

N° d'ordre : 76/2017-C/PH

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE PHYSIQUE**

**Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat
en physique**

Spécialité : Physique théorique

Par

Khiredine MEBROUK

THÈME

**Contribution de potentiel d'échange et de corrélation
sur les ondes ioniques acoustiques quantiques**

Soutenu publiquement le 08/11/2017, devant le jury composé de :

Mr	A.C. CHAMI	Professeur à l'USTHB	Président
Mr	M. TRIBECHE	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
Mme	F.Z. IGHEZOU	Professeur à l'USTHB	Examinatrice
Mr	Y. BOUDOUMA	Professeur à l'USTHB	Examineur
Mr	K. AOUTOU	MCA à l'USTHB	Examineur
Mr	S. NAIT AMOR	Maitre de recherche A/ Habilité au CRAAG	Examineur

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du groupe de Physique des Plasmas du Laboratoire de Physique Théorique, de la Faculté de Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMEDIENNE (U.S.T.H.B).

Je remercie vivement le Professeur **Mouloud TRIBECHE**, mon directeur de thèse, avec qui j'ai pris grand plaisir à travailler, dans la rigueur et la bonne humeur. Outre la confiance qu'il m'a témoignée, il a constamment suivi la progression de mon travail pour le faire mener à bien et à terme. Qu'il trouve ici et à travers ces quelques lignes l'expression de mon profond respect et de ma très haute considération.

Je remercie vivement le Professeur **Ahmed Chafik CHAMI**, du laboratoire des sciences nucléaires et interaction rayonnement matière, qui nous a honorés en acceptant de présider le jury de la présente thèse.

Mes remerciements les plus vifs vont également au Professeur **Fatima Zohra IGHEZOU**, du laboratoire de Physique Théorique, au Professeur **Youcef BOUDOUMA**, du laboratoire des sciences nucléaires et interaction rayonnement matière, au Docteur **Kamel AOUTOU**, Maître de conférences du laboratoire de Physique Théorique ainsi qu'au Docteur **Samir NAIT AMOR**, Maître de recherche Habilité au CRAAG pour l'intérêt qu'ils ont manifesté et porté à ce travail en acceptant de prendre part au jury de la présente thèse.

Je tiens à remercier tous les enseignants qui m'ont encadré durant ma formation, ils m'ont beaucoup apporté et ont toujours su m'encourager. Ils ne m'ont pas tout appris mais m'ont donné l'envie de tout connaître.

Mes vifs remerciements vont également à tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et particulièrement aux membres de l'équipe avec laquelle j'ai travaillé pour leur amitié et leur disponibilité (Amour, Younsi, Mustapha, Boubakour, Mayout, Ourabah, Ghebache, Djebarni, Bentabet, Lourek).

Je remercie tous mes amis et camarades. Notamment, Bouzit Omar, Benkhelifa Amine, Cherfi Zouhir, Ainsi que tous les étudiants que j'ai eu le plaisir de connaître et de côtoyer durant mon cursus universitaire.

Je remercie mon ami ZEMIH Reda. C'est lui qui m'a encouragé et aidé à reprendre mes études. C'est, en partie, grâce à lui que cet espoir devient réalité.

Mes derniers remerciements, et pas des moindres, vont naturellement à ma femme SAIDI Ghenima et mes enfants. Ils m'ont toujours poussé vers le haut et m'ont encouragé à ne jamais abandonner. Je les remercie pour leur patience et leurs encouragements, sans cesse renouvelés.

Table des matières

Introduction	6
1 Généralités sur les plasmas	9
1.1 Définition et propriétés	9
1.2 Classification des plasmas	10
1.3 Dynamique des plasmas	11
1.4 Physique statistique	11
1.4.1 Statistique extensive	11
1.4.2 Statistique non extensive	12
1.5 Approche cinétique	12
1.6 Echelles caractéristiques	15
1.6.1 Fréquence plasma électronique	15
1.6.2 Fréquence plasma ionique	15
1.6.3 Longueur de Debye électronique	16
1.6.4 Longueur de Debye ionique	16
1.6.5 Quasi-neutralité de la charge électrique	16
1.7 Plasma poussiéreux	16
1.8 Onde acoustique ionique	17
1.9 Onde acoustique ionique quantique	20
1.10 Modes acoustiques poussiéreux	21
1.10.1 Onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW)	21
1.10.2 Onde acoustique poussiéreuse (DAW)	22
2 Plasmas quantiques	23
2.1 Plasma quantique et approche hydrodynamique	23
2.2 Système Wigner-Poisson	26

2.3	Validité du système Wigner-Poisson	27
2.4	Modèle fluide pour un plasma quantique	28
2.4.1	Modèle de Schrödinger-Poisson (S-P)	28
2.4.2	Modèle fluide quantique	29
2.5	Statistique quantique	31
2.6	Gaz de Fermi et distribution de Fermi-Dirac	31
2.7	Gaz complètement dégénéré ($T = 0$)	32
2.8	Potentiel chimique	32
2.9	Application de la statistique de Fermi-Dirac aux plasmas	33
2.10	Piégeage des électrons dans un champ électrostatique	33
2.10.1	Calcul de la densité des particules	34
2.11	Piégeage des électrons dans un champ électrostatique et un champ magnétique	34
3	Théorie de la fonctionnelle de la densité (DFT)	36
3.1	Introduction	36
3.2	Modèle de Thomas et Fermi	37
3.3	Quelques corrections sur l'approche de Thomas-Fermi	39
3.4	Equation de Schrödinger et fonction d'onde	43
3.4.1	Position du problème	43
3.5	Théorèmes de Hohenberg-Kohn	45
3.6	Equations de Kohn et Sham	46
4	Effet de l'échange et de la corrélation sur l'énergie du soliton acoustique ionique quantique	49
4.1	Introduction	49
4.2	Modèle mathématique et équations de base	50
4.3	Régime faiblement non linéaire	53
4.3.1	Equation de Korteweg-de Vries (K-dV)	53
4.4	Conclusion	58
5	Effets du potentiel d'échange et de corrélation sur les structures solitaires acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques	59
5.1	Introduction	59
5.2	Equations de base	60
5.3	Régime faiblement non linéaire	62

5.3.1	Etablissement de l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV)	62
5.4	Régime de l'amplitude arbitraire	66
5.5	Conclusion	70
6	Effet du piégeage des électrons quantiques sur la propagation des ondes acoustiques ioniques dans l'approche non extensive	72
6.1	Introduction	72
6.2	Equations de base	74
6.2.1	Calcul de la densité électronique	74
6.3	Application: onde acoustique ionique solitaire	77
6.4	Pseudo-potentiel de Sagdeev	78
6.5	Régime faiblement non linéaire	85
6.5.1	Établissement de l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV)	85
6.6	Conclusion	87
	Conclusion générale	89
	Annexe	91

Introduction

La propagation des ondes dans un plasma constitue un outil essentiel pour maîtriser la dynamique des particules d'un plasma, ces ondes font l'objet d'une large investigation sur le plan théorique et expérimental. Il y a eu au fil du temps l'introduction et l'utilisation de beaucoup de modèles dans le but d'étudier et d'expliquer certains phénomènes du plasma, parmi lesquels le modèle cinétique de Landau et le modèle fluide qui ont permis la mise en évidence d'une multitude de modes de propagation des ondes dans le plasma. Cependant, certaines de ces ondes n'ont pas pu être expliquées suivant ces modèles. Lorsque les dimensions du système plasma deviennent de l'ordre de la longueur de de Broglie des particules constituant ce plasma, certains modes ne peuvent être expliqués avec les modèles fluide et cinétique classiques. Les dimensions du système nous obligent à prendre en considération l'aspect quantique et ses effets. Plusieurs études sont allées dans ce sens. La prise en compte de ces effets a permis l'introduction d'un nouveau modèle pour décrire la propagation des ondes affectées par les divers effets quantiques. Parmi ces modèles, le modèle hydrodynamique quantique où l'équation de Vlasov, dont découlent les équations du modèle fluide, est remplacée par l'équation d'évolution de la fonction de distribution de Wigner [1]. Ainsi, les effets quantiques du système sont pris en considération. L'introduction du modèle hydrodynamique quantique ou QHD a permis la mise en évidence de plusieurs nouveaux modes de propagation. Parmi eux, le mode acoustique quantique l'analogue du mode acoustique classique. Ce modèle n'a cessé d'être amélioré par l'introduction d'autres corrections quantiques. La prise en considération de nouveaux effets quantiques permet une approche plus précise pour l'étude des plasmas quantiques. Notons que l'approche hydrodynamique quantique est valable uniquement pour les systèmes non collisionnels [1], autrement dit, l'application de l'approche QHD est limitée aux systèmes physiques où les interactions à longue portée, dues au potentiel électrostatique auto-consistant, dominent les collisions à courte portée entre les particules [1]. D'ailleurs, quelques études [2] ont relié la validité du modèle au paramètre de la diffraction quantique H_e , c'est à dire au rapport de l'énergie du

plasmon électronique sur l'énergie thermique de Fermi. Par ailleurs, Tsallis [3] a étendu la statistique de Boltzmann-Gibbs (BG) en généralisant le concept d'entropie à des régimes non extensifs. Ainsi, l'entropie de Tsallis a été appliquée avec succès aux plasmas. Ceci nous a motivés à revisiter certains travaux [4],[5] dans le cadre de la nouvelle statistique de Tsallis.

La présente thèse est composée de six chapitres et de deux annexes. Nous commencerons d'abord par donner, au premier chapitre, quelques définitions et concepts de base de l'état plasma, nous introduirons quelques propriétés ainsi que les échelles spatiales et temporelles qui le caractérisent.

Dans le deuxième chapitre, nous introduirons les plasmas quantiques ainsi que l'approche hydrodynamique quantique. Nous rappellerons le système Wigner-Poisson, sa validité ainsi que le modèle de Schrödinger-Poisson. La statistique quantique y sera aussi présentée.

Le troisième chapitre de cette thèse sera consacré au formalisme de la théorie de la fonctionnelle de la densité (DFT). Nous présenterons le modèle de Thomas-Fermi (TF) qui a connu un grand engouement, nous introduirons plusieurs corrections pour une meilleure concordance entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux. Quelques unes de ces corrections seront présentées dans ce chapitre. Nous clôturerons ce chapitre en présentant les équations de Kohn et Sham.

Le quatrième chapitre portera sur l'étude des effets d'échange et de corrélation sur l'énergie du soliton associé à l'onde acoustique ionique quantique (QIAW). On utilisera le modèle hydrodynamique quantique dans lequel sera inclus le potentiel d'échange et de corrélation des électrons [6]. En régime faiblement non linéaire et en utilisant la méthode de la perturbation réductive, nous établirons une équation de type Korteweg-de Vries (K-dV) dont la solution stationnaire nous permettra d'établir l'expression de l'énergie transportée par le soliton. Nous constaterons alors que l'énergie des ondes acoustiques ioniques solitaires subit une diminution à cause de la diffraction quantique. Cette diminution de l'énergie transportée par le soliton peut être compensée par les effets d'échange et de corrélation.

Le cinquième chapitre sera consacré aux effets du potentiel d'échange et de la corrélation des électrons sur les structures solitaires acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques QDIA. Dans ce chapitre, nous réexaminerons les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques [4],[5] lorsque la contribution des effets d'échange et de corrélation des électrons est prise en compte. Nous considérerons deux régimes:

- Régime faiblement non linéaire: nous établirons une équation de type Korteweg-de Vries (K-dV) et montrerons que la largeur et l'amplitude de l'onde solitaire sont sensiblement

affectées par les effets d'échange et de corrélation. Ces structures solitaires se rétrécissent à mesure que les valeurs des paramètres λ et γ mesurant les effets d'échange et de corrélation augmentent.

- Régime arbitraire: dans ce cas, nous utiliserons la méthode du pseudo-potentiel pour étudier les effets de l'échange, de la corrélation et de la diffraction quantique sur les propriétés de l'onde acoustique ionique quantique poussiéreuse d'amplitude arbitraire. En plus de modifier les quantités principales de ce type d'ondes et les conditions de leur existence, nous verrons que les effets de l'échange et de la corrélation peuvent affecter la formation d'un certain type de solitons dit "flat-bottomed" solitons [7].

Le sixième chapitre sera consacré aux effets du piégeage des électrons quantiques sur la propagation des ondes acoustiques ioniques dans le cadre de l'entropie non extensive de Tsallis [3]. Une nouvelle expression généralisée de la densité électronique sera alors établie. Celle-ci contiendra une nouvelle contribution proportionnelle à la température électronique T qui domine la correction habituelle en T^2 à très basses températures. Cette nouvelle correction décale la valeur critique de la température électronique T_c au delà de laquelle les structures solitaires de natures compressive et raréfactive coexistent, vers les valeurs supérieures.

Nous terminerons cette thèse par une conclusion générale et une présentation succincte de nos perspectives.

1

Généralités sur les plasmas

1.1 Définition et propriétés

La matière existe sous quatre états: solide, liquide, gazeux et plasma. Cette distinction se fait selon l'énergie de liaison des particules. Celle ci décroît de l'état solide à l'état plasma. Un plasma est donc défini comme étant un gaz partiellement ou totalement ionisé [8]. Il est formé d'ions et d'électrons libres dont le comportement est gouverné par des interactions collectives. A ces derniers, peuvent s'ajouter d'autres populations telles les grains de poussière et les positrons. Sous l'effet d'une perturbation, le mouvement collectif des particules peut devenir chaotique et turbulent et donner naissance à des forces électromagnétiques. Celles-ci modifient de manière significative le comportement du plasma et rendent son étude plus complexe que celle d'un gaz neutre.

Les conditions terrestres ne sont pas favorables à l'existence de cet état. Il est très rare qu'on rencontre le plasma dans nos conditions habituelles (à l'exception des flammes, des éclairs... etc.). Cependant, à l'échelle de l'univers, le plasma est l'état le plus répandu. En effet, il représente 99% de la matière visible. A titre d'exemples, nous pouvons citer les étoiles, l'espace interstellaire et intergalactique. Une transition de phase d'un état à un autre se fait par apport d'énergie. Ainsi, un solide se liquéfie par augmentation de sa température. De la même façon, en chauffant un liquide, nous obtenons un gaz. Une méthode intuitive permettant de générer le plasma est donc le chauffage. En chauffant un gaz neutre, nous apportons de l'énergie sous forme thermique. Cette énergie peut ioniser les atomes et générer ainsi un plasma. En effet, en 1907 Irving Langmuir [8] fut le premier à mettre en évidence un tel état dans une décharge électrique de laboratoire. Une autre technique consiste à utiliser l'interaction d'un laser avec une cible solide.

1.2 Classification des plasmas

La classification des plasmas peut se faire suivant différents critères, en particulier, selon leur formation, naturelle ou provoquée. En effet, s'il existe des plasmas dans des milieux naturels, notamment astrophysiques, nous parvenons aujourd'hui à les créer en laboratoire à des fins expérimentales ou industrielles : le découpage, le dépôt des couches minces et le traitement de surface dans les nanotechnologies...etc. Cette dernière application est devenue aujourd'hui très courante à cause, notamment, du développement rapide que connaît l'électronique. Une classification plus physique consiste à faire une distinction entre les plasmas chauds, froids et les plasmas thermiques. Enfin, une autre classification [9] tient compte des caractéristiques du plasma, telles que la densité et la température. Ainsi, nous définissons un certain nombre de paramètres (longueur de Debye, longueur de Landau... etc) permettant de les classifier. Le diagramme suivant montre les différents types de plasma, suivant les proportions entre ces paramètres : $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 k_B T$ (longueur de Landau), $d_e = (n_e)^{-1/3}$ (distance moyenne entre les électrons) et $\lambda_s = [\epsilon_0 k_B T / (n_e q_e^2 + n_i q_i^2)]^{1/2}$ (longueur d'écran de Debye), où $n_{e,i}$ représente la densité des électrons et des ions, k_B la constante de Boltzmann, $q_{e,i}$ la charge des électrons et des ions et ϵ_0 la permittivité du vide.

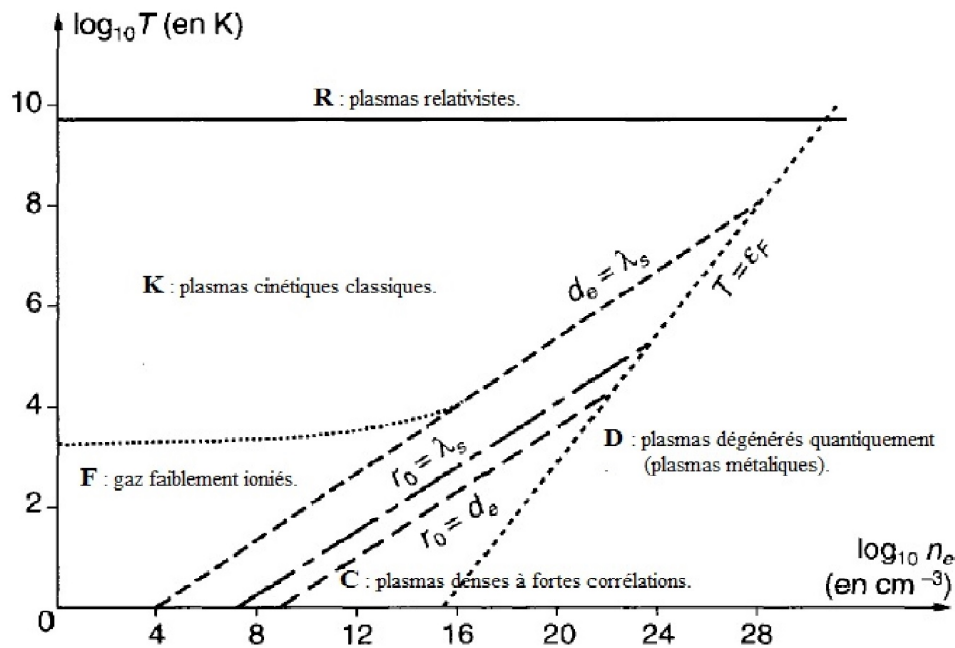


Figure 2.1 : Diagramme de classification des plasmas (CGS). Cette figure a été tirée de la référence [9].

La figure ci-dessus montre différentes régions de classification des plasmas selon leur température et leur densité [9].

1.3 Dynamique des plasmas

Dans un gaz neutre, la dynamique du fluide est simple à décrire car les seules collisions se font entre particules neutres. Dans les conditions habituelles (température et pression proches des valeurs ambiantes), le mouvement d'une particule du fluide n'est influencé que par les particules voisines. La trajectoire d'une particule est donc rectiligne et n'est brisée qu'au moment d'une collision avec une autre particule du fluide [10]. La distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions successives est une notion fondamentale, appelée libre parcours moyen.

Dans un plasma, la présence de particules chargées (et les forces qui en découlent) modifient radicalement la dynamique d'une particule. En effet, l'influence sur une particule n'est pas limitée à celle de ses plus proches voisins. Cela est dû aux interactions électromagnétiques. Ces dernières sont de longue portée et jouent un rôle plus important que les collisions entre particules décrites précédemment. Ces collisions sont d'autant plus négligeables que la portion d'atomes ionisés est importante. Ainsi, dans le cas limite d'un gaz totalement ionisé, les seules collisions considérées sont de nature électromagnétique. Ces interactions peuvent être modélisées en considérant un champ moyen. L'idée peut s'exprimer de la façon suivante: chaque particule chargée perçoit l'ensemble des champs électromagnétiques créés par toutes les autres particules chargées. Du fait de l'homogénéité du plasma, les champs perçus par chaque particule sont comparables. L'approximation du champ moyen consiste à considérer ce champ constant. Les interactions électromagnétiques étant dominantes devant les collisions binaires, la notion de libre parcours moyen n'a plus de sens. La trajectoire d'une particule n'est plus une ligne brisée mais une courbe affectée par le champ moyen [10].

1.4 Physique statistique

1.4.1 Statistique extensive

Le problème à N-corps a nécessité une nouvelle théorie. Les scientifiques ont alors commencé à formaliser de nouveaux concepts et principes, d'où l'émergence de la physique statistique pour prendre en charge ce problème [11],[12]. Beaucoup de scientifiques, entre

autres Boltzmann et Maxwell, ont traité ce problème avec grande attention et ont réussi à fournir un concept très utile qui donna naissance à la physique statistique classique. Cette dernière, dans sa première formulation, n'a pris en compte que les systèmes physiques dotés d'interactions de courte portée. Les travaux de Boltzmann et Gibbs ont donné naissance à la statistique de Boltzmann et Gibbs (BG). Cette dernière est caractérisée par les propriétés et les principes de la thermodynamique et l'extensivité en est une caractéristique fondamentale. Celle-ci signifie que l'entropie $S_{(A+B)}$ de la composition $(A + B)$ de deux systèmes indépendants A et B est égale à $S_{(A+B)} = S_A + S_B$, où S_A et S_B représentent, respectivement, l'entropie du système A et l'entropie du système B .

1.4.2 Statistique non extensive

Les études sur les plasmas non extensifs ont couvert un large éventail de phénomènes collectifs (modes plasma, instabilités, phénomènes non linéaires...etc) [13]-[16]. Rappelons que la statistique non extensive de Tsallis a suscité un grand intérêt. Cet intérêt a été principalement motivé par le fait que pendant les trois dernières décennies, il a été démontré que les systèmes dotés d'interactions de longue portée ne sont pas traitables dans la statistique classique de Boltzmann-Gibbs (BG). Tsallis [3], en 1988, a proposé une généralisation non extensive de l'entropie BG afin de remédier à cette limitation. Cette généralisation a été d'abord suggérée par Renyi [17] et par la suite introduite par Tsallis [3]. La non extensivité signifie que l'entropie $S_{(A+B)}$ de la composition $(A + B)$ de deux systèmes indépendants A et B et dont les entropies sont, respectivement, S_A et S_B , est égale à $S_{(A+B)} = S_A + S_B + (1 - q) S_A S_B$, où q est un paramètre mesurant le degré de non extensivité du système. Notons que lorsque $q \rightarrow 1$, nous retrouvons la statistique standard de Boltzmann-Gibbs. Par la suite, les travaux de Tsallis ont été développés et étendus à une variété de systèmes et les statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein ont été même reformulées dans le cadre de la statistique non extensive de Tsallis.

1.5 Approche cinétique

Dans une approche simplifiée, le plasma peut être perçu comme étant un fluide de particules chargées. Ce modèle (dit modèle fluide) permet une description macroscopique de l'ensemble des particules chargées du plasma. Pour un certain volume de plasma, les particules d'une même espèce sont alors supposées avoir toutes la même vitesse et la même densité. Ce modèle ne rend pas compte du comportement individuel des particules et les

caractéristiques intrinsèques de chaque particule chargée (électron ou ion) sont perdues au profit de l'ensemble de son espèce. Il s'en suit qu'un tel modèle ne permet pas de décrire certains phénomènes d'une grande importance dans les plasmas, tels que l'amortissement de Landau [18]. Un gaz neutre ou un plasma contiennent un nombre extrêmement élevé de particules [11]. Il est donc illusoire de vouloir écrire les équations du mouvement de toutes les particules, car il serait impossible de collecter les informations nécessaires à une telle étude. Même si cela était possible, il n'en demeure pas moins que la durée nécessaire pour effectuer de tels calculs serait de plusieurs milliers d'années, ce qui rend l'étude des phénomènes physiques de tels modèles très difficile. Il est donc incontournable de faire appel à la physique statistique [12], qui régit les systèmes microscopiques, où les très grands nombres de particules se manifestent dans l'évolution du système, permettant ainsi d'avoir des grandeurs macroscopiques associées à l'étude d'un système à un très grand nombre de particules.

En dépit de la complexité apparente à l'échelle microscopique, il émerge souvent des propriétés relativement simples à notre échelle. Ainsi, en dépit de la complexité régissant les phénomènes à l'échelle microscopique, du fait du comportement cohérent des particules, il est, néanmoins, possible de décrire le plasma avec des grandeurs macroscopiques (des vibrations de particules chargées, il en résulte des phénomènes collectifs mesurables tels les ondes électromagnétiques, . . . etc.). Ces grandeurs étant mesurables, il est possible de faire une confrontation entre la théorie et les résultats expérimentaux [12]. La théorie consiste à décrire les phénomènes collectifs avec des lois physiques. On tente alors de comprendre ces lois à l'aide des principes fondamentaux. Ceci peut se faire moyennant les équations cinétiques. Ces dernières font le lien entre les propriétés des particules (degrés de libertés individuels) et les grandeurs macroscopiques qui résultent souvent de mouvements collectifs. Ce sont des équations fermées qui font intervenir la distribution à un corps. Par fermées, on entend que ces équations se suffisent à elles-mêmes et qu'il n'est pas nécessaire de connaître d'autres distributions (à 2, 3, . . . n corps) [12]. Le modèle cinétique fait intervenir plusieurs équations, parmi lesquelles nous citerons l'équation de Liouville et l'équation de Boltzmann [12]. Cette dernière est la plus utilisée en physique des plasmas, elle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} \quad (1.1)$$

où f est la distribution des vitesses de la particule chargée, \mathbf{v} son vecteur vitesse, \mathbf{F} la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur la particule de masse m et $\nabla_{r,v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}, \mathbf{v}}$ (un vecteur est représenté par une lettre en gras). C'est une équation différentielle non-

linéaire. Le membre de gauche provient de la conservation du nombre de particules dans l'espace des phases [19]-[20]. Le membre de droite décrit les collisions entre particules. Une approche plus simple introduite par Vlassov consiste à négliger ces collisions. La base de la théorie physique des plasmas est la théorie cinétique. Il reste à noter que la notion de distribution $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ associée à une espèce de particules donnée, joue un rôle clé en physique statistique. Dans l'espace des phases, on considère un élément de volume infinitésimal $d\mathbf{v}d\mathbf{r}$ assez grand (comparé à la distance inter-particules dans un plasma) pour que l'on puisse définir une fonction moyenne, c'est à dire pour assurer la continuité de la fonction, car en réalité les espèces dans un plasma sont des particules discrètes. L'élément de volume infinitésimal doit être également plus petit qu'une distance "caractéristique" dans le plasma (au niveau macroscopique pour que l'on puisse considérer des éléments différentiels au sens mathématique) [12]. A l'instant t , $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{v}d\mathbf{r}$ représente le nombre de particules dont les vecteurs position et vitesse sont compris, respectivement, entre \mathbf{r} et $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ et \mathbf{v} et $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. A l'instant t , on définit alors le nombre de particules par unité de volume (ou densité) comme

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{v} \quad (1.2)$$

Toute grandeur physique macroscopique mesurable Q (une vitesse, une énergie cinétique...etc) se voit alors attribuer une valeur moyenne, définie par [12]

$$\overline{Q(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)} = \langle Q(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\int Q(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{v}} \quad (1.3)$$

Plusieurs types de distribution sont possibles. L'une d'elles est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann [19], donnée par

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{mv^2 + 2q\phi}{2k_B T} \right] \quad (1.4)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T la température, v la vitesse, ϕ le potentiel électrostatique, m la masse de la particule et q sa charge électrique. Cette fonction de distribution est de type gaussien et est normalisée. La vitesse quadratique moyenne (vitesse thermique) est alors donnée par $V_{th} = \sqrt{k_B T/m}$. L'énergie cinétique moyenne E_C (appelée aussi température cinétique T_C) est définie par

$$\langle E_c \rangle = 3k_B T/2 \quad (1.5)$$

Notons que la température cinétique coïncide avec la température thermodynamique [12]. De cette distribution, couplée aux équations de Maxwell-Poisson, découlent plusieurs caractéristiques telles que la longueur de Debye, le paramètre de couplage, la vitesse thermique,...

etc. Rappelons qu'il existe d'autres distributions telles que la distribution delta de Dirac, les distributions de Fermi-Dirac et Bose-Einstein [1] qui sont l'équivalent de la distribution de Maxwell pour des particules quantiques, ou encore la distribution de Tsallis qui découle de l'entropie généralisée de Tsallis [3]. Notons que cette théorie est largement utilisée pour modéliser les plasmas et la dynamique des ondes qui peuvent y exister.

Les plasmas sont caractérisés par plusieurs échelles, spatiales et temporelles. Le système change sa nature selon ces échelles. Les équations de base peuvent alors être simplifiées suivant la gamme d'échelles que l'on veut modéliser.

1.6 Echelles caractéristiques

Les phénomènes engendrés dans un plasma sont caractérisés par des échelles spatiale et temporelle jouant un rôle crucial dans la détermination de la dynamique d'un tel plasma. En effet, ces échelles sont déterminantes dans l'étude des plasmas. Un certain nombre de paramètres, caractérisant le type de plasma étudié, sont alors définis. Les grandeurs de même dimension sont comparées à ces paramètres, et c'est cette comparaison qui permet de définir l'échelle à laquelle le phénomène est étudié.

1.6.1 Fréquence plasma électronique

La réponse électronique à une perturbation due à une force électrostatique, est représentée par un mouvement collectif des électrons. Dans une échelle temporelle, dite de haute fréquence [19], la pulsation électronique est donnée par la relation suivante

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_{e0} e^2}{m_e \varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

où n_{e0} est la densité des électrons, $-e$ leur charge électrique, m_e leur masse et ε_0 la permittivité du vide.

1.6.2 Fréquence plasma ionique

C'est l'équivalent de la fréquence électronique pour les ions et est donnée (dans le cas d'ions chargés une fois) par [19]

$$\omega_{pi} = \left(\frac{n_{i0} e^2}{m_i \varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

Il s'agit en effet de la réponse des ions à une perturbation électrostatique. Notons qu'à cause de la faiblesse du rapport de masse m_e/m_i , la pulsation électronique demeure nettement supérieure à celle des ions.

1.6.3 Longueur de Debye électronique

Cette longueur représente une échelle fondamentale qui fournit une mesure de la distance sur laquelle l'influence d'un champ électrique (au sein du plasma) est ressentie [20]. Elle est donnée par

$$\lambda_{De} = \frac{V_{the}}{\omega_{pe}} = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.8)$$

1.6.4 Longueur de Debye ionique

Par analogie avec la longueur de Debye électronique, cette longueur est donnée par

$$\lambda_{Di} = \frac{V_{thi}}{\omega_{pi}} = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_i}{n_0 e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

Notons qu'il existe d'autres échelles spatiales et temporelles telles que les fréquences de collisions f_{col} ou encore les libres parcours moyens L_{col} .

1.6.5 Quasi-neutralité de la charge électrique

La présence de particules chargées représente la principale distinction d'un plasma d'un gaz neutre. A l'échelle macroscopique, le plasma est globalement neutre. Cette propriété, appelée quasi-neutralité, dicte au plasma un comportement particulier et joue un rôle majeur dans la modélisation des phénomènes dont il est le siège [20]. Elle s'exprime par

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha 0} q_{\alpha} = 0 \quad (1.10)$$

où $n_{\alpha 0}$ et q_{α} représentent, respectivement, la densité et la charge des particules d'espèce α .

1.7 Plasma poussiéreux

Un plasma poussiéreux est un plasma ordinaire contenant une composante additionnelle de particules chargées ou grains de poussière très massifs ($m_i/m_d \ll 1$) et dont la charge électrique q_d peut équivaloir des centaines de milliers de fois la charge élémentaire. La taille du grain de poussière, généralement assimilé à une sphère de rayon r_d , peut atteindre

le micromètre et la distance d entre deux grains est appelée distance inter-granulaire. La présence de grains de poussière dans un plasma peut affecter sensiblement le comportement collectif de ce plasma en modifiant ses modes propres (mode acoustique ionique poussiéreux) ou en donnant naissance à de nouveaux modes (mode acoustique poussiéreux). A l'instar de tous les plasmas, un plasma poussiéreux est caractérisé par des échelles temporelles et spatiales. Ainsi pour une densité n_{d0} , la fréquence d'un plasma poussiéreux est donnée par

$$\omega_{pd} = \left(\frac{n_{d0} q_d^2}{m_d \varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (1.11)$$

tandis que sa longueur de Debye est donnée par

$$\lambda_D = \frac{\lambda_{De} \lambda_{Di}}{\sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}} \quad (1.12)$$

où λ_{De} et λ_{Di} représentent, respectivement, les longueurs de Debye électronique et ionique.

1.8 Onde acoustique ionique

L'onde acoustique ionique est l'un des modes propres d'un plasma à deux composantes (électrons et ions) [20]. Ce mode de basse fréquence ($\omega \leq \omega_{pi}$) est principalement dû au mouvement des ions. Plusieurs investigations théoriques et expérimentales ont été consacrées à ce type d'ondes [8]. Ces études indiquent l'existence de structures acoustiques ioniques solitaires dans les plasmas. La première observation expérimentale de ce type de solitons a été faite par Ikezi et *al.* [21]. Il a été démontré que la température des ions ainsi que le phénomène de piégeage des électrons peut affecter ces structures solitaires [22]. Dans un plasma unidimensionnel et non magnétisé composé d'électrons et d'ions à charge positive, la dynamique de l'onde acoustique ionique [20] et [23], est régie par le système d'équations hydrodynamiques suivant

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e u_e)}{\partial x} = 0 \quad (1.13)$$

$$m_e n_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) = n_e e E - \frac{\partial P_e}{\partial x} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

$$m_i n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = -n_i e E - \frac{\partial P_i}{\partial x} \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_i - n_e) \quad (1.17)$$

où $n_{e,i}$ est la densité des électrons (ions), $u_{e,i}$ est la vitesse fluide électronique (ionique), $m_{e,i}$ est la masse de l'électron (ion), E est le champ électrostatique et ε_0 est la permittivité du vide. Notons que, dans notre travail la permittivité du milieu est supposée égale à celle du vide. Les termes de pression sont écrits sous la forme $P_{e,i} = \gamma_{e,i} T_{e,i} n_{e,i}$ où γ_e et γ_i représentent, respectivement, les indices adiabatiques électronique et ionique. En régime des faibles amplitudes [20] et [23], nous linéarisons les équations précédentes en réécrivant chaque grandeur physique sous la forme $G = G_0 + G_1$, où G_0 représente la valeur à l'équilibre et G_1 une perturbation de premier ordre. A partir des équations (1.13)-(1.17), nous obtenons alors

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \frac{\partial(n_{e0}u_{e1})}{\partial x} = 0 \quad (1.18)$$

$$m_e n_{e0} \frac{\partial u_{e1}}{\partial t} = n_{e0} e E_1 - \gamma_e T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \frac{\partial(n_{i0}u_{i1})}{\partial x} = 0 \quad (1.20)$$

$$m_i n_{i0} \frac{\partial u_{i1}}{\partial t} = -n_{i0} e E_1 - \gamma_i T_i \frac{\partial n_{i1}}{\partial x} \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_{i1} - n_{e1}) \quad (1.22)$$

A ce stade, nous faisons appel à l'approximation plasma $n_e = n_i$, alors $n_{i0} = n_{e0}$ et $n_{i1} = n_{e1}$.

Nous obtenons alors à partir des équations (1.18) et (1.20) au premier ordre $u_{e1} = u_{i1}$. En éliminant le champ électrique E et en sommant (1.19) et (1.21), nous obtenons

$$(m_e + m_i) n_{e0} \frac{\partial u_{e1}}{\partial t} = -(\gamma_e T_e + \gamma_i T_i) \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} \quad (1.23)$$

Pour éliminer le terme de premier ordre u_{e1} , on prend la dérivée temporelle de l'équation (1.18)

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} + n_{e0} \frac{\partial^2 u_{e1}}{\partial t \partial x} = 0 \quad (1.24)$$

puis en insérant l'expression de la vitesse u_{e1} , dans la dérivée spatiale de l'équation (1.23)

$$(m_e + m_i) n_{e0} \frac{\partial^2 u_{e1}}{\partial x \partial t} = -(\gamma_e T_e + \gamma_i T_i) \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2} \quad (1.25)$$

nous obtenons

$$(m_e + m_i) \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = (\gamma_e T_e + \gamma_i T_i) \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2} \quad (1.26)$$

Le rapport m_e/m_i pouvant être négligé, cette dernière équation peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} = \left(\frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i} \right) \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2} \quad (1.27)$$

où $C_s = \sqrt{\frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i}}$ représente la vitesse acoustique. Pour établir la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique, nous supposons une solution de type onde plane que nous insérons dans l'équation (1.27) pour obtenir la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique suivante

$$\omega^2 = \left(\frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i} \right) k^2 \quad (1.28)$$

A noter que l'appellation acoustique provient de la similarité de la relation (1.28) avec celle des ondes sonores dans un gaz neutre. La relation (1.28) est l'expression la plus simple de la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique dans le cas classique [20] et [23], est limitée aux faibles valeurs du nombre d'onde k .

Tenons maintenant compte de la force électrostatique et donc de l'équation de Poisson (1.17). La masse de l'électron étant très faible, le membre de gauche de l'équation (1.19) ou terme d'inertie peut être négligé, nous obtenons ainsi une expression reliant la densité électronique au champ électrostatique, soit

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial x} = \frac{en_0}{\gamma_e T_e} E_1 \implies \frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{\gamma_e T_e}{en_0} \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2} \quad (1.29)$$

A partir de l'équation de Poisson nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (n_{i1} - n_{e1}) \\ \implies \frac{\gamma_e T_e}{en_0} \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (n_{i1} - n_{e1}) \implies n_{e1} = \frac{1}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)} n_{i1} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Pour la densité ionique n_{i1} , nous procédons comme précédemment et nous obtenons, à partir des équations (1.20) et (1.21), l'équation suivante

$$-m_i n_{i0} \frac{1}{n_{i0}} \frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} = -n_{i0} e \frac{\partial E_1}{\partial x} - \gamma_i T_i \frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial x^2} \quad (1.31)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} = \frac{\gamma_e T_e}{m_i} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon_0 \gamma_e T_e}{e^2 n_0} k^2\right)} n_{i1} \right] + \frac{\gamma_i T_i}{m_i} \frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial x^2} \quad (1.32)$$

à partir de laquelle, nous établissons la relation de dispersion générale de l'onde acoustique ionique

$$\omega^2 = \left(\frac{\gamma_i T_i}{m_i} \right) k^2 + \frac{(k^2 \gamma_e T_e) / m_i}{1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2} \quad (1.33)$$

où λ_{De} est la longueur de Debye électronique [20] et [23].

1.9 Onde acoustique ionique quantique

Haas et ses collaborateurs [24] ont été les premiers à étudier l'analogie quantique des ondes acoustiques ioniques, en utilisant un modèle fluide quantique découlant d'une approche hydrodynamique basée sur le système Wigner-Poisson [1]. Dans cette approche, nous retrouvons les effets de la statistique quantique ainsi que celui de la diffraction quantique qui se manifestent, respectivement, à travers l'équation d'état et le terme du potentiel de Bohm. Pour établir la relation de dispersion des ondes QIA, on considère un plasma unidimensionnel et non magnétisé, composé de deux espèces différentes considérées fluides : des électrons et des ions à charge unique positive. La dynamique non linéaire des ondes acoustiques ioniques quantiques est régie par le système hydrodynamique quantique QHD suivant [24],

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0 \quad (1.34)$$

$$m_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{n_i}}{\partial x^2}}{\sqrt{n_i}} \right) \quad (1.35)$$

$$m_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) = e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{n_e}}{\partial x^2}}{\sqrt{n_e}} \right) \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - n_i) \quad (1.37)$$

où la pression $P_{e,i} = \frac{m_{e,i} V_{Fe,i}^3 n_{e,i}^3}{3n_{e,i,0}^3}$, et $V_{Fe,i}$ la vitesse du Fermi, pour des raisons de simplification, les équations fluides sont normalisées en faisant appel aux changements des variables suivants $X = \frac{\omega_{pi}}{c_s} x$, $T = \omega_{pi} t$, $C_s = (\frac{2k_B T_{Fe}}{m_i})^{1/2}$, $\omega_{pi} = (\frac{q_i^2 n_{i0}}{em_i})^{1/2}$, $\Psi = \frac{e\phi}{2k_B T_{Fe}}$, $N_s = \frac{n_s}{n_{s0}}$ et $U_s = u_s/c_s$ avec T_{Fe} la température du Fermi, $s = e$ et i . Le système d'équations (1.34)-(1.37) devient [24]

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial(N_i U_i)}{\partial X} = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} + \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{N_i}}{\partial X^2}}{\sqrt{N_i}} \right) \quad (1.39)$$

$$\left(\frac{m_e}{m_i} \right) \left(\frac{\partial U_e}{\partial T} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial X} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial X} - N_e \frac{\partial N_e}{\partial X} + \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2}}{\sqrt{N_e}} \right) \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = N_e - N_i \quad (1.41)$$

où le paramètre adimensionnel $H_e = \frac{\hbar \omega_{pe}}{2k_B T_{Fe}}$ mesure la diffraction quantique, en négligeant les termes proportionnels à m_e/m_i , le système (1.38)-(1.41) peut être simplifié comme suit

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial(N_i U_i)}{\partial X} = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} - N_e \frac{\partial N_e}{\partial X} + \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2}}{\sqrt{N_e}} \right) = 0 \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = N_e - N_i \quad (1.45)$$

Une analyse linéaire du système précédent donne la relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques quantiques (QIA) suivante [24],

$$\omega^2 = \frac{k^2 (1 + H_e^2 k^2 / 4)}{1 + k^2 (1 + H_e^2 k^2 / 4)} \quad (1.46)$$

1.10 Modes acoustiques poussiéreux

Lorsque des grains de poussière sont ajoutés à un plasma à deux composantes, la propagation des ondes peut être modifiée, ainsi il existe deux types de modes acoustiques dans un plasma uniforme, non magnétisé et non collisionnel. Ce sont le mode acoustique ionique poussiéreux DIA, et le mode acoustique poussiéreux DA, qui peuvent être étendus au cas quantique. Il s'agit, en effet, de retrouver l'analogie quantique de ces deux modes [85].

1.10.1 Onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW)

La présence des grains de poussière dans un plasma à deux composantes peut altérer et modifier les modes habituels de ce plasma et donner naissance à de nouveaux modes [85]. On se limitera aux deux modes acoustiques qui ont fait l'objet d'une intense investigation: le mode acoustique poussiéreux (DA, un nouveau mode identifié au début des années 90) et le mode acoustique ionique poussiéreux (DIA, mode acoustique ionique habituel modifié par la présence dans le plasma du grain de poussière). Les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses ont été prédites par Shukla et Silin [25], en 1992, elles sont caractérisées par ($v_{Td} < v_{Ti} < \omega/k \ll v_{Te}$). En considérant un plasma composé d'électrons Maxwelliens, d'ions fluides et de grains de poussière immobiles, ayant une densité $n = n_d$, de masse m_d tel que $m_i \ll m_d$ et chargés négativement $q_d = -Z_d e$, on obtient une relation de dispersion de la forme

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_e}{m_i [1 - Z_d (n_{d0}/n_{i0})]} \right)^{1/2} \quad (1.47)$$

1.10.2 Onde acoustique poussiéreuse (DAW)

Les ondes DA ont été prédites théoriquement en 1990 par Rao et *al.* [26], dans un plasma poussiéreux à trois composantes contenant des électrons, des ions et des grains de poussière négativement chargés. Les grains de poussière sont considérés fluides, par conséquent, leur dynamique est gouvernée par les équations fluides couplées à l'équation de Poisson, tandis que les électrons et les ions obéissent à la distribution de Maxwell-Boltzmann. Notons que la vitesse de phase de ces ondes DA est plus petite que les vitesses thermiques électronique et ionique ($v_{Td} < \omega/k \ll v_{Ti} < v_{Te}$) [85]. Dans ce cas la relation de dispersion de ces ondes est donnée par

$$\frac{\omega}{k} = Z_{d0} \sqrt{\left(\frac{n_{d0}}{n_{i0}}\right) \left(\frac{k_B T_i}{m_d}\right) \left[1 + \frac{T_i}{T_e} \left(1 - \frac{Z_{d0} n_{d0}}{n_{i0}}\right)\right]}^{-1/2} \quad (1.48)$$

2

Plasmas quantiques

2.1 Plasma quantique et approche hydrodynamique

Lorsque les effets quantiques de la statistique quantique, la diffraction quantique, les effets d'échange et de corrélation...etc., se manifestent dans un plasma, on dit que le plasma est quantique, c'est à dire que son étude nécessite l'introduction des lois de la mécanique quantique. De tels plasmas existent à l'état naturel au cœur de certaines étoiles.

L'étude de la dynamique des plasmas est généralement basée sur la mécanique classique. Les résultats obtenus en utilisant de tels modèles classiques sont assez précis et reflètent assez bien le comportement des plasmas considérés. Cependant, il peut arriver que les dimensions du système soient comparables à la longueur d'onde de De Broglie [1]

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} \quad (2.1)$$

où m est la masse de la particule, v leur vitesse et h la constante de Planck; dans ce cas [1], l'effet de la diffraction quantique joue un rôle crucial dans le comportement du plasma. Lorsque la densité est élevée et la température basse, la matière est sous une forme dite « dégénérée » et le principe d'exclusion de Pauli, s'appliquant aux électrons, ne peut être négligé.

Il est, aujourd'hui, possible de créer les plasmas quantiques en laboratoire. C'est le cas, à titre d'exemples, des électrons dans les métaux (industrie de traitement des surfaces, couches minces) et des objets électroniques miniaturisés (quantum dots) [1]. A ce propos, des modèles quantiques décrivant le transport des particules chargées ont été établis. Les lois décrivant de tels plasmas étant les lois de la mécanique quantique, les paramètres précédemment cités ne sont plus appropriés. Il devient alors nécessaire d'en introduire d'autres que

nous allons passer en revue de manière succincte. Rappelons que dans le modèle classique des plasmas, à partir de la distribution de Maxwell-Boltzmann et l'équation de Poisson, on déduit le potentiel de Yukawa [19]

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D} \quad (2.2)$$

Ainsi, la longueur de Debye et la vitesse thermique sont données par

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad v_{th} = \left(\frac{k_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

Pour caractériser l'état de couplage d'un plasma, nous définissons généralement un paramètre fondamental, appelé paramètre de couplage [1]. Ce paramètre est donné par

$$\Gamma_C = \frac{U_{pot}}{K} = \frac{e^2 n_0^{1/3}}{\epsilon_0 k_B T} = 2.1 \times 10^{-4} \times \frac{n_0^{1/3}}{T} \quad (2.4)$$

où K est l'énergie thermique et l'énergie potentielle se définit comme

$$U_{pot} \sim \frac{e^2 n_0^{1/3}}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

Le potentiel électrostatique (2.2) devient très faible pour de grandes distances (Il peut même s'annuler). La longueur de Debye (2.3) s'annule, quant à elle, à $T = 0$. Rappelons que la fonction de distribution de Maxwell est donnée par

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{mv^2}{2} - e\phi \right) \right] \quad (2.6)$$

à partir de laquelle nous pouvons établir la densité suivante

$$n = n_0 \exp \left(\frac{e\phi}{k_B T} \right) \quad (2.7)$$

Dans l'approche quantique, le modèle de Thomas-Fermi fournit un outil d'étude des plasmas quantiques. Ce dernier fait intervenir les lois fondamentales de la mécanique quantique. Ainsi, les électrons obéissent à un principe fondamental de la mécanique quantique : le principe d'exclusion de Pauli. Ce problème nécessite une fonction de distribution homogène à une particule dite de Thomas-Fermi [27]. Dans une sphère de l'espace des phases dont le rayon est la vitesse de Fermi V_F [28], celle-ci est donnée par

$$f = \begin{cases} \frac{3n_0}{4\pi V_F^3} & \text{si } \frac{mv^2}{2} - e\phi < \epsilon_F \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.8)$$

elle est équivalente à la fonction de distribution de Fermi-Dirac pour une température nulle. A l'équilibre, la densité s'écrit alors [1],

$$n = \int f dv = n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{\varepsilon_F} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.9)$$

et l'énergie de Fermi est une fonction de la densité, soit

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3} \quad (2.10)$$

Ceci implique que le potentiel électrostatique ne s'annule pas. Une nouvelle longueur caractéristique apparaît [29] (équivalent quantique de la longueur de Debye). C'est la longueur de Thomas-Fermi

$$\lambda_F = \left(\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_F}{3n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

La pulsation plasma ne dépendant pas de la température, elle demeure inchangée

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (2.12)$$

La vitesse thermique, quant à elle, se définit comme le produit de la pulsation plasma et de la longueur caractéristique du plasma [30]

$$v_{th} = \omega_p \lambda_D = \left(\frac{k_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

Par analogie, nous obtenons dans le cas quantique

$$\omega_p \lambda_F = \left(\frac{2\varepsilon_F}{3m} \right)^{1/2} = v_{th} / \sqrt{3} \quad (2.14)$$

Le paramètre de couplage est modifié également. Il s'écrit

$$\Gamma_Q = \frac{U_{pot}}{k_B T_F} = \frac{2me^2}{(3\pi^2)^{2/3} \varepsilon_0 \hbar^2 n_0^{1/3}} \quad (2.15)$$

Il est bien clair, à partir de l'équation (2.15), que les plasmas faiblement couplés sont denses. Dans les deux modèles (plasma classique et plasma quantique), les deux paramètres doivent vérifier les relations suivantes [1]

$$\Gamma_C^c = \frac{U_{pot}}{K_C} = \frac{U_{pot}}{k_B T} = \frac{e^2 n_0^{1/3}}{\varepsilon_0 k_B T} = 2.1 \times 10^{-4} \times \frac{n_0^{1/3}}{T} \quad (2.16)$$

$$\Gamma_C^Q = \frac{U_{pot}}{K_Q} = \frac{U_{pot}}{k_B T_F} = \frac{2me^2}{(3\pi^2)^{2/3} \varepsilon_0 \hbar^2 n_0^{1/3}} = 5.0 \times 10^{10} n_0^{-1/3} \quad (2.17)$$

nous avons bien remarqué que l'approximation non-collisionnelle pour le paramètre de couplage quantique ($T_F \gg T$) devient plus précise uniquement pour des valeurs élevées de la densité : c'est le cas des métaux. De ces deux expressions, on définit le paramètre de dégénérescence [31]

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{T_F}{T} \\ &= \frac{1}{2}(3\pi^2 n_0 \lambda_B^3)^{2/3}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Ce paramètre nous permet de comparer les températures (T_F et T) au lieu de comparer les distances inter-particules et la longueur de De-Broglie [1], nous avons alors

si $T_F \ll T$, nous avons besoin d'utiliser la statistique de Maxwell-Boltzmann.

si $T_F \gg T$, nous avons besoin d'utiliser la statistique de Fermi-Dirac.

2.2 Système Wigner-Poisson

Pour le passage de la mécanique classique vers la mécanique quantique, l'équation de Newton est remplacée par l'équation de Schrödinger. De même dans l'approche hydrodynamique, la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann et l'équation de Vlassov sont remplacées par une approche basée sur la fonction de Wigner. Le problème nécessite une autre fonction de distribution. Il en existe plusieurs, telles que la fonction de Husimi, la fonction de Glauber-Sudarshan, la fonction de distribution de Kirkwood, la fonction Q « Q -fonction », [1], etc.

Pour tenir compte de la ressemblance des méthodes qui traitent des plasmas classiques, l'approche de la fonction de Wigner semble être un choix naturel [1]. Considérons, pour simplifier, un état purement quantique décrit par une fonction d'onde unidimensionnelle $\Psi(x, t)$. La fonction de Wigner correspondante [32] $f(x, v, t)$ est définie par

$$f(x, v, t) = \frac{m}{2\pi\hbar} \int ds \exp\left(\frac{imvs}{\hbar}\right) \Psi^*\left(x + \frac{s}{2}, t\right) \Psi\left(x - \frac{s}{2}, t\right) \quad (2.19)$$

où x est la position, v la vitesse, t le temps, m la masse de la particule et \hbar la constante de Planck réduite. La majorité des quantités physiques peuvent être déduites par les moments jusqu'au $k^{\text{ème}}$ ordre $\int dv v^k f(x, v, t)$, ainsi, la densité de probabilité est donnée par

$$n(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \int f(x, v, t) dv \quad (2.20)$$

Le courant de probabilité s'écrit, quant à lui, comme suit

$$J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \int v f(x, v, t) dv \quad (2.21)$$

Les équations fluides du modèle quantique peuvent s'obtenir aisément à partir des moments du système Wigner-Poisson. Dans le cas d'états mixtes $\{\Psi_\alpha(x, t), P_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$ où $\Psi_\alpha(x, t)$ est une fonction d'onde associée à la probabilité P_α , la fonction de Wigner à N-corps associée s'écrit

$$f^N(x_i, v_i, \dots, x_n, v_n, t) = N \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^N \sum_{\alpha=1}^M P_\alpha \int ds_1, \dots, ds_n \exp \left(\frac{im \sum_{i=1}^N v_i s_i}{\hbar} \right) \\ \times \psi_\alpha^{*N} \left(x_1 + \frac{s_1}{2}, \dots, x_n + \frac{s_n}{2}, t \right) \times \psi_\alpha^N \left(x_1 - \frac{s_1}{2}, \dots, x_n - \frac{s_n}{2}, t \right) \quad (2.22)$$

De la fonction de distribution de Wigner à une particule, nous pouvons remonter à la fonction de distribution de Wigner à N-corps [1]. Pour cela, il faut considérer les opérateurs associés aux variables et utiliser l'équation de Schrödinger pour les fonctions d'onde à N-corps. On utilise ainsi l'approche permettant de ramener le problème à N-corps à un problème décrit par une fonction à un seul corps. Cette approche s'appelle hiérarchie quantique BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) [1]. Il est possible de montrer que l'évolution de la fonction de distribution de Wigner à N-corps est équivalente à l'équation suivante à un corps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \int dv' K_\phi[\phi | v' - v, x, t] f(x, v', t) \quad (2.23)$$

où

$$K_\phi[\phi | v' - v, x, t] = \frac{iem}{\hbar} \int \frac{ds}{2\pi} \exp \left(\frac{im(v' - v)s}{\hbar} \right) \times \left(\phi \left(x + \frac{s}{2}, t \right) - \phi \left(x - \frac{s}{2}, t \right) \right) \quad (2.24)$$

et

$$f(x, v, t) = \frac{m}{2\pi\hbar} \int ds \exp \left(\frac{imvs}{\hbar} \right) \Psi^* \left(x + \frac{s}{2}, t \right) \Psi \left(x - \frac{s}{2}, t \right) \quad (2.25)$$

Les expressions (2.23), (2.24) et (2.25), couplées à l'équation de Poisson à deux espèces [33]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(N \sum_{\alpha=1}^M p_\alpha |\Psi_\alpha(x, T)|^2 - n_0 \right) \quad (2.26)$$

donnent un nouveau système appelé celui de Wigner-Poisson, équivalent quantique du système Vlassov-Poisson.

2.3 Validité du système Wigner-Poisson

Dans les deux approches hydrodynamiques, classique et quantique, (Vlassov-Poisson et Wigner-Poisson), les interactions à longue portée dues au potentiel électrostatique auto-

consistant dominant les collisions à courte portée entre les particules [34]. Ceci n'est vrai que si l'énergie potentielle d'une particule est très petite comparée à son énergie cinétique

$$\Gamma_Q = \frac{U_{pot}}{K_Q} = \frac{e^2 n_0^{1/3}}{\varepsilon_0} \sim \frac{me^2}{\varepsilon_0 \hbar^2 n_0^{1/3}} \ll 1 \quad (2.27)$$

C'est le cas des électrons dans un métal, où les densités typiques sont de l'ordre de $10^{29} m^{-3}$ [1]. Si les énergies cinétique et potentielle sont du même ordre ($\Gamma_Q \approx 1$), les corrélations et les effets de spin ne peuvent être négligés. L'évolution du système nécessite une autre approche, c'est l'équation de Wigner-Fokker-Planck [35].

2.4 Modèle fluide pour un plasma quantique

2.4.1 Modèle de Schrödinger-Poisson (S-P)

Dans un plasma quantique unidimensionnel, les électrons sont décrits par des états mixtes $\{\Psi_\alpha(x, t), P_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$ obéissant à l'équation de Schrödinger [33]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \partial^2 \Psi_\alpha}{2m \partial x^2} - e\phi \Psi_\alpha \quad (2.28)$$

où la fonction d'onde est normalisée à $\int dx |\Psi_\alpha(x, t)|^2 = N/M$, où N est le nombre total de particules. En associant à la fonction d'onde [36]

$$\Psi_\alpha = A_\alpha \exp(iS_\alpha/\hbar) \quad (2.29)$$

les deux variables

$$n_\alpha = A_\alpha^2 \quad \text{et} \quad u_\alpha = \frac{1}{m} \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \quad (2.30)$$

où $A_\alpha = A_\alpha(x, t)$ l'amplitude de la fonction d'onde et $S_\alpha = S_\alpha(x, t)$ sa phase, en séparant les termes réels et imaginaires, on obtient les équations de continuité et l'équation quantique d'Euler suivantes [1],[36]

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_\alpha u_\alpha) = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_\alpha} / \partial x^2}{\sqrt{n_\alpha}} \right) \quad (2.32)$$

Ces deux équations, couplées à l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha - n_0 \right) \quad (2.33)$$

nous permet d'obtenir [1], le système de Schrödinger-Poisson (S-P). Le terme

$$\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{2(\sqrt{n_\alpha})/\partial x^2}}{\sqrt{n_\alpha}} \right) \quad (2.34)$$

est appelé potentiel de Bohm. Notons que ce terme ne dépend pas uniquement du gradient de la fonction de la densité mais il découle aussi de l'équation de Schrödinger. Il est donc responsable de l'effet tunnel et de la dilatation continue du paquet d'onde [1].

2.4.2 Modèle fluide quantique

Considérons, pour des raisons de simplicité, le système unidimensionnel suivant

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{iem}{2\pi\hbar^2} \int ds dv' e^{im(v'-v)s/\hbar} \left[\phi \left(x + \frac{s}{2} \right) - \phi \left(x - \frac{s}{2} \right) \right] f(x, v', t) = 0 \quad (2.35)$$

Les grandeurs physiques caractérisant le modèle fluide sont la densité, la vitesse moyenne, et la pression. Ces dernières s'obtiennent à partir des définitions standard [34]. Ainsi, la densité, la vitesse moyenne et la pression s'écrivent, respectivement, sous la forme

$$n(x, t) = \int f(u, x, t) dv \quad (2.36)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{n} \int f v dv \quad (2.37)$$

$$P(x, t) = m \int f v^2 dv - nu^2 \quad (2.38)$$

Comme dans le cas du modèle classique, le modèle fluide est obtenu à partir des moments de la fonction de distribution, en intégrant sur l'espace des vitesses [1]. Nous obtenons finalement

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.40)$$

Notons que les expressions (2.39) et (2.40) s'apparentent à l'évolution du modèle classique, ce n'est pas une surprise puisque dans le terme de pression, il apparaît des termes quantiques. La contribution de la constante de Planck réduite \hbar , apparaît dans les ordres supérieurs du moment [1]. En introduisant la décomposition de Madelung (2.29) et (2.30), associée à la fonction d'onde [1], ces équations deviennent

$$n = N \sum_{\alpha=1}^M P_\alpha |\Psi_\alpha|^2 \quad (2.41)$$

$$nu = \frac{i\hbar N}{2m} \sum_{\alpha=1}^M P_{\alpha} \left(\Psi_{\alpha} \frac{\partial \Psi_{\alpha}^*}{\partial x} - \Psi_{\alpha}^* \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial x} \right) \quad (2.42)$$

où Ψ_{α} est la fonction d'onde associée à la probabilité P_{α} ; en introduisant les expressions (2.41) et (2.42) dans l'expression de la pression (2.38) et en utilisant la décomposition de Madelung, nous obtenons l'expression de la pression donnée sous la forme

$$P = \frac{N^2}{2mn} \sum_{\alpha,\beta=1}^M P_{\alpha} P_{\beta} A_{\alpha}^2 A_{\beta}^2 \left(\frac{\partial S_{\alpha}}{\partial x} - \frac{\partial S_{\beta}}{\partial x} \right)^2 + \frac{N\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha=1}^M P_{\alpha} \left[\left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x} \right)^2 - A_{\alpha} \frac{\partial^2 A_{\alpha}}{\partial x^2} \right] \quad (2.43)$$

Nous définissons deux grandeurs physiques associées à la fonction d'onde $\Psi_{\alpha}(x, t)$ [1]: la vitesse cinétique

$$u_{\alpha} = \frac{1}{m} \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial x} \quad (2.44)$$

et la vitesse osmotique

$$u_{\alpha}^0 = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial A_{\alpha} / \partial x}{A_{\alpha}} \quad (2.45)$$

La pression peut donc être décrite par trois termes, soit

$$P = P^k + P^o + P^Q \quad (2.46)$$

avec

$$P^k = \frac{mn}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^M \tilde{P}_{\alpha} \tilde{P}_{\beta} (u_{\alpha} - u_{\beta})^2 \quad (2.47)$$

$$P^o = \frac{mn}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^M \tilde{P}_{\alpha} \tilde{P}_{\beta} (u_{\alpha}^0 - u_{\beta}^0)^2 \quad (2.48)$$

$$P^Q = -\frac{\hbar^2 n}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln n \quad (2.49)$$

et

$$\tilde{P}_{\alpha} = \frac{NP_{\alpha}A_{\alpha}^2}{n} \quad (2.50)$$

Notons que les deux pressions ne dépendent que de la densité [1]

$$P^k + P^o = P^C(n) \quad (2.51)$$

La pression s'écrit donc sous la forme

$$P = P^C(n) - \frac{\hbar^2 n}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln n \quad (2.52)$$

avec

$$P^C = \frac{mv_F^2}{3n_0^2} n^3 \quad (2.53)$$

on écrira finalement les équations (2.39) et (2.40) sous la forme [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nu) = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{mn} \frac{\partial P^C(n)}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 (\sqrt{n}) / \partial x^2}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.55)$$

2.5 Statistique quantique

A basse température et particulièrement à une température proche de zéro Kelvin et dans les conditions où les dimensions des systèmes physiques (ex : gaz parfait, plasma...) sont comparables à la longueur d'onde de De Broglie [11],[12], le principe de symétrie doit être pris en compte : les fonctions d'ondes deviennent symétriques (pour des bosons) ou antisymétriques (pour des fermions). Ainsi le principe de Pauli se manifeste pour ces derniers (Le principe d'exclusion de Pauli empêche deux fermions identiques d'avoir les mêmes nombres quantiques) [11],[12].

2.6 Gaz de Fermi et distribution de Fermi-Dirac

La physique statistique de Boltzmann est incapable de décrire les précédents modèles, d'où la nécessité d'une nouvelle approche décrivant la physique statistique quantique (comme la statistique de Fermi-Dirac et la statistique de Bose-Einstein...) [1],[11]. Dans ce chapitre, nous allons présenter la statistique de Fermi-Dirac qui gouverne le mouvement des fermions. Le nombre de particules (fermions) n , contenues dans un volume V , en coordonnées sphériques est donné par l'expression suivante [11]

$$n = \frac{4\pi gV}{h^3} \int_0^\infty \frac{P^2 dP}{\exp(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}) + 1} \quad (2.56)$$

En tenant compte de la relation $P = \sqrt{2m\varepsilon}$, on peut exprimer la densité des fermions $N = n/V$ comme suit

$$N = \frac{n}{V} = \frac{2\pi g}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}) + 1} \quad (2.57)$$

où $g = 2S + 1$ est le facteur de dégénérescence, S le spin, ε l'énergie de la particule (ici de nature cinétique), μ le potentiel chimique, k_B la constante de Boltzmann, et T la température thermique. Dans la suite, on pose $T = k_B T$ et le spin des particules $S = 1/2$ d'où $g = 2$. Notons que cette équation s'exprime en fonction des intégrales de Fermi, définies par

$$I_\nu(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^\nu dx}{\exp(x - \eta) + 1} \quad (2.58)$$

2.7 Gaz complètement dégénéré ($T = 0$)

Dans un gaz parfait, si la température est nulle, l'énergie totale du système est minimale, les particules occupent les niveaux d'énergie les plus bas et en tenant compte du principe de Pauli, nous organisons les fermions à partir du niveau d'énergie le plus bas jusqu'au niveau d'énergie le plus haut [11],[12]. Nous appelons énergie de Fermi ε_F , l'énergie de niveau occupé le plus haut. La probabilité de trouver une particule dans un niveau d'énergie donné est binaire ; la valeur de cette dernière ne dépend que du niveau d'énergie considéré par rapport à celui de Fermi. Ainsi, la probabilité ne prend que deux valeurs (0 ou 1)

$$\begin{cases} 0 & \text{si} & \varepsilon > \varepsilon_F \\ 1 & \text{si} & \varepsilon < \varepsilon_F \end{cases} \quad (2.59)$$

donc pour $T = 0$, on peut écrire

$$N_0 = \frac{n_0}{V} = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \quad (2.60)$$

$$\frac{8\pi}{3h^3} (2m\varepsilon_F)^{3/2} \quad (2.61)$$

ainsi $\varepsilon_F = \frac{P_F^2}{2m} = (3\pi^2 N_0)^{2/3} (\hbar^2/2m)$, avec N_0 la densité des particules initiales (le nombre total de particules par unité de volume) et P_F l'impulsion de Fermi.

2.8 Potentiel chimique

Le potentiel chimique $\mu(T, P)$ est l'énergie que l'on ajoute à un système lorsqu'on introduit une mole de composé à température T et pression P constantes. Si l'on considère un gaz dégénéré à basses températures ($T \sim 0$), le nombre de particules reste pratiquement inchangé par rapport au cas complètement dégénéré ($T = 0$) [11],[12]. De ce fait, un développement limité autour de ($T \sim 0$), nous permet d'aboutir à l'expression suivante du potentiel chimique en fonction de l'énergie de Fermi (2.57) [11],[12], soit⁽¹⁾

$$\frac{2}{3}\varepsilon_F^{3/2} = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{T}) + 1} \quad (2.62)$$

$$\frac{2}{3}\varepsilon_F^{3/2} = \frac{2}{3}\mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{T}{\mu} \right)^2 \right] \quad (2.63)$$

⁽¹⁾Les calculs sont détaillés dans l'annexe.

Par conséquent, pour un gaz parfait, le potentiel chimique $\mu = \varepsilon_F$ à $T = 0$, tandis qu'à basse température ($T \sim 0$), le potentiel chimique est donné par la relation suivante [11],[12],

$$\mu = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (2.64)$$

2.9 Application de la statistique de Fermi-Dirac aux plasmas

Landau a étudié le phénomène de piégeage des particules, stipulant que les ondes peuvent interagir avec les particules (interaction onde-matière). Ce phénomène a été mis en évidence, par la suite, dans de nombreuses expériences scientifiques telles que l'effet Compton et l'effet photo électrique. Ainsi, nous pouvons enfin aborder ce que nous appelons la statistique des particules piégées (libres). Pour cela, nous avons supposé que notre modèle est gouverné par la statistique de Fermi-Dirac. La densité des électrons piégés (libres) qui sont dégénérés est ainsi donnée par l'expression suivante [38],

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{g}{\hbar^3 \pi^2 \sqrt{2}} (m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - e\varphi - \mu}{T}\right) + 1} \quad (2.65)$$

2.10 Piégeage des électrons dans un champ électrostatique

Les ondes électrostatiques et les ondes magnétiques peuvent emprisonner (piéger) les électrons. Par ailleurs, Landau et Lifshitz [11],[114] donnent une expression qui permet de calculer l'énergie totale d'une particule (électron) dans un champ électrostatique tel que $E_T = (P^2/2m) - e\varphi$, où P est la quantité de mouvement de la particule et $-e\varphi$ est l'énergie potentielle du puits dans lequel les électrons sont piégés. Les particules avec une énergie positive ($E_T > 0$) sont des électrons libres et les particules avec une énergie négative ($E_T < 0$) sont des électrons piégés [11].

2.10.1 Calcul de la densité des particules

Plasma dégénéré

Par ailleurs, si la température est proche de zéro (mais non nulle), la probabilité est différente de l'unité ou zéro, il faudra donc calculer les intégrales (2.58), dites intégrales de Fermi, afin de déterminer les expressions de la densité des fermions [38].

Suivant Landau et Lifshitz [11], on obtient la densité électronique normalisée, qui est donnée par l'expression suivante⁽¹⁾,

$$N_e^{(q=1)}(\vec{r}, t) = \frac{N_e(\vec{r}, t)}{N_0} = (1 + \Phi)^{3/2} + T^2 (1 + \Phi)^{-1/2} \quad (2.66)$$

où $\Phi = \frac{e\varphi}{\varepsilon_F}$ et $T = \frac{\pi T}{2\sqrt{2}\varepsilon_F}$ est la température normalisée. L'équation (2.66) représente la densité des électrons partiellement dégénérés, piégés dans l'onde [38]. Notons que la densité électronique dépend du champ électrostatique et de la température.

2.11 Piégeage des électrons dans un champ électrostatique et un champ magnétique

L'interaction de champs magnétiques avec des particules donne naissance à des phénomènes physiques au niveau microscopique. Parmi ceux-ci, le diamagnétisme où les particules créent un champ opposé au champ magnétique appliqué. Si les particules en question sont des électrons, ce phénomène est appelé diamagnétisme de Landau. Ce phénomène est bien expliqué en utilisant la notion dite, niveau de Landau [11], ce dernier est donné par $\varepsilon_e^l = \frac{P_Z^2}{2m_e} + 2l\beta H$ où $\beta = |e| \hbar / 2m_e c$ le magnéton de Bohr, H l'induction magnétique et $l = 0, 1, 2, \dots$. Le nombre de particules (fermions) n contenues dans un volume V en coordonnées cylindriques est donné par l'expression suivante [39],

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{n_e(\vec{r}, t)}{V} = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon + l\hbar\omega_{ce} - e\phi - \mu}{T}\right) + 1} d\varepsilon \quad (2.67)$$

où $\hbar\omega_{ce}$ l'énergie cyclotronique de l'électron, $\eta(B_0) = \hbar\omega_{ce}/\varepsilon_F$ la fréquence cyclotronique de l'électron, B_0 le champ magnétique, $\varepsilon_F = \frac{P_F^2}{2m_e}$ l'énergie de Fermi, P_F l'impulsion de Fermi et $\omega_{ce} = eB_0/m_e$. Ainsi la densité électronique normalisée [39] est donnée par l'expression

⁽¹⁾Les calculs sont détaillés dans l'annexe.

suivante⁽¹⁾

$$N_e^{(q=1)}(\vec{r}, t) = \frac{N_e(\vec{r}, t)}{N_0} = \frac{3}{2}\eta(B_0)(1 + \Phi)^{\frac{1}{2}} + (1 + \Phi - \eta(B_0))^{\frac{3}{2}} - \frac{\eta(B_0)T^2}{2}(1 + \Phi)^{-\frac{3}{2}} + T^2(1 + \Phi + \eta(B_0))^{-\frac{1}{2}} \quad (2.68)$$

Nous remarquons que si $B_0 = 0$ (absence de champ magnétique), on retrouve l'expression (2.66).

⁽¹⁾Les calculs sont détaillés dans l'Annexe.

3

Théorie de la fonctionnelle de la densité (DFT)

3.1 Introduction

En mécanique classique, l'équation du mouvement (de Newton) fournit un outil mathématique permettant d'étudier le mouvement d'un corps, mais dès que le système contient plus de deux corps, la résolution analytique devient généralement impossible. Parmi les solutions de problème à N-corps, l'introduction de la notion du centre de masse et des nouvelles variables ; position et masses effectives. La notion du centre de masse donne des interprétations physiques globales sur le système étudié. La même difficulté est retrouvée aussi en mécanique quantique où l'équation de Schrödinger qui remplace la loi de la mécanique classique, donne l'évolution spatio-temporelle des fonctions d'ondes des particules.

Une solution analytique de l'équation de Schrödinger est impossible à retrouver dès que le nombre de particules est supérieur à un. En effet, nous retrouvons des solutions exactes pour des systèmes physiques simples à une particule, par exemple l'atome d'hydrogène H et les hydrogénoïdes (He^+ , $Li^{2+}...$), où les ions contiennent dans leurs noyaux plusieurs nucléons, protons et neutrons, et un seul électron. Notons que pour les hydrogénoïdes, le problème n'est pas simple, l'introduction de la notion du centre de masse, position et masse effectives entre l'électron et le noyau rend le problème solvable. Par ailleurs, pour d'autres systèmes physiques, constitués de plusieurs particules tels que les électrons, des solutions basées sur des méthodes numériques sont indispensables. Comme les machines de calcul ont un pouvoir limité, le problème existe toujours. Les méthodes et les approches approximatives sont nécessaires pour rendre l'équation de Schrödinger solvable. Parmi celles-ci la

méthode de Hartree, suivie par une correction de Fock, la théorie de Thomas-Fermi TF, la correction de Dirac qui introduit un nouveau terme tenant compte de l'échange d'énergie entre les particules fermioniques puis la correction de Weizsacker [40], qui est introduite sur le modèle de Thomas-Fermi-Dirac (TFD), cette dernière est connue sous le nom de TFD-WS. Toutes ces approches ont contribué à l'émergence d'un formalisme puissant : la théorie de la fonctionnelle de la densité de Kohn et Sham (Density Functional Theory) [41].

3.2 Modèle de Thomas et Fermi

Cette approche [11] fait appel à l'approximation semi-classique. Les électrons dans les atomes ont une distribution homogène dans l'espace des phases, tout en respectant le principe d'exclusion de Pauli où chaque case quantique doit contenir deux électrons de spins opposés, spin up et spin down. Les électrons sont considérés libres, ils peuvent se mouvoir dans la mer de Fermi. L'impulsion d'un électron est donnée par la relation

$$P_F = \frac{h}{2} \left[\frac{3}{\pi} N(\vec{r}) \right]^{1/3} \quad (3.1)$$

La densité électronique s'exprime en fonction de l'impulsion de l'électron comme suit

$$\begin{aligned} N(\vec{r}) &= \frac{8\pi}{3h^3} P_F^3 \\ &= \frac{8\pi}{3h^3} (2m\varepsilon_F)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Thomas [42] et Fermi [43] ont supposé, par la suite, que les interactions entre les particules constituant l'atome sont des interactions coulombiennes, ainsi l'électron est soumis à l'effet du potentiel électrostatique $\varphi(\vec{r})$, où \vec{r} représente la position de l'électron, et $\varphi(\vec{r})$ tend vers zéro lorsque \vec{r} tend vers l'infini. Ceci permet d'exprimer l'énergie totale d'un électron par la relation suivante

$$E_{totale} = \frac{P_F^2}{2m} - e\varphi(\vec{r}) \quad (3.3)$$

Notons que cette énergie doit être négative ($E_{totale} < 0$), car les électrons sont piégés dans le potentiel de l'atome, si non, cela voudrait dire que l'électron n'est plus piégé dans le potentiel de l'atome et s'échapperait ainsi de son état de liaison. Ceci nous conduit à l'expression de l'énergie totale maximale suivante

$$-e\varphi_0(\vec{r}) = \frac{P_F^2}{2m} - e\varphi(\vec{r}) \quad (3.4)$$

où $-e\varphi_0(\vec{r})$ est l'énergie totale maximale de l'électron en chaque point autour de l'atome. A ce stade, si nous combinons les deux expressions (3.2) et (3.4), nous obtenons

$$N(\vec{r}) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2me}{h^2} [\varphi(\vec{r}) - \varphi_0(\vec{r})] \right)^{3/2} \quad (3.5)$$

Trois cas possibles sont à étudier :

- 1) $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r})$, une solution triviale où $N(\vec{r}) = 0$,
- 2) $\varphi(\vec{r}) > \varphi_0(\vec{r})$, une possibilité d'existence des électrons,
- 3) $\varphi(\vec{r}) < \varphi_0(\vec{r})$, une énergie cinétique négative, ce qui n'est pas physique. Par conséquent, la densité électronique doit être nulle $N(\vec{r}) = 0$. En s'intéressant au deuxième cas, et en considérant que l'atome est neutre, il en résulte que le potentiel électrostatique $\varphi_0(\vec{r}) = 0$, l'équation (3.5) devient alors

$$N(\vec{r}) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2me}{h^2} \varphi(\vec{r}) \right)^{3/2} \quad (3.6)$$

Le potentiel électrostatique $\varphi(\vec{r})$ doit satisfaire l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \varepsilon_0 e n \quad (3.7)$$

En insérant l'équation (3.6) dans l'équation (3.7) et en supposant que la densité électronique et le potentiel électrostatique ont une symétrie sphérique, nous obtenons l'équation de Thomas-Fermi

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\varphi(r)] = \frac{e}{3\pi^2 \varepsilon_0} \left[\frac{2me}{h^2} \varphi(r) \right]^{3/2}, \quad \text{avec} \quad \varphi(r) \geq 0 \quad (3.8)$$

En introduisant le changement de variables suivant

$$x = 2 \left(\frac{4}{3\pi} \right)^{2/3} \frac{Z^{1/3}}{a_0} r \quad (3.9)$$

$$\psi(x) = \frac{\varphi(r)}{Ze/r} \quad (3.10)$$

où $a_0 = h^2/me^2$ est le rayon de Bohr, l'équation (3.8) prend une forme plus simple, soit

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \left[\frac{\psi^3(x)}{x} \right]^{1/2} & \psi &\geq 0 \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= 0, & \psi &< 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

En tenant compte des conditions aux limites, près du noyau de l'atome et loin de ce dernier

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 \implies \psi \rightarrow 1 \\ x \rightarrow \infty \implies \psi \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

la résolution numérique peut être effectuée pour ce type d'équation différentielle. Notons que plusieurs études numériques ont été consacrées à la résolution de ce type d'équations, ainsi nous trouvons plusieurs méthodes numériques et plusieurs algorithmes qui peuvent résoudre ce type de problèmes et permettent, ainsi, la détermination de la densité électronique $N(\vec{r})$ par l'approche TF. Ceci permet de déterminer des grandeurs physiques caractérisant le système étudié (atome, ion) tels que l'énergie totale, le rayon atomique... etc.

Le tableau 1 donne les résultats numériques établis par Slater et Krutter [44], correspondant au modèle de Thomas Fermi, où x_0 est le rayon atomique, $\Psi(x_0)$ le potentiel associé et a_2 la valeur initiale de la première dérivée. Notons que ce tableau a été tiré de la référence [45],

$-a_2$	x_0	$\Psi(x_0)$
1.6740	3.2617	0.23194
1.6800	3.7153	0.16946
1.6840	4.3784	0.10816
1.6858	5.1678	0.06124
1.6863	5.7291	0.0942
1.6867	7.0084	0.01079

Tableau 1 : Les valeurs du rayon atomique correspondant au modèle de Thomas-Fermi établies par Slater et Krutter.

Bien que ces résultats soient universels, ils ne sont pas, néanmoins, exacts. En effet, les valeurs du rayon atomique de l'énergie totale ainsi que de la densité électronique ne se confondent pas avec les valeurs expérimentales correspondantes. C'est pour cela que le modèle de Thomas-Fermi nécessite la prise en compte de corrections afin d'améliorer les résultats obtenus.

3.3 Quelques corrections sur l'approche de Thomas-Fermi

L'approche de Thomas-Fermi représente une première approximation de la méthode du champ self-consistent, connu sous le nom de champ moyen [46], cette dernière stipule que l'électron se meut dans le potentiel créé par les autres particules constituant le noyau et le reste des électrons. Il est important de noter que la théorie de Hartree ne tient pas compte des énergies d'échange entre les particules. Dans le but d'améliorer les résultats, Fock a tenu

compte des effets d'échange entre les électrons dans quelques cas. En effet, en s'appuyant sur les recherches de Slater, lui-même se basant sur le principe de Pauli, il montra que la fonction d'onde des électrons peut être écrite sous la forme d'un déterminant dit déterminant de Slater. La densité électronique $N(\vec{r})$ est obtenue à partir de la fonction d'onde totale du système quantique poly-électroniques $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_n)$ par la relation

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \Psi_1(\vec{r}_1) & \Psi_1(\vec{r}_2) & \dots & \Psi_1(\vec{r}_n) \\ \Psi_2(\vec{r}_1) & \Psi_2(\vec{r}_2) & \dots & \Psi_2(\vec{r}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_n(\vec{r}_1) & \Psi_n(\vec{r}_2) & \dots & \Psi_n(\vec{r}_n) \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

où $\Psi_i(\vec{r}_j)$ est la fonction d'onde de l'état i associée à la particule j . La prise en compte des corrections de Fock dans l'approche de Hartree donne lieu à l'approche, dite approche de Hartree-Fock. En se basant sur les études de Fock et le principe d'exclusion de Pauli, Dirac [47] a introduit la notion d'énergie d'échange entre les électrons. Cette énergie représente, en fait, la contribution en énergie due aux interactions de deux électrons ayant la même impulsion et la même direction de spin, situés dans le même élément de volume. Cette énergie d'échange a été rajoutée à l'énergie totale de l'électron donnée par le modèle de Thomas-Fermi. Les travaux de Dirac ont ainsi contribué à la généralisation de l'approche de TF. L'équation de Thomas-Fermi-Dirac TFD adimensionnelle est donnée par l'équation suivante

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = x \left[\epsilon + \frac{\psi^{1/2}(x)}{x^{1/2}} \right]^3 \quad (3.14)$$

où $\epsilon = (3/32\pi^2)^{1/3}Z^{-2/3} = 0.211873Z^{-2/3}$. Par la suite, Feynman, Metropolis et Teller [45] ont étudié numériquement ce modèle TFD, ce qui a permis de mettre en évidence l'importance des corrections apportées par l'énergie d'échange des électrons. Le tableau 2 représente les résultats obtenus par l'approche de Thomas-Fermi-Dirac établis par Feynman, Metropolis et Teller. Ce tableau a été tiré de la référence [45]

$\omega = \sqrt{2x}$	<i>cas 1</i> $-a_2 = 1.6740$ ψ	<i>cas 2</i> 1.6800 ψ	<i>cas 3</i> 1.6840 ψ	<i>cas 4</i> 1.6858 ψ	<i>cas 5</i> 1.6863 ψ	<i>cas 6</i> 1.6867 ψ
0.92	0.62232	0.61957	0.61774	0.61691	0.61668	0.61650
1.00	0.58007	0.57676	0.57455	0.57356	0.57328	0.57306
1.08	0.53924	0.53528	0.53264	0.53145	0.53112	0.53086
1.16	0.50013	0.49543	0.49230	0.49089	0.49049	0.49018
1.24	0.46300	0.45744	0.45373	0.45206	0.45160	0.45123
1.32	0.42803	0.42146	0.41709	0.41513	0.41458	0.41414
1.40	0.39534	0.38763	0.38249	0.38018	0.37954	0.37903
1.48	0.36507	0.35602	0.34999	0.34728	0.34653	0.34593
1.56	0.33727	0.32667	0.31962	0.31644	0.31556	0.31486
1.64	0.31201	0.29962	0.29137	0.28766	0.28663	0.28581
1.62	0.28935	0.27487	0.26524	0.26091	0.25970	0.25874
1.80	0.26933	0.25242	0.24118	0.23613	0.23472	0.23361
1.88	0.25202	0.23228	0.21916	0.21327	0.21162	0.21033
1.96	0.23747	0.21442	0.19913	0.19227	0.19033	0.18884
2.04	0.22578	0.19888	0.18104	0.17304	0.17078	0.16905
2.12	0.21707	0.18565	0.16484	0.15552	0.15288	0.15087
2.20	0.21150	0.17477	0.15050	0.13964	0.13656	0.13422
2.28	0.20927	0.16630	0.13797	0.12532	0.12172	0.11901
2.36	0.21067	0.16034	0.12725	0.11251	0.10831	0.10514
2.44	0.21605	0.15701	0.11833	0.10113	0.09623	0.09254
2.52	0.22589	0.15649	0.11121	0.09114	0.08542	0.08112
2.60	0.24080	0.15903	0.10595	0.08250	0.07582	0.07081
2.68	0.26156	0.16494	0.10261	0.07518	0.06738	0.06153
2.76	0.28920	0.17465	0.10129	0.06917	0.06005	0.05321
2.84		0.18870	0.10214	0.06447	0.05378	0.04579
2.92			0.10536	0.06109	0.04857	0.03920
3.00			0.11123	0.05909	0.04438	0.03340
3.08			0.12011	0.05853	0.04123	0.02833
3.16			0.13247	0.05953	0.03914	0.02396

3.24			0.14892	0.06224	0.03814	0.02024
3.32				0.06688	0.03831	0.01714
3.40					0.03975	0.01465
3.48					0.04261	0.01275
3.56						0.01143
3.64						0.01072
3.72						0.01063
3.80						0.01123
3.88						0.01259

Tableau 2 : Les corrections sur les valeurs du rayon atomique correspondant au modèle de Thomas-Fermi-Dirac établies par Feynman et *al.* [45]

Ces résultats ont poussé les chercheurs à examiner l'importance de l'effet de corrélation sur l'approche TFD. Il s'agit, en effet, de tenir compte des interactions entre les électrons ayant des spins anti-parallèles (anti-symétriques). A cet effet, plusieurs études ont été consacrées à la reformulation de l'approche TFD, parmi elles, une correction sur l'énergie cinétique de l'électron faite par Weizsacker [40], la correction de Fermi- Amaldi [48], la correction sur l'énergie de Wigner [49], ainsi que la correction de Gombás [50] qui a reformulé la TFD par l'introduction de la correction de Wigner [49] en tenant compte de la correction de Fermi-Amaldi [48]. Par ailleurs, Tomishima [51] a consacré lui aussi une étude permettant d'introduire le terme de l'énergie de corrélation, comme correction au modèle TFD. Le tableau suivant représente quelques valeurs du rayon atomique correspondant aux différentes corrections de la TFD, apportées par les auteurs cités ci-dessus. Ces résultats sont tirés de la référence [51].

	Rb^+	Kr	Br^-
Tomishima	2.7845	3.3009	4.2150
Thomas	3.4211	4.5275	/
Gombás	3.55	4.22	5.19
Pauling	2.80	3.19	3.69

Tableau 3 : Les différentes corrections sur le modèle TFD apportées par Tomishima, Thomas, Gombás et Pauling.

Cependant, les résultats obtenus sont loin d'être en accord avec les résultats expérimentaux, valables uniquement pour décrire les atomes de nombre atomique Z élevé. S'appuyant sur

les travaux de Teller [52], les chercheurs ont alors proposé de trouver une autre approche, prouvant que le modèle TF est incapable de décrire la liaison moléculaire. Ceci étant fait, le modèle de Thomas-Fermi fournit donc une introduction à la théorie de la fonctionnelle de la densité, cette dernière étant une bonne alternative au modèle de Thomas-Fermi.

3.4 Equation de Schrödinger et fonction d'onde

Le formalisme newtonien a vu le jour au 18^{ème} siècle, et dès lors, il a montré une grande réussite pour décrire les systèmes dynamiques. A la fin du 19^{ème} siècle, les travaux scientifiques ont atteint un nouvel ordre de grandeur, le microscopique. Dès lors, les prédictions du formalisme newtonien ne devenaient plus valables. Ce qui a poussé les scientifiques à chercher une alternative à ce formalisme à cette échelle. De nombreuses investigations ont été faites dans ce but, parmi celles-ci, les célèbres travaux de Schrödinger, dont la mécanique ondulatoire fournit une base puissante pour la mécanique quantique et, c'est ainsi que la mécanique quantique introduit la notion de fonction d'onde pour décrire l'état d'une particule, cette dernière est régie par l'équation de Schrödinger

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.15)$$

où m est la masse de la particule, $V(\vec{r})$ son énergie potentielle et $\Psi(\vec{r}, t)$ la fonction d'onde (amplitude de la probabilité d'existence), dont le module au carré représente la densité de probabilité d'existence. Notons que l'équation (3.15) est une équation linéaire et homogène en $\Psi(\vec{r}, t)$ et que par conséquent le principe de superposition est valable. Ce dernier admet que la combinaison linéaire des fonctions d'ondes, solutions de l'équation de Schrödinger est aussi une fonction d'onde solution de cette dernière. Ce principe de superposition fournit un outil de description très efficace pour décrire des systèmes à aspect probabiliste des problèmes à l'échelle microscopique. Par conséquent, les systèmes microscopiques au nombre élevé de particules, tels que les systèmes poly-électroniques où les molécules sont régies par l'équation de Schrödinger. Ce genre de problème est appelé en mécanique quantique, problème à N-corps.

3.4.1 Position du problème

Considérons un système microscopique, contenant plusieurs particules : N noyaux (de masse M et de charge $+Ze$) et n électrons (de masse m_e et de charge $-e$), régis par l'équation de

Schrödinger indépendante du temps (TISE), soit

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (3.16)$$

où $\Psi(\vec{r})$ est la fonction d'onde de ce système et E l'énergie totale, valeur propre de l'opérateur $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$, dit opérateur hamiltonien total qui prend en considération toutes les interactions coulombiennes ainsi que les énergies cinétiques de toutes les particules, l'opérateur hamiltonien total pour ce problème est donné par

$$H_{total} = T_{noy} + T_{elec} + U_{noy-noy} + U_{noy-elec} + U_{elec-elec} \quad (3.17)$$

où

$T_{noy} = \sum_k -\frac{\hbar^2}{2m_k}\Delta_k$ est l'opérateur énergie cinétique des noyaux,

$T_{elec} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i$ représente l'opérateur énergie cinétique des électrons,

$U_{noy-noy} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k \neq l} \frac{Z_k Z_l}{|\vec{R}_k - \vec{R}_l|}$ décrit l'énergie potentielle coulombienne noyau-noyau,

$U_{noy-elec} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k,i} \frac{-Z_k}{|\vec{R}_k - \vec{r}_i|}$ donnant l'énergie potentielle coulombienne noyau-électron,

$U_{elec-elec} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ introduisant l'énergie potentielle coulombienne électron-électron.

$\vec{r}_{i,j}$, $\vec{R}_{k,l}$ sont les positions des électrons i, j et des noyaux k et l respectivement. Il est clair que ce type d'équation pose un problème majeur que ce soit dans son aspect analytique ou numérique, ceci étant du au très grand nombre de degrés de liberté ($3N + 3n$). Les théoriciens trouvent, en effet, que l'utilisation d'approximations est indispensable pour diminuer les degrés de libertés de l'équation de Schrödinger, associés à ce système. Dès lors, plusieurs investigations ont été faites dans ce but, la plus connue est l'approximation de Born-Oppenheimer ; cette dernière stipule que le fait que la masse d'électrons est très petite devant celle du noyau⁽¹⁾, ce dernier peut être considéré comme étant immobile. De ce fait, l'énergie cinétique T_{noy} du noyau devient négligeable devant l'énergie cinétique de l'électron T_{elec} . De plus, le terme de l'énergie potentielle d'interaction $U_{noy-noy}$ qui dépend de la position du noyau est alors considéré comme une constante ($U_{noy-noy} = Const$). Comme les énergies potentielles sont définies à une constante près, nous pouvons adopter cette constante comme une nouvelle origine des énergies de toutes les interactions. L'équation (3.17) devient alors

$$H_{total} = T_{elec} + U_{elec-elec} + U_{noy-elec} \quad (3.18)$$

⁽¹⁾La masse du noyau du plus petit atome fait presque 1836 fois celle de l'électron.

En considérant ces approximations, il apparaît clairement que l'hamiltonien total se réduit à un hamiltonien électronique, c'est à dire que l'hamiltonien ne contient que les termes qui décrivent l'évolution des électrons.

3.5 Théorèmes de Hohenberg-Kohn

L'idée de base introduite par Hohenberg et Kohn, consiste à remplacer la fonction d'onde des particules par leur densité électronique dans le formalisme de la mécanique quantique. Ainsi, ils s'appuyèrent sur l'approche de Thomas-Fermi qui stipule que l'énergie totale d'un gaz de Fermi est une fonctionnelle de sa densité. Le formalisme de la théorie de la fonctionnelle de la densité DFT se base sur les deux théorèmes de Hohenberg et Kohn[41], publiés en 1965.

Théorème 3.5.1 *Pour tout système de particules en interaction dans un potentiel externe $U_{ext}(\vec{r})$, le potentiel $U_{ext}(\vec{r})$ est uniquement déterminé, à une constante additive près, par la densité $n_0(\vec{r})$ de la particule dans son état fondamental.*

Théorème 3.5.2 *Il existe une fonctionnelle universelle $E[n(\vec{r})]$, exprimant l'énergie en fonction de la densité électronique $n(\vec{r})$, valide pour tout potentiel externe $U_{ext}(\vec{r})$. Pour chaque $U_{ext}(\vec{r})$ particulier, l'énergie de l'état fondamental du système est la valeur qui minimise cette fonctionnelle, la densité $n(\vec{r})$ qui lui est associée correspond à la densité exacte $n_0(\vec{r})$ de l'état fondamental.*

Le premier théorème stipule que la densité électronique $n(\vec{r})$ à l'état fondamental associé à un système poly-électronique, se mouvant dans un potentiel externe est une fonctionnelle unique grâce à laquelle est établi le potentiel externe U_{ext} . En d'autres termes, il existe une relation biunivoque entre le potentiel externe U_{ext} et la fonctionnelle de la densité électronique $n(\vec{r})$ à l'état fondamental. Tandis que le second théorème établit qu'à chaque potentiel externe U_{ext} , une fonctionnelle de l'énergie totale du système poly-électronique est associée, cette dernière dépend de la densité électronique. La fonctionnelle de l'énergie totale du système poly-électronique est minimisée par rapport à l'énergie de l'état fondamental $E_0[n_0(\vec{r})]$. La densité électronique associée à cette dernière représente la densité électronique exacte $n_0(\vec{r})$ de l'état fondamental.

3.6 Equations de Kohn et Sham

Kohn et Sham exploitent les deux théorèmes de Hohenberg et Kohn. Ainsi, ils ont mis en évidence de nouvelles équations permettant d'obtenir une densité électronique exacte, se trouvant à l'état fondamental qui se meut dans un potentiel effectif externe $U_{ext} [n(\vec{r})]$; ainsi l'hamiltonien d'une population électronique se mouvant dans un potentiel externe est donnée sous la forme suivante

$$H_{total} [n(\vec{r})] = T_{elec} [n(\vec{r})] + U_{elec-elec} [n(\vec{r})] + U_{ext} [n(\vec{r})] \quad (3.19)$$

L'idée de base de Kohn et Sham est de remplacer tous les électrons subissant l'interaction des autres particules constituant le système étudié par une population d'électrons effective. Cette dernière ne subissant aucune interaction avec les autres particules du système, cette population d'électrons effective n'est pas tout à fait libre, car elle baigne dans un potentiel externe global, ce potentiel représente la somme de toutes les interactions que pouvait avoir la population électronique initiale avec le reste des particules constituant le système étudié.

L'idée d'introduire une population effective sans interactions a vu le jour, car les énergies régissant une telle population étaient déjà introduites, la première étant l'énergie cinétique des électrons libres, dit gaz de Fermi $T_S [n(\vec{r})]$, tandis que la seconde était l'énergie potentielle introduite par Hartree dans l'approche du champ moyen $U_{Har} [n(\vec{r})]$. Pour introduire les termes d'échange et de corrélation, Kohn et Shan proposèrent une séparation au niveau des termes des énergies, introduisant l'énergie cinétique décrivant les électrons effectifs libres. Ainsi, l'énergie cinétique du système réel peut être réécrite en fonction de l'énergie cinétique effective (S) sans interaction $T_S [n(\vec{r})]$, tel que

$$\begin{aligned} T_{elec} [n(\vec{r})] &= T_{elec} [n(\vec{r})] + T_S [n(\vec{r})] - T_S [n(\vec{r})] \\ &= T_S [n(\vec{r})] + \{T_{elec} [n(\vec{r})] - T_S [n(\vec{r})]\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

La décomposition de l'énergie cinétique du système de cette façon (3.20) a permis de faire apparaître le terme d'énergie de corrélation des électrons, soit

$$E_c [n(\vec{r})] = T_{elec} [n(\vec{r})] - T_S [n(\vec{r})] \quad (3.21)$$

qui traduit les interactions entre les spins des électrons qui ont un spin anti-symétrique⁽¹⁾. L'énergie cinétique du système réel est alors réécrite sous la forme

$$T_{elec} [n(\vec{r})] = T_S [n(\vec{r})] + E_c [n(\vec{r})] \quad (3.22)$$

⁽¹⁾Les électrons sont corrélés par cette énergie supplémentaire.

De la même manière, Kohn et Sham ont écrit l'énergie d'interaction électron-électron $U_{\acute{e}lec-\acute{e}lec} [n(\vec{r})]$, en introduisant le potentiel de Hartree $U_{Har} [n(\vec{r})]$ représentant l'énergie du champ moyen, cette énergie $U_{\acute{e}lec-\acute{e}lec} [n(\vec{r})]$ est donnée par

$$\begin{aligned} U_{\acute{e}lec-\acute{e}lec} [n(\vec{r})] &= U_{\acute{e}lec-\acute{e}lec} [n(\vec{r})] + U_{Har} [n(\vec{r})] - U_{Har} [n(\vec{r})] \\ &= U_{Har} [n(\vec{r})] + \{U_{\acute{e}lec-\acute{e}lec} [n(\vec{r})] - U_{Har} [n(\vec{r})]\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cette méthode permet de faire apparaître le deuxième terme représentant l'énergie d'échange électron-électron $E_x [n(\vec{r})]$, soit

$$E_x [n(\vec{r})] = U_{\acute{e}lec-\acute{e}lec} [n(\vec{r})] - U_{Har} [n(\vec{r})] \quad (3.24)$$

Ce terme a été proposé par Dirac en 1930 représentant une correction significative à l'approche de TF, donnant ainsi naissance à l'approche TFD (Thomas-Fermi-Dirac). Cette énergie d'échange est l'énergie d'interaction entre les électrons ayant un spin symétrique. Finalement, en regroupant les deux termes d'échange et de corrélation (3.21) et (3.24), nous obtenons

$$E_{xc} [n(\vec{r})] = E_x [n(\vec{r})] + E_c [n(\vec{r})] \quad (3.25)$$

et en remplaçant dans l'hamiltonien, donné par l'équation (3.19), nous obtenons les équations, dites équations de Kohn et Sham

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{eff}(\vec{r}) \right) \psi_i(\vec{r}) = \varepsilon_i \psi_i(\vec{r}) \quad (3.26)$$

$$n(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N |\psi_i(\vec{r})|^2 \quad (3.27)$$

où $V_{eff} [n(\vec{r})]$ est le potentiel effectif de Kohn-Sham et est donné par

$$V_{eff} [n(\vec{r})] = U_{ext} [n(\vec{r})] + U_{Har} [n(\vec{r})] + V_{xc} [n(\vec{r})] \quad (3.28)$$

La densité électronique $n(\vec{r})$ de l'état fondamental, écrite comme une somme des fonctions d'ondes (des orbitales) d'une seule particule, le potentiel d'échange et de corrélation et le potentiel de Hartree sont donnés respectivement par

$$V_{xc} [n(\vec{r})] = \frac{\delta}{\delta n(\vec{r})} E_{xc} [n(\vec{r})] \quad (3.29)$$

$$U_{Har} [n(\vec{r})] = \frac{1}{2} \int \frac{e^2 n(\vec{r}) n(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r} d\vec{r}' \quad (3.30)$$

L'intérêt des équations de Kohn et Sham réside dans le fait que leurs équations peuvent réduire le problème à N-corps, décrivant l'évolution du système de particules, cité plus haut, en un problème équivalent traitant l'évolution d'une seule particule dans un potentiel effectif externe. Ainsi l'équation (3.26) peut être vue comme une équation de Schrödinger associée à une particule; donnée sous cette forme, cette équation nécessite une résolution numérique. L'équation (3.27) permet d'obtenir $n(\vec{r}) = n_0(\vec{r})$, la valeur exacte de la densité électronique à l'état fondamental. A partir de là, les autres propriétés du système poly-électronique, telle que l'énergie totale du système peuvent être déterminées. Avant de calculer numériquement la valeur de la densité à l'état fondamental $n(\vec{r})$, quelques approximations numériques sont indispensables pour simplifier l'expression du potentiel d'échange et de corrélation. Dans ce but, plusieurs techniques et approximations ont vu le jour, parmi les plus utilisées, l'approximation de la densité locale (LDA), ainsi que, l'approximation des gradients généralisés (GGA). De plus, des modélisations ont été faites, dans le but de reformuler les expressions du potentiel effectif de Kohn et Sham. Dans le cinquième et sixième chapitre, nous nous intéresserons à l'expression suivante du potentiel d'échange et de corrélation, utilisée par les références suivantes [65], soit

$$V_{xc} = -0.985(e^2/\varepsilon_0)n_e^{1/3} [1 + 0.034/a_B n_e^{1/3} \ln(1 + 18.37a_B n_e^{1/3})] \quad (3.31)$$

où $a_B = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} n_e^{2/3}$. Dans le but d'améliorer le modèle hydrodynamique quantique, et en nous inspirant des travaux cités précédemment, nous avons introduit la notion du potentiel d'échange et de corrélation dans le modèle QHD. Pour cela, une approximation de ce dernier (3.31) est nécessaire. En effet, puisque $18.37a_B n_e^{1/3} \ll 1$, ceci nous a permis de développer l'expression du potentiel effectif en séries de puissances [76], l'expression du nouveau potentiel d'échange et de corrélation dans le modèle QHD est alors donnée par l'équation suivante

$$V_{xc} \approx -1.6(e^2/\varepsilon_0)n_e^{1/3} + 5.65(\hbar^2/m_e)n_e^{2/3} \quad (3.32)$$

l'influence de ce dernier terme (3.32) sur l'énergie du soliton des ondes acoustiques ioniques ainsi que les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses sera étudié pour un plasma quantique dans le cadre de la théorie quantique hydrodynamique respectivement dans les chapitres quatre et cinq.

4

Effet de l'échange et de la corrélation sur l'énergie du soliton acoustique ionique quantique

4.1 Introduction

Récemment, un grand intérêt a été porté à la dynamique des plasmas quantiques ainsi qu'à leurs applications [1]. Ce type de plasma apparaît dans une variété de situations astrophysiques telles que les pulsars, les supernovas, le soleil, les étoiles, l'atmosphère de notre planète « l'ionosphère », les nébuleuses et l'espace interstellaire [1]. En outre, les plasmas quantiques sont omniprésents dans les environnements naturels (intérieurs planétaires, objets astrophysiques compacts [53], etc.). Dans les laboratoires, les plasmas quantiques sont présents dans les Tokamaks, l'interaction laser de haute puissance-plasma, laser à électrons libres XFEL [54], la miniaturisation des composants électroniques, le développement de l'informatique quantique [55], les appareils de laboratoire : semi-conducteurs, systèmes micro-mécaniques [56], les systèmes miniaturisés et les nano-objets, comme l'industrie des traitements de surfaces et des couches minces [1]. Un grand effort a été consacré à l'étude des propriétés des plasmas quantiques [57]-[64], où le travail de Haas et *al.* [24], est considéré comme un travail fondamental dans ce domaine, étudiant la dynamique des plasmas quantiques. Ces derniers ont été les premiers à étudier l'analogie quantique des ondes acoustiques ioniques, en utilisant un modèle de fluide quantique découlant d'une approche hydrodynamique basée sur le système Wigner-Poisson [1]. Dans cette approche, nous retrouvons les effets de la statistique quantique et de la diffraction quantique se manifestant, respectivement, à travers l'équation d'état et le terme du potentiel de Bohm [1]. Depuis, il y a

eu un regain d'intérêt aux plasmas quantiques, couvrant les différents modes du plasma, les instabilités et d'autres effets non linéaires (qui ont suscité un grand intérêt où nous pouvons citer les travaux [4],[24]). Récemment, et pour donner une contribution aux travaux déjà publiés, Ourabah et Tribeche ont proposé de réexaminer l'onde acoustique ionique quantique (QIA) [6], en ajoutant l'effet d'une autre contribution quantique : le potentiel d'échange et de corrélation pour des électrons d'un plasma à deux composantes constitué d'ions à charge unique positive et d'électrons [65]. Quand les effets quantiques tels que la diffraction quantique et les effets de la statistique quantique, commencent à jouer un rôle important, les effets d'échange et de corrélation ne peuvent plus être négligés [1], leur prise en compte devient donc nécessaire dans la détermination de la dynamique des ondes dans le plasma. Des travaux récents ont montré que l'effet d'échange et de corrélation influence grandement les conditions d'existence des ondes solitaires acoustiques ioniques quantiques. Les principales grandeurs physiques de l'onde sont aussi affectées par cette contribution, telles que la vitesse de phase, l'amplitude et la largeur des solitons [6]. Toutes ces études nous ont poussés [66], à étudier l'influence des effets d'échange et de corrélation sur l'énergie emmagasinée par les solitons de l'onde acoustique ionique quantique (QIA). Rappelons que dans les interactions des solitons, ces derniers peuvent fusionner, se diviser et échanger de l'énergie. Il est utile de noter que plusieurs études ont été faites sur l'énergie du soliton pour différents modèles plasmas [67],[73].

4.2 **Modèle mathématique et équations de base**

Dans l'approche hydrodynamique quantique (QHD), le modèle de Wigner-Poisson fournit un outil d'étude des plasmas quantiques où la densité des particules est élevée et la température très basse. Les effets quantiques apparaissant dans le modèle QHD sont mesurés par la statistique de Fermi-Dirac et le paramètre de diffraction quantique. Les effets d'échange et de corrélation sur la dynamique non linéaire de l'onde QIA sont étudiés dans une approche fluide quantique [6]. Considérons un plasma unidimensionnel et non magnétisé, composé de deux espèces différentes : des électrons et des ions à charge unique positive. La dynamique non linéaire des ondes acoustiques ioniques quantiques est régie par le système hydrodynamique quantique suivant

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$m_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$m_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) = e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{n_e}}{\partial x^2}}{\sqrt{n_e}} \right) - \frac{\partial V_{xc}}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e - n_i) \quad (4.4)$$

où $n_{e,i}$ est la densité des électrons (ions), $u_{e,i}$ est la vitesse fluide électronique (ionique), $m_{e,i}$ est la masse de l'électron (ion), ϕ le potentiel électrostatique, V_{xc} le potentiel d'échange et de corrélation et \hbar est la constante de Planck réduite. La pression P_e s'écrit comme une fonction de la densité [1], elle est donnée par l'équation (2.53)

$$P_e = \frac{m_e V_{Fe}^2}{3n_{e0}^2} n_e^3 \quad (4.5)$$

où $V_{Fe} = \sqrt{2k_B T_{Fe}/m_e}$ est la vitesse de Fermi, T_{Fe} la température de Fermi pour les électrons, k_B la constante de Boltzmann et n_{e0} la densité électronique à l'équilibre. étant donné que la masse des ions est très grande devant celle des électrons ($m_e \ll m_i$), le terme du potentiel de Bohm n'apparaît pas dans les équations fluides des ions. La vitesse de Fermi des ions V_{Fi} étant très petite devant la vitesse de phase ω/k des ondes acoustiques ioniques quantiques [1] et [85], (c'est à dire : $V_{Fi} \ll \frac{\omega}{k}$), l'apport du terme de la pression quantique de Fermi est considérée négligeable dans l'équation (4.2). Par conséquent, les ions se manifestent dans le modèle fluide comme une espèce classique. Le troisième terme dans le membre de droite de l'équation (4.3) représente la contribution du potentiel de Bohm, le dernier terme est la contribution du potentiel effectif du système, par exemple, dans les puits quantiques, le potentiel effectif pour un gaz d'électrons est donné par la somme de trois termes: le potentiel de Hartree, le potentiel de confinement et le potentiel d'échange et de corrélation [74]. Ce dernier terme est obtenu en utilisant le modèle de l'approximation de la densité locale adiabatique (the adiabatic local density approximation (ALDA)), ainsi, le potentiel d'échange et de corrélation s'écrit comme fonction de la densité électronique. Hohenberg et Kohn [75], ainsi que Kohn et Sham [41] ont démontré que la distribution de la densité d'un gaz d'électrons soumis à un champ moyen externe découle de l'équation de Schrödinger à un corps contenant un potentiel d'échange et de corrélation pour les électrons, en plus d'un potentiel de Hartree habituel et le potentiel externe. Un tel potentiel d'échange et de corrélation est donné par [65], $V_{xc} = -0.985(e^2/\varepsilon_0)n_e^{1/3} \left[1 + 0.034/a_B n_e^{1/3} \ln \left(1 + 18.37 a_B n_e^{1/3} \right) \right]$, où $a_B = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} n_e^{2/3}$, en remarquant que $18.37 a_B n_e^{1/3} \ll 1$, l'expression du potentiel effectif peut être développée en séries de puissances (développement de Taylor) au deuxième ordre

[76], soit

$$\begin{aligned}
 V_{xc} &\approx -0.985(e^2/\varepsilon_0)n_e^{1/3} \left[1 + \frac{0.034}{a_B n_e^{1/3}} \left(18.376 a_B n_e^{1/3} - \frac{(18.376 a_B n_e^{1/3})^2}{2} \right) \right] \\
 &\approx -0.985 \left(\frac{e^2}{\varepsilon_0} \right) n_e^{1/3} - \left((0.985) \left(\frac{e^2}{\varepsilon_0} \right) n_e^{1/3} \right) \left(\frac{0.034}{a_B n_e^{1/3}} \right) (18.376 a_B n_e^{1/3}) \\
 &\quad + \left((0.985) \left(\frac{e^2}{\varepsilon_0} \right) n_e^{1/3} \right) \left(\frac{0.034}{a_B n_e^{1/3}} \right) \left(\frac{1}{2} \right) (18.376 a_B n_e^{1/3})^2 \\
 &\approx [(-0.985) - (0.985)(0.034)(18.376)] \left(\frac{e^2}{\varepsilon_0} \right) n_e^{1/3} \\
 &\quad + (0.985)(0.034)(0.5)(18.376)^2 \left(\frac{e^2}{\varepsilon_0} \right) \left(\frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} \right) n_e^{2/3} \\
 &\approx -1.6(e^2/\varepsilon_0)n_e^{1/3} + 5.65(\hbar^2/m_e)n_e^{2/3}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Procédons, à présent, à la normalisation des équations fluides, en faisant le changement de variables suivant: $X = \frac{\omega_{pi}}{c_s} x$, $T = \omega_{pi} t$, $C_s = (\frac{2k_B T_{Fe}}{m_i})^{1/2}$, $\omega_{pi} = (\frac{q_i^2 n_{i0}}{\varepsilon_0 m_i})^{1/2}$, $\Psi = \frac{e\phi}{2k_B T_{Fe}}$, $N_s = \frac{n_s}{n_{s0}}$ et $U_s = u_s/c_s$ avec $s = e$ et i . En introduisant les variables adimensionnelles précédentes dans le système (4.1)-(4.4), nous obtenons

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial(NiU_i)}{\partial X} = 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{N_i}}{\partial X^2}}{\sqrt{N_i}} \right) \tag{4.8}$$

$$\left(\frac{m_e}{m_i} \right) \left(\frac{\partial U_e}{\partial T} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial X} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial X} - N_e \frac{\partial N_e}{\partial X} + \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2}}{\sqrt{N_e}} \right) - \lambda \frac{\partial N_e^{2/3}}{\partial X} + \gamma \frac{\partial N_e^{1/3}}{\partial X} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = N_e - N_i \tag{4.10}$$

où $\lambda = \frac{5.65 \hbar^2 n_{e0}^{2/3}}{2k_B T_{Fe} m_e}$, $\gamma = \frac{1.6 e^2 n_{e0}^{1/3}}{2k_B T_{Fe} \varepsilon_0}$, $H_e = \frac{\hbar \omega_{pe}}{2k_B T_{Fe}}$. Le paramètre adimensionnel H_e mesure la diffraction quantique, c-à-d le rapport entre l'énergie du plasmon des électrons et l'énergie de Fermi de ces derniers, tandis que γ et λ mesurent l'échange et la corrélation. Comme $m_e/m_i \ll 1$, le membre de gauche de l'équation (4.9) sera négligé. En tenant compte des conditions aux limites $\Psi \rightarrow 0$, $N_e \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow \pm \infty$, c'est à dire à l'infini, loin de toute perturbation, nous intégrons l'équation résultante, nous aboutissons à l'équation suivante

$$\Psi = -\frac{1}{2} + \frac{N_e^2}{2} - \frac{H_e^2}{2\sqrt{N_e}} \frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2} - \lambda + \lambda N_e^{2/3} + \gamma - \gamma N_e^{1/3} \tag{4.11}$$

Cette dernière expression montre que le potentiel électrostatique dépend de la densité électronique N_e et des paramètres adimensionnels H_e , λ et γ . Le système précédent s'écrira alors sous la forme

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial(N_i U_i)}{\partial X} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} - N_e \frac{\partial N_e}{\partial X} + \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2}}{\sqrt{N_e}} \right) - \lambda \frac{\partial N_e^{2/3}}{\partial X} + \gamma \frac{\partial N_e^{1/3}}{\partial X} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = N_e - N_i \quad (4.15)$$

Les équations (4.7)-(4.10) fournissent un modèle réduit adapté à l'étude des ondes acoustiques ioniques quantiques (QIA), dans le cas de la prise en considération de la contribution des effets d'échange et de corrélation des électrons du plasma.

4.3 Régime faiblement non linéaire

4.3.1 Equation de Korteweg-de Vries (K-dV)

Pour étudier les effets d'échange et de corrélation sur la propagation des ondes (QIA), dans le cadre du modèle faiblement non linéaire, nous établissons l'équation de type Korteweg-de Vries (K-dV) associée, en utilisant la méthode de la perturbation réductive (stretched variables) [77]. Pour cela, nous introduisons le changement de variables suivant $\xi = \varepsilon^{1/2}(X - v_0 T)$, $\tau = \varepsilon^{3/2} T$ où ε est un paramètre très petit devant l'unité mesurant l'amplitude de la perturbation et v_0 la vitesse de l'onde dans le repère du laboratoire normalisée par C_s la vitesse acoustique. Les variables macroscopiques sont développées en séries de puissance, soient

$$\begin{aligned} N_i &= 1 + \varepsilon N_{i1} + \varepsilon^2 N_{i2} + \dots \\ N_e &= 1 + \varepsilon N_{e1} + \varepsilon^2 N_{e2} + \dots \\ U_i &= \varepsilon U_{i1} + \varepsilon^2 U_{i2} \dots \\ \Psi &= \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

La technique réductive consiste à développer les grandeurs physiques des équations (4.12)-(4.15) selon les différents ordres en ε . Le développement du système au premier ordre en ε , donne

$$-v_0 \frac{\partial N_{i1}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{i1}}{\partial \xi} = 0$$

$$\begin{aligned}
 -v_0 \frac{\partial U_{i1}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} & (4.17) \\
 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial N_{e1}}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \lambda \frac{\partial N_{e1}}{\partial \xi} + \frac{1}{3} \gamma \frac{\partial N_{e1}}{\partial \xi} &= 0 \\
 N_{e1} - N_{i1} &= 0
 \end{aligned}$$

après avoir utilisé les conditions aux limites $\Psi_1 \rightarrow 0$, $N_{e1} \rightarrow 1$ et $N_{i1} \rightarrow 1$, quand $\xi \rightarrow \pm \infty$, (loin de toute perturbation), nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned}
 v_0 N_{i1} &= U_{i1} \\
 v_0 U_{i1} &= \Psi_1 & (4.18) \\
 \Psi_1 &= \left(1 + \frac{2\lambda - \gamma}{3}\right) N_{e1} \\
 N_{e1} &= N_{i1}
 \end{aligned}$$

en combinant le système d'équations précédent, nous obtenons

$$v_0^2 = \left(1 + \frac{2\lambda - \gamma}{3}\right) = \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) \quad (4.19)$$

où nous posons $\eta = 2\lambda - \gamma$, pour que l'équation (4.19) soit toujours valide, une condition est posée sur λ où ce dernier doit vérifier la condition $\lambda > (\gamma - 3)/2$. Le développement du système (4.12)-(4.15) au second ordre en ε , donne le système suivant

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{i1}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial N_{i2}}{\partial \xi} + \frac{\partial(N_{i1}U_{i1})}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{i2}}{\partial \xi} &= 0 \\
 \frac{\partial U_{i1}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial U_{i2}}{\partial \xi} + U_{i1} \frac{\partial U_{i1}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} & (4.20) \\
 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} - N_{e1} \frac{\partial N_{e1}}{\partial \xi} - \frac{\partial N_{e2}}{\partial \xi} + \frac{H_e^2}{4} \frac{\partial^3 N_{e1}}{\partial \xi^3} - \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial N_{e2}}{\partial \xi} + \frac{\lambda}{9} \frac{\partial N_{e1}^2}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial N_{e2}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{9} \frac{\partial N_{e1}^2}{\partial \xi} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} &= (N_{e2} - N_{i2})
 \end{aligned}$$

En éliminant le terme U_{i2} entre l'équation de continuité et l'équation de la force du système (4.20), en injectant les expressions des termes N_{i2} et N_{e2} dans l'équation de Poisson et en posant ($\Psi_1 = \Psi$), nous aboutissons à l'équation de type K-dV suivante

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + A \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.21)$$

avec

$$A = \frac{1}{2v_0} \left[3 + \frac{9 + 2\gamma - 2\lambda}{9v_0^2} \right]$$

et

$$B = \frac{v_0}{2} \left[v_0^2 - \frac{H_e^2}{4v_0^2} \right]$$

représentent respectivement le coefficient non linéaire et le coefficient de dispersion. Notons que l'équation (4.21) est de type Korteweg-de Vries déformée (K-dV déformée), cette dernière reflète les corrections des effets quantiques apparues sur la dynamique non-linéaire des structures solitaires existant dans ce modèle plasma. Nous y retrouvons l'effet de la diffraction quantique introduit par Hass [1] ainsi que les effets d'échange et de corrélation sur ces ondes. En effet, en négligeant les effets d'échange et de corrélation ($\eta \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow 0$), nous retrouvons l'expression de l'équation Korteweg-de Vries déformée (K-dV déformée) [24]. Ce type d'équation admet des ondes solitaires comme solutions. Utilisons, à présent, le changement de variable $x = \xi - M\tau$ et $T = \tau$, où M est la vitesse de l'onde normalisée par C_s . La solution est alors donnée par

$$\Psi = \Psi_m \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{\Delta} \right) \quad (4.22)$$

l'amplitude du soliton est donnée par $\Psi_m = \frac{6M}{\left(\frac{3}{v_0} + \frac{9+2\gamma-2\lambda}{9v_0^3} \right)}$, tandis que sa largeur par $\Delta = \sqrt{2v_0 \left(v_0^2 - \frac{H_e^2}{4v_0^2} \right) / M}$, l'expression de la largeur montre clairement que l'existence de ces structures solitaires est reliée directement à la condition $2v_0^3 - H_e^2/2v_0 > 0$ où $H < 2(2\lambda - \gamma + 3)/3$

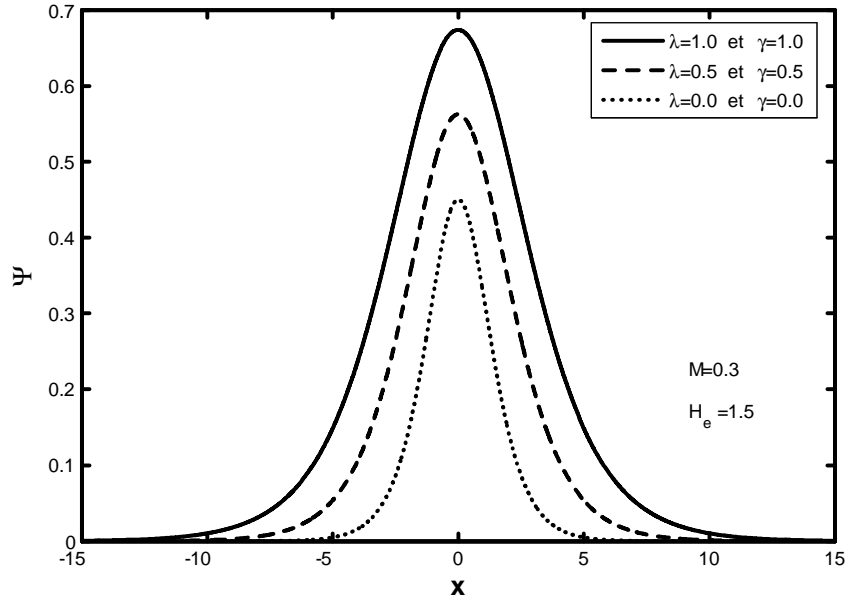


Figure 4.1 : Variation du potentiel électrostatique Ψ en fonction de la coordonnée spatiale X pour différentes valeurs de λ et γ , avec $H_e = 1.5$ et $M = 0.3$.

Récemment [6], des études dans le régime faiblement non-linéaire ont montré que la contribution quantique des effets d'échange et de corrélation peuvent considérablement modifier les principales grandeurs des structures acoustiques ioniques quantiques solitaires QIA, telles que la vitesse de phase, l'amplitude et la largeur, ainsi que les conditions d'existence de ces structures. La figure (4.1) montre la variation du potentiel électrostatique Ψ associé à l'onde solitaire en fonction de la variable spatiale η , pour différentes valeurs de λ et γ , paramètres mesurant l'échange et la corrélation. En effet, le profil des structures solitaires existant dans ce plasma est très sensible à toute modification des valeurs des paramètres d'échange et de corrélation.

La figure (4.1) montre qu'une augmentation des paramètres λ et γ se reflète par une augmentation de l'amplitude du soliton ainsi que de sa largeur. Cela nous amène à nous interroger sur le rôle des effets d'échange et de corrélation sur l'énergie transportée par les solitons de l'onde acoustique ionique quantique. Après avoir développé les grandeurs physiques perturbées, l'énergie de soliton [77]-[78] est exprimée en fonction de la vitesse ionique perturbée au premier ordre

$$\begin{aligned}
 U_{i1} &= \Psi/v_0 \\
 &= \frac{\Psi_m}{v_0} \sec h^2 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right) \\
 &= U_{im} \sec h^2 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

telle que

$$\begin{aligned}
 E_H &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_{i1}^2(\chi) d\chi = \frac{4}{3} \frac{\Delta \Psi_m^2}{v_0^2} \\
 &= \left(\frac{36}{27v_0^2 + 2\gamma - 2\lambda + 9} \right)^2 \sqrt{9M^3 v_0^7 (4v_0^4 - H_e^2) / 2}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

où cette expression montre clairement qu'à la limite ($\lambda \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$) soit ($v_0 \rightarrow 1$), nous obtenons $\sqrt{9M^3(4 - H_e^2)}/2$.

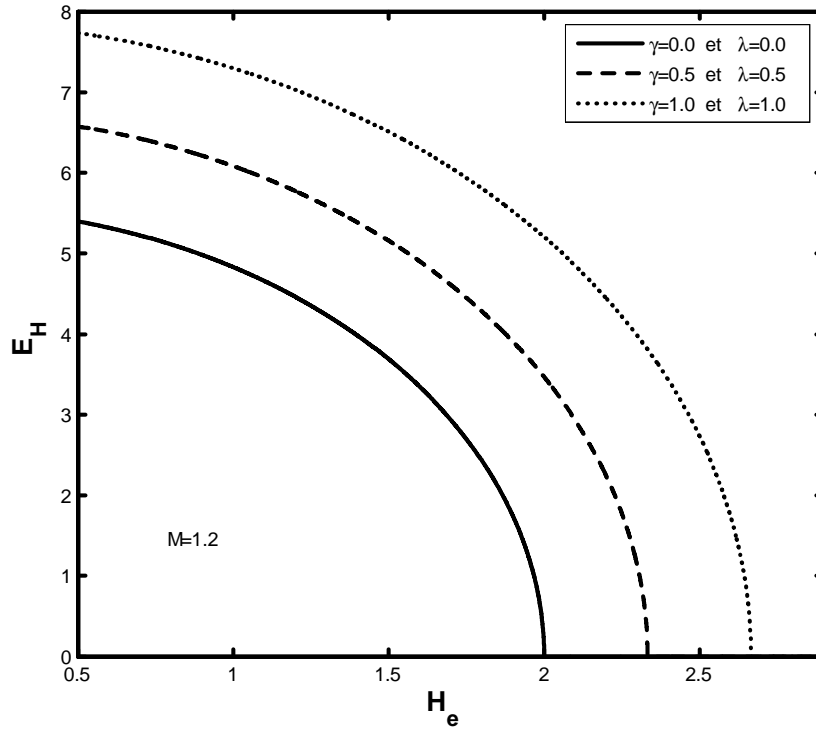


Figure 4.2 : Variation de l'énergie transportée en fonction du paramètre de diffraction quantique H_e pour un nombre de Mach $M = 1.2$, pour différentes valeurs du paramètre $\eta = 0$ ($\gamma = 0, \lambda = 0$), $\eta = 0.5$ ($\gamma = 1/2, \lambda = 1/2$) et $\eta = 1$ ($\gamma = 1, \lambda = 1$).

La figure (4.2) montre la variation de l'énergie du soliton E_H en fonction du paramètre de diffraction quantique H_e , pour différentes valeurs des paramètres d'échange et de corrélation : $\eta = 0$ ($\gamma = 0, \lambda = 0$) est tracée en ligne continue, $\eta = 0,5$ ($\gamma = 1/2, \lambda = 1/2$) est tracée en tirets et $\eta = 1$ ($\gamma = 1, \lambda = 1$) est tracée en pointillés. Il est important de noter que lorsque les effets d'échange et de corrélation ne sont plus négligeables, certaines valeurs du paramètre de diffraction quantique autour de $H_e = 0$ ont été écartées. La figure (4.2) montre que E_H diminue avec l'augmentation de H_e . Il se trouve que l'énergie du soliton QIA décroît en raison des effets quantiques (Fig 4.1). Effectivement, une augmentation de $\eta = 2\lambda - \gamma$ mène qualitativement à des résultats certes similaires quoiqu'avec des valeurs plus élevées de E_H . Par ailleurs, le domaine des valeurs admissibles de H_e s'élargit lorsque $\eta = 2\lambda - \gamma$ augmente. Il se trouve que l'effet d'échange et de corrélation peut contrecarrer la diminution de l'énergie du soliton à cause des effets de diffractions quantiques.

4.4 Conclusion

Pour conclure, lorsque les effets quantiques dans un plasma sont significatifs, les effets d'échange et de corrélation ne peuvent plus être négligés dans l'étude des ondes acoustiques ioniques. A cet effet, nous avons étudié, dans le cadre du modèle hydrodynamique quantique unidimensionnel (dans lequel le terme d'échange-corrélation des électrons est pris en compte), l'influence des effets du potentiel d'échange et de corrélation sur l'énergie transportée par le soliton acoustique ionique quantique. En effet, en considérant le régime faiblement non linéaire, nous avons fait appel à la technique de la perturbation réductive, basée sur les stretched variables, pour établir l'équation de type Korteweg-de Vries déformée (KdV déformée) associée à ce modèle plasma. Nous avons remarqué que la présence des effets de la diffraction quantique influence grandement la quantité d'énergie transportée par la structure solitaire associée à l'onde QIA. Cette dernière diminue à mesure que le paramètre de diffraction quantique augmente. Par ailleurs, les effets d'échange et de corrélation amplifient l'énergie du soliton. Ce qui nous a amené à conclure que les effets d'échange et de corrélation peuvent contrecarrer la diminution de l'énergie quantique qui est due à la diffraction quantique. L'énergie transportée par le soliton acoustique ionique quantique dépend d'un concours entre différents paramètres, à savoir, le potentiel de la diffraction quantique ainsi que les paramètres du potentiel d'échange et de corrélation.

5

Effets du potentiel d'échange et de corrélation sur les structures solitaires acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques

5.1 Introduction

Un grand intérêt a été porté, ces dernières années, sur les plasmas quantiques [1], spécialement en astrophysique [53], dans les objets compacts, les pulsars, les supernovas, les Tokamaks, les systèmes micro-mécaniques [56], les interactions intenses lasers-plasma, la miniaturisation des composants électroniques, le développement de l'informatique quantique [55] etc. Actuellement, de récentes avancées technologiques (notamment dans l'industrie des traitements de surfaces, couches minces. . .) sur les systèmes miniaturisés et les nano-objets ont permis d'envisager des applications technologiques en physique des plasmas [1]. L'une des raisons est que le grand degré de miniaturisation des composants électroniques actuels est tel que la longueur de De Broglie des porteurs de charge $\lambda_{Bj} = \hbar/m_j v_{Tj}$ où j indique les espèces constituant le plasma (électrons, ions, grains de poussières. . .), devient comparable aux dimensions du système, ce qui fait que les effets quantiques (diffraction quantique et effet de la statistique quantique) ne peuvent plus être négligés. C'est la raison pour laquelle, les plasmas quantiques sont devenus un objet d'un grand intérêt [57]-[64]. Récemment, Haas et *al.* [24] ont été les premiers à étudier l'analogie quantique des ondes acoustiques ioniques (QIAW), en utilisant un modèle hydrodynamique quantique QHD [1]. Dès lors,

plusieurs investigations théoriques et expérimentales ont été consacrées à l'étude des plasmas quantiques pour examiner la dynamique et les propriétés de ce type de plasmas, tels que les différents modes plasmas (QDIA, QDA...), les instabilités et autres effets non linéaires [4],[6],[24]. Récemment [6], comme déjà rapporté dans le chapitre IV, Ourabah et Tribeche ont réexaminé les effets de l'échange et de la corrélation [65] sur les ondes acoustiques ioniques quantiques, ainsi que sur la dynamique et les propriétés des structures non linéaires qui leur sont associées. Ces dernières ont fait l'objet d'une multitude de travaux, parmi eux [79],[80],[81]. L'analogie quantique de l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIA) a été récemment étudié [4] en faisant appel au modèle hydrodynamique quantique pour décrire la dynamique d'un plasma à trois espèces de particules chargées: électrons, ions et grains de poussière. Notons que la présence des grains de poussière dans les plasmas modifie les propriétés ainsi que les caractéristiques de l'onde acoustique ionique [25]. Récemment, deux études ont traité l'influence des grains de poussière sur l'onde QDIA, l'une pour des grains de poussière à charge positive, tandis que l'autre pour des grains de poussière à charge négative. Les résultats obtenus ont montré qu'uniquement des structures raréfactives pouvaient exister dans ces plasmas. Notons que ces dernières années, les ondes acoustiques poussiéreuses quantiques ont été largement étudiées [72],[82]. Dans le but de compléter et de fournir de nouveaux aperçus concernant les résultats rapportés dans la référence [4], nous proposons ici de réexaminer les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques non linéaires, lorsque les effets d'échange et de corrélation des électrons sont pris en considération [83].

5.2 Equations de base

Considérons un plasma, non magnétisé et unidimensionnel, composé de trois espèces différentes : des électrons, des ions portant une seule charge positive et des grains de poussière chargés négativement, $q_d = -Z_d e$. Les grains de poussière de densité n_d sont considérés immobiles à cause de leur grande inertie relativement aux ions ($m_i \ll m_d$), ainsi qu'à l'échelle caractéristique temporelle du mouvement des grains très longue par rapport à celle de l'onde acoustique ionique poussiéreuse. Par conséquent $n_d = n_{d0}$. Par contre, les électrons et les ions sont considérés fluides. Dans le but d'examiner l'influence des effets du potentiel d'échange et de corrélation sur l'onde acoustique ionique poussiéreuse (QDIA), nous utilisons l'approche hydrodynamique quantique, régissant la dynamique de ce type d'ondes, et donnée par le système suivant

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

$$m_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_i} / \partial x^2}{\sqrt{n_i}} \right) \quad (5.2)$$

$$m_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) = e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n_e} / \partial x^2}{\sqrt{n_e}} \right) - \frac{\partial V_{eff}}{\partial x} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_e + z_d n_d - n_i) \quad (5.4)$$

où $n_{e,i}$ est la densité des électrons (ions), $u_{e,i}$ est la vitesse fluide électronique (ionique), $m_{e,i}$ est la masse de l'électron (ion), ϕ est le potentiel électrostatique et \hbar est la constante de Planck réduite. Notons que les électrons (ions) obéissent à la loi de pression à une dimension (voir chapitre 2),

$$P_{e,i} = \frac{m_{e,i} V_{Fe,i}^2}{3n_{e0,i}^2} n_{e,i}^3 \quad (5.5)$$

où $V_{Fe,i}$ est la vitesse de Fermi des électrons (ions), notons que la vitesse de Fermi des ions est très petite devant la vitesse de phase des ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques QDIA, (c'est à dire : $V_{Fi} \ll \omega/k$) [1],[85]. En effet, la pression quantique est négligée dans l'équation (5.2), le terme proportionnel à \hbar^2 dans l'équation (5.3) est la contribution du potentiel de Bohm [1], le dernier terme est la contribution du potentiel d'échange et de corrélation, $V_{xc} = -0.985(e^2/\varepsilon_0)n_e^{1/3} \left[1 + 0.034/a_B n_e^{1/3} \ln \left(1 + 18.37 a_B n_e^{1/3} \right) \right]$ [65]. Il peut être réduit à l'expression suivante (voir chapitre 4)

$$V_{xc} \approx -1.6(e^2/\varepsilon_0)n_e^{1/3} + 5.65(\hbar^2/m_e)n_e^{2/3} \quad (5.6)$$

Dans le but d'étudier et d'analyser les effets du potentiel d'échange et de corrélation sur la dynamique des ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques dans l'approche hydrodynamique quantique, nous commençons par normaliser les grandeurs physiques. Pour cela, nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes $X = \frac{\omega_{pi}}{c_s} x$, $T = \omega_{pi} t$, $c_s = (2k_B T_{Fe})^{1/2}$, $\omega_{pi} = (\frac{q_i^2 n_{i0}}{\varepsilon_0 m_i})^{1/2}$, $\Psi = \frac{e\phi}{2k_B T_{Fe}}$, $N_s = \frac{n_s}{n_{s0}}$, $U_s = \frac{u_s}{c_s}$, $s = e$ et i , le système (5.1)-(5.4) précédent s'écrira alors sous la forme

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial (N_i U_i)}{\partial X} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} + \mu \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{N_i} / \partial X^2}{\sqrt{N_i}} \right) \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{m_e}{m_i} \right) \left(\frac{\partial U_e}{\partial T} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial X} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial X} - N_e \frac{\partial N_e}{\partial X} + \mu \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{N_e} / \partial X^2}{\sqrt{N_e}} \right) - \lambda \frac{\partial N_e^{2/3}}{\partial X} + \gamma \frac{\partial N_e^{1/3}}{\partial X} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = \frac{N_e}{\mu} - N_i + \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \quad (5.10)$$

où $\mu = \frac{n_{i0}}{n_{e0}} = 1 + \frac{Z_d n_{d0}}{n_{e0}}$, $\lambda = \frac{5.65 \hbar^2 n_{e0}^{2/3}}{2k_B T_{Fe} m_e}$, $\gamma = \frac{1.6 e^2 n_{e0}^{1/3}}{2k_B T_{Fe} \epsilon_0}$ et $H_e = \frac{\hbar \omega_{pe}}{2k_B T_{Fe}}$ est le paramètre adimensionnel, H_e mesure la diffraction quantique, λ et γ mesurent l'échange et la corrélation. Puisque les paramètres λ et γ dépendent de la densité électronique, on peut écrire $\lambda = \frac{5.65 \epsilon_0 \hbar^2}{1.6 m_e e^2} n_{e0}^{1/3} \gamma$. Dans le cas où la densité électronique est de l'ordre de $10^{29} m^{-3}$ (cas des métaux) [1], on peut déduire les valeurs de λ et γ pour toute densité électronique. Comme $m_e/m_i \ll 1$, la contribution de la diffraction quantique dans l'équation du mouvement de l'ion (5.8) ainsi que le membre de gauche de l'équation (5.9) sont négligés. Nous aboutissons ainsi au système réduit

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial(N_i U_i)}{\partial X} = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} - N_e \frac{\partial N_e}{\partial X} + \mu \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{N_e} / \partial X^2}{\sqrt{N_e}} \right) - \lambda \frac{\partial N_e^{2/3}}{\partial X} + \gamma \frac{\partial N_e^{1/3}}{\partial X} = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} = \frac{N_e}{\mu} - N_i + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \quad (5.14)$$

Notons, que suivant les conditions aux limites $\Psi \rightarrow 0$, $N_e \rightarrow 1$ quand $X \rightarrow \pm \infty$, en intégrant l'expression de l'équation (5.13), nous arrivons à une forme plus simple qui donne le potentiel électrostatique en fonction de la densité électronique N_e et des paramètres adimensionnels H_e , λ et γ

$$\Psi = -\frac{1}{2} + \frac{N_e^2}{2} - \frac{\mu H_e^2}{2\sqrt{N_e}} \frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2} - \lambda + \lambda N_e^{2/3} + \gamma - \gamma N_e^{1/3} \quad (5.15)$$

Le système d'équations (5.11)-(5.14) peut être simplifié en régime linéaire, où la linéarisation des grandeur physique au tour de leur valeur d'équilibre plus une solution sous forme d'une onde plane, nous permet de déduire la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique.

$$\omega^2 = \frac{\mu k^2 \left(1 + \frac{\mu H_e^2 k^2}{4} + \frac{2\lambda}{3} - \frac{\gamma}{3}\right)}{1 + \mu k^2 \left(1 + \frac{\mu H_e^2 k^2}{4} + \frac{2\lambda}{3} - \frac{\gamma}{3}\right)} \quad (5.16)$$

On notera qu'en annulant les effets d'échange et de corrélation ($\lambda \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$), nous retrouvons la relation de dispersion déjà trouvée dans [5].

5.3 Régime faiblement non linéaire

5.3.1 Etablissement de l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV)

Dans le régime faiblement non linéaire, nous étudions le domaine où les perturbations sont très faibles (mais finies) devant les grandeurs physiques qui caractérisent le plasma

à l'équilibre. Ceci nous conduit à utiliser la méthode de la perturbation réductive (stretched variables) [86]. Cette méthode consiste à introduire les changements de variables suivants $\xi = \varepsilon^{1/2}(X - v_0T)$, $\tau = \varepsilon^{3/2}T$ où ε est un paramètre très petit ($0 < \varepsilon \leq 1$), mesurant l'amplitude de la perturbation et v_0 la vitesse de l'onde dans le repère du laboratoire, normalisée par Cs . Ainsi, les variables macroscopiques sont développées en séries de puissance

$$\begin{aligned} N_i &= 1 + \varepsilon N_{i1} + \varepsilon^2 N_{i2} + \dots \\ N_e &= 1 + \varepsilon N_{e1} + \varepsilon^2 N_{e2} + \dots \\ U_i &= \varepsilon U_{i1} + \varepsilon^2 U_{i2} \dots \\ \Psi &= \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Nous développons les grandeurs physiques du système d'équations (5.11)-(5.14) selon les différents ordres en ε . Le développement du système au premier ordre en ε donne les grandeurs perturbées au premier ordre

$$\begin{aligned} v_0 N_{i1} &= U_{i1} \\ v_0 U_{i1} &= \Psi_1 \\ \Psi_1 &= \left(1 + \frac{2\lambda - \gamma}{3}\right) N_{e1} = \rho N_{e1} \\ \frac{N_{e1}}{\mu} - N_{i1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

où $\rho = 1 + \frac{2\lambda}{3} - \frac{\gamma}{3}$. En combinant le système d'équations précédent, nous obtenons l'expression de v_0 , donnée par

$$v_0^2 = \rho\mu = \left(1 + \frac{2\lambda - \gamma}{3}\right)\mu \quad (5.19)$$

Le développement au second ordre en ε nous permet d'obtenir le système suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{i1}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial N_{i2}}{\partial \xi} + \frac{\partial(N_{i1}U_{i1})}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{i2}}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial U_{i1}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial U_{i2}}{\partial \xi} + U_{i1} \frac{\partial U_{i1}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \\ 0 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} - N_{e1} \frac{\partial N_{e1}}{\partial \xi} - \frac{\partial N_{e2}}{\partial \xi} + \mu \frac{H_e^2}{4} \frac{\partial^3 N_{e1}}{\partial \xi^3} - \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial N_{e2}}{\partial \xi} + \frac{\lambda}{9} \frac{\partial N_{e1}^2}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial N_{e2}}{\partial \xi} - \frac{\gamma}{9} \frac{\partial N_{e1}^2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} &= \left(\frac{N_{e2}}{\mu} - N_{i2}\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

En éliminant le terme U_{i2} de l'équation de continuité et de l'équation de la force du système (5.20), puis en injectant les expressions des termes N_{e2} et N_{i2} dans l'équation de Poisson,

ensuite, en utilisant les expressions des grandeurs physiques du premier ordre ($N_{e1} = \mu N_{i1} = \mu \frac{U_{i1}}{v_0} = \frac{\Psi_1}{\rho} = \frac{U(\xi, \tau)}{\rho}$), en posant $\Psi_1 = U(\xi, \tau)$, nous obtenons l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV) suivante

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + AU \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (5.21)$$

où

$$A = \frac{v_0}{2} \left[\frac{3}{v_0^2} + \frac{9 + 2\gamma - 2\lambda}{9\rho^2} \right]$$

et

$$B = \frac{v_0}{2} \left[v_0^2 - \frac{\mu H_e^2}{4\rho} \right]$$

Notons qu'en l'absence des effets d'échange et de corrélation ($\lambda \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0$), nous retrouvons l'équation (K-dV) déjà trouvée par Tribeche et *al.* [5]. L'équation (5.21) admet des solutions stationnaires. Pour les déterminer, nous introduisons les nouvelles variables $t = \tau$ et $\eta = \xi - M\tau$ dans l'équation (5.21) où M est la vitesse de l'onde normalisée par C_s , et en tenant compte des conditions aux limites pour des perturbations localisées, tels que : $U \rightarrow 0, \partial U / \partial \xi \rightarrow 0$ et $\partial^2 U / \partial \xi^2 \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow \pm \infty$, nous obtenons

$$U = U_m \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right) \quad (5.22)$$

l'amplitude du soliton est donnée par $U_m = 3M/A = \frac{6M}{\sqrt{\rho\mu} \left[\frac{3}{\rho\mu} + \frac{9+2\gamma-2\lambda}{9\rho^2} \right]}$ et sa largeur par $\Delta = \sqrt{(4B/M)} = \sqrt{2\sqrt{\rho\mu} \left[\rho\mu - \frac{\mu H_e^2}{4\rho} \right]} / M$.

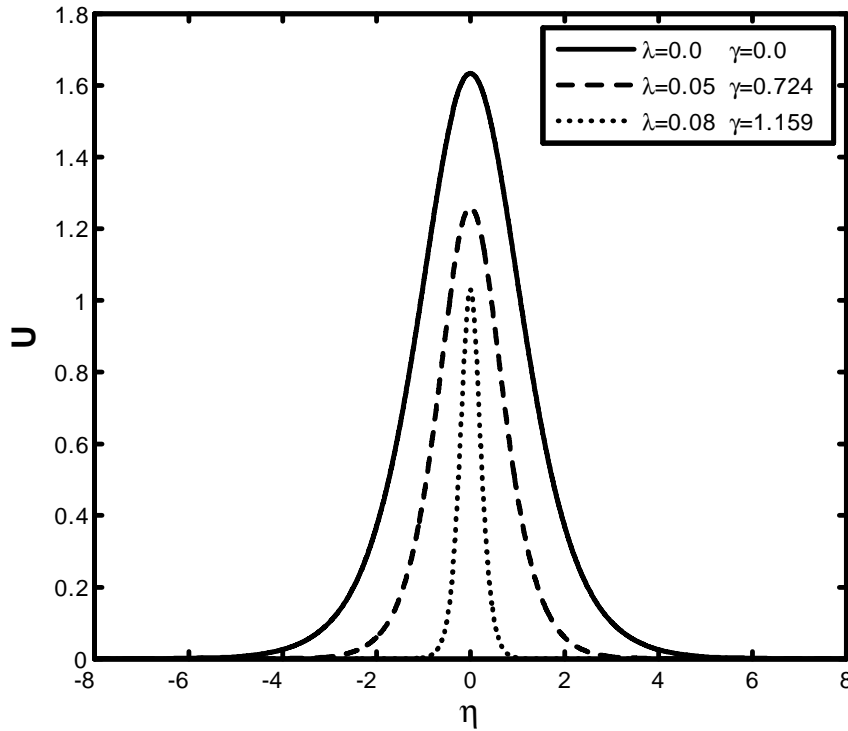


Figure 5.1 : Variation du potentiel électrostatique U en fonction de la coordonnée spatiale η pour différentes valeurs de λ et γ avec $\mu = 1.5$, $M = 1$ et $H_e = 1.3$.

La figure 5.1 représente la variation spatiale d'une structure solitaire de l'onde QDIA, pour différentes valeurs des paramètres λ et γ qui mesurent le potentiel d'échange et de corrélation. La figure montre clairement que les quantités principales qui caractérisent la propagation de l'onde solitaire QDIA sont nettement influencées par les paramètres d'échange et de corrélation, les structures solitaires se rétrécissent dès que les effets d'échange et de corrélation deviennent importants. Notons que, bien que les effets de la diffraction quantique ne modifient pas l'amplitude des ondes solitaires QDIA, les effets d'échange et de corrélation affectent sensiblement les amplitudes de ces ondes (voir figure 5.1).

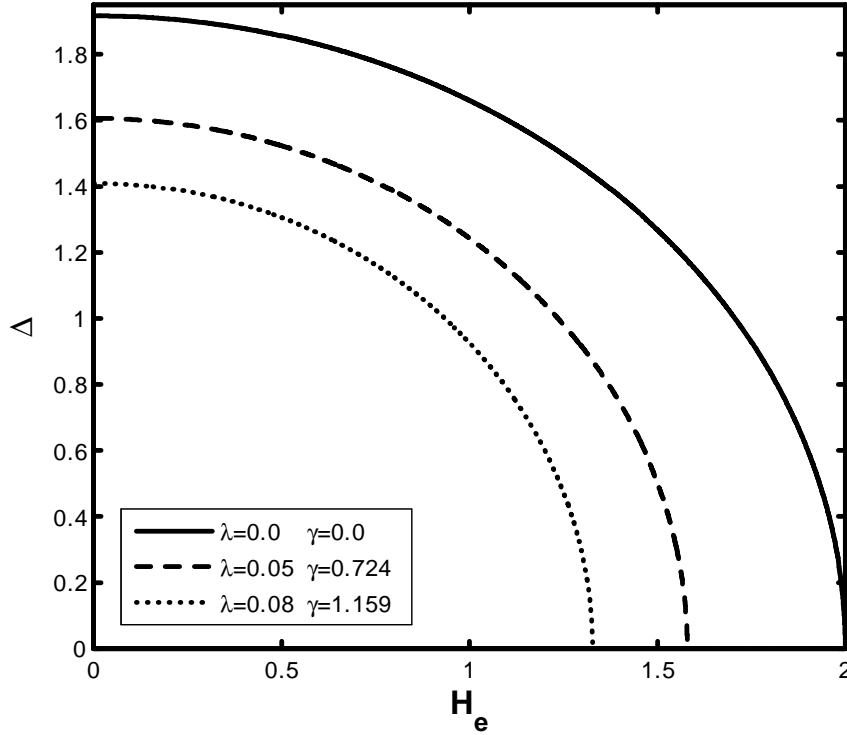


Figure 5.2 : Variation de la largeur Δ d'une onde solitaire QDIA en fonction du paramètre de diffraction quantique H_e pour différentes valeurs de λ et γ , avec $\mu = 1.5$, $M = 1$ et $H_e < 2$.

La figure 5.2 représente la variation de la largeur d'une structure solitaire de l'onde QDIA en fonction du paramètre de diffraction quantique H_e , pour différentes valeurs des paramètres λ et γ . Notons qu'une augmentation dans les valeurs de λ et γ diminue la gamme des valeurs admissibles du paramètre de diffraction quantique H_e . Ces résultats confirment que le potentiel d'échange et de corrélation peut affecter l'énergie transportée (E_H) par les structures solitaires QDIA. Nous adoptons les mêmes cheminements cités dans le chapitre 4, pour arriver à l'expression de l'énergie suivante

$$E_H = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{i1}^2(\chi) d\chi = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{(4B/M)}}{\rho\mu} \left(\frac{3M}{A} \right)^2 = \frac{24\sqrt{B}M^{3/2}}{A^2\rho\mu} \quad (5.23)$$

5.4 Régime de l'amplitude arbitraire

Dans le but d'examiner les effets d'échange et de corrélation sur la dynamique des ondes QDIA localisées dans le régime arbitraire, nous ferons appel à la méthode du pseudo-potential de Sagdeev [87], cette dernière consiste à effectuer le changement de variable suivant $\xi = X - MT$, où M est la vitesse de l'onde normalisée par C_s . En tenant compte

des conditions aux limites $\Psi \rightarrow 0$, $U_i \rightarrow 0$, $N_i \rightarrow 1$, quand $\xi \rightarrow \pm\infty$, (loin de toute perturbation), nous intégrons les équations (5.11),(5.12). Nous obtenons

$$N_i = \frac{M}{\sqrt{2\left(\frac{M^2}{2} - \Psi\right)}} \quad (5.24)$$

En injectant l'expression de la densité ionique N_i , donnée par l'équation (5.24) et l'expression de la densité électronique donnée par l'équation (5.15), dans l'équation de Poisson, on obtient le système suivant

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = \frac{A^2}{\mu} - \frac{M}{\sqrt{2\left(\frac{M^2}{2} - \Psi\right)}} + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = \frac{A}{\mu H^2} \left[-1 - 2\lambda + 2\gamma + A^4 + 2\lambda A^{4/3} - 2\gamma A^{2/3} - 2\Psi\right] \quad (5.26)$$

où $N_e = A^2$, notons que pour obtenir le pseudo-potentiel de Sagdeev, nous multiplions les deux membres de l'équation (5.14) par $\partial\Psi/\partial\xi$, puis en tenant compte des conditions aux limites $\Psi \rightarrow 0$, $U_i \rightarrow 0$, $N_i \rightarrow 1$, quand $\xi \rightarrow \pm\infty$, nous intégrons l'équation résultante, nous arrivons ainsi à la quadrature [87] suivante

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)^2 + V(\Psi) = 0 \quad (5.27)$$

où $V(\Psi)$ représente le potentiel de Sagdeev [87], il s'écrit, dans notre modèle, comme

$$V(\Psi) = \frac{-1}{\mu} \int_0^\Psi A^2 d\Psi - M^2 \left(1 - \frac{2\Psi}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \Psi + M^2 \quad (5.28)$$

Nous procédons maintenant à la présentation de nos résultats numériques. Les équations (5.25) et (5.26) sont intégrées numériquement en utilisant un schéma approprié pour des problèmes complexes ce qui, généralement, pose des difficultés de calcul [4]. Pour simplifier, nous avons résolu notre système d'équations différentielles en considérant que le système d'équations (5.25) et (5.26) possède des valeurs initiales, $A_0(\xi = 0) = 1$, $(\partial A/\partial \xi)_{\xi=0} = -10^{-7}$, $\Psi_0(\xi = 0) = 0$ et $(\partial\Psi/\partial\xi)_{\xi=0} = 0$. La résolution numérique du système précédent nous permet de voir l'évolution du potentiel électrostatique en fonction de la coordonnée spatiale ξ , dans le but de montrer l'influence du potentiel d'échange et de corrélation.

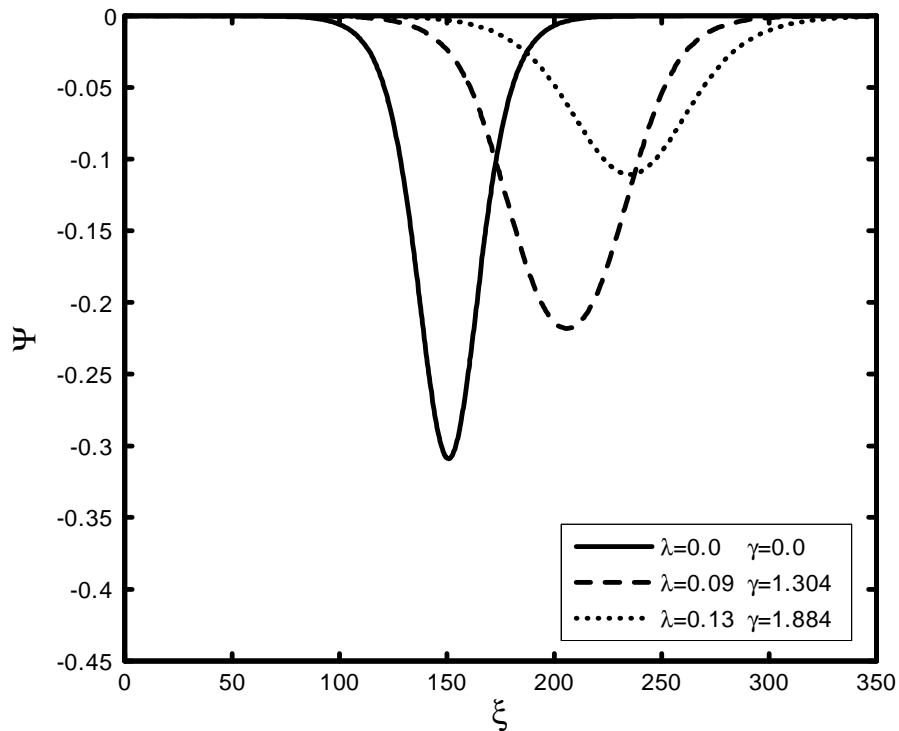


Figure 5.3 : Variation du potentiel électrostatique Ψ en fonction de la coordonnée spatiale ξ pour différentes valeurs de λ et γ , avec $\mu = 3$, $M = 0.7$ et $H_e = 10$.

Nous avons tracé sur les figures 5.3, 5.4 et 5.5 les profils spatiaux du potentiel électrostatique, pour plusieurs valeurs des paramètres λ et γ . Ainsi, dans la figure 5.3, nous avons choisi les paramètres ($M = 0.7$, $H_e = 10$ et $\mu = 3$) de telle sorte que les conditions d'existence des solutions soient respectées [4]. Notons que les conditions d'existence de ces structures solitaires sont sensiblement affectées par une variation même petite des paramètres λ et γ . Cette figure montre clairement que l'amplitude et la largeur des solitons QDIA sont considérablement affectées par les nouveaux paramètres λ et γ qui mesurent le potentiel d'échange et de corrélation. Une augmentation dans les valeurs de λ et γ induit une augmentation dans la largeur du soliton, tandis que l'amplitude (la profondeur) diminue. La figure 5.3 illustre que les effets d'échange et de corrélation conduisent à un étalement de la non linéarité des structures solitaires et par, conséquent, le domaine du régime arbitraire devient plus large.

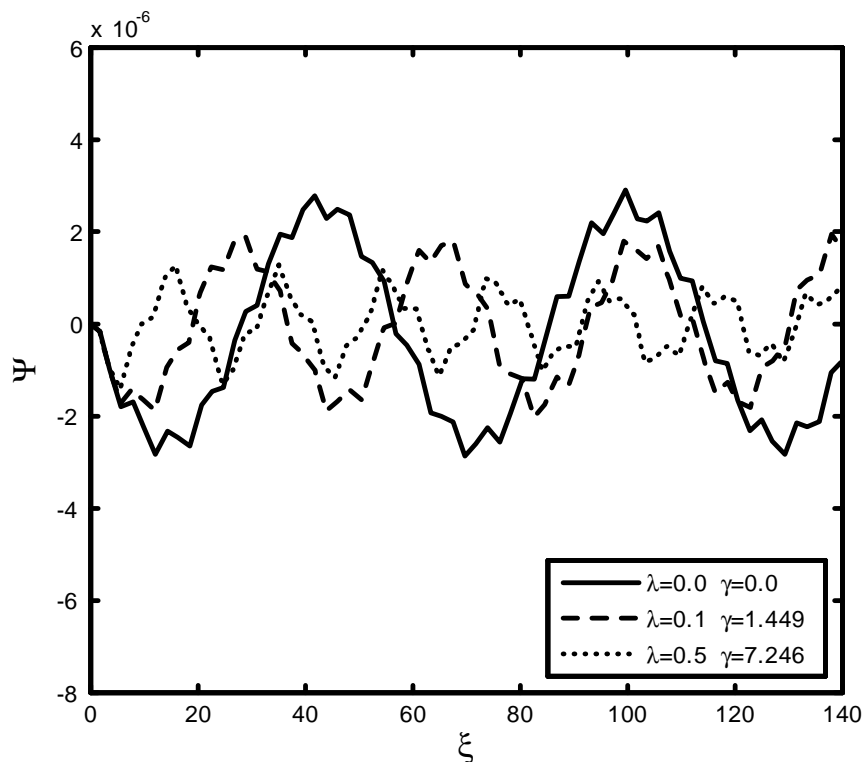


Figure 5.4 : Le potentiel électrostatique Ψ en fonction de la coordonnée spatiale ξ , pour différentes valeurs de λ et γ , avec $\mu = 1.1$, $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

Sur la figure 5.4, nous pouvons constater une autre structure qui se présente dans les ondes QDIA, remarquées auparavant par Haas et *al.* [24], représentant des structures en oscillations périodiques qui peuvent être attribuées à des récurrences quantiques.

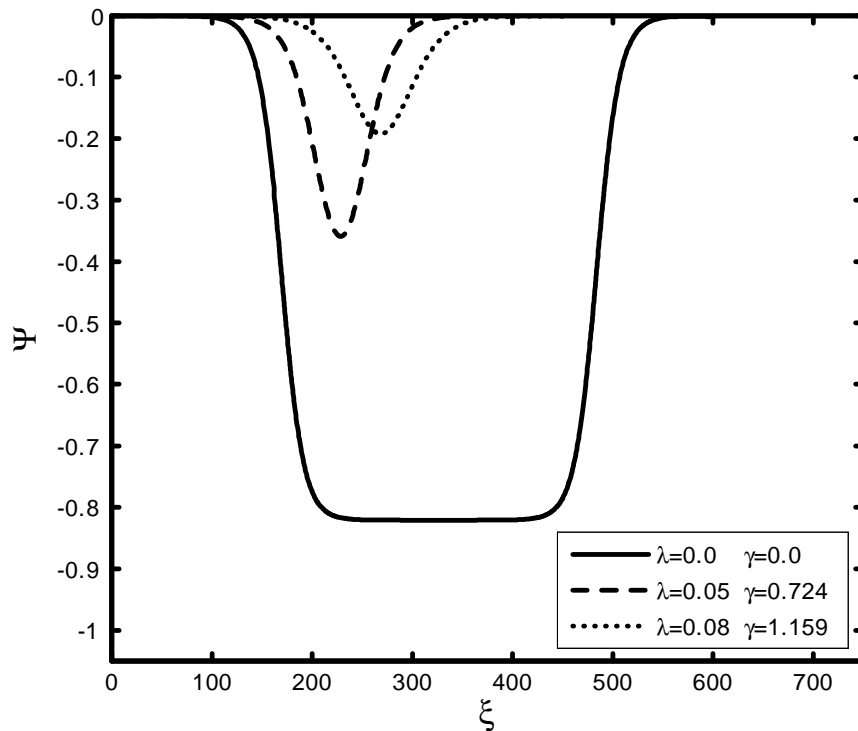


Figure 5.5 : Variation du potentiel électrostatique Ψ en fonction de la coordonnée spatiale ξ pour différentes valeurs de λ et γ , avec $\mu = 3.16$, $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

La figure 5.5 montre clairement que les nouveaux paramètres λ et γ , mesurant les effets d'échange et de corrélation, empêchent la formation des solitons de type sommet plat (flat-bottomed) [7], ces derniers sont sensiblement affectés, ils se rétrécissent avec l'augmentation des valeurs de λ et γ et par conséquent les effets d'échange et de corrélation ne favorisent pas l'émergence de ces structures. Rappelons que cette structure particulière a été retrouvée pour les paramètres suivants $\mu = 3.16$, $M = 1.2$, $H_e = 10$ et $(\lambda = \gamma = 0)$ [4].

5.5 Conclusion

Pour conclure, nous avons analysé les effets d'échange et de corrélation des électrons sur l'onde acoustique ionique poussiéreuse QDIA dans un plasma quantique constitué de trois espèces : des grains de poussière immobiles, des ions et des électrons fluides, obéissant à l'approche hydrodynamique quantique QHD où le potentiel d'échange et de corrélation des électrons est inclus dans l'équation de mouvement des électrons. Dans une première étape, nous avons étudié ces effets sur l'onde QDIA, en régime arbitraire, nous avons examiné l'influence des paramètres λ et γ , mesurant les effets d'échange et de corrélation sur l'onde

QDIA. Le profil spatial de ces ondes est sensiblement affecté, ainsi que les amplitudes arbitraires qui subissent un rétrécissement, lorsque ces effets deviennent importants. Les oscillations périodiques sont aussi considérablement modifiées. Une augmentation de λ et γ induit une diminution de l'amplitude de ces ondes. De ce fait, nos résultats montrent que les effets d'échange et de corrélation empêchent la formation des solitons de type sommet plat (flat-bottomed), de plus, ils ne favorisent pas leur émergence. Dans une seconde étape, nous avons étudié les effets du potentiel d'échange et de corrélation sur les ondes QDIA, en régime faiblement non-linéaire. Nous avons utilisé la technique de la perturbation réductive pour établir une équation de type K-dV. L'amplitude et la largeur de la solution stationnaire (sous la forme de structures solitaires) de ce type d'équations sont considérablement modifiées, ces dernières sont rétrécies, lorsque les effets d'échange-corrélation deviennent importants. Nous espérons que les résultats précédents de notre étude pourraient avoir une application dans les plasmas quantiques poussiéreux auto-gravitants en astrophysique [88].

6

Effet du piégeage des électrons quantiques sur la propagation des ondes acoustiques ioniques dans l'approche non extensive

6.1 Introduction

Les plasmas quantiques ont récemment suscité un intérêt croissant [1],[89], essentiellement en raison des observations spatiales (étoiles à neutrons, naines blanches etc) [90]-[92], des nouvelles expériences expérimentales aux laboratoires (thermalisation ultra rapide des plasmas de laser [93], free electron laser excited plasmas (FEL plasma) [94] et du confinement inertiel dans les expériences de plasma de fusion [95] etc.). D'autre part, les plasmas quantiques sont, actuellement, d'un intérêt croissant lié principalement à leurs applications potentielles à la technologie moderne, [96],[97] telles les nanostructures métalliques, les semi-conducteurs, les nanoparticules, les clusters, les films métalliques minces, les nanotubes, le quantum Wells et les dots quantiques etc.). La miniaturisation des semi-conducteurs et les objets nanométriques ont permis de découvrir des applications pratiques des plasmas quantiques. Actuellement, le grand degré de miniaturisation des composants électroniques est de l'ordre de la longueur d'onde de De Broglie de l'électron λ_B qui est comparable à la distance moyenne entre les électrons r_0 , ainsi que $\lambda_B \ll \lambda_L$ où λ_L est la longueur de Landau [98], représentant la distance pour laquelle l'énergie potentielle d'interaction entre deux électrons est égale à leur énergie cinétique d'agitation thermique ($\lambda_L = e^2/4\pi\epsilon_0 k_B T$). Il y

a eu, en effet, un regain d'intérêt pour les plasmas quantiques, couvrant les différents modes de plasma [4],[6], tels que les instabilités et d'autres effets non linéaires [57]-[24]. Récemment, Ourabah et Tribeche [6] ont réexaminé l'onde acoustique ionique quantique (QIA), en introduisant les effets d'une autre contribution quantique : le potentiel d'échange et de corrélation des électrons [65], cet effet découle en fait de l'anti-symétrie totale de la fonction d'onde de l'électron. Notons que les effets de ce potentiel ne peuvent généralement pas être négligés lorsque les effets quantiques apparaissent. Il a été montré que les principales quantités physiques (vitesse de phase, amplitude et largeur) et les conditions d'existence des ondes solitaires QIA, sont considérablement influencées par les effets d'échange et de corrélation [79]-[81]. Différents modèles de transport quantique ont été développés [64], où le modèle hydrodynamique quantique (QHD) est constitué d'un ensemble fermé d'équations décrivant le transport de la charge, la quantité de mouvement et l'énergie dans un système de particules chargées grâce à une interaction de potentiel électrostatique auto-consistant. Ce modèle est considéré comme une extension du modèle fluide classique, avec une nouvelle contribution due aux effets quantiques découlant de ce qu'on appelle le potentiel de Bohm. Notons que les équations du modèle QHD peuvent être obtenues à partir des équations de Hartree auto-cohérentes [97], ou à partir de l'évolution de la fonction de distribution de Wigner couplée avec l'équation de Poisson [99]. L'application de l'approche hydrodynamique QHD est limitée [100] aux systèmes physiques dont les interactions à longue portée dues au potentiel électrostatique auto-consistant dominant les collisions à courte portée entre les particules, autrement dit, il est valide seulement dans les cas de faible couplage [1],[2]. D'autre part, le piégeage des particules [101]-[106] est un effet non linéaire commun dans les plasmas de l'espace, les laboratoires et les expériences numériques (les simulations). Certaines particules du plasma sont confinées par l'onde dans une région finie de l'espace des phases, elles ne quittent jamais le puits de potentiel en faisant un mouvement d'aller-retour. La première méthode analytique pour construire les structures en équilibre électrostatique impliquant le piégeage des particules a été faite par Bernstein, Green et Kruskal (BGK) [107]. Par la suite, Gurevich [108] a considéré le piégeage comme un phénomène microscopique. Pour surmonter les difficultés de la méthode (BGK), Schamel [109] a développé une autre méthode, appelé la méthode du pseudo-potentiel afin d'élaborer des solutions à équilibre. Récemment, Shah et *al.* [38] ont étudié l'effet du piégeage sur la formation des structures solitaires dans un plasma quantique. Ils ont utilisé la fonction de distribution de Fermi-Dirac pour des électrons dégénérés, aboutissant ainsi à l'expression de la densité électronique qui tient compte du piégeage des électrons dans un puits de potentiel électrosta-

tique. Ces effets apparaissent sous les structures solitaires qui peuvent exister dans ce genre de plasma sous leurs deux natures ; structures compressives et raréfactives. Mentionnons ici que les travaux de ces derniers sont basés sur des calculs approximatifs (voir pour plus de détails le chapitre 2). Notons que dans les plasmas quantiques [38] et [111], les travaux qui examinent le piégeage des particules comme un phénomène microscopique, sont relativement peu nombreux. D'autre part, le modèle de la statistique de Fermi-Dirac [3] a été reformulé en intégrant l'expression de l'entropie non extensive [112]. Notons que les plasmas non extensifs, couvrent différents modes de plasma, tels que les instabilités et d'autres effets de phénomènes collectifs [13]-[16]. Cet intérêt a été principalement motivé par le fait que, pendant les deux dernières décennies, il a été démontré que les systèmes dotés d'interactions de longue portée ou une mémoire de longue durée, ne peuvent être traités correctement dans le cadre de la statistique classique de Boltzmann-Gibbs (BG). Tsallis [3], ayant introduit son travail en 1988, a proposé une généralisation non extensive de l'entropie BG afin de remédier à cette limite, cette généralisation a été mise en évidence par Renyi [17] et par la suite introduite par Tsallis. La non extensivité signifie que l'entropie S_{AB} de la composition ($A + B$) de deux systèmes indépendants A et B dont l'entropie est respectivement S_A et S_B est égal à $S_q^{(A+B)} = S_q^{(A)} + S_q^{(B)} + (1 - q) S_q^{(A)} S_q^{(B)}$ où q est un paramètre mesurant la non extensivité du système, (quand $q \rightarrow 1$, nous retrouvons la statistique standard BG). A notre connaissance, la combinaison entre les effets quantiques et les effets de la statistique non extensive sur le piégeage des particules n'a jamais été prise en compte dans la littérature. Nous proposons de reformuler et de réexaminer le piégeage des électrons dans un plasma quantique [113], en utilisant la fonction de distribution de Fermi-Dirac généralisée, suivant Landau et Lifshitz [114], nous dérivons d'abord une nouvelle densité électronique généralisée, puis nous analysons les modifications survenant dans la propagation de l'onde acoustique ionique solitaire.

6.2 Equations de base

6.2.1 Calcul de la densité électronique

Dans le but d'établir l'expression généralisée de la densité des électrons dégénérés, piégés dans un champ électrostatique considéré comme une onde qui peut interagir avec les particules dans un processus adiabatique. Cette étude est faite dans le cadre de la statistique non extensive où la fonction de distribution non extensive q -Fermi-Dirac déformée, remplace la

fonction de Fermi Dirac habituelle. Cette dernière prend en considération les effets de la statistique quantique ainsi que ceux de la statistique non extensive. Elle est donnée par [112],

$$f^{(q)}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \{1 + (q-1)[(\varepsilon - e\phi - \mu)/T]\}^{q/q-1}} & \text{si } 1 + (q-1)[(\varepsilon - e\phi - \mu)/T] > 0 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.1)$$

où m_e la masse de l'électron, e sa charge, T est la température en unité d'énergie, $\varepsilon = P^2/2m_e$ l'énergie cinétique de l'électron, ϕ le potentiel électrostatique, μ le potentiel chimique. Nous avons $1 + (q-1)[(\varepsilon - e\phi - \mu)/T] > 0$ et $q > 1$. En présence d'un champ électrostatique, l'énergie totale de la particule (dans notre cas l'électron) est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle [11], l'énergie totale est alors donnée par l'expression suivante $E_T = \varepsilon - e\phi$. D'après Landau et Lifshitz [114], le potentiel électrostatique peut confiner les électrons dans un puits de potentiel. En effet, les électrons ayant des énergies, telles que $\varepsilon - e\phi > 0$ sont considérés comme étant des particules libres, puisqu'ils ont réussi à s'échapper de ce puits, cependant, les électrons qui ont une énergie totale $\varepsilon - e\phi < 0$ sont considérés comme étant des électrons confinés dans le puits, ou encore particules piégées. Notons que lorsque $q \rightarrow 1$, l'équation (6.1) se réduit à distribution de Fermi-Dirac, cependant à la température nulle ($T = 0$), elle se réduit à la fonction de Heaviside. Pour calculer la densité des fermions suivant la distribution q -Fermi-Dirac, nous utilisons l'expression (2.65) [38], où nous y introduisons l'expression de la probabilité associée à la statistique q -Fermi-Dirac [3]. L'expression de cette densité est alors donnée par [112]

$$N_e^{(q)}(\vec{r}, t) = \frac{n_e(\vec{r}, t)}{N_0} = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{1 + \{1 + (q-1)[(\varepsilon - e\phi - \mu)/T]\}^{q/q-1}} \quad (6.2)$$

Cette expression peut être écrite sous une autre forme plus simple. Pour cela, nous introduisons de nouvelles variables $t = \varepsilon/T$ et $y = (e\phi + \mu)/T$, puis nous les injectons dans l'expression (6.2). Soit alors

$$\begin{aligned} N_e^{(q)}(\vec{r}, t) &= \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} (T)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}dt}{1 + \{1 + (q-1)[(t - y)]\}^{q/q-1}}, \\ &= \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} (T)^{3/2} \Theta_{\frac{1}{2}}^q(y), \end{aligned} \quad (6.3)$$

L'intégrale

$$\Theta_n^{(q)}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{1 + \{1 + (q-1)[(t - y)]\}^{q/q-1}} \times H(1 + (q-1)(t - y))dt, \quad (6.4)$$

est une généralisation de l'intégrale de Fermi, où $H(x)$ est la fonction de Heaviside [112]. Actuellement, il n'existe pas « à notre connaissance » d'expression analytique de cette intégrale[112], mais pour les plasmas partiellement dégénérés ($T \sim 0$) où la variable $1/y$ est considérée très petite devant l'unité, on peut utiliser des approximations et des développements de Taylor [112], exactement comme dans le processus standard [11], utilisé pour calculer les intégrales de Fermi (pour plus de détail, voir chapitre 2). Ainsi, nous pouvons introduire une nouvelle variable $z = t - y$ et utiliser l'approximation $-y \rightarrow -\infty$ où la borne inférieure de l'intégrale devient infinie au lieu de zéro, puis nous développons le terme $(1 + z/y)^{n+1}$ en séries de puissance. L'expression (6.4) devient alors

$$\Theta_n^{(q)}(y) = \frac{1}{n+1} y^{n+1} I_0^{(q)} + y^n I_1^{(q)} + \frac{n}{2} y^{n-1} I_2^{(q)} + \dots, \quad (6.5)$$

avec

$$I_n^{(q)} = q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^n [1 + (q-1)z]^{1/q-1}}{[1 + \{1 + (q-1)z\}^{q/q-1}]^2} \times H(1 + (q-1)(t-y)) dz, \quad (6.6)$$

Notons qu'une expression analytique pour ce type d'intégrale $I_n^{(q)}$ n'existe pas, ainsi des calculs numériques [112],[115], sont faits pour déterminer la valeur de quelques intégrales, tels que $I_1^{(q)}$ et $I_2^{(q)}$, par contre l'intégrale $I_0^{(q)}$ est égale à l'unité (voir pour plus de détail la référence [112],[115]). Le tableau 7.1 présente les valeurs des intégrales $I_1^{(q)}$ et $I_2^{(q)}$ pour quelques valeurs du paramètre de la non extensivité q [112],

q	$I_1^{(q)}$	$I_2^{(q)}$
1.00	00	$\pi^2/3$
1.01	0.016	3.228
1.05	0.075	3.039
1.10	0.137	2.907
1.20	0.236	2.870
1.50	0.488	4.000

Tableau 4 : Les valeurs des intégrales $I_1^{(q)}$ et $I_2^{(q)}$ associées aux différentes valeurs du paramètre non extensif q .

Revenons maintenant à l'équation (6.6). Dans le but de déterminer une expression généralisée de la densité électronique qui tient compte du potentiel de piégeage des fermions, nous prenons l'indice $n = 1/2$ et l'équation (6.6) devient

$$\Theta_{\frac{1}{2}}^{(q)}(y) = \frac{2}{3} y^{3/2} I_0^{(q)} + y^{1/2} I_1^{(q)} + \frac{1}{4} y^{-1/2} I_2^{(q)} + \dots, \quad (6.7)$$

nous injectons cette expression dans l'équation (6.3), et nous limitons notre développement à T^2 , on obtient une formule qui donne la densité normalisée $N_e^{(q)}(\vec{r}, t) = N_e(\vec{r}, t)/N_{e0}$ des électrons

$$\begin{aligned} N_e^{(q)}(\vec{r}, t) &= (1 + \Phi)^{3/2} + \frac{3\sqrt{2}}{\pi} T I_1^{(q)} (1 + \Phi)^{1/2} + \frac{3}{\pi^2} T^2 I_2^{(q)} (1 + \Phi)^{-1/2} \\ &= (1 + \Phi)^{3/2} + \lambda T (1 + \Phi)^{1/2} + \gamma T^2 (1 + \Phi)^{-1/2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$T = \pi T/2\sqrt{2}\varepsilon_F$, $\Phi = e\phi/\varepsilon_F$ sont la température et le potentiel électrostatique normalisés et $\varepsilon_F = (3\pi^2 n_0)^{2/3} (\hbar^2/2m)$ est l'énergie de Fermi, $\lambda = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} I_1^{(q)}$ et $\gamma = \frac{3}{\pi^2} I_2^{(q)}$, notons que la densité N_{e0} est normalisée par rapport à la densité des particules, tirée de la condition de quasi neutralité, il s'agit de la même densité obtenue lorsque le plasma est complètement dégénéré ($T = 0$), autrement dit, en l'absence de la perturbation (le champ électrostatique $\phi = 0$), la densité des électrons est donnée par

$$N_{e0}^{(q)} = N_0 (1 + \lambda T + \gamma T^2), \quad (6.9)$$

Comme mentionné sur le tableau ci-dessus, lorsque $q \rightarrow 1$, la première intégrale $I_1^{(q)}$ tend vers zéro, on trouve que λ devient nul ($\lambda = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} I_1^{(q)} \rightarrow 0$), tandis que la deuxième intégrale ($I_2^{(q)}$) tend vers une valeur finie ($\pi^2/3$), et la valeur de γ tend vers l'unité ($\gamma = \frac{3}{\pi^2} I_2^{(q)} \rightarrow 1$). Nous retrouvons ainsi toutes les expressions établies dans les travaux de Shah [38]. La densité des électrons en présence du champ électrostatique ($\phi \neq 0$) ou en son absence ($\phi = 0$) est donnée par

$$\begin{aligned} N_e^{(q)}(\vec{r}, t) &= (1 + \Phi)^{3/2} + T^2 (1 + \Phi)^{-1/2} \\ N_{e0}^{(q)} &= N_0 (1 + T^2), \end{aligned} \quad (6.10)$$

La nouvelle densité électronique généralisée (6.8) montre clairement que la non extensivité donne naissance à une nouvelle correction dont la contribution est proportionnelle à T qui domine la correction thermique habituelle ($\sim T^2$) à très basse température.

6.3 Application: onde acoustique ionique solitaire

Dans le but de faire une application de cette nouvelle densité, nous analysons les modifications apparentes sur la propagation des structures solitaires de l'onde ionique dans un plasma non collisionnel, non magnétisé et unidimensionnel, composé de deux espèces différentes : des électrons non extensifs et des ions froids et classiques à cause de leur masse,

la dynamique des ions froids est gouvernée par les équations fluides couplées à l'équation de Poisson, celles-ci s'écrivent

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0, \quad (6.11)$$

$$m_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi e(n_e - n_i), \quad (6.13)$$

notons que le principe de quasi neutralité à l'équilibre implique que $n_{e0} - n_{i0} = 0$. Une analyse linéaire du système précédent donne la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique suivante

$$\frac{\omega}{k} = \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m_i}} \right) \sqrt{\frac{1 + \lambda T + \gamma T^2}{(3 + \lambda T - \gamma T^2 + k^2 \lambda_{DF}^2)}}, \quad (6.14)$$

où $\lambda_{DF} = \sqrt{2\varepsilon_F/4\pi n_0 e^2}$ est la longueur de Debye de ce modèle plasma; remarquons que dans la limite $q \rightarrow 1$, ($\lambda \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$), nous retrouvons l'expression de la relation de dispersion donnée par Shah et al [38]. Nous étudions les effets de piégeage des électrons non extensifs sur la dynamique de l'onde ionique acoustique dans un repère stationnaire. Cette étude peut être réalisée grâce à la méthode du pseudo-potentiel, dite de Sagdeev [87]. Pour cela, nous introduisons la nouvelle variable $\xi = x - ut$ où u est la vitesse de propagation de la perturbation. Après avoir injecté la variable ξ dans les équations fluides qui régissent la dynamique des ions, et en tenant compte des conditions aux limites : $\phi \rightarrow 0$, $u_i \rightarrow 0$ et $N_i \rightarrow N_0(1 + \lambda T + \gamma T^2)$, quand $\xi \rightarrow \pm \infty$, (très loin de la perturbation), nous intégrons les équations (6.11) et (6.12); nous obtenons ainsi l'expression de la densité ionique

$$N_i^{(q)} = (1 + \lambda T + \gamma T^2) \left(1 - \frac{\Phi}{M^2} \right)^{-1/2}, \quad (6.15)$$

où $N_i^{(q)}$ est la densité ionique normalisée (par la densité à l'équilibre à $T = 0$), M le nombre de Mach, normalisé par la vitesse de Fermi acoustique ([38]) et n_0 la densité des particules à l'équilibre (où $n_0 = n_{e0} = n_{i0}$); pour un plasma totalement dégénéré [38]; notons que nous retrouvons toujours les expressions des grandeurs physiques déjà citées dans les références [38], dans le cas de la limite $q \rightarrow 1$, ($\lambda \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$).

6.4 Pseudo-potentiel de Sagdeev

Pour étudier les effets de piégeage des électrons non extensifs sur les propriétés des ondes acoustiques ioniques localisées d'amplitude arbitraire, il faut établir l'équation dite «

intégrale-énergie », cette dernière consiste à effectuer le changement de variable suivant $\xi = x - Mt$, où M est la vitesse de l'onde normalisée par $2\varepsilon_F$ [38]. En tenant compte des conditions aux limites $\phi \rightarrow 0$, $u_i \rightarrow 0$, $N_i \rightarrow 1$, quand $\xi \rightarrow \pm\infty$, (loin de toute perturbation), nous injectons les expressions (6.8) et (6.15) de la densité électronique et ionique dans l'équation de Poisson (6.13), nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = (1 + \Phi)^{3/2} + \lambda T (1 + \Phi)^{1/2} + \gamma T^2 (1 + \Phi)^{-1/2} - (1 + \lambda T + \gamma T^2) \left(1 - \frac{\Phi}{M^2}\right)^{-1/2} \quad (6.16)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (6.16) par $d\Phi/d\xi$ et, en tenant compte des conditions aux limites $\Phi \rightarrow 0$, $d\Phi/d\xi \rightarrow 0$ et $N_i \rightarrow 1$, quand $\xi \rightarrow \pm\infty$, c'est à dire loin de toute perturbation, ensuite en intégrant l'équation résultante, nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + V(\Phi) = 0, \quad (6.17)$$

où $V(\Phi)$ représente le potentiel de Sagdeev [87],

$$\begin{aligned} V(\Phi) = & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} (1 + \Phi)^{5/2} + \frac{2}{3} \lambda T - \frac{2}{3} \lambda T (1 + \Phi)^{3/2} + 2\gamma T^2 - 2\gamma T^2 (1 + \Phi)^{1/2} \\ & + 2M^2 (1 + \lambda T + \gamma T^2) - 2M^2 (1 + \lambda T + \gamma T^2) \left(1 - \frac{\Phi}{M^2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

L'équation (6.17) admet des solutions solitaires si le potentiel de Sagdeev satisfait les trois conditions [87],

$$V(\Phi) = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = 0 \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi_m \quad (6.19)$$

$$V(\Phi) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \Phi < \Phi_m \quad (6.20)$$

$$V''(\Phi) < 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = 0 \quad (6.21)$$

Selon la dernière condition et dans le cadre de notre modèle, le nombre de Mach M doit vérifier la condition

$$M^2 > \frac{1 + \lambda T + \gamma T^2}{3 + \lambda T - \gamma T^2} \quad (6.22)$$

ceci implique que le dénominateur est strictement positif non nul $3 + \lambda T - \gamma T^2 > 0$ ou encore $0 < T < \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 12\gamma}}{2\gamma}$, d'autre part, la température des électrons doit être inférieure à l'unité $0 < T < 1$, (puisque les températures sont basses), ce qui donne des valeurs limites pour le nombre de Mach M

$$M_{\min}^{(q)} = \left(\frac{1 + \lambda T + \gamma T^2}{3 + \lambda T - \gamma T^2}\right)^{1/2} \quad (6.23)$$

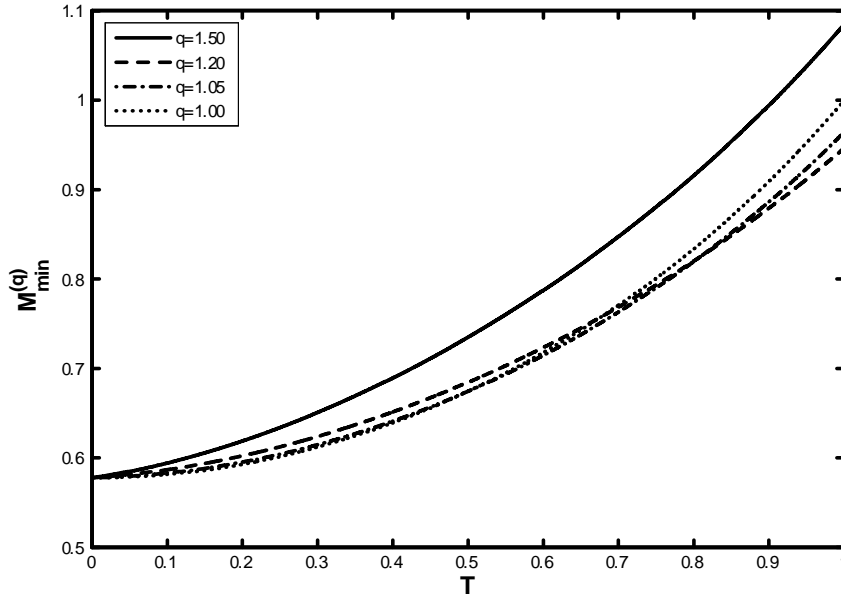


Figure 6.1 : le profil des valeurs limites du nombre de Mach $M_{\min}^{(q)}$ pour différentes valeurs du paramètre non extensif q , en fonction de la température T .

Sur la figure 6.1, le profil des valeurs limites du nombre de Mach $M_{\min}^{(q)}$ est tracé par rapport à la variation de la température, pour différentes valeurs du paramètre non extensif q . Cette figure montre que selon l'apport des effets thermiques et des effets non extensifs, le nombre de Mach $M_{\min}^{(q)}$ est soit plus grand, soit plus petit que son analogue dans l'approche de Fermi-Dirac [38]. Nous remarquons aussi que la gamme permise du nombre de Mach M , est élargie, pour différentes valeurs du paramètre de la non extensivité q ; de plus, les valeurs du paramètre non extensif supérieures à l'unité permettent à l'onde acoustique ionique d'atteindre des valeurs légèrement supra-acoustiques (puisque le nombre de Mach dépasse l'unité $M > 1$). La figure 6.2 montre la variation du pseudo-potentiel $V(\Phi)$ en fonction du potentiel électrostatique Φ pour une valeur du paramètre de non extensivité du plasma $q = 1.5$, et un nombre de Mach $M = 1.04$ et pour différentes valeurs de la température T . L'allure de cette figure confirme la coexistence des structures raréfactives et compressives pour des températures $T \sim 0.9$. Nous remarquons, qu'une augmentation de la non extensivité des électrons permet la coexistence de structures solitaires associées à des valeurs bien plus grandes de la température. L'augmentation de la non extensivité permet d'avoir un domaine plus large de la température où les structures solitaires peuvent coexister.

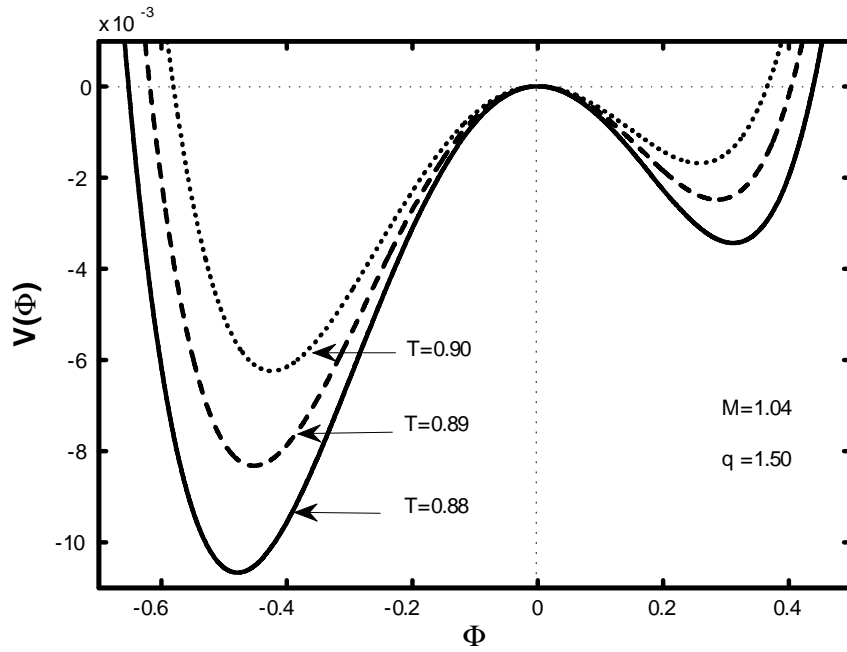


Figure 6.2 : Variation du pseudo-potentiel $V(\Phi)$ en fonction du potentiel électrostatique Φ associé à la solution en ondes solitaires de la figure 6.3.

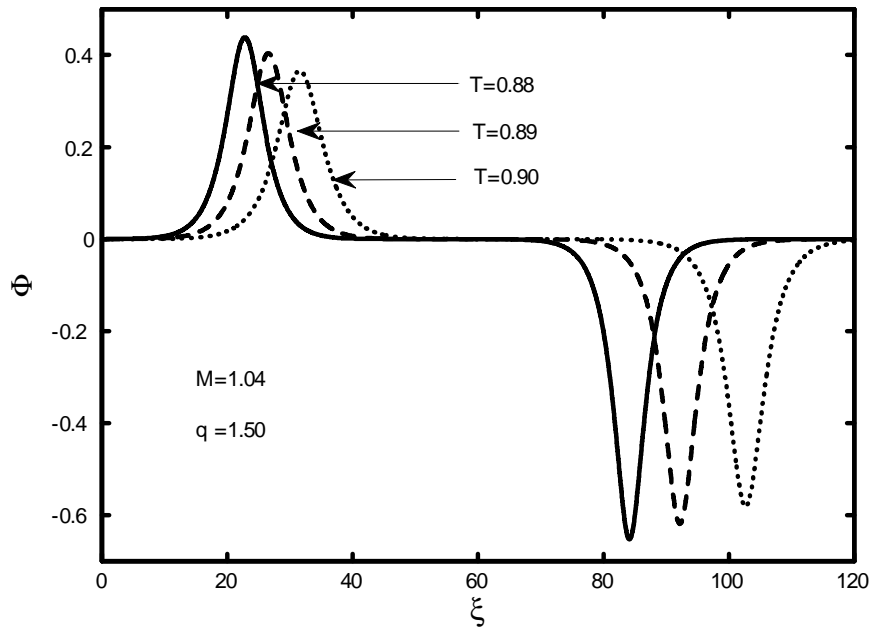


Figure 6.3 : Coexistence des structures solitaires compressives et raréfactives, en fonction de la coordonnée spatiale ξ pour différentes valeurs de la température T , avec $M = 1.04$ et $q = 1.50$.

La figure 6.3 montre la variation du potentiel électrostatique Φ en fonction de la coordonnée spatiale ξ , associée au pseudo-potentiel de Sagdeev de la figure 6.2, notons que les structures

raréfactives ($\Phi < 0$) ont des amplitudes plus grandes que les structures compressives ($\Phi > 0$). Fait intéressant, dans le modèle présenté par Shah [38], avec une non extensivité égale à l'unité, la valeur critique de la température associée, au delà de laquelle la coexistence des deux structures solitaires est permise est autour de ($T = 0.5$). Nous remarquons qu'une augmentation dans la valeur du paramètre non extensif q , induit un décalage vers des valeurs supérieures de la température critique T_c

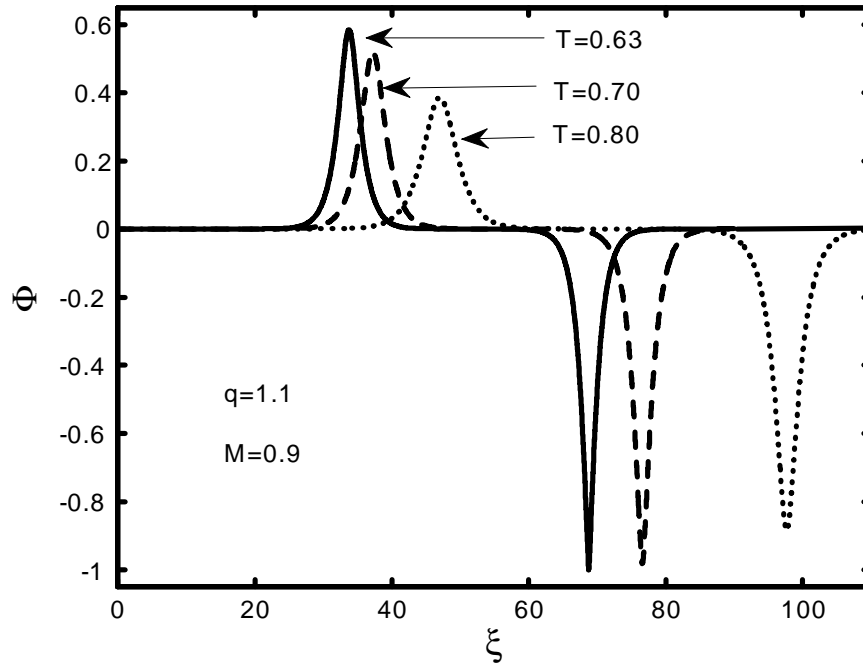


Figure 6.4 : Variation du potentiel électrostatique Φ en fonction de la coordonnée spatiale ξ pour différentes valeurs de la température T , avec $M = 0.9$ et $q = 1.1$.

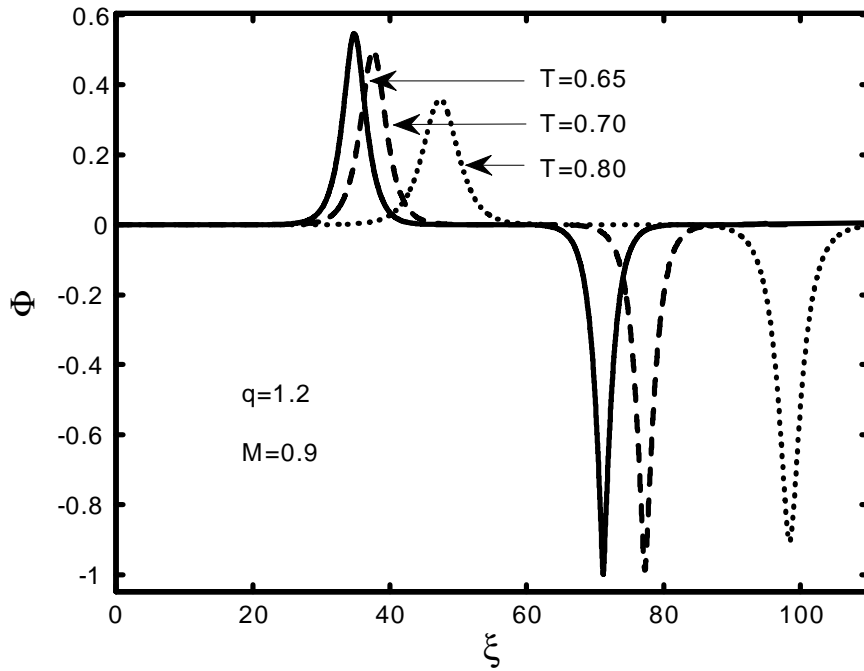


Figure 6.5 : Variation du potentiel électrostatique Φ en fonction de la coordonnée spatiale ξ pour différentes valeurs de la température T , avec $M = 0.9$ et $q = 1.2$.

Dans les figures 6.4 et 6.5, nous avons tracé le potentiel électrostatique Φ en fonction de la coordonnée spatiale ξ pour différentes valeurs de la température T , avec $M = 0.9$. ces figures exhibent la coexistence de structures solitaires compressive et raréfactive, pour deux valeurs du paramètre non extensif : $q = 1.1$ et $q = 1.2$ respectivement, comme l'atteste d'ailleurs la structure en forme de pseudo-potentiel de Sagdeev associé (figures 6.6 et 6.7), où nous avons tracé la variation du pseudo-potentiel $V(\Phi)$ en fonction du potentiel électrostatique Φ pour différentes valeurs de la température $T = 0.80, T = 0.70$ et $T = 0.63$ avec $M = 0.9$ et $q = 1.1$, dans la figure 6.6 et $T = 0.80, T = 0.70$ et $T = 0.65$ avec $M = 0.9$ et $q = 1.2$, dans la figure 6.7. Les résultats révèlent que les effets non extensifs affectent de manière significative le profil de l'onde acoustique, ainsi, dans la figure 6.4, pour $q = 1.1$, nous retrouvons la valeur de la température critique associée $T_c \sim 0.63$ et dans la figure 6.5, $q = 1.2$, nous retrouvons la valeur de la température critique associée $T_c \sim 0.65$ au-delà desquelles la coexistence des structures solitaires de compression et de raréfaction est permise. Ceci nous montre ainsi les effets de la non extensivité et de la température thermique.

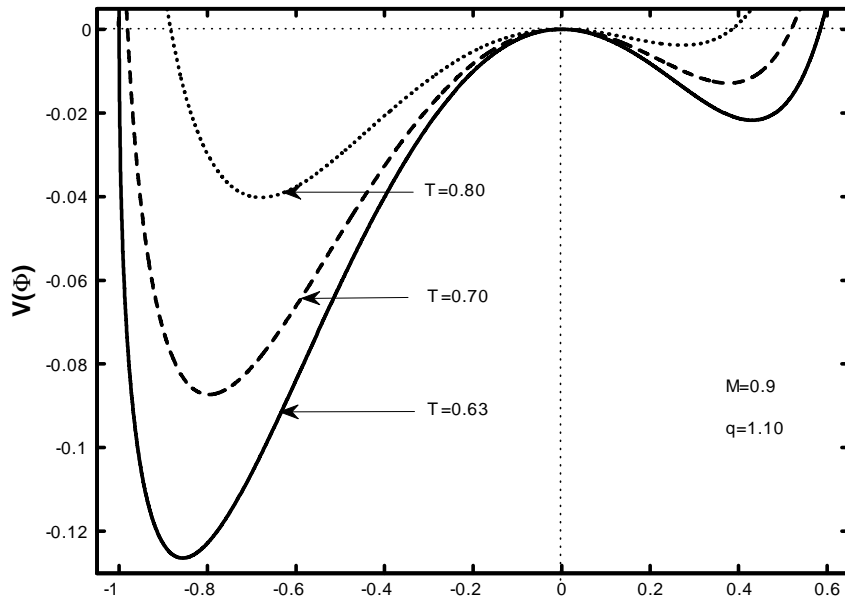


Figure 6.6 : Variation du pseudo-potentiel $V(\Phi)$ en fonction du potentiel électrostatique Φ associé à la solution en ondes solitaires de la figure 6.4.

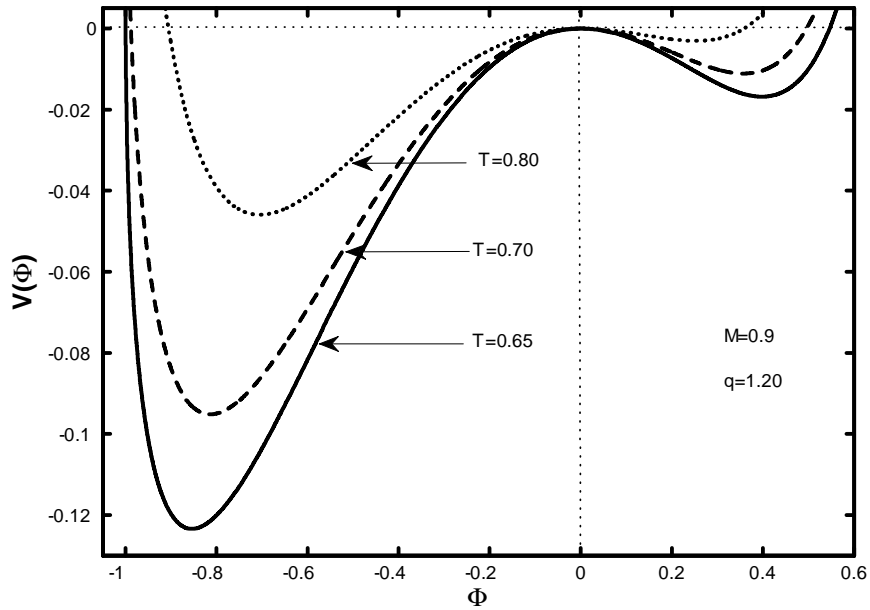


Figure 6.7 : Variation du pseudo-potentiel $V(\Phi)$ en fonction du potentiel électrostatique Φ associé à la solution en ondes solitaires de la figure 6.5 pour différentes valeurs de la température T , avec $M = 0.9$ et $q = 1.2$.

6.5 Régime faiblement non linéaire

6.5.1 Établissement de l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV)

Pour étudier les effets de piégeage des électrons non extensifs sur la dynamique et les propriétés de l'onde acoustique ionique faiblement non linéaire, nous établissons l'équation de type Korteweg-de Vries (K-dV), basée sur la méthode de la perturbation réductive (stretched variables) [86],[116]. Pour cela, nous normalisons les équations fluides qui gouvernent le système en utilisant le changement de variables suivant $x = \frac{\omega_{pi}}{c_{sF}}x$, $t = \omega_{pi}t$, $c_{sF} = (\frac{\varepsilon_F}{m_i})^{1/2}$, $\omega_{pi} = (\frac{4\pi e^2 n_{i0}}{m_i})^{1/2}$, $\Phi = \frac{e\phi}{\varepsilon_F}$, $N_i = \frac{n_i}{n_{i0}}$, $U_i = \frac{u_i}{c_{sF}}$, le système devient alors

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial(N_i U_i)}{\partial x} = 0, \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = N_e - N_i, \quad (6.26)$$

nous introduisons le changement de variables suivants $\xi = \varepsilon^{1/2}(x - v_0 t)$, $\tau = \varepsilon^{3/2}t$ où v_0 représente la vitesse de l'onde dans le repère du laboratoire et ε mesure la faiblesse de l'amplitude de la perturbation, telle que $0 < \varepsilon \leq 1$. De plus, les variables macroscopiques sont développées en séries de puissance

$$N_s = 1 + \varepsilon N_{s1} + \varepsilon^2 N_{s2} + \dots$$

$$U_i = \varepsilon U_{i1} + \varepsilon^2 U_{i2} \dots \quad (6.27)$$

$$\Phi = \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 \dots$$

Le développement de Taylor de l'expression de la densité électronique nous permet d'obtenir l'expression suivante

$$N_e^{(q)}(\vec{r}, t) = (1 + \lambda T + \gamma T^2) + \frac{1}{2} (3 + \lambda T - \gamma T^2) \Phi + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\lambda T}{4} + \frac{3\gamma T^2}{4} \right) \Phi^2, \quad (6.28)$$

L'introduction des variables perturbées nous permet d'avoir l'expression de la densité électronique, soit

$$N_e^{(q)}(\vec{r}, t) = (1 + \lambda T + \gamma T^2) + \frac{1}{2} \varepsilon (3 + \lambda T - \gamma T^2) \Phi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[(3 + \lambda T - \gamma T^2) \Phi_2 + \left(3 - \frac{\lambda T}{4} + \frac{3\gamma T^2}{4} \right) (\Phi_1)^2 \right], \quad (6.29)$$

Le développement au premier ordre en ε donne les grandeurs perturbées au premier ordre

$$\begin{aligned} v_0 N_{i1} &= U_{i1} \\ v_0 U_{i1} &= \Phi_1 \\ N_{e1} = N_{i1} &= \frac{1}{2} (3 + \lambda T - \gamma T^2) \Phi_1 \end{aligned} \quad (6.30)$$

En combinant le système d'équations précédent, nous obtenons

$$v_0 = \left(\frac{2}{3 + \lambda T - \gamma T^2} \right)^{1/2} \quad (6.31)$$

Le développement du système d'équations (6.24)-(6.26), au second ordre en ε , donne le système suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{i1}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial N_{i2}}{\partial \xi} + \frac{\partial(N_{i1}U_{i1})}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{i2}}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial U_{i1}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial U_{i2}}{\partial \xi} + U_{i1} \frac{\partial U_{i1}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} &= (N_{e2} - N_{i2}) \end{aligned} \quad (6.32)$$

En éliminant le terme U_{i2} entre l'équation de continuité et l'équation de la force du système (6.32), et en injectant les expressions des termes N_{i2} et N_{e2} dans l'équation de Poisson, et en posant $\Phi_1 = \Phi$, nous aboutissons à l'équation de type K-dV suivante

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (6.33)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_0}{2} \left[\frac{3}{v_0^2} - \frac{3}{4} v_0^2 + \frac{\lambda T}{4} v_0^2 - \frac{3\gamma T^2}{4} v_0^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{2}{3 + \lambda T - \gamma T^2} \right)^{-1/2} + \frac{1}{4} (-3 + \lambda T - 3\gamma T^2) \left(\frac{2}{3 + \lambda T - \gamma T^2} \right)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

et

$$B = \frac{v_0^3}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3 + \lambda T - \gamma T^2} \right)^{3/2}$$

représentent respectivement le coefficient non linéaire et le coefficient de dispersion, ce type d'équation admet des ondes solitaires comme solution; utilisant le changement de variable $\eta = \xi - M\tau$, la solution est donnée sous la forme

$$\Phi = \Phi_m \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right) \quad (6.34)$$

l'amplitude du soliton est donnée par $\Phi_m = \frac{6M}{\left[3\left(\frac{2}{3+\lambda T-\gamma T^2}\right)^{-1/2} + \frac{1}{4}(-3+\lambda T-3\gamma T^2)\left(\frac{2}{3+\lambda T-\gamma T^2}\right)^{3/2}\right]}$ et sa largeur par $\Delta = \sqrt{2\left(\frac{2}{3+\lambda T-\gamma T^2}\right)^{3/2}}/M$, à titre comparatif, nous retrouvons la même équation K-dV, déjà trouvée dans l'approche de Fermi-Dirac. Notons que la contribution de la non extensivité apparaît dans les deux termes (la non linéarité et la dispersion) de l'équation K-dV

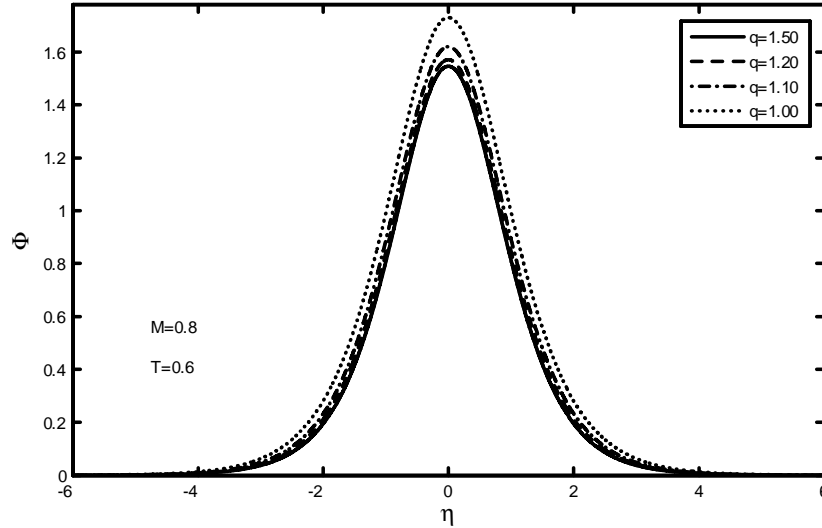


Figure 6.8 : Tracé de la variation du potentiel électrostatique Φ en fonction de la coordonnée spatiale ξ pour différentes valeurs du paramètre non-extensif q , avec $M = 0.8$ et $T = 0.6$

La figure 6.8 montre les variations du potentiel de piégeage Φ en fonction de la coordonnée spatiale η . Notons qu'une augmentation du paramètre non extensif q se reflète par une diminution de l'amplitude et de la largeur du soliton.

6.6 Conclusion

Pour conclure, nous avons reformulé et réexaminé le piégeage d'électrons dans un plasma faiblement non dégénéré, en introduisant l'entropie non extensive. Nous avons utilisé, pour cela, la fonction de distribution de Fermi-Dirac généralisée, qui tient compte des effets de la statistique non extensive.

Dans une première étape, nous avons établi une nouvelle densité électronique étendue, cette dernière contient le potentiel électrostatique, dans lequel les particules peuvent être piégées. Cette densité contient de nouveaux termes proportionnels à T , qui peuvent dominer

(à très basses températures) la correction thermique ($\sim T^2$), qui existe déjà dans l'expression de la densité de particules, calculée à partir de la fonction de distribution Fermi-Dirac habituelle.

Dans une seconde étape et, dans le but d'éclaircir les effets de la nouvelle contribution dont les termes sont proportionnels à T , nous avons analysé ces modifications présentes sur la propagation des ondes acoustiques ioniques solitaires dans deux régimes arbitraire et faiblement non linéaire. Dans ces deux derniers, nous avons trouvé que les propriétés (amplitude, largeur, nature... etc.) sont sensiblement affectées, les corrections sont clairement remarquables, soit dans la coexistence de ces structures (compressives ou raréfactives), ou bien, dans la gamme d'existence des solitons par rapport à la température.

Nous avons trouvé que la nouvelle contribution de la température de notre modèle plasma permet la possibilité d'existence d'onde acoustique ionique solitaire avec une vitesse acoustique quantique supérieure à la vitesse acoustique de Fermi C_F . En outre, nous avons noté qu'une augmentation de la valeur du paramètre non extensif q , induit un décalage vers des valeurs supérieures de la température critique T_c , au-delà de laquelle la coexistence des structures solitaires compressives et raréfactives se réalise.

Conclusion générale

Pour conclure, nous avons étudié l'influence de quelques corrections quantiques sur les ondes acoustiques dans une approche hydrodynamique quantique QHD. Nous avons commencé par étudier l'influence des effets d'échange et de corrélation sur l'énergie transportée par le soliton des ondes acoustiques ioniques quantiques QIA. Notre étude s'est ensuite tournée vers le régime faiblement non linéaire, où nous avons constaté que les effets de la diffraction quantique diminuent l'énergie transportée par le soliton QIA, tandis que les effets d'échange et de corrélation amplifient l'énergie transportée par ce dernier. Précisément, les effets d'échange et de corrélation peuvent empêcher la diminution de l'énergie transportée, qui est due à la diffraction quantique. Nous avons, par la suite, réexaminé les effets d'échange et de corrélation sur la dynamique non linéaire de l'onde acoustique ionique poussiéreuse QDIA, dans un régime d'amplitudes arbitraires. Les quantités physiques principales qui caractérisent les structures solitaires (amplitude, largeur, vitesse de phase... etc.) sont considérablement affectées par les effets d'échange et de corrélation. La présence de ces derniers dans les plasmas quantiques rétrécissent les solitons, de plus, la manifestation de ces effets empêche la formation des solitons de type flat-bottomed, ils ne favorisent pas leur apparition.

En dernier lieu, nous nous sommes intéressés à la correction statistique sur les effets du piégeage des électrons dans un plasma quantique par un champ électrostatique se comportant comme une onde interagissant avec les électrons sous processus adiabatique, dans le cadre de la statistique non extensive. Pour reformuler la densité de ces électrons, nous avons introduit une nouvelle expression de la densité électronique possédant des termes correctifs au premier ordre, en fonction de la température T . Cette nouvelle correction n'existe pas dans l'approche de Fermi-Dirac (approche extensive), cette correction est due à l'introduction du paramètre de non extensivité q de la statistique non extensive. Notons que, dans les plasmas quantiques de laboratoire, la température est très basse ($T \sim 0$), les termes de premier ordre en température sont dominants par rapport aux termes de second ordre. Nous avons, par ailleurs, réexaminé les effets non extensifs de la nouvelle contribu-

tion sur la dynamique non linéaire de l'onde acoustique ionique dans un régime arbitraire. Nous avons constaté que les structures solitaires sont sensiblement affectées; en effet, les propriétés principales (les amplitudes, les largeurs, les conditions d'existences, la vitesse de phase etc.) sont modifiées de manière considérable... Nous avons terminé avec deux résultats importants; nous avons constaté que la nouvelle contribution en température de notre modèle plasma favorise l'émergence des ondes acoustiques ioniques solitaires ayant des vitesses supérieures à la vitesse acoustique quantique de Fermi. Aussi, les températures critiques, au-delà desquelles les structures solitaires compressives et raréfactives coexistent, sont décalées vers des valeurs supérieures.

Comme perspectives, nous nous proposons d'étudier le piégeage des électrons quantiques dans l'approche non extensive sur la propagation des ondes acoustiques ioniques pour un plasma magnétisé.

Annexe

1- Piégeage des électrons dans un champ électrostatique

Dans le cas d'un système statistique où la température est proche de zéro (et non nulle), la probabilité est retrouvée en calculant la valeur des intégrales de Fermi (2.58), ces dernières nous permettent de déterminer les expressions de la densité des fermions [38], soit

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{g}{\hbar^3 \pi^2 \sqrt{2}} (m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp(\frac{\varepsilon - e\varphi - \mu}{T}) + 1}$$

Suivant Landau et Lifshitz [11], on pose $U = e\varphi + \mu$, puis on utilise le changement de variable suivant

$$z = \frac{\varepsilon - U}{T} \implies d\varepsilon = T dz$$

d'où

$$\begin{cases} \varepsilon \longrightarrow 0 \implies z \longrightarrow -\frac{U}{T} \\ \varepsilon \longrightarrow \infty \implies z \longrightarrow \infty \end{cases}$$

qui nous permet de transformer la formule d'intégration précédente sous la forme suivante

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \int_{-\frac{U}{T}}^{+\infty} \frac{\sqrt{(U + Tz)}}{e^z + 1} dz$$

puis, nous décomposons

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \left(\int_{-\frac{U}{T}}^0 \frac{\sqrt{(U + Tz)}}{e^z + 1} dz + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{(U + Tz)}}{e^z + 1} dz \right)$$

et pour inverser les bornes de la première intégrale [11], nous changeons le signe de la variable $z \longrightarrow -z \implies dz \longrightarrow -dz$. Nous avons alors

$$\begin{cases} z \longrightarrow 0 \implies -z \longrightarrow 0 \\ z \longrightarrow -\frac{U}{T} \implies -z \longrightarrow \frac{U}{T} \end{cases}$$

ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \left(-\int_{\frac{U}{T}}^0 \frac{\sqrt{(U-Tz)}}{e^{-z}+1} dz + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{(U+Tz)}}{e^z+1} dz \right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \left(\int_0^{\frac{U}{T}} \frac{\sqrt{(U-Tz)}}{e^{-z}+1} dz + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{(U+Tz)}}{e^z+1} dz \right) \end{aligned}$$

nous remarquons que $\frac{1}{e^{-z}+1}$ peut s'écrire sous la forme suivante $\frac{1}{e^{-z}+1} = 1 - \frac{1}{e^z+1}$, nous remplaçons dans l'équation précédente et nous obtenons une forme plus simple de l'intégrale, soit

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \left(\int_0^{\frac{U}{T}} \sqrt{(U-Tz)} \left(1 - \frac{1}{e^z+1} \right) dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{(U+Tz)}}{e^z+1} dz \right) \end{aligned}$$

Lorsque la température tend vers zéro, la deuxième intégrale converge rapidement, à cause de la présence de l'exponentielle dans le dénominateur et cela nous permet de remplacer la limite supérieure de ce dernier par l'infini ($T \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{U}{T} \rightarrow \infty$) [11] et finalement nous obtenons

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \int_0^{\frac{U}{T}} \sqrt{(U-Tz)} dz \\ &\quad + \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{(U+Tz)} - \sqrt{(U-Tz)}}{e^z+1} dz \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons calculer analytiquement la première intégrale I_1 , après avoir changé la variable $U - Tz = x \Rightarrow dx = -Tdz$, ce qui donne

$$\begin{cases} z \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow U \\ z \rightarrow \frac{U}{T} \Rightarrow x \rightarrow 0 \end{cases}$$

En utilisant les nouvelles variables, l'intégrale I_1 est réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \int_0^{\frac{U}{T}} \sqrt{(U-Tz)} dz = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^U \sqrt{x} dx \\ &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2}{3} U^{3/2} = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2}{3} \mu^{3/2} \left(1 + \frac{e\varphi}{\mu} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Lorsque la température tend vers zéro ($T \rightarrow 0$), le potentiel chimique tend vers une valeur finie ($\mu \sim \varepsilon_F$)

$$\mu \approx \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 N_0)^{2/3}$$

Nous injectons la valeur approximative de μ dans l'expression de l'intégrale I_1 , nous obtenons

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2}{3} \left(\frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 N_0)^{2/3} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{e\varphi}{\mu} \right)^{3/2} \\ &= N_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{\varepsilon_F} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

posons $\Phi = \frac{e\varphi}{\varepsilon_F}$, nous obtenons

$$I_1 = N_0 (1 + \Phi)^{3/2}$$

par contre, nous pouvons développer le numérateur de la seconde intégrale I_2 (puisque $Tz \ll U$) en séries de puissance autour de (Tz) . Le développement du terme $\sqrt{(U + Tz)}$ est donné par

$$\begin{aligned} \sqrt{(U + Tz)} &= \sqrt{U} + (Tz) \left(\left(\frac{1}{2} \right) (U)^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{(Tz)^2}{2!} \left(-\frac{1}{4} (U)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad + \frac{(Tz)^3}{3!} \left(\frac{3}{8} (U)^{-\frac{5}{2}} \right) + \frac{(Tz)^4}{4!} \left(-\frac{15}{16} (U)^{-\frac{7}{2}} \right) \dots \end{aligned}$$

tandis que le développement du terme $\sqrt{(U - Tz)}$ est donné par

$$\begin{aligned} \sqrt{(U - Tz)} &= \sqrt{U} - (Tz) \left(\left(\frac{1}{2} \right) (U)^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{(Tz)^2}{2!} \left(-\frac{1}{4} (U)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{(Tz)^3}{3!} \left(\frac{3}{8} (U)^{-\frac{5}{2}} \right) + \frac{(Tz)^4}{4!} \left(-\frac{15}{16} (U)^{-\frac{7}{2}} \right) \dots \end{aligned}$$

Le numérateur représente la soustraction entre les deux expressions

$$\sqrt{(U + Tz)} - \sqrt{(U - Tz)} = (Tz) \left((U)^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{(Tz)^3}{3!} \left(\frac{3}{4} (U)^{-\frac{5}{2}} \right) \dots$$

l'intégrale I_2 s'écrit

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} T \int_0^{+\infty} \frac{(Tz) \left((U)^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{(Tz)^3}{8} \left((U)^{-\frac{5}{2}} \right)}{e^z + 1} dz \\ &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{T^2}{\sqrt{U}} \int_0^{+\infty} \frac{z}{e^z + 1} dz + \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{T^4}{8\sqrt{U^5}} \int_0^{+\infty} \frac{z^3}{e^z + 1} dz. \end{aligned}$$

Les deux intégrales sont des fonctions spéciales, données par la fonction zêta Riemann et la fonction gamma [11]

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{e^z + 1} dz = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n$$

les B_n sont les nombres de Bernoulli. Nous donnons quelques valeurs de ces nombres [11]

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{6} \\ B_2 &= \frac{1}{30} \\ B_3 &= \frac{1}{42} \end{aligned}$$

En utilisant les équations précédentes, nous obtenons l'expression de I_2 , donnée par

$$I_2 = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{T^2}{\sqrt{U}} \left(\frac{\pi^2}{12}\right) + \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{T^4}{8\sqrt{U^5}} \left(\frac{7\pi^4}{120}\right)$$

finalemt, nous obtenons une valeur approximative au quatrième ordre de l'intégrale I_2 en fonction de T^4

$$I_2 = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\pi^2}{12}\right) T^2 U^{-1/2} + \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{8(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{7\pi^4}{120}\right) T^4 U^{-5/2}$$

puisque $T \sim 0 \implies T^4 \ll T^2$ nous limitons notre développement à T^2

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\pi^2}{12}\right) T^2 U^{-1/2} \\ &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\pi^2}{12}\right) T^2 \mu^{-1/2} \left(1 + \frac{e\varphi}{\mu}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Lorsque $(T \longrightarrow 0) \implies (\mu \sim \varepsilon_F)$, ce qui implique que l'expression de l'intégrale I_2 devient

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\pi^2}{12}\right) T^2 \left(\frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 N_0)^{2/3}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{e\varphi}{\varepsilon_F}\right)^{-1/2} \\ &= N_0 \left(\frac{\pi T}{2\sqrt{2}\varepsilon_F}\right)^2 \left(1 + \frac{e\varphi}{\varepsilon_F}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

ou encore

$$I_2 = N_0 T^2 (1 + \Phi)^{-1/2}$$

où $T = \frac{\pi T}{2\sqrt{2}\varepsilon_F}$ la température normalisée, les équations précédentes donnent une expression approximative de la densité électronique à basse température

$$N_e(\vec{r}, t) = I_1 + I_2 = N_0 (1 + \Phi)^{3/2} + N_0 T^2 (1 + \Phi)^{-1/2}$$

la densité électronique normalisée est donnée par l'expression suivante

$$N_e^{(q=1)}(\vec{r}, t) = \frac{N_e(\vec{r}, t)}{N_0} = (1 + \Phi)^{3/2} + T^2 (1 + \Phi)^{-1/2}.$$

2- Piégeage des électrons dans un champ électrostatique et un champ magnétique

Dans le cas de la présence d'un champ électrostatique et d'un champ magnétique, où les niveaux de Landau se présentent [11], la densité électronique [39] est donnée par

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{n_e(\vec{r}, t)}{V} = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F}\right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon + l\hbar\omega_{ce} - e\phi - \mu}{T}\right) + 1} d\varepsilon$$

où $\eta(B_0) = \hbar\omega_{ce}/\varepsilon_F$ est la fréquence cyclotronique de l'électron, $\hbar\omega_{ce}$ l'énergie cyclotronique de l'électron, B_0 le champ magnétique, $\varepsilon_F = \frac{P^2}{2m_e}$ l'énergie de Fermi, $P_F = \sqrt{2m_e\varepsilon_F}$ l'impulsion de Fermi et $\omega_{ce} = eB_0/m_e$ et $l = 0, 1, 2, \dots$ les niveaux de Landau [11]. Maintenant [39], nous séparons le cas $l = 0$ et le cas $l \neq 0$, l'intégrale devient

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \left[\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon - e\phi - \mu}{T}\right) + 1} d\varepsilon + \sum_{l=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon + l\hbar\omega_{ce} - e\phi - \mu}{T}\right) + 1} d\varepsilon \right]$$

Si le nombre de particules n est très élevé, les niveaux d'énergie sont très proches, et la séparation entre les différents niveaux est proportionnelle à 10^{-n} [37], nous pouvons donc considérer que les niveaux d'énergie sont continus, ce qui nous permet de remplacer la sommation $\sum_{l=1}^\infty$ par une intégrale $\int_1^{l_{\max}} dl$, où $l_{\max} = \left(1 + \frac{e\phi}{\varepsilon_F}\right) / \eta(B_0)$ est la valeur maximale pour que l'intégrale prenne une valeur réelle [39]

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \left[\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon - e\phi - \mu}{T}\right) + 1} d\varepsilon + \int_1^{l_{\max}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon + l\hbar\omega_{ce} - e\phi - \mu}{T}\right) + 1} dl d\varepsilon \right]$$

posons $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = g(\varepsilon)$, $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = f(\varepsilon)$, et $U_1 = e\phi + \mu - l\hbar\omega_{ce}$, puis changeons la variable

$$\varepsilon - U_1/T = x \implies d\varepsilon = T dx$$

d'où

$$\begin{cases} \varepsilon \longrightarrow 0 \implies x \longrightarrow \frac{-e\phi - \mu + l\hbar\omega_{ce}}{T} = -\frac{U_1}{T} \\ \varepsilon \longrightarrow \infty \implies x \longrightarrow \infty \end{cases}$$

nous obtenons une nouvelle expression avec les nouvelles variables

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_{-\frac{U_1}{T}}^\infty \frac{g(U + Tz)}{\exp(z) + 1} dz + \int_1^{l_{\max}} \int_{-\frac{U_1}{T}}^\infty \frac{f(U_1 + Tx)}{\exp(x) + 1} dl dx \right]$$

que nous décomposons

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_{-\frac{U_1}{T}}^0 \frac{g(U + Tz)}{\exp(z) + 1} dz + \int_0^\infty \frac{g(U + Tz)}{\exp(z) + 1} dz + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_{-\frac{U_1}{T}}^0 \frac{f(U_1 + Tx)}{\exp(x) + 1} dx + \int_0^\infty \frac{f(U_1 + Tx)}{\exp(x) + 1} dx \right) dl \right]$$

on inverse les bornes de la première et de la troisième intégrale, on change le signe de la variable

$$z \longrightarrow -z \implies dz \longrightarrow -dz$$

alors, on a

$$\begin{cases} z \longrightarrow 0 \implies -z \longrightarrow 0 \\ z \longrightarrow -\frac{U}{T} \implies -z \longrightarrow \frac{U}{T} \end{cases}$$

et la variable

$$x \longrightarrow -x \implies dx \longrightarrow -dx$$

d'où alors

$$\begin{cases} x \longrightarrow 0 \implies -x \longrightarrow 0 \\ x \longrightarrow -\frac{U_1}{T} \implies -x \longrightarrow \frac{U_1}{T} \end{cases}$$

ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_0^{\frac{U}{T}} \frac{g(U - Tz)}{\exp(-z) + 1} dz + \int_0^\infty \frac{g(U + Tz)}{\exp(z) + 1} dz \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_0^{\frac{U_1}{T}} \frac{f(U_1 - Tx)}{\exp(-x) + 1} dx + \int_0^\infty \frac{f(U_1 + Tx)}{\exp(x) + 1} dx \right) dl \right] \end{aligned}$$

Nous suivons la même procédure utilisée plus haut, nous pouvons écrire la fraction $\frac{1}{e^{-x}+1}$, sous la forme suivante $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$, puis nous remplaçons dans l'équation précédente, nous obtenons une forme plus simple de l'intégrale

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_0^{\frac{U}{T}} g(U - Tz) dz - \int_0^{\frac{U}{T}} \frac{g(U - Tz)}{\exp(z) + 1} dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{g(U + Tz)}{\exp(z) + 1} dz + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_0^{\frac{U_1}{T}} f(U_1 - Tx) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{\frac{U_1}{T}} \frac{f(U_1 - Tx)}{\exp(x) + 1} dx + \int_0^\infty \frac{f(U_1 + Tx)}{\exp(x) + 1} dx \right) dl \right] \end{aligned}$$

lorsque la température tend vers zéro, la deuxième intégrale converge rapidement, à cause de la présence de l'exponentielle dans le dénominateur et cela nous permet de remplacer la limite supérieure de cette dernière par l'infini ($T \longrightarrow 0 \implies \frac{U}{T} \longrightarrow \infty$ et $\frac{U_1}{T} \longrightarrow \infty$) [11] et

nous obtenons finalement

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_0^{\frac{U}{T}} g(U - Tz) dz + \int_0^\infty \frac{g(U + Tz) - g(U - Tz)}{\exp(z) + 1} dz + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_0^{\frac{U_1}{T}} f(U_1 - Tx) dx + \int_0^\infty \frac{f(U_1 + Tx) - f(U_1 - Tx)}{\exp(x) + 1} dx \right) dl \right]$$

nous pouvons développer les numérateurs de la deuxième et de la quatrième intégrale, pour une même raison ($Tz \ll 1$ et $Tx \ll 1$), en séries de puissance autour de (Tz et Tx), nous obtenons

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_0^{\frac{U}{T}} g(U - Tz) dz + \int_0^\infty \frac{2Tzg'(U) + \frac{1}{3}T^3z^3g'''(U)}{\exp(z) + 1} dz + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_0^{\frac{U_1}{T}} f(U_1 - Tx) dx + \int_0^\infty \frac{2Tx f'(U_1) + \frac{1}{3}T^3x^3 f'''(U_1)}{\exp(x) + 1} dx \right) dl \right]$$

ce que nous donne encore une fois des intégrales spéciales

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_0^{\frac{U}{T}} g(U - Tz) dz + 2Tg'(U) \int_0^\infty \frac{z}{\exp(z) + 1} dz + \frac{1}{3}T^3g'''(U) \int_0^\infty \frac{z^3}{\exp(z) + 1} dz + \dots + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_0^{\frac{U_1}{T}} f(U_1 - Tx) dx + 2Tf'(U_1) \int_0^\infty \frac{x}{\exp(x) + 1} dx + \frac{1}{3}T^3f'''(U_1) \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) + 1} dx + \dots \right) dl \right]$$

que nous pouvons calculer comme précédemment (des intégrales spéciales [11], données par la fonction zêta de Riemann et la fonction gamma)

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_0^{\frac{U}{T}} g(U - Tz) dz + \frac{\pi^2}{6} Tg'(U) + \frac{7\pi^4}{360} T^3g'''(U) + \dots + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_0^{\frac{U_1}{T}} f(U_1 - Tx) dx + \frac{\pi^2}{6} Tf'(U_1) + \frac{7\pi^4}{360} T^3f'''(U_1) + \dots \right) dl \right]$$

avec $g'(U) = \frac{1}{2}U^{-3/2}$, et $f'(U_1) = \frac{1}{2}U_1^{-3/2}$, et puisque $T \sim 0 \implies T^4 \ll T^2$, nous limitons notre développement à T^2

$$N_e(\vec{r}, t) = \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\left(\int_0^{\frac{U}{T}} g(U - Tz) dz \right) - \frac{\pi^2}{6} T \frac{1}{2} U^{-3/2} + \dots + \int_1^{l_{\max}} \left(\left(\int_0^{\frac{U_1}{T}} f(U_1 - Tx) dx \right) - \frac{\pi^2}{6} T \frac{1}{2} U_1^{-3/2} + \dots \right) dl \right]$$

La première et la troisième intégrale peuvent être calculées analytiquement, après avoir changé la variable

$$U - Tz = y \implies dy = -Tdz$$

alors, nous avons

$$\begin{cases} z \longrightarrow 0 \implies y \longrightarrow U \\ z \longrightarrow \frac{U}{T} \implies y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

et la variable

$$U_1 - Tx = t \implies dt = -Tdx$$

d'où

$$\begin{cases} z \longrightarrow 0 \implies t \longrightarrow U_1 \\ z \longrightarrow \frac{U_1}{T} \implies t \longrightarrow 0 \end{cases}$$

ce qui nous permet de transformer l'expression comme suit

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[\int_0^U g(y) \frac{dy}{T} - \frac{\pi^2}{6} T \frac{1}{2} U^{-3/2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{l_{\max}} \left(\int_0^{U_1} f(t) \frac{dt}{T} - \frac{\pi^2}{6} T \frac{1}{2} U_1^{-3/2} + \dots \right) dl \right] \end{aligned}$$

nous déduisons après quelques calculs

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} T \left[2 \frac{\sqrt{U}}{T} - \frac{\pi^2}{12} T U^{-3/2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{l_{\max}} \left(2 \frac{\sqrt{U_1}}{T} - \frac{\pi^2}{12} T U_1^{-3/2} + \dots \right) dl \right] \end{aligned}$$

Après ces étapes, il reste à calculer l'intégrale $\int_1^{l_{\max}} dl$, que nous pouvons déduire à partir d'un changement de variable

$$U_1 = e\phi + \mu - l\hbar\omega_{ce} \implies dU_1 = -(\hbar\omega_{ce}) dl$$

ce qui nous permet de trouver l'expression suivante

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= \frac{P_F^2 \left(\frac{\hbar\omega_{ce}}{\varepsilon_F} \right)}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\frac{m_e}{2}} \left[2\sqrt{U} - \frac{\pi^2}{12} T^2 U^{-3/2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3\hbar\omega_{ce}} (U_1)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6\hbar\omega_{ce}} T^2 U_1^{-1/2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons une expression qui nous donne la densité électronique en présence de deux champs électrique et magnétique [39]

$$\begin{aligned} N_e(\vec{r}, t) &= N_0 \left[\frac{3}{2} \eta(B_0) (1 + \Phi)^{\frac{1}{2}} + (1 + \Phi - \eta(B_0))^{\frac{3}{2}} - \frac{\eta(B_0) T^2}{2} (1 + \Phi)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + T^2 (1 + \Phi + \eta(B_0))^{-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

où $\Phi = \frac{e\varphi}{\varepsilon_F}$ et $T = \frac{\pi T}{2\sqrt{2}\varepsilon_F}$ la température normalisée. Ainsi la densité électronique normalisée est donnée par l'expression suivante

$$N_e^{(q=1)}(\vec{r}, t) = \frac{N_e(\vec{r}, t)}{N_0} = \frac{3}{2}\eta(B_0)(1 + \Phi)^{\frac{1}{2}} + (1 + \Phi - \eta(B_0))^{\frac{3}{2}} - \frac{\eta(B_0)T^2}{2}(1 + \Phi)^{-\frac{3}{2}} + T^2(1 + \Phi + \eta(B_0))^{-\frac{1}{2}}.$$

Bibliographie

- [1] F. Haas, *Quantum Plasmas: An Hydrodynamic Approach* (Springer, New York, 2011).
- [2] P. K. Shukla et B. Eliasson, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 165007 (2012); **108**, 219902 (E) (2012); **109**, 019901 (E) (2012).
- [3] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [4] M. Tribeche, S. Ghebache, K. Aoutou et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **15**, 033702 (2008).
- [5] S. Ghebache et M. Tribeche, *Open Journal of Acoustics* **3**, 40 (2013).
- [6] K. Ourabah et M. Tribeche, *Phys. Rev. E* **88**, 045101 (2013).
- [7] R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky et A. Slunyaev, *Chaos* **12**, 1070 (2002).
- [8] N. A. Krall et A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (McGraw-Hill, New York, 1973).
- [9] J. L. Delcroix et A. Bers, *Physique des Plasmas*, Tome 1 (CNRS Editions, Inter-Editions, Paris, 1994).
- [10] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer et B. Roulet, *Physique Statistique* (Hermann, Paris, 1989).
- [11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Part 1 (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1980).
- [12] C. Ngo et H. Ngo, *Introduction à la Physique Statistique* (Dunod, Paris, 2007).
- [13] C. Tsallis, *J. Comput. Appl. Math.* **227**, 51 (2009).

-
- [14] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics* (Springer, New York, 2009).
- [15] G. Livadiotis et D. J. McComas, *J. Geophys. Res.* **114**, A11105 (2009).
- [16] C. Tsallis et L. J. L. Cirto, *Eur. Phys. J. C* **73**, 2487 (2013).
- [17] A. Rényi, *Acta. Math. Hung.* **6**, 285 (1955).
- [18] J. L. Delcroix et A. Bers, *Physique des Plasmas*, Tome 2 (CNRS Editions, Inter-Editions, Paris, 1994).
- [19] D. R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory* (Wiley, New York, 1983).
- [20] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Academic, New York, 1965).
- [21] H. Ikezi, R. Taylor et D. Baker, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 11 (1970).
- [22] H. Schamel, *Plasma Phys.* **14**, 205 (1972).
- [23] J. M. Rax, *Physique des Plasmas*, Cours et applications (DUNOD, Paris, 2005).
- [24] F. Haas, L.G. Garcia, J. Goedert et J. Manfredi, *Phys. Plasmas* **10**, 3858 (2003).
- [25] P. K. Shukla et V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 508 (1992).
- [26] N. N. Rao, P. K. Shukla et M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [27] W. R. Frensley, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 745 (1990).
- [28] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Butterworth-Heinemann, Woburn, 1996).
- [29] P. K. Shukla et B. Eliasson, *Phys. Uspekhi.* **53**, 51 (2010).
- [30] R. Fitzpatrick, *The Physics of Plasmas* (Lulu Inc., Raleigh, 2011).
- [31] S. R. A. Salinas, *Introduction to Statistical Physics* (Springer, New York , 2001).
- [32] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [33] P. A. Markowich, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **11**, 459 (1989).
- [34] G. Manfredi et F. Haas, *Phys. Rev. B* **64**, 075316 (2001).
- [35] J. L. Lopez, *Phys. Rev. E* **69**, 026110 (2004).

-
- [36] E. Madelung, Z. Phys. **40**, 332 (1926).
- [37] L. N. Tsintsadze, AIP Conf. Proc. **1306**, 89 (2010).
- [38] H. A. Shah, M. N. S. Qureshi et N. Tsintsadze, Phys. Plasmas **17**, 032312 (2010).
- [39] H. A. Shah, M. J. Iqbal, N. Tsintsadze, W. Masood et M. N. S. Qureshi, Phys. Plasmas **19**, 092304 (2012).
- [40] C. F. von Weizsacker, Z. Phys. **96**, 431 (1935).
- [41] W. Kohn et L. J. Sham, Phys. Rev. **140**, A1133 (1965).
- [42] L. H. Thomas, Proc. Cambridge Phil. Soc. **23**, 542 (1927).
- [43] E. Fermi, Z. Physik **48**, 73 (1928).
- [44] J. S. Slater et H. M. Krutter, Phys. Rev. **47**, 559 (1935).
- [45] R.P. Feynman, N. Metropolis et E. Teller, Phys. Rev. **75**, 1561 (1949).
- [46] G. Allard, J. Phys. Radium **9**, 225 (1948).
- [47] P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Phil. Soc. **26**, 376 (1930).
- [48] E. Fermi et E. Amaldi, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna **6**, 117 (1934).
- [49] E. P. Wigner, Phys. Rev. **46**, 1002 (1934).
- [50] P. Gombàs, Z. Physik **121**, 523 (1943).
- [51] Y. Tomishima, Prog. Theor. Phys. **22**, 1 (1959).
- [52] E. Teller, Rev. Mod. Phys. **34**, 627 (1962).
- [53] S. L. Shapiro et S. L. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (John Wiley & Sons, New York, 1983).
- [54] P. K. Shukla et B. Eliasson, Phys. Rev. Lett. **99**, 096401 (2007).
- [55] P. Zoller, Th. Beth, D. Binosi, R. Blatt, H. Briegel, D. Bruss, T. Calarco, J.I. Cirac, D. Deutsch, J. Eisert, A. Ekert, C. Fabre, N. Gisin, P. Grangiere, M. Grassl, S. Haroche, A. Imamoglu, A. Karlson, J. Kempe, L. Kouwenhoven, S. Kröll, G. Leuchs, M. Lewenstein, D. Loss, N. Lütkenhaus, S. Massar, J.E. Mooij, M.B. Plenio, E. Polzik,

-
- S. Popescu, G. Rempe, A. Sergienko, D. Suter, J. Twamley, G. Wendin, R. Werner, A. Winter, J. Wrachtrup et A. Zeilinger, *Eur. Phys. J. D* **36**, 203 (2005).
- [56] P. A. Markowich, C.A. Ringhofer et C. Schmeiser, *Semiconductor Equations* (Springer, Berlin, 1990).
- [57] G. Manfredi et M. R. Feix, *Phys. Rev. E* **53**, 6460 (1996).
- [58] S. Mola, G. Manfredi et M. R. Feix, *J. Plasma Phys.* **50**, 145 (1993).
- [59] A. Luque, H. Schamel et R. Fedele, *Phys. Lett. A* **324**, 185 (2004).
- [60] N. Suh, M. R. Feix et P. Bertrand, *J. Comput. Phys.* **50**, 145 (1991).
- [61] F. Haas, G. Manfredi et M. R. Feix, *Phys. Rev. E* **62**, 2763 (2000).
- [62] F. Haas, G. Manfredi et J. Goedert, *Phys. Rev. E* **64**, 026413 (2001).
- [63] L. G. Garcia, F. Haas, L. P. L. de Olivera et J. Goedert, *Phys. Plasmas* **12**, 012302 (2005).
- [64] G. Manfredi et F. Haas, *Phys. Rev. B* **64**, 075316 (2001).
- [65] L. Brey, J. Dempsey, N. F. Johnson et B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **42**, 1240 (1990).
- [66] **K. Mebrouk et M. Tribeche, *Phys. Lett. A* **378**, 3523 (2014).**
- [67] S. Singh et T. Honzawa, *Phys. Fluids B* **5**, 2093 (1993).
- [68] H. K. Malik, S. Singh et R. P. Dahiya, *Phys. Plasmas* **1**, 1137 (1994).
- [69] A. Mushtaq, H.A. Shah, N. Rubab et G. Murtaza, *Phys. Plasmas* **13**, 062903 (2006).
- [70] D. K. Singh et H. K. Malik, *Phys. Plasmas* **14**, 112103 (2007).
- [71] E. K. El-Shewy, *Chaos, Solitons and Fractals* **31**, 1020 (2007).
- [72] S. A. Khan, A. Mushtaq et W. Masood, *Phys. Plasmas* **15**, 013701 (2008).
- [73] H. R. Pakzad et K. Javidan, *Astrophys. Space Sci.* **333**, 257 (2011).
- [74] S. H. Mao et J. K. Xue, *Phys. Scr.* **84**, 055501 (2011).
- [75] P. Hohenberg et W. Kohn, *Phys. Rev. B* **136**, 864 (1964).

-
- [76] S. H. Mao et J. K. Xue, Phys. Scr. **84**, 055501 (2011).
- [77] K. Ko et H. H. Kuehl, Phys. Rev. Lett. **40**, 233 (1978).
- [78] K. Ko et H. H. Kuehl, Phys. Fluids **23**, 31 (1980).
- [79] J. Zamanian, M. Marklund et G. Brodin, Phys. Rev. E **88**, 063105 (2013).
- [80] A. Rasheed, M. Jamil, M. Siddique, F. Huda et Y. D. Jung, Phys. Plasmas **21**, 062107 (2014).
- [81] M. R. Amin, Phys. Scr. **90**, 015601 (2015).
- [82] S. A. Khan et A. Mushtaq, Phys. Plasmas **14**, 083703 (2007).
- [83] **K. Mebrouk, L. Ait Gougam et M. Tribeche, Commun. Theor. Phys. 65, 73 (2016).**
- [84] U. M. Abdelsalam, Physica B **405**, 3914 (2010).
- [85] P. K. Shukla et A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2002).
- [86] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic Press, New York, 1972).
- [87] R. Z. Sagdeev, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol. 4, p. 23.
- [88] P. K. Shukla et L. Stenflo, Phys. Lett. A **355**, 378 (2006).
- [89] P. K. Shukla et B. Eliasson, Phys. Usp. **53**, 51 (2010).
- [90] G. S. Saakyan, *Equilibrium Configurations of Degenerate Gaseous Masses* (Nauka, Moscow, 1972).
- [91] S. L. Shapiro et S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: the Physics of Compact Objects* (Wiley, New York, 1983).
- [92] V. E. Fortov, *Extremal States of Substance on the Earth and in Space* (Fizmatlit, Moscow, 2008).

-
- [93] T. Kluge, C. Gutt, L. Huang, J. Metzkes, U. Schramm, M. Bussmann et T. E Cowan, *Phys. Plasmas* **21**, 033110 (2014).
- [94] U. Zastra, P. Sperling, M. Harmand, A. Becker, T. Bornath, R. Bredow, S. Dziarzhytski, T. Fennel, L. B. Fletcher, E. Forster, S. Gode, G. Gregori, V. Hilbert, D. Hochhaus, B. Holst, T. Laarmann, H. J. Lee, T. Ma, J. P. Mithen, R. Mitzner, C. D. Murphy, M. Nakatsutsumi, P. Neumayer, A. Przystawik, S. Roling, M. Schulz, B. Siemer, S. Skruszewicz, J. Tiggesbaunker, S. Toilekis, T. Tschentscher, T. White, M. Wostmann, H. Zacharias, T. Doppner, S. H. Glenzer et R. Redmer, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 105002 (2014).
- [95] O. A. Hurricane, D. A. Callahan, D. T. Casey, P. M. Celliers, C. Cerjan, E. L. Dewald, T. R. Dittrich, T. Doppner, D. E. Hinkel, L. F. Berzak Hopkins, J. L. Kline, S. Le Pape, T. Ma, A. G. MacPhee, J. L. Milovich, A. Pak, H.-S. Park, P. K. Patel, B. A. Remington, J. D. Salmonson, P. T. Springer et R. Tommasini, *Nature* **506**, 343 (2014).
- [96] M. Bonitz, D. Semkat, A. Filinov, V. Golubnychi, D. Kremp, D. O. Gericke, M. S. Murillo, V. Filinov, V. Fortov et W. Hoyer, *J. Phys. A Math. Gen.* **36**, 5921 (2003).
- [97] G. Manfredi, *Fields Inst. Commun.* **46**, 263 (2005).
- [98] V. S. Belayev et V. N. Mikhaylov, *Laser Phys.* **11**, 957 (2001).
- [99] G. Manfredi et P. A. Hervieux, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 061108 (2007).
- [100] M. Bonitz, E. Pehlke et T. Schoof, *Phys. Rev. E* **87**, 033105 (2013).
- [101] H. L. Berk et K. V. Roberts, *Phys. Fluids.* **10**, 1595 (1967).
- [102] R. L. Morse and C. W. Nielson, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1087 (1969) .
- [103] A. V. Gurevich, *Sov. Phys. JETP* **26**, 575 (1968).
- [104] H. L. Berk, C. E. Nielson et K. V. Roberts, *Phys. Fluids* **13**, 980 (1970).
- [105] M. Kako, T. Taniuti et T. Watanabe, *J. Phys. Soc. Jpn.* **31**, 1820 (1971).
- [106] H. Schamel, *Phys. Plasmas* **22**, 042301 (2015).
- [107] I. B. Bernstein, J. M. Greene et M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **108**, 546 (1957).

- [108] A. V. Gurevich, Sov. Phys. JETP **53**, 953 (1967).
- [109] H. Schamel, Plasma Phys. **14**, 905 (1972).
- [110] A. Luque, H. Schamel et R. Fedele, Phys. Lett. A **324**, 185 (2004).
- [111] L. Demeio, Transp. Theory Stat. Phys. **36**, 137 (2007).
- [112] E. Martinenko et B. K. Shivamoggi, Phys. Rev. A **69**, 052504 (2004).
- [113] **K. Mebrouk, L. Ait Gougam et M. Tribeche, Physica A 451, 525 (2016).**
- [114] L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Physical Kinetics* (Permagon, United Kingdom, 1981).
- [115] D. F. Torres et U. Tirnakli, Physica A **261**, 499 (1998).
- [116] H. Washimi et T. Taniuti, Phys. Rev. Lett. **17**, 996 (1966).