solutions suivantes :

$$(2.114) \quad \left\{ \begin{array}{l} d = -198; \quad b = -30, \\ d = -\frac{1026}{7}; \quad b = -\frac{165}{7}, \\ d = \frac{2828162261}{447105124}Z^2 + \frac{917704032}{111776281} + \frac{112404565}{447105124}Z^3 + \frac{13106063681}{223552562}Z; \quad b = 3Z, \end{array} \right.$$

avec Z racine de l'équation

$$(2.115) \quad 16345Z^4 + 629403Z^3 + 8280288Z^2 + 39254440Z + 26310600 = 0.$$

1) $d = -198; b = -30$: en continuant la résolution des E.D.O. linéaires (2.101) ($n \geq 5$) on obtient :

$$- y_5(x) = 81x^4 + x^{-16} - 21x^{-12} + 630x^{-8},$$

$$- y_6(x) = -243x^5 + x^{-19} - \frac{6342}{143}x^{-15} + \frac{9045}{11}x^{-11} - 5184x^{-7} - 162x^{-3},$$

$$- y_7(x) = 729x^6 + x^{-22} - \frac{9846}{143}x^{-18} + 513x^{-14} - \frac{1701}{11}x^{-10} + 70470x^{-6},$$

$$- y_8(x) = -2187x^7 + x^{-25} - \frac{4342080}{46189}x^{-21} - \frac{157752}{2431}x^{-17} + \frac{1212084}{143}x^{-13} - 1193616x^{-5},$$

et puis

$$- y_9(x) = 6561x^8 + C_4 - \frac{1}{2}C_1x^{-2} + (-12859560\ln(x) - \frac{1}{4}C_2 - 7072758)x^{-4} - \frac{19154961}{44}x^{-8} \\ - \frac{1}{9}C_3x^{-9} - \frac{10557297}{286}x^{-12} + \frac{12385305}{4862}x^{-16} - \frac{3375081}{4862}x^{-20} - \frac{5522466}{46189}x^{-24} + x^{-28},$$

par conséquent l'équation (2.112) n'est pas stable.

2) $d = -\frac{1026}{7}; b = -\frac{165}{7}$: dans ce cas l'équation (2.112) admet une famille de singularités mobiles définie par :

$$(2.116) [s = \frac{15}{16} + \frac{1}{48}\sqrt{681}; \theta = -\frac{55}{32} - \frac{3}{32}\sqrt{681} + \frac{1}{32}\sqrt{1210 + 34\sqrt{681}}, \\ -\frac{55}{32} - \frac{3}{32}\sqrt{681} - \frac{1}{32}\sqrt{1210 + 34\sqrt{681}}, -\frac{33}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{681}],$$

et donc elle est instable.

3) $d = \frac{2828162261}{447105124}Z^2 + \frac{917704032}{111776281} + \frac{112404565}{447105124}Z^3 + \frac{13106063681}{223552562}Z; b = 3Z$: l'équation (2.6) correspondante admet des racines non entières, et puisque $a \neq 0$, alors d'après (2.52) l'équation (2.112) est instable.

ii.4- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (1, -4, -6)$: De (2.74) on a

$$(2.117) \quad y'''' = -20yy''' + by'y'' + (b-108)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-72)y^3y' + (d-2b-24)y^5,$$

On a

$$- y_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$- y_1(x) = 1 - \frac{1}{x^7},$$

$$- y_2(x) = \left(\frac{1}{36}d - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}b\right)x + \left(\frac{65}{12}b - \frac{5}{6}d + 40\right)x^{-6} + \left(\frac{41}{286} + \frac{25}{6864}d - \frac{125}{3432}b\right)x^{-13},$$

$$- y_3(x) = \left(\frac{17}{36}d^2 + \frac{1108}{3} - \frac{209}{36}bd + \frac{107}{6}b^2 - \frac{481}{18}d + \frac{491}{3}b\right)x^{-5} \ln(x) + P_4^{(2)}(b, d)x^2 + \mathcal{P}_9^{(2)}(b, d)x^{-19} \\ + \mathcal{P}_{10}^{(2)}(b, d)x^{-12},$$

d'où :

$$(2.118) \quad \begin{cases} b = \frac{1}{6}d - 4, \\ b = \frac{17}{107}d - \frac{554}{107}. \end{cases}.$$

1) $b = \frac{1}{6}d - 4$: En appliquant la méthode une deuxième fois avec

$$- y_1(x) = 1 + \frac{1}{x^5},$$

$$- y_2(x) = \left(-\frac{1}{24}d - 18\right)x^{-4} + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{168}d\right)x^{-9} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{72}d\right)x,$$

$$- y_3(x) = \left(\frac{131}{144}d + \frac{1}{1728}d^2 + \frac{706}{3}\right)x^{-3} + \left(-\frac{73}{6} + \frac{1}{1728}d^2 + \frac{1}{4}d\right)x^{-8} + \left(\frac{4}{91} - \frac{113}{24024}d + \frac{1}{41184}d^2\right)x^{-13} \\ + \left(\frac{1}{5184}d^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{432}d\right)x^2,$$

on aura

$$- y_4(x) = \left(\left(\frac{51}{28}d + \frac{2124}{35} + \frac{19}{5040}d^2\right)x^{-7} + \left(\frac{43}{6480}d^2 + \frac{671}{108}d + \frac{17926}{15}\right)x^{-2}\right) \ln(x) + \mathcal{P}_{11}^{(2)}(b, d)x^3 \\ + \left(-\frac{1}{2}C_1 + \mathcal{P}_{12}^{(2)}(b, d)\right)x^{-2} - \frac{1}{5}C_2x^{-5} + \left(\mathcal{P}_{13}^{(2)}(b, d) - \frac{1}{7}C_3\right)x^{-7} + \mathcal{P}_9^{(3)}(b, d)x^{-12} \\ + \mathcal{P}_{10}^{(3)}(b, d)x^{-17} + C_4,$$

Alors la stabilité de (2.117) entraine

$$(2.119) \quad \begin{cases} \frac{51}{28}d + \frac{2124}{35} + \frac{19}{5040}d^2 = 0, \\ \frac{43}{6480}d^2 + \frac{671}{108}d + \frac{17926}{15} = 0. \end{cases}$$

Mais ce système n'admet pas de solution, par conséquent l'équation (2.117) est instable.

1) $b = \frac{17}{107}d - \frac{554}{107}$: là aussi, en appliquant la méthode une deuxième fois avec

$$- y_1(x) = 1 + \frac{1}{x^5},$$

$$- y_2(x) = \left(\frac{14}{963}d + \frac{85}{321}\right)x + \left(-\frac{27}{428}d - \frac{4545}{214}\right)x^{-4} + \left(-\frac{29}{5992}d + \frac{340}{749}\right)x^{-9},$$

$$- y_3(x) = \left(-\frac{6050}{34347} + \frac{955}{206082}d + \frac{43}{206082}d^2\right)x^2 + \left(\frac{178670}{103041}d + \frac{143}{68694}d^2 + \frac{11183350}{34347}\right)x^{-3} + \left(\frac{664015}{3297312}d - \frac{6922075}{274776} + \frac{5453}{6594624}d^2\right)x^{-8} + \left(-\frac{212535}{45841796}d + \frac{1827}{104781248}d^2 + \frac{9655475}{45841796}\right)x^{-13},$$

on aura

$$\begin{aligned} - y_4(x) = & \left(-\frac{413166780}{8575301} + \frac{633}{34301204}d^3 + \frac{18298794}{8575301}d + \frac{65607}{4900172}d^2\right)x^{-7} \ln(x) + \left(\frac{160093448}{11025387}d + \frac{7091638180}{3675129}\right. \\ & + \frac{244}{11025387}d^3 + \frac{120524}{3675129}d^2)x^{-2} \ln(x) + \mathcal{P}_{11}^{(3)}(b, d)x^3 + (\mathcal{P}_{12}^{(3)}(b, d) - \frac{1}{2}C_1)x^{-2} - \frac{1}{5}C_2x^{-5} \\ & \left. + (\mathcal{P}_{15}^{(3)}(b, d) - \frac{1}{7}C_3)x^{-7} + \mathcal{P}_{13}^{(3)}(b, d)x^{-12} + \mathcal{P}_{14}^{(3)}(b, d)x^{-17} + C_4, \right. \end{aligned}$$

d'où

$$(2.120) \quad \begin{cases} -\frac{413166780}{8575301} + \frac{633}{34301204}d^3 + \frac{18298794}{8575301}d + \frac{65607}{4900172}d^2 = 0, \\ \frac{160093448}{11025387}d + \frac{7091638180}{3675129} + \frac{244}{11025387}d^3 + \frac{120524}{3675129}d^2 = 0. \end{cases}$$

Mais ce système n'admet pas de solution, et (2.117) est instabilité.

ii.5- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (2, -3, -4)$: De (2.74) on obtient

$$(2.121) \quad y'''' = -16yy''' + by'y'' + (b-64)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b-20)y^3y' + (d-2b+16)y^5,$$

On a

$$- y_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$- y_1(x) = x + \frac{1}{x^4},$$

$$- y_2(x) = \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}d - 3b\right) x^{-2} \ln(x) + \left(\frac{9}{560}d + \frac{2}{35} - \frac{9}{280}b\right) x^3 + \left(-\frac{1}{30} - \frac{7}{60}b + \frac{1}{60}d\right) x^{-7},$$

ce qui implique : $\boxed{d = 2 + \frac{9}{2}b}$.

Par la suite on a

$$\begin{aligned} - y_3(x) = & \left(\frac{21}{4}b + \frac{190}{3} + \frac{5}{48}b^2\right) x^{-5} \ln(x) + \mathcal{P}_{14}^{(2)}(b, d)x^5 + C_1x + \mathcal{P}_{17}^{(2)}(b, d) + C_2x^{-2} + C_3x^{-4} \\ & + (\mathcal{P}_{16}^{(2)}(b, d) + C_4)x^{-5} + \mathcal{P}_{15}^{(2)}(b, d)x^{-10}, \end{aligned}$$

d'où

$$(2.122) \quad \begin{cases} b = -20, \\ b = -\frac{152}{5}. \end{cases}.$$

1) $b = -20$: l'équation (2.121) admet une famille de singularités mobiles définie par

$$(2.123) \quad [s = \frac{1}{2}; \theta = 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}],$$

alors elle est instable.

2) $b = -\frac{152}{5}$: l'équation (2.6) correspondante admet $s = \frac{1}{435}Z + \frac{\frac{27703}{145}}{Z} + \frac{159}{145}$ comme racine (

$Z = \sqrt[3]{22229073 + 870I\sqrt{105576663}}$, et $a \neq 0$, alors d'après (2.52) l'équation (2.121) est instable.

ii.6- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (-2, -3, 4)$: De (2.74) on a

$$(2.124) \quad y'''' = -12yy''' + by'y'' + (b-24)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b+24)y^3y' + (d-2b+48)y^5,$$

On a

$$- y_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$- y_1(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4},$$

$$- y_2(x) = \left(\frac{5}{792}d + \frac{1}{11}\right)x^7 + \left(-\frac{1}{4}b + \frac{1}{12}d - 3\right)x + \left(\frac{1}{48}d - \frac{1}{8}b\right)x^{-5} + \left(-\frac{13}{108}b + \frac{1}{54}d + \frac{8}{9}\right)x^{-6} \\ + \left(\frac{8}{25} - \frac{7}{150}b + \frac{1}{150}d\right)x^{-7} - \frac{23}{3} - \frac{35}{36}b + \frac{5}{18}d.$$

Par la suite

$$- y_3(x) = \left(\frac{1432}{5} + \frac{233}{3}b - \frac{803}{45}d + \frac{77}{270}d^2 + \frac{79}{15}b^2 - \frac{265}{108}bd\right)x^{-2} \ln(x) + \left(-\frac{455}{54}b^2 - \frac{1624}{3} + \frac{103}{27}bd\right. \\ \left.- \frac{1217}{9}b - \frac{23}{54}d^2 + \frac{277}{9}d\right)x^{-3} \ln(x) + \mathcal{P}_{18}^{(2)}(b, d)x^{11} + \mathcal{P}_{19}^{(2)}(b, d)x^5 + \mathcal{P}_{20}^{(2)}(b, d)x^4 \\ + \frac{1}{210}C_1x^3 + \mathcal{P}_{21}^{(2)}(b, d)x^{-1} + (C_2 + \mathcal{P}_{22}^{(2)}(b, d))x^{-2} + C_3x^{-3} + C_4x^{-4} \\ + \mathcal{P}_{23}^{(2)}(b, d)x^{-7} + \mathcal{P}_{24}^{(2)}(b, d)x^{-8} + \mathcal{P}_{25}^{(2)}(b, d)x^{-9} + \mathcal{P}_{26}^{(2)}(b, d)x^{-10},$$

d'où

$$(2.125) \quad \begin{cases} \frac{1432}{5} + \frac{233}{3}b - \frac{803}{45}d + \frac{77}{270}d^2 + \frac{79}{15}b^2 - \frac{265}{108}bd = 0, \\ -\frac{455}{54}b^2 - \frac{1624}{3} + \frac{103}{27}bd - \frac{1217}{9}b - \frac{23}{54}d^2 + \frac{277}{9}d = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{(b = -30, d = -108), (b = -40, d = -128), (b = -\frac{240}{23}, d = -\frac{234}{23}), (b = -\frac{240}{29}, d = -\frac{72}{29})\}.$$

1) $(b = -30, d = -108)$ ou $(b = -40, d = -128)$: dans les deux cas on a : $f = 0$.

2) $b = -40; d = -128$: l'équation (2.124) admet une famille de singularités mobiles définie par

$$(2.126) \quad [s = -\frac{21}{50} + \frac{1}{150}\sqrt{17769}; \theta = \frac{94}{25} - \frac{1}{50}\sqrt{17769} + \frac{1}{50}h, \frac{94}{25} - \frac{1}{50}h, \frac{138}{25} - \frac{1}{25}\sqrt{17769}],$$

avec $h = \sqrt{3337 - 24\sqrt{17769}}$. Alors (2.124) est instable.

3) $b = -\frac{240}{29}; d = -\frac{72}{29}$: l'équation (2.6) correspondante admet $s = \frac{1}{150}Z + \frac{\frac{3902}{75}}{Z} - \frac{1}{75}$

comme racine, avec

$Z = (-675908 + 300I\sqrt{204787})^{\frac{1}{3}}$, et d'après (2.52) on déduit l'instabilité de (2.124).

ii.7- $(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (-2, 3, -4)$: De (2.74) on a

$$(2.127) \quad y'''' = -14yy''' + by'y'' + (b-42)y^2y'' + dy(y')^2 + 2(d-b+6)y^3y' + (d-2b+36)y^5,$$

On a

$$- y_0(x) = \frac{1}{x},$$

$$- y_1(x) = x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5},$$

$$\begin{aligned} - y_2(x) = & \left(\left(\frac{6}{7} + \frac{1}{7}b - \frac{1}{42}d \right) x^{-5} + (-52 - 9b + 2d)x^{-2} \right) \ln(x) + \mathcal{P}_5^{(1)}(b, d)x^5 + C_1x^2 \\ & + (\mathcal{P}_1^{(1)}(b, d) + C_2)x^{-2} + C_3x^{-3} + (\mathcal{P}_4^{(1)}(b, d) + C_4)x^{-5} + \mathcal{P}_2^{(1)}(b, d)x^{-7} \\ & + \mathcal{P}_3^{(1)}(b, d)x^{-9} - \frac{9}{5} - \frac{7}{15}b + \frac{2}{15}d, \end{aligned}$$

d'où

$$(2.128) \quad \begin{cases} \frac{6}{7} + \frac{1}{7}b - \frac{1}{42}d = 0, \\ -52 - 9b + 2d = 0, \end{cases} \Rightarrow \{d = -4, b = -\frac{20}{3}\},$$

et l'équation (2.127) admet une famille de singularités mobiles définie par

$$(2.129) \quad [s = -\frac{19}{34} - \frac{1}{34}\sqrt{1585}; \theta = \frac{71}{17} + \frac{3}{34}\sqrt{1585} + \frac{1}{34}Z, \frac{71}{17} + \frac{3}{34}\sqrt{1585} - \frac{1}{34}Z, \\ \frac{127}{17} + \frac{4}{17}\sqrt{1585}],$$

avec $Z = \sqrt{7201 + 192\sqrt{1585}}$, alors elle est instable.

Cas où $P(s) = 0$:

On va étudier le cas où il existe au moins s racine de (2.6) telle que $P(s) = 96 + 6(3a + b)s - 2(2c + d)s^2 + es^3$ est nul (voir (2.13)).

Dans ce cas on peut écrire $P = \chi_1 \times \chi_2 \times \chi_3 = 0 \times m \times l$, tel que m et l sont des entiers distincts et différents de -1 et 0 , et les équations données par (2.74) deviennent

$$(2.130) \quad \begin{cases} a = (m + l) - 11, \\ c = 46 + (7a + b) - ml, \\ e = 2(2c + d) - 6(3a + b) - 96, \\ f = e - (2c + d) + 2(3a + b) + 24. \end{cases}.$$

Alors on obtient une équation de la forme

$$(2.131) \quad y'''' = (m + l - 11)yy''' + by'y'' + (-31 + 7m + 7l + b - ml)y^2y'' + dy(y')^2 + 10(-\frac{11}{5} + m + l - \frac{1}{5}b - \frac{2}{5}ml + \frac{1}{5}d)y^3y' + 2(-1 + m + l - b - ml + \frac{1}{2}d)y^5,$$

En procédant de la même façon que précédemment on obtient

$$\begin{aligned} - y_0(x) &= \frac{1}{x}, \\ - y_1(x) &= \frac{1}{x}, \\ - y_2(x) &= -(\frac{8 + 2ml + 4b + 4m + 4l - d}{lm})x^{-1} \ln(x) + x^{-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$(2.132) \quad \boxed{d = 8 + 2ml + 4b + 4m + 4l}.$$

Puis

$$- y_3(x) = 2(\frac{(15 + b + 3m + 3l)}{lm})x^{-1} \ln(x) + x^{-1},$$

d'où

$$(2.133) \quad \boxed{b = -3m - 3l - 15.}$$

Par la suite

$$-y_4(x) = -24 \frac{\ln(x)}{mlx} + \frac{C_1 l^2 m^2 + 24(lm - m - l)}{l^2 m^2 x} + C_2 x^{-2} + C_3 x^{m-1} + C_4 x^{l-1},$$

et l'équation (2.131) est instable.

Remarque 15 : en procédant de la même manière pour le cas ($e \neq 0$, $f = 0$) on retrouve le même résultat (instabilité) $\square$

Finalement, pour le cas ($f \neq 0$) on obtient 3 classes d'équations aux indices de FUCHS entiers distincts et dont les équations réduites sont stables, classées comme suit :

Equations de classe **VI** :

$$(2.134) \quad y'''' = a(x)yy'''' + 2a(x)y'y'' - \frac{2}{5}a(x)^2y^2y'' - \frac{3}{5}a(x)^2y(y')^2 + \frac{2}{25}a(x)^3y^3y' \\ - \frac{1}{625}a(x)^4y^5 + F(x, y),$$

avec F donnée par (2.2) et a une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant la transformation T_a (voir classe I), on peut supposer $a \equiv 1$, et l'équation (2.134) admet 4 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = -5; \theta = 0, 1, 2]. \\ \mathfrak{F}_2 : [s_2 = -10; \theta = 0, 1, -3]. \\ \mathfrak{F}_3 : [s_3 = -15; \theta = 0, -3, -4]. \\ \mathfrak{F}_4 : [s_4 = -20; \theta = -3, -4, -5].$$

Equations de classe **VII** :

$$(2.135) \quad y'''' = b(x)y'y'' + \frac{1}{5}b(x)^2y^2y'' + \frac{1}{5}b(x)^2y(y')^2 - \frac{1}{625}b(x)^4y^5 + F(x, y),$$

b une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant la transformation T_b , on peut supposer $b \equiv 1$, et (2.135) admet 4 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = -5; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s_2 = 10; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s_3 = 15; \theta = 5, 6, -3].$$

$$\mathfrak{F}_4 : [s_4 = -20; \theta = 5, 11, -8].$$

Equations de classe **VIII** :

$$(2.136) \quad y'''' = c(x)y^2y'' + c(x)y(y')^2 - \frac{3}{50}c(x)^2y^5 + F(x, y),$$

c une fonction analytique et non nulle dans D .

En utilisant une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$, telle que

$$(2.137) \quad \begin{cases} \lambda(x) = c(x)^{(-\frac{2}{5})}, \\ \varphi'(x) = c(x)^{(\frac{1}{10})}, \quad \text{on peut supposer : } c \equiv 1, \\ \mu(x) = 0, \end{cases}$$

l'analyticité de c entraine celle de λ et φ dans D . Et l'équation (2.136) admet 4 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s_1 = \sqrt{10}; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s_2 = -\sqrt{10}; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s_3 = \sqrt{10}; \theta = -4, 5, 7].$$

$$\mathfrak{F}_4 : [s_4 = -2\sqrt{10}; \theta = -4, 5, 7].$$

2.2.2 Etude des équations complètes :

Dans ce qui suit on va appliquer la troisième étape de la méthode de BUREAU aux classes d'équations obtenues au dessus, pour déterminer les coefficients $a_0, c_0, c_1, d_0, e_0, e_1, e_2, f_0, f_1, f_2, f_3$, et f_4 .

Equations de classe I :

Cette classe est donnée par

$$(2.138) \quad y'''' = y'y'' + \frac{1}{8}y^2y'' + \frac{1}{4}y(y')^2 + \frac{1}{64}y^3y' + F(x, y),$$

avec F donnée par (2.2), et admet les 3 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = 4 + 4\sqrt{5}; \theta = 1, 3, 4].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = 4 - 4\sqrt{5}; \theta = 1, 3, 4].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = 24; \theta = 3, 9, -4].$$

En utilisant une transformation T avec λ, μ, φ données par

$$(2.139) \quad \begin{cases} \lambda - \varphi' = 0, \\ \lambda' + 64f_4\lambda = 0, \text{ on peut supposer } f_4 \equiv 0, \\ \mu(x) = 0, \end{cases}$$

l'analyticité de f_4 , entraine celle de λ et φ dans D .

En effet, après remplacement dans (2.138), on aura :

$$(2.140) \quad [\exp(-320 \int f_4(x)dx)]Y'''' = \exp(-320 \int f_4(x)dx) [Y'Y'' - \frac{1}{8}Y^2Y'' - \frac{1}{4}Y(Y')^2 - \frac{1}{64}Y^3Y'] + F(x, Y),$$

$[Y' = \frac{dY}{dX}]$, avec le coefficient de Y^4 nul.

Et puis en multipliant les deux membres de l'équation par : $x \mapsto [\exp(320 \int f_4(x)dx)]$ qui est analytique dans D , et en revenant à nos notations habituelles on aura une équation de même forme que (2.138) avec $f_4 \equiv 0$.

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = 4 + 4\sqrt{5}; \theta = 1, 3, 4]$: On pose

$$(2.141) \quad \begin{cases} y = \frac{4 + 4\sqrt{5}}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^3 \alpha_i(x)z(x)^i) + z(x)^4v(x), \end{cases}$$

avec α_1 et α_3 arbitraires et peuvent être supposées comme des paramètres constants et α_i ($i = 0, 2$) des fonctions analytiques à déterminer par la suite. Et l'équation (2.138) est équivalente au système suivant :

$$(2.142) \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum \alpha_i z^{i+1} + z^5 v, \\ z^4 [(-1 - \sqrt{5})(4z^3 v''' + 28z^2 v'' + 32z v')] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + \dots + A_4^{(1)} z^4 \\ \quad + z^5 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions α_i ($i = 0, 2$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(1)} = 0$ ($i = 0, 2$), et par conséquent les C.N. de stabilité du système (2.142) sont

$$(2.143) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0 \text{ } (i = 1, 3, 4)}.$$

- De l'équation $A_0^{(1)} = 0$ on obtient

$$\alpha_0 = \frac{1}{6(1+\sqrt{5})} [(-3\sqrt{5}-3)a_0 + (12+4\sqrt{5})(d_0+2c_1) - 64(\sqrt{5}+2)e_2].$$

Avec une telle expression de α_0 , les calculs vont beaucoup se compliquer par la suite, néanmoins à l'aide d'une transformation T qui conserve les coefficients des termes dominants et la condition ($f_4 \equiv 0$) et définie par

$$(2.144) \begin{cases} \lambda \equiv 1, \\ \varphi \equiv x, \\ \mu(x) = (-8 - \frac{8}{3}\sqrt{5})(c_1(x) + \frac{1}{2}d_0(x)) + \frac{64}{3}(\sqrt{5}+2)e_2(x) + (\sqrt{5}+1)a_0(x), \end{cases}$$

on pourra supposer : $\frac{1}{6(1+\sqrt{5})} [(-3\sqrt{5}-3)a_0 + (12+4\sqrt{5})(d_0+2c_1) - 64(\sqrt{5}+2)e_2] = 0$,

et par conséquent avoir : $\boxed{\alpha_0 = 0}$.

Alors on obtient une équation de même forme que (2.138) avec en plus

$$(C.0) \begin{cases} f_4 = 0; \\ \frac{1}{6(1+\sqrt{5})} [(-3\sqrt{5}-3)a_0 + (12+4\sqrt{5})(d_0+2c_1) - 64(\sqrt{5}+2)e_2] = 0. \end{cases}$$

Par la suite, on a

$$(2.145) \quad A_1^{(1)} = (8\sqrt{5}+8)c_0 + (512\sqrt{5}+1024)f_3 + (-32\sqrt{5}-96)e_1 = 0.$$

L'équation $A_2^{(1)} = 0$ conduit à

$$\alpha_2 = \frac{1}{6(1+\sqrt{5})}[3(\sqrt{5}+1)e_0 - 128(2+\sqrt{5})\alpha_1 e_2 - 16(\sqrt{5}+3)\alpha_1 d_0 + 16(\sqrt{5}+3)\alpha_1 c_1 - 24(\sqrt{5}+3)f_2].$$

puis

$$(2.146) \quad A_3^{(1)} = \frac{8}{3(1+\sqrt{5})}[6(\sqrt{5}+3)c_0 - 48(\sqrt{5}+2)e_1 + 256(5\sqrt{5}-11)c_1 e_2 - 256(5\sqrt{5}+11)d_0 e_2 \\ - 64(3\sqrt{5}+7)(d_0^2 - e_2') + (896+384\sqrt{5})c_1 d_0 + (64+32\sqrt{5})(d_0' - c_1') - (192\sqrt{5}+448)c_1^2]\alpha_1 \\ + \frac{8}{3(1+\sqrt{5})}[3(\sqrt{5}+3)f_1 - 96(3\sqrt{5}+7)(c_1 f_2 - d_0 f_2) + 24(2+\sqrt{5})(d_0 e_0 - c_1 e_0 + 2f_2') \\ - (9+3\sqrt{5})e_0'] = 0.$$

Et les coefficients de α_1^2 et α_3 dans $A_4^{(1)}$ sont respectivement :

$$(2.146) \quad \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{1}{(9+4\sqrt{5})}[128(47+21\sqrt{5})(c_1 - d_0) - 1024(17\sqrt{5}+38)e_2] = 0, \\ \frac{4}{3} \frac{1}{(9+4\sqrt{5})}[(480\sqrt{5}+1056)d_0 + (-2112-960\sqrt{5})c_1] = 0. \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations données par (2.144), (2.145) et (2.146) avec le fait que α_1 et α_3 sont arbitraires on aura :

$$(C.1) \quad \begin{cases} f_1 = -2(1+\sqrt{5})(c_1 e_0 + 2f_2') + 16(3+\sqrt{5})c_1 f_2 + e_0', \\ e_1 = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)c_0; \quad d_0 = 2c_1; \quad e_2 = \frac{1}{8}(1-\sqrt{5})c_1; \quad f_3 = 0. \end{cases}$$

En tenant compte des résultats obtenus on passe à la famille suivante.

2- $\mathfrak{F}_2 : [s = 4 - 4\sqrt{5}; \theta = 1, 3, 4]$: On pose

$$(2.147) \quad \begin{cases} y = \frac{4-4\sqrt{5}}{z}, \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^3 \beta_i(x) z(x)^i) + z(x)^4 v(x), \end{cases}$$

avec β_1 et β_3 arbitraires et peuvent être supposées comme paramètres constants et β_i ($i = 0, 2$) des fonctions analytiques à déterminer. Ainsi (2.138) est équivalente au système suivant :

$$(2.148) \quad \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum \beta_i z^{i+1} + z^5 v, \\ z^4 [(-1 + \sqrt{5})(4 z^3 v''' + 28 z^2 v'' + 32 z v')] = A_0^{(2)} + A_1^{(2)} z + \dots + A_4^{(2)} z^4 \\ \quad + z^5 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions β_i ($i = 0, 2$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 0, 2$), et les C.N. de stabilité du système (2.148) sont

$$(2.149) \quad \boxed{A_i^{(2)} = 0 \text{ } (i = 1, 3, 4)}.$$

- De l'équation $A_0^{(2)} = 0$ on a : $\beta_0 = 0$.

Puis on a

$$(2.150) \quad A_1^{(2)} = -\frac{32}{9(\sqrt{5}-1)^2}((63\sqrt{5}-135)c_0 + (448\sqrt{5}-640)c_1^2 + (-360+72\sqrt{5})c_1') = 0.$$

L'équation $A_2^{(2)} = 0$ conduit à

$$\begin{aligned} \beta_2 = & \frac{1}{54(3\sqrt{5}-7)}(-900+540\sqrt{5})c_1'' + (5280+384\sqrt{5})c_1c_1' + (2376-1080\sqrt{5})f_2 \\ & + (1620-828\sqrt{5})c_1c_0 + (3520-7360\sqrt{5})c_1^3 + (2160-1008\sqrt{5})\beta_1c_1 \\ & + (81\sqrt{5}-189)e_0). \end{aligned}$$

Le coefficient de β_1^2 dans $A_4^{(2)}$ est : $\frac{8}{243} \frac{10368}{(3\sqrt{5}-7)(\sqrt{5}-1)^2}(-123\sqrt{5}+275)c_1 = 0$, par conséquent

on obtient

$$(C1) \quad \left[c_1 = 0. \right.$$

Par la suite,

$$(2.151) \quad A_3^{(2)} = -\frac{256}{(3\sqrt{5}-7)(\sqrt{5}-1)^3}([(3078\sqrt{5}-6885)c_0]\beta_1 + (7614\sqrt{5}-17010)f_2') = 0.$$

$$\begin{aligned}
(2.152) \quad A_4^{(2)} = & \frac{1}{3\sqrt{5}-7}([(-752+336\sqrt{5})e_0 + (10880-4864\sqrt{5})f_2]\beta_1 + (576-256\sqrt{5})f_2'' \\
& + (-44+20\sqrt{5})e_0'' + (124\sqrt{5}-276)c_0e_0 + (-1600\sqrt{5}+3584)c_0f_2 \\
& - (7+3\sqrt{5})f_0) = 0.
\end{aligned}$$

En résolvant les équations données par (2.150), (2.151) et (2.152) avec le fait que β_1 est arbitraire on obtient facilement

$$(C.3) \quad \left[\begin{array}{l} e_0 = (-2\sqrt{5} + 10)f_2; \quad f_0 = 0; \\ c_0 = 0; \quad f_2 = K, \end{array} \right. \quad K \text{ constante complexe quelconque.}$$

Revenons maintenant à la condition ($A_4^{(1)} = 0$) de $\mathfrak{F}_1$, qui devient

$$(2.153) \quad A_4^{(1)} = -64\frac{1}{1+\sqrt{5}}K(25 + 11\sqrt{5})\alpha_1 = 0, \text{ alors on a}$$

$$(C.4) \quad \left[K = 0. \right.$$

Pour $\mathfrak{F}_3$ les C.N. de stabilité sont vérifiées, mais sans donner de nouveaux résultats. Alors en simplifiant les résultats obtenus, à savoir (C.0),..., (C.4), on aura :

$$(C.f^{les}) \quad \left[a_0 = c_0 = c_1 = d_0 = e_0 = e_1 = e_2 = f_4 = f_3 = f_2 = f_1 = f_0 = 0. \right.$$

Finalemnt donc, pour que l'équation (2.138) soit stable, il est nécessaire quelle soit de la forme suivante :

$$(2.154) \quad y'''' = y'y'' + \frac{1}{8}y^2y'' + \frac{1}{4}y(y')^2 + \frac{1}{64}y^3y'.$$

Equations de classe II :

Cette classe est donnée par

$$(2.155) \quad y'''' = yy''' + \frac{11}{2}y'y'' - \frac{1}{2}y^2y'' - \frac{7}{4}y(y')^2 + \frac{1}{8}y^3y' + F(x, y),$$

et admet les 3 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = -2; \theta = 0, 2, 4].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = -8; \theta = 0, 5, -5].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = -12; \theta = 5, -3, -6].$$

En utilisant une transformation T , avec λ, μ, φ données par

$$(2.156) \quad \begin{cases} \lambda - \varphi' = 0, \\ \frac{1}{8}\lambda' + f_4\lambda = 0, \quad \text{on peut supposer } f_4 \equiv 0, \\ \mu \equiv 0, \end{cases}$$

l'analyticité de f_4 entraine celle de λ et φ dans D .

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = -2; \theta = 0, 2, 4]$: On pose

$$(2.157) \quad \begin{cases} y = \frac{-2}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^3 \alpha_i(x) z(x)^i) + z(x)^4 v(x), \end{cases}$$

avec α_0 et α_2 arbitraires et peuvent être supposées comme paramètres constants. Ainsi l'équation (2.155) est équivalente au système

$$(2.158) \quad \begin{cases} z' = 1 + i=0 \sum^3 \alpha_i z^{i+1} + z^5 v, \\ z^4 [2 z^3 v''' + 18 z^2 v'' + 30 z v'] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + \dots + A_4^{(1)} z^4 \\ \quad \quad \quad + z^5 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions $\alpha_i (i = 1, 3)$ de telle sorte à avoir : $A_i^{(1)} = 0$ ($i = 1, 3$), et les C.N. de stabilité du système (2.158) sont

$$(2.159) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0 \quad (i = 0, 2, 4)}.$$

- Dans le but de simplifier les expressions $A_i^{(1)}$, pour mieux appliquer la méthode, on va utiliser une transformation T , définie par

$$(2.160) \left\{ \begin{array}{l} \lambda \equiv 1 \\ \varphi \equiv x \\ \mu(x) = -e_2(x) - \frac{3}{2}a_0(x) - \frac{1}{2}d_0(x), \end{array} \right.$$

pour pouvoir supposer : $d_0 + 2e_2 + 3a_0 = 0$.

D'après les valeurs de λ et φ , les coefficients des termes dominants et la condition ($f_4 \equiv 0$) sont conservés par cette dernière transformation, alors on obtient une équation de même forme que (2.155) avec en plus :

$$(C.0) \left[\begin{array}{l} f_4 = 0, \\ d_0 + 2e_2 + 3a_0 = 0. \end{array} \right.$$

Par la suite, on a : $A_0^{(1)} = 8c_1 = 0$, d'où

$$(C.1) \left[c_1 = 0. \right.$$

- $A_1^{(1)} = 0$ conduit à : $\alpha_1 = \frac{1}{3}\alpha_0^2 - \frac{4}{3}e_2\alpha_0 - \frac{4}{3}f_3 - \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}c_0$.

Et puis on a

$$(2.161) \begin{aligned} A_2^{(1)} &= (\frac{16}{3}e_2 - \frac{2}{3}a_0)\alpha_0^2 + (-8e_2' + \frac{32}{3}e_2^2 + 2c_0 + 16f_3 + \frac{32}{3}a_0e_2 + 4e_1)\alpha_0 \\ &\quad + \frac{16}{3}a_0c_0 - 8f_3' - 4e_1' - 4c_0' + 4f_2 + 2e_0 + \frac{16}{3}e_2c_0 + \frac{16}{3}e_2e_1 \\ &\quad + \frac{32}{3}e_2f_3 + \frac{32}{3}a_0f_3 + \frac{16}{3}a_0e_1 = 0. \end{aligned}$$

En résolvant les équations données par (2.161) (α_0 arbitraire) on obtient :

$$(C.3) \left[\begin{array}{l} f_2 = -9e_2c_0 + e_2'' - 36e_2e_2' + \frac{3}{4}c_0' + \frac{1}{2}e_1' - \frac{1}{2}e_0 - 6e_2e_1 + 144e_2^3 \\ a_0 = 8e_2; \quad f_3 = \frac{1}{2}e_2' - 6e_2^2 - \frac{1}{8}c_0 - \frac{1}{4}e_1. \end{array} \right.$$

A cause de la complexité de l'expression $A_4^{(1)}$, on passe à la famille suivante, par la suite, après avoir eu plus de conditions, et par conséquent $A_4^{(1)}$ sera plus simple, on reviendra pour la traiter.

$2- \mathfrak{F}_2 : [s = -8, \theta = 0, 5, -5] :$ On pose

$$(2.162) \quad \begin{cases} y = \frac{-8}{z}; & z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i = 0 \sum^4 \beta_i(x) z(x)^i) + z(x)^5 v(x), \end{cases}$$

avec β_0 arbitraire et peut être supposée comme paramètre constant. Ainsi (2.155) est équivalente au système suivant

$$(2.163) \quad \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum^4 \beta_i z^{i+1} + z^6 v, \\ z^5 [8 z^3 v''' + 144 z^2 v'' + 528 z v'] = A_0^{(2)} + A_1^{(2)} z + \dots + A_5^{(2)} z^5 \\ \quad + z^6 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions β_i ($i = 1..4$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 1..4$), et les C.N. de stabilité du système (2.163) sont

$$(2.164) \quad \boxed{A_i^{(2)} = 0 \text{ } (i = 0, 5)}.$$

- De $A_0^{(2)} = -768e_2 = 0$, on obtient immédiatement

$$(C.4) \quad \left[e_2 = 0. \right.$$

Avant de continuer avec $\mathfrak{F}_2$, revenons à la condition ($A_4^{(1)} = 0$) de la famille précédente, qui devient

$$(2.165) \quad \begin{aligned} A_4^{(1)} &= \frac{8}{9} f_3 \alpha_0^3 + (\frac{8}{9} c_0' - \frac{2}{3} e_0 - \frac{80}{9} f_3') \alpha_0^2 + (-\frac{8}{3} c_0'' + \frac{4}{3} f_1 + \frac{40}{9} f_3 c_0 - \frac{160}{9} f_3^2 \\ &\quad + \frac{32}{3} f_3'' + 2e_0') \alpha_0 + 16 f_3 \alpha_2 - \frac{8}{3} f_3''' + f_0 - \frac{40}{9} f_3' c_0 - \frac{64}{9} f_3 c_0' \\ &\quad + \frac{352}{9} f_3 f_3' - 2f_1' + \frac{8}{3} e_0 f_3 - \frac{2}{3} e_0 c_0 + \frac{2}{3} c_0''' + \frac{4}{9} c_0 c_0' = 0. \end{aligned}$$

En résolvant les équations données par cette dernière expression (α_0, α_2 arbitraires), on obtient

$$(C.5) \quad \left[\begin{aligned} e_0 &= \frac{4}{3} c_0'; & f_0 &= -\frac{2}{3} c_0''' + \frac{4}{9} c_0 c_0'; \\ c_0 &= c_0; & f_3 &= 0; & f_1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Par la suite, en déterminant les fonctions β_i des équations $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 1..4$), le coefficient $A_5^{(2)}$ sera identiquement nul. Et puis, en appliquant la méthode avec $\mathfrak{F}_3$, la C.N. de stabilité ($A_5^{(3)} = 0$) sera vérifiée, mais sans donner de nouveaux résultats.

Finalement en simplifiant les résultats obtenus, à savoir (C.0),..., (C.5), on aura

$$(C.f^{les}) \begin{cases} e_0 = \frac{4}{3}c'_0; e_1 = -\frac{1}{2}c_0; f_2 = -\frac{1}{6}c'_0; f_0 = -\frac{2}{3}c'''_0 + \frac{4}{9}c_0c'_0; \\ a_0 = c_1 = d_0 = e_2 = f_4 = f_3 = f_1 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'équation (2.155) devient de la forme suivante :

$$(2.166) \quad y'''' = yy'''' + \frac{11}{2}y'y'' - \frac{1}{2}y^2y'' - \frac{7}{4}y(y')^2 + \frac{1}{8}y^3y' + c_0y'' + (-\frac{1}{2}c_0y + \frac{4}{3}c'_0)y' - \frac{1}{6}c'_0y^2 - \frac{2}{3}c'''_0 + \frac{4}{9}c_0c'_0.$$

avec c_0 une fonction analytique dans D .

Equations de classe III :

Cette classe est donnée par

$$(2.167) \quad y'''' = yy'''' + \frac{5}{2}y'y'' - \frac{3}{8}y^2y'' - \frac{3}{4}y(y')^2 + \frac{1}{16}y^3y' + F(x, y),$$

et admet les 3 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = -4; \theta = 0, 1, 3].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = -8; \theta = 0, 3, -3].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = -12; \theta = 3, -3, -4].$$

En utilisant une transformation T, définie par

$$(2.168) \quad \begin{cases} \varphi' - \lambda = 0, \\ \varphi'' - h\varphi' = 0, \\ \mu = -4a_0 - 4c_1 + 6\frac{\varphi''}{\varphi'}, \end{cases}$$

telle que h est une fonction analytique donnée par l'équation de RICATTI suivante

$$(2.169) \quad h' = \frac{1}{2}h^2 + (2a'_0 - \frac{1}{5}c_0 + \frac{16}{5}a_0c_1 + 2c'_1 + \frac{6}{5}a_0^2 + 2c_1^2),$$

on peut supposer :

$$(C.0) \quad \left[\begin{array}{l} a_0 = -c_1, \quad c_0 = 0. \end{array} \right.$$

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = -4, \theta = 0, 1, 3]$: On pose

$$(2.170) \quad \left[\begin{array}{l} y = \frac{-4}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^2 \alpha_i(x) z(x)^i) + z(x)^3 v(x), \end{array} \right.$$

avec α_0 et α_1 arbitraires et peuvent être supposées comme paramètres constants. Ainsi l'équation (2.167) est équivalente au système suivant

$$(2.171) \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = 1 + i=0 \sum^2 \alpha_i z^{i+1} + z^4 v, \\ z^3 [4 z^3 v''' + 32 z^2 v'' + 48 z v'] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + A_2^{(1)} z^2 + A_3^{(1)} z^3 \\ \quad + z^4 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{array} \right.$$

On choisit la fonction α_2 de telle sorte à avoir : $A_2^{(1)} = 0$, et les C.N. de stabilité du système (2.171) sont

$$(2.172) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0 \quad (i = 0, 1, 3)}.$$

- On a

$$(2.173) \quad \left[\begin{array}{l} A_0^{(1)} = 8c_1 + 64e_2 + 256f_4 + 16d_0 = 0, \\ A_0^{(1)} = (64e_2 + 32d_0)\alpha_0 - 64f_3 - 16e_1 = 0. \end{array} \right.$$

De $A_2^{(1)} = 0$ on aura : $\alpha_2 = (\alpha_0 - 4d_0 - 8e_2)\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_0^3 + (-2d_0 + \frac{3}{2}c_1)\alpha_0^2 + 2e_1\alpha_0 - \frac{1}{2}e_0 - 2f_2$.

Les coefficients de α_0^3 et $(\alpha_0\alpha_1)$ dans $A_3^{(1)}$ sont respectivement

$$(2.174) \quad \left[\begin{array}{l} 12c_1 - 32e_2 - 32d_0 = 0, \\ 32d_0 - 24c_1 = 0. \end{array} \right.$$

En résolvant les équations données par (2.173,174) (α_0, α_1 arbitraires) on aura :

$$(C.1) \quad \begin{cases} e_2 = -\frac{1}{2}d_0; & f_4 = \frac{1}{48}d_0, \\ c_1 = \frac{4}{3}d_0; & e_1 = -4f_3. \end{cases}$$

Par la suite, le coefficient $A_3^{(1)}$ devient

$$(2.175) \quad A_3^{(1)} = 64f_3\alpha_1 - 64f_3\alpha_0^2 + (64f_3' - 16f_2 + \frac{256}{3}d_0f_3)\alpha_0 + \frac{16}{3}d_0e_0 \\ + 16f_2' + \frac{64}{3}d_0f_2 + 4e_0' - 4f_1 = 0,$$

d'où on obtient immédiatement

$$(C.2) \quad \begin{cases} f_3 = 0; & f_2 = 0; & f_1 = \frac{4}{3}d_0e_0 + e_0'. \end{cases}$$

Pour les familles $\mathfrak{F}_2$ et $\mathfrak{F}_3$, les C.N. de stabilité sont vérifiées sans donner de nouveaux résultats. Alors de (C.0), (C.1), et (C.2) on a

$$(C.F^{les}) \quad \begin{cases} a_0 = -\frac{4}{3}d_0; & c_1 = \frac{4}{3}d_0; & e_2 = -\frac{1}{2}d_0; & f_4 = \frac{1}{48}d_0; \\ f_1 = \frac{4}{3}d_0e_0 + e_0'; & c_0 = f_3 = f_2 = e_1 = 0. \end{cases}$$

Et l'équation (2.167) devient

$$(2.176) \quad y'''' = yy''' + \frac{5}{2}y'y'' - \frac{3}{8}y^2y'' - \frac{3}{4}y(y')^2 + \frac{1}{16}y^3y' - \frac{4}{3}d_0y''' + \frac{4}{3}d_0yy'' + d_0(y')^2 \\ + (-\frac{1}{2}d_0y^2 + e_0)y' + \frac{1}{48}d_0y^4 + (\frac{4}{3}d_0e_0 + e_0')y + f_0,$$

avec d_0 , e_0 , et f_0 des fonction analytique dans D .

Equations de classe IV :

Cette classe est donnée par

$$(2.177) \quad y'''' = yy''' + \frac{10}{3}y'y'' - \frac{4}{9}y^2y'' - \frac{8}{9}y(y')^2 + \frac{2}{27}y^3y' + F(x, y),$$

et admet les 3 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = -3; \theta = 0, 2, 3].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = -9; \theta = 0, 3, -4].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = -12; \theta = 3, -3, -4].$$

En utilisant une transformation T, avec λ, μ, φ données par

$$(2.178) \quad \begin{cases} \lambda = \varphi', \\ \varphi'' - g\varphi' = 0, \\ \mu = -9a_0 - 9c_1 + 6\frac{\varphi''}{\varphi'}, \end{cases}$$

telle que g est une fonction analytique donnée par l'équation de RICATTI suivante

$$(2.179) \quad g' = \frac{1}{2}g^2 + \left(\frac{18}{5}a_0^2 + \frac{9}{2}c_1^2 + 3c_1' + 3a_0' + \frac{81}{10}a_0c_1 - \frac{1}{10}c_0\right),$$

on peut supposer

$$(C.0) \quad \left[a_0 = -c_1; c_0 = 0. \right.$$

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = -3, \theta = 0, 2, 3]$: On pose

$$(2.180) \quad \begin{cases} y = \frac{-3}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i = 0 \sum^2 \alpha_i(x)z(x)^i) + z(x)^3v(x), \end{cases}$$

avec α_0 et α_2 arbitraires et peuvent être supposées comme paramètres constants. Ainsi l'équation (2.179) est équivalente au système suivant

$$(2.181) \quad \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum^2 \alpha_i z^{i+1} + z^4 v, \\ z^3 [3 z^3 v''' + 21 z^2 v'' + 24 z v'] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + A_2^{(1)} z^2 + A_3^{(1)} z^3 \\ \quad + z^4 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit la fonction α_1 de telle sorte à avoir : $A_1^{(1)} = 0$, et les C.N. de stabilité du système (2.181) sont

$$(2.182) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0 \quad (i = 0, 2, 3)}.$$

- On a

$$(2.183) \quad A_0^{(1)} = 9d_0 + 81f_4 + 27e_2 = 0.$$

De l'équation $A_1^{(1)} = 0$ on a : $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + (3d_0 - \frac{3}{2}c_1 + \frac{9}{2}e_2)\alpha_0 - \frac{3}{2}e_1 - \frac{9}{2}f_3$.

Le coefficient de α_0^2 dans $A_2^{(1)}$ et celui de α_2 dans $A_3^{(1)}$ sont respectivement

$$(2.184) \quad \begin{cases} -\frac{81}{2}e_2 + 3c_1 - 18d_0 = 0, \\ 18d_0 + 27e_2 - 9c_1 = 0. \end{cases}$$

En résolvant les équations données par (2.183,184) on obtient

$$(C.1) \quad \left[\begin{array}{l} c_1 = \frac{6}{7}d_0; \quad f_4 = \frac{1}{63}d_0; \quad e_2 = -\frac{8}{21}d_0. \end{array} \right.$$

Par la suite,

$$(2.185) \quad A_2^{(1)} = (9e_1 + 54f_3)\alpha_0 + 3e_0 - \frac{27}{7}d_0e_1 - \frac{81}{7}d_0f_3 + 9f_2 - 9e_1' - 27f_3' = 0.$$

$$(2.186) \quad A_3^{(1)} = (9e_1 + \frac{81}{2}f_3)\alpha_0^2 + (-\frac{81}{2}f_3' - \frac{27}{2}e_1' - \frac{54}{7}d_0e_1 + 3e_0 - \frac{162}{7}d_0f_3)\alpha_0$$

$$-3f_1 + \frac{27}{2}f_3'' + \frac{9}{2}e_1'' - \frac{243}{2}f_3'^2 + \frac{27}{7}d_0e_1' + \frac{81}{7}d_0f_3' - \frac{81}{2}e_1f_3 = 0.$$

Et après résolution des équations données par (2.185,186) (α_0 est arbitraire), on aura

$$(C.2) \quad \left[\begin{array}{l} e_1 = f_3 = f_1 = e_0 = f_2 = 0. \end{array} \right.$$

Pour les familles $\mathfrak{F}_2$ et $\mathfrak{F}_3$, les C.N. de stabilité sont vérifiées, mais sans donner de nouveaux résultats, alors de (C.0),(C.1), et (C.2) on a

$$(C.f^{les}) \quad \left[\begin{array}{l} a_0 = -\frac{6}{7}d_0; c_1 = \frac{6}{7}d_0; e_2 = -\frac{8}{21}d_0; f_4 = \frac{1}{63}d_0; \\ c_0 = e_0 = e_1 = f_3 = f_2 = f_1 = 0. \end{array} \right.$$

Et l'équation (2.177) devient

$$(2.187) \quad y'''' = yy''' + \frac{10}{3}y'y'' - \frac{4}{9}y^2y'' - \frac{8}{9}y(y')^2 + \frac{2}{27}y^3y' - \frac{6}{7}d_0y''' + \frac{6}{7}d_0yy'' \\ + d_0(y')^2 - \frac{8}{21}d_0y^2y' + \frac{1}{63}d_0y^4 + f_0,$$

avec d_0 et f_0 des fonctions analytiques dans D .

Equations de classe V :

Pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{-1, -4, -6, 1, 4, 6\}$, cette classe est donnée par

$$(2.188) \quad y'''' = yy''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}y'y'' + \frac{12}{k^2-1}y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}y^3y' + F(x, y),$$

et admet les 3 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = -2; \theta = 1, 2, 3].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = k - 1; \theta = 3, 5, k - 1].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = -k - 1; \theta = 3, 5, -k - 1].$$

En utilisant une transformation T, avec λ, μ, φ données par

$$(2.189) \quad \begin{cases} \lambda = \varphi', \\ \varphi'' - \frac{1}{90}[36a_0 - d_0(k^2 - 7) + (k^2 + 11)(2f_4 + e_2 + c_1)]\varphi' = 0, \\ \mu = \frac{1}{90}(-49 + k^2)[c_1 + 45f_4 + e_2] + \frac{1}{90}(-k^2 - 23)d_0 - \frac{3}{5}a_0, \end{cases}$$

on peut supposer :

$$(C.0) \quad \begin{cases} 8c_1 + 8e_2 + 16f_4 + 4d_0 + 12a_0 = 0, \\ (k^2 - 13)a_0 + (k^2 - 1)d_0 = 0, \end{cases}$$

l'analyticité de a_0, c_1, d_0, e_2, f_4 , entraine celle de λ, μ et φ .

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = -2, \theta = 1, 2, 3]$: On pose

$$(2.190) \quad \begin{cases} y = \frac{-2}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^2 \alpha_i(x)z(x)^i) + z(x)^3v(x), \end{cases}$$

avec $\alpha_i (i = 1, 2)$ arbitraires et peuvent être supposées comme paramètres constants. Et l'équation (2.188) sera équivalente au système

$$(2.191) \quad \begin{cases} z' = 1 + i \sum_{i=0}^2 \alpha_i z^{i+1} + z^4 v, \\ z^3 [2 z^3 v''' + 12 z^2 v'' + 12 z v'] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + A_2^{(1)} z^2 + A_3^{(1)} z^3 \\ \quad + z^4 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit la fonction α_0 de telle sorte à avoir : $A_0^{(1)} = 0$, et les C.N. de stabilité du système (2.191) sont

$$(2.192) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0 \ (i = 1, 2, 3)}.$$

- De l'équation $A_0^{(1)} = 0$ on a : $\alpha_0 = 0$.

Par la suite,

$$(2.193) \quad \begin{cases} A_1^{(1)} = -8f_3 - 4c_0 - 4e_1 = 0, \\ A_2^{(1)} = \frac{1}{k^2-13} [(-16(-13+k^2)f_4 - 48d_0)\alpha_1 + 4f_2 + 2e_0], \\ A_3^{(1)} = (\frac{-72}{k^2-13}d_0 + 4e_2 - 8f_4)\alpha_2 + (-4c_0 - 4e_1)\alpha_1 - 2f_1 = 0. \end{cases}$$

En résolvant les équations données par (2.194) (α_1, α_2 arbitraires), on aura

$$(C.1) \quad \begin{cases} e_2 = -4f_4; \ f_2 = -\frac{1}{2}e_0; \ d_0 = -\frac{1}{3}(k^2 - 13)f_4; \\ c_0 = -e_1; \ f_3 = f_1 = 0. \end{cases}$$

2- $\mathfrak{F}_2 : [s = k - 1; \theta = 3, 5, k - 1]$: On pose

$$(2.194) \quad \begin{cases} y = \frac{k-1}{z}; \ z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i = 0 \sum^4 \beta_i(x) z(x)^i) + z(x)^5 v(x), \end{cases}$$

avec β_3 arbitraire et peut être supposée comme paramètre constant. Ainsi (2.188) est équivalente au système suivant

$$(2.195) \quad \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum \beta_i z^{i+1} + z^6 v, \\ z^5 [(k-1)(-z^3 v''' + (k-11) z^2 v'' + 3(k-7) z v')] = A_0^{(2)} + A_1^{(2)} z + \dots \\ \quad \quad \quad + A_5^{(2)} z^5 + z^6 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions β_i ($i = 0..2, 4$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 0..2, 4$), et les C.N. de stabilité du système (2.195) sont

$$(2.196) \quad \boxed{A_i^{(2)} = 0 \text{ } (i = 3, 5)}.$$

- Après détermination des β_i des équations $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 0..2$), on aura

$$(2.197) \quad A_3^{(2)} = \frac{(k^2-1)^2}{6}(e_1 f_4' + 2f_4 e_1' + f_4 e_0) - \frac{k^2-1}{2}(e_1'' + e_0') - \frac{(k^2-1)^3}{18}e_1 f_4^2 = 0.$$

Et en déterminant β_4 de l'équation $A_4^{(2)} = 0$, le coefficient de β_3 dans $A_5^{(2)}$ sera donné par

$$(2.198) \quad -\frac{2}{3}f_4' - \frac{2(k^2-1)}{9}f_4^2 = 0,$$

qui est une équation de RICATTI, et admet les solutions suivantes :

$$(C.2) \quad \begin{cases} f_4 \equiv 0, \\ \text{ou } f_4(x) = \frac{3}{(k^2-1)x + 3K}, \end{cases} \quad K \text{ constante complexe quelconque.}$$

i) **cas : $f_4 \equiv 0$** : Alors de l'équation (2.197) on a

$$(C.3) \quad \left[e_0 = -e_1' + K_1, \text{ avec } K_1 \text{ constante complexe quelconque.} \right]$$

Par la suite,

$$(2.199) \quad A_5^{(2)} = f_0' + \frac{1}{24}(k^2-1)(e_1'''' + (e_1')^2 - K_1 e_1' + e_1 e_1'' - 2K_1^2) = 0,$$

et en intégrant une fois on aura

$$(C.4) \quad \left[f_0 = \frac{1}{24}(k^2-1)(-e_1''' - e_1 e_1' + K_1 e_1 + 2K_1^2 x) + K_2, \right]$$

avec K_2 constante complexe quelconque.

Pour la famille $\mathfrak{F}_3$, les C.N. de stabilité sont vérifiées, mais sans donner de nouveaux résultats, alors de (C.0),..., (C.4) on a :

$$(C.f^{les}) \left[\begin{array}{l} c_0 = -e_1; e_0 = -e'_1 + K_1; f_2 = -\frac{1}{2}(-e'_1 + K_1); \\ f_0 = \frac{1}{24}(k^2 - 1)(-e_1''' - e_1 e'_1 + K_1 e_1 + 2K_1^2 x) + K_2; \\ a_0 = d_0 = c_1 = e_2 = f_4 = f_3 = f_1 = 0. \end{array} \right.$$

Et l'équation (2.188) devient

$$(2.200) \quad y'''' = yy''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}y'y'' + \frac{12}{k^2-1}y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}y^3y' - e_1y'' + e_1yy' \\ + (-e'_1 + K_1)y' - \frac{1}{2}(-e'_1 + K_1)y^2 + \frac{1}{24}(k^2 - 1)(-e_1''' - e_1 e'_1 \\ + K_1 e_1 + 2K_1^2 x) + K_2,$$

avec e_1 une fonction analytique dans D et K_1, K_2 des constantes complexes quelconques.

ii) cas : $f_4(x) = \frac{3}{(k^2 - 1)x + 3K}$: Dans le but de simplifier les calculs, on remplace $(x + \frac{3K}{k^2 - 1})$ par x . L'équation (2.197) devient

$$(2.201) \quad \frac{k^2-1}{2}[-(e_1'' + e_0') - \frac{1}{x}e_1' - \frac{2}{x^2}e_1 + \frac{1}{x}e_0] = 0,$$

en multipliant les deux membres de (2.201) par x^{-1} , puis en intégrant une fois on aura

$$(C'.3) \quad \left[e_0 = -e'_1 + x^{-1}e_1 + K_3x, \quad K_3 \text{ constante complexe quelconque.} \right.$$

Par la suite,

$$(2.202) \quad A_5^{(2)} = \frac{k^2-1}{24}(e_1'''' + e_1 e_1'' + (e_1')^2 - K_3 e_1' x - 2K_3^2 x^2 - 2K_3 e_1) + f_0' + \frac{1}{x}f_0 = 0,$$

et en multipliant les deux membres de (2.202) par x , puis en intégrant une fois, on aura

$$(C'.4) \quad \left[f_0 = \frac{K^2-1}{24}[-(e_1''' + e_1 e_1') + (e_1'' + \frac{1}{2}e_1^2)x^{-1} + K_3 x e_1 + \frac{1}{2}K_3^2 x^3] + K_4 x, \right.$$

avec K_4 une constante complexe quelconque.

Les C.N. de stabilité sont vérifiées avec la famille $\mathfrak{F}_3$, mais sans donner de nouveaux résultats, alors de (C.0),(C.1),(C.2),(C'3) et (C'.4) on a :

$$(C.F^{les}) \left[\begin{array}{l} a_0(x) = \frac{1}{x}; \quad c_1(x) = -\frac{1}{x}; \quad d_0(x) = -\frac{k^2-13}{k^2-1}\frac{1}{x}; \quad e_2(x) = -\frac{12}{k^2-1}\frac{1}{x}; \\ c_0(x) = -e_1(x); \quad f_2(x) = \frac{1}{2}(e'_1(x) - x^{-1}e_1(x) - K_3); \quad f_3(x) = 0; \\ e_0(x) = -e'_1(x) + x^{-1}e_1(x) + K_3x; \quad f_4(x) = \frac{3}{k^2-1}\frac{1}{x}; \quad f_1(x) = 0; \\ f_0(x) = \frac{k^2-1}{24}[-(e'''_1(x) + e_1(x)e'_1(x)) + (e''_1(x) + \frac{1}{2}e_1^2(x))x^{-1} \\ + K_3xe_1(x) + \frac{1}{2}K_3^2x^3] + K_4x^{-1}. \end{array} \right.$$

Et l'équation (2.188) (qui représentera par la suite la **classe $\mathbf{V}'$**) devient

$$(2.203) \quad y'''' = yy''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}y'y' + \frac{12}{k^2-1}y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}y^3y' + \frac{1}{x}(y''' - yy'' \\ - \frac{k^2-13}{k^2-1}(y')^2) - e_1(y'' - yy') + (-e'_1(x) + x^{-1}e_1(x) + K_3x)(y' - \frac{1}{2}y^2) \\ + \frac{k^2-1}{24}[-e'''_1 - e_1e'_1 + (e''_1 + \frac{1}{2}e_1^2)x^{-1} + K_3xe_1 + \frac{1}{2}K_3^2x^3] + K_4x^{-1},$$

avec e_1 une fonction analytique dans D et K_3, K_4 des constantes complexes quelconques.

Equations de classe VI :

Cette classe est donnée par

$$(2.204) \quad y'''' = yy''' + 2y'y'' - \frac{2}{5}y^2y'' - \frac{3}{5}y(y')^2 + \frac{2}{25}y^3y' - \frac{1}{625}y^4y^5 + F(x, y),$$

et admet les 4 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = -5; \theta = 0, 1, 2].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = -10; \theta = 0, 1, -3].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = -15; \theta = 0, -3, -4].$$

$$\mathfrak{F}_4 : [s = -20; \theta = -3, -4, -5].$$

En utilisant une transformation T, définie par

$$(2.204) \quad \begin{cases} \lambda \equiv 1, \\ \varphi \equiv x, \\ \mu \equiv -a_0, \end{cases}, \text{ on peut supposer : (C.0) } \left[a_0 = 0. \right.$$

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = -5; \theta = 0, 1, 2]$: On pose

$$(2.205) \quad \begin{cases} y = \frac{-5}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^1 \alpha_i(x) z(x)^i) + z(x)^2 v(x), \end{cases}$$

avec α_0 et α_1 arbitraires et peuvent être supposées comme paramètres constants. Et l'équation (2.204) est équivalente au système suivant

$$(2.206) \quad \begin{cases} z' = 1 + z(\alpha_0 + \alpha_1 z + z^2 v), \\ z^2 [5 z^3 v''' + 30 z^2 v'' + 30 z v'] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + A_2^{(1)} z^2 \\ \quad \quad \quad + z^3 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

Les C.N. de stabilité du système (2.206) sont

$$(2.207) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0 \quad (i = 0, 1, 2)}.$$

- On a :

$$(2.208) \quad \begin{cases} A_0^{(1)} = 50c_1 + 25d_0 + 125e_2 + 625f_4 = 0, \\ A_1^{(1)} = (\frac{25}{2}d_0 - \frac{125}{2}e_2 - \frac{1875}{2}f_4)\alpha_0 - (10c_0 + 125f_3 + 25e_1) = 0, \\ A_2^{(1)} = (25d_0 - 625f_4)\alpha_1 - (-\frac{25}{2}d_0 + \frac{125}{2}e_2 + \frac{625}{2}f_4)\alpha_0^2 \\ \quad \quad \quad - (15c_0 + 25e_1)\alpha_0 + 5e_0 + 25f_2 = 0 \end{cases}$$

En résolvant les équations données par (2.208) (α_0, α_1 arbitraires) on aura

$$(C.1) \quad \begin{cases} f_2 = -\frac{1}{5}e_0; \quad e_1 = -\frac{3}{5}c_0; \\ f_3 = \frac{1}{25}c_0; \quad d_0 = f_4 = e_2 = 0. \end{cases}$$

Pour les familles $\mathfrak{F}_2$ et $\mathfrak{F}_3$, les C.N. de stabilité sont vérifiées sans donner de nouveaux résultats. Alors de (C.0) et (C.1) l'équation (2.204) devient

$$(2.209) \quad y'''' = yy''' + 2y'y'' - \frac{2}{5}y^2y'' - \frac{3}{5}y(y')^2 + \frac{2}{25}y^3y' - \frac{1}{625}y^5 + c_0(y'' - \frac{3}{5}yy' + \frac{1}{25}y^3) \\ + e_0(y' - \frac{1}{5}y^2) + f_1y + f_0,$$

avec c_0, e_0, f_0, f_1 des fonctions analytiques dans D .

Equations de classe VII :

Cette classe est donnée par

$$(2.210) \quad y'''' = y'y'' + \frac{1}{5}y^2y'' + \frac{1}{5}y(y')^2 - \frac{1}{625}y^5 + F(x, y),$$

et admet les 4 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = -5; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = 10; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = 15; \theta = 5, 6, -3].$$

$$\mathfrak{F}_4 : [s = -20; \theta = 5, 11, -8].$$

En utilisant une transformation T, avec λ, μ, φ données par

$$(2.211) \quad \begin{cases} \varphi'' + e_2\varphi' = 0, \\ \lambda' + e_2\lambda = 0, \\ \mu \equiv 0, \end{cases} \quad \text{on peut supposer : (C.0) } \left[\begin{array}{l} e_2 = 0. \end{array} \right.$$

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = -5; \theta = 1, 2, 5]$: On pose

$$(2.212) \quad \begin{cases} y = \frac{-5}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^4 \alpha_i(x)z(x)^i) + z(x)^5v(x), \end{cases}$$

avec α_1 et α_2 arbitraires. Ainsi l'équation (2.210) est équivalente au système suivant

$$(2.213) \quad \begin{cases} z' = 1 + i = 0 \sum \alpha_i z^{i+1} + vz^6, \\ z^5[5 z^3 v''' + 50 z^2 v'' + 100 z v'] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + \dots + A_5^{(1)} z^5 + \\ z^6 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions α_i ($i = 0, 3, 4$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(1)} = 0$ ($i = 0, 3, 4$), et les C.N. de stabilité du système (2.213) sont

$$(2.214) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0 \text{ (} i = 1, 2, 5 \text{)}}.$$

- L'équation $A_0^{(1)} = 0$ conduit à : $\alpha_0 = -(30a_0 + 50c_1 + 625f_4 + 25d_0)$.

En utilisant une transformation T qui conserve la condition ($e_2 \equiv 0$) et qui est définie par

$$(2.215) \quad \begin{cases} \lambda \equiv 1; \varphi \equiv x; \\ \mu \equiv -\frac{3}{2}a_0 - \frac{5}{2}c_1 - \frac{125}{4}f_4 - \frac{5}{4}d_0, \end{cases}$$

on pourra supposer

$$(C.1) \quad \left[30a_0 + 50c_1 + 625f_4 + 25d_0 = 0. \right.$$

et par conséquent on aura : $\boxed{\alpha_0 = 0}$.

Par la suite, on a

$$(2.216) \quad \begin{cases} A_1^{(1)} = 10c_0 - 125f_3 - 25e_1 = 0, \\ A_2^{(1)} = (50d_0 + 50c_1 + 40a_0)\alpha_1 + 5e_0 + 25f_2 = 0. \end{cases}$$

Après avoir déterminer α_3 et α_4 des équations $A_i^{(1)} = 0$ ($i = 3, 4$), les coefficients de α_1^2 et $\alpha_1\alpha_2$ dans $A_5^{(1)}$ seront respectivement de la forme

$$(2.217) \quad \begin{cases} -\frac{25}{12}c_1a_0 - \frac{25}{4}e_1 - \frac{125}{12}c_1d_0 + \frac{125}{6}d_0a_0 + \frac{125}{6}d_0^2 + \frac{10}{3}a_0^2 - \frac{25}{2}d_0' \frac{2}{5}a_0' = 0, \\ -25d_0 + \frac{25}{2}c_1 = 0. \end{cases}$$

En résolvant les équations données par (2.216,217) (α_1, α_2 arbitraires) on aura :

$$(C.2) \quad \begin{cases} f_2 = -\frac{1}{5}e_0; & c_1 = 2d_0; & a_0 = -\frac{15}{4}d_0; & f_4 = -\frac{1}{50}d_0; \\ e_1 = -\frac{5}{2}d_0^2 - \frac{1}{2}d'_0; & f_3 = \frac{1}{2}d_0^2 + \frac{1}{10}d'_0 - \frac{2}{25}c_0. \end{cases}$$

2- $\mathfrak{F}_2 : [s = 10; \theta = 1, 2, 5]$: On pose

$$(2.218) \quad \begin{cases} y = \frac{10}{z}; & z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^4 \beta_i(x)z(x)^i) + z(x)^5v(x), \end{cases}$$

avec β_1 et β_2 arbitraires, et l'équation (2.210) est équivalente au système

$$(2.219) \quad \begin{cases} z' = 1 + i=0 \sum^4 \beta_i z^{i+1} + vz^6, \\ z^5[-10z^3v''' - 100z^2v'' - 200zv'] = A_0^{(2)} + A_1^{(2)}z + \dots + A_5^{(2)}z^5 \\ \quad + z^6H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions β_i ($i = 0, 3, 4$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 0, 3, 4$), et les C.N. de stabilité du système (2.219) sont

$$(2.220) \quad \boxed{A_i^{(2)} = 0, (i = 1, 2, 5)}.$$

- De $A_0^{(2)} = 0$ on a : $\beta_0 = \frac{21}{4}d_0$,

par la suite,

$$(2.221) \quad \begin{cases} A_1^{(2)} = 60c_0 + \frac{25875}{4}d_0^2 - 675d'_0 = 0, \\ A_2^{(2)} = (2250d_0)\beta_1 - \frac{315}{2}c_0d_0 + \frac{154875}{8}d_0^3 + 30e_0 - \frac{64575}{8}d_0d'_0 + \frac{525}{2}d''_0 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne

$$(C.3) \quad \left[d_0 = e_0 = c_0 = 0. \right]$$

En déterminant β_3 et β_4 des $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 3, 4$), on aura :

$$(2.222) \quad A_5^{(2)} = -5f_1'' - f_0' = 0,$$

et en intégrant une fois on obtient

$$(C.4) \quad \left[f_0 = -5f_1' + K_1, \quad \text{où } K_1 \text{ est une constante complexe quelconque.} \right.$$

3- $\mathfrak{F}_3 : [s = 15; \theta = 5, 6, -3]$. : On pose

$$(2.223) \quad \left[\begin{array}{l} y = \frac{15}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^5 \gamma_i(x) z(x)^i) + z(x)^6 v(x), \end{array} \right.$$

avec γ_5 arbitraire, et l'équation (2.210) est équivalente au système

$$(2.224) \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = 1 + i=0 \sum^5 \gamma_i z^{i+1} + v z^7, \\ z^6 [-15z^3 v''' - 195z^{2''} v - 300z v'] = A_0^{(3)} + A_1^{(3)} z + \dots + A_6^{(3)} z^6 \\ \quad + z^7 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{array} \right.$$

On choisit les fonctions γ_i ($i = 0..4$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(3)} = 0$ ($i = 0..4$), et les C.N. de stabilité du système (2.224) sont

$$(2.225) \quad \boxed{A_i^{(3)} = 0, \quad (i = 5, 6)}.$$

- En déterminant γ_i de $A_i^{(3)} = 0$ ($i = 0..4$), on aura

$$(2.226) \quad A_5^{(3)} = \frac{5}{2} f_1'' = 0, \text{ ce qui donne}$$

$$(C.5) \quad \left[f_1(x) = K_2 x + K_3, \quad K_2 \text{ et } K_3 \text{ sont des constantes complexes quelconques.} \right.$$

Et $A_6^{(3)}$ est identiquement nul.

Pour $\mathfrak{F}_4$, les C.N. de stabilité sont vérifiées, mais sans donner de nouveaux résultats. Ainsi de (C.0),..., (C.5) on a

$$(C.F^{les}) \left[\begin{array}{l} a_0 = c_0 = c_1 = d_0 = e_0 = e_1 = e_2 = f_4 = f_3 = f_2 = 0; \\ f_1(x) = K_2 x + K_3; \quad f_0 = -5K_2 + K_1. \end{array} \right.$$

Et l'équation (2.210) devient

$$(2.227) \quad y'''' = y'y'' + \frac{1}{5}y^2y'' + \frac{1}{5}y(y')^2 - \frac{1}{625}y^5 + (K_2 x + K_3)y - 5K_2 + K_1,$$

avec K_1, K_2 et K_3 sont des constantes complexes quelconques.

Equations de classe VIII :

Cette classe est donnée par

$$(2.228) \quad y'''' = y^2y'' + y(y')^2 - \frac{3}{50}y^5 + F(x, y),$$

et admet les 4 familles de pôles simples mobiles :

$$\mathfrak{F}_1 : [s = \sqrt{10}; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_2 : [s = -\sqrt{10}; \theta = 1, 2, 5].$$

$$\mathfrak{F}_3 : [s = 2\sqrt{10}; \theta = -4, 5, 7].$$

$$\mathfrak{F}_4 : [s = -2\sqrt{10}; \theta = -4, 5, 7].$$

En utilisant une transformation T, avec λ, μ, φ données par

$$(2.229) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda' - \frac{1}{10}a_0\lambda = 0, \\ \varphi'' - \frac{1}{10}a_0\varphi' = 0, \\ \mu \equiv 0, \end{array} \right. \quad \text{on peut supposer : (C.0) } \left[\begin{array}{l} a_0 = 0. \end{array} \right.$$

1- $\mathfrak{F}_1 : [s = \sqrt{10}; \theta = 1, 2, 5]$: On pose

$$(2.230) \quad \left[\begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{10}}{z}; \quad z' = 1 + zu \\ u(x) = (i=0 \sum^4 \alpha_i(x)z(x)^i) + z(x)^5v(x), \end{array} \right.$$

avec α_1 et α_2 arbitraires, et l'équation (2.228) est équivalente au système

$$(2.231) \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = 1 + i = 0 \sum \alpha_i z^{i+1} + v z^6, \\ z^5 [\sqrt{10}(-z^3 v''' - 10 z^2 v'' - 20 z v')] = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} z + \dots + A_5^{(1)} z^5 \\ \quad + z^6 H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{array} \right.$$

On choisit les fonctions α_i ($i = 0, 3, 4$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(1)} = 0$ ($i = 0, 3, 4$), ainsi les C.N. de stabilité du système (2.231) sont

$$(2.232) \quad \boxed{A_i^{(1)} = 0, (i = 1, 2, 5)}.$$

- De $A_0^{(1)} = 0$ on a : $\alpha_0 = -e_2 + \frac{2}{\sqrt{10}}c_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}d_0 + \frac{10}{\sqrt{10}}f_4$.

En utilisant une transformation T, qui conserve la condition ($a_0 = 0$), et qui est définie par

$$(2.233) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \equiv 1; \varphi \equiv x; \\ \mu \equiv \frac{1}{2}\sqrt{10}e_2 - c_1 - \frac{1}{2}d_0 - 5f_4. \end{array} \right.$$

on pourra supposer

$$(C.1) \quad \left[-e_2 + \frac{2}{\sqrt{10}}c_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}d_0 + \frac{10}{\sqrt{10}}f_4 = 0, \right.$$

et par conséquent on aura : $\boxed{\alpha_0 = 0}$.

Par la suite,

$$(2.234) \quad \left[\begin{array}{l} A_1^{(1)} = 10\sqrt{10}f_3 + 2\sqrt{10}c_0 - 10e_1 = 0, \\ A_2^{(1)} = (10d_0 - 100f_4)\alpha_1 + 10f_2 - \sqrt{10}e_0 = 0, \end{array} \right.$$

ce qui nous donne

$$(C.2) \quad \left[\begin{array}{l} f_4 = \frac{1}{10}d_0; \quad f_2 = \frac{1}{10}\sqrt{10}e_0; \\ c_0 = \frac{1}{2}\sqrt{10}e_1 - 5f_3. \end{array} \right.$$

En déterminant les α_i de $A_i^{(1)} = 0$ ($i = 3, 4$), les coefficients de $\alpha_1\alpha_2$, α_1^2 et α_2 dans $A_5^{(1)}$ seront respectivement comme suit

$$(2.235) \quad \begin{cases} 30c_1 + 20d_0 = 0, \\ -15\sqrt{10}(c_1)^2 - 5\sqrt{10}d_0c_1 + 30c'_1 + 15e_1 + 10d'_0 = 0, \\ 10\sqrt{10}c_1c'_1 - 5c''_1 + 25c_1f_3 - 5\sqrt{10}f_3 + 5\sqrt{10}e_1c_1 - \sqrt{10}e_0 - 5e'_1 - 25c_1^3 = 0, \end{cases}$$

et après résolution on aura

$$(C.3) \quad \begin{cases} d_0 = -\frac{3}{2}c_1; \quad e_1 = -c'_1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}c_1^2; \\ e_0 = -5f'_3 + \frac{5}{2}\sqrt{10}c_1f_3. \end{cases}$$

2- $\mathfrak{F}_2 : [s = -\sqrt{10}, \theta = 1, 2, 5]$: On pose

$$(2.236) \quad \begin{cases} y = \frac{\sqrt{10}}{z}; \quad z' = 1 + zu, \\ u(x) = (i=0 \sum^4 \beta_i(x)z(x)^i) + z(x)^5v(x), \end{cases}$$

avec β_1 et β_2 arbitraires, et l'équation (2.228) est équivalente au système

$$(2.237) \quad \begin{cases} z' = 1 + i=0 \sum^4 \beta_i z^{i+1} + vz^6, \\ z^5[\sqrt{10}(z^3v''' + 10z^2v'' + 20zv')] = A_0^{(2)} + A_1^{(2)}z + \dots + A_5^{(2)}z^5 \\ \quad + z^6H_1(x, z, v, v', v'', v'''). \end{cases}$$

On choisit les fonctions β_i ($i = 0, 3, 4$) de telle sorte à avoir : $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 0, 3, 4$), ainsi les C.N. de stabilité du système (2.237) sont

$$(2.238) \quad \boxed{A_i^{(2)} = 0, (i = 1, 2, 5)}.$$

- $A_0^{(2)} = 0$ conduit à : $\beta_0 = \frac{1}{5}\sqrt{10}c_1$. Et $A_1^{(2)}$ est identiquement nul.

Par la suite,

$$(2.239) \quad A_2^{(2)} = (40c_1)\beta_1 + (10c_1'' + 80c_1f_3 - 7\sqrt{10}c_1c_1' - 15c_1^3 - 10\sqrt{10}f_3') = 0,$$

d'où

$$(C.4) \quad \left[\begin{array}{l} c_1 = 0 ; \quad f_3 = K_1, \quad \text{avec } K_1 \text{ constante complexe quelconque.} \end{array} \right.$$

En déterminant β_i des $A_i^{(2)} = 0$ ($i = 3, 4$), on aura

$$(2.240) \quad A_5^{(2)} = -\frac{1}{2}\sqrt{10}f_1'' + f_0' = 0,$$

et par intégration on obtient

$$(C.5) \quad \left[\begin{array}{l} f_0 = \frac{1}{2}\sqrt{10}f_1' + K_2, \quad \text{avec } K_2 \text{ constante complexe quelconque.} \end{array} \right.$$

Revenons maintenant au coefficient $A_5^{(1)}$ de $\mathfrak{F}_1$, qui devient

$$(2.241) \quad A_5^{(1)} = \sqrt{10}f_1'' = 0, \quad \text{ce qui implique}$$

$$(C.6) \quad \left[\begin{array}{l} f_1(x) = K_3x + K_4, \quad \text{avec } K_3 \text{ et } K_4 \text{ constantes complexes quelconques.} \end{array} \right.$$

Pour $\mathfrak{F}_3$ et $\mathfrak{F}_4$ les C.N. de stabilité sont vérifiées, mais sans donner de nouveaux résultats, alors de (C.0),..., (C.6) on a :

$$(C.f^{les}) \quad \left[\begin{array}{l} a_0 = c_1 = d_0 = e_0 = e_1 = e_2 = f_4 = f_2 = 0; \\ c_0 = -5K_1; f_3 = K_1; f_1 \equiv K_3x + K_4; f_0 = \frac{1}{2}\sqrt{10}K_3 + K_2. \end{array} \right.$$

Et l'équation (2.228) devient

$$(2.242) \quad y'''' = y^2y'' + y(y')^2 - \frac{3}{50}y^5 + K_1(y^3 - 5y'') + (K_3x + K_4)y + \frac{1}{2}\sqrt{10}K_3 + K_2,$$

avec K_1, K_2, K_3 et K_4 des constantes complexes quelconques.

2.2.3 Intégration et Conditions Suffisantes de Stabilité :

Equations de classe I :

Cette classe est donnée par

$$(2.243) \quad y'''' = y'y'' + \frac{1}{8}y^2y'' + \frac{1}{4}y(y')^2 + \frac{1}{64}y^3y',$$

En utilisant une transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec :

$$(2.244) \quad \begin{cases} \alpha = (24)^{(\frac{1}{5})} \\ \beta = (24)^{(\frac{4}{5})}. \end{cases}$$

l'équation (2.243)) devient,

$$(2.245) \quad y'''' = 24y'y'' + 72y^2y'' + 144y(y')^2 + 216y^3y',$$

en intégrant une fois on obtient

$$(2.246) \quad y''' + 6(y')^2 = 18(y' + y^2)(y' + 3y^2) + C,$$

qui est l'équation stable IX de CHAZY [4].

Récemment l'équation (2.246) a été intégrée pour la première fois par C.M.COSGROVE [8] en termes de fonctions hyperelliptiques (méromorphes). Alors les équations de classe **I** sont stables.

Equations de classe II

Cette classe est donnée par

$$(2.247) \quad y'''' = yy''' + \frac{11}{2}y'y'' - \frac{1}{2}y^2y'' - \frac{7}{4}y(y')^2 + \frac{1}{8}y^3y' + c_0y'' + (-\frac{1}{2}c_0y + \frac{4}{3}c_0')y' \\ - \frac{1}{6}c_0'y^2 - \frac{2}{3}c_0''' + \frac{4}{9}c_0c_0'.$$

avec c_0 une fonction analytique. Cette équation est équivalente à

$$(2.248) \quad (y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}c_0)''' - \frac{1}{2}y''(y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}c_0) - (y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}c_0)'y'$$

$$-\frac{1}{4}y(y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}c_0)y' + (-(y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}c_0) - \frac{1}{4}y^2)(y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}c_0)' = 0,$$

et en posant $z = y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}c_0$, elle sera de la forme

$$(2.249) \quad z''' - \frac{1}{2}y''z + (-z' - \frac{1}{4}yz)y' + (-z - \frac{1}{4}y^2)z' = 0,$$

en multipliant par z , puis en intégrant on aura

$$(2.250) \quad -\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{8}y^2z^2 + zz'' - \frac{1}{2}y'z^2 - \frac{1}{2}(z')^2 + K = 0, \quad K \text{ constante d'intégration,}$$

en multipliant par z^{-2} on aura,

$$(2.251) \quad -\frac{1}{3}z - \frac{1}{8}y^2 + \frac{z''}{z} - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 + \frac{K}{z^2},$$

en posant,

$$(2.252) \quad \frac{u'}{u} = \frac{1}{2} \frac{z' - \frac{1}{2}yz + \sqrt{2K}}{z},$$

et puis en remplaçant z par sa valeur, l'équation (2.251) sera équivalente à

$$(2.253) \quad y' - \frac{1}{2}y^2 - 3\frac{u'}{u}y - 6\frac{u''}{u} + \frac{2}{3}c_0 = 0,$$

qui est une équation de RICATTI pour y , et en dérivant une fois, puis en multipliant par u on aura

$$(2.254) \quad 6u''' - 2c_0u' + \frac{1}{2}\sqrt{2K}u = 0,$$

équation différentielle lineaire d'ordre 3 pour u .

Remarques 16 : Dans ce qui suit, on va étudier les équations (2.253) et (2.254) au voisinage d'un point x_0 quelconque dans D en utilisant la théorie générale des E.D.O. linéaires (voir § 1)□

- Puisque c_0 est analytique dans D , alors pour tout x_0 dans D , et pour toutes constantes complexes u_0, u_1, u_2 telles que $u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, u''(x_0) = u_2$, l'équation (2.254) admet une solution unique de la forme

$$(2.255) \quad u(x) = i = 0 \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x - x_0)^i.$$

N.B. dans le but de simplifier l'écriture ; à l'aide de la transformation $(x; x - x_0)$ nous supposons que $x_0 = 0$, sans nuire à la généralité $\square$

En remplaçant par $y = -2\frac{v'}{v}$ dans (2.253) on obtient

$$(2.256) \quad v'' - \left(3\frac{u'}{u}\right)v' + \left(3\frac{u''}{u} - \frac{1}{3}c_0\right)v = 0,$$

et soit $v = C_1V_1 + C_2V_2$ solution générale de (2.256), telle que V_1 et V_2 des solutions particulières linéairement indépendantes, C_1 et C_2 des constantes complexes quelconques.

Et soit le développement en série entière de c_0 de la forme

$$(2.257) \quad c_0(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_{0,i} x^i.$$

Pour l'étude des solutions de l'équation (2.256), on distingue 3 cas :

1- $u_0 \neq 0$: dans ce cas $\frac{u'}{u}$ et $\frac{u''}{u}$ sont analytiques et par conséquent v et par suite y le sont aussi.

2- $u_0 = 0, u_1 \neq 0$: Remplaçons $(\frac{1}{2}\sqrt{2K})$ par K . La solution u de (2.254) au voisinage de $x = 0$ sera de la forme,

$$(2.258) \quad u(x) = u_1x + u_2x^2 + \frac{1}{18}c_{0,0}u_1x^3 + \left(\frac{1}{36}c_{0,0}u_2 + \frac{1}{72}c_{0,1}u_1 - \frac{1}{144}Ku_1\right)x^4 + O(x^5),$$

par la suite,

$$(2.259) \quad 3\frac{u'}{u} = \frac{3}{x} + 3\frac{u_2}{u_1} + \frac{1}{3}\left(c_{0,0} - 9\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2\right)x - \frac{1}{48}\left(K - 2c_{0,1} + 4c_{0,0}\frac{u_2}{u_1} - 48\frac{u_2^3}{u_1^3}\right)x^2 + O(x^3),$$

$$(2.260) \quad 3\frac{u''}{u} - \frac{1}{3}c_0 = 6\frac{u_2}{u_1}\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\left(c_{0,0} - \frac{9u_2^2}{u_1^2}\right) - \frac{1}{12}\left(-2c_{0,1} + 3K + 4c_{0,0}\frac{u_2}{u_1} - 72\frac{u_2^3}{u_1^3}\right)x \\ + \frac{1}{24}\frac{u_2}{u_1}\left(3K + 2c_{0,1} + 12c_{0,0}\frac{u_2}{u_1} - 144\frac{u_2^3}{u_1^3}\right)x^2 + O(x^3),$$

d'où $x = 0$ est un point singulier régulier pour l'équation (2.256), et son équation indicelle au voisinage de ce point est de la forme : $\rho^2 - 4\rho = 0 \Rightarrow \rho_1 = 0, \rho_2 = 4$, alors l'une des solutions est de la forme

$$(2.261) \quad V_1(x) = x^4 \sum_{i=0}^{+\infty} v_{1,i} x^i; v_{1,0} \neq 0; v_{1,i} \text{ des constantes complexes.}$$

Puisque $\rho_2 - \rho_1 = 4$, alors la C.N.S. pour l'absence des termes logarithmiques dans V_2 est : $g_4 = 0$ (voir 1.1.2, §1). Effectivement après calcul on trouve que cette condition est vérifiée et on aura

$$(2.262) \quad V_2(x) = v_{2,0} + 2 \frac{u_2}{u_1} v_{2,0} x + \frac{1}{6} c_{0,0} v_{2,0} x^2 - \frac{v_{2,0}}{36 u_1} (3K u_1 - 2c_{0,1} u_1 - 4c_{0,0} u_2) x^3 \\ + v_{2,4} x^4 + O(x^5),$$

avec $v_{2,0}$ et $v_{2,4}$ des constantes complexes quelconques.

3- $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 \neq 0$: on a

$$(2.263) \quad u = u_2 x^2 + \frac{1}{36} c_{0,0} u_2 x^4 + \frac{1}{90} \left(-\frac{1}{4} K u_2 + c_{0,1} u_2 \right) x^5 + \frac{1}{180} \left(\frac{1}{18} c_{0,0}^2 u_2 + c_{0,2} u_2 \right) x^6 \\ + \frac{1}{315} \left(c_{0,3} u_2 - \frac{1}{72} K c_{0,0} u_2 + \frac{1}{12} c_{0,1} c_{0,0} u_2 \right) x^7 + O(x^8) .$$

par la suite,

$$(2.264) \quad 3 \frac{u'}{u} = 6x^{-1} + \frac{1}{6} c_{0,0} x + \left(-\frac{1}{40} K + \frac{1}{10} c_{0,1} \right) x^2 + \left(-\frac{1}{1080} c_{0,0}^2 + \frac{1}{15} c_{0,2} \right) x^3 \\ + \frac{1}{21} \left(-\frac{1}{72} c_{0,0} c_{0,1} + \frac{1}{96} K c_{0,0} + c_{0,3} \right) x^4 + O(x^5),$$

et

$$(2.265) \quad 3 \frac{u''}{u} - \frac{1}{3} c_0 = 6x^{-2} + \frac{1}{2} c_{0,0} + \left(-\frac{3}{20} K + \frac{4}{15} c_{0,1} \right) x + \left(\frac{1}{360} c_{0,0}^2 + \frac{2}{15} c_{0,2} \right) x^2 \\ + \left(\frac{1}{21} c_{0,3} + \frac{11}{1890} c_{0,0} c_{0,1} + \frac{1}{840} K c_{0,0}^3 \right) x^3 + O(x^4),$$

d'où $x = 0$ est un point singulier régulier pour (2.256), et l'équation indicelle au voisinage de ce point est de la forme : $\rho^2 - 7\rho + 6 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 6, \rho_2 = 1$, alors on a

$$(2.266) \quad V_1(x) = x^6 \sum_{i=0}^{+\infty} v_{1,i} x^i, v_{1,0} \neq 0,$$

Puisque $\rho_2 - \rho_1 = 5$, la C.N.S. pour l'absence des termes logarithmiques dans V_2 est : $g_5 = 0$ (voir 1.1.2, §1), et après calcul on trouve que cette condition est vérifiée et on a

$$(2.267) \quad V_2(x) = x[v_{2,0} + (\frac{1}{18}c_{0,0}v_{2,0})x^2 + (-\frac{1}{48}K + \frac{1}{36}c_{0,1})v_{2,0}x^3 + (\frac{1}{60}c_{0,2} + \frac{1}{1080}c_{0,0}^2)v_{2,0}x^4 \\ + v_{2,5}x^5 + O(x^6)];$$

avec $v_{2,0}, v_{2,5}$ constantes complexes quelconques.

Alors l'équation (2.247) est stable pour c_0 analytique quelconque, pour les trois cas qu'on vient de voir.

Equations de classe III :

Cette classe est donnée par

$$(2.268) \quad y'''' = yy''' + \frac{5}{2}y'y'' - \frac{3}{8}y^2y'' - \frac{3}{4}y(y')^2 + \frac{1}{16}y^3y' - \frac{4}{3}d_0y''' + \frac{4}{3}d_0yy'' + d_0(y')^2 \\ + (-\frac{1}{2}d_0y^2 + e_0)y' + \frac{1}{48}d_0y^4 + (\frac{4}{3}d_0e_0 + e_0')y + f_0,$$

avec d_0, e_0 , et f_0 des fonction analytiques. Cette équation est équivalente à

$$(2.269) \quad \frac{d}{dx}[y''' - yy'' - \frac{3}{4}(y')^2 + \frac{3}{8}y^2y' - \frac{1}{64}y^4 - e_0y] + \frac{4}{3}d_0[y''' - yy'' - \frac{3}{4}(y')^2 + \frac{3}{8}y^2y' \\ - \frac{1}{64}y^4 - e_0y] - f_0 = 0,$$

et en posant

$$(2.270) \quad w(x) = y''' - yy'' - \frac{3}{4}(y')^2 + \frac{3}{8}y^2y' - \frac{1}{64}y^4 - e_0y,$$

on aura une équation lineaire de la forme

$$(2.271) \quad w' + \frac{4}{3}d_0w + f_0 = 0.$$

En utilisant une transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ avec

$$(2.272) \quad \begin{cases} \alpha = 2^{(\frac{1}{5})} \\ \beta = 2^{(\frac{4}{5})}, \end{cases}$$

l'équation (2.270) devient

$$(2.273) \quad w(x) = y''' - 2yy'' + 3(y')^2 - \frac{1}{8}(6y' - y^2)^2 - e_0y.$$

qui représente l'équation stable XII ($k = 2$) de CHAZY [4].

En effet en remplaçant par $y = -2\frac{v'}{v}$ dans (2.273) puis en multipliant par v les deux membres de l'équation on obtient une équation linéaire de la forme

$$(2.274) \quad 2v'''' - 2e_0v' + wv = 0.$$

Alors l'équation (2.268) est stable pour d_0 , e_0 , et f_0 analytiques quelconques.

Equations de classe IV :

Cette classe est donnée par

$$(2.275) \quad y'''' = yy''' + \frac{10}{3}y'y'' - \frac{4}{9}y^2y'' - \frac{8}{9}y(y')^2 + \frac{2}{27}y^3y' - \frac{6}{7}d_0y''' + \frac{6}{7}d_0yy'' + d_0(y')^2 \\ - \frac{8}{21}d_0y^2y' + \frac{1}{63}d_0y^4 + f_0,$$

avec d_0 et f_0 des fonctions analytiques. Cette équation est équivalente à

$$(2.276) \quad \frac{d}{dx}[y''' - yy'' - \frac{7}{6}(y')^2 + \frac{4}{9}y^2y' - \frac{1}{54}y^4] + \frac{6}{7}d_0[y''' - yy'' - \frac{7}{6}(y')^2 + \frac{4}{9}y^2y' \\ - \frac{1}{54}y^4] - f_0 = 0,$$

et en posant

$$(2.277) \quad w(x) = y''' - yy'' - \frac{7}{6}(y')^2 + \frac{4}{9}y^2y' - \frac{1}{54}y^4.$$

on aura une équation linéaire de la forme

$$(2.278) \quad w' + \frac{6}{7}d_0w - f_0 = 0.$$

En utilisant une transformation $((x, y); (\alpha x, \beta y))$ définie par (2.272), l'équation (2.277) devient

$$(2.279) \quad w(x) = y''' - 2yy'' + 3(y')^2 - \frac{4}{27}(6y' - y^2)^2.$$

qui représente l'équation stable XII ($k = 3$) de CHAZY [4].

En effet, en remplaçant par $y = -\frac{3}{2}\frac{v'}{v}$ dans (2.279) puis en multipliant par v^2 les deux membres de l'équation on obtient une équation linéaire de la forme

$$(2.280) \quad \frac{3}{2}vv'''' - \frac{3}{2}v''v' + \frac{3}{4}(v'')^2 + wv^2 = 0,$$

puis en dérivant une fois et en divisant les deux membres de l'équation par v on obtient une équation linéaire de la forme

$$(2.281) \quad \frac{3}{2}v'''' + 2wv' + w'v = 0,$$

Alors l'équation (2.275) est stable pour toutes fonctions d_0 et f_0 analytiques.

Equations de classe V :

Cette classe est donnée par

$$(2.282) \quad y'''' = yy'''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}y'y'' + \frac{12}{k^2-1}y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}y^3y' - e_1y'' + e_1yy' \\ + (-e_1' + K_1)y' - \frac{1}{2}(-e_1' + K_1)y^2 + \frac{1}{24}(k^2 - 1)(-e_1''' - e_1e_1' \\ + K_1e_1 + 2K_1^2x) + K_2,$$

avec $k \in \mathbb{Z} - \{-1, -4, -6, 1, 4, 6\}$, e_1 une fonction analytique et K_1, K_2 des constantes complexes. Cette équation peut être écrite sous la forme suivante

$$(2.283) \quad (y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{k^2-1}{24}e_1)''' + \frac{12}{k^2-1}[(y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{k^2-1}{24}e_1)^2]' - K_1(y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{k^2-1}{24}e_1) \\ - \frac{k^2-1}{12}K_1^2x - K_2 = 0.$$

Alors en posant

$$(2.284) \quad w = y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{k^2-1}{24}e_1,$$

l'équation (2.283) devient

$$(2.285) \quad w''' + \frac{24}{k^2-1}ww' - K_1w - \frac{k^2-1}{12}K_1^2x - K_2 = 0.$$

En posant $y = -2\frac{u'}{u}$, l'équation (2.284) devient une équation linéaire d'ordre 2 de la forme

$$(2.286) \quad u'' + \frac{1}{2}(w - \frac{k^2-1}{24}e_1)u = 0.$$

On distingue 3 cas :

1) $K_1, K_2 = 0$: en utilisant une transformation T définie par

$$(2.287) \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2}(k^2 - 1) \\ \varphi(x) = x \\ \mu = 0 \end{cases}$$

puis en divisant par $(-\frac{1}{2}(k^2 - 1))$ l'équation (2.285) devient

$$(2.288) \quad W''' = 12WW' ,$$

et par intégration par rapport à x on aura

$$(2.289) \quad W'' = 6W^2 + C_1,$$

qui admet comme intégrale première l'équation elliptique de WEIERSTRASS suivante

$$(2.290) \quad (W')^2 = 4W^3 + 2C_1W + C_0, C_0 \text{ et } C_1 \text{ des constantes complexes quelconques.}$$

telle que au voisinage de $x = 0$ (sans nuire à la généralité) on a

$$(2.291) \quad W(x) = x^{-2} - \frac{C_1}{10}x^2 - \frac{C_0}{28}x^4 + \frac{1}{300}C_1^2x^6 + \frac{3}{3080}C_1C_0x^8 + O(x^{10}),$$

alors la solution de (2.285) est de la forme

$$(2.292) \quad w(x) = \lambda(x)W(x) = -\frac{1}{2}(k^2 - 1)W(x),$$

d'où l'équation indicelle de (2.286) est : $\rho^2 - \rho - \frac{1}{4}(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow \rho_1 = \frac{k+1}{2}, \rho_2 = -\frac{k-1}{2}$, par

conséquent $|\rho_1 - \rho_2| = |k|$, alors pour tout entier k , la solution générale de (2.286) admet des termes logarithmiques sauf si : $g_k = 0$ (voir 1.1.2, §1).

i- cas où la fonction e_1 se réduit à une constante : on distingue deux sous cas ;

i.1) Si k est impaire : alors l'équation (2.286) devient une équation de LAME, qui a sa solution générale uniforme.

i.2) Si k est paire : on considère une solution de (2.286) de la forme :

$u_1(x) = x^{\frac{k+1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{1,i} x^i, (u_{1,i} \text{ constantes complexes})$ et puisque w est une fonction paire alors $u_1(-x)$ est aussi solution de (2.286), et qui ne diffère de $u_1(x)$ que par un

facteur constant, car la solution lineairement indépendante de $u_1(x)$ est complètement différente de $u_1(-x)$. Alors les coefficients des puissances impaires dans le développement de u_1 sont nuls.

La seconde solution de (2.286) est de la forme

$$(2.293) \quad u_2 = u_1 \int \frac{dx}{u_1^2},$$

alors

- **si** le coefficient du terme x^k dans $(i = 0 \sum^{+\infty} u_{1,i} x^i)$ est nul, u_2 n'admet pas de termes logarithmiques, et donc les points critiques éventuels de la solution générale u de (2.286) sont algébriques et par conséquent $y = -2 \frac{u'}{u}$ est uniforme et (2.282) est stable..

- **sinon** u_2 admet des termes logarithmiques, et l'équation (2.282) est instable.

ii- cas où la fonction e_1 ne se réduit pas à une constante :

ii.1) Si e_1 est une fonction paire : alors en procédant de même manière que le dernier cas (k pair) on obtient le même résultat.

ii.2) Si e_1 n'est pas paire :

- $k = 0$: dans ce cas l'équation indicelle de (2.286) admet $\rho = \frac{1}{2}$ comme racine double, et l'une des solutions est donnée par

$$(2.294) \quad u_1(x) = x^{\frac{1}{2}} (u_{1,0} - \frac{1}{192} e_1(0) u_{1,0} x^2 - \frac{1}{432} e_1'(0) u_{1,0} x^3 + O(x^4)) , \quad u_{1,0} \neq 0,$$

et la deuxième solution lineairement indépendante de u_1 est

$$(2.295) \quad u_2(x) = u_1(x) \int \frac{dx}{u_1^2(x)} = \frac{u_1(x)}{u_{1,0}^2} [\ln(x) + \frac{1}{192} e_1(0) x^2 + \frac{1}{648} e_1'(0) x^3 + O(x^4)],$$

Alors l'équation (2.282) est instable pour $k = 0$.

Remarques 17 : Puisque $k \in \mathbb{Z} - \{-1, -4, -6, 1, 4, 6\}$, on ne peut pas étudier tous les cas de k , et dans ce qui suit on ne considérera que les cas $k = 0, 2, 3, 5, 7$, pour les autres, on procède de la même manière pour étudier l'absence des termes logarithmiques dans la solution de (2.286) $\square$

Pour $k \geq 2$, les C.N.S. pour l'absence des termes logarithmiques dans la solution générale de (2.286) et par suite pour la stabilité de (2.282), sont données comme suit :

- $k = 2$: $e_1 = 0$.

- $k = 3$: $e'_1 = 0$.

- $k = 5$: $e'''_1 = \frac{1}{6}e'_1e_1$.

- $k = 7$: $e''''_1 = \frac{1}{5}e'''_1e_1 + \frac{1}{6}e''_1e'_1 - \frac{2}{75}e'_1e_1^2 - \frac{1}{5}C_1e'_1$, équation de classe Fif-I de COSGROVE [7].

Puisque C_1 est quelconque, alors e_1 doit être identiquement nulle pour vérifier l'équation correspondante au cas $k = 7$.

Alors pour $(K_1 = K_2 = 0)$ on a :

- $k = 0$: (2.282) est instable, car la solution de (2.286) admet des termes logarithmiques.

- $k = 2, 3, 5$: l'équation (2.282) est stable ssi e_1 vérifie les équations correspondantes à chaque cas.

- $k = 7$: (2.282) est stable ssi $e_1 = 0$.

2) $K_1 = 0, K_2 \neq 0$:

en utilisant la transformation T définie par (2.287), et en divisant par $(-\frac{1}{2}(k^2 - 1))$ l'équation (2.286) devient

$$(2.296) \quad W''' = 12WW' + C_3, \text{ avec } C_3 = \frac{2K_2}{1 - k^2},$$

en intégrant par rapport à x on aura

$$(2.297) \quad W'' = 6W^2 + C_3x + C_4, \quad C_4 \text{ constante complexe quelconque.}$$

avec la transformation $(x; x - \frac{C_4}{C_3})$, elle devient

$$(2.298) \quad W'' = 6W^2 + C_3x.$$

En utilisant une transformation $((x, W); (\alpha x, \beta W))$ avec

$$(2.299) \quad \begin{cases} \alpha = (C_3)^{-\frac{1}{5}} \\ \beta = (C_3)^{\frac{2}{5}}, \end{cases}$$

puis en multipliant par $((C_3)^{-\frac{4}{5}})$ les deux membres de l'équation, (2.298) devient

$$(2.300) \quad W_1'' = 6W_1^2 + x,$$

qui est la première équation irréductible de PAINLEVE (P-I) dont les singularités mobiles sont des pôles doubles. Alors (2.285) n'admet que des pôles doubles comme singularités mobiles, et sa solution au voisinage du pôle mobile $x = x_0$ est de la forme

$$(2.303) \quad w(x) = \frac{-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}}{(x - x_0)^2} + h_1 (x - x_0)^2 - \frac{1}{6}K_2 (x - x_0)^3 + h_2 (x - x_0)^4 + O((x - x_0)^5),$$

avec h_1 et h_2 des constantes complexes quelconques.

Alors on déduit que l'équation (2.286) a les même indices que le cas précédent ($K_1 = K_2 = 0$), et sa solution générale peut donc avoir des termes logarithmiques (ce qui entraîne l'instabilité de (2.282)), sauf si :

$$- k = 2 : \quad e_1 = 0.$$

$$- k = 3 : \quad e_1' = 0.$$

$$- k = 5 : \quad e_1''' = e_1 e_1' - K_2.$$

$$- k = 7 : \quad e_1'''' = 4e_1''' e_1 + 10e_1' e_1'' - \frac{16}{5}e_1^2 e_1' - 10h_1 e_1' + 2K_2 e_1.$$

Puisque h_1 est quelconque, alors e_1 doit être identiquement nulle pour vérifier l'équation correspondante au cas $k = 7$.

Alors pour ($K_1 = 0, K_2 \neq 0$) on a :

- $k = 0$: (2.282) est instable, car la solution de (2.286) admet des termes logarithmiques.

- $k = 2, 3, 5$: l'équation (2.282) est stable ssi e_1 vérifie les équations correspondantes à chaque cas.

$$- k = 7, (2.282) \text{ est stable ssi } e_1 = 0.$$

3) $K_1, K_2 \neq 0$: en utilisant la transformation T définie par (2.287), et en divisant par $(-\frac{1}{2}(k^2 - 1))$ l'équation (2.286) devient

$$(2.304) \quad W''' - 12WW' - K_1W + \frac{1}{6}K_1^2x + C_6 = 0, \text{ avec } C_6 = \frac{2K_2}{k^2 - 1},$$

en dérivant une fois par rapport à x , on obtient

$$(2.305) \quad W'''' = 12WW'' + 12(W')^2 + K_1W' - \frac{1}{6}K_1^2,$$

qui est l'équation F-I de COSGROVE [7] (avec $\alpha = 0, \beta = K_1$), et dont la solution générale est de la forme

$$(2.306) \quad W(x) = \frac{1}{2}(\epsilon_1 v' + v^2) + \frac{1}{12}(K_1x + C_7), \quad C_7 \text{ constante complexe quelconque,}$$

où $\epsilon_1 = \pm 1$ et v satisfait à la deuxième transcendante de PAINLEVE(P-II)

$$(2.307) \quad v'' = 2v^3 + (K_1x + C_7)v + C_8, \quad C_7 \text{ constante complexe quelconque,}$$

dont les singularités mobiles sont des pôles simples. Alors (2.307) n'admet que des pôles doubles comme singularités mobiles, et sa solution au voisinage du pôle mobile $x = x_0$ est de la forme

$$(2.308) \quad w(x) = \frac{-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}}{(x - x_0)^2} - \frac{K_1}{24}(k^2 - 1)(x - x_0) + h_3(x - x_0)^2 + (-\frac{1}{6}K_2 - \frac{1}{72}K_1^2x_0(k^2 - 1))(x - x_0)^3 + h_4(x - x_0)^4 + O((x - x_0)^5).$$

avec h_3 et h_4 des constantes complexes quelconques.

Par conséquent les indices de (2.286) sont les mêmes que les 2 cas précédents, et sa solution générale peut donc avoir des termes logarithmiques, sauf si :

$$- k = 2 : e_1 = 0.$$

$$- k = 3 : e_1' = -K_1.$$

$$- k = 5 : e_1''' = e_1e_1' + K_1e_1 - 2K_1^2x - K_2.$$

$$- k = 7 : e_1'''' = 4e_1e_1''' + 10e_1'e_1'' - \frac{16}{5}e_1^2e_1' + 10K_1e_1'' - 10h_3e_1' - \frac{16}{5}K_1e_1^2 + 2(4K_1^2x + K_2)e_1.$$

Puisque h_3 est quelconque, alors e_1 doit être identiquement nulle pour vérifier l'équation correspondante au cas $k = 7$.

Alors pour $(K_1, K_2 \neq 0)$ on a :

- $k = 0$: (2.282) est instable, car la solution de (2.286) admet des termes logarithmiques.

- $k = 2, 3, 5$: l'équation (2.282) est stable ssi e_1 vérifie les équations correspondantes à chaque cas.

- $k = 7$, (2.282) est stable ssi $e_1 = 0$.

Equations de classe V' :

Cette classe est donnée par

$$(2.311) \quad y'''' = yy''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}y'y'' + \frac{12}{k^2-1}y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}y^3y' + \frac{1}{x}(y''' - yy'') \\ - \frac{k^2-13}{k^2-1}(y')^2 - e_1(y'' - yy') + (-e_1' + x^{-1}e_1 + K_3x)(y' - \frac{1}{2}y^2) \\ + \frac{k^2-1}{24}[-e_1''' - e_1e_1' + (e_1'' + \frac{1}{2}e_1^2)x^{-1} + K_3xe_1 + \frac{1}{2}K_3^2x^3] + K_4x^{-1},$$

avec $k \in \mathbb{Z} - \{-1, -4, -6, 1, 4, 6\}$, e_1 une fonction analytique et K_3, K_4 des constantes complexes.

En posant

$$(2.312) \quad w(x) = y' - \frac{1}{2}y^2 + \frac{k^2-1}{24}e_1,$$

l'équation (2.311) devient

$$(2.313) \quad w''' + \frac{24}{k^2-1}ww' - \frac{1}{x}(w'' + \frac{12}{k^2-1}w^2 + K_4) - K_3xw - \frac{k^2-1}{48}K_3^2x^3 = 0,$$

et puis en posant $y = -2\frac{u'}{u}$, l'équation (2.312) devient une équation linéaire d'ordre 2 de la forme

$$(2.314) \quad u'' + \frac{1}{2}(w - \frac{k^2-1}{24}e_1)u = 0.$$

On distingue deux cas :

1) $K_3 = 0$: en posant

$$(2.315) \quad W = w'' + \frac{12}{k^2-1}w^2 + K_4,$$

l'équation (2.316) devient

$$(2.316) \quad W' - \frac{1}{x}W = 0 \Rightarrow W(x) = C_1x, \quad C_1 \text{ constante complexe quelconque},$$

par la suite, on a

$$(2.317) \quad w'' + \frac{12}{k^2-1}w^2 - C_1x + K_4.$$

Cette dernière équation est de classe (P-I) de PAINLEVE. Par conséquent l'équation (2.313) n'admet que des pôles doubles comme singularités mobiles, et sa solution au voisinage du pôle $x = x_0$ est donnée par

$$(2.317') \quad w(x) = \frac{-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}}{(x-x_0)^2} + h_1(x-x_0)^2 + \frac{1}{x_0}(\frac{1}{6}K_4 + \frac{5}{3}h_1)(x-x_0)^3 + h_2(x-x_0)^4 \\ - \frac{2}{3}h_1^2(x-x_0)^6 + O((x-x_0)^7),$$

avec h_1 et h_2 sont des constantes complexes quelconques.

Les indices de l'équation (2.314) sont : $\rho_1 = \frac{k+1}{2}$, $\rho_2 = -\frac{k-1}{2}$, et sa solution générale peut avoir des termes logarithmiques (ce qui entraine l'instabilité de (2.311)), sauf si :

$$- \quad k = 2 : e_1 = 0.$$

$$- \quad k = 3 : e'_1 = 0.$$

$$- \quad k = 5 : e'''_1 = e_1e'_1 + \frac{1}{x}(-K_4 + 10h_1).$$

$$- \quad k = 7 : e''''_1 = 4e_1e'''_1 + 10e'_1e''_1 - \frac{16}{5}e_1^2e'_1 - 10h_1e'_1 + \frac{2}{x}(K_4 - 10h_1)e_1.$$

Puisque h_1 est quelconque, alors :

- e_1 ne peut pas vérifier l'équation correspondante au cas $k = 5$.
- e_1 doit être identiquement nulle pour vérifier l'équation correspondante au cas $k = 7$.

Alors pour $K_3 = 0$ on a :

- $k = 0, 5$: (2.311) est instable, car la solution de (2.314) admet des termes logarithmiques.

- $k = 2, 3$: (2.311) est stable ssi e_1 vérifie les équations correspondantes à chaque cas.

- $k = 7$: l'équation (2.311) est stable ssi $e_1 = 0$.

2) $K_3 \neq 0$: en multipliant par x les deux membres de l'équation (2.313), puis en dérivant une fois par rapport à x et puis en divisant par x on obtient

$$(2.318) \quad w'''' + \frac{24}{k^2-1}ww'' + \frac{24}{k^2-1}(w')^2 - K_3xw' - 2K_3w - \frac{k^2-1}{12}K_3^2x^2 = 0,$$

puis en utilisant la transformation T définie par (2.287) et en multipliant les deux membres de l'équation par $(-\frac{1}{2}(k^2 - 1))$, (2.318) devient

$$(2.319) \quad W'''' = 12WW'' + 12(W')^2 + K_3xW' + 2K_3W - \frac{1}{6}K_3^2x^2,$$

Cette dernière équation est de classe F-I de COSGROVE [7] (avec $\alpha = K_3$, $\beta = 0$), et dont la solution est donnée par

$$(2.320) \quad W(x) = \frac{1}{2}\alpha_1v' - \frac{1}{2}K_3v^2 - \frac{1}{2}K_3xv - \frac{1}{6}(\frac{1}{2}K_3x^2 - \alpha_1 + C_2),$$

où C_2 constante complexe quelconque ; $\alpha_1 = \pm I\sqrt{K_3}$ ($I^2 = -1$) ; et v satisfait à la quatrième transcendante de PAINLEVE (P-IV) donnée par

$$(2.321) \quad v'' = \frac{1}{2v}(v')^2 - \frac{3}{2}K_3v^3 - 2K_3xv^2 - (\frac{1}{2}K_3x^2 + C_2)v + \frac{C_3}{v},$$

C_3 constante complexe quelconque, et dont les singularités mobiles sont des pôles simples. Alors (2.313) n'admet que des pôles doubles comme singularités mobiles, et sa solution au voisinage du pôle mobile $x = x_0$ est de la forme

$$(2.324) \quad w(x) = \frac{-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}}{(x - x_0)^2} - \frac{k^2-1}{24}K_3x_0(x - x_0) + h_3(x - x_0)^2 + \frac{1}{x_0}(-\frac{k^2-1}{288}K_3^2x_0^4 + \frac{k^2-1}{12}K_3 \\ + \frac{1}{6}K_4 + \frac{5}{3}h_3)(x - x_0)^3 + h_4(x - x_0)^4 + O((x - x_0)^5),$$

avec h_3 et h_4 des constantes complexes quelconques.

Alors les indices de l'équation (2.314) sont $\rho_1 = \frac{k+1}{2}$, $\rho_2 = -\frac{k-1}{2}$, et sa solution générale peut donc avoir des termes logarithmiques (ce qui entraîne l'instabilité de (2.311)), sauf si :

$$- k = 2 : e_1 = 0.$$

$$- k = 3 : e'_1 = -K_3x.$$

$$- k = 5 : e'''_1 = e_1e'_1 + K_3xe_1 - \frac{1}{2}K_3^2x^3 + \frac{1}{x}(12K_3 - K_4 + 10h_3).$$

$$- k = 7 : e''''_1 = 4e_1e'''_1 + 10e'_1e''_1 - \frac{16}{5}e_1^2e'_1 + 10K_3xe''_1 - 10h_3e'_1 - \frac{16}{5}K_3xe_1^2 + \frac{2}{x}(K_3^2x^4 - 24K_3 + K_4 - 10h_3)e_1 + \frac{5}{2}K_3^2x.$$

Puisque h_3 est quelconque, alors e_1 ne peut pas vérifier les équations correspondantes aux cas $k = 5$ et $k = 7$.

Alors pour $K_3 \neq 0$ on a :

- $k = 0, 5, 7$: (2.311) est instable, car la solution de (2.314) admet des termes logarithmiques.

- $k = 2, 3$: (2.311) est stable ssi e_1 vérifie les équations correspondantes à chaque cas.

Equations de classe VI :

Cette classe est donnée par

$$(2.326) \quad y'''' = yy''' + 2y'y'' - \frac{2}{5}y^2y'' - \frac{3}{5}y(y')^2 + \frac{2}{25}y^3y' - \frac{1}{625}y^5 + c_0(y'' - \frac{3}{5}yy' + \frac{1}{25}y^3) + e_0(y' - \frac{1}{5}y^2) + f_1y + f_0,$$

avec c_0, e_0, f_0, f_1 des fonctions analytiques.

En utilisant la transformation définie par

$$(2.327) \quad y = -5\frac{w'}{w},$$

et en multipliant par w les deux membres de l'équation, on aura est une E.D.O. lineaire d'ordre 5 de la formesuivante

$$(2.328) \quad -5w'''' + 5c_0w''' + 5e_0w'' - 5f_1w' + f_0w = 0,$$

par conséquent l'équation (2.326) est stable pour c_0, e_0, f_0, f_1 des fonctions analytiques quelconques.

Equations de classe VII :

Cette classe est donnée par

$$(2.329) \quad y'''' = y'y'' + \frac{1}{5}y^2y'' + \frac{1}{5}y(y')^2 - \frac{1}{625}y^5 + (K_2x + K_3)y - 5K_2 + K_1,$$

avec K_1, K_2 et K_3 des constantes complexes, et dans ce qui suit on remplace $(5K_2 - K_1)$ par K .

On n'a pas pu réduire cette équation, mais en posant

$$(2.330) \quad w = \frac{2}{15}y' + \frac{1}{75}y^2,$$

on peut se ramener à une équation de classe Fif-I de COSGROVE [7]

$$(2.331) \quad w'''' - 15ww''' - \frac{75}{2}w'w'' + 45w^2w' - (K_2x + K_3)w' - 2K_2w,$$

telle que si on note respectivement (2.329) et (2.331) par E_1 et E_2 , on aura

$$(2.332) \quad \frac{2}{15}E_1'' + \frac{2}{75}yE_1' = E_2, \text{ avec } (' = \frac{\partial}{\partial x}),$$

en plus on a : $y = \frac{15h' - 10K_2 - 2K}{3h}$, avec

$$(2.333) \quad h(x) = w'' - 6w^2 + \frac{3}{2}(K_2x + K_3).$$

D'après l'étude de C.M.COSGROVE [7], si $K_2 = 0$ la solution générale de l'équation (2.331) s'expriment en termes de fonctions hyperhelliptiques.

En effet, dans ce cas (2.331) admet l'équation de classe F-III de COSGROVE [7] suivante

$$(2.334) \quad w'''' - 15ww'' - \frac{45}{4}(w')^2 + 45w^3 - K_3w + C, \quad C \text{ constante complexe quelconque,}$$

comme intégrale première, et dont la solution générale est donnée par

$$(2.335) \quad w(x) = \frac{(u' + v')^2}{(u + v)^2} - u^2 - v^2 - 2A, \quad A \text{ constante complexe quelconque,}$$

avec u et v sont définies par inversion d'intégrales hyperelliptiques

$$(2.336) \quad \begin{cases} \int_{\infty}^{u(x)} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_{\infty}^{v(x)} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = C_3, \\ \int_{\infty}^{u(x)} \frac{tdt}{\sqrt{P(t)}} + \int_{\infty}^{v(x)} \frac{tdt}{\sqrt{P(t)}} = x + C_4, \end{cases} \quad C_3, C_4 \text{ constantes d'intgrations,}$$

et qui satisfaisaient au système d'ordre 2 suivant

$$(2.337) \quad \begin{cases} u' = \frac{\sqrt{P(u)}}{u - v}, \\ v' = -\frac{\sqrt{P(v)}}{u - v}, \end{cases}$$

avec P un pôleynome de degré 6 défini par

$$(2.338) \quad P(t) = (t^2 + A)^3 - \frac{1}{3}K_3(t^2 + A) + Bt + \frac{1}{3}C, \quad B \text{ constante complexe quelconque,}$$

(2.335) est globalement méromorphe, alors l'équation (2.329) est stable pour $K_2 = 0$.

N.B. C.M.COSGROVE a obtenu la solution (2.335) en utilisant la " JACOBI postmultiplier method " [7]

Equations de classe VIII :

Cette classe est donnée par

$$(2.339) \quad y'''' = y^2y'' + y(y')^2 - \frac{3}{50}y^5 + K_1(y^3 - 5y'') + (K_3x + K_4)y + \frac{1}{2}\sqrt{10}K_3 + K_2,$$

avec K_1, K_2, K_3 et K_4 des constantes complexes, et pour simplifier l'écriture on remplace $\frac{1}{2}\sqrt{10}K_3 + K_2$ par K dans ce qui suit.

Là aussi on n'a pas pu réduire cette équation, mais en posant

$$(2.340) \quad w = \frac{1}{20}(\sqrt{10}y' + y^2 - 5K_1),$$

on peut se ramener à une équation de classe Fif-III de COSGROVE [7],

$$(2.341) \quad w'''' - 20ww''' - 40w'w'' + 120w^2w' - (K_3x + K_4 + \frac{15}{2}K_1^2)w' \\ - 2(K_3)w - \frac{1}{2}K_3K_1 = 0,$$

telle que si on note respectivement (2.339) et (2.341) par E_1 et E_2 , on aura

$$(2.342) \quad \frac{\sqrt{10}}{20}E_1'' + \frac{1}{10}yE_1' = E_2,$$

en plus on a $y = \frac{2\sqrt{10}h' - K - \frac{\sqrt{10}}{2}K_3}{4h}$ telle que

$$(2.343) \quad h(x) = w'' - 6w^2 + 2K_1w + \frac{1}{4}(K_3x + K_4) + \frac{7}{8}K_1^2,$$

L'équation (2.341) a été étudiée par COSGROVE dans [7], telle que pour $K_3 = 0$ elle admet une intégrale première de classe F-V de COSGROVE (avec $\kappa = 0$) de la forme

$$(2.344) \quad w'''' - 20ww'' - 10(w')^2 + 40w^3 - (K_4 + \frac{15}{2}K_1^2)w + C, \quad C \text{ constante d'intégration,}$$

cette dernière est intégrable en termes de fonctions hyperelliptiques et on a

$$(2.345) \quad w = \frac{1}{4}(u + v),$$

avec u et v définies par (2.336) et $P(t) = t^5 - 2(K_4 + \frac{15}{2}K_1^2)t^3 + 8Ct^2 + 32C_1t + 16C_2$.

(2.345) est globalement méromorphe, alors l'équation (2.339) est stable pour $K_3 = 0$.

conclusion

- D'après notre étude, on peut affirmer que pour qu'une équation du type (E) (pour les cas $e \neq 0, f = 0$ et $f \neq 0$) soit stable, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit, ou se ramène par une transformation $T(\lambda, \mu, \varphi)$ à l'une des neuf classes d'équations obtenues et données au dessous, avec des conditions en plus sur l'entier k et la fonction e_1 pour les classes V et V' (voir la troisième partie du chapitre précédent pour plus de précision). Pour les autres classes, c_0, d_0, e_0, f_1, f_0 sont des fonctions analytiques quelconques, et

K_1, K_2, K_3 et K_4 des constantes complexes. En plus, toutes ces équations n'admettent que des pôles simples comme singularités mobiles.

classe I : $y'''' = y'y'' + \frac{1}{8}y^2y'' + \frac{1}{4}y(y')^2 + \frac{1}{64}y^3y'.$

classe II : $y'''' = yy''' + \frac{11}{2}y'y'' - \frac{1}{2}y^2y'' - \frac{7}{4}y(y')^2 + \frac{1}{8}y^3y' + c_0y'' + (-\frac{1}{2}c_0y + \frac{4}{3}c'_0)y' - \frac{1}{6}c'_0y^2 - \frac{2}{3}c''_0 + \frac{4}{9}c_0c'_0.$

classe III : $y'''' = yy''' + \frac{5}{2}y'y'' - \frac{3}{8}y^2y'' - \frac{3}{4}y(y')^2 + \frac{1}{16}y^3y' - \frac{4}{3}d_0y''' + \frac{4}{3}d_0yy'' + d_0(y')^2 + (-\frac{1}{2}d_0y^2 + e_0)y' + \frac{1}{48}d_0y^4 + (\frac{4}{3}d_0e_0 + e'_0)y + f_0.$

classe IV : $y'''' = yy''' + \frac{10}{3}y'y'' - \frac{4}{9}y^2y'' - \frac{8}{9}y(y')^2 + \frac{2}{27}y^3y' - \frac{6}{7}d_0y''' + \frac{6}{7}d_0yy'' + d_0(y')^2 - \frac{8}{21}d_0y^2y' + \frac{1}{63}d_0y^4 + f_0.$

classe V : $y'''' = yy''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}y'y'' + \frac{12}{k^2-1}y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}y^3y' - e_1y'' + e_1yy' + (-e'_1 + K_1)y' - \frac{1}{2}(-e'_1 + K_1)y^2 + \frac{1}{24}(k^2 - 1)(-e'''_1 - e_1e'_1 + K_1e_1 + 2K_1^2x) + K_2.$

classe V' : $y'''' = yy''' + 3\frac{k^2-9}{k^2-1}y'y'' + \frac{12}{k^2-1}y^2y'' + \frac{24}{k^2-1}y(y')^2 - \frac{12}{k^2-1}y^3y' + \frac{1}{x}(y''' - yy'' - \frac{k^2-13}{k^2-1}(y')^2) - e_1(y'' - yy') + (-e'_1 + x^{-1}e_1 + K_3x)(y' - \frac{1}{2}y^2) + \frac{k^2-1}{24}[-e'''_1 - e_1e'_1 + (e''_1 + \frac{1}{2}e_1^2)x^{-1} + K_3xe_1 + \frac{1}{2}K_3^2x^3] + K_4x^{-1}.$

classe VI : $y'''' = yy''' + 2y'y'' - \frac{2}{5}y^2y'' - \frac{3}{5}y(y')^2 + \frac{2}{25}y^3y' - \frac{1}{625}y^5 + c_0(y'' - \frac{3}{5}yy' + \frac{1}{25}y^3) + e_0(y' - \frac{1}{5}y^2) + f_1y + f_0.$

classe VII : $y'''' = y'y'' + \frac{1}{5}y^2y'' + \frac{1}{5}y(y')^2 - \frac{1}{625}y^5 + (K_2x + K_3)y - 5K_2 + K_1.$

classe VIII : $y'''' = y^2y'' + y(y')^2 - \frac{3}{50}y^5 + K_1(y^3 - 5y'') + (K_3x + K_4)y + \frac{1}{2}\sqrt{10}K_3 + K_2.$

- Les équations de classe VII et VIII "pourraient" être irréductibles, et donc définir de nouvelles fonctions, bien sûr c'est encore très tôt pour l'affirmer, la seule justification qu'on a pour l'instant est la complexité de leur étude.

- En ajoutant à la liste des classes d'équations stables déjà obtenues pour le cas $(e = f = 0)$ (voir annexe) celles qu'on vient d'obtenir, on aura une liste **complète** (18 classes) des classes d'équations stables du type (E).

- L'utilisation de l'outil informatique a été d'un grand apport pour l'application de la méthode de BUREAU, surtout que celle ci a engendré des équations algébriques (par exemple l'équation diophantienne (2.56)) dont la résolution nécessite des calculs colossaux irréalisables à la main. La rigueur mathématique dans la construction de cette méthode et son application (à l'aide l'outil informatique) plus ou moins facile lui donnent une place importante parmi les autres de l'analyse de PAINLEVE, même si celle ci n'extrait aucune information des indices négatifs comme c'est le cas pour la méthode de perturbation de PAINLEVE [5,6].

Annexe

La liste des classes d'équations stables du type (E) déjà obtenues pour le cas $e = f = 0$ (voir [2,4,7]), est

$$(A.1) \quad y'''' = 12yy'' + 12(y')^2 + (\alpha x + \beta)y' + 2\alpha y - \frac{1}{6}(\alpha x + \beta)^2;$$

$$(A.2) \quad y'''' = 3yy'' - 4(y')^2;$$

$$(A.3) \quad y'''' = 15yy'' + \frac{45}{4}(y')^2 - 15y^3 + \alpha y + \beta;$$

$$(A.4) \quad y'''' = 30yy'' - 60y^3 + \alpha y + \beta;$$

$$(A.5) \quad y'''' = 20yy'' + 10(y')^2 - 40y^3 + \alpha y + \kappa x + \beta;$$

$$(A.6) \quad y'''' = 18yy'' + 9(y')^2 - 24y^3 + \alpha y^2 + \frac{1}{9}\alpha^2 y + \kappa x + \beta;$$

$$(A.7) \quad y'''' = \frac{fg' - 3f'g}{fg}y''' - \frac{ff''g + (f')^2g - ff'g'}{f^2g}y'' - \frac{2}{f^2}\left\{\frac{d}{dx} - \frac{g'}{g}\right\}\{3c_1x(xy' - y)^2 \\ + c_2(xy' - y)(3xy' - y) + c_3y'(3xy' - 2y) + 3c_4(y')^2 + 2c_5x(xy' - y) \\ + c_6(2xy' - y) + 2c_7y' + c_8x + c_9\},$$

où $f(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ et $g(x) = d_1x + d_2$;

$$(A.8) \quad y'''' = -\frac{d^3}{dx^3}\{y^2 + P(x)y + Q(x)\} + A(x)\frac{d^2}{dx^2}\{y' + y^2 + P(x)y + Q(x)\} \\ + B(x)\frac{d}{dx}\{y' + y^2 + P(x)y + Q(x)\} + C(x)\{y' + y^2 + P(x)y \\ + Q(x)\} + D(x);$$

$$(A.9) \quad y'''' = -\frac{d^2}{dx^2}\{3yy' + y^3 + P(x)(y' + y^2) + Q(x)y + R(x)\} + A(x)\frac{d}{dx}\{y'' + 3yy' \\ + y^3 + P(x)(y' + y^2) + Q(x)y + R(x)\} + B(x)\{y'' + 3yy' + y^3 \\ + P(x)(y' + y^2) + Q(x)y + R(x)\} + C(x).$$

Procédures et programme informatique :

Dans ce qui suit on définit un programme informatique, qui résoud le problème (★) pour le deuxième cas ($f \neq 0$) avec $P(s) \neq 24$. Pour l'autre cas ($e \neq 0, f = 0$), on fait certaine modification sur les procédures **bnor**, **Larb**, et **tas**, ainsi qu'un très petit changement pour **Moh**, pour les adapter à ce dernier cas. Les procédures **Melk**, **Tassa**, **Kar** sont valables pour les deux cas.

Procédure Moh :

D'après l'équation diophantienne (2.56), P_1, P_2, P_3 et P_4 ne peuvent être toutes négatives au même temps, et on remarque bien qu'on peut supposer : $0 < P_1 \leq 4 \times 24$ sans nuire à la généralité. Et l'équation (2.56) est équivalente à

$$(A.10) \quad \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} = \frac{P_1 - 24}{24P_1} = \frac{1}{\widetilde{P}_1}.$$

De même là aussi on peut supposer : $|P_2| \leq 3(|\widetilde{P}_1| + 1)$, ($[\cdot]$ partie entière).

Et on a

$$(A.11) \quad \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} = \frac{P_2 - \widetilde{P}_1}{\widetilde{P}_1 P_2} = \frac{1}{\widetilde{P}_2}.$$

en plus

$$(A.12) \quad |P_3| \leq 2(|\widetilde{P}_2| + 1), \quad ([\cdot] \text{ partie entière}).$$

En vertu de ces considérations, on a élaboré une procédure nommée **Moh**, telle pour P_1 et P_2 donnés cette procédure nous donne toutes les valeurs de P_3 et P_4 qui vérifient l'équation (2.56).

```
> moh:=proc(v) local tt,n,m,n1,m1,i,d,j,k,r,p,t,g,c;
global i1,nn,mm,a,s;
> n1:=(nn*v)-mm; m1:=(mm*v);if (n1<>0) then
p:=igcd(abs(m1),abs(n1));
> n:=iquo(n1,p); m:=iquo(m1,p);unassign('s');
> if sign(n*m)=1 then r:=2 else r:=-2 fi;
> t:=(abs(iquo(m,n))+1)*2; j:=0;
> for i from 1 to t do
c:=(r*n)-m; d:=r*m;
> if c<>0 then tt:=iquo(d,c);
if (irem(abs(d),abs(c))=0) then
j:=j+1;a[j,1]:=i1;a[j,2]:=v;a[j,3]:=r;
a[j,4]:=tt fi;fi;
> if sign(n*m)=1 then r:=r+1 else r:=r-1 fi;
> od;if j<>0 then
> s:=matrix(j,4,(i,1)->a[i,1]); else s:=matrix(0,0,[])fi;
else s:=matrix(0,0,[]) fi;
end:
```

Procédure Melk :

Pour une valeur de P_i donnée, la procédure **Melk** nous donne toutes les combinaisons de 3 entiers positifs tels que leur produit est égal à $|P_i|$, et pour avoir le reste (combinaisons), il suffit d'ajouter un signe $(-)$ à un, deux, ou trois éléments de chaque combinaison, selon le signe de P_i ; et cela se fait à l'aide de la procédure **Tassa**.

```
> melk:=proc(vv) local i,j,l,k;global ss,mn,aa;dd:=abs(vv);
> ss[1,1]:=dd;ss[1,2]:=1;ss[1,3]:=1;
> mn:=1; i:=2;ii:=evalf(sqrt(dd));iii:=i-ii;
> while sign(iii)=-1 or (iii=0) do
> if irem(dd,i)=0 then j:=iquo(dd,i);
> mn:=mn+1;ss[mn,1]:=i;ss[mn,2]:=j;ss[mn,3]:=1;
> if (not isprime(j)) and (i<>j) then
> k:=i;kk:=evalf(sqrt(j));kkk:=k-kk;
> while sign(kkk)=-1 or (kkk=0) do
> if irem(j,k)=0 then l:=iquo(j,k); mn:=mn+1;
> ss[mn,1]:=i;ss[mn,2]:=k;ss[mn,3]:=1;
> fi;k:=k+1;kkk:=k-kk od;fi;
fi;i:=i+1;iii:=i-ii od;
> unassign('aa');aa:=matrix(mn,3,(ih,jh)->ss[ih,jh]) end;
```

Procédure Tassa :

```
> tassa:=proc(rr) global b;
> unassign('b');
> if sign(rr)=1 then
> b:=matrix(4,3,[1,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,-1])
> else
> b:=matrix(4,3,[-1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,1,1,1,-1])
> fi;b end;
```

Procédure bnor :

cette procédure est modifiée au fil des cas étudiés.

Pour (P_1, P_2, P_3, P_4) une solution de (2.56), on a

$$\underline{a \neq 0} : (as_i \neq 0, \forall i = 1..4)$$

La procédure **bnor** fait une résolution exate du système (2.55), puis teste la nature rationnelle des solutions obtenues et dans le cas favorable ,elle fait appel à la procédure **Larb** .

$$\underline{a = 0 : (as_i = 0, \forall i = 1..4)}$$

La procédure **bnor** est modifiée de telle sorte qu'en plus de la résolution numérique du système (2.55), teste la compatibilité des solutions obtenues avec les valeurs des $(\frac{s_i}{s_j})$ données par (2.53).

```
> bnor:=proc(s) local i,j; global aa1,aa2,aa3,aa4,t1,
t2,t3,t4,v1,vr,sol;
> with(linalg,rowdim);print(j1,rowdim(s));
> for i from 1 to rowdim(s) do
unassign('x','y','z','u');j:=1;
> equ:=( {s[i,1]=24*(1-x)*(1-y)*(1-z), s[i,2]=24*(1-(1/x))*(1-u)*(1-(z/x)), s[i,3]=24*(1-(1/y))*(1-(1/u))*(1-(z/y)), s[i,4]=24*(1-(1/z))*(1-(x/z))*(1-(y/z))} );
sol:=solve(equ); unassign('aa1','aa2','aa3','aa4');
if whattype(sol)=set then
unassign('x','y','z','u');traperror(assign(sol));
if (type(x,rational)) and (type(y,rational)) and
(type(z,rational)) and (type(u,rational)) then
unassign('v1','vr');
vr:=vector(4,[x,y,z,u]);v1:=vector(4,[s[i,1],s[i,2],s[i,3],s[i,4]]); print(v1,vr);
if u=(y/x) then
> melk(v1[1]);
> t1:=mn;
> aa1:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]);
> melk(v1[2]);
> t2:=mn;
> aa2:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]);
> melk(v1[3]);
> t3:=mn;
> aa3:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]);
> melk(v1[4]);
> t4:=mn; aa4:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]);
> larb(v1,vr) fi; fi; else c1:=0;
unassign('x','y','z','u');traperror(assign(sol[1]));
while (x<>'x') and (y<>'y') and (z<>'z') and (u<>'u') do
if (type(x,rational)) and (type(y,rational)) and
(type(z,rational)) and (type(u,rational)) then
unassign('v1','vr');
vr:=vector(4,[x,y,z,u]);v1:=vector(4,[s[i,1],s[i,2],s[i,3],s[i,4]]); print(v1,vr);
```

```

> if u=(y/x) then      c1:=c1+1; if c1=1 then
> melk(v1[1]);
> t1:=mn;
> aa1:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]);
> melk(v1[2]);
> t2:=mn;
> aa2:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]);
> melk(v1[3]);
> t3:=mn;
> aa3:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]);
> melk(v1[4]);
> t4:=mn;
> aa4:=matrix(rowdim(aa),3,(i,j)->aa[i,j]) fi;
> larb(v1,vr) fi; fi; j:=j+1;
> unassign('x','y','z','u');traperror(assign(sol[j]))
> od;fi;od;
> end:

```

Procédure Larb :

Pour (P_1, P_2, P_3, P_4) solution de (2.55), la procédure **Larb** teste la compatibilité des $(\frac{s_i}{s_j})$ données respectivement par (2.55), (2.52) et (2.53), pour toutes les combinaisons de 3 entiers des $P_i (i = 1..4)$ (données par **Melk**), et si le test est bon, on aura une classe d'équations dont les familles de pôles mobiles et les coefficients sont affichés par la procédure.

```

> larb:=proc(v1,vr) local f,ff,ii1,ii2,ii3,ii4,jj1,jj2,jj3,jj4;
global t1,t2,t3,t4,aa1,aa2,aa3,aa4,s1,s2,s3,s4,xx,uu,
zz,aa,b99,c99,d99,d9,c9,b9;
> f:=(sp,sd,yy)->sp-(sd*yy);
> ff:=(cc1,cc2,cc)->cc1-((cc)^2)*cc2;
> fff:=(dz,tz,gz)->dz-tz*(gz)^3;
for ii1 from 1 to t1 do
> for jj1 from 1 to 4 do
> tassa(v1[1]);
> for k from 1 to 3 do
> xx[1,k]:=b[jj1,k]*aa1[ii1,k] od;
> s1:=(sum(xx[1,l],l=1..3))-11;
> for ii2 from 1 to t2 do
> for jj2 from 1 to 4 do
> tassa(v1[2]);
> for k from 1 to 3 do
> xx[2,k]:=b[jj2,k]*aa2[ii2,k] od;
> s2:=(sum(xx[2,l],l=1..3))-11;

```

```

> if simplify(f(s1,s2,vr[1]))=0 then
> for ii3 from 1 to t3 do
> for jj3 from 1 to 4 do
> tassa(v1[3]);
> for k from 1 to 3 do
> xx[3,k]:=b[jj3,k]*aa3[ii3,k] od;
> s3:=(sum(xx[3,1],1=1..3))-11;
> if (simplify(f(s1,s3,vr[2]))=0) then
> for ii4 from 1 to t4 do
> for jj4 from 1 to 4 do
> tassa(v1[4]);
> for k from 1 to 3 do
> xx[4,k]:=b[jj4,k]*aa4[ii4,k] od;
> s4:=(sum(xx[4,1],1=1..3))-11;
> if simplify(f(s1,s4,vr[3]))=0 then
> unassign('uu','zz');
> uu:=matrix(4,3,(i,j)->xx[i,j]);
> zz:=matrix(4,1,[s1,s2,s3,s4]);
> b9[1,1]:=-12*(vr[1]+vr[2]+vr[3]+1)-3*zz[1,1];
> for k from 2 to 4 do
> b9[k,1]:=(-12/vr[k-1])*(vr[1]+vr[2]+vr[3]+1)-3*zz[k,1];
> od;
> unassign('b99');b99:=matrix(4,1,(i,j)->b9[i,j]);
> for k from 1 to 4 do
> c9[k,1]:=46+7*zz[k,1]+b99[k,1]-(uu[k,1]*uu[k,2]+
uu[k,1]*uu[k,3]+uu[k,2]*uu[k,3]) od;
> unassign('c99');c99:=matrix(4,1,(i,j)->c9[i,j]);
> if (simplify(ff(c99[1,1],c99[2,1],vr[1]))=0) and
(simplify(ff(c99[1,1],c99[3,1],vr[2]))=0) and
(simplify(ff(c99[1,1],c99[4,1],vr[3]))=0) then
>
> d9[1,1]:=-24*(vr[1]+vr[2]+vr[3]+vr[1]*vr[2]+vr[1]*vr[3]
+vr[2]*vr[3])-2*c99[1,1];
> for k from 2 to 4 do
> d9[k,1]:=(-24/(vr[k-1])^2)*(vr[1]+vr[2]+vr[3]+vr[1]*vr[2]
+vr[1]*vr[3]+vr[2]*vr[3])-2*c99[k,1];
> od;
> unassign('d99');d99:=matrix(4,1,(i,j)->d9[i,j]);
> for k from 1 to 4 do
> e9[k,1]:=simplify(-96-
6*(b99[k,1]+3*zz[k,1])+2*(2*c99[k,1]+d99[k,1])
+(uu[k,1]*uu[k,2]*uu[k,3])) od;
> unassign('e99');e99:=matrix(4,1,(i,j)->e9[i,j]);
> if (simplify(fff(e99[1,1],e99[2,1],vr[1]))=0) and
(simplify(fff(e99[1,1],e99[3,1],vr[2]))=0) and
(simplify(fff(e99[1,1],e99[4,1],vr[3]))=0) then

```

```

> if zz[1,1]<>0 then
> coea:=1;
> coeb:=(b99[1,1]/zz[1,1]);
> coec:=(c99[1,1]/(zz[1,1]^2);
> coed:=d99[1,1]/(zz[1,1]^2);
> coe:=-24/(zz[1,1]*zz[2,1]*zz[3,1]*zz[4,1]);
> coee:=-24*(zz[1,1]+zz[2,1]+zz[3,1]+zz[4,1])/(zz[1,1]*
zz[2,1]*zz[3,1]*zz[4,1]);
> elif (zz[1,1]=0) and (b99[1,1]<>0) then
> coea:=0;
> coeb:=1;
> coec:=(c99[1,1]/(b99[1,1]^2);
> coed:=d99[1,1]/(b99[1,1]^2);
> coe:=-24/(b99[1,1]*b99[2,1]*b99[3,1]*b99[4,1]);
> coee:=-24*(b99[1,1]+b99[2,1]+b99[3,1]+b99[4,1])/(b99[1,1]*
b99[2,1]*b99[3,1]*b99[4,1]);
> else
> print('coefa,est,nul,et,le,coefb,est,nul');
> coea:=0;coeb:=0;coec:=1;
> fi;

> print(oooooooooooooooooooooooooooo);
> print(les,racines,verif,la,cond,de,comp);
> print('p1',v1[1],'p2',v1[2],'p3',v1[3],'p4',v1[4]);
> print('x',vr[1],'y',vr[2],'z',vr[3],'u',vr[4]);
> print(uu,zz,b99,c99,d99);
> print('les,ceffa,ceffb,ceffc,ceffd,ceffe,coefff,sont');
> print(coea,coeb,coec,coed,coee,coe);
> print(oooooooooooooooooooooooooooo);
> fi;fi;fi;od;od;fi;od;od;fi;od;od;od;od;
> end:

```

Procédure Kar :

```

> kar:=proc(gg) local ll; global w;
> w:=0;ll:=sqrt(abs(gg));
> if type(ll,integer) then
> if isprime(ll) then
> w:=1 fi;fi;w
> end:

```

Ainsi le programme qui résoud le problème (★) pour le cas ($f \neq 0$) avec $P(s) \neq 24$ et $a \neq 0$ est donné par

```

> tas:=proc(hb) local jj,nz,mz,qq1;global s,nn,mm,i1,j1;
> for i1 from 25 to 96 do
> if (i1<>24) then
> if (isprime(i1)) or (kar(i1)=1) then

```

```

> nz:=i1-24;mz:=i1*24; qq1:=igcd(abs(mz),abs(nz));
> nn:=iquo(nz,qq1);mm:=iquo(mz,qq1);
> qqd:=(iquo(abs(mm),abs(nn))+1)*3;
> if sign(nn*mm)=1 then
> for j1 from hb to 24 do
> moh(j1); bnor(s);od;
> for j1 from hb to qqd do
> moh(j1);bnor(s) od;
> else
> for j1 from 2 to qqd do
> moh(-j1); bnor(s);
> od;fi;fi;fi;od;
> end:

```

Bibliographie

- [1] M.J. ALBOWITZ, A. RAMANI, H. SEGUR. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I. J. Math. Phys. vol. 21 (1980) P.715-721. ; II. 21 (1980) P.1006-1015.
- [2] F.J. BUREAU. Differential equations with fixed critical points. Annali di matematica. (1964), IV. V. 66. P.1-116.
- [3] C. CARTON-LEBRUN. Conditions nécessaires pour que les solutions de certaines équations différentielles soient à points critiques isolés fixes. , I et II, Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, Bruxelles, Sér. 5 55 :524-536 (1969) et 55 :656-672 (1969).
- [4] J. CHAZY. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. Thèse, Paris (1910) ; Acta math. 34 (1911) P.317-385.
- [5] R. CONTE. The PAINLEVE approach to nonlinear ordinary differential equations, the PAINLEVE property, one century later. P.1-112, ed. CONTE R., CRM series in mathematical physics (Springer, Berlin, 1998). Solv-int/9710020.
- [6] R. CONTE, A.P. FORDY, A. PICKERING. A perturbative PAINLEVE approach to nonlinear differential equations. Physica D. vol. 69. (1993). P.33-58.
- [7] C.M. COSGROVE. Higher-order PAINLEVE equations in the polynomial class I, BUREAU symbol P2. Studies in applied mathematics. vol. 104. n°1. (2000). P.1-66.

- [8] C.M. COSGROVE. CHAZY classes IX-XII of third-order differential equations. Studies in applied mathematics. vol. 104. $n^{\circ}3$. (2000). P.171-228.
- [9] H. EXTON. On nonlinear ordinary differential equations with fixed critical points. Rendiconti di matematica vol. 4. (1971). P. 385-448.
- [10] E. HILLE. Ordinary differential equations in the complex domain, (J. WILEY and sons, New York, 1976).
- [11] E.L. INCE. Ordinary differential equations, (Longmans, Geen and co., London and New York, 1926). Reprinted (Dover, New York, 1956).
- [12] A. KESSI, M.S. BOUKHELIFA. Fourth-order differential equations with integer indices of FUCHS. J. Regular and Chaotic Dynamics, vol. 6, $n^{\circ} 4$, (2001), P.449-453.
- [13] S.V. KOVALEVSKI. Sur une propriété du système d'équations qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Math. 14 (1890) P.81-93.
- [14] N.A. KUDRYYASHOV. Some fourth-order ordinary differential equations with pass the PAINLEVE test. Journal of nonlinear mathematical physic. vol. 8. (2001). P.172-177.
- [15] I.P. MARTINOV. Differential equations with stationary critical points singularities. *Differential equations*. vol. 9. (1973). P.1368-1376.
- [16] P. PAINLEVE. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles. (Leçons de Stockholm, 1895) (Hermann, Paris, 1897). Reprinted, Oeuvre de P. PAINLEVE , vol. I (édition du C.N.R.S., Paris, 1973).
- [17] H. POINCARÉ. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, GAUTHIER-VILLARS, (1892) ; ristampa BLANCHARD, Paris (1987).
- [18] J.WESS, M. TABOR and G. CARNAVAL. The PAINLEVE property for partial differential equations. J. Math. Phys. vol. 24. (1983). P.522-526.