

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR et
de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENNE »

FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES

SPECIALITE : EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Par : ARIES Mohammed Es-Salih

Sujet :

**COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN PROBLEME EN
VISCOELASTICITE**

Soutenue publiquement le 11 Septembre 2011 , devant le jury composé de

Mr BEBBOUCHI Rachid
Mr MEDJDEN Mohamed
Mr TOUZALINE Arezki
Mr KHEMMOUDJ Ammar

Prof à l'USTHB
Prof à l'USTHB
M.C/A à l'USTHB
M.C/A à l'USTHB

Président
Directeur de Mémoire
Examineur
Examineur

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la force, le courage et toute la volonté pour mener à bien ce modeste travail. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse le professeur Medjden Mohamed , tout d'abord pour la confiance qu'il m'a accordé en me proposant un sujet de mémoire de magister ensuite pour son accueil chaleureux dans son laboratoire, pour ses aides multiformes, ses orientations, ses conseils très utiles qui m'ont permis d'aboutir à la soutenance de ce mémoire de magister.

Je remercie le professeur Bebbouchi Rachid pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Que messieurs Khemmoudj Ammar (Maître de Conférences à l'USTHB), Touzaline Arezki (Maître de Conférences à l'USTHB) qui ont accepté d'examiner cette thèse reçoivent mes vifs remerciements.

Mes profonds remerciements vont à mes très chers parents qui sont graine de mon existence, pour leurs encouragements leurs sacrifices qu'ils ont consenti depuis ma naissance et pour l'éducation qu'ils m'ont donné. Puisse ce travail leurs permettent de trouver la marque de mon entière reconnaissance et de mon grand amour.

Je n'oublierai pas de présenter mes vifs remerciements à ma chère femme pour ses encouragements et pour son aide

Mes remerciements vont à mon oncle Benamara Ahmed pour les précieux conseils, son aide et tous les efforts qu'il a consenti pour l'aboutissement de ce travail.

Mes remerciements vont aussi à mon oncle Messaoud et sa famille, à mes frères et à tous mes amis et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

PLAN du MEMOIRE

Chapitre 1: **Introduction**

Chapitre 2 : **Préliminaires**

- Notions d'analyse fonctionnelle, Espaces fonctionnels, Espaces L^p ,
Notions de Distributions, Espaces de Sobolev.

Chapitre 3: **Equation des ondes avec un terme non local et une dissipation interne faible**

- Introduction
- Existence de solution, Comportement asymptotique
- Etude du cas $a = 0$

Chapitre 4: **Comportement asymptotique pour un problème en viscoélasticité avec un noyau pas nécessairement décroissant.**

- Introduction
- Comportement asymptotique
- Etude du cas $a = 0$.

Chapitre 5: **Equation des ondes avec des conditions de type Cauchy Ventcel**
(cas $a(x) = 1$, $c(x) = 1$, $b(x) = 0$)

- Introduction
- Comportement asymptotique

Chapitre 6: **Conclusion et perspectives**

Bibliographie

I. INTRODUCTION

Dans ce travail, que nous présentons sous forme de mémoire de magistère, nous étudions la stabilisation de quelques problèmes en viscoélasticité.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions d'analyse fonctionnelles nécessaires pour notre étude.

Dans le troisième chapitre, Nous considérons l'équation des ondes à travers un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ suffisamment régulière.

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} + au_t = \Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{in } \Omega \times \mathbf{R}_+ \\ u = 0, & \text{on } \Gamma \times \mathbf{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont les données initiales et $h(t)$ est la fonction de relaxation ou bien le noyau. Nous rappelons les résultats obtenus dans [25], dans le cas où $a = 1$, et nous démontrons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème [1.1]. L'étude du comportement asymptotique de la solution dans le cas où $a = 0$ a été développé. Nous démontrons que sous certaines hypothèses sur le noyau h

$$h'(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad e^{\alpha t}h(t) \in L^1(0, \infty), \quad \text{pour un certain } \alpha > 0. \quad (1.2)$$

l'énergie associée à la solution décroît exponentiellement vers zéro lorsque le temps tends vers l'infini. Ce qui signifie que seule la dissipation produite par le terme mémoire conduit le système vers l'état d'équilibre.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique du problème (1.1), sous des hypothèses plus faibles que (1.2) soit:

$$h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et

$$\left[h'(t) + \gamma h(t) \right] e^{\alpha t} \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Il est clair par conséquent que nous permettons à $h'(t)$ de prendre des valeurs positives c'est à dire que notre noyau $h(t)$ peut osciller.

Nous montrons que la dissipation faible produite par le terme mémoire seul est suffisante pour stabiliser le système.

Dans le cinquième chapitre, nous considérons l'équation des ondes à travers un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ comme le montre la figure (1.1) suivante:

Figure [1.1] -La géométrie de Ω

avec des conditions de type Cauchy Ventcel. . Dans cette partie, on considère le problème suivant:

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + b(x) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v + c(x) v_t = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{\Sigma} = v \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1) \text{ dans } \Omega \times \Gamma. \end{array} \right.$$

Nous étudions la décroissance de l'énergie associée à la solution du problème (P_2) dans le cas où $a \equiv 1$, $c \equiv 1$ et $b \equiv 0$. On montre que l'énergie classique définie par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\sigma$$

est décroissante et vérifie $E(t) \leq E(0)$ lorsque $E(0) > 0$

Finalement nous ferons une conclusion et nous donnerons quelques perspectives.

II. PRELIMINAIRES

Dans cette partie, nous avons regroupé les notions essentielles d'analyse fonctionnelle nécessaire à la compréhension des énoncés et démonstrations des problèmes qui forment le thème de ce mémoire, de même que les résultats fondamentaux, qui concernent la topologie faible, les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev, les applications de dualité et d'autres théorèmes classiques. Ces notions et ces résultats représentent un outil important pour l'étude des problèmes hyperboliques

Topologie faible $\sigma(X, X')$

Soit X un espace de Banach et soit $f \in X'$ (X' l'espace dual de X). On désigne par $\varphi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f parcourt X' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de X dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1:

La topologie faible $\sigma(X, X')$ sur X est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$.

Pour définir cette topologie d'une façon plus précise il suffit de définir une base de voisinages pour tout élément $x \in X$ comme suit : Etant donné un point $x \in X$ on obtient une base de voisinages de x pour la topologie $\sigma(X, X')$ en considérant les ensembles de la forme $\cap_{f \in F} \varphi_f^{-1}(V_f)$, où V_f est un voisinage de $\varphi_f(x)$ dans $\mathbb{R}$. (i. e. $V_f =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $a = \langle f, x \rangle$).

Définition 2.2:

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert X converge faiblement vers $u \in X$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, u_n \rangle = \langle v, u \rangle \text{ pour tout } v \in X.$$

Remarque 2.3:

a)- La limite faible quand elle existe est unique car si $\langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle$ pour tout $v \in X$, on a pour $v = u_1 - u_2$

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0$$

donc $u_1 = u_2$. (On peut prendre $v \in X$, car X est un espace de Hilbert, donc $X = X'$ (théorème de Riesz)).

b)- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u \in X$ pour la norme $\|\cdot\|$ (on dit alors qu'elle converge fortement vers u) alors $u_n \rightarrow u$. En effet, on a

$$|\langle u_n - u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\|.$$

Ce qui implique que $\forall x \in X; \langle u_n - u, v \rangle \rightarrow 0$ quand, $n \rightarrow \infty$.

c)- Si X est de dimension finie alors la convergence faible implique la convergence forte. Il suffit de considérer la base $e_1, \dots, e_n$ et d'observer que $\langle u, e_i \rangle = u_i$ pour $u \in X$ ce qui montre que la convergence faible équivaut alors à la convergence composante par composante, c'est à dire à la convergence forte.

Proposition 2.4:

Soient X et Z des espaces de Hilbert, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite qui converge faiblement vers u et $A \in \mathcal{L}(X, Z)$ (opérateur linéaire continu de X dans Z).

Alors la suite $(A(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $A(u)$.

Théorème 2.5: ([6], théorème 1.6)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace de Hilbert X .

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite faiblement convergente.

Théorème 2.6: ([6], théorème 1.7)

Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert X est bornée.

Corollaire 2.7:

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers u et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge fortement vers v . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle = \langle u, v \rangle$$

Définition 2.8:

Soit X un espace normé, et soit $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ son dual topologique. Alors la topologie étoile faible sur X' notée $\sigma(X', X)$ est la topologie initiale associée au système $(\mathbb{R}, \theta, \psi_u)_{u \in X}$ où θ désigne la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ et $\psi_u : X' \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\psi_u(l) = l(u)$. C'est donc la moins fine des topologies sur X' rendant continues toutes les fonctionnelles ψ_u , $u \in X$.

Proposition 2.9: ([4]).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X' . On a:

1/ $f_n \rightarrow f$ (étoile faible) $\iff (\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X)$.

2/ Si $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(X', X)$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans X , $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Remarque 2.10: ([16] p 193).

L'espace X' des fonctionnelles linéaires sur un espace X admet deux interprétations : ou bien il est considéré comme le dual de l'espace initial X , ou bien X' est considéré comme espace de base et alors on lui associe son dual X'' . Cela signifie que nous pouvons introduire sur X' la topologie faible de deux manières différentes : ou bien comme dans l'espace des fonctionnelles, en définissant les voisinages dans X' à l'aide des sous-ensembles finis de X (topologie étoile faible), ou bien comme dans l'espace de base, à l'aide de l'espace dual X'' . Dans le cas d'un espace *réflexif* cela revient, bien sûr, au même. Si, par contre, l'espace X n'est pas *réflexif*, ce sont deux topologies différentes sur X' .

Il est évident que la topologie étoile faible de l'espace X' est moins fine que la topologie faible de X (c'est -à-dire la topologie faible contient au moins autant d'ensembles ouverts que ceux de la topologie étoile).

Etant donné un espace normé X , son dual topologique X' est muni d'une structure d'espace normé en posant $\|l\|_* = \sup_{\|u\| \leq 1} |l(u)|$. La boule unité de X' (ainsi que toutes les boules

fermées) possède alors une propriété remarquable, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.11: ([6], théorème 1.14).

Soit X un espace normé, alors la boule unité

$$B_* = \left\{ l \in X' : \|l\|_* \leq 1 \right\}$$

de X' est $\sigma(X', X)$ – compacte.

2.1 Espaces fonctionnels

2.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$. On donne ici quelques définitions et propriétés élémentaires.

Définition 2.12:

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ au sens de Lebesgue, on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ (\text{classe de fonctions}) f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p. p. sur } \Omega \right\}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C ; |f(x)| \leq C \text{ p. p. sur } \Omega \}.$$

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 2.13: ([4]) (*Inégalité de Hölder*).

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder :

Corollaire 2.14 (*Inégalité de Hölder généralisée*).

Soient $f_1, f_2, \dots, f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \dots f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

Théorème 2.15:

$L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Lemme 2.16: (de Gronwall) ([7], tome 8 p 672).

Soient $\phi \in L^\infty(0, T)$, telle que $\phi(t) \geq 0$, p.p. $t \in [0, T]$. et $\psi \in L^1(0, T)$, telle que $\psi(t) \geq 0$, p.p. $t \in [0, T]$. de plus on suppose que

$$\phi(t) \leq \int_0^t \psi(s) \phi(s) ds + C, \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (C = \text{constante}).$$

Alors

$$\phi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t \psi(s) ds\right), \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

On désigne par $\langle f, g \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, i.e.

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

et également le produit de dualité entre $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (espace des distributions sur Ω), et $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions C^∞ sur Ω et à support compact dans Ω).

2.1.2 Notions de base sur les distributions. On appelle support d'une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ le plus petit fermé $K_\varphi \subset \Omega$ en dehors duquel la fonction φ est nulle presque partout. Une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à support compact dans Ω si son support est un compact contenu dans Ω . On notera par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions φ définies et indéfiniment dérivables sur Ω et à support compact contenu dans Ω .

On désigne par $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

La longueur d'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est l'entier noté $|\alpha|$ et défini par : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_n$.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit l'opérateur de dérivation $\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ par :

$$\varphi \rightarrow \partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right) \dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) (\varphi) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (1.2.0)$$

Proposition 2.17:

$\forall p \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Preuve: Dans [11] Vo-KHAC KHOAN en donne une démonstration.

Définition 2.2: Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$:

On dit qu'une suite $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un compact K contenu dans Ω tel que :

- i) $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- ii) $\partial^\alpha(\varphi_n)$ converge uniformément vers $\partial^\alpha \varphi, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

Définition 2.18: (Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$):

On appelle espace des distributions sur Ω , l'ensemble $\mathcal{D}'(\Omega)$ des applications linéaires $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour toute suite $\{\varphi_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_j) \rightarrow T(\varphi) \text{ dans } \mathbb{R}$$

On notera $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.

On dira que deux distributions T_1 et T_2 sur Ω sont égales si elles le sont en tant qu'applications

de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$:

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque 2.19:

Les distributions généralisent la notion de fonction puisque à toute classe de fonctions $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ on peut associer de façon canonique et biunivoque une distribution notée $T_{\tilde{f}}$ et définie par :

$$\langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle T_f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \forall f = \tilde{f} \text{ p.p sur } \Omega$$

On dira qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à $L^2(\Omega)$ s'il existe une classe de fonctions $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Définition 2.20: Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

On dit qu'une suite de distributions $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle T_n, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = 0$$

Remarque 2.21:

On peut identifier $L^2(\Omega)$ à son dual et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Définition 2.22: (Dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) :

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$ l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

Et en général, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit l'opérateur de dérivation $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ par : $\varphi \mapsto \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i.e :

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Définition 2.23: (Continuité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) :

On dit qu'une application linéaire $\mathcal{A} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue si pour toute suite de distributions $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ l'implication suivante est vérifiée :

$$T_n \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } T \implies \mathcal{A}(T_n) \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } \mathcal{A}(T)$$

Proposition 2.24:

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ l'opérateur de dérivation $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est continu au sens de la définition précédente et on a

$$\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Preuve : Voir en page 183 dans [11].

Définition 2.25: (Espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées) :

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose : $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_j^{\alpha_j}, \dots, x_n^{\alpha_n})$, et on définit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \text{ telle que : } x^\alpha \cdot D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$$

On dira qu'une suite $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et si la suite $\{x^\alpha D^\beta(\varphi_m), m \in \mathbb{N}\}$ converge uniformément dans $\mathbb{R}^n$ vers $x^\alpha D^\beta(\varphi)$ pour tout couple de multi-indice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$. C'est à dire :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta(\varphi_m) - x^\alpha D^\beta(\varphi) \right| \right) = 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$$

Proposition 2.26: Densité de L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ partout dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

C'est à dire que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ il existe une suite $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\varphi_m) - x^\alpha D^\beta u| \right) = 0$$

Preuve : Voir [11]

Définition 2.27: (L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$).

On appelle espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ l'espace noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des formes linéaires T continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie induite par celle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.28: (Transformée de Fourier d'une fonction).

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On notera, pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $x \cdot \xi$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ défini par : $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$.

On appelle transformée de Fourier de f la fonction notée $F(f)$ (ou encore $\hat{f}$) : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\xi \longmapsto \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i\xi x} \cdot dx$$

Définition 2.29: (Transformée de Fourier d'une distribution tempérée).

On remarquera d'abord que :

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$.

On appelle transformation de Fourier de T la distribution notée $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$T \longrightarrow \hat{T} : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \longmapsto \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \langle \hat{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} = \langle T, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \end{array} \right\}$$

On désigne par $\langle f, g \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, i.e.

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

et également le produit de dualité entre $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (espace des distributions sur Ω), et $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions C^∞ sur Ω et à support compact dans Ω)

2.1.3 Espaces de Sobolev. On introduit l'espace $H^m(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $v \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à m prises au sens des distributions sont dans l'espace $L^2(\Omega)$. Ces espaces jouent dans un rôle fondamental dans l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Définition 2.30: Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega) \\ &= \text{sous-espace de } H^1(\Omega) \text{ des fonctions "nulles" sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Puisque (par définition) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un espace de distributions sur Ω :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))', \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \end{array} \right.$$

Les injections dans (*) sont continues. Les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ sont sommes de dérivées de 1^{er} ordre de fonctions de $L^2(\Omega)$.

Proposition 2.31: ([14], tome 3 p 880)

1/ Si $m_1 \geq m_2$, $H^{m_1}(\Omega)$ est contenu, avec injection continue, dans $H^{m_2}(\Omega)$.

2/ $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $(.,.)_m$ est un espace de Hilbert.

Remarque 2.31:

On a pour $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ et pour Γ assez régulière

$$C \|\varphi(t)\|_{H_0^2(\Omega)} \leq \|\Delta\varphi(t)\|_2$$

Théorème 2.32: (Formule de Green)

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u à Γ dirigée vers l'extérieur.

De façon générale, X étant un espace de Banach, on désigne par $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$ l'espace des (classes de) fonctions $t \mapsto f(t)$ de $]0, T[\rightarrow X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty$$

si $p = \infty$, on remplace la norme précédente par

$$\sup_{t \in]0, T[} \text{ess } \|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} < \infty$$

L'espace normé $L^p(0, T; X)$ est complet. (Voir [14])

Soit $\Omega_1 \subset \Omega$, on définit $L^q(0, T; L^p(\Omega_1))$ comme étant l'espace des fonctions $w \in L^q(0, T; L^p(\Omega))$ telles que $w(x, t) = 0$ p.p. dans $\Omega \setminus \Omega_1$, où $1 \leq q < \infty$, muni de la norme

$$\|w\|_{L^q(0, T; L^p(\Omega_1))} = \left(\int_0^T \|w(t, x)\|_{L^p(\Omega_1)}^q dt \right)^{1/q}.$$

Si $q = \infty$

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega_1))} = \sup_{t \in]0,T[} \text{ess} \|w(t, x)\|_{L^p(\Omega_1)}.$$

On définit de la même façon les espaces $L^q(0, T; H_0^1(\Omega_1))$, $1 \leq q \leq \infty$.

Remarque 2.33: ([14])

Soit (X, Y) un couple d'espaces de Banach avec $X \hookrightarrow Y$ (injection continue).

Alors, on a $L^p(]a, b[; X) \hookrightarrow L^p(]a, b[; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, et $\mathcal{D}'(]a, b[; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(]a, b[; Y)$.

Remarque 2.34:

Les espaces $L^2(\Omega_1)$, (resp. $H_0^1(\Omega_1)$) s'identifient à des sous espaces fermés de $L^2(\Omega)$, (resp. $H_0^1(\Omega)$), $\forall t \in]0, T[$.

Théorème 2.35:

Soit $w : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors $w(x, t) = 0$ p.p dans $\Omega \setminus \Omega_1$ et pour tout $t \in]0, T[$ si et seulement si $w = 0$ dans $\Omega \times]0, T[\setminus Q$.

Théorème 2.36:

Si v est une fonction de $H_0^1(\Omega_1)$ (resp. $L^2(\Omega_1)$), alors la fonction $\tilde{v}$ prolongement de v par 0 sur $\Omega \setminus \Omega_1$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)$).

Preuve :

Si φ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega_1)$, il est évident que la fonction $\tilde{\varphi}$ prolongement de φ par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_1$, appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, de plus on a

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega_1)}.$$

Ainsi l'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ muni de la norme induite par $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega_1)$. Elle se prolonge donc par continuité en une application linéaire continue $v \mapsto \tilde{v}$ de $H_0^1(\Omega_1)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et on a

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{presque partout dans } \Omega_1 \\ 0 & \text{presque partout dans } \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}.$$

En effet, si (φ_m) est une suite de fonction de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ qui converge vers v dans $H_0^1(\Omega_1)$, $(\tilde{\varphi}_m)$ converge vers $\tilde{v}$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc dans $L^2(\Omega)$, et de la suite (φ_m) on peut extraire une sous suite (φ_μ) telle que $(\tilde{\varphi}_\mu)$ tend vers $\tilde{v}$ presque partout dans Ω , d'où le résultat. ■

On désigne par $\mathcal{D}'(0, T; X)$ l'espace de *distributions* sur $]0, T[$ à valeurs dans X , défini par

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); X).$$

Si $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, sa dérivée distributionnelle première est définie par

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

On introduira quelques lemmes qu'on utilisera ultérieurement.

Lemme 2.37: (*Sobolev -Poincaré*) ([14])

Si

$$2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2},$$

alors

$$\|u\|_q \leq C(\Omega, q) \|\nabla u\|_2, \quad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 2.38: (14)

Si $f \in L^p(0, T; X)$ et $\frac{df}{dt} \in L^p(0, T; X)$ (au sens des distributions) ($1 \leq p \leq \infty$), alors $f \in C(0, T; X)$.

Lemme 2.39: (14)

Soit $U =]0, T[\times \Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, g_μ, g des fonctions de $L^q(0, T; L^q(\Omega))$, $1 < q < \infty$ telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(0, T; L^q(\Omega))} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$$

et

$$g_\mu \rightarrow g \text{ p.p. dans } U$$

Alors $g_\mu \rightharpoonup g$ dans L^q (faiblement)

III. EQUATION DES ONDES AVEC UN TERME NON LOCAL EN TEMPS ET UNE DISSIPATION INTERNE FAIBLE

3.1 Introduction

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'une équation intégrale-différentielle. On montrera que l'énergie du système décroît exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini, en présence d'une dissipation linéaire. Nous considérerons le problème de l'équation des ondes suivante avec un terme non local en temps et une dissipation interne faible.

$$(P_1) \quad \begin{cases} u_{tt} + au_t = \Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbf{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont les données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ ou bien le noyau sera précisée plus loin

Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité, (voir [32] – [7] pour la discussion de l'origine de ces modèles). Des problèmes similaires et aussi des versions non linéaires ont été discutés par plusieurs auteurs (voir [3], [6], [7], [12], [32], [30]). D'autre part, le taux de convergence n'a pas été trouvé. Dans tous ces travaux l'hypothèse suivante sur le terme noyau

$$h'(t) \leq -\eta h(t), \quad \forall t \geq 0$$

a été imposée.

Dans ce travail on donnera un taux de convergence explicite pour la solution du problème (1). C'est l'objectif de ce chapitre. On montrera que la solution est exponentiellement asymptotiquement stable pourvu que le noyau qui apparait dans le terme mémoire soit aussi exponentiellement décroissant vers zéro. De plus, nous remplaçons l'hypothèse ci-dessus qui est fréquemment utilisée par les conditions

$$h'(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad e^{\alpha t} h(t) \in L^1(0, \infty), \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Une famille d'exemples intéressants peuvent être construits en considérant des fonctions décroissantes $e^{-\alpha t}$ pour un certain $\alpha > 0$ et qui sont constantes dans de petits intervalles. Dans ces petits intervalles où la fonction est constante la condition $h'(t) \leq -\eta h(t)$, $\forall t \geq 0$ n'est pas satisfaite pour tout $\eta > 0$. On peut avoir pour cette situation des fonctions décroissantes à droite d'un point t_0 . on peut considérer une suite d'intervalles dénombrable dans ce second cas. Autre type d'exemples consiste à choisir des fonctions de la forme:

$$h(t) = \begin{cases} (1 + n2^n)e^{-n} - 2^n e^{-nt}, & \text{sur } [n, n + \frac{1}{2^n}] \\ e^{-1} + (n+1)2^{n+6}e^{-n} - 2^{n+6}e^{-nt}, & \text{sur } [n+1, n+1 + \frac{1}{2^{n+3}}] \\ e^{-t}, & \text{presque partout ailleurs} \end{cases}$$

pour $n \geq 3$. On peut facilement voir que $\int_t^{+\infty} h(s)ds \leq Ce^{-t}$ ce qui implique que $\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds \leq C$ pour tout $0 < \alpha < 1$. D'autre part on a $\limsup_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1/e$ et donc $\limsup_{t \rightarrow \infty} h(t)e^{\delta t} = +\infty$ pour tout $\delta > 0$. En conséquence la condition

$$h'(t) \leq -\eta h(t), \forall t \geq 0$$

ne peut être satisfaite.

Enfin on établit une nouvelle fonctionnelle de Lyapounov. On modifie l'énergie classique associée en ajoutant des termes convenablement choisis pour neutraliser les termes indésirables. On discutera aussi le cas $a = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de dissipation interne. Dans ce cas on montre que le terme mémoire induit une dissipation faible qui est suffisante pour conduire le système vers l'équilibre.

3.2 Existence et unicité

Théorème 3.1:

Supposons que la fonction h est continue et que $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Alors le problème (1) admet une solution unique telle que

$$u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Preuve: Dans cette section, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (3.1). Premièrement on considère la solution faible et en utilisant la densité, on prolonge le même résultat pour les solutions fortes. On multiplie formellement la première équation du système (3.1) par w et on intègre sur Ω , on obtient alors:

$$\int_{\Omega} u_{tt} w dx - \int_{\Omega} \Delta u w dx + \int_{\Omega} w \int_0^t (t-s) \Delta u(s) ds dx + \int_{\Omega} u_t w dx = 0.$$

L'application de la formule de Green donne :

$$\int_{\Omega} u_{tt} w dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} w d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla w \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx + \int_{\Omega} u_t w dx = 0, \quad \forall w \in V$$

où $V = H_0^1(\Omega)$. Comme $u = 0$ sur Γ alors la première équation de (3.1) devient :

$$\int_{\Omega} u_{tt} w dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - \int_{\Omega} \nabla w \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx + \int_{\Omega} u_t w dx = 0, \quad \forall w \in V \quad (3.2)$$

D'où la formulation variationnelle du problème (3.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(t) \in V \text{ telle que :} \\ (u_{tt}, w)_{\Omega} + (\nabla u, \nabla w)_{\Omega} - \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s), \nabla w)_{\Omega} ds + (u_t, w)_{\Omega} = 0, \quad \forall w \in V \end{array} \right.$$

Les solutions fortes du problème (3.1) avec conditions aux limites $u = 0$ sur Γ ne peuvent pas être obtenues par la méthode des bases spéciales, une base formée par les fonctions propres ne peut pas être utilisée pour le système (3.1). Ceci, conduit à dériver par rapport au temps t la formulation variationnelle précédente. En estimant $u_{tt}(0)$, on rencontre de sérieuses difficultés. Alors, pour éviter ces difficultés, on transforme le problème (3.1), en un problème équivalent avec une condition initiale égale à zéro. Pour cela, on effectue le

changement de fonctions suivant :

$$\begin{aligned}
v(x, t) &= u(x, t) - \Phi(x, t) \\
\text{avec} & \\
\Phi(x, t) &= u_0(x) + tu_1(x), \quad (x, t) \in \Omega \times]0, \infty[
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= v_{tt} \quad ; \Delta u = \Delta v + \Delta \Phi ; u_t = \Phi_t + v_t = v_t + u^1(x) \\
\int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds &= \int_0^t h(t-s) \Delta v(s) ds + \int_0^t h(t-s) \Delta \Phi(s) ds \\
u &= 0 \text{ sur } \Gamma \implies v = 0
\end{aligned}$$

Donc le problème équivalent à (3.1) s'écrit :

$$(P) \begin{cases} v_{tt} - \Delta v + \int_0^t h(t-s) \Delta v(s) ds + (v + \Phi(t))_t = F & \text{dans } \Omega \times]0, \infty[\\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \\ v(0) = v_t(x) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

Avec

$$F = \Delta \Phi - \int_0^t h(t-s) \Delta \Phi(s) ds$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution, nous supposons que le noyau h satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
H1) \quad & \int_0^\infty h(s) ds < 1 \\
H2) \quad & : -\eta h(t) \leq h'(t) \leq -\xi h(t) \text{ , pour tout } t \geq 0 \\
H3) \quad & 0 \leq h''(t) \leq \zeta h(t)
\end{aligned} \tag{3.4'}$$

Notons que si v est solution de (3.4) dans $[0; T]$; alors $u = v + \Phi$ est solution de (3.1) sur le même intervalle. A partir des estimations qui seront démontrées ci dessous et en utilisant les méthodes standards, on prolonge u à l'intervalle $(0, \infty)$. Il suffit, donc de

montrer que le problème (3.4) a une solution locale, qui sera établie par la méthode de **Faedo-Galerkin**.

Soit $(w_k)_k$ une base dans $V \cap H^2(\Omega)$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$, et soit V_m le sous espace engendré $w_1, w_2, \dots, w_n$ et soit

$$v_m(t) = \sum_{j=1}^m \gamma_j(t) w_j$$

une solution approchée du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} (v_m'', w)_\Omega + (\nabla v_m, \nabla w)_\Omega - \int_0^t h(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla w)_\Omega + (v_m'(t) + \Phi'(t), w(t))_\Omega \\ = (F(t), w)_\Omega, \quad \forall w \in V_m \\ v_m(0) = v_m'(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Par les méthodes standards des équations différentielles, on peut prouver l'existence de la solution du problème (3.5) sur $[0; t_m]$, ensuite cette solution peut être prolongée à l'intervalle fermé $[0; T]$.

Estimation a priori : Première estimation (estimation de v_m et v_m')

On pose $v_m' = \gamma_j'(t) w_j$ dans (3.5) et on fait la somme sur j avec $v_m(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|v_m'(t)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m(t)\|_{0,\Omega}^2 \right\} + (v_m'(t) + \Phi'(t), v_m'(t) + \Phi'(t))_{0,\Omega} \\ = (F(t), v_m'(t))_\Omega + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m(t))_\Omega ds \right)_{0,\Omega} \\ - \int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m(t))_\Omega ds + (v_m'(t) + \Phi'(t), \Phi'(t))_\Omega \end{aligned} \tag{3.6}$$

De l'inégalité de **Cauchy Schwartz** et de l'inégalité (3.4') on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} \nabla v_m(t) \int_0^t h'(t-s) \nabla v_m(s) ds dx \right| \\
& \leq \left[\xi \int_{\Omega} |\nabla v_m(t)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) |\nabla v_m(s)| ds dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) |\nabla v_m(s)| ds \right)^2 dx + \frac{\xi^2}{2} \|\nabla v_m(t)\|^2 \quad (3.7) \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla v_m(s)|^2 ds dx + \frac{\xi^2}{2} \|\nabla v_m(t)\|^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla v_m(s)|^2 ds dx + \frac{\xi^2}{2} \|\nabla v_m(t)\|^2
\end{aligned}$$

Ensuite, combinant (3.6) et (3.7),(3.8) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|v'_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v'_m(t)\|_{0,\Omega}^2 \right\} + \int_{\Omega} |v'_m(t) + \Phi'(t)|^2 dx \\
& \leq \frac{1}{2} \|F(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|v'_m(t)\|^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s) |\nabla v_m(s)|^2 ds + \frac{\xi^2}{2} \|\nabla v_m(t)\|^2 \quad (3.8) \\
& \quad + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m(t))_{\Omega} ds \right) + (v'_m(t) + \Phi'(t), \Phi'(t))_{\Omega}
\end{aligned}$$

Intégrant (3.8) sur l'intervalle $]0, t[$, et notons que l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** et sous l'hypothèse $v_m(0) = v'_m(0) = 0$. On obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|v'_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \int_0^t |v'_m(t) + \Phi'(t)|^2 ds dx \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|F(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v'_m(t)\|^2 ds \\
& \quad + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \int_0^s h(s-r) |\nabla v_m(s)|^2 dr ds + \frac{\xi^2}{2} \int_0^t \|\nabla v_m(t)\|^2 ds \\
& \quad + \int_0^t h(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m(t))_{\Omega} ds + \int_0^t (v'_m(t) + \Phi'(t), \Phi'(t))_{\Omega} ds
\end{aligned} \tag{3.9}$$

On a d'autre part:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t h(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m(t))_{\Omega} ds \\
& \leq \|\nabla v_m(t)\| \int_0^t h(t-s) \|\nabla v_m(s)\| ds \\
& \leq \eta \|\nabla v_m(t)\|^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^t h(s) ds \int_0^t h(t-s) \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
& \leq \eta \|\nabla v_m(t)\|^2 + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds
\end{aligned} \tag{3.10}$$

alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|v'_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \int_0^t |v'_m(t) + \Phi'(t)|^2 ds dx \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|F(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
& \quad + \frac{\xi^2}{2} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds + \eta \|\nabla v_m(t)\|^2 + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t |v'_m(t) + \Phi'(t)|^2 ds dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^t |\Phi'(t)|^2 ds dx
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned}
& \|v'_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + (1 - 2\eta) \|\nabla v_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \int_0^t |v'_m(t) + \Phi'(t)|^2 ds dx \\
& \leq \int_0^t \|F(s)\|^2 ds + T \int_{\Omega} |u_1|^2 dx \\
& \quad + \int_0^t \left[\|v'_m(s)\|^2 + \left(\xi^2 + \left(1 + \frac{1}{2\eta} \right) \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right) \|\nabla v_m(s)\|^2 \right] ds
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Appliquons le lemme (2.16) (Lemme de Gronwall), pour cela posons

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \min(1, 1 - 2\eta) \left[\|v'_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v_m(t)\|_{0,\Omega}^2 \right], \\
C &= \|F(s)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + T \|u_1\|^2 \\
\psi(t) &= \sup \left(1, \xi^2 + \frac{1}{2\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right) = D = \text{constante}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\phi(t) \leq C \int_0^t \psi(s) \phi(s) ds, \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

c'est à dire

$$\|v'_m(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v_m(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq CDT = C_1(T) \tag{3.12}$$

La constante $C_1(T) > 0$ est indépendante de m , et $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} v'_m &\in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \\ v_m &\in L^\infty(0, T, V) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Seconde estimation (estimation de v''_m)

Premièrement, on estime le terme $v''_m(0)$ dans la norme de $L^2(\Omega)$, posons $w = v''_m(0)$ dans (3.5) et notons $v_m(0) = v'_m(0) = 0$, trouve que :

$$\begin{aligned} (v''_m(0), v''_m(0))_\Omega + (\Phi'(0), v''_m(0))_\Omega &= (F(0), v''_m(0))_\Omega \\ \|v''_m(0)\|^2 &= -(\Phi'(0), v''_m(0))_\Omega + (F(0), v''_m(0))_\Omega \\ \|v''_m(0)\|^2 &\leq \|v''_m(0)\| (\|\Phi'(0)\| + \|F(0)\|) \end{aligned}$$

on en déduit qu'il existe une constante indépendante de m , $L_3 = \|\Phi'(0)\| + \|F(0)\|$ telle que:

$$\|v''_m(0)\| < L_3 \tag{3.14}$$

Maintenant, en dérivant (3.4) par rapport à t et en multipliant le resultat par $\gamma''_j(t)$ et en sommant sur j et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} v''_m, v''_m \right)_\Omega + (\nabla v'_m, \nabla v''_m)_\Omega - h(0) (\nabla v_m(t), \nabla v''_m) \\ - \int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v''_m)_\Omega ds + (v''_m(t) + \Phi''(t), v''_m(t))_\Omega = (F'(t), v''_m)_\Omega, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$v_m(0) = v'_m(0) = 0$$

On écrit le troisième sous la forme:

$$-h(0) (\nabla v_m(t), \nabla v''_m)_\Omega = -h(0) \frac{d}{dt} (\nabla v_m(t), \nabla v'_m)_\Omega + h(0) \|v'_m(t)\|^2$$

et aussi le quatrième terme

$$\begin{aligned}
& \int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m''(t))_{\Omega} ds \\
&= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds \right] - h'(0) (\nabla v_m, \nabla v_m')_{\Omega} \\
&\quad - \int_0^t h''(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds \\
&= \frac{d}{dt} \left[\int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds \right] - h'(0) \frac{d}{dt} \|\nabla v_m\|^2 \\
&\quad - \int_0^t h''(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds
\end{aligned}$$

En insérant ces dernières expressions dans (3.15) on trouve:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m'(t)\|^2 \right] - h(0) \frac{d}{dt} (\nabla v_m'(t), \nabla v_m(t))_{\Omega} + h(0) \|\nabla v_m'(t)\|^2 \\
& - \frac{d}{dt} \left[\int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds \right] + h'(0) \frac{d}{dt} \|\nabla v_m\|^2 + \|v_m''(t)\|^2 \\
& + \int_0^t h''(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds \\
&= (F'(t), v_m''(t))_{\Omega}
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m'(t)\|^2 \right] + h(0) \|\nabla v_m'(t)\|^2 \\
&= (F'(t), v_m''(t))_{\Omega} + \frac{d}{dt} \left[\int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds \right] \\
&\quad - h'(0) (\nabla v_m(t), \nabla v_m'(t))_{\Omega} + h(0) \frac{d}{dt} (\nabla v_m'(t), \nabla v_m(t))_{\Omega} \\
&\quad - \int_0^t h''(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_{\Omega} ds - \|v_m''(t)\|^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

En utilisant l'inégalité de **Cauchy Schwartz**, et l'inégalité de **Young**, on obtient :

$$\begin{aligned}
(F^\lambda(t), v_m''(t))_\Omega &\leq \frac{1}{2} \|F'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 \\
h'(0) (\nabla v_m(t), \nabla v_m'(t)) &\leq \frac{(h^\lambda(0))^2}{4\delta_1} \|\nabla v_m(t)\|^2 + \delta_2 \|\nabla v_m'(t)\|^2 \\
\int_0^t h''(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_\Omega ds &\leq \|\nabla v_m'(t)\| \left| \int_0^t \zeta h(t-s) \|\nabla v_m(s)\| ds \right| \\
&\leq \delta_3 \|\nabla v_m'(t)\|^2 + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s) \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
&\leq \delta_3 \|\nabla v_m'(t)\|^2 + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
\left| \int_0^t h'(t-s) (\nabla v_m(s), \nabla v_m'(t))_\Omega ds \right| &\leq \|\nabla v_m'(t)\| \left| \int_0^t \xi h(t-s) \|\nabla v_m(s)\| ds \right| \\
&\leq \delta_4 \|\nabla v_m'(t)\|^2 + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m'(t)\|^2 \right] + h(0) \|\nabla v_m'(t)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|F'(t)\|^2 + \frac{3}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \frac{d}{dt} \left[\delta_4 \|\nabla v_m'(t)\|^2 + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \right] \\
&+ \frac{(h^\lambda(0))^2}{4\delta_1} \|\nabla v_m(t)\|^2 + \delta_2 \|\nabla v_m'(t)\|^2 + \frac{d}{dt} \left[\frac{(h^\lambda(0))^2}{4\delta_1} \|\nabla v_m(t)\|^2 + \delta_2 \|\nabla v_m'(t)\|^2 \right] \\
&+ \delta_3 \|\nabla v_m'(t)\|^2 + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds
\end{aligned} \tag{3.16}$$

En intégrant de 0 à t , et tenant compte (3.16) , $v_m(0) = v_m^\lambda(0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m'(t)\|^2 + h(0) \int_0^t \|\nabla v_m'(s)\|^2 ds \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|F'(s)\|^2 ds + \frac{3}{2} \int_0^t \|v_m''(s)\|^2 ds + \delta_4 \|\nabla v_m'(t)\|^2 \\
& + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds + \frac{(h^\lambda(0))^2}{4\delta_1} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
& + \delta_2 \int_0^t \|\nabla v_m'(s)\|^2 ds + \frac{(h^\lambda(0))^2}{4\delta_1} \|\nabla v_m(t)\|^2 + \delta_2 \|\nabla v_m'(t)\|^2 \\
& + \delta_3 \int_0^t \|\nabla v_m'(s)\|^2 ds + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \left(\int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \right) dr
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \delta_2 \right) \|\nabla v_m'(t)\|^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|F'(s)\|^2 ds + \frac{(h'(0))^2}{4\delta_1} \|\nabla v_m(t)\|^2 + \frac{(h'(0))^2}{4\delta_1} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
& + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \left(\int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \right) dr \\
& + \int_0^t \left[\frac{3}{2} \|v_m''(s)\|^2 + \left(\delta_4 + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} - h(0) + \delta_2 + \delta_3 \right) \|\nabla v_m'(s)\|^2 \right] ds
\end{aligned}$$

Pour $\delta_2 < \frac{1}{2}$, $\|\nabla v_m(t)\| < (C_1(T))$, $\delta_2 + \delta_3 = h(0)$, en posant

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \min(1, 1 - 2\delta_2) \left(\frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m'(t)\|^2 \right), \\
B &= \frac{1}{2} \|F(s)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{(h'(0))^2}{4\delta_1} \left[1 + (C_1(T))^2 \right] + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} T^2 \left\| (C_1(T))^2 \right\| \\
\psi(t) &= \sup \left(\frac{3}{2}, \delta_4 + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right)
\end{aligned}$$

et en appliquant le lemme de Granwall on vérifie que

$$\frac{1}{2} \|v_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v_m'(t)\|^2 \leq C_2(T) \quad (3.17)$$

On en déduit que:

$$v_m'' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \quad (3.18)$$

Passage à la limite :

Des informations données par les estimations (3.13) et (3.17) on en déduit que l'on peut extraire de la suite $(v_m)_m$ une sous suite notée encore $(v_m)_m$ telle que :

$$\begin{aligned} v_m &\rightharpoonup v && \text{dans } L^\infty(0, T, V) \\ v_m' &\rightharpoonup v && \text{dans } L^\infty(0, T, V) \\ v_m'' &\rightharpoonup v'' && \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

D'où l'existence d'une solution pour T suffisamment grand.

Unicité :

Soit v_1, v_2 deux solutions régulières du problème (3.5). Alors, en posant $z = v_1 - v_2$ on vérifie :

$$(z''(t), w)_\Omega + (\nabla z'(t), \nabla w)_\Omega - \int_0^t h(t-s) (\nabla z(s), \nabla w)_\Omega + (v_1'(t) - v_2'(t), w(t))_\Omega = 0 \quad (3.19)$$

pour tout $w \in V$.

Posons $w = z'(t)$ dans (3.19) , il s'ensuit que:

$$(z''(t), z'(t))_\Omega + (\nabla z(t), \nabla z'(t))_\Omega - \int_0^t h(t-s) (\nabla z(s), \nabla z'(t))_\Omega ds + (z'(t), z'(t))_\Omega = 0$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|z'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z(t)\|^2 \right\} + \|z'(t)\|^2 = - \int_0^t h(t-s) (\nabla z(s), \nabla z'(t))_\Omega$$

puisque

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t-s) (\nabla z(s), \nabla z(t)) ds &= -h(0) \|\nabla z(t)\|^2 - \int_0^t h'(t-s) ((\nabla z(s), \nabla z(t))) ds \\ &+ \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla z(s), \nabla z(t)) ds \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Alors, sous les hypothèses (H1) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|z'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z(t)\|^2 \right\} \\ \leq \frac{\zeta^2}{2} \|\nabla z(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s) \|\nabla z(s)\|^2 ds \\ + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla z(s), \nabla z(t)) ds \right) - h(0) \|\nabla z(t)\|^2 + \|z'(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Intégrons la dernière inégalité sur $(0, t)$, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|z'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z(t)\|^2 \\ \leq \frac{\zeta_1^2}{2} \int_0^t |\nabla z(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \int_0^r h(t-s) \|\nabla z(s)\|^2 dr ds \\ + \int_0^t h(t-s) (\nabla z(s), \nabla z(t)) ds - h(0) \int_0^t \|\nabla z(s)\|^2 ds + \int_0^t \|z'(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$\int_0^t h(t-s) ((\nabla z(s), \nabla z(t))) ds \leq \eta \|\nabla z(t)\|^2 + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla z(s)\|^2 ds \quad (3.23)$$

En intégrant de 0 à t et en remarquant que :

$$\int_0^t ds \int_0^a h(s-r) \|\nabla z(s)\|^2 dr = \int_0^t dr \int_r^t h(s-r) \|\nabla z(s)\|^2 ds \leq \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \int_0^t \|\nabla z(s)\|^2 ds$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|z'(t)\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \|\nabla z(t)\|^2 \\
& \leq \frac{\zeta_1^2}{2} \int_0^t \|\nabla z(t)\|^2 ds + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s) \|\nabla z(t)\|^2 ds \\
& + \int_0^t \|z'(t)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla z(t)\|^2 ds - h(0) \int_0^t \|\nabla z(t)\|^2 ds \\
& \leq \left(\frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)}^2 + \frac{\zeta_1^2}{2} - h(0) + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)}\right) \int_0^t \|\nabla z(t)\|^2 ds
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \min(1, 1 - 2\eta) \left[\frac{1}{2} \|z'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z(t)\|^2 \right] \\
& \leq \int_0^t \left[\frac{1}{2} \|z'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z(t)\|^2 \right] \sup \left[2, \zeta_1^2 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} + \frac{1}{2\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right] ds
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de **Gronwall**, on trouve :

$$\|z'(t)\|^2 + \|\nabla z(t)\|^2 = 0$$

ce qui montre qu'on a $z = v_1 - v_2 = 0$ presque partout.

Existence des solutions faibles:

Supposons que $\{u^0, u^1\} \in V \times L^2(\Omega)$, puisque l'ensemble

$$D(-\Delta) = \{u \in V \cap H^2(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

est dense dans V et $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ alors il existe deux suites $(u_n^0)_{n \geq 0} \subset D(-\Delta)$ et $(u_n^1)_{n \geq 0} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telles que :

$$u_n^0 \rightarrow u^0 \text{ fortement dans } V \quad (3.24)$$

$$u_n^1 \rightarrow u^1 \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \quad (3.25)$$

De plus

$$u_n^0 = 0 \text{ sur } \Gamma$$

alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution du problème (3.1) verifiant :

$$\begin{cases} u_n'' + u_n' = \Delta u_n - \int_0^t h(t-s) \Delta u_n(s) ds, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u_n = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u_n(x, 0) = u_n^0(x), \quad u_n'(x, 0) = u_n^1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.26)$$

En tenant compte des arguments utilisés dans la première estimation, on obtient

$$|u_n'(t)|^2 + |\nabla u_n(t)|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |u_n'(t)|^2 dx ds \leq L \quad (3.27)$$

où L constante positive indépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$. Posons $z_{m,n} = u_m - u_n$ $m, n \in \mathbb{N}$ ou u_m, u_n sont deux solutions régulières de (3.26) correspondantes à $u_n^0(x), u_n^1(x), u_m^0(x), u_m^1(x)$, suivant les mêmes étapes que celles utilisées dans l'unicité des solutions fortes de (3.5) et tenant compte de (3.24) et (3.25) on déduit qu'il existe

$$u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

une solution régulière du problème (3.1) telle que :

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } C^0([0, T], V) \quad (3.28)$$

$$u_n' \longrightarrow u' \text{ fortement dans } C^0([0, T], L^2(\Omega)) \quad (3.29)$$

D'après (3.28) et (3.29), on a aussi

$$u_n' \rightharpoonup u' \text{ faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Gamma)) \quad (3.30)$$

D'après les convergences précédentes, on peut passer à la limite en utilisant des arguments standards afin d'obtenir

$$u'' + u' - \Delta u + \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = 0 \quad \text{dans } L^2(0, \infty, V') \quad (3.31)$$

Caractérisation des conditions aux limites:

Considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta p = u' & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.32)$$

où u est la solution faible de (3.5), vérifiant (3.31). Tenons compte de la régularité de la frontière Γ de Ω , de classe C^2 , on a

$$p \in L^2(0, \infty, H) \quad (3.33)$$

où

$$H = \{u \in V, \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

Maintenant on va montrer que

$$u - \int_0^t h(t-s) u(s) ds = -p' - u' \quad \text{dans } H_{Loc}^{-1}(0, \infty, V') \quad (3.34)$$

ou $H_{Loc}^{-1}(0, \infty, V)$ est le dual topologique de $H_{0, Loc}^1(0, \infty, V)$, En effet d'après (3.31), on obtient

$$-\Delta \left[u - \int_0^t h(t-s) u(s) ds \right] = -u'' - u' \quad \text{dans } L_{Loc}^2(0, \infty, V'),$$

et d'après (3.34) on a

$$-\Delta \left[u - \int_0^t h(t-s) u(s) ds \right] = \Delta p' + \Delta p \quad \text{dans } D'_{Loc}(0, \infty, V),$$

Soit θ une fonction de test de $D(0, \infty)$

$$\langle -\Delta \left[u - \int_0^t h(t-s) u(s) ds \right], \theta \rangle = \langle -\Delta p, \theta \rangle + \langle \Delta p, \theta \rangle \text{ dans } V', \quad \forall \theta \in D(0, \infty).$$

on intègre sur $(0, T)$ on obtien

$$(-\Delta) \int_0^T \left(u - \int_0^t h(t-s) u(s) ds \right) \theta(t) dt = \int_0^T (-\Delta) p(t) \theta(t) dt - \int_0^T (-\Delta) p(t) \theta(t) dt \text{ dans } V'$$

par conséquent

$$\int_0^T \left(u - \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) \right) \theta(t) dt = \int_0^T p(t) \theta'(t) dt - \int_0^T p(t) \theta(t) dt \text{ dans } V.$$

D'où :

$$u - \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = -p' - u' \text{ dans } H_{Loc}^{-1}(0, \infty, V),$$

On considère l'opérateur dual trace suivant

$$\overline{\gamma}_0 : H_{Loc}^{-1}(0, \infty, V) \longrightarrow H_{Loc}^{-1}(0, \infty, L^2(\Gamma))$$

dont la construction et les propriétés peuvent être trouvées dans Milla Miranda [34] ,

d'après (3.34), on obtient:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_0 \left(u - \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds \right) &= -\overline{\gamma}_0 p' - \overline{\gamma}_0 u' \text{ dans } H_{Loc}^{-1}(0, \infty, V), \\ \overline{\gamma}_0 u &= -\overline{\gamma}_0 p' - \overline{\gamma}_0 p \end{aligned}$$

où

$$\gamma_0 : H \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est l'opérateur trace classique . Donc :

$$\gamma_0 \left(u + u' + \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds \right) = 0, \quad \text{sur } \Gamma$$

Ce qui achève la démonstration.

3.3 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous présentons et nous démontrons nos résultats.

Premièrement nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait à :

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad & h'(t) \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \\ \text{(A2)} \quad & 1 - \int_0^\infty h(s) ds = 1 - \bar{h} = l > 0, \\ \text{(A3)} \quad & e^{\alpha t} h(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{pour } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Ensuite , on définit l'énergie classique associée à (3.1) par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

Théorème 3.2:

Si les hypothèses (A1) – (A3) sont satisfaites, alors l'énergie de (3.1) décroît de façon exponentielle vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives C et $\beta > 0$ telles que

$$E(t) \leq C e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve:

La différentiation de $E(t)$ par rapport à la variable t donne

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx. \quad (3.35)$$

Posons,

$$(h \square \nabla u)(t) = \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx,$$

il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h \square \nabla u)(t) &= - \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Alors, définissons

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t),$$

De (3.36) et (3.37) on obtient,

$$e'(t) = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t). \quad (3.37)$$

Remarquons que de l'hypothèse (A1) on a

$$e'(t) \leq 0, \quad t \geq 0$$

De plus, de la définition de $e(t)$ et $(h \square \nabla u)(t)$ et de l'hypothèse (A2), il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$E(t) \leq M e(t), \quad t \geq 0. \quad (3.38)$$

Ensuite, on introduit les deux fonctionnelles

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{\Omega} u_t u dx \\ \Psi(t) &= \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\ H_{\alpha}(t) &= e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \quad \text{où } \alpha > 0 \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.1) de notre problème, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} u_{tt} u dx \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx.\end{aligned}$$

Il est clair que,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds \right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t h(t-s) ds \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1-l}{2} \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(t)}{dt} &\leq \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1-l}{2} \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.\end{aligned}\tag{3.39}$$

En dérivant la fonctionnelle $\Psi(t)$ par rapport à t et en utilisant la formule de Leibnitz, on trouve,

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx - \alpha \Psi(t).\tag{3.40}$$

On introduit maintenant la fonctionnelle

$$V(t) = e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Psi(t)$$

avec $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta > 0$. Des relations ci-dessus (3.37), (3.39) et (3.40) on vérifie que

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= \frac{de}{dt} + \varepsilon \frac{d\Phi(t)}{dt} + \eta \frac{d\Psi(t)}{dt} \\
&\leq - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\
&\quad - \varepsilon \int_{\Omega} u_t u dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\varepsilon(1-l)}{2} \int_0^t \int_{\Omega} h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\
&\quad + \eta \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \eta \int_0^t \int_{\Omega} h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx - \alpha \eta \Psi(t)
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &\leq -(1-\varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) - \varepsilon \Phi(t) - \alpha \eta \Psi(t) - \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-l)}{2} \right) \int_0^t \int_{\Omega} h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Si on choisit α tel que

$$\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds < \frac{1}{1-l}$$

alors, on peut choisir η tel que

$$\frac{\varepsilon(1-l)}{2} < \eta < \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right)^{-1}.$$

Par conséquent, les coefficients de $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ et $\int_0^t \int_{\Omega} h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$ dans (3.41) sont négatifs. Ajoutons et soustrayons le terme $\mu(h \square \nabla u)(t)$ au membre de droite de (3.41), ensuite utilisons l'estimation

$$\begin{aligned}
(h \square \nabla u)(t) &= \int_0^t \int_{\Omega} h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx \\
&\leq 2(1-l) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) - 2(1-l)\mu \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - (1-\varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \Phi(t) - \alpha \eta \Psi(t) - \mu (h \square \nabla u)(t) \\ &\quad - \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-l)}{2} - 2\mu \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx. \end{aligned}$$

Finalement, nous choisissons μ suffisamment petite telle que le coefficient entre crochet soit positif. Par conséquent, il existe une constante positive $\beta > 0$ telle que

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -\beta V(t), \quad t \geq 0.$$

On en déduit que

$$V(t) \leq V(0) e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

De la définition de $V(t)$ et de $e(t)$, on conclut l'assertion du Théorème 1.1. La preuve est ainsi achevée.

3.4 Le cas $a = 0$: (absence de dissipation)

Si h satisfait à la condition supplémentaire $|h'(t)| e^{\sigma t} \in L^1(0, \infty)$ pour certaines valeurs de $\sigma > 0$, alors il est possible de démontrer la décroissance exponentielle de l'énergie sans la dissipation interne qui est le cas $a = 0$. La situation est plus intéressante que le premier cas étudié à partir du moment que seule la dissipation faible présentée par le terme mémoire intervient. On aurait montré que le terme mémoire tout seul est suffisant pour conduire le système vers l'équilibre de manière exponentielle. La démonstration ressemble à celle faite dans le théorème précédent, il suffit de montrer comment compenser le terme $-\int_{\Omega} |u_t|^2 dx$ dans (2) qu'on perdra en choisissant $a = 0$. Pour arriver à cette fin premièrement on introduit les fonctionnelles

$$\begin{aligned} \Phi(t) &:= \int_{\Omega} u_t u dx \\ \Lambda(t) &:= - \int_{\Omega} u_t \int_0^t h(t-s) (u(t) - u(s)) ds dx \\ L(t) &:= e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Lambda(t) \end{aligned}$$

$$\Psi(t) = \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$$

où

$$H_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds$$

et on montre le résultat suivant:

Proposition 3.3: Il existe deux constantes positives ρ_1 et ρ_2 telles que

$$\rho_1 e(t) \leq L(t) \leq \rho_2 e(t) \text{ tout } t \geq 0 \quad (3.42)$$

Preuve: des inégalités

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ \Psi(t) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) h \square \nabla u(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{2} \bar{h} h \square \nabla u(t) \end{aligned}$$

où C_p est la constante de l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$L(t) \leq \frac{1}{2} [1 + \varepsilon + \eta] \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} [1 - \bar{h} + \varepsilon C_p] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} [1 + \eta \bar{h} C_p] h \square \nabla u(t)$$

et d'autre part on a :

$$L(t) \geq \frac{1}{2} [1 - \varepsilon - \eta] \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} [1 - \bar{h} - \varepsilon C_p] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} [1 - \eta \bar{h} C_p] h \square \nabla u(t)$$

Pour de petites valeurs de ε et μ telles que $\varepsilon \leq \min \left\{ 1, \frac{1 - \bar{h}}{C_p} \right\}$ et $\mu \leq \min \left\{ \frac{1}{\bar{h} C_p}, 1 - \varepsilon \right\}$, il existe deux constantes positives ρ_1 et ρ_2 telles que (3.42) soit satisfaite.

En posant

$$V(t) = e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Lambda(t)$$

$$W(t) = V(t) + \mu \Gamma(t) = e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \delta \Psi(t) + \eta \Lambda(t) + \mu \Gamma(t)$$

où

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \int_0^t \tilde{H}_{\sigma}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$$

avec

$$\tilde{H}_{\sigma}(t) = e^{-\sigma t} \int_t^{+\infty} |h'(s)| e^{\sigma s} ds.$$

On montre le résultat suivant:

Proposition 3.4: Il existe des constantes positives ξ_1, ξ_2 .. telles que

$$\xi_1 [E(t) + h \square \nabla u(t)] \leq W(t) \leq \xi_2 [E(t) + h \square \nabla u(t) + \Gamma(t)] \quad (3.43)$$

pour tout $t \geq 0$

Preuve:

Nous commençons par montrer le membre de gauche dans l'inégalité précédente, en effet nous avons d'après la proposition 3, ,

$$\begin{aligned} L(t) &= e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Lambda(t)(t) \geq \rho_1 e(t) \\ &\geq \rho_1 \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) \right] \\ &\geq \rho_1 \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (1-l) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) \right] \\ &\geq \min \left[\rho_1, \rho_1 (1-l), \frac{\rho_1}{2} \right] [E(t) + (h \square \nabla u)(t)] \end{aligned}$$

et

$$W(t) \geq L(t) \geq \xi_1 [E(t) + h \square \nabla u(t)]$$

Pour le membre de droite de (3.43), on écrit

$$\begin{aligned}
W(t) &= e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \delta \Psi(t) + \eta \Lambda(t) + \mu \Gamma(t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) + \varepsilon \Phi(t) + \delta \Psi(t) + \eta \Lambda(t) + \mu \Gamma(t) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{l}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) + \varepsilon \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \right] \\
&\quad + \delta \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx + \eta \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{2} \bar{h} h \square \nabla u(t) \right] + \mu \Gamma(t) \\
&\leq \frac{1}{2} [1 + \varepsilon + \eta] \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} [1 + \varepsilon C_p + \delta H_{\alpha}(0)] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{C_p}{2} \bar{h} \right) (h \square \nabla u)(t) + \mu \Gamma(t) \\
&\leq \xi_2 \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) + \Gamma(t) \right] \\
&\leq \xi_2 \left[E(t) + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) + \Gamma(t) \right]
\end{aligned}$$

Pour la décroissance de l'énergie calculons

$$\frac{dW}{dt} = \frac{de}{dt} + \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} + \delta \frac{d\Psi}{dt} + \eta \frac{d\Lambda}{dt} + \mu \frac{d\Gamma}{dt}$$

Tout d'abord rappelons que

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t).$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \leq \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \left[\int_0^t h(s) ds \right] \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\alpha \Psi(t) - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$$

d'autre part pour $\frac{d\Lambda}{dt}, \frac{d\Gamma}{dt}$ on peut écrire:

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} = & - \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\ & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds \right) \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right) dx \\ & + \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx - \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} = & \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) (\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \\ & + \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right)^2 dx + \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\ & - \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx. \\ \leq & (1-l) \delta_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\bar{h}}{4\delta_1} h \square \nabla u(t) + \bar{h} (h \square \nabla u(t)) + \delta_3 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ & - \frac{C_p h(0)}{4\delta_3} h' \square \nabla u(t) - \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \end{aligned}$$

On majore le premier terme de droite par:

$$\left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) (\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \leq (1-l) \delta_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\bar{h}}{4\delta_1} h \square \nabla u(t)$$

le second terme sera majoré par:

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right)^2 dx \leq \left(\int_0^t h(s) ds \right) h \square \nabla u(t)$$

et enfin le troisième terme:

$$\int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \leq \delta_3 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{C_p h(0)}{4\delta_3} h' \square \nabla u(t)$$

où δ_1, δ_3 sont des constantes positives.

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &\leq -\frac{1}{2}h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}(h' \square \nabla u)(t) \\
&+ \varepsilon \left[\int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \left[\int_0^t h(s) ds \right] \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \right] \\
&+ \delta \left[- \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx - \alpha \Psi(t) \right] \\
&+ \eta \left[(1-l) \delta_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\bar{h}}{4\delta_1} h \square \nabla u(t) + \left(\int_0^t h(s) ds \right) h \square \nabla u(t) \right] \\
&+ \eta \left[\left(\delta_3 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{C_p h(0)}{4\delta_3} h' \square \nabla u(t) \right] \\
&+ \mu \left[\tilde{H}_{\sigma}(0) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \sigma \Gamma(t) - \int_{\Omega} \int_0^t |h'(t-s)| |\nabla u(s)|^2 ds dx \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
(h \square \nabla u)(t) &= \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx \\
&\leq 2(1-l) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx
\end{aligned}$$

Ajoutons et soustrayant $\mu h \square \nabla u(t)$ à l'inégalité (3.44)

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &\leq - \left(\int_0^t h(s) ds - \varepsilon - \eta \delta_3 \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left(\frac{1}{2} h(t) + \frac{\varepsilon}{2} - (1-l) \delta_1 \eta - \mu \tilde{H}_{\sigma}(0) \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&- \sigma \Gamma(t) - \alpha \delta \Psi(t) - \left[-\eta \frac{\bar{h}}{4\delta_1} - \eta \bar{h} \right] h \square \nabla u(t) \\
&- \left[\frac{C_p h(0)}{4\delta_3} - \frac{1}{2} \right] h' \square \nabla u(t) + \mu h \square \nabla u(t) - \mu h \square \nabla u(t) \\
&- \left[\mu \int_{\Omega} \int_0^t |h'(t-s)| |\nabla u(s)|^2 ds dx - \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \right] \\
&- \delta \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.
\end{aligned}$$

et utilisons l'inégalité suivante

$$(h \square \nabla u)(t) \leq (2-l) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + (2-l) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$$

Supposons qu'il existe un nombre t_0 tel que pour tout $t \geq t_0 > 0$ on ait $\int_0^t h(s)ds \geq \int_0^{t_0} h(s)ds := h_0$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \leq & -(h_0 - \varepsilon - \eta\delta_3) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left(\frac{\varepsilon}{2} - (1-l)\delta_1\eta - \mu l - \mu(2-l) \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \sigma\Gamma(t) - \alpha\delta\Psi(t) \\ & - \left[\mu - \eta \frac{\bar{h}}{4\delta_1} - \eta\bar{h} \right] h\Box\nabla u(t) - \left[\left(\delta - \frac{\varepsilon\bar{h}}{2} - (2-l)\mu \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \right] \end{aligned}$$

Pour $\delta_1 = \frac{\bar{h}}{4}$, $\eta = \frac{\mu}{4\bar{h}}$, $\varepsilon = \frac{h_0}{4}$, $\delta_3 = \frac{h_0}{4\eta}$, et $\frac{\bar{h}h_0}{2} + (2-l)\mu < \frac{\delta}{2}$ nous avons

$$\frac{dW}{dt} \leq -\frac{h_0}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \sigma\Gamma(t) - \alpha\delta\Psi(t) - \frac{\mu}{2} h\Box\nabla u(t)$$

on en déduit qu'il existe une constante $C_1 = \min(h_0, \sigma, \alpha\delta, \mu) > 0$ telle que:

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} & \leq -C_1 \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \Gamma(t) + \delta\Psi(t) + \frac{1}{2} h\Box\nabla u(t) \right) \\ & \leq -C_1 \left[E(t) + \frac{1}{2} (h\Box\nabla u)(t) + \Gamma(t) \right] \leq -\frac{C_1}{\xi_2} W(t) \end{aligned}$$

Ce qui démontre que $W(t) \leq Ce^{-\frac{C_1}{\xi_2}t}$ et par la suite $E(t) \leq E(0)e^{-\kappa t}$ avec $\kappa > 0$.

*IV. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN PROBLEME EN
VISCOELASTICITE AVEC UN NOYAU PAS NECESSAIREMENT
DECROISSANT*

Dans ce chapitre nous considérons le problème étudié dans le chapitre trois avec des hypothèses sur le noyau h plus faibles que celles fréquemment utilisées dans la littérature. Nous démontrons la décroissance exponentielle de l'énergie associée à la solution. Plus précisément, les noyaux que nous considérons ici ne sont pas nécessairement exponentiellement décroissants ni même décroissant vers zéro comme ils étaient avant.

4.1 Introduction

On considère le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + au_t = \Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales, a est une constante nonnégative et la fonction de relaxation $h(t)$ sera précisée par la suite. Cependant, dans tous les travaux précédents, on supposait la condition suivante sur le noyau (non négatif):

$$h'(t) \leq -\gamma h(t), \quad \forall t \geq 0$$

pour un certain $\gamma > 0$.

Dans le chapitre trois, la condition précédente a été remplacée par

$$h'(t) \leq 0$$

et

$$e^{\alpha t} h(t) \in L^1(0, \infty) \text{ pour un certain } \alpha > 0.$$

Dans cette étude, nous améliorons ce résultat, en utilisant une fonctionnelle différente et des estimations différentes. Nous montrons que les solutions décroissent exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini dans le cas

$$h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et

$$\left[h'(t) + \gamma h(t) \right] e^{\alpha t} \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Il est clair par conséquent que nous permettons à $h'(t)$ de prendre des valeurs positives c'est à dire que notre noyau $h(t)$ peut osciller. La dissipation interne présente dans l'équation joue un rôle important dans la conduite exponentielle du système vers le repos.

Cependant cet amortissement n'est pas nécessaire. En effet, dans notre second résultat, nous montrons que la dissipation faible produite par le terme mémoire seul est suffisante pour stabiliser exponentiellement le système. Ceci est rendu possible par les nouvelles fonctionnelles que nous introduisons. Nous présentons ces deux résultats ici pour des raisons de comparaison et afin d'avoir une idée sur le prix payé lorsqu'on supprime la dissipation interne.

THEOREME4.1 :

On suppose que h est une fonction continue et $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Alors il existe une solution unique du problème (4.1) telle que:

$$u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

En fait on peut avoir plus de régularité en remplaçant le terme au_t par $g(u_t)$, où g est une fonction de classe C^1 et que les données initiales sont dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

L'hypothèse sur $h(t)$ que nous avons remplacé n'est pas nécessaire pour la démonstration de l'existence et de la dépendance continue par rapport aux données.

4.2 Comportement asymptotique

Pour simplifier, nous supposons que $a = 1$ et que le noyau $h(t)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait aux hypothèses suivantes:

$$(A1) \quad \int_0^\infty h(s)ds < 1$$

$$(A2) \quad h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad e^{\alpha t} [h'(t) + \gamma h(t)] \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{pour} \quad \alpha, \gamma > 0.$$

Nous notons par $l, \bar{l}, l_\alpha, \bar{l}_\alpha$ et $\bar{h}$ les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} l(t) &= h'(t) + \gamma h(t) \\ \bar{l} &= \int_0^\infty l(s)ds \\ l_\alpha &= e^{\alpha t} l(t) \\ \bar{l}_\alpha &= \int_0^\infty l_\alpha(s)ds \\ \bar{h} &= \int_0^\infty h(s)ds \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ensuite , nous définissons l'énergie classique associée à (4.1) par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

Par différentiation, nous obtenons

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx.$$

Il est clair que la dérivée de l'énergie classique est de signe non défini, cependant , en posant:

$$(h \square \nabla u)(t) = \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx,$$

on peut vérifier que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h \square \nabla u)(t) &= - \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

On peut facilement voir que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) \right] \\ = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t). \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'en définissant l'énergie modifiée par:

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t), \quad (4.3)$$

on trouve:

$$e'(t) = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t). \quad (4.4)$$

Dans les études précédentes, on supposait que $h'(t) \leq 0$. Par conséquent, à partir de (4.4), nous voyons facilement que $e'(t) \leq 0$. Ceci entraîne que

$$e(t) \leq e(0) \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Dans notre cas, nous ne supposons pas que $h'(t) \leq 0$. En fait nous permettons à la fonction $h(t)$ d'osciller.

Afin de démontrer notre résultat, nous avons besoin d'introduire les fonctionnelles auxiliaires suivantes:

$$\Phi(t) := \int_{\Omega} u_t u dx \tag{4.5}$$

et

$$\Psi(t) := \int_{\Omega} \int_0^t L_{\alpha}(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx =: (L_{\alpha} \square \nabla u)(t) \tag{4.6}$$

où

$$L_{\alpha}(t) := e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} l_{\alpha}(s) ds = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} l(s) e^{\alpha s} ds \tag{4.7}$$

et $l(t)$ est définie dans (4.2). De plus, nous considérons la fonctionnelle

$$\begin{aligned} V(t) := & e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Psi(t) - \eta \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ & + 2\eta \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \end{aligned} \tag{4.8}$$

pour certaines constantes positives ε et η qui seront déterminées par la suite.

PROPOSITION 4.2 :

Il existe des constantes positives ε_0 , η_0 , ξ_1 et ξ_2 telles que:

$$\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \xi_1 E(t) \leq V(t) \leq \xi_2(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)) \quad (4.9)$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, et $0 < \eta < \eta_0$.

Preuve:

Nous commençons par montrer le côté gauche dans l'inégalité (4.9). Pour la fonctionnelle $\Phi(t)$, il est clair que :

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \quad (4.10)$$

où C_p est la constante de Poincaré. Le dernier terme dans (4.8) peut être estimé par:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ & \leq \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) [(\nabla u(s) - \nabla u(t)) + \nabla u(t)] ds dx \\ & = \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) [(\nabla u(s) - \nabla u(t))] ds dx \\ & \leq \left(\delta_1 + \int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\delta_1} \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \Psi(t) \end{aligned}$$

Pour un certain $\delta_1 > 0$. Notons qu'à partir de (4.2) et (4.7) , nous avons

$$\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} l(s) e^{\alpha s} ds =: \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \leq \left(\delta_1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{4\alpha\delta_1} \Psi(t). \quad (4.11)$$

En vertu de (4.10) et (4.11), nous obtenons à partir de (4.8).

$$\begin{aligned} V(t) \geq e(t) + \eta \left(1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right) \Psi(t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ - \left[\frac{3\eta\bar{l}_\alpha}{\alpha} + 2\eta\delta_1 + \frac{\varepsilon C_p}{2} \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (4.3) de $e(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} V(t) \geq \eta \left(1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right) \Psi(t) + \frac{1-\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (h\Box\nabla u)(t) \\ + \left[\frac{1}{2}(1-\bar{h}) - \frac{3\eta\bar{l}_\alpha}{\alpha} - 2\eta\delta_1 - \frac{\varepsilon C_p}{2} \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Il est clair que, si nous choisissons

$$\begin{aligned} \delta_1 = \bar{l}_\alpha/\alpha, \quad \eta < (1-\bar{h})\alpha/20\bar{l}_\alpha \quad \text{et} \\ \varepsilon < \min \{1, (1-\bar{h})/2C_p\}, \end{aligned}$$

nous aurons

$$V(t) \geq \xi_1 E(t) + \frac{1}{2} (h\Box\nabla u)(t)$$

pour une certaine constante ξ_1 .

D'autre part, en tenant compte de (4.10) et (4.11) (avec $\delta_1 = 1/2$) dans (4.8), nous aboutissons à

$$\begin{aligned} V(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon C_p}{2} + \eta \left(1 + \frac{2\bar{l}_\alpha}{\alpha} \right) \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ + \frac{1}{2} (h\Box\nabla u)(t) + \eta \left(1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} \right) \Psi(t), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$V(t) \leq \xi_2 (E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t))$$

pour une certaine constante positive ξ_2 , et cela achève la démonstration.

Nous sommes maintenant en mesure de poser et de démontrer notre premier résultat.

THEOREME 4.3:

Supposons que les hypothèses (A1) et (A2) sont satisfaites, et que les données initiales (u_0, u_1) vérifient l'inégalité $E(0) > 0$ et $\bar{l}_\alpha$ est défini comme ci-dessus. Alors l'énergie classique $E(t)$ associée à l'équation (4.1) décroît exponentiellement vers zéro: il existe deux constantes positives C et $\beta > 0$ telles que

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve:

La différentiation de (4.5) et (4.6) le long de la solution de (4.1), donne

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} u_{tt} u dx \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(t)}{dt} &= -\alpha \Psi(t) - (l \square \nabla u)(t) \\ &\quad + 2 \left(\int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla u_t(t) dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla u_t(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_t(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx &= \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \right] \\ &\quad - L_\alpha(0) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En utilisant (4.14) dans (4.13), nous voyons que

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\Psi(t) - \left(\int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \right] \\
&= -\alpha \Psi(t) - (l \square \nabla u)(t) + 2L_\alpha(0) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - L_\alpha(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
& \quad - 2\alpha \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Maintenant en différentiant la fonctionnelle $V(t)$ (voir (4.8)) par rapport au temps , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{dV(t)}{dt} = \frac{de(t)}{dt} + \varepsilon \frac{d\Phi(t)}{dt} \\
& + \eta \frac{d}{dt} \left[\Psi(t) - \left(\int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

En tenant compte de (4.4), (4.12) et (4.15) dans (4.16), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{dV(t)}{dt} \leq -(1-\varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - (\varepsilon - 2\eta L_\alpha(0) + \eta L_\alpha(t)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) - \varepsilon \int_{\Omega} u_t u dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx - \alpha \eta \Psi(t) \\
& - \eta (l \square \nabla u)(t) - 2\eta \alpha \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \\
& - 2\eta \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Notons qu'à partir de (4.2) et (4.7), nous avons $L_\alpha(0) = \int_0^\infty l_\alpha(s) ds = \bar{l}_\alpha$.

Par la suite, nous utilisons l'estimation (4.11) et des estimations similaires pour le cinquième terme du membre de droite de la relation (4.17), précisément

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx &\leq \left(\delta_2 + \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{4\delta_2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) (h \square \nabla u)(t), \end{aligned} \quad (4.18)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx &\leq \left(\delta_3 + \int_0^t l(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{4\delta_3} \left(\int_0^t l(s) ds \right) (l \square \nabla u)(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

pour certaines constantes δ_2 et δ_3 . En ce qui concerne le quatrième terme nous adoptons l'estimation

$$\int_{\Omega} u_t u dx \leq \delta_4 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{4\delta_4} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx, \quad \delta_4 > 0. \quad (4.20)$$

En utilisant (4.18) – (4.20) dans (4.17), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -(1 - \varepsilon - \varepsilon\delta_4) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) + \eta\alpha \left(\frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\alpha\delta_1} - 1 \right) \Psi(t) \\ &- \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon C_p}{4\delta_4} - \varepsilon(\delta_2 + \bar{h}) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_{\alpha} - 2\eta\delta_3 \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &- \eta \left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3} \right) (l \square \nabla u)(t) + \frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2} (h \square \nabla u)(t). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ici nous avons utilisé le fait que

$$\bar{l} = \int_0^{+\infty} l(s) ds \leq \int_0^{+\infty} l(s) e^{\alpha s} ds = \bar{l}_{\alpha}.$$

Et comme $h'(t) = l(t) - \gamma h(t)$, nous déduisons de (4.21) que

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -[1 - \varepsilon(1 + \delta_4)] \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}(l \square \nabla u)(t) - \frac{\gamma}{2}(h \square \nabla u)(t) \\ &\quad - \left[\varepsilon \left(1 - \bar{h} - \delta_2 - \frac{C_p}{4\delta_4} \right) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_\alpha - 2\eta\delta_3 \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &\quad - \eta\alpha \left(1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right) \Psi(t) + \frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2} (h \square \nabla u)(t) - \eta \left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3} \right) (l \square \nabla u)(t). \end{aligned}$$

De manière  quivalente,

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -[1 - \varepsilon(1 + \delta_4)] \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left[\eta \left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3} \right) - \frac{1}{2} \right] (l \square \nabla u)(t) \\ &\quad - \left[\varepsilon \left(1 - \bar{h} - \delta_2 - \frac{C_p}{4\delta_4} \right) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_\alpha - 2\eta\delta_3 \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\gamma - \frac{\varepsilon\bar{h}}{2\delta_2} \right] (h \square \nabla u)(t) - \eta\alpha \left(1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right) \Psi(t). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Finalement, nous choisissons

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \bar{l}_\alpha / \alpha \\ \delta_2 &= (1 - \bar{h}) / 4 \\ \delta_3 &= \bar{l} \\ \delta_4 &= C_p / (1 - \bar{h}) \\ \eta &= 1 \\ \varepsilon &= \min \left\{ \frac{1 - \bar{h}}{2(1 - \bar{h} + C_p)}, \frac{1 - \bar{h}}{4} \gamma \right\} \end{aligned}$$

Alors, si, de plus, nous supposons que $\bar{l}_\alpha < \frac{1 - \bar{h}}{20} \varepsilon$, nous déduisons de (4.22) que

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -C_1 (E(t) + \Psi(t) + (h \square \nabla u)(t))$$

pour une certaine constante positive C_1 .

En vertu de la proposition (4.1) (le membre de droite de l'inégalité) , nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &\leq -\frac{C_1}{\xi_2}V(t) \\ &=: -\beta V(t), \quad t \geq 0\end{aligned}$$

et finalement nous déduisons que

$$V(t) \leq V(0)e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Notons que par l'hypothèse $E(0) > 0$ faite dans le précédent théorème, nous avons $V(0) > 0$. Ensuite, de la proposition 4.2 (le membre de gauche de l'inégalité), nous concluons l'assertion du théorème à savoir:

$$E(t) \leq \frac{V(0)}{\xi_1}e^{-\beta t}, \quad t \geq 0,$$

ce qui achève la démonstration.

4.3 LE CAS $a = 0$

Dans cette section, nous considérons le cas $a = 0$, c'est à dire que nous étudions le problème (4.1) sans l'amortissement (faible) u_t . Nous montrerons que la dissipation faible produite par le terme intégral seul est suffisante pour conduire exponentiellement le système vers l'état de repos (ou d'équilibre).

Ici nous considérons la fonctionnelle

$$W(t) = V(t) + \lambda \Theta(t) + \mu \Gamma(t) \quad (4.23)$$

où $V(t)$ est comme dans (4.8),

$$\Theta(t) = \int_{\Omega} u_t \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \quad (4.24)$$

et

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \quad (4.25)$$

avec

$$H_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds.$$

Notons par $\bar{h}_{\alpha} = \int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds$. Pour démontrer notre deuxième résultat, nous avons besoin de la proposition suivante:

PROPOSITION 4.4:

Il existe des constantes positives ε_0 , η_0 , λ_0 , ξ_3 et ξ_4 telles que:

$$\xi_3 (E(t) + (h\Box\nabla u)(t)) \leq W(t) \leq \xi_4 (E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t) + \Gamma(t))$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < \eta < \eta_0$ et $0 < \lambda < \lambda_0$.

Preuve:

Le membre de gauche de (4.9) et l'estimation

$$\Theta(t) \leq \kappa_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p \bar{h}}{4\kappa_1} (h\Box\nabla u)(t), \quad \kappa_1 > 0$$

impliquent que

$$\begin{aligned} W(t) &\geq \xi_1 E(t) - \lambda \kappa_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\lambda C_p \bar{h}}{4\kappa_1} (h\Box\nabla u)(t) \\ &\quad + \mu \Gamma(t) + \frac{1}{2} (h\Box\nabla u)(t). \end{aligned}$$

D'après la définition de $E(t)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} W(t) &\geq \left(\frac{\xi_1}{2} - \lambda \kappa_1 \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{\xi_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda C_p \bar{h}}{4\kappa_1} \right) (h\Box\nabla u)(t) + \mu \Gamma(t). \end{aligned}$$

En choisissant $\kappa_1 = \lambda C_p \bar{h}$ et $\lambda^2 < \frac{\xi_1}{2C_p \bar{h}}$, nous obtenons le membre de gauche de l'inégalité de la proposition. Pour l'autre inégalité, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} W(t) &\leq \xi_2 (E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{\lambda C_p \bar{h}}{2} (h\Box\nabla u)(t) + \mu \Gamma(t), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

THEOREME 4.5:

Supposons que les hypothèses (A1) et (A2) sont satisfaites et que les données initiales (u_0, u_1) vérifient l'inégalité $E(0) > 0$. Supposons de plus que les quantités $\bar{h}_\alpha$ et $\bar{l}_\alpha$ sont suffisamment petites .

Alors l'énergie classique $E(t)$ de (1) décroît exponentiellement vers zéro, c'est à dire qu' il existe deux constantes positives C et β telles que

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve:

Dans le cas $(a = 0)$, nous avons

$$\frac{de}{dt}(t) = -\frac{1}{2}h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}(h' \square \nabla u)(t), \quad (4.26)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} u_{tt} u dx \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Par conséquent, de (4.15), (4.16), (4.26) et (4.27) nous voyons que :

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - (\varepsilon + \frac{1}{2}h(t) + \eta L_\alpha(t) - 2\eta L_\alpha(0)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}(h' \square \nabla u)(t) + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx - \alpha \eta \Psi(t) \\ &\quad - \eta(l \square \nabla u)(t) - 2\eta \alpha \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ &\quad - 2\eta \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Une différentiation de l'expression dans (4.24) et (4.25) par rapport à t donne

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(t)}{dt} &= - \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds \right) \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right) dx \\ &+ \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx - \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \end{aligned} \quad (4.29)$$

et

$$\frac{d\Gamma}{dt}(t) = -\alpha\Gamma(t) - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx + \bar{h}_{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 dx, \quad (4.30)$$

respectivement. En tenant compte de (4.28) – (4.30) dans la dérivée de $W(t)$ (voir (4.23), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= - \left(\lambda \int_0^t h(s) ds - \varepsilon \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) - \alpha \eta \Psi(t) \\ &- \alpha \mu \Gamma(t) - \left(\varepsilon + \eta L_{\alpha}(t) - 2\eta L_{\alpha}(0) + \frac{1}{2} h(t) \nabla u(t) - \mu \bar{h}_{\alpha} \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds \right) \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right) dx \\ &- \lambda \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx - \eta (l \square \nabla u)(t) \\ &- 2\eta \alpha \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ &- 2\eta \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx + \lambda \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\ &- \mu \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx. \end{aligned}$$

Nous adoptons les estimations

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx &\leq \delta_2 \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{4\delta_2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx, \quad \delta_2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx &\leq \delta_5 \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &+ \frac{\bar{h}}{4\delta_5} (h \square \nabla u)(t), \quad \delta_6 > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds \right) \left(\int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right) dx \\ &\leq \kappa_2 \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds \right)^2 dx + \frac{\bar{h}}{4\kappa_2} (h \square \nabla u)(t), \quad \kappa_2 > 0. \end{aligned}$$

En vertu de ces estimations, des relations (4.11) et (4.19), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &\leq - \left(\lambda \int_0^t h(s) ds - \varepsilon \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) - \alpha \eta \left(1 - \frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\alpha\delta_1} \right) \Psi(t) \\ &- (\varepsilon - \varepsilon\delta_2 - 6\eta\bar{l}_{\alpha} - 2\eta\alpha\delta_1 - 2\eta\delta_3 - \mu\bar{h}_{\alpha} - \lambda\delta_5) \int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 dx \\ &- \eta \left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3} \right) (l \square \nabla u)(t) + \frac{\lambda\bar{h}}{4} \left(\frac{1}{\delta_5} + \frac{1}{\kappa_2} \right) (h \square \nabla u)(t) - \alpha\mu\Gamma(t) \\ &+ \left(\frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2} + \lambda\kappa_2\bar{h} - \mu \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx. \end{aligned} \tag{4.31}$$

En posant

$$\delta_1 = \bar{l}_{\alpha}/\alpha$$

$$\delta_2 = 1/2$$

$$\delta_3 = \bar{l}$$

$$\delta_5 = \varepsilon/6\lambda$$

$$\kappa_2 = \varepsilon/\lambda$$

et en remplaçant $h'(t)$ par $l(t) - \gamma h(t)$ dans (4.31), nous trouvons

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt}(t) \leq & - \left(\lambda \int_0^t h(s) ds - \varepsilon \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\alpha \eta}{2} \Psi(t) - \frac{1}{2} (\eta - 1) (l \square \nabla u)(t) \\
& - \left(\frac{\varepsilon}{3} - 10 \eta \bar{l}_{\alpha} - \mu \bar{h}_{\alpha} \right) \int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 dx - \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{7 \lambda^2 \bar{h}}{2 \varepsilon} \right) (h \square \nabla u)(t) - \alpha \mu \Gamma(t) \\
& - \left(\mu - \frac{3 \varepsilon \bar{h}}{2} \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx + \lambda \int_{\Omega} u_t \int_0^t l(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\
& - \lambda \gamma \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx.
\end{aligned}$$

Nous supposons que $t \geq t_0 > 0$ et donc

$$\int_0^t h(s) ds \geq \int_0^{t_0} h(s) ds =: h_0$$

Ensuite à l'aide de l'estimation

$$\int_{\Omega} u_t \int_0^t l(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \leq \frac{h_0}{3} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{3 C_p \bar{l}}{4 h_0} (l \square \nabla u)(t)$$

et

$$\int_{\Omega} u_t \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \leq \frac{h_0}{3 \gamma} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{3 \gamma C_p \bar{h}}{4 h_0} (h \square \nabla u)(t)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
W'(t) \leq & - \left(\frac{\lambda h_0}{3} - \varepsilon \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\alpha \eta}{2} \Psi(t) - \frac{1}{2} \left(\eta - 1 - \frac{3 \lambda C_p \bar{l}}{4 h_0} \right) (l \square \nabla u)(t) \\
& - \left(\frac{\varepsilon}{3} - 10 \eta \bar{l}_{\alpha} - \mu \bar{h}_{\alpha} \right) \int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 dx - \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{7 \lambda^2 \bar{h}}{2 \varepsilon} - \frac{3 \lambda \gamma^2 C_p \bar{h}}{2 h_0} \right) (h \square \nabla u)(t) \\
& - \alpha \mu \Gamma(t) - \left(\mu - \frac{3 \varepsilon \bar{h}}{2} \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h_0}{\bar{h}} \min \left\{ \frac{1}{3C_p\gamma}, \frac{\gamma}{63} \right\} \\ \varepsilon &= \lambda h_0 / 6 \\ \eta &= 2 + \frac{3\lambda C_p \bar{l}}{2h_0} \\ \mu &= \frac{\lambda h_0 (9\bar{h}_\alpha^2 + 1)}{36\bar{h}_\alpha}\end{aligned}$$

Il apparait que si on suppose $\bar{h}_\alpha < 1/3$ et $\bar{l}_\alpha \leq \varepsilon/60\eta$, nous aboutissons à l'estimation suivante:

$$\frac{dW}{dt}(t) \leq -C_2 (E(t) + (h\Box\nabla u)(t) + \Psi(t) + \Gamma(t))$$

pour une certaine constante positive C_2 . Du membre de droite de la relation dans la proposition 3 , nous trouvons

$$\frac{dW}{dt}(t) \leq -\frac{C_2}{\xi_4} W(t) =: -\beta W(t).$$

Il est clair que, $W(0) = V(0) > 0$. Et donc,

$$W(t) \leq W(0)e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

L'autre inégalité dans la proposition 2.3 donne

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\xi_3} e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0 > 0,$$

Ce qui achève la démonstration.

V. EQUATION DES ONDES AVEC DES CONDITIONS de TYPE CAUCHY
VENTCEL

5.1 Introduction

On considère le domaine suivant : $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ou $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$
 posons $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[$ et $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[$ et $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma$
 Soit le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + a(x) u_t + b(x) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, \infty[\\ v_{tt} - \Delta_T v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + c(x) v_t = 0 & \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[\\ u|_{\Sigma} = v & \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\ u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \\ v(0, x) = v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x) & \end{array} \right. \quad (5.1)$$

l'énergie classique associée est

$$E(t, u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\sigma \quad (5.2)$$

Dans cette partie nous supposons que $a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$ et $c(x) = 1$ soit
 l'équation des ondes avec une dissipation linéaire dans le domaine et sur le bord Γ_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, \infty[\\ v_{tt} - \Delta_T v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + v_t = 0 & \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[\\ u|_{\Sigma} = v & \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\ u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \\ v(0, x) = v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x) & \end{array} \right. \quad (5.3)$$

On multiplie la première équation du problème (4.3) par u_t et on integre sur Ω , il vient :

$$\begin{aligned} (u_{tt}, u_t)_{0,\Omega} - (\Delta u, u_t)_{0,\Omega} + (u_t, u_t)_{0,\Omega} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\sigma &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\sigma &= 0 \end{aligned}$$

mais $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -v_{tt} + \Delta_T v - v_t$ sur Γ_1 et $u|_{\Sigma} = v$; $u_t|_{\Sigma} = v_t$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} &= - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \{-v_{tt} + \Delta_T v - v_t\} v_t d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma - \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T v_t d\sigma - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\sigma \right\} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma$$

En posant

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma$$

on remarque que

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma$$

Si on suppose de plus que $E(0) > 0$, il s'ensuit que

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t > 0 \tag{5.4}$$

ce qui montre que l'énergie associée au problème (4.3) est décroissante.

VI. *CONCLUSION et PERSPECTIVES*

Dans ce travail, nous avons montré que la dissipation faible produite par le terme mémoire seul est suffisante pour qu'on ait décroissance exponentielle et ramener le système vers l'état d'équilibre. Ceci est rendu possible par les nouvelles fonctionnelles que nous avons introduit. Dans le chapitre cinq, nous avons étudié la décroissance de l'énergie associée à la solution de l'équation des ondes avec des conditions de Cauchy Ventcel avec une dissipation linéaire dans le domaine et sur une partie de la frontière. On projete d'étudier le cas de l'équation avec un terme mémoire localisé sur tout le domaine et le cas où il est localisé sur une partie du domaine avec la condition sur le noyau .

$$h'(t) \leq -\gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Un autre cas intéressant, c'est d'étudier le cas où le noyau h n'est pas nécessairement décroissant c'est à dire vérifiant les conditions suivantes:

$$h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et

$$[h'(t) + \gamma h(t)] e^{\alpha t} \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

VII. REFERENCES

- [1] **Berger M.Gostiaux B.**, Géométrie différentielle. Variétés, courbes et surfaces,
- [2] **Cartan H.**, Cours de calcul différentiel. Hermann Paris.
- [3] **Cavalcanti M.M., Aassila M and Soriano J.A.**, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, SIAM J. Control Opt., 38 (5) (2000) 1581-1602.
- [4] **Clark M. R.**, *Existence of solutions for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in a non-cylinder domain*, Internat. J. Math. et Math. Sci. Vol. 19 No 1 (1996) 151-160.
- [5] **Dafermos, C.M:** *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. 37 (1970) 297-308
- [6] **Engler H.**, Weak solutions of a class of quasilinear hyperbolic integrodifferential equations describing viscoelastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal., 113 (1991), 1-38.
- [7] **Fabrizio M and Morro A.**, "Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity", SIAM Stud. Appl. Math., Philadelphia 1992.
- [8] **Georgiev V and Todorova G.**, *Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms*, J. Diff. Eqns.109 12 (1994), 295-308.
- [9] **Heminna A.**, Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi structures, thèse, U.S.T.H.B, Alger .200
- [10] **Hannsgen K.B and Wheeler R. L. ,** Behavior of the solutions of a Volterra equation as a parameter tends to infinity, J. Integral Eqs., 7 (1984), 229-237.
- [11] **Hrusa W.J and Renardy M**, A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988),257-269.
- [12] **HrusaW.J**, Global existence and asymptotic stability for a nonlinear hyperbolic Volterra equation with large initial data, SIAM J. Math Anal., 16 (1985), 110-134.
- [13] **Hrusa W.J and Renardy M.**, On wave propagation in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math., 43 (1985), 237-254.

- [14] **Hrusa W.J and Renardy M.**, On a class of quasilinear partial integrodifferential equations with singular kernels, J. Diff. Eqs., 64 (1986), 195-220.
- [15] **Hrusa W.J and Renardy M.**, A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988) 257-269.
- [16] **Khac Khoan Vo**, Distributions , Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles, Tome I Vuibert, Paris
- [17] **Khac Khoan Vo**, Distributions , Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles, Tome II Vuibert, Paris
- [18] **Khemmoudj A.**, Stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires. Thèse, USTHB, Alger 2007
- [19] **Khemmoudj A., Medjden M.**, Exponential decay for the semilinear Cauchy-Ventcel problem with localized damping. Bol. Soc. Mat. 22 2 (2004); 97-116
- [20] **Lions, J.L., E. Magenes**, Non homogeneous boundary value problem and applications Volume I, Spring Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1972
- [21] **Levine H.A.**, *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the forme $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$* , Trans. Amer. Math.Soc. 192 (1974), 1-21.
- [22] **Levine H.A., P. Pucci, and J. Serrin**, *Global existence and global non existence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation*, to appear on J. Math. Anal. Appl.
- [23] **Londen S.O.**, An existence result for a Volterra equation in a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., 235 (1978), 285-304.
- [24] **Milota J., J. Nečas and V. Šverák**, On weak solutions to a viscoelasticity model, Comment. Math. Univ. Carolinae, 31 No 3 (1990), 557-565.
- [25] **Medjden M and Tatar N.-e.**, On the wave equation with a temporal non-local term and a weak dissipation, Dynamic Systems and Applications December 2007, Volume16, Number 4.

- [26] **Medjden M and Tatar N.-e.**, Asymptotic behavior for a viscoelastic problem with not necessarily decreasing kernel. *Applied Mathematics and Computation* 167, (2005)1221-1235.
- [27] **Prüss J.**, "Evolutionary Integral Equations and Applications", Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [28] **Pata V and Zucchi A.**, Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 11 (2001) 505-529.
- [29] **Rivera Munoz , J.E:** *Asymptotic behavior in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math*, III(4) (1994), 629-648.
- [30] **Renardy M, Hrusa W.J and Nohel J.A.**, "Mathematical Problems in Viscoelasticity", in *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics* No. 35, John Wiley and Sons, NewYork 1987.
- [31] **Renardy M.**, Some remarks on the propagation and non-propagation of discontinuities in linearly viscoelastic liquids, *viscoelastic liquids, Rheol. Acta*, 21 (1982), 251-254.
- [32] **Renardy M.**, Coercive estimates and existence of solutions for a model of one-dimensional viscoelasticity with a nonintegrable memory function, *J. Integral Eqs. Appl.*, 1 (1988), 7-16.
- [33] **Renardy M., Hrusa W.J and Nohel J.A.**, "Mathematical Problems in Viscoelasticity", in *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics* No. 35, John Wiley and Sons, New York 1987.
- [34] **Rudin W.**, *Analyse réelle et complexe*. Masson. 1978
- [35] **Todorova G.**, *Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms*, *C. R. Acad. Sci. Paris* (1998), 191-196.

