

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat
En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Equations aux dérivées partielles

Par :

Asma LOUARDANI

Sujet

Ecoulement de fluide micropolaire avec une loi de Maxwell-Cattaneo

Soutenue publiquement le 04/01/2017 devant le jury composé de :

M. D. TENIOU	Professeur	à l'USTHB	Président
M. K. HAMDACHE	Professeur	à l'ESILV Paris	Directeur de thèse
Mme D. HAMROUN	Professeur	à l'USTHB	Co-Directrice de thèse
M. M. S. MOULAY	Professeur	à l'USTHB	Examineur
M. A. MOKRANE	Professeur	à l'ENS Kouba	Examineur
M. M. MOUSSAOUI	Professeur	à l'ENS Kouba	Examineur.

Remerciements

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mes directeurs de thèse Djamila Hamroun et Kamel Hamdache pour le savoir et la rigueur qu'ils m'ont transmis. Je remercie Djamila Hamroun pour tout le temps qu'elle m'a consacré, et Kamel Hamdache pour ce sujet intéressant et riche. Je vous remercie profondément pour votre disponibilité, votre patience et votre indulgence face à mes hésitations et mes doutes.

Je remercie très chaleureusement Djamel Teniou, Abdelhafid Mokrane, Mohamed Said Moulay et Mohand Moussaoui qui m'ont honoré d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie également tous les membres du laboratoire AMNEDP de l'USTHB pour la bonne humeur et la convivialité qui y régnaient. Je remercie particulièrement son directeur Djamel Teniou qui a toujours été bienveillant et disponible. J'exprime ma profonde gratitude à la directrice de la bibliothèque Taous Oulemane et à tous ses employés, je pense particulièrement à Samira et Azzedine, pour nous avoir fourni de bonnes conditions de travail. Je remercie mes directeurs de projet de de License et de Master, Tarik Aliziane et Abdelhamid Ainouz et tous mes enseignants en particulier Ouahiba Zair et Keddour Lemrabet.

Je remercie vivement Djamel Louardani pour les discussions très riches que nous avons pu avoir au cours de cette thèse. Je remercie également ma très chère amie Hadjer Ouzzane pour son aide et ses conseils.

Durant mes années d'étude j'ai eu la chance d'avoir des amies en or, Fatima Arab, Rokia Kechkar, Hadjer Ouzzane et Asma Boutaleb, qui m'ont soutenu jusqu'au bout. Leur amitié a beaucoup d'importance pour moi.

Je remercie mes agréables amies de recherche opérationnelle Asma Boumesbah et Meriem Tiachachat pour la joie et l'amour qu'elles m'ont apportés et surtout pour les moments que nous avons partagés ensemble.

Merci à Wafa Karouche et à Inès Sadek pour leur sincère amitié, leur amour et leur soutien.

Je n'oublie pas la personne qui a sacrifié toute sa vie pour moi, ma chère mère. Je la remercie

d'être toujours à mes côtés, pour son amour et son soutien durant la préparation de ma thèse. Merci à mes chères sœurs Amel, Imane, Khadidja, Selma et Mouna, vous êtes tout pour moi. Une pensée à mes tantes et oncles qui m'ont toujours encouragé et particulièrement mes tantes Saliha et Shafia.

Résumé

Dans cette thèse, nous établissons un résultat d'existence de solution faible pour un problème issu de la magnétohydrodynamique (MHD). Le problème étudié décrit l'écoulement d'un fluide micropolaire incompressible soumis à un champ magnétique en tenant compte du transfert thermique. On suppose que le fluide est soumis à la force de gravité et occupe un domaine borné D de \mathbb{R}^3 à frontière régulière Γ . Le modèle comprend les équations de Navier-Stokes incompressible pour la vitesse U du fluide, l'équation de la microrotation ω décrivant la vitesse angulaire des particules du fluide, les équations de Maxwell pour l'induction magnétique B et les équations de Maxwell-Cattaneo pour la température θ et le flux de chaleur Q . Grâce aux techniques de régularisation, de point fixe et de compacité, on montre l'existence de solutions faibles globales en temps du problème.

Mots clés : Fluide micropolaire, la loi de Maxwell-Cattaneo, équations de Navier-Stokes incompressible, le point fixe de Leray-Schauder, le lemme de compacité d'Aubin.

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Modélisation mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire avec la loi de Maxwell-Cattaneo	5
2.1	Equations de la mécanique des fluides	5
2.1.1	Fluide incompressible	6
2.1.2	Conservation de la masse	6
2.1.3	Conservation de la quantité de mouvement	7
2.2	Fluide micropolaire	9
2.2.1	Conservation du moment cinétique	9
2.2.2	Equations de l'écoulement micropolaire incompressible	10
2.3	Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme	12
2.4	Les équations du transfert thermique	13
2.4.1	La loi de Fourier	13
2.4.2	La loi de Maxwell-Cattaneo	14
2.5	L'équation d'état de la densité du fluide	15
3	Rappel de quelques outils mathématiques	16
3.1	Inégalités de Sobolev	16
3.1.1	Inégalité de Poincaré	16
3.1.2	Injections de Sobolev	16
3.2	Espaces $H(\text{curl}, \Omega)$ et $H(\text{div}, \Omega)$	17
3.3	Laplacien vectoriel	18
3.4	Espaces abstraits contenant le temps	18
3.4.1	Inégalité d'interpolation	19

3.4.2	Un lemme de compacité	19
3.4.3	Un théorème de régularité en temps	20
3.4.4	Théorème de De Rham	21
3.5	Autres rappels	22
3.5.1	Inégalité de Gronwall	22
3.5.2	Inégalité de Young	22
3.5.3	Inégalité de Hölder	23
3.5.4	Théorème de point fixe de Leray-Schauder	23
3.5.5	Les opérateurs monotones	23
4	Étude mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire avec la loi de Maxwell-Cattaneo	25
4.1	Description du modèle	25
4.1.1	Définition du problème (\mathcal{P})	25
4.1.2	Espaces fonctionnels	26
4.1.3	Hypothèses sur les données	27
4.2	Existence de solutions du problème (\mathcal{P})	28
4.2.1	Estimation d'énergie pour le système (\mathcal{P})	28
4.2.2	La formulation variationnelle du système (\mathcal{P})	31
4.2.3	Théorème d'existence	33
4.2.4	Existence de solutions du problème modifié (\mathcal{P}^ν)	34
4.2.4.1	Formulation variationnelle du système (\mathcal{P}^ν)	35
4.2.4.2	Estimation d'énergie du système (\mathcal{P}^ν)	36
4.2.4.3	La méthode de point fixe pour (\mathcal{P}^ν)	37
4.2.5	Compacité de la solution	55
4.2.5.1	Compacité de U^ν , ω^ν , B^ν et Q^ν	56
4.2.5.2	Compacité de θ^ν	57
4.2.6	Passage à la limite quand $\nu \rightarrow 0$	67
5	Appendice A	74
6	Appendice B	76

Notations

$(e_i)_{1 \leq i \leq 3}$	la base canonique de \mathbb{R}^3
\cdot	produit scalaire dans \mathbb{R}^3
\times	produit vectoriel dans \mathbb{R}^3
\otimes	produit tensoriel dans \mathbb{R}^3
$ \cdot $	norme euclidienne dans \mathbb{R}^3
$*$	produit de convolution des fonctions
∂_t	dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$
∇	le gradient
$\nabla \cdot u = \operatorname{div} u$	divergence du champ de vecteurs u
$\nabla \times u = \operatorname{curl} u$	rotationnel du champ de vecteurs u
Δ	le laplacien
∇u	$(\nabla u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq 3$, $ \nabla u ^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2$, u champ de vecteurs
	$\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, u, v champs de vecteurs
Δu	$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$

X'	dual topologique de l'espace de Banach X
$X \subset Y$	injection continue du Banach X dans le Banach Y
$X \subset\subset Y$	injection compacte du Banach X dans le Banach Y
$\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$	normale au bord d'un ouvert de \mathbb{R}^3 extérieure et unitaire
dS	mesure superficielle sur le bord d'un ouvert de \mathbb{R}^3
$\overline{\Omega}$	la fermeture de Ω
$\partial\Omega$	le bord de Ω
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X'}$	crochet de dualité entre X et X'
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, k fois continûment différentiables
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions sur Ω
$\mathcal{D}_s(\Omega)$	espace des fonctions de $(\mathcal{D}(\Omega))^3$ à divergence nulle.
$p.p$	presque partout
$L^p(\Omega)$	espace de Lebesgue
$\ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$	norme dans $L^p(\Omega)$
$\ \cdot\ $	norme dans $L^2(\Omega)$
$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$	espaces de Sobolev
$W_0^{m,p}(\Omega), H_0^m(\Omega)$	l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ respectivement dans $H^m(\Omega)$
$\mathbb{L}^p(D) = (L^p(D))^3, \mathbb{H}_0^1(D) = (H_0^1(D))^3.$	

Introduction générale

Nous étudions dans cette thèse un modèle mathématique issu de la magnétohydrodynamique (MHD). La MHD est une discipline particulière de l'hydrodynamique, décrivant le comportement d'un fluide conducteur de courant électrique, soumis à un champ électrique, magnétique ou électromagnétique. Ce fluide pourrait être l'eau, en particulier l'eau de mer (grâce au sel qu'elle contient), ou un métal à l'état liquide, ou bien un gaz ionisé dit plasma. Le phénomène de la MHD est largement présent dans les composantes de l'univers comme le noyau terrestre, le soleil et la magnétosphère. Les applications de la MHD sont nombreuses dans l'industrie comme la production de l'aluminium, le tokamak qui est une machine de fusion torique magnétique destinée à contrôler les plasmas, et la propulsion qui exploite la propriété qu'ont ces fluides de convertir l'énergie électrique ou magnétique en énergie cinétique ; ainsi un bateau peut être propulsé uniquement à l'aide d'une source électrique.

Dans ce travail, nous avons utilisé la théorie des fluides micropolaires qui est une extension des modèles hydrodynamiques classiques. La théorie des fluides micropolaires a été introduite par A.C. Eringen en 1966, pour inclure la description du comportement des fluides à l'échelle microscopique car les particules du fluide peuvent tourner indépendamment de la rotation et du déplacement du fluide. De nombreux fluides sont micropolaires, citons par exemple les cristaux-liquides, les polymères, les peintures, les lubrifiants et le sang.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier la dynamique du transfert de chaleur dans un fluide micropolaire incompressible soumis à un champ magnétique. Le phénomène de la conduction de la chaleur est décrit habituellement par la loi classique de Fourier, qui se traduit par la relation

$$Q = -\kappa \nabla \theta,$$

où θ est la température, Q est le flux de chaleur et $\kappa > 0$ est la conductivité thermique. Cependant cette loi conduit à une équation parabolique pour la température θ . Cela signifie que toute pertur-

bation initiale est ressentie instantanément dans l'ensemble du milieu, ce qui n'est pas conforme à la réalité. De nombreuses corrections de la loi de Fourier ont été proposées pour éviter ce paradoxe. L'une des théories les plus acceptées est celle qui est fondée sur la loi de Maxwell-Cattaneo, qui introduit un terme de relaxation thermique dans la loi de Fourier. Cette loi est donnée par (voir chapitre 1)

$$\tau \frac{\partial Q}{\partial t} + Q = -\kappa \nabla \theta,$$

où τ est le temps de relaxation.

Le modèle étudié dans ce travail comporte cinq inconnues : la vitesse du fluide U , la micro-rotation ω , l'induction magnétique B , la température θ et le flux de chaleur Q . Leur dynamique est décrite par des équations traduisant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment angulaire, et aussi par les équations de Maxwell et la loi de transfert thermique. On obtient (voir chapitre 1) le système d'équations aux dérivées partielles suivant

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{div } U = 0, \quad \text{div } B = 0, \\ \rho_0(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - (\zeta + \eta)\Delta U + \nabla P = -\rho(\theta)ge_3 + 2\zeta \text{curl } \omega + \text{curl } B \times B, \\ \rho_0 I(\partial_t \omega + (U \cdot \nabla)\omega) - (c_a + c_d)\Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla(\text{div } \omega) = 2\zeta(\text{curl } U - 2\omega), \\ \partial_t B + \text{curl} \left(\Sigma(\theta)(\text{curl } B + \lambda \text{curl } B \times B) \right) = \text{curl}(U \times B), \\ (MC) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta = -\text{div } Q, \\ \tau(\partial_t Q + \omega \times Q - \gamma \Delta Q) = -Q - \kappa \nabla \theta, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $e_3 = (0, 0, 1)$. La densité est donnée par l'équation d'état

$$\rho(\theta) = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_0))$$

et la fonction $\Sigma(\theta) = \frac{1}{\sigma(\theta)}$ où σ représente la conductivité électrique. Les paramètres apparaissant dans le système sont : la densité à la température de référence $\theta_0 > 0$, la force de gravité g , le coefficient de viscosité $\eta > 0$, la viscosité dynamique de la microrotation $\zeta > 0$, les coefficients de viscosité angulaire $c_0, c_a, c_d > 0$, le moment d'inertie I , la conductivité thermique $\kappa > 0$, le coefficient de dilatation thermique $\alpha > 0$, le temps de relaxation $\tau > 0$, le coefficient de diffusion du flux de chaleur $\gamma > 0$ et $\lambda = \omega_e \tau_e$ avec ω_e est la fréquence cyclotron des électrons et τ_e est le temps de collision d'électrons. Pour plus de détails sur les équations du mouvement, voir ([32], [21], [38], [41]).

Ces équations sont posées dans le cylindre $D_T = D \times (0, T)$ où $T > 0$ et D est un domaine borné de \mathbb{R}^3 de bord régulier Γ . Nous complétons le système d'équations par les conditions aux

limites et initiales suivantes

$$\begin{aligned}
 & U = 0, \omega = 0, B \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \Gamma_T, \\
 & \Sigma(\theta)(\text{curl } B + \lambda \text{curl } B \times B) \times \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \Gamma_T, \\
 (1.2) \quad & Q \times \mathbf{n} = 0, \tau \gamma \text{div } Q - \kappa \theta = 0, \text{ sur } \Gamma_T, \\
 & U(0) = U_0, \omega(0) = \omega_0, \text{ dans } D, \\
 & B(0) = B_0, \theta(0) = \theta_0, Q(0) = Q_0, \text{ dans } D,
 \end{aligned}$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure au bord Γ et $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$.

Le but de ce travail est d'établir l'existence de solutions faibles de ce problème. Ce travail a été publié dans le journal *Nonlinear Analysis*, voir [24], sous le titre : **Global weak solutions to a model of micropolar fluids with Maxwell-Cattaneo heat transfer law.**

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude mathématique de systèmes de la MHD et de la MHDM (MHD micropolaire). Dans le cas d'un écoulement incompressible, l'existence et l'unicité de solutions fortes, locales ou globales en temps de la MHDM ont été établies dans [25] et [44] et l'existence de solutions faibles dans [19] et [37]. Dans [12], les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution faible et globale en temps du système de la MHD couplée avec la loi classique de Fourier. Dans [2], les auteurs ont étudié l'écoulement d'un fluide micropolaire incompressible soumis à un champ magnétique couplé avec une équation de la température de type convection-diffusion. Ces auteurs ont montré l'existence d'une solution faible globale en temps avec une décroissance de l'énergie.

Le système de Maxwell-Cattaneo (MC) pour la température et le flux de chaleur a été étudié pour lui-même dans ([28], [34], [29], [35]), dans le cas $U = \omega = 0$, avec des conditions aux limites pour Q de type $\varepsilon_{ijk} Q_j \mathbf{n}_k = 0$, où ε_{ijk} est le symbole de permutation. Le but de ces études est d'établir des résultats d'existence globale de solutions avec des propriétés qualitatives de ces solutions. Dans [9] une étude numérique de ce système a été réalisée pour un milieu en déplacement (c'est à dire en incluant le terme d'advection). Nous citons également une étude numérique effectuée dans [36] de la MHDM couplée avec le système de Maxwell-Cattaneo, ainsi qu'une étude théorique effectuée dans [1], pour l'étude d'un écoulement ferrofluide avec un transfert de chaleur décrit par une loi de Maxwell-Cattaneo non linéaire.

Les difficultés rencontrées dans cette étude sont essentiellement liées aux termes de couplage non linéaires ainsi qu'à la perte de régularité de la température θ car elle est solution d'une équation de transport. Ceci représente un obstacle majeur dans la résolution du problème étant donné que la conductivité électrique est une fonction non linéaire de la température.

Pour résoudre ces difficultés nous introduisons un problème approché noté (\mathcal{P}^ν) , dépendant

d'un petit paramètre $\nu > 0$, défini par les équations suivantes

$$\operatorname{div} U = 0, \quad \operatorname{div} B = 0,$$

$$\rho_0(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - (\zeta + \eta)\Delta U - \nu\|\nabla U\|^2\Delta U + \nabla P = -\rho(\theta)ge_3 +$$

$$2\zeta\operatorname{curl} \omega + \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1+\nu|B|},$$

$$\rho_0 I(\partial_t \omega + (U \cdot \nabla)\omega) - (c_a + c_d)\Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla(\operatorname{div} \omega) = 2\zeta(\operatorname{curl} U - 2\omega),$$

$$\partial_t B + \operatorname{curl} \left(\Sigma(\theta)(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1+\nu|B|}) \right) = \operatorname{curl} \left(U \times \frac{B}{1+\nu|B|} \right),$$

$$\partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta - \nu \Delta \theta = -\operatorname{div} Q,$$

$$\tau \left(\partial_t Q + \omega \times Q - \gamma \Delta Q \right) = -Q - \kappa \nabla \theta,$$

avec $\|\nabla U\|^2 = \int_D |\nabla U|^2 dx$, et les conditions aux limites et initiales suivantes

$$U = 0, \quad \omega = 0, \quad B \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T,$$

$$\Sigma(\theta)(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1+\nu|B|}) \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T,$$

$$Q \times \mathbf{n} = 0, \quad \tau \gamma \operatorname{div} Q - \kappa \theta = 0, \quad \nu \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T,$$

$$U(0) = U_0, \quad \operatorname{div} U_0 = 0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad B(0) = B_0 \text{ dans } D,$$

$$\operatorname{div} B_0 = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad Q(0) = Q_0 \text{ dans } D.$$

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire incompressible soumis à un champ magnétique en tenant compte du transfert thermique. Nous utilisons les différentes lois de la physique qui déterminent les équations du modèle.

Le troisième chapitre est un récapitulatif des résultats standards de l'analyse fonctionnelle utilisés dans la résolution de notre problème.

Dans le dernier chapitre, nous donnons le théorème d'existence de solutions faibles et globales en temps du système (\mathcal{P}) . La preuve de ce théorème sera divisée en trois parties. Nous montrons d'abord, grâce au théorème de point fixe de Leray-Schauder, l'existence d'une solution faible $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, \theta^\nu, Q^\nu)$ au problème approché (\mathcal{P}^ν) , pour tout $\nu > 0$. Ensuite, nous établissons grâce au lemme d'Aubin, la compacité des suites U^ν, ω^ν, B^ν et Q^ν . Cependant, la compacité de θ^ν , qui est nécessaire pour le passage à la limite dans la conductivité électrique $\sigma(\theta^\nu)$, n'est pas obtenue par ce lemme. Nous aurons alors recours aux propriétés des solutions renormalisées pour la déduire. Enfin, en utilisant tous ces ingrédients, nous passons à la limite dans les solutions approchées, lorsque ν tend vers 0, pour obtenir une solution faible du problème (\mathcal{P}) .

Modélisation mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire avec la loi de Maxwell-Cattaneo

Dans ce chapitre, nous allons écrire les équations modélisant l'écoulement d'un fluide micropolaire et incompressible soumis à un champ magnétique en tenant compte du transfert de chaleur. On commence par donner les équations générales de la mécanique des fluides incompressibles, puis dans la section 2.2, nous dérivons les équations de l'écoulement d'un fluide micropolaire. Dans la section 2.3, nous écrivons les équations classiques de Maxwell pour l'électromagnétisme. Les lois du transfert thermique sont l'objet de la section 2.4. Nous commençons par rappeler la loi de Fourier, avant de donner la loi de Maxwell-Cattaneo. Nous terminons le chapitre en donnant l'équation d'état satisfaite par la densité du fluide.

2.1 Equations de la mécanique des fluides

Soit un fluide occupant un domaine D de \mathbb{R}^3 , on considère un échantillon occupant la configuration D_0 à l'instant t_0 . On note $D(t)$ sa configuration à l'instant $t > 0$. Nous allons suivre le déplacement d'une particule qui occupe la position $X = (X_1, X_2, X_3)$ à l'instant t_0 et la position $x = (x_1, x_2, x_3) = \phi(X, t_0, t)$ à un instant $t > 0$. La vitesse de la particule à l'instant t et à la position x est $U(x, t) = \frac{d}{dt}\phi(X, t_0, t)$.

La dérivée matérielle $\frac{DG}{Dt}$ est le taux de variation d'une grandeur G au cours du mouvement ; elle est donnée par

$$(2.1) \quad \frac{D}{Dt}G(x, t) = \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) + (U \cdot \nabla)G(x, t).$$

Nous rappelons ci-dessous le théorème de transport de Reynolds, voir ([5], [32]).

Théorème 2.1.1. Soit $f(x, t)$ une fonction scalaire de classe C^1 , on a

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \int_{D(t)} f(x, t) dx = \int_{D(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + U(x, t) \cdot \nabla f(x, t) + f(x, t) \operatorname{div} U(x, t) \right) dx.$$

Remarque 2.1.1. Dans le cas vectoriel, on a la formule suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} f(x, t) dx = \int_{D(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} (f \otimes U) dx.$$

2.1.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume $D(t)$ ne change pas au cours du temps

$$\operatorname{Vol}(D(t)) = \operatorname{Vol}(D_0), \forall t > 0,$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(D(t)) = 0.$$

En appliquant le théorème de transport avec $f = 1$, on trouve

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(D(t)) = \frac{d}{dt} \int_{D(t)} dx = \int_{D(t)} \operatorname{div} U = 0.$$

Le volume $D(t)$ étant arbitraire, on conclut que

$$(2.3) \quad \operatorname{div} U = 0.$$

2.1.2 Conservation de la masse

Soit $\rho(x, t)$ la densité du fluide au point x et à l'instant t , la masse totale de tout le volume $D(t)$ est donnée par

$$(2.4) \quad m(t) = \int_{D(t)} \rho(x, t) dx.$$

Dans la mécanique des milieux continus, la masse totale ne change pas au cours du temps $\frac{d}{dt} m(t) = 0$. Par conséquent, en utilisant le théorème de transport, on trouve

$$\int_{D(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt}(x, t) + \rho(x, t) \operatorname{div} U(x, t) \right) dx = 0,$$

et on conclut comme précédemment que

$$(2.5) \quad \frac{D\rho}{Dt}(x, t) + \rho \operatorname{div} (U) = 0.$$

Remarque 2.1.2. Dans le cas où ρ ne s'annule nulle part, on a l'équivalence entre la notion de fluide incompressible et celle d'écoulement incompressible.

2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement sur le domaine $D(t)$ est donnée par

$$\mathbf{p} = \int_{D(t)} \rho(x, t) U(x, t) dx.$$

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$(2.6) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i F_i,$$

avec F_i l'ensemble des forces s'exerçant sur le fluide. Elles sont de deux natures :

- Les forces intérieures ou forces de contact, données par unité de surface. Lorsque le fluide est au repos, la force de la pression est la seule force s'exerçant sur le fluide. Cependant, s'il est en mouvement, il y a des forces de frottement dues aux interactions des molécules ; ces forces sont appelées les forces de viscosité.
- Les forces extérieures ou volumiques, données par unité de volume ou de masse. Elles sont de différentes natures : forces de pesanteur, forces électromagnétiques, etc...

Nous allons préciser maintenant l'expression de ces forces.

Soit $\Gamma(t)$ le bord de $D(t)$, et \mathbf{n} la normale unitaire extérieure au bord. On note $T(x, t, \mathbf{n})$ la résultante des forces intérieures s'exerçant au point x de $\Gamma(t)$ à l'instant t .

On note $f(x, t) = \rho g + \tilde{f}$ la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le domaine $D(t)$, où ρg est la force de gravité et \tilde{f} le reste des forces. Dans notre travail, \tilde{f} est la force de Lorentz donnée par $\tilde{f} = \text{curl } B \times B$. Ainsi la résultante des forces s'exerçant sur le fluide est donnée par

$$\sum_i F_i = \int_{D(t)} f(x, t) dx + \int_{\Gamma(t)} T(x, t, \mathbf{n}) dS.$$

De plus la force de surface T s'écrit

$$T(x, t, \mathbf{n}) = \tau(x, t)\mathbf{n},$$

où τ est le tenseur des contraintes caractérisant les effets intérieurs. Ainsi la formule (2.6) devient

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho(x, t) U(x, t) dx = \int_{D(t)} f(x, t) dx + \int_{\Gamma(t)} \tau(x, t)\mathbf{n} dS.$$

On utilise le théorème de transport, on obtient pour $1 \leq i \leq 3$

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \left(\rho(x, t) U_i(x, t) \right) dx = \int_{D(t)} \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U_i \right) + U_i \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } U \right) dx,$$

puis l'équation (2.5) de la conservation de la masse, donne

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} (\rho(x, t) U_i(x, t)) dx = \int_{D(t)} \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U_i \right).$$

Par ailleurs pour l'intégrale de surface, on applique la formule de la divergence et on obtient

$$(2.8) \quad \int_{\Gamma(t)} (\tau(x, t) \mathbf{n})_i dS = \sum_j \int_{\Gamma(t)} \tau_{ij}(x, t) \mathbf{n}_j dS = \sum_j \int_{D(t)} \frac{\partial \tau(x, t)_{ij}}{\partial x_j} dx$$

Ainsi l'égalité (2.7) devient

$$(2.9) \quad \int_{D(t)} \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U_i \right) dx = \int_{D(t)} f_i(x, t) dx + \sum_j \int_{D(t)} \frac{\partial \tau(x, t)_{ij}}{\partial x_j} dx,$$

pour $1 \leq i \leq 3$, ou bien en notation vectorielle

$$(2.10) \quad \int_{D(t)} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U \right) dx = \int_{D(t)} f(x, t) dx + \int_{D(t)} \operatorname{div} \tau(x, t) dx.$$

Le domaine $D(t)$ étant arbitraire, (2.10) donne l'équation

$$(2.11) \quad \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U \right) = f + \operatorname{div} \tau.$$

Si le fluide est au repos, le tenseur des contraintes τ est déterminé par la pression hydrostatique P

$$\tau = -P \operatorname{Id},$$

où Id est la matrice identité. En revanche, si le fluide est en mouvement, le tenseur des contraintes s'écrit

$$(2.12) \quad \tau = -P(x, t) \operatorname{Id} + \mathcal{T},$$

avec \mathcal{T} est le tenseur de viscosité. Dans le cas d'un fluide Newtonien, le tenseur de viscosité dépend linéairement du tenseur de déformation, plus précisément

$$(2.13) \quad \mathcal{T} = 2\eta \mathbf{D}(U) + \lambda \operatorname{div} U \operatorname{Id},$$

où η est le coefficient de viscosité dynamique, λ est le coefficient de la viscosité volumique et \mathbf{D} est le tenseur de déformation défini par

$$\mathbf{D}(U) = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T).$$

En remplaçant dans (2.11), on trouve l'équation

$$(2.14) \quad \rho \left(\frac{dU}{dt} + (U \cdot \nabla) U \right) = f(x, t) - \nabla P(x, t) + \eta \Delta U + (\eta + \lambda) \nabla (\operatorname{div} U).$$

appelée équation de Navier-Stokes.

Si de plus le fluide est incompressible, cette équation s'écrit

$$(2.15) \quad \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U \right) - \eta \Delta U + \nabla P = f.$$

Pour plus de détails sur la mécanique des fluides incompressibles voir ([5], [45], [32]).

2.2 Fluide micropolaire

Pour décrire le modèle mathématique des fluides micropolaires, on a besoin de prendre en considération les phénomènes microscopiques. Pour tenir compte de ces effets, A.C Eringen a introduit en 1966 la contribution de la vitesse angulaire des particules du fluide en rotation, à travers l'équation de la conservation du moment cinétique.

2.2.1 Conservation du moment cinétique

On note par $\rho x \times U$ le moment cinétique (angulaire) externe et par $\rho I \omega$ le moment cinétique interne, où I est le moment d'inertie et ω représente la vitesse angulaire de rotation des particules du fluide.

L'équation de la conservation du moment cinétique s'écrit

$$(2.16) \quad \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho (I \omega + x \times U) dx = \int_{D(t)} (x \times f) dx + \int_{\Gamma(t)} (C(x, t, \mathbf{n}) + x \times T(x, t, \mathbf{n})) dS,$$

où C est le tenseur des contraintes microscopique, défini par

$$C(x, t, \mathbf{n}) = \sigma \mathbf{n},$$

où σ est le tenseur des couples de contraintes. On applique la formule de transport à l'intégrale de volume et on utilise l'équation de la conservation de la masse, on obtient

$$(2.17) \quad \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho (I \omega + x \times U) dx = \int_{D(t)} \rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \omega \right) dx + \int_{D(t)} \rho \left(x \times \frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)(x \times U) \right) dx.$$

En prenant le produit vectoriel de l'équation (2.11) avec x , on trouve

$$(2.18) \quad \rho \frac{D}{Dt} (x \times U) = x \times f + x \times \operatorname{div} \tau.$$

Maintenant on applique la formule de la divergence à l'intégrale de surface, on trouve pour la première composante

$$\int_{\Gamma(t)} x \times T(x, t, \mathbf{n})_1 dS = \int_{D(t)} (x_2 - x_3) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (\tau_{31} - \tau_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tau_{32} - \tau_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tau_{33} - \tau_{23}) \right) + (\tau_{23} - \tau_{32}) dx.$$

On a un calcul similaire pour les deux autres composantes et en notation vectorielle, on écrit

$$\int_{\Gamma(t)} x \times T(x, t, \mathbf{n}) dS = \int_{D(t)} (x \times \operatorname{div} \tau + \tilde{\tau}) dx$$

où $\tilde{\tau}$ est défini par

$$(2.19) \quad \tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{32} - \tau_{23} \\ \tau_{31} - \tau_{13} \\ \tau_{12} - \tau_{21} \end{pmatrix}.$$

Noter que dans le cas d'un fluide Newtonien comme le tenseur des contraintes τ est symétrique alors le vecteur $\tilde{\tau}$ est nul. Concernant la deuxième intégrale de surface, on obtient comme pour (2.8)

$$(2.20) \quad \int_{\Gamma(t)} \sigma(x, t) \mathbf{n} dS = \int_{D(t)} \operatorname{div} \sigma(x, t) dx.$$

L'équation (2.16) devient,

$$(2.21) \quad \int_{D(t)} \rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \omega \right) dx + \int_{D(t)} \rho \left(x \times \frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)(x \times U) \right) dx = \int_{D(t)} \left(\operatorname{div} \sigma(x, t) + x \times \operatorname{div} \tau(x, t) + \tilde{\tau}(x, t) \right) dx + \int_{D(t)} (x \times f) dx,$$

d'où

$$(2.22) \quad \rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \omega \right) = \operatorname{div} \sigma(x, t) + \tilde{\tau}(x, t),$$

et dans le cas particulier d'un fluide Newtonien, cette équation s'écrit

$$(2.23) \quad \rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \omega \right) = \operatorname{div} \sigma(x, t).$$

2.2.2 Equations de l'écoulement micropolaire incompressible

On utilise la convention d'Einstein pour la sommation pour définir les tenseurs des contraintes τ et σ d'un fluide micropolaire incompressible, voir [14] ou bien [32], qui sont donnés par

$$(2.24) \quad \tau_{ij} = -P \delta_{i,j} + \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \zeta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - 2\zeta \varepsilon_{mij} \omega_m,$$

$$(2.25) \quad \sigma_{ij} = c_0 \frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + c_d \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + c_d \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

où δ_{ij} est le symbole de kronecker, donné par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

et ε_{mij} est le symbole de Levi-Civita donné par

$$\varepsilon_{mij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (m, i, j) \text{ est } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (m, i, j) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{autrement : } i = j \text{ ou } j = m \text{ ou } m = i. \end{cases}$$

ζ est une constante qui représente la viscosité dynamique de microrotation, et c_a, c_d, c_0 sont les coefficients de viscosité angulaire.

On calcule la divergence de τ ,

$$(\operatorname{div} \tau)_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}), \text{ pour } 1 \leq i \leq 3.$$

Concernant la première composante, on trouve

$$(\operatorname{div} \tau)_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{1j}) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \eta \left(\Delta U_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right) + \zeta \left(\Delta U_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right) + 2\zeta \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right).$$

De même pour les autres composantes et en notation vectorielle, on écrit

$$\operatorname{div} \tau = -\nabla P + (\eta + \zeta) \Delta U + 2\zeta \operatorname{curl} \omega.$$

On a aussi

$$\operatorname{div} \sigma = (c_d + c_a) \Delta \omega + (c_0 + c_d - c_a) \nabla (\operatorname{div} \omega).$$

Il reste à déterminer $\tilde{\tau}$ défini par (2.19), on trouve pour la première composante

$$\begin{aligned} \tau_{23} - \tau_{32} &= 2\zeta \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) - 2\zeta \varepsilon_{123} \omega_1 - 2\zeta \varepsilon_{132} \omega_1 \\ &= 2\zeta \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) - 4\zeta \omega_1 \end{aligned}$$

de même pour les autres composantes du vecteur, on aura

$$\tilde{\tau} = 2\zeta \operatorname{curl} U - 4\zeta \omega.$$

Pour résumer les équations décrivant l'écoulement d'un fluide micropolaire incompressible sont

$$\operatorname{div} U = 0,$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho(U \cdot \nabla)U - (\eta + \zeta)\Delta U + \nabla P = \rho f + 2\zeta \operatorname{curl} \omega,$$

$$\rho I \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + (U \cdot \nabla)\omega \right) - (c_d + c_a)\Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla(\operatorname{div} \omega) = 2\zeta(\operatorname{curl} U - 2\omega).$$

Dans le modèle que nous avons considéré la force f représente la force de gravité $f = -ge_3$ où $e_3 = (0, 0, 1)$.

2.3 Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme

Soit E, D, H et B respectivement le champ électrique, l'induction électrique, le champ magnétique et l'induction magnétique. Les équations de Maxwell sont

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= 0, \quad \operatorname{div} D = \rho_c, \\ (2.26) \quad \partial_t D - \operatorname{curl} H &= -j, \\ \partial_t B &= -\operatorname{curl} E \end{aligned}$$

où j est la densité du courant électrique et ρ_c est la densité de la charge électrique. Dans notre travail, nous avons considéré les équations quasi-statiques de Maxwell, plus précisément nous avons remplacé l'équation de l'induction électrique par

$$\operatorname{curl} H = j.$$

Dans un milieu isotrope, ce qui est le cas dans notre travail, on a

$$B = \mu_e H$$

où μ_e est la perméabilité magnétique du milieu. De plus, on suppose que le milieu est homogène, donc μ_e est une constante.

Généralement la densité du courant électrique j est donnée par la loi d'Ohm

$$(2.27) \quad j = \sigma(\theta)(E + U \times B),$$

où σ représente la conductivité électrique et dépend généralement de la température θ . Dans notre travail, nous avons tenu compte de l'effet Hall de sorte que

$$(2.28) \quad j + \omega_e \tau_e (j \times B) = \sigma(\theta) \left(E + U \times B + \frac{1}{en_e} \nabla P_e \right),$$

où ω_e est la fréquence cyclotron, τ_e est le temps de collision des électrons, e est la charge électrique et P_e est la pression électronique. Par conséquent

$$E = \frac{1}{\sigma(\theta)} \left(j + \lambda(j \times B) \right) - U \times B - \frac{1}{en_e} \nabla P_e,$$

avec $\lambda = \omega_e \tau_e$. Pour plus de détails, on pourra consulter l'ouvrage [8].

En résumé, voici les équations considérées dans notre travail

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} B &= 0, \\ \partial_t B + \frac{1}{\mu_e} \operatorname{curl} \left(\frac{1}{\sigma(\theta)} (\operatorname{curl} B + \lambda(\operatorname{curl} B \times B)) \right) &= \operatorname{curl} (U \times B). \end{aligned}$$

2.4 Les équations du transfert thermique

Les différents phénomènes de la MHD entraînent une production de la chaleur. Nous allons donc, dans la suite, présenter les équations décrivant le phénomène du transfert thermique.

2.4.1 La loi de Fourier

La loi de Fourier, voir [18], exprime que le flux de chaleur est lié de manière proportionnelle au gradient de la température, ce qui se traduit par la relation suivante

$$(2.30) \quad Q = -\kappa \nabla \theta,$$

où Q est le vecteur du flux de chaleur et θ est la température. La constante $\kappa > 0$ représente la conductivité thermique du matériau et le signe moins signifie que la chaleur se propage du plus chaud au plus froid.

Comme le changement de la température entraîne un transfert d'énergie, nous devons donc écrire la loi de conservation de l'énergie, qui est donnée par

$$(2.31) \quad \partial_t \theta + \operatorname{div} Q = f,$$

où f est la source de chaleur extérieure. Dans la suite, on suppose qu'on n'a aucune source externe de la chaleur, on prend donc $f = 0$.

Quand on combine la loi de Fourier (2.30) avec la loi (2.31), on trouve l'équation parabolique

$$(2.32) \quad \partial_t \theta - \kappa \Delta \theta = 0,$$

c'est l'équation de la chaleur. L'une des propriétés importantes de cette équation est la propagation de la chaleur à une vitesse infinie, c'est à dire toute perturbation initiale se fait sentir instantanément sur l'ensemble du milieu. Ce phénomène est appelé par les physiciens le paradoxe de la loi de Fourier.

2.4.2 La loi de Maxwell-Cattaneo

En 1867, M.C. Cattaneo a introduit, voir [7], une nouvelle loi dans le but de corriger la loi de Fourier. Elle a été généralisée par Guyer et Krumhansl dans [23]. Dans cette loi nous définissons la notion de temps de relaxation.

Si on suppose que la température existe à chaque instant t , le flux de chaleur n'apparaît que dans un instant postérieur $t + \tau$, avec τ suffisamment petit. Dans ce cas la loi de Fourier s'exprime sous la forme suivante

$$(2.33) \quad Q(t + \tau, x) = \kappa \nabla \theta(t, x).$$

On applique la formule de Taylor au flux de chaleur, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux, on aura

$$(2.34) \quad Q(t + \tau, x) = Q(t, x) + \tau \partial_t Q(t, x).$$

En substituant (2.34) dans la loi de Fourier (2.30), on obtient une nouvelle loi du transfert thermique, dite loi de Maxwell-Cattaneo, qui est donnée par

$$(2.35) \quad \tau \partial_t Q + Q = -\kappa \nabla \theta.$$

Le terme de la dérivée temporelle $\tau \partial_t Q$ est un terme correctif qui sert à rendre la vitesse de propagation finie et quand τ tend vers 0, on retrouve la loi de Fourier.

Si on combine la divergence de (2.35) avec la loi de la conservation d'énergie (2.31), on obtient

$$(2.36) \quad \tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \partial_t \theta - \kappa \Delta \theta = 0,$$

qui est une équation hyperbolique dite l'équation des ondes amorties. Les équations hyperboliques se caractérisent par la propagation à vitesse finie contrairement à l'équation de la chaleur, ce qui résout le paradoxe de Fourier. De plus, le terme du premier ordre en temps $\partial_t \theta$ correspond à une force de freinage proportionnelle à la vitesse.

On peut trouver d'autres modèles de la loi de Maxwell-Cattaneo cités dans [13].

Pour la stabilité des schémas dans la résolution numérique de la loi de Maxwell-Cattaneo, il est nécessaire d'ajouter un terme correctif en espace, qui représente le terme de diffusion ($-\gamma \Delta Q$). De plus, comme le milieu est en déplacement, nous remplaçons la dérivée partielle en temps de la température par une dérivée matérielle. La loi de Maxwell-Cattaneo s'écrit

$$(2.37) \quad \begin{cases} \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta = -\operatorname{div} Q, \\ \tau (\partial_t Q - \gamma \Delta Q) = -Q - \kappa \nabla \theta. \end{cases}$$

2.5 L'équation d'état de la densité du fluide

Le volume d'un matériau varie en fonctions de deux facteurs : la chaleur et la pression. Sous l'effet de la chaleur il se dilate et sous l'effet de la pression il se comprime.

Pour décrire ce phénomène, on introduit le coefficient de dilation thermique α et le module de compressibilité β , définis par

$$(2.38) \quad \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right), \quad \beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right),$$

où V est le volume à un instant t , tel que $V = \frac{m}{\rho}$. Le fluide dans notre travail est supposé incompressible, donc $\beta = 0$.

On exprime maintenant α en fonction de ρ , on a

$$(2.39) \quad \alpha = -\frac{d\rho}{\rho d\theta},$$

ce qui donne

$$\alpha d\theta = -\left(\frac{d\rho}{\rho} \right),$$

c'est une équation différentielle à variable séparée, en l'intégrant on obtient

$$(2.40) \quad \rho = \rho_0 \exp(-\alpha(\theta - \theta_0)).$$

On suppose que $\alpha(\theta - \theta_0)$ est petit, donc une bonne approximation de ρ est donnée par

$$(2.41) \quad \rho = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_0)).$$

Remarque 2.5.1. Dans les équations du mouvement, on a utilisé l'approximation de Boussinesq qui consiste à négliger les variations de la densité ρ pour tous les termes à part celui de la force de gravité.

Rappel de quelques outils mathématiques

Le but de chapitre est de rappeler, sans démonstration, les différents outils d'analyse que nous allons utiliser dans le chapitre suivant. Ces rappels sont accompagnés par des références.

3.1 Inégalités de Sobolev

Référence : voir [15]

Pour $1 \leq p < \infty$, on note par p' le conjugué de Hölder donné par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

et p^* le conjugué de Sobolev de p , donné par

$$p^* = \frac{Np}{N-p},$$

N étant le dimension de l'espace.

Dans la suite, Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de classe \mathcal{C}^1 , de bord Γ .

3.1.1 Inégalité de Poincaré

Pour $1 \leq p < \infty$, il existe une constante $C(\Omega, p)$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

3.1.2 Injections de Sobolev

Théorème 3.1.1. On a les injections continues suivantes

★ Si $p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, appelée inégalité de Gagliardo-Nirenberg,

★ si $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$,

★ si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

De plus, on a les injections compactes suivantes

★ Si $p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$,

★ si $p = N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$,

★ si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

En particulier, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte pour tout p et tout N .

3.2 Espaces $H(\text{curl}, \Omega)$ et $H(\text{div}, \Omega)$

Référence : voir [3]

Définition 3.2.1. L'espace $H(\text{curl}, \Omega)$ est défini par

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega); \text{curl } v \in \mathbb{L}^2(\Omega)\},$$

et il est muni de la norme

$$\|v\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = \left(\|v\|^2 + \|\text{curl } v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H(\text{div}, \Omega)$ est défini par

$$H(\text{div}, \Omega) = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega); \text{div } v \in L^2(\Omega)\},$$

et il est muni de la norme

$$\|v\|_{H(\text{div}, \Omega)} = \left(\|v\|^2 + \|\text{div } v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3.2.1. (Traces normale et tangentielle)

- Toute fonction de $H(\text{curl}, \Omega)$ a une trace tangentielle $v \times \mathbf{n}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ définie par

$$\forall \phi \in \mathbb{H}^1(\Omega), \quad \langle v \times \mathbf{n}, \phi \rangle_\Gamma = \int_\Omega v \cdot \text{curl } \phi \, dx - \int_\Omega \text{curl } v \cdot \phi \, dx.$$

Le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ est le crochet de dualité $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

- Toute fonction de l'espace $H(\text{div}, \Omega)$ a une trace normale $v \cdot \mathbf{n}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ définie par

$$\forall \phi \in H^1(\Omega), \quad \langle v \cdot \mathbf{n}, \phi \rangle_\Gamma = \int_\Omega v \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega (\text{div } v) \phi \, dx.$$

3.3 Laplacien vectoriel

Rappelons, pour un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 , la formule suivante

$$(3.1) \quad -\Delta u + \nabla(\operatorname{div} u) = \operatorname{curl}(\operatorname{curl} u),$$

ainsi que le formule de Green

$$(3.2) \quad -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{curl} u \cdot \operatorname{curl} v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx \\ - \int_{\Gamma} (\operatorname{curl} u \times \mathbf{n}) \cdot v \, dS - \int_{\Gamma} (\operatorname{div} u) v \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

où u, v sont des champs de vecteurs réguliers.

Le théorème suivant donne une norme équivalente à la norme $H^1(\Omega)$, voir ([10], [17]).

Théorème 3.3.1. Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ on a

$$(3.3) \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|u\|^2 + \|\operatorname{div} u\|^2 + \|\operatorname{curl} u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.4 Espaces abstraits contenant le temps

Définition 3.4.1. Soit X un espace de Banach, et soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note $L^p(I; X)$ l'ensemble des classes de fonctions $f : I \mapsto X$ Lebesgue mesurables, telles que la fonction $t \mapsto \|f(t)\|_X^p$ est intégrable sur I . L'espace $L^p(I; X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p(I; X)} = \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(I; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|f(t)\|_X, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Proposition 3.4.1. Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(I; X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(I; X)}$, est un espace de Banach.

Définition 3.4.2. $\mathcal{C}([0, T]; X)$ est l'espace des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$ avec

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X,$$

dite norme de la convergence uniforme.

3.4.1 Inégalité d'interpolation

Référence : voir [5]

Théorème 3.4.1. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et soit p_1, q_1, p_2, q_2 des nombres réels dans $[1, +\infty[$. Si $f \in L^{p_1}(I; L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(I; L^{q_2}(\Omega))$ alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, la fonction $f \in L^p(I; L^q(\Omega))$ avec p et q donnés par

$$(3.4) \quad \frac{1}{p} = \frac{\varepsilon}{p_1} + \frac{1-\varepsilon}{p_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{\varepsilon}{q_1} + \frac{1-\varepsilon}{q_2}$$

et on a

$$\|f\|_{L^p(I; L^q(\Omega))} \leq \|f\|_{L^{p_1}(I; L^{q_1}(\Omega))}^\varepsilon \|f\|_{L^{p_2}(I; L^{q_2}(\Omega))}^{1-\varepsilon}.$$

En conséquence, si une suite (u_n) converge fortement dans $L^{p_1}(I; L^{q_1}(\Omega))$ et est bornée dans $L^{p_2}(I; L^{q_2}(\Omega))$, alors (u_n) converge fortement dans $L^p(I; L^q(\Omega))$.

3.4.2 Un lemme de compacité

Référence : voir ([5], [30], [39])

Dans la suite, nous allons rappeler des résultats de compacité fondamentaux pour l'étude des problèmes d'évolution non linéaires.

Théorème 3.4.2. (Aubin-Lions)

Soient B_0, B, B_1 trois espaces de Banach, tels que

$$(3.5) \quad B_0 \subset B \subset B_1,$$

avec

$$B_0 \text{ et } B_1 \text{ réflexifs,}$$

$$(3.6) \quad B_0 \subset\subset B.$$

Soit l'espace

$$(3.7) \quad E_{p,q} = \left\{ v \in L^p(0, T; B_0); v' = \frac{dv}{dt} \in L^q(0, T; B_1) \right\},$$

avec T fini. Alors

- i) Si $p < +\infty$, l'injection de $E_{p,q}$ dans $L^p(0, T; B)$ est compacte.
- ii) Si $p = \infty$ et $q > 1$, l'injection de $E_{p,q}$ dans $\mathcal{C}([0, T]; B)$ est compacte.

3.4.3 Un théorème de régularité en temps

Référence : voir ([43], [5])

- **La continuité faible**

Définition 3.4.3. Soit Y un espace de Banach, on dit qu'une fonction $u : [0, T] \rightarrow Y$ est faiblement continue si pour tout $\psi \in Y'$, la fonction définie par

$$t \in [0, T] \mapsto \left\langle \psi; u(t) \right\rangle_{Y', Y}$$

est continue. On note par $\mathcal{C}([0, T]; Y_{faible})$, l'espace des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans Y qui sont faiblement continues.

Lemme 3.4.1. Soit X un espace de Banach séparable et réflexif, et soit Y un espace de Banach tel que X s'injecte continûment dans Y . Alors

$$L^\infty(0, T; X) \cap \mathcal{C}([0, T]; Y_{faible}) = \mathcal{C}([0, T]; X_{faible}).$$

- **La continuité forte**

Théorème 3.4.3. Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$, X étant dense dans Y . Soit $T > 0$ et p, q tels que $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors l'espace

$$E_{p,q} = \left\{ v \in L^p(0, T; X); v' = \frac{dv}{dt} \in L^q(0, T; Y) \right\}$$

s'injecte continûment dans l'espace $\mathcal{C}([0, T]; Y)$.

On considère à présent deux espaces de Hilbert réels H et V . On note $\|\cdot\|, |\cdot|, \|\cdot\|_*$ les normes respectives dans V, H et V' , (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans H et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre V et V' .

En outre, on suppose que V est dense dans H , si bien qu'en identifiant H et son dual H' , on a

$$V \underset{\text{densité}}{\hookrightarrow} H \underset{\text{densité}}{\hookrightarrow} V'.$$

Proposition 3.4.2. Soit $W = \{u \in L^2(0, T; V); u' = \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')\}$ alors

1. W est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|_W = \left(\int_0^T (\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|_*^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. $\mathcal{D}([0, T]; V)$ est dense dans W .

3. W s'injecte continûment dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$.

4. l'application $t \mapsto |u(t)|^2$ est absolument continue et

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle .$$

5. Pour $u, v \in W$, on a

$$\int_0^T (\langle u'(t), v(t) \rangle + \langle v'(t), u(t) \rangle) dt = (u(T), v(T)) - (u(0), v(0)).$$

Une propriété importante est donnée dans la proposition suivante

Proposition 3.4.3. Pour $u \in W, v \in V$, on a

$$\langle u'(\cdot), v \rangle = \frac{d}{dt}(u(t), v) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

3.4.4 Théorème de De Rham

Référence : voir ([40], [42])

Le théorème suivant est très utile dans la résolution des équations de Navier-Stokes

Lemme 3.4.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 connexe. On considère $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, une condition nécessaire et suffisante pour que

$$f = \nabla P \text{ pour } P \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est que

$$\langle v, f \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_s(\Omega),$$

où $\mathcal{D}_s(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à divergence nulle.

De ce lemme, on déduit une extension du théorème de De Rham aux distributions qui dépendent du temps. On a

Lemme 3.4.3. Soit $h \in \mathcal{D}'(]0, T[; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, telle que

$$\langle h; v \rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_s(\Omega).$$

Alors, il existe $P \in \mathcal{D}'(]0, T[; L^2(\Omega))$, tel que $h = \nabla p$. Si de plus $h \in W^{k,r}(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ on peut choisir $P \in W^{k,r}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$.

3.5 Autres rappels

3.5.1 Inégalité de Gronwall

Référence : voir [15]

- **Forme différentielle :** Soit $\eta(\cdot)$ une fonction positive, absolument continue sur $[0, T]$, satisfaisant pour presque partout tout t , l'inégalité

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

avec ϕ et ψ deux fonctions positives, intégrables sur $[0, T]$. Alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right].$$

- **Forme intégrale :** Soit $\xi(\cdot)$ une fonction positive, intégrable sur $[0, T]$ qui satisfait presque partout l'inégalité

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2,$$

avec C_1, C_2 deux constantes positives. Alors

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

En particulier, si

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds,$$

alors

$$\xi(t) = 0 \text{ p.p.}$$

3.5.2 Inégalité de Young

Référence : voir ([15], [6])

On suppose que $1 < p < \infty$. Alors pour $a, b > 0$, on a

$$(3.8) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

où p' est le conjugué de Hölder de p .

3.5.3 Inégalité de Hölder

Référence : voir ([15], [6])

Soit $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Pour $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^r(\Omega)$ et on a

$$(3.9) \quad \|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.5.4 Théorème de point fixe de Leray-Schauder

Référence : voir [22]

Ce théorème est un outil de base dans la résolution de notre problème.

Définition 3.5.1. Soit X un espace de Banach, et soit un opérateur non linéaire $T : X \rightarrow X$. On dit que T est compact si pour toute suite bornée (u_n) de X , la suite $T(u_n)$ est précompacte, c'est à dire il existe une sous-suite (u_{n_j}) telle que la suite $T(u_{n_j})$ converge dans X .

Théorème 3.5.1. On suppose que l'opérateur

$$T : X \rightarrow X$$

est continu et compact et que l'ensemble

$$\{u \in X; \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } u = \lambda T(u)\}$$

est borné. Alors l'opérateur T admet un point fixe.

3.5.5 Les opérateurs monotones

Référence : voir ([27], [30])

Soit V un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V' (en général non linéaire).

Définition 3.5.2. On dit que

(i) A est monotone si

$$(3.10) \quad \forall u, v \in V, \quad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

(ii) A est hémicontinue si pour tout $u, v \in V$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \langle A(u+tv), v \rangle$ est continue.

Définition 3.5.3. Soit $J : V \mapsto \mathbb{R}$ une application. On dit que J est différentiable au sens de Gâteaux en un point $a \in V$ s'il existe une application linéaire et continue $\phi_a : V \mapsto \mathbb{R}$ telle que, pour tout $u \in V$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (J(a + hu) - J(a)) = \phi_a(u).$$

On note $\phi_a = J'(a)$, on a le résultat suivant

Proposition 3.5.1. Soit $J : V \mapsto \mathbb{R}$ une application convexe et Gâteaux différentiable en tout point de V . L'application $J' : V \mapsto V'$ est monotone et hémicontinue.

Étude mathématique de l'écoulement d'un fluide micropolaire avec la loi de Maxwell-Cattaneo

Ce chapitre porte sur l'étude mathématique du système d'équations aux dérivées partielles (1.1). Plus précisément, nous démontrons l'existence d'une solution faible et globale en temps de ce système dans des espaces adaptés. Ce problème décrit le comportement d'un fluide dans le cas incompressible micropolaire soumis à un champ magnétique en tenant compte du transfert thermique. Ce modèle contient les équations de Navier-Stokes incompressible décrivant l'évolution de la vitesse U et la pression P , l'équation du moment angulaire pour la microrotation ω décrivant la vitesse angulaire des rotations des particules du fluide, les équations de l'électromagnétisme de Maxwell satisfaites par le champ de l'induction magnétique B et enfin les équations du transfert thermique qui sont gouvernées par la loi de Maxwell-Cattaneo, pour la température θ et le flux de chaleur Q .

4.1 Description du modèle

4.1.1 Définition du problème (\mathcal{P})

Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^3 , avec une frontière Γ régulière. Pour $T > 0$ fixé, on pose $D_T = (0, T) \times D$ et $\Gamma_T = (0, T) \times \Gamma$. Le problème de la MHD micropolaire couplé avec la loi de Maxwell-Cattaneo, que nous étudions, est le suivant : Montrer l'existence de fonctions vectorielles

$$U, \omega, B, Q : D_T \rightarrow \mathbb{R}^3$$

et de fonctions scalaires

$$\theta, P : D_T \rightarrow \mathbb{R},$$

solutions du système (\mathcal{P}) suivant

$$(4.1) \quad \operatorname{div} U = 0 \text{ dans } D_T,$$

$$(4.2) \quad \rho_0(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - (\zeta + \eta)\Delta U + \nabla P = -\rho(\theta)ge_3 + 2\zeta \operatorname{curl} \omega + \operatorname{curl} B \times B \text{ dans } D_T,$$

$$(4.3) \quad \rho_0 I(\partial_t \omega + (U \cdot \nabla)\omega) - (c_a + c_d)\Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla(\operatorname{div} \omega) = 2\zeta(\operatorname{curl} U - 2\omega) \text{ dans } D_T,$$

$$(4.4) \quad \partial_t B + \operatorname{curl} \left(\Sigma(\theta)(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times B) \right) = \operatorname{curl} (U \times B) \text{ dans } D_T,$$

$$(4.5) \quad \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta = -\operatorname{div} Q \text{ dans } D_T,$$

$$(4.6) \quad \tau \left(\partial_t Q + \omega \times Q - \gamma \Delta Q \right) = -Q - \kappa \nabla \theta \text{ dans } D_T.$$

Ces équations sont complétées par les conditions aux limites suivantes

$$U = 0, \quad \omega = 0, \quad B \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T,$$

$$\Sigma(\theta)(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times B) \times \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \Gamma_T,$$

$$Q \times \mathbf{n} = 0, \quad \tau \gamma \operatorname{div} Q - \kappa \theta = 0, \text{ sur } \Gamma_T,$$

et par les conditions initiales suivantes

$$U(0) = U_0, \quad \omega(0) = \omega_0 \text{ dans } D,$$

$$B(0) = B_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad Q(0) = Q_0 \text{ dans } D.$$

La fonction $\rho(\theta)$ est donnée par

$$(4.7) \quad \rho(\theta) = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_0)).$$

Les différents paramètres du problème ont été définis dans l'introduction.

4.1.2 Espaces fonctionnels

On définit les espaces fonctionnels pour la vitesse du fluide U , voir ([20], [30], [36]), suivants

$$\mathcal{U} = \text{fermeture de } \mathcal{D}_s(D) \text{ dans } \mathbb{H}^1(D),$$

$$\mathcal{U}_0 = \text{fermeture de } \mathcal{D}_s(D) \text{ dans } \mathbb{L}^2(D).$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{U \in \mathbb{H}_0^1(D); \operatorname{div} U = 0 \text{ dans } D\}, \\ \mathcal{U}_0 &= \{U \in \mathbb{L}^2(D); \operatorname{div} U = 0 \text{ dans } D; U \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}'.$$

Pour l'induction magnétique B , on introduit les espaces de Hilbert suivants

$$\mathbb{H}_{t,s}^1(D) = \{B \in \mathbb{L}^2(D), \operatorname{curl} B \in \mathbb{L}^2(D), \operatorname{div} B = 0 \text{ dans } D, B \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

et pour le flux de chaleur, on a l'espace

$$\mathbb{H}_n^1(D) = \{Q \in \mathbb{H}^1(D), Q \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Grâce à (3.3), on a les inégalités suivantes

$$\|\nabla B\| \leq C(\|B\|^2 + \|\operatorname{curl} B\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall B \in \mathbb{H}_{s,t}^1(D),$$

$$\|\nabla Q\| \leq C(\|Q\|^2 + \|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall Q \in \mathbb{H}_n^1(D),$$

on peut munir les espaces $\mathbb{H}_{t,s}^1(D)$ et $\mathbb{H}_n^1(D)$ de la norme de $\mathbb{H}^1(D)$. De plus, nous allons utiliser fréquemment la formule (3.2) pour B et Q .

Remarque 4.1.1. D'après la proposition 3.2.1, les traces normale et tangentielle, $B \cdot \mathbf{n}$ et $Q \times \mathbf{n}$ sont bien définies dans $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

4.1.3 Hypothèses sur les données

On suppose que les conditions initiales vérifient les propriétés suivantes

$$(H_1) : U_0, B_0 \in \mathcal{U}_0, \omega_0 \in \mathbb{L}^2(D),$$

$$(H_2) : \theta_0 \in L^3(D), Q_0 \in \mathbb{L}^2(D), \operatorname{div} Q_0 \in L^2(D).$$

Concernant la fonction Σ , nous supposons que

$$(H_3) : \Sigma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),$$

$$(H_4) : \text{Il existe deux constantes } \Sigma_1, \Sigma_2 > 0 \text{ telles que } \Sigma_1 \leq \Sigma(s) \leq \Sigma_2, s \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on suppose que :

$$(H_5) : g \in \mathbb{L}^\infty(D_T).$$

4.2 Existence de solutions du problème (\mathcal{P})

Nous donnons, dans un premier lieu, l'estimation d'énergie et la formulation variationnelle du système (\mathcal{P}) . Nous énonçons ensuite le théorème principal d'existence d'une solution faible et globale en temps du système (\mathcal{P}) . Nous commençons par rappeler brièvement les propriétés importantes du terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes. On pose

$$b(u, v, w) = \int_D (u \cdot \nabla)v \cdot w \, dx,$$

on a les résultats suivants

Lemme 4.2.1. voir ([30], [43])

$$(4.8) \quad b(u, v, v) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}, v \in \mathbb{H}_0^1(D),$$

$$(4.9) \quad b(u, v, w) = -b(u, w, v) \quad \forall u \in \mathcal{U}, w, v \in \mathbb{H}_0^1(D),$$

$$(4.10) \quad |b(u, v, w)| \leq \|u\|_{\mathbb{L}^p(D)} \|\nabla v\| \|w\|_{\mathbb{L}^q(D)},$$

$\forall v \in \mathbb{H}_0^1(D), u \in \mathbb{L}^p(D)$ et $w \in \mathbb{L}^q(D)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. La forme trilinéaire

$$(u, v, w) \mapsto b(u, v, w)$$

est continue sur $\mathcal{U} \times \mathbb{H}_0^1(D) \times \mathbb{H}_0^1(D)$.

4.2.1 Estimation d'énergie pour le système (\mathcal{P})

Pour établir des estimations du système (\mathcal{P}) , nous allons utiliser la formule (3.1) et la formule suivante

$$(4.11) \quad A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B),$$

pour tous vecteurs A, B, C de \mathbb{R}^3 , en particulier, on a

$$(4.12) \quad A \cdot (A \times B) = 0.$$

Soit $(U, \omega, B, \theta, Q)$ une solution assez régulière de (\mathcal{P}) .

• Estimation d'énergie du système magnétohydrodynamique

1. On multiplie l'équation (4.2) par U et on intègre en espace, en utilisant la formule (4.8), la relation (4.11), et $\zeta \Delta U = \zeta \operatorname{curl}^2 U$, on trouve :

$$(4.13) \quad \frac{\rho_0}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + \eta \|\nabla U\|^2 + \zeta \|\operatorname{curl} U\|^2 = - \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot U \, dx + \zeta \int_D (2\omega - \operatorname{curl} U) \cdot \operatorname{curl} U \, dx \\ + \int_D (\operatorname{curl} B \times B) \cdot U \, dx.$$

2. On multiplie l'équation du moment angulaire (4.3) par ω et on intègre en espace, et par la relation

$$-(c_a + c_d) \Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega = c_a \operatorname{curl} (\operatorname{curl} \omega) - c_d \Delta \omega - (c_0 + c_d) \nabla \operatorname{div} \omega,$$

on trouve

$$(4.14) \quad \frac{\rho_0 I}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|^2 + c_d \|\nabla \omega\|^2 + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\|^2 = 2\zeta \int_D (\operatorname{curl} U - 2\omega) \cdot \omega \, dx.$$

3. On multiplie l'équation de l'induction magnétique (4.4) par B et on intègre sur D on trouve :

$$(4.15) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|B\|^2 + \|\sqrt{\Sigma(\theta)} \operatorname{curl} B\|^2 + \lambda \int_D \Sigma(\theta) (\operatorname{curl} B \times B) \cdot \operatorname{curl} B \, dx + \\ \int_{\partial D} \mathbf{n} \times (\Sigma(\theta) (\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times B)) \cdot B \, dS = \int_D U \times B \cdot \operatorname{curl} B \, dx.$$

D'après (4.12), on a

$$\int_D (\Sigma(\theta) (\operatorname{curl} B \times B)) \cdot \operatorname{curl} B \, dx = 0$$

et

$$\int_D (U \times B) \cdot \operatorname{curl} B \, dx = - \int_D (U \cdot \operatorname{curl} B) \times B \, dx.$$

De plus, on remarque que :

$$\zeta \int_D (2\omega - \operatorname{curl} U) \cdot \operatorname{curl} U \, dx + \zeta \int_D (\operatorname{curl} U - 2\omega) \cdot 2\omega \, dx = -\zeta \|2\omega - \operatorname{curl} U\|^2.$$

En sommant (4.13), (4.14) et (4.15), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{2} \|U\|^2 + \frac{\rho_0 I}{2} \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \|B\|^2 \right) + \eta \|\nabla U\|^2 + c_d \|\nabla \omega\|^2 + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\|^2 + \\ \zeta \|2\omega - \operatorname{curl} U\|^2 + \|\sqrt{\Sigma(\theta)} \operatorname{curl} B\|^2 = - \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot U \, dx.$$

Pour estimer le terme $\int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot U \, dx$, on utilise les inégalités de Poincaré et de Young et par (4.7), on trouve

$$(4.16) \quad \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot U \, dx \leq C(1 + \|\theta\|^2) + \frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2,$$

où $C > 0$ ne dépend que de $\|g\|_\infty$, ρ_0 , θ_0 , α et la constante de Poincaré. Par conséquent, l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{2} \|U\|^2 + \frac{\rho_0 I}{2} \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \|B\|^2 \right) + \frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2 + c_a \|\nabla \omega\|^2 + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\|^2 + \\ \zeta \|2\omega - \operatorname{curl} U\|^2 + \|\sqrt{\Sigma(\theta)} \operatorname{curl} B\|^2 \leq C(1 + \|\theta\|^2). \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \frac{\rho_0}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + \frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2 \leq C_g + \frac{C_g}{2\eta} \|\theta\|^2 + \zeta \int_D (2\omega - \operatorname{curl} U) \cdot \operatorname{curl} U \, dx +$$

$$\int_D \operatorname{curl} B \times B \cdot U \, dx.$$

• Estimation d'énergie du système de Maxwell-Cattaneo

1. On multiplie l'équation (4.5) par θ et on intègre en espace, on trouve

$$(4.18) \quad \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = -\kappa \int_D \operatorname{div} Q \theta \, dx.$$

2. On multiplie l'équation (4.6) par Q et on intègre par rapport à x , on obtient :

$$(4.19) \quad \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|Q\|^2 + \tau \gamma \left(\|\operatorname{div} Q\|^2 + \|\operatorname{curl} Q\|^2 \right) + \|Q\|^2 = -\kappa \int_D \nabla \theta \cdot Q \, dx$$

$$(4.20) \quad = \kappa \int_D \theta \operatorname{div} Q \, dx.$$

On somme les deux égalités précédentes, on trouve

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa}{2} \|\theta\|^2 + \frac{\tau}{2} \|Q\|^2 \right) + \tau \lambda (\|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2) + \|Q\|^2 = 0,$$

donc

$$\frac{\kappa}{2} \|\theta(t)\|^2 \leq \frac{\kappa}{2} \|\theta_0\|^2 + \frac{\tau}{2} \|Q_2\|^2.$$

En utilisant cette majoration, on obtient pour tout $t \geq 0$ l'estimation d'énergie suivante

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0}{2} (\|U(t)\|^2 + I\|\omega(t)\|^2) + \frac{1}{2} \|B(t)\|^2 + \int_0^t \left(\frac{\eta}{2} \|\nabla U(s)\|^2 + c_a \|\nabla \omega(s)\|^2 + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega(s)\|^2 + \right. \\
 (4.21) \quad & \left. c_a \|\operatorname{curl} \omega(s)\|^2 + \zeta \|2\omega(s) - \operatorname{curl} U(s)\|^2 + \|\sqrt{\Sigma(\theta(s))} \operatorname{curl} B(s)\|^2 \right) ds \leq \\
 & \frac{\rho_0}{2} (\|U_0\|^2 + I\|\omega_0\|^2) + \frac{1}{2} \|B_0\|^2 + Ct(1 + \|\theta_0\|^2 + \|Q_0\|^2); \\
 & \frac{\kappa}{2} \|\theta(t)\|^2 + \frac{\tau}{2} \|Q(t)\|^2 + \int_0^t \left(\tau \lambda (\|\operatorname{curl} Q(s)\|^2 + \|\operatorname{div} Q(s)\|^2) + \|Q(s)\|^2 \right) ds \leq \frac{\kappa}{2} \|\theta_0\|^2 + \frac{\tau}{2} \|Q_0\|^2.
 \end{aligned}$$

4.2.2 La formulation variationnelle du système (P)

• L'équation variationnelle de la vitesse U

$$\begin{aligned}
 (4.22) \quad & \rho_0 \frac{d}{dt} \int_D U \cdot V \, dx + \rho_0 \int_D (U \cdot \nabla) U \cdot V \, dx + \int_D \left(\eta \nabla U \cdot \nabla V + \zeta \operatorname{curl} U \cdot \operatorname{curl} V \right) dx = \\
 & - \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot V \, dx + 2\zeta \int_D \operatorname{curl} \omega \cdot V \, dx + \int_D \operatorname{curl} B \times B \cdot V \, dx, \\
 & \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[), \text{ pour tout } V \in \mathcal{U},
 \end{aligned}$$

$$(4.23) \quad U(0) = U_0;$$

• L'équation variationnelle de la microrotation ω

$$\begin{aligned}
 (4.24) \quad & \rho_0 I \frac{d}{dt} \int_D \omega \cdot W \, dx + \rho_0 I \int_D (U \cdot \nabla) \omega \cdot W \, dx + \int_D c_a \operatorname{curl} \omega \cdot \operatorname{curl} W \, dx + \\
 & \int_D \left(c_d \nabla \omega \cdot \nabla W + (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega \operatorname{div} W \right) dx = 2\zeta \int_D (\operatorname{curl} U - 2\omega) \cdot W \, dx, \\
 & \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[), \text{ pour tout } W \in \mathbb{H}_0^1(D), \\
 & \omega(0) = \omega_0;
 \end{aligned}$$

• L'équation variationnelle de l'induction magnétique B

$$(4.25) \quad \frac{d}{dt} \int_D B \cdot A \, dx + \int_D \Sigma(\theta) \left(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times B \right) \cdot \operatorname{curl} A \, dx = \int_D (U \times B) \cdot \operatorname{curl} A \, dx,$$

dans $\mathcal{D}'(]0, T[)$, pour tout $A \in \mathbb{H}_{t,s}^1(D)$, tel que $\text{curl } A \in \mathbb{L}^4(D)$,

$$B(0) = B_0;$$

• **L'équation variationnelle de la température θ** (voir **Appendice A**)

$$(4.26) \quad \int_{\dot{D}_t} \theta (\partial_t \varphi + (U \cdot \nabla) \varphi) dx dt = \int_{\dot{D}_t} \text{div } Q \varphi dx dt + \int_D \theta_0 \varphi(0) dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}([0, T[\times \bar{D}),$$

• **L'équation variationnelle du flux de chaleur Q**

$$(4.27) \quad \tau \frac{d}{dt} \int_D Q \cdot \phi dx + \tau \int_D (\omega \times Q) \cdot \phi dx + \tau \gamma \left(\int_D \text{curl } Q \cdot \text{curl } \phi dx + \int_D \text{div } Q \text{ div } \phi dx \right) =$$

$$- \int_D Q \cdot \phi dx - \kappa \int_D \nabla \theta \cdot \phi dx, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[), \text{ pour tout } \phi \in \mathbb{H}_n^1(D),$$

$$Q(0) = Q_0.$$

Définition 4.2.1. Soit $T > 0$, on dit que $(U, \omega, B, Q, \theta)$ est une solution faible et globale du système (P) sur $[0, T]$ si les conditions (i), (ii) et (iii) sont satisfaites

(i)

$$U \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(0, T; \mathbb{L}^2(D)_{\text{faible}}),$$

$$\omega \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(D)) \cap \mathcal{C}(0, T; \mathbb{L}^2(D)_{\text{faible}}),$$

$$B \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_{t,s}^1(D)) \cap \mathcal{C}(0, T; \mathbb{L}^2(D)_{\text{faible}}),$$

$$\theta \in L^\infty(0, T; L^3(D)) \cap \mathcal{C}(0, T; L^p(D)), \quad p < 3,$$

$$Q \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D)) \cap \mathcal{C}(0, T; \mathbb{L}^2(D)_{\text{faible}}).$$

(ii) $(U, \omega, B, \theta, Q)$ vérifie les équations variationnelles précédentes.

(iii) $(U, \omega, B, \theta, Q)$ vérifie l'estimation d'énergie (4.21).

Remarque 4.2.1. La faible continuité de U, ω, B , et Q est obtenue grâce au lemme 3.4.1. En effet, de (4.22)-(4.27), on remarque que

$$(\partial_t U, \partial_t \omega, \partial_t B, \partial_t Q) \in L^1(0, T; \mathcal{U}' \times \mathbb{H}^{-1}(D) \times (\mathbb{H}_{t,s}^1)'(D) \times (\mathbb{H}_n^1)'(D)).$$

D'après le théorème 3.4.3, on déduit que

$$(U, \omega, B, Q) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{U}' \times \mathbb{H}^{-1}(D) \times (\mathbb{H}_{t,s}^1)'(D) \times (\mathbb{H}_n^1)'(D)).$$

Pour la continuité de la température θ , voir **Appendice A**

4.2.3 Théorème d'existence

Nous donnons maintenant le résultat principal de ce travail

Théorème 4.2.1. *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_5)$, il existe une solution $(U, \omega, B, \theta, Q)$ faible et globale en temps de (\mathcal{P}) qui satisfait l'estimation d'énergie (4.21).*

Remarque 4.2.2. L'existence de la pression est une conséquence du théorème de De Rham, voir lemme 3.4.3. En effet, soit $h \in W^{-1,\infty}(0, T; \mathbb{H}^{-1}(D))$, est défini par

$$h = \rho_0(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - (\lambda + \zeta)\Delta U + \rho(\theta)ge_3 - 2\zeta\omega - \text{curl } B \times B.$$

Alors

$$\langle h; v \rangle_{(\mathbb{H}^{-1}(D)) \times (\mathbb{H}_0^1(D))} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Alors il existe $P \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(D))$, tel que $h = \nabla P$ vérifiant l'équation

$$\rho_0(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - (\lambda + \zeta)\Delta U + \rho(\theta)ge_3 - 2\zeta\omega - \text{curl } B \times B = \nabla P.$$

Avant de donner la preuve du théorème 4.2.1, nous allons exposer brièvement les différentes difficultés rencontrées dans la résolution.

Remarque 4.2.3. La première difficulté réside dans l'équation de Navier-Stokes. Cette difficulté est causée par le terme d'advection $(U \cdot \nabla)U$. En effet, en dimension trois, l'unicité de la solution faible n'est obtenue que dans le cas d'un intervalle de temps assez petit ou bien lorsque les données sont suffisamment petites.

Remarque 4.2.4. La deuxième difficulté est liée aux couplages non linéaires entre les équations du système (\mathcal{P}) . Les termes de couplage $(U \cdot \nabla)\omega$ et $\text{curl } (U \times B)$ sont formellement comme le terme non linéaire de Navier-Stokes.

Remarque 4.2.5. La troisième difficulté provient de l'équation de transport. En effet, dans cette équation on ne peut pas contrôler le gradient de la température $\nabla\theta$.

Pour la preuve du théorème 4.2.1 nous procédons comme suit

- Nous introduisons le problème approché (\mathcal{P}^ν) où ν est un paramètre positif petit. Ce système est obtenu en régularisant la vitesse U et la température θ .
- Nous montrons ensuite, à l'aide du théorème de point fixe de Leray-Schauder, que le problème régularisé (\mathcal{P}^ν) admet au moins une solution $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, \theta^\nu, Q^\nu)$ faible et globale en temps.
- Après, nous établissons des estimations uniformes de la solution $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, \theta^\nu, Q^\nu)$ du problème régularisé.

- Nous montrons, à l'aide du lemme d'Aubin, la compacité des suites de solutions U^ν , ω^ν , B^ν et Q^ν . Cependant, ce lemme ne nous conduit pas à la compacité de θ^ν , qui est nécessaire pour le passage à la limite dans le terme non linéaire $\Sigma(\theta^\nu)$. Pour surmonter cette difficulté, nous allons introduire un problème auxiliaire satisfait par $v^\nu = \tau\gamma \operatorname{div} Q^\nu - \kappa\theta^\nu$, et nous établissons un résultat de compacité vérifié par v^ν . Ensuite, nous utilisons les propriétés des solutions renormalisées des équations de transport pour déduire la convergence forte de θ^ν .
- A la fin, nous déduisons l'existence des solutions du problème initial (\mathcal{P}), par un passage à la limite, lorsque ν tend vers 0, dans le problème régularisé, en utilisant les estimations effectuées précédemment et la compacité de la suite de solutions pour le passage à la limite dans les termes non linéaires.

4.2.4 Existence de solutions du problème modifié (\mathcal{P}^ν)

Soit $\nu > 0$, nous introduisons le problème approché (\mathcal{P}^ν) suivant

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} U &= 0, \\ \rho_0(\partial_t U + (U \cdot \nabla)U) - (\zeta + \eta)\Delta U - \nu\|\nabla U\|^2\Delta U + \nabla P &= -\rho(\theta)ge_3 + \\ &2\zeta \operatorname{curl} \omega + \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1+\nu|B|}, \\ U(0) &= U_0, \operatorname{div} U_0 = 0 \text{ dans } D, U = 0 \text{ sur } \Gamma_T, \end{aligned}$$

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \rho_0 I(\partial_t \omega + (U \cdot \nabla)\omega) - (c_a + c_d)\Delta \omega - (c_0 + c_d - c_a)\nabla(\operatorname{div} \omega) &= \\ &2\zeta(\operatorname{curl} U - 2\omega) \text{ dans } D_T, \\ \omega(0) &= \omega_0 \text{ dans } D, \omega = 0 \text{ sur } \Gamma_T, \end{aligned}$$

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} B &= 0, \\ \partial_t B + \operatorname{curl} \left(\Sigma(\theta)(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1+\nu|B|}) \right) &= \operatorname{curl} \left(U \times \frac{B}{1+\nu|B|} \right) \text{ dans } D_T, \\ B(0) &= B_0, \operatorname{div} B_0 = 0 \text{ dans } D, \\ B \cdot \mathbf{n} = 0, \Sigma(\theta) \left(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1+\nu|B|} \right) \times \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta - \nu \Delta \theta = -\operatorname{div} Q \text{ dans } D_T, \\
 & \tau \left(\partial_t Q + \omega \times Q - \gamma \Delta Q \right) = -Q - \kappa \nabla \theta \text{ dans } D_T, \\
 & \theta(0) = \theta_0, \quad Q(0) = Q_0 \text{ dans } D, \\
 & Q \times \mathbf{n} = 0, \quad \tau \gamma \operatorname{div} Q - \kappa \theta = 0, \quad \nu \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T.
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

- L'ajout du terme $-\nu \|\nabla U\|^2 \Delta U$ à l'équation de Navier-Stokes, sert à obtenir l'unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes modifiée ; l'unique solution est dans $L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^4(0, T; \mathcal{U})$. De plus, si nous faisons tendre ν vers 0, on obtient l'équation de Navier-Stokes. Le passage à la limite dans le terme $-\nu \|\nabla U\|^2 \Delta U$ est assuré par la méthode des opérateurs monotones, pour plus de détails voir [30].
- L'ajout du terme diffusif $-\nu \Delta \theta$ à l'équation de transport permet d'obtenir une équation parabolique, dont le but est d'assurer une meilleure régularité de la température. Cette nouvelle variable satisfait une condition au bord de type Neumann homogène.
- On remarque que $|\frac{B}{1+\nu|B|}| \leq \frac{1}{\nu}$, c'est à dire $|\frac{B}{1+\nu|B|}| \in \mathbb{L}^\infty(D_T)$. Cette modification sera utile dans les calculs des estimations de la solution et les passages à la limite.

4.2.4.1 Formulation variationnelle du système (\mathcal{P}^ν)

La formulation variationnelle de (\mathcal{P}^ν) s'écrit

- Pour tout $V \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 \frac{d}{dt} \int_D U \cdot V \, dx + \rho_0 \int_D (U \cdot \nabla) U \cdot V \, dx + (\eta + \nu \|\nabla U\|^2) \int_D (\nabla U \cdot \nabla V) + \zeta \int_D \operatorname{curl} U \cdot \operatorname{curl} V \, dx = \\
 & - \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot V \, dx + 2\zeta \int_D \operatorname{curl} \omega \cdot V \, dx + \int_D \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1 + \nu|B|} \cdot V \, dx,
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

$$U(0) = U_0.
 \tag{4.33}$$

- Pour tout $W \in \mathbb{H}_0^1(D)$

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 I \frac{d}{dt} \int_D \omega \cdot W \, dx + \rho_0 I \int_D (U \cdot \nabla) \omega \cdot W \, dx + \int_D c_a \operatorname{curl} \omega \cdot \operatorname{curl} W \, dx + \\
 & \int_D \left(c_d \nabla \omega \cdot \nabla W + (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega \operatorname{div} W \right) dx = 2\zeta \int_D (\operatorname{curl} U - 2\omega) \cdot W \, dx,
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

$$\omega(0) = \omega_0.$$

- Pour tout $\psi \in \mathbb{H}_{t,s}^1(D)$

$$(4.35) \quad \frac{d}{dt} \int_D B \cdot A \, dx + \int_D \Sigma(\theta) \operatorname{curl} B \cdot \operatorname{curl} A + \lambda \int_D \Sigma(\theta) \frac{\operatorname{curl} B \times B}{1 + \nu|B|} \cdot \operatorname{curl} A \, dx = \int_D \left(U \times \frac{B}{1 + \nu B} \right) \cdot \operatorname{curl} A \, dx,$$

$$B(0) = B_0.$$

- Pour tout $\varphi \in H^1(D)$

$$(4.36) \quad \frac{d}{dt} \int_D \theta \varphi \, dx - \int_D \theta U \cdot \nabla \varphi \, dx + \nu \int_D \nabla \theta \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_D \operatorname{div} Q \varphi \, dx,$$

$$\theta(0) = \theta_0.$$

- Pour tout $\phi \in \mathbb{H}_n^1(D)$

$$(4.37) \quad \tau \frac{d}{dt} \int_D Q \cdot \phi \, dx + \tau \int_D \left(\omega \times Q \cdot \phi + \gamma (\operatorname{curl} Q \cdot \operatorname{curl} \phi + \operatorname{div} Q \operatorname{div} \phi) \right) dx = - \int_D Q \cdot \phi \, dx - \kappa \int_D \nabla \theta \cdot \phi \, dx$$

$$Q(0) = Q_0;$$

4.2.4.2 Estimation d'énergie du système (\mathcal{P}^ν)

L'estimation d'énergie associée au système (\mathcal{P}^ν) est donnée par

$$(4.38) \quad \mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{F}^\nu(s) \, ds \leq \mathcal{E}(0) + Ct(1 + \|\theta_0\|^2 + \|Q_0\|^2)$$

où

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\rho_0}{2} \|U(t)\|^2 + \frac{\rho_0 I}{2} \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|B(t)\|^2 + \frac{\kappa}{2} \|\theta(t)\|^2 + \frac{\tau}{2} \|Q(t)\|^2,$$

$$\mathcal{E}(0) = \frac{\rho_0}{2} (\|U_0\|^2 + I \|\omega_0\|^2) + \frac{1}{2} \|B_0\|^2 + \frac{1}{2} (\kappa \|\theta_0\|^2 + \tau \|Q_0\|^2),$$

et

$$\mathcal{F}^\nu(t) = \eta \|\nabla U(t)\|^2 + \nu \|\nabla U(t)\|^4 + c_a \|\nabla \omega(t)\|^2 + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega(t)\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega(t)\| + \zeta \|\operatorname{curl} U(t) - 2\omega(t)\|^2 +$$

$$\|\sqrt{\Sigma(\theta(t))}\operatorname{curl} B(t)\|^2 + \nu\|\nabla\theta(t)\|^2 + \tau\gamma\left(\|\operatorname{div} Q(t)\|^2 + \|\operatorname{curl} Q(t)\|^2\right) + \|Q(t)\|^2.$$

Dans la partie suivante, nous établissons l'existence de solutions faibles et globales du système régularisé (\mathcal{P}^ν) . La démonstration de ce théorème est basée sur la théorie du point fixe de Leray-Schauder.

Théorème 4.2.2. *Sous les hypothèses $(H_1) - (H_5)$, le problème (\mathcal{P}^ν) admet une solution faible et globale en temps qui satisfait l'estimation d'énergie (4.38).*

4.2.4.3 La méthode de point fixe pour (\mathcal{P}^ν)

Pour appliquer le théorème de point fixe de Leray-Schauder, nous allons définir l'opérateur et l'espace de Banach sur lequel on va travailler.

Étape 1 : Définition de l'opérateur :

Soit \mathcal{V} l'espace de Banach défini par

$$(4.39) \quad \mathcal{V} = L^2(0, T; (\mathbb{L}^4(D) \cap \mathcal{U}_0) \times \mathbb{L}^2(D) \times \mathcal{U}_0 \times L^2(D)).$$

Soit l'opérateur \mathcal{F} de Leray-Schauder

$$(4.40) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}, \\ X &\longmapsto Y = \mathcal{F}(X) \end{aligned}$$

où Y est défini de la manière suivante. Pour $X = (\bar{U}, \bar{\omega}, \bar{B}, \bar{\theta})$, on pose $\mathcal{F}(X) = (U, \omega, B, \theta)$ où ω, B, Q, θ et U sont déterminés en résolvant les problèmes ci-dessous, dans cet ordre

- Pour tout $W \in \mathbb{H}_0^1(D)$

$$(4.41) \quad \begin{aligned} &\rho_0 I \frac{d}{dt} \int_D \omega \cdot W \, dx + \rho_0 I \int_D (\bar{U} \cdot \nabla) \omega \cdot W \, dx + \int_D c_a \operatorname{curl} \omega \cdot \operatorname{curl} W \, dx + \\ &\int_D \left(c_d \nabla \omega \cdot \nabla W + (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega \operatorname{div} W \right) dx = 2\zeta \int_D \bar{U} \cdot \operatorname{curl} W - 4\zeta \int_D \omega \cdot W \, dx, \\ &\omega(0) = \omega_0. \end{aligned}$$

- Pour tout $A \in \mathbb{H}_{t,s}^1(D)$

$$(4.42) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_D B \cdot A \, dx + \int_D \Sigma(\bar{\theta}) \operatorname{curl} B \cdot \operatorname{curl} A + \lambda \int_D \Sigma(\bar{\theta}) \frac{\operatorname{curl} B \times \bar{B}}{1 + \nu|\bar{B}|} \cdot \operatorname{curl} A \, dx = \\ &\int_D \left(\frac{\bar{U} \times \bar{B}}{1 + \nu|\bar{B}|} \right) \cdot \operatorname{curl} A \, dx, \\ &B(0) = B_0. \end{aligned}$$

- Pour tout $\phi \in \mathbb{H}_n^1(D)$

$$(4.43) \quad \begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \int_D Q \cdot \phi \, dx + \tau \int_D \left((\bar{\omega} \times Q) \cdot \phi + \gamma \operatorname{curl} Q \cdot \operatorname{curl} \phi + \gamma \operatorname{div} Q \operatorname{div} \phi \right) dx = \\ - \int_D Q \cdot \phi \, dx + \kappa \int_D \bar{\theta} \operatorname{div} \phi \, dx, \\ Q(0) = Q_0. \end{aligned}$$

- Pour tout $\varphi \in H^1(D)$

$$(4.44) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \theta \varphi \, dx - \int_D \theta \bar{U} \cdot \nabla \varphi \, dx + \nu \int_D \nabla \theta \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_D \operatorname{div} Q \varphi \, dx, \\ \theta(0) = \theta_0. \end{aligned}$$

- Pour tout $V \in \mathcal{U}$

$$(4.45) \quad \begin{aligned} \rho_0 \frac{d}{dt} \int_D U \cdot V \, dx + \rho_0 \int_D (U \cdot \nabla) U \cdot V \, dx + (\eta + \nu \|\nabla U\|^2) \int_D \nabla U \cdot \nabla V \, dx + \\ \int_D \zeta \operatorname{curl} U \cdot \operatorname{curl} V \, dx = \int_D \left(-\rho(\bar{\theta}) g e_3 + 2\zeta \operatorname{curl} \omega + \frac{\operatorname{curl} B \times \bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \right) \cdot V \, dx, \end{aligned}$$

$$(4.46) \quad U(0) = U_0.$$

Etape 2 : Estimations des solutions ω , B , θ et U :

Nous allons donner les estimations satisfaites par ω , B , θ et U . Noter que l'existence et l'unicité des solutions dans les problèmes linéaires précédents (4.41)-(4.45), peuvent être obtenues de manière classique. Par exemple, on peut utiliser la méthode de Galerkin pour l'existence.

1-L'équation auxiliaire de ω

Lemme 4.2.2. Soit $\omega_0 \in \mathbb{L}^2(D)$, alors l'unique solution ω dans $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(D))$ de l'équation (4.41) satisfait l'estimation

$$(4.47) \quad \begin{aligned} \rho_0 I \|\omega(t)\|^2 + \int_0^t \left(2c_d \|\nabla \omega\|^2 + 2(c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\|^2 + 8\zeta \|\omega\|^2 \right) ds \\ \leq \rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \frac{4\zeta^2}{c_a} \int_0^t \|\bar{U}\|^2 \, ds. \end{aligned}$$

De plus $\partial_t \omega \in L^1(0, T; \mathbb{H}^{-1}(D))$, et

$$(4.48) \quad \|\partial_t \omega\|_{L^1(0, T; \mathbb{H}^{-1}(D))} \leq C_T (C + \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})}) \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D))}.$$

Démonstration. Pour montrer l'estimation (4.47), on prend dans l'équation (4.41) $W = \omega$ et on intègre sur D , on trouve

$$(4.49) \quad \frac{\rho_0 I}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\| + c_d \|\nabla \omega\|^2 + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + 4\zeta \|\omega\|^2 \leq 2\zeta \|\bar{U}\| \|\operatorname{curl} \omega\|,$$

par l'inégalité de Young (3.8), le second membre sera majoré par

$$2\zeta \|\bar{U}\| \|\operatorname{curl} \omega\| \leq \frac{2\zeta^2}{c_a} \|\bar{U}\|^2 + \frac{c_a}{2} \|\operatorname{curl} \omega\|^2.$$

L'estimation (4.49), après l'avoir intégré en temps, devient

$$(4.50) \quad \rho_0 I \left\| \frac{\omega}{\omega} \right\|^2 + \int_0^t \left(c_a \|\operatorname{curl} \omega\| + 2c_d \|\nabla \omega\|^2 + 2(c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + 8\zeta \|\omega\|^2 \right) ds \\ \leq \rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \frac{4\zeta^2}{c_a} \int_0^t \|\bar{U}\|^2 ds.$$

Soit $W \in \mathbb{H}_0^1(D)$ et pour presque $t \in (0, T)$, on a

$$(4.51) \quad \langle \partial_t \omega(t); W \rangle_{\mathbb{H}^{-1}(D), \mathbb{H}_0^1(D)} = \langle L_1(t); W \rangle_{\mathbb{H}^{-1}(D), \mathbb{H}_0^1(D)}$$

avec

$$\left\langle L_1(t); W \right\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(D), \mathbb{H}_0^1(D)} = -\rho_0 I \int_D (\bar{U} \cdot \nabla) \omega \cdot W \, dx - \int_D c_a \operatorname{curl} \omega \cdot \operatorname{curl} W \, dx + \\ \int_D \left(-c_d \nabla \omega \cdot \nabla W - (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega \operatorname{div} W \right) dx + 2\zeta \int_D \bar{U} \cdot \operatorname{curl} W - 4\zeta \int_D \omega \cdot W \, dx, \quad \forall W \in \mathbb{H}_0^1(D).$$

Par l'injection continue de $H^1(D)$ dans $L^6(D)$, et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\left| \left\langle L_1(t); W \right\rangle \right| \leq \rho_0 I \|\bar{U}\|_{\mathbb{L}^4(D)} \|\nabla \omega\| \|W\|_{\mathbb{L}^6(D)} + c_d \|\nabla \omega\| \|\nabla W\| + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\| \|\operatorname{div} W\| \\ + c_a \|\operatorname{curl} \omega\| \|\operatorname{curl} W\| + 2\zeta \|\bar{U}\| \|\operatorname{curl} W\| + 4\zeta \|\omega\| \|W\|.$$

On en déduit que l'opérateur $L_1 : \mathbb{H}_0^1(D) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(D)$ est continu. De plus, on a pour presque $t \in (0, T)$

$$\|L_1(t)\|_{\mathbb{H}^{-1}(D)} = \|\partial_t \omega\|_{\mathbb{H}^{-1}(D)} \leq C \left(\|\bar{U}\|_{\mathbb{L}^4(D)} \|\nabla \omega\| + \|\nabla \omega\| + \|\operatorname{div} \omega\| + \|\operatorname{curl} \omega\| + \|\bar{U}\| + \|\omega\| \right).$$

avec C est une constante positive. Alors $\partial_t \omega \in L^1(0, T; \mathbb{H}^{-1}(D))$ et par (4.47) on aura

$$\|\partial_t \omega\|_{L^1(0, T; \mathbb{H}^{-1}(D))} \leq C_T \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D))} \left(\rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \frac{4\zeta^2}{c_a} \int_0^T \|\bar{U}\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\ C_T \left(\rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \frac{4\zeta^2}{c_a} \int_0^T \|\bar{U}\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C_T \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})} \\ \leq C_T \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D))} \left(\rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \frac{4\zeta^2}{c_a} \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

2-L'équation auxiliaire de B

Lemme 4.2.3. Sous l'hypothèse (H_3), pour $B_0 \in \mathbb{L}^2(D)$ et $\operatorname{div} B_0 = 0$, alors l'unique solution B dans $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_{t,s}^1(D))$, de l'équation (4.42) satisfait l'estimation

$$(4.52) \quad \|B(t)\|^2 + \Sigma_1 \int_0^t \|\operatorname{curl} B\|^2 ds \leq \|B_0\|^2 + \frac{1}{\nu^2 \Sigma_1} \int_0^t \|\bar{U}\|^2 ds.$$

De plus $\partial_t B \in L^2(0, T; (\mathbb{H}_{t,s}^1)'(D))$, et

$$(4.53) \quad \|\partial_t B\|_{L^2(0, T; (\mathbb{H}_{t,s}^1)'(D))} \leq C(1 + \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U})}).$$

Démonstration. On prend dans l'équation (4.42), $A = B$, et on intègre sur D , on trouve

$$(4.54) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|B\|^2 + \|\sqrt{\Sigma(\bar{\theta})} \operatorname{curl} B\| \leq \frac{1}{\nu} \|\bar{U}\| \|\operatorname{curl} B\|.$$

Grâce à l'hypothèse $\Sigma(\bar{\theta}) \geq \Sigma_1$ et à l'inégalité de Young, l'estimation (4.54) devient

$$(4.55) \quad \frac{d}{dt} \|B\|^2 + \Sigma_1 \|\operatorname{curl} B\|^2 \leq \frac{1}{\nu^2 \Sigma_1} \|\bar{U}\|^2.$$

Pour obtenir (4.52) il suffit d'intégrer en temps l'estimation (4.55). De plus, comme $\Sigma(\bar{\theta}) \leq \Sigma_2$ et $\frac{|\bar{B}|}{1+\nu|\bar{B}|} \leq \frac{1}{\nu}$, alors

$$\|\partial_t B\|_{(\mathbb{H}_{s,t}^1)'(D)} \leq \Sigma_2 \left(1 + \frac{\lambda}{\nu}\right) \|\operatorname{curl} B\| + \frac{1}{\nu} \|\bar{U}\|.$$

Donc $\partial_t B$ est bornée dans $L^2(0, T; (\mathbb{H}_{s,t}^1)'(D))$, et grâce à (4.52) on trouve

$$\begin{aligned} \|\partial_t B\|_{L^2(0, T; (\mathbb{H}_{s,t}^1)'(D))} &\leq \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \left(1 + \frac{\lambda}{\nu}\right) \left(\|B_0\|^2 + \frac{1}{\nu^2 \Sigma_1} \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U}_0)}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_T}{\nu} \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U}_0)}, \\ &\leq C(1 + \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathcal{U}_0)}). \end{aligned}$$

□

3-L'équation auxiliaire de Q

Lemme 4.2.4. Soit $Q_0 \in \mathbb{L}^2(D)$, alors l'unique solution $Q = \mathcal{Q}(\bar{\omega}, \bar{\theta})$ dans $L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1)$, de l'équation (4.58) satisfait l'estimation d'énergie

$$(4.56) \quad \tau \|Q(t)\|^2 + \tau \gamma \int_0^t \left(2 \|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2\right) ds + 2 \int_0^t \|Q\|^2 ds \leq \tau \|Q_0\|^2 + \frac{\kappa^2}{\tau \gamma} \int_0^t \|\bar{\theta}\|^2 ds.$$

De plus $\partial_t Q \in L^1(0, T; (\mathbb{H}_n^1)'(D))$ et on a

$$(4.57) \quad \|\partial_t Q\|_{L^1(0, T; (\mathbb{H}_n^1)'(D))} \leq C_T (1 + \|\bar{\omega}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}) (1 + \|\bar{\theta}\|_{L^2(0, T; L^2(D))}).$$

Démonstration. De l'équation (4.37), on a

$$(4.58) \quad \begin{aligned} \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|Q\|^2 + \tau\gamma \left(\|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2 \right) + \|Q\|^2 &= \kappa \int_D \bar{\theta} \operatorname{div} Q \, dx \leq \\ &\leq \frac{\tau\gamma}{2} \|\operatorname{div} Q\|^2 + \frac{\kappa^2}{2\tau\gamma} \|\bar{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

On intègre (4.58) en temps pour obtenir (4.56). De plus, grâce à l'injection continue de $H^1(D)$ dans $L^6(D)$, en dimension trois, et aux inégalités de Hölder, on déduit

$$\|\partial_t Q\|_{(\mathbb{H}_n^1)'(D)} \leq \tau C \|\bar{\omega}\| \|Q\|_{\mathbb{L}^6(D)} + \tau\gamma \left(\|\operatorname{curl} Q\| + \|\operatorname{div} Q\| \right) + \|Q\| + \kappa \|\bar{\theta}\|.$$

Donc $\partial_t Q$ est bornée dans $L^1(0, T; (\mathbb{H}_n^1)'(D))$ et on a

$$\|\partial_t Q\|_{L^1(0, T; (\mathbb{H}_n^1)'(D))} \leq C_T \|Q\|_{L^2(0, T; \mathbb{H}_n^1(D))} (1 + \|\bar{\omega}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}) + C_T \|\bar{\theta}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}.$$

On utilise l'estimation d'énergie (4.56) pour obtenir (4.57). \square

4-L'équation auxiliaire de θ

Lemme 4.2.5. Soit Q la solution de (4.37) donnée par le lemme précédent, et soit $\theta_0 \in L^2(D)$. Alors l'unique solution θ dans $L^\infty(0, T; L^2(D)) \cap L^2(0, T; H^1(D))$, de l'équation (4.26) satisfait l'estimation d'énergie

$$(4.59) \quad \|\theta(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 ds \leq \exp\left(\frac{t}{\tau\gamma}\right) \left(\|\theta_0\|^2 + \tau \|Q_0\|^2 + \frac{\kappa^2}{\tau\gamma} \int_0^t \|\bar{\theta}\|^2 ds \right).$$

De plus $\partial_t \theta \in L^1(0, T; (H^1(D))')$, et

$$(4.60) \quad \|\partial_t \theta\|_{L^1(0, T; (H^1(D))')} \leq C(1 + \|\bar{\theta}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}) (1 + \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D))}).$$

Démonstration. De l'équation (4.44), on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 + \nu \|\nabla \theta\|^2 = - \int_D \theta \operatorname{div} Q \, dx \leq \frac{\tau\gamma}{2} \|\operatorname{div} Q\|^2 + \frac{1}{\tau\gamma} \|\theta\|^2.$$

Par le lemme de Gronwall, on aura

$$\|\theta(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \theta(s)\|^2 ds \leq \exp\left(\frac{t}{\gamma\tau}\right) \left(\|\theta_0\|^2 + \tau\gamma \int_0^t \|\operatorname{div} Q\|^2 ds \right).$$

On utilise l'estimation (4.56) pour obtenir le résultat (4.59). Grâce à l'inégalité de Hölder et comme $\bar{U}(t) \in L^4(D)$, on a

$$\|\partial_t \theta\|_{(H^1(D))'} \leq C \|\theta\|_{\mathbb{L}^6(D)} \|\bar{U}\|_{\mathbb{L}^4(D)} + \nu \|\nabla \theta\| + \|\operatorname{div} Q\|.$$

On en déduit que $\partial_t \theta \in L^1(0, T; (H^1(D))')$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz en temps, on trouve

$$\|\partial_t \theta\|_{L^1(0, T; (H^1(D))')} \leq \|\theta\|_{L^2(0, T; (H^1(D))')} (C + \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D))}) + C_T \|\operatorname{div} Q\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}.$$

On utilise les estimations (4.56) et (4.59) pour avoir l'estimation (4.60). \square

5-L'équation auxiliaire de U

Lemme 4.2.6. Soit $\omega \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(D))$ la solution de (4.41) et $B \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}_{t,s}^1(D))$ la solution de (4.42), et soit $U_0 \in \mathcal{U}_0$, alors l'équation (4.45) admet une unique solution $U \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^4(0, T; \mathcal{U})$, satisfait l'estimation d'énergie

$$(4.61) \quad \frac{\rho_0}{2} \|U(t)\|^2 + \int_0^t \left(\frac{\eta}{4} \|\nabla U(s)\|^2 + \zeta \|\operatorname{curl} U(s)\|^2 + \nu \|\nabla U(s)\|^4 \right) ds \leq \\ C_1 \left(\|U_0\|^2 + \|\omega_0\|^2 + \|B_0\|^2 \right) + C_2 \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}^2 + 2 \frac{C_g}{\eta} t + 2 \frac{C_g}{\eta} \|\bar{\theta}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}^2.$$

De plus, $\partial_t U \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathcal{U}')$ et

$$(4.62) \quad \|\partial_t U\|_{L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathcal{U}')} \leq C \left(\|U_0\|^2 + \|\omega_0\|^2 + \|B_0\|^2 \right) + \\ C \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} (1 + \|\bar{U}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}) + C \|\bar{\theta}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} (1 + \|\bar{\theta}\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))}).$$

Démonstration. De l'équation (4.45), on a

$$(4.63) \quad \frac{\rho_0}{2} \frac{d}{dt} \|U(t)\|^2 + \eta \|\nabla U\|^2 + \zeta \|\operatorname{curl} U\|^2 + \nu \|\nabla U\|^4 = \\ - \int_D \rho(\bar{\theta}) g e_3 \cdot U \, dx + 2\zeta \int_D \operatorname{curl} \omega \cdot U \, dx + \int_D \operatorname{curl} B \times \frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \cdot U \, dx.$$

On utilise les inégalités de Young, de Hölder et de Poincaré, pour majorer le second membre, on trouve

$$\left| \int_D \rho(\bar{\theta}) g e_3 \cdot U \, dx \right| \leq C_g (1 + \|\bar{\theta}\|) \|\nabla U\| \\ \leq \frac{C_g}{\eta} (1 + \|\bar{\theta}\|^2) + \frac{\eta}{4} \|\nabla U\|^2, \\ \left| 2\zeta \int_D \operatorname{curl} \omega \cdot U \, dx \right| \leq \frac{\eta}{4} \|\nabla U\|^2 + \frac{4C\zeta^2}{\eta} \|\operatorname{curl} \omega\|^2,$$

$$\begin{aligned} \left| \int_D \operatorname{curl} B \times \frac{\bar{B}}{1 + \nu|\bar{B}|} \cdot U \, dx \right| &\leq \frac{C}{\nu} \|\operatorname{curl} B\| \|\nabla U\| \\ &\leq \frac{C}{\eta\nu^2} \|\operatorname{curl} B\|^2 + \frac{\eta}{4} \|\nabla U\|^2. \end{aligned}$$

Par ces inégalités, l'égalité (4.63) devient

$$(4.64) \quad \begin{aligned} \frac{\rho_0}{2} \frac{d}{dt} \|U(t)\|^2 + \frac{\eta}{4} \|\nabla U\|^2 + \zeta \|\operatorname{curl} U\|^2 + \nu \|\nabla U\|^4 &\leq \frac{C_g}{\eta} + \frac{C_g}{\eta} \|\bar{\theta}\|^2 + \\ &\frac{4C\zeta^2}{\eta} \|\operatorname{curl} \omega\|^2 + \frac{C}{\eta\nu^2} \|\operatorname{curl} B\|^2. \end{aligned}$$

On intègre en temps (4.64) et on utilise les estimations (4.47) et (4.52), on aura

$$\begin{aligned} \rho_0 \|U(t)\|^2 + \int_0^t \left(\frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2 + 2\zeta \|\operatorname{curl} U\|^2 + 2\nu \|\nabla U\|^4 \right) ds &\leq \rho_0 \|U_0\|^2 + \frac{8\rho_0 IC}{\eta} \|\omega_0\|^2 + \frac{2C}{\eta\nu^2} \|B_0\|^2 + \\ &\left(\frac{2C}{\eta\nu^4 \Sigma_1} + \frac{32C\zeta^4}{C_a \eta} \right) \|\bar{U}\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))}^2 + 2\frac{C_g}{\eta} t + 2\frac{C_g}{\eta} \|\bar{\theta}\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))}^2. \end{aligned}$$

De l'équation satisfaite par U , par l'injection continue de \mathcal{U} dans $\mathbb{L}^6(D)$, et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \|\partial_t U\|_{(\mathcal{U})'} &\leq C\rho_0 \|U\|_{\mathbb{L}^6(D)} \|\nabla U\| + \eta \|\nabla U\| + \zeta \|\operatorname{curl} U\| + \nu \|\nabla U\|^3 \\ &C_g + C_g \|\bar{\theta}\| + 2\zeta \|\operatorname{curl} \omega\| + \frac{1}{\nu} \|\operatorname{curl} B\|. \end{aligned}$$

On aura donc $\partial_t U \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathcal{U}')$ et

$$\begin{aligned} \|\partial_t U\|_{L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathcal{U}')} &\leq C \|U\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \|\nabla U\|_{L^4(0,T;\mathbb{L}^2(D))} + \eta \|\nabla U\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))} + \\ &\zeta \|\operatorname{curl} U\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))} + \nu \|\nabla U\|_{L^4(0,T;\mathbb{L}^2(D))}^3 + C_g + C_g \|\bar{\theta}\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))} + \\ &2C_T \zeta \|\operatorname{curl} \omega\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))} + C_T \frac{1}{\nu} \|\operatorname{curl} B\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))}. \end{aligned}$$

On utilise les estimations (4.47), (4.52) et (4.61) pour obtenir l'estimation (4.62). \square

Etape 3 : Estimation a priori

Soit l'espace \mathcal{V} et l'opérateur \mathcal{F} définis respectivement par (4.39) et (4.40). Nous démontrons le résultat

Lemme 4.2.7. *Soit*

$$S = \{X \in \mathcal{V}, \exists \Lambda \in [0, 1], X = \Lambda F(X)\}.$$

Alors S est borné.

Démonstration. Notons que $0 \in S$. Soit $X = (U, \omega, B, \theta) \in \mathcal{V}$, tel que

$$(4.65) \quad X = \Lambda F(X),$$

avec $\Lambda \in]0, 1]$, alors $F(X) = \frac{X}{\Lambda}$. Soit $Q = \mathcal{Q}(\omega, \theta)$, donnée par le lemme (4.2.4), on a les équations suivantes

• Pour tout $V \in \mathcal{U}$

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \int_D U \cdot V \, dx + \frac{\rho_0}{\Lambda} \int_D (U \cdot \nabla U) \cdot V \, dx + \int_D \left(\eta + \frac{\nu}{\Lambda^2} \|\nabla U\|^2 \right) \nabla U \cdot \nabla V +$$

$$(4.66) \quad \zeta \int_D \operatorname{curl} U \cdot \operatorname{curl} V = -\Lambda \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot V \, dx + 2\zeta \int_D \operatorname{curl} U \cdot V \, dx + \int_D \frac{\operatorname{curl} B \times B}{1 + \nu|B|} \cdot V \, dx,$$

$$(4.67) \quad U(0) = \Lambda U_0.$$

• Pour tout $W \in \mathbb{H}_0^1(D)$

$$\rho_0 I \frac{d}{dt} \int_D \omega \cdot W \, dx + \rho_0 I \int_D (U \cdot \nabla) \omega \cdot W \, dx + \int_D c_a \operatorname{curl} \omega \cdot \operatorname{curl} W \, dx +$$

$$(4.68) \quad \int_D \left(c_d \nabla \omega \cdot \nabla W + (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega \operatorname{div} W \right) dx = 2\zeta \Lambda \int_D U \cdot \operatorname{curl} W - 4\zeta \int_D \omega \cdot W \, dx,$$

$$\omega(0) = \Lambda \omega_0.$$

• Pour tout $\psi \in \mathbb{H}_{t,s}^1(D)$

$$\frac{d}{dt} \int_D B \cdot A \, dx + \int_D \Sigma(\bar{\theta}) \left(\operatorname{curl} B + \lambda \operatorname{curl} B \times \frac{B}{1 + \nu|B|} \right) \cdot \operatorname{curl} A \, dx =$$

$$(4.69) \quad \Lambda \int_D \left(U \times \frac{B}{1 + \nu|B|} \right) \cdot \operatorname{curl} A \, dx,$$

$$B(0) = \Lambda B_0.$$

• Pour tout $\varphi \in H^1(D)$

$$(4.70) \quad \int_D \partial_t \theta \varphi \, dx - \int_D \theta U \cdot \nabla \varphi \, dx + \nu \int_D \nabla \theta \cdot \nabla \varphi \, dx = -\Lambda \int_D \operatorname{div} Q \varphi \, dx,$$

$$\theta(0) = \Lambda \theta_0.$$

• Pour tout $\phi \in \mathbb{H}_n^1(D)$

$$(4.71) \quad \begin{aligned} & \tau \frac{d}{dt} \int_D Q \cdot \phi \, dx + \tau \int_D (\omega \times Q) \cdot \phi \, dx + \tau \gamma \left(\int_D \operatorname{curl} Q \cdot \operatorname{curl} \phi \, dx + \int_D \operatorname{div} Q \operatorname{div} \phi \, dx \right) = \\ & - \int_D Q \cdot \phi \, dx + \kappa \int_D \theta \operatorname{div} \phi \, dx, \\ & Q(0) = Q_0. \end{aligned}$$

Le but est de montrer que (U, ω, B, θ) appartient à un sous-ensemble borné de \mathcal{V} par rapport à Λ . On commence par θ , de (4.70) et (4.71) on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 + \nu \|\nabla \theta\|^2 = -\Lambda \int_D \theta \operatorname{div} Q \, dx,$$

et

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|Q\|^2 + \tau \gamma (\|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2) + \|Q\|^2 = \kappa \int_D \theta Q \, dx.$$

En sommant ces deux égalités, on trouve

$$(4.72) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\kappa \|\theta\|^2 + \tau \Lambda \|Q\|^2) + \kappa \nu \|\nabla \theta\|^2 + \Lambda \tau \gamma (\|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2) + \Lambda \|Q\|^2 = 0$$

On intègre en temps (4.72), on aura

$$(4.73) \quad \begin{aligned} & \kappa \|\theta(t)\|^2 + \tau \Lambda \|Q(t)\|^2 + 2\kappa \nu \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 \, ds + 2\Lambda \tau \gamma \int_0^t (\|\operatorname{curl} Q\|^2 + \|\operatorname{div} Q\|^2) \, ds + \\ & 2\Lambda \int_0^t \|Q\|^2 \, ds = \kappa \Lambda^2 \|\theta_0\|^2 + \tau \|Q_0\|^2. \end{aligned}$$

Comme $0 < \Lambda \leq 1$, on aura donc

$$(4.74) \quad \kappa \|\theta(t)\|^2 + 2\kappa \nu \int_0^t \|\nabla \theta\|^2 \, ds \leq \kappa \|\theta_0\|^2 + \tau \|Q_0\|^2.$$

On en déduit que θ appartient à un sous-ensemble borné de $L^\infty(0, T; L^2(D)) \cap L^2(0, T; L^2(D))$ par rapport à Λ .

D'autre part, on a

L'estimation de U vérifiait (4.66) :

$$\frac{\rho_0}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + \eta \|\nabla U\|^2 + \zeta \|\operatorname{curl} U\|^2 + \frac{\nu}{\Lambda} \|\nabla U\|^4 = \int_D \operatorname{curl} \omega \cdot U \, dx +$$

$$\int_D \operatorname{curl} B \cdot \frac{B}{1 + \nu|B|} \cdot U \, dx - \Lambda \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot U \, dx.$$

L'estimation de ω vérifiait (4.68) :

$$\frac{\rho_0 I}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|^2 + c_d \|\nabla \omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\|^2 + (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 = 2\zeta \Lambda \int_D U \cdot \operatorname{curl} \omega \, dx - 4\zeta \|\omega\|^2.$$

L'estimation de B vérifiait (4.69) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|B\|^2 + \|\sqrt{\Sigma(\theta)} \operatorname{curl} B\|^2 = \Lambda \int_D U \times \frac{B}{1 + \nu|B|} \cdot \operatorname{curl} B \, dx.$$

En sommant les trois égalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\rho_0 \|U\|^2 + \rho_0 I \|\omega\|^2 + \|B\|^2 \right) + \eta \|\nabla U\|^2 + \zeta \|\operatorname{curl} U\|^2 + \frac{\nu}{\Lambda} \|\nabla U\|^4 + c_d \|\nabla \omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\|^2 + \\ (c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + \|\sqrt{\Sigma(\theta)} \operatorname{curl} B\|^2 + 4\zeta \|\omega\|^2 = 2\zeta(1 + \Lambda) \int_D U \cdot \operatorname{curl} \omega \, dx + \\ (1 + \Lambda) \int_D \operatorname{curl} B \cdot \frac{B}{1 + \nu|B|} \cdot U \, dx - \Lambda \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot U \, dx. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left| \int_D \rho(\theta) g e_3 \cdot U \right| &\leq C + \frac{\eta}{2} \|\nabla U\|^2 + C \|\theta\|^2, \\ 4\zeta \left| \int_D U \cdot \operatorname{curl} \omega \, dx \right| &\leq \frac{8\zeta^2}{c_a} \|U\|^2 + \frac{c_a}{2} \|\operatorname{curl} \omega\|^2, \\ 2 \left| \int_D \operatorname{curl} B \cdot \frac{B}{1 + \nu|B|} \cdot U \, dx \right| &\leq \frac{\Sigma_1}{2} \|\operatorname{curl} B\|^2 + \frac{1}{\Sigma_1 \nu^2} \|U\|^2, \end{aligned}$$

notons que C est une constante positive indépendante de Λ . De plus, comme $0 < \Lambda \leq 1$, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} (4.75) \quad \rho_0 \|U(t)\|^2 + \rho_0 I \|\omega\|^2 + \|B\|^2 + \int_0^t \left(\eta \|\nabla U\|^2 + 2\zeta \|\operatorname{curl} U\|^2 + \frac{2\nu}{\Lambda} \|\nabla U\|^4 \right) ds + \\ \int_0^t \left(2c_d \|\nabla \omega\|^2 + c_a \|\operatorname{curl} \omega\|^2 + 2(c_0 + c_d) \|\operatorname{div} \omega\|^2 + 8\zeta \|\omega\|^2 \right) ds + \Sigma_1 \int_0^t \|\operatorname{curl} B\|^2 ds \leq \\ \leq \rho_0 \|U_0\|^2 + \rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \|B_0\|^2 + C \int_0^t (1 + \|\theta\|^2 + \|U\|^2) ds. \end{aligned}$$

On utilise le lemme de Gronwall, on obtient

$$\rho_0 \|U(t)\|^2 \leq \exp(Ct) \left(\rho_0 \|U_0\|^2 + \rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \|B_0\|^2 \right) + C \int_0^t (1 + \|\theta\|^2 ds).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \rho_0 \|U(t)\|^2 + \rho_0 I \|\omega\|^2 + \|B\|^2 + \eta \int_0^t \|\nabla U\|^2 \leq \\ \left(\rho_0 \|U_0\|^2 + \rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \|B_0\|^2 + C \int_0^t (1 + \|\theta\|^2 ds) \right) \exp(Ct), \end{aligned}$$

par l'estimation (4.74) de θ , on déduit

$$\begin{aligned} \rho_0 \|U(t)\|^2 + \rho_0 I \|\omega\|^2 + \|B\|^2 + \eta \int_0^t \|\nabla U\|^2 \leq \\ \left(\rho_0 \|U_0\|^2 + \rho_0 I \|\omega_0\|^2 + \|B_0\|^2 + C(1 + \|\theta_0\|^2 + \|Q_0\|^2)T \right) \exp(Ct). \end{aligned}$$

De cette estimation on conclut que

- U appartient à un sous-ensemble borné de $L^\infty(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathcal{U})$, et par l'injection continue de \mathcal{U} dans $\mathbb{L}^4(D)$, on aura en particulier U appartient à un sous-ensemble borné de $L^2(0, T; \mathcal{U}_0) \cap L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D))$.
- ω appartient à un sous-ensemble borné de $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$.
- B appartient à un sous-ensemble borné de $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$.

□

Etape 4 : Continuité et compacité de l'opérateur \mathcal{F} .

Lemme 4.2.8. *L'opérateur $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ est continu.*

Démonstration. Soit $X_n = (\bar{U}_n, \bar{\omega}_n, \bar{B}_n, \bar{\theta}_n) \in \mathcal{V}$, telle que (X_n) converge fortement vers $X = (\bar{U}, \bar{\omega}, \bar{B}, \bar{\theta})$ dans \mathcal{V} . Notre but est de montrer que la suite $\mathcal{F}(X_n) = (U_n, \omega_n, B_n, \theta_n)$ converge fortement vers $\mathcal{F}(X) = (U, \omega, B, \theta)$ dans \mathcal{V} .

On pose $Q_n = \mathcal{Q}_n(\omega_n, \theta_n)$, d'après les lemmes (4.2.2)-(4.2.6) on a $(U_n, \omega_n, B_n, \theta_n, Q_n)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{W})$, où

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}_0 \times \mathbb{L}^2(D) \times \mathbb{L}^2(D) \times L^2(D) \times \mathbb{L}^2(D),$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathbb{H}_0^1(D) \times \mathbb{H}_{s,t}^1(D) \times H^1(D) \times \mathbb{H}_n^1(D).$$

On peut donc extraire des sous-suites $U_n, \omega_n, B_n, \theta_n$ et Q_n , qu'on note toujours $U_n, \omega_n, B_n, \theta_n$ et Q_n , telles que

$$(4.76) \quad (U_n, \omega_n, B_n, \theta_n, Q_n) \rightharpoonup (U, \omega, B, \theta, Q) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; \mathcal{W}) \\ \text{et faiblement-}\star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathcal{H}).$$

Par le théorème de compacité d'Aubin, voir (3.4.2), on peut donc extraire des sous-suites de $U_n, \omega_n, B_n, \theta_n$ et Q_n , qu'on note toujours $U_n, \omega_n, B_n, \theta_n$ et Q_n , telles que

$$(4.77) \quad (U_n, \omega_n, B_n, \theta_n, Q_n) \rightarrow (U, \omega, B, \theta, Q) \text{ fortement dans } \mathcal{V} \times L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D)).$$

Ce résultat est nécessaire dans le passage à la limite dans les termes non linéaires du système.

Pour montrer que l'opérateur \mathcal{F} est continu, nous devons vérifier que la limite $(U, \omega, B, \theta, Q)$ est une solution de (4.41)-(4.45). Pour cela nous allons passer à la limite dans les équations satisfaites respectivement par $U_n, \omega_n, B_n, \theta_n, Q_n$, en utilisant (4.77).

Passage à la limite dans l'équation de ω_n . On considère l'équation (4.41), satisfaite par ω_n , multipliée par la fonction $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T])$ telle que $\phi(T) = 0$. En l'intégrant par partie, on obtient pour tout $W \in \mathbb{H}_0^1(D)$

$$(4.78) \quad \rho_0 I \int_{D_T} (-\phi' \omega_n + \phi(\overline{U}_n \cdot \nabla) \omega_n) \cdot W \, dxdt + \int_{D_T} c_a \phi \operatorname{curl} \omega_n \cdot \operatorname{curl} W \, dxdt + \\ \int_{D_T} \phi (c_d \nabla \omega_n \cdot \nabla W + (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega_n \operatorname{div} W) \, dxdt = \phi(0) \int_D \omega_0 \cdot W \, dx + \int_{D_T} \phi (2\zeta \overline{U}_n \cdot \operatorname{curl} W - 4\zeta \omega_n \cdot W) \, dxdt.$$

En utilisant les convergences (4.76) et (4.77) pour passer à la limite dans (4.78), on trouve pour tout $W \in \mathbb{H}_0^1(D)$

$$(4.79) \quad \rho_0 I \int_{D_T} (-\phi' \omega + \phi(\overline{U} \cdot \nabla) \omega) \cdot W \, dxdt + \int_{D_T} c_a \phi \operatorname{curl} \omega \cdot \operatorname{curl} W \, dxdt + \\ \int_{D_T} \phi (c_d \nabla \omega \cdot \nabla W + (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega \operatorname{div} W) \, dxdt = \phi(0) \int_D \omega_0 \cdot W \, dx + \int_{D_T} \phi (2\zeta \overline{U} \cdot \operatorname{curl} W - 4\zeta \omega \cdot W) \, dxdt.$$

En particulier, pour $\phi \in \mathcal{D}(]0, T[)$ on obtient l'équation, dans $\mathcal{D}'(]0, T[)$, suivante

$$(4.80) \quad \rho_0 I \frac{d}{dt} \int_D (\omega \cdot W \, dx + \int_D (\overline{U} \cdot \nabla) \omega) \cdot W \, dx + \int_D c_a \operatorname{curl} \omega \cdot \operatorname{curl} W \, dx + \\ \int_D (c_d \nabla \omega \cdot \nabla W + (c_0 + c_d) \operatorname{div} \omega \operatorname{div} W) \, dx = \int_D (2\zeta \overline{U} \cdot \operatorname{curl} W - 4\zeta \omega \cdot W) \, dx,$$

pour tout $W \in \mathbb{H}_0^1(D)$. Ce qui entraîne, pour presque tout $t \in]0, T[$, à l'équation dans $\mathcal{D}'(D)$ suivante

$$(4.81) \quad \rho_0 I \partial_t \omega = -\rho_0 I (\bar{U} \cdot \nabla) \omega + (c_a + c_d) \Delta \omega + (c_0 + c_d - c_a) \nabla \operatorname{div} \omega + 2\zeta (\operatorname{curl} \bar{U} - 2\omega),$$

on en déduit que $\partial_t \omega \in L^1(0, T; \mathbb{H}^{-1}(D))$. Alors $\omega \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{L}^2(D)_{faible})$, ce qui donne un sens à la condition initiale $\omega(0)$. En multipliant l'équation (4.79) par une fonction test $\phi \in \mathcal{C}([0, T])$ telle que $\phi(T) = 0$ et en l'intégrant par partie, on obtient à l'aide de l'équation (4.78)

$$\phi(0) \int_D \omega_0 \cdot W \, dx = \phi(0) \int_D \omega(0) \cdot W \, dx \quad \forall W \in \mathbb{H}_0^1(D),$$

c'est à dire

$$\omega(0) = \omega_0.$$

Alors ω est une solution de l'équation (4.41).

Le passage à la limite dans les équations satisfaites respectivement par ω_n , B_n , θ_n et Q_n se fait de la même manière que celle de l'équation de ω_n . Nous devons juste justifier, dans le lemme suivant, le passage à la limite dans les termes non linéaires.

Lemme 4.2.9. De (4.76) et (4.77), on déduit les convergences suivantes

- $\Sigma(\bar{\theta}_n) \operatorname{curl} B_n \rightharpoonup \Sigma(\bar{\theta}) \operatorname{curl} B$ faiblement dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$.
- $\Sigma(\bar{\theta}_n) \left(\operatorname{curl} B_n \times \frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \right) \rightharpoonup \Sigma(\bar{\theta}) \left(\operatorname{curl} B \times \frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \right)$ faiblement dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$.
- $\bar{U}_n \times \frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \rightarrow \bar{U} \times \frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|}$ fortement dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$.
- $\bar{\omega}_n \times Q_n \rightarrow \bar{\omega} \times Q$ fortement dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathbb{L}^r(D))$, $1 \leq r < \frac{6}{5}$.

Démonstration. • Comme Σ est continue et bornée donc la convergence forte de $\bar{\theta}_n$ entraîne que $\Sigma(\bar{\theta}_n) \rightarrow \Sigma(\bar{\theta})$ p.p. dans D_T . D'après le théorème de Lebesgue, on déduit que

$$\Sigma(\bar{\theta}_n) \rightarrow \Sigma(\bar{\theta}) \text{ fortement dans } L^p(D_T), \quad p \in [1, \infty[$$

• En utilisant les convergence fortes de $\bar{\theta}_n$ et \bar{B}_n , on déduit que

$$\Sigma(\bar{\theta}_n) \frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \rightarrow (\bar{\theta}) \frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \text{ p.p. dans } D_T,$$

de plus, on a

$$\Sigma(\bar{\theta}_n) \frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \leq \frac{\Sigma_2}{\nu} \text{ p.p. dans } D_T.$$

Donc

$$\Sigma(\bar{\theta}_n) \frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \rightarrow \Sigma(\bar{\theta}) \frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \text{ fortement dans } L^p(D_T), \quad p < \infty.$$

La deuxième convergence est obtenue en compensant la convergence forte des suites $\Sigma(\bar{\theta}_n) \frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|}$ par la convergence faible de $\text{curl } B_n$.

- Pour la troisième convergence, il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue à la suite de fonctions $\frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \leq \frac{1}{\nu}$, qui converge fortement vers $\frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|}$ dans $\mathbb{L}^p(D_T)$.
- De (4.76) et (4.77), on déduit que

$$\bar{\omega}_n \times Q_n \rightarrow \bar{\omega} \times Q \text{ fortement dans } L^1(0, T; \mathbb{L}^q(D)), \quad 1 \leq q < \frac{3}{2},$$

et

$$\bar{\omega}_n \times Q_n \rightharpoonup \bar{\omega} \times Q \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^1(D)).$$

Par le lemme d'interpolation, voir théorème (3.4.1), en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\bar{\omega}_n \times Q_n \rightarrow \bar{\omega} \times Q \text{ fortement dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathbb{L}^r(D)), \quad 1 \leq r < \frac{6}{5}.$$

□

• **Passage à la limite dans l'équation de U_n** : Soit ψ une fonction continûment dérivable sur $[0, T]$ avec $\psi(T) = 0$. On multiplie l'équation (4.45), satisfaite par U_n , par ψ et on intègre par partie, ce qui entraîne à l'équation :

$$(4.82) \quad \begin{aligned} & -\rho_0 \int_{D_T} \psi'(t) U_n \cdot V \, dxdt + \rho_0 \int_{D_T} \psi(t) (U_n \cdot \nabla) U_n \cdot V \, dxdt + \\ & \int_{D_T} \psi(t) \left(\eta + \nu \|\nabla U_n\|^2 \right) \nabla U_n \cdot \nabla V \, dxdt + \zeta \int_{D_T} \text{curl } U_n \cdot \text{curl } V \, dxdt = \\ & \psi(0) \int_D U_0 \cdot V \, dx - \int_{D_T} \psi(t) \rho(\bar{\theta}_n) g e_3 \cdot V \, dxdt + 2\zeta \int_{D_T} \psi(t) \text{curl } \omega_n \cdot V \, dxdt + \\ & \int_{D_T} \psi(t) \frac{\text{curl } B_n \times \bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \cdot V \, dxdt \text{ pour tout } V \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Le but est de passer à la limite dans l'équation (4.82), et montrer que la limite de U_n satisfait l'équation (4.45) avec la condition initiale (4.46). En effet, le passage à la limite dans les termes linéaires est direct. Pour les termes non linéaires, on a les lemmes suivants :

Lemme 4.2.10. *Soit U_n solution de (4.45). Alors*

$$(4.83) \quad (U_n \cdot \nabla) U_n \rightharpoonup (U \cdot \nabla) U \text{ faiblement dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathbb{L}^{\frac{6}{5}}(D))$$

Démonstration. De (4.76), on a

$$\|(U_n \cdot \nabla)U_n\|_{L^1(0,T;\mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(D))} \leq C_T \|U_n\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^6(D))} \|\nabla U_n\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))}$$

et

$$\|(U_n \cdot \nabla)U_n\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^1(D))} \leq C_T \|U_n\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(D))} \|\nabla U_n\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))},$$

donc la suite $(U_n \cdot \nabla)U_n$ est uniformément bornée dans $L^1(0, T; \mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{L}^1(D))$. On remarque que dans les deux cas, on a un manque de régularité en espace ou en temps. Pour cela, on utilise les inégalités d'interpolation, voir théorème (3.4.1), en compensant la régularité du temps avec celle de l'espace et vice-versa. Par l'inégalité d'interpolation, et pour $0 < \varepsilon \leq 1$, la suite $(U_n \cdot \nabla)U_n$ est bornée dans $L^p(0, T; \mathbb{L}^q(D))$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{\varepsilon}{1} + \frac{1-\varepsilon}{2} \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1-\varepsilon}{1}.$$

On prend, en particulier $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient $p = \frac{4}{3} > 1$ et $q = \frac{6}{5} > 1$. De plus, comme $(U_n \cdot \nabla)U_n$ est bornée dans un espace de Banach réflexif, on peut donc extraire une sous-suite, qu'on note toujours $(U_n \cdot \nabla)U_n$, qui converge faiblement, c'est à dire

$$(4.84) \quad (U_n \cdot \nabla)U_n \rightharpoonup g \text{ faiblement dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathbb{L}^{\frac{6}{5}}(D)).$$

Il reste maintenant à montrer que $g = (U \cdot \nabla)U$. Comme U_n converge fortement vers U dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$, on a donc

$$(4.85) \quad (U_n \cdot \nabla)U_n \rightharpoonup (U \cdot \nabla)U \text{ faiblement dans } L^1(0, T; \mathbb{L}^1(D)).$$

Les deux convergences (4.84) et (4.85) impliquent la convergence au sens des distributions. Par l'unicité de la limite, on déduit que

$$g = (U \cdot \nabla)U.$$

□

On définit maintenant l'opérateur non linéaire \mathcal{A} , par

$$\langle \mathcal{A}(U_n); V \rangle = \nu \|\nabla U_n\|^2 \int_D \nabla U_n \cdot \nabla V \, dx, \quad \forall U_n, V \in \mathcal{U}.$$

On a

$$|\langle \mathcal{A}(U_n); V \rangle| \leq \nu \|\nabla U_n\|^3 \|\nabla V\|, \quad \forall U_n, V \in \mathcal{U},$$

donc $\mathcal{A}(U_n) \in \mathcal{U}'$, $\forall U_n \in \mathcal{U}$, et on a

$$\|\mathcal{A}(U_n)\|_{\mathcal{U}'} \leq \nu \|\nabla U\|^3,$$

comme ∇U_n est bornée dans $L^4(0, T; \mathbb{L}^2(D))$, on déduit que

$$\|\mathcal{A}(U_n)\|_{L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathcal{U}')} \leq C.$$

On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$\mathcal{A}(U_n) \rightarrow \chi \text{ faiblement dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathcal{U}').$$

A l'aide de ce résultat, du lemme (4.2.10), et des convergences (4.76), (4.77), on peut passer à la limite dans l'équation (4.82), on trouve

$$(4.86) \quad -\rho_0 \int_{D_T} \psi'(t) U \cdot V \, dx dt + \rho_0 \int_{D_T} \psi(t) (U \cdot \nabla) U \cdot V \, dx dt +$$

$$\int_{D_T} \psi(t) (\eta \nabla U \cdot \nabla V + \zeta \operatorname{curl} U \cdot \operatorname{curl} V) \, dx dt + \nu \int_0^T \psi(t) \langle \chi; V \rangle \, dt =$$

$$\int_D \psi(0) U_0 \cdot V \, dx - \int_{D_T} \psi(t) \rho(\bar{\theta}) g e_3 \cdot V \, dx dt + 2\zeta \int_{D_T} \psi(t) \operatorname{curl} \omega \cdot V \, dx dt +,$$

$$\int_{D_T} \psi(t) \frac{\operatorname{curl} B \times \bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \cdot V \, dx dt \text{ pour tout } V \in \mathcal{U}.$$

On prend $\psi \in \mathcal{D}(\]0, T[)$, on obtient pour tout $V \in \mathcal{U}$ l'équation suivante

$$(4.87) \quad \rho_0 \frac{d}{dt} \int_D U \cdot V \, dx + \rho_0 \int_D (U \cdot \nabla) U \cdot V \, dx + \int_D (\eta \nabla U \cdot \nabla V + \zeta \operatorname{curl} U \cdot \operatorname{curl} V) \, dx +$$

$$\nu \langle \chi; V \rangle \, dt = \int_D \left(-\rho(\bar{\theta}) g e_3 + 2\zeta \operatorname{curl} \omega + \frac{\operatorname{curl} B \times \bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \cdot V \right) \, dx.$$

Cette équation est satisfaite dans $\mathcal{D}'(\]0, T[)$, on écrit donc

$$\rho_0 \frac{dU}{dt} + \mathcal{B}(U) + \chi = 0,$$

avec \mathcal{B} est un opérateur défini par

$$\langle \mathcal{B}(U); V \rangle = \rho_0 \int_D (U \cdot \nabla) U \cdot V \, dx + \int_D (\eta \nabla U \cdot \nabla V + \zeta \operatorname{curl} U \cdot \operatorname{curl} V) \, dx$$

$$+ \int_D \left(\rho(\bar{\theta}) g e_3 - 2\zeta \operatorname{curl} \omega - \frac{\operatorname{curl} B \times \bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \right) \cdot V \, dx, \text{ pour tout } V \in \mathcal{U}.$$

tel que $\mathcal{B}(U) \in L^2(0, T; \mathcal{U}')$, donc $\frac{dU}{dt} \in L^{\frac{3}{4}}(0, T; \mathcal{U}')$. Par le théorème (3.4.3), on déduit que $U \in \mathcal{C}(\]0, T[; \mathcal{U}')$. De plus comme $U \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D))$, alors d'après le lemme (3.4.1), on a

$U \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{L}^2(D)_{faible})$, ce qui donne un sens à la condition initiale $U(0)$. On multiplie l'équation (4.87) par $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T])$. Après avoir intégré le premier terme par parties, nous comparons l'équation obtenue avec l'équation (4.86), nous trouvons

$$\int_D \psi(0)(U(0) - U_0) \cdot V \, dx = 0, \quad \forall V \in \mathcal{U},$$

on peut choisir ψ , avec $\psi(0) = 1$, on aura

$$\int_D (U(0) - U_0) \cdot V \, dx = 0, \quad \forall V \in \mathcal{U},$$

c'est à dire la limite U satisfait la condition initiale (4.46). On aura donc démontré que la limite U de U_n satisfait l'équation (4.45) si l'on montre que

$$\chi = \mathcal{A}(U),$$

pour cela, nous allons utiliser le principe des opérateurs monotones.

En outre, on remarque que

$$\mathcal{A}(U_n) = J'(U_n), \quad \text{avec } J(U_n) = \frac{\nu}{4} \|\nabla U_n\|^4,$$

et la fonctionnelle $U \rightarrow J(U)$ est différentiable au sens de Gâteaux sur \mathcal{U} et convexe, par la proposition (3.5.1), on déduit que l'opérateur \mathcal{A} est monotone et hémicontinu. Par conséquent, on a

$$A^n = \int_0^T \langle \mathcal{A}(U_n) - \mathcal{A}(V); U_n - V \rangle dt = \int_0^T \left(\langle \mathcal{A}(U_n); U_n \rangle + \langle \mathcal{A}(U_n); V \rangle - \langle \mathcal{A}(V); U_n - V \rangle \right) dt \geq 0,$$

$$\forall V \in L^4(0, T; \mathcal{U}).$$

Or de l'équation (4.45), satisfaite par U_n , il résulte que

$$A^n = \frac{\rho_0}{2} \|U_0\|^2 - \frac{\rho_0}{2} \|U_n(T)\|^2 - \int_{D_T} \rho(\bar{\theta}_n) g e_3 \cdot U_n \, dx dt + \int_{D_T} \text{curl } \omega_n \cdot U_n \, dx dt +$$

$$\int_{D_T} \text{curl } B_n \times \frac{\bar{B}_n}{1 + \nu |\bar{B}_n|} \, dx dt - \eta \int_0^T \|\nabla U_n\|^2 dt - \zeta \int_0^T \|\text{curl } U_n\|^2 dt,$$

$$- \int_0^T \langle \mathcal{A}(U_n); V \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}(V); U_n - V \rangle dt, \quad \forall V \in L^4(0, T; \mathcal{U}).$$

On prend la limite supérieure de A^n , on applique le lemme suivant,

Lemme 4.2.11.

$$U_n(T) \rightharpoonup U(T) \text{ faiblement dans } \mathcal{U}_0,$$

et

$$\|U(T)\| \leq \liminf \|U_n(T)\|$$

(voir la démonstration plus bas), on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \limsup^n \leq & \frac{\rho_0}{2} \|U_0\|^2 - \frac{\rho_0}{2} \|U(T)\|^2 - \int_{D_T} \rho(\bar{\theta}) g e_3 \cdot U \, dxdt + \int_{D_T} \operatorname{curl} \omega \cdot U \, dxdt + \\ & \int_{D_T} \operatorname{curl} B \times \frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \, dxdt - \eta \int_0^T \|\nabla U\|^2 dt - \zeta \int_0^T \|\operatorname{curl} U\|^2 dt \\ & - \int_0^T \langle \chi; V \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}(V); U - V \rangle dt, \quad \forall V \in L^4(0, T; \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Le passage à la limite dans les autres termes est assuré par la limite forte de U_n . De l'équation (4.87), il résulte que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \chi; U \rangle dt = & \frac{\rho_0}{2} (\|U_0\|^2 - \|U(T)\|^2) + \int_{D_T} (-\rho(\bar{\theta}) g e_3 + 2\zeta \operatorname{curl} \omega) \cdot U \, dxdt + \\ & \int_{D_T} \operatorname{curl} B \times \frac{\bar{B}}{1 + \nu |\bar{B}|} \, dxdt - \eta \int_0^T \|\nabla U\|^2 dt - \zeta \int_0^T \|\operatorname{curl} U\|^2 dt, \end{aligned}$$

donc

$$\limsup A^n \leq \int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}(V); U - V \rangle dt, \quad \forall V \in L^4(0, T; \mathcal{U}).$$

Grâce à la monotonie de \mathcal{A} , on a

$$(4.88) \quad \int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}(V); U - V \rangle dt \geq 0, \quad \forall V \in L^4(0, T; \mathcal{U}).$$

Soit $\bar{V} \in \mathcal{U}$ quelconque et $h \in \mathbb{R}_+^*$. On prend dans (4.88) $V = U - h\bar{V}$, on obtient

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}(U - h\bar{V}); \bar{V} \rangle dt \geq 0, \quad \forall \bar{V} \in L^4(0, T; \mathcal{U}).$$

Faisons alors tendre h vers 0. Comme \mathcal{A} est hémicontinu, il vient

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}(U); \bar{V} \rangle dt \geq 0, \quad \forall \bar{V} \in L^4(0, T; \mathcal{U}).$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $-\bar{V}$, donc

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}(U); \bar{V} \rangle dt = 0, \quad \forall \bar{V} \in L^4(0, T; \mathcal{U}).$$

c'est à dire

$$\chi = \mathcal{A}(U).$$

Démonstration du lemme (4.2.11).

Comme $U_n(T)$ est uniformément bornée dans \mathcal{U}_0 , alors $U_n(T)$ converge vers g faiblement dans \mathcal{U}_0 . Pour montrer que $g = U(T)$, il suffit de multiplier l'équation (4.87) par une fonction test $\psi \in \mathcal{C}([0, T])$ telle que $\psi(0) = 0$.

Après avoir passé à la limite dans les équations (4.45)-(4.58) satisfaites, respectivement, par $U_n, \omega_n, B_n, \theta_n$, et Q_n . On remarque que la limite U, ω, B, θ , satisfait les mêmes équations, on écrit donc $(U, \omega, B, \theta) = F(\bar{U}, \bar{\omega}, \bar{B}, \bar{\theta})$. De plus, comme le système (4.45)-(4.58) admet une unique solution, donc toute la suite $(U_n, \omega_n, B_n, \theta_n)$ qui converge vers cette limite. On conclut que l'opérateur $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ est continu. \square

Lemme 4.2.12. *L'opérateur $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ est compact.*

Démonstration. Pour montrer que l'opérateur \mathcal{F} est compact, il suffit de prendre une suite bornée $X_n = (\bar{U}_n, \bar{\omega}_n, \bar{B}_n, \bar{\theta}_n)$ dans \mathcal{V} et montrer que la suite $\mathcal{F}(X_n) = (U_n, \omega_n, B_n, \theta_n)$ admet une sous-suite convergente.

Comme dans la preuve du lemme précédent, on peut extraire une sous-suite de $\mathcal{F}(X_n)$ qui converge fortement dans \mathcal{V} et qui satisfait le système (4.45)-(4.58). \square

Conclusion. On applique le théorème de point fixe de Leray-Schauder, on déduit que l'opérateur \mathcal{F} admet au moins un point fixe $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, \theta^\nu)$ dans \mathcal{V} . De plus comme $Q^\nu = (\omega^\nu, \theta^\nu)$, on conclut que $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, \theta^\nu, Q^\nu)$ est une solution faible de (\mathcal{P}^ν) satisfait l'estimation (4.38).

4.2.5 Compacité de la suite de solutions

Pour déduire l'existence des solutions du système initial (P), nous devons passer à la limite, quand ν tend vers 0, dans le système (\mathcal{P}^ν) . Pour cet effet, nous avons besoin de la compacité de $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, \theta^\nu, Q^\nu)$ pour pouvoir passer à la limite dans les termes non linéaire apparaissant dans

le système. La compacité des suites U^ν , ω^ν , B^ν et Q^ν , donnée dans le lemme suivant, est une conséquence immédiate du lemme de compacité d'Aubin. Cependant, on ne peut pas l'appliquer à la suite θ^ν , car dans l'estimation de gradient de θ^ν , on obtient

$$\sqrt{\nu} \|\nabla \theta^\nu\| \leq C$$

c'est à dire

$$\|\nabla \theta^\nu\| \leq \frac{C}{\sqrt{\nu}}$$

qui s'explode quand ν tend vers 0, on peut pas donc avoir une estimation uniforme de $\nabla \theta^\nu$. Nous allons utiliser d'autres outils mathématiques pour montrer la convergence forte de θ^ν . Notons que la compacité de θ^ν est nécessaire pour le passage à la limite dans le terme non linéaire $\Sigma(\theta^\nu)$.

4.2.5.1 Compacité de U^ν , ω^ν , B^ν et Q^ν

Lemme 4.2.13. Soit $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, Q^\nu)$ solution de (\mathcal{P}^ν) . Alors il existe des sous-suites, qu'on note toujours $(U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, Q^\nu)$, telles que

$$U^\nu \rightharpoonup U \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)), \quad U^\nu \rightharpoonup U \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathcal{U})$$

$$\omega^\nu \rightharpoonup \omega \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)), \quad \omega^\nu \rightharpoonup \omega^\nu \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(D))$$

$$B^\nu \rightharpoonup B \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)), \quad B^\nu \rightharpoonup B \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_{s,n}^1(D))$$

$$Q^\nu \rightharpoonup Q \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D)), \quad Q^\nu \rightharpoonup Q \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{H}_t^1(D))$$

$$\theta^\nu \rightharpoonup \theta \text{ faiblement } - \star \text{ dans } L^\infty(0, T; L^3(D)), \quad \theta^\nu \rightharpoonup \theta \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(D))$$

De plus on a

$$(4.89) \quad (U^\nu, \omega^\nu, B^\nu, Q^\nu) \rightarrow (U, \omega, B, Q) \text{ fortement dans } L^2(0, T; (\mathbb{L}^p(D))^4), \quad 1 \leq p < 6,$$

et

$$\nu \|\nabla U^\nu\|^2 \nabla U^\nu \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathbb{L}^2(D)).$$

Démonstration. Les convergences faibles et faible- \star de U^ν , ω^ν , B^ν , Q^ν sont déduites de l'estimation d'énergie (4.38). On va montrer seulement la compacité de U^ν , la compacité des autres suites se fait de la même manière. Nous appliquons le lemme d'Aubin pour montrer (4.89), pour cela il faut estimer la dérivée en temps de U^ν indépendamment de ν . Comme

$$\left| \frac{B^\nu}{1 + \nu |B^\nu|} \right| \leq |B^\nu|,$$

donc

$$\begin{aligned} \rho_0 \|\partial_t U^\nu\|_{\mathcal{U}'} &\leq \rho_0 \|U^\nu\|_{\mathbb{L}^4(D)} \|\nabla U^\nu\| + \eta \|\nabla U^\nu\| + \nu \|\nabla U^\nu\|^3 + \zeta \|\operatorname{curl} U^\nu\| + \\ &C_g + C_g \|\theta^\nu\| + 2\zeta \|\operatorname{curl} \omega^\nu\| + \|\operatorname{curl} B^\nu\| \|B^\nu\| \end{aligned}$$

Grâce à l'estimation d'énergie de (4.38), on déduit que $\partial_t U^\nu$ est uniformément bornée dans $L^1(0, T; \mathcal{U}')$, avec

$$\begin{aligned} \rho_0 \|\partial_t U^\nu\|_{L^1(0, T; \mathcal{U}')} &\leq C \left(\|U^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} \|\nabla U^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} + \|\nabla U^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} + \nu \|\nabla U^\nu\|_{L^4(0, T; \mathbb{L}^2(D))}^3 + \right. \\ &\|\operatorname{curl} U^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} + \|\theta^\nu\|_{L^\infty(0, T; L^2(D))} + \|\operatorname{curl} \omega^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} + \\ &\left. \|\operatorname{curl} B^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))} \|B^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{H}_{s,t}^1(D))} + 1 \right). \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ν . Comme U^ν est uniformément bornée dans $L^2(0, T; \mathcal{U})$ et de plus l'injection, en dimension trois, de $H^1(D)$ dans $L^p(D)$, $1 \leq p < 6$, est compacte, alors

$$U^\nu \rightarrow U \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^p(D)), \quad 1 \leq p < 6.$$

□

4.2.5.2 Compacité de θ^ν

On s'intéresse maintenant au système de Maxwell-Cattaneo, pour montrer la compacité de θ^ν . Soit $\nu > 0$ un paramètre fixé, on définit le couple (θ^ν, Q^ν) solution de (\mathcal{P}_{mc}^ν) donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \theta^\nu + U^\nu \cdot \theta^\nu - \nu \Delta \theta^\nu = -\operatorname{div} Q^\nu & \text{dans } D_T, \\ \tau(\partial_t Q^\nu + \omega^\nu \times Q^\nu - \gamma \Delta Q^\nu) = Q^\nu - \kappa \nabla \theta^\nu, & \text{dans } D_T, \\ \theta^\nu(0) = \theta_0, \quad Q^\nu(0) = Q_0 & \text{dans } D \\ Q^\nu \times \mathbf{n} = 0, \quad \tau \gamma \operatorname{div} Q^\nu - \kappa \theta^\nu = 0, \quad \nu \nabla \theta^\nu \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_T. \end{array} \right.$$

Le couple (θ^ν, Q^ν) satisfait l'estimation d'énergie

$$(4.90) \quad \begin{aligned} \kappa \|\theta^\nu(t)\|^2 + \tau \|Q^\nu\|^2 + 2\kappa\nu \int_0^t \|\nabla \theta^\nu\|^2 ds + 2\tau\gamma \int_0^t (\|\operatorname{curl} Q^\nu\|^2 + \|\operatorname{div} Q^\nu\|^2) ds + \\ 2 \int_0^t \|Q\|^2 ds = \kappa \|\theta_0\|^2 + \tau \|Q_0\|^2. \end{aligned}$$

Dans la suite, on suppose que

$$(4.91) \quad \begin{aligned} (U^\nu, \omega^\nu) &\rightarrow (U, \omega) \text{ faiblement-}\star \text{ dans } L^\infty(0, T; (\mathbb{L}^2(D))^2), \\ (U^\nu, \omega^\nu) &\rightarrow (U, \omega) \text{ faiblement dans } L^2(0, T; (\mathcal{U} \times \mathbb{H}_0^1(D))), \\ (U^\nu, \omega^\nu) &\rightarrow (U, \omega) \text{ fortement dans } L^2(0, T; (\mathbb{L}^2(D))^2). \end{aligned}$$

Par ces deux hypothèses et l'estimation (4.90), on a le lemme suivant

Lemme 4.2.14.

$$(4.92) \quad \|\omega^\nu \times Q^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(D))} \leq C \|\omega^\nu\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D))} \|Q^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^6(D))} \leq C,$$

et

$$(4.93) \quad \|U^\nu \theta^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(D))} \leq C \|U^\nu\|_{L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(D))} \|\theta^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^6(D))} \leq C.$$

Pour la preuve de ce lemme il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder et l'injection continue de $H^1(D)$ dans $L^6(D)$.

De ce lemme, on déduit

Lemme 4.2.15. Q^ν admet une sous-suite, qu'on note toujours Q^ν , telle que

$$(4.94) \quad Q^\nu \rightarrow Q \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^p(D)), \text{ avec } 1 \leq p < 6.$$

Démonstration. Pour la preuve de ce lemme, nous appliquons le lemme d'Aubin, il suffit juste d'estimer la dérivée en temps de Q^ν . On a

$$\|\partial_t Q^\nu\|_{(\mathbb{H}_n^1(D))'} \leq \|\omega^\nu \times Q^\nu\|_{\mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(D)} + \gamma(\|\operatorname{div} Q^\nu\| + \|\operatorname{curl} Q^\nu\|) + \frac{1}{\tau}(\|Q^\nu\| + \kappa\|\nabla \theta^\nu\|).$$

On en déduit que $\partial_t Q^\nu$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{3}{2}}(0, T; (\mathbb{H}_n^1)'(D))$. On conclut la preuve en utilisant l'injection compacte de $\mathbb{H}_t^1(D)$ dans $\mathbb{L}^q(D)$, $1 \leq q < 6$, et le lemme d'Aubin. \square

Notre but est de montrer le théorème suivant

Théorème 4.2.3. On suppose que l'hypothèse (H_2) est satisfaite, et que (U^ν, ω^ν) vérifie (4.91). On définit le couple (θ^ν, Q^ν) solution faible de (\mathcal{P}_{mc}^ν) , satisfait l'estimation d'énergie (4.90). Alors, il existe des sous-suites de θ^ν et $\operatorname{div} Q^\nu$, qu'on note toujours θ^ν et $\operatorname{div} Q^\nu$, telles que

$$(4.95) \quad \theta^\nu \rightarrow \theta \text{ fortement dans } L^r(0, T; L^s(D)), \quad r \geq 1, \quad 1 \leq s < 3,$$

$$(4.96) \quad \operatorname{div} Q^\nu \rightarrow \operatorname{div} Q \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^q(D)), \quad 2 \leq q < 3.$$

La preuve de ce théorème est donnée en cinq étapes. Dans la première étape, on introduit la variable auxiliaire $v^\nu = \tau\gamma \operatorname{div} Q^\nu - \kappa\theta^\nu$ qui satisfait une équation parabolique. On utilise la régularité maximale $L^p - L^q$ des équations paraboliques pour montrer la compacité de la suite auxiliaire v^ν . Dans la deuxième étape, on réécrit l'équation de θ^ν en fonction de la nouvelle variable v^ν pour pouvoir montrer que θ^ν est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; L^3(D))$. Ensuite, nous passons à la limite dans l'équation de θ^ν , on remarquera que la limite θ satisfait l'équation de transport. En utilisant les propriétés de la renormalisation, introduite par DiPerna et Lions, voir [11], pour définir l'équation de θ^2 . Dans la dernière étape, on multiplie l'équation de θ^ν par une fonction test particulière, pour définir l'équation de $(\theta^\nu)^2$ qui converge vers une limite θ_2 . On montre, après que la limite θ_2 n'est que le carré de θ . Grâce à ce dernier, on pourra montrer que θ^ν est compacte dans $L^2(D_T)$, et par des inégalités d'interpolation on arrivera à (4.95).

Etape 1 : Problème auxiliaire.

On pose

$$v^\nu = \tau\gamma \operatorname{div} Q^\nu - \kappa\theta^\nu,$$

en prenant la divergence de l'équation du flux de chaleur, on trouve

$$\partial_t v^\nu - \gamma \Delta v^\nu = -\tau\gamma \operatorname{div} (\omega^\nu \times Q^\nu) - \gamma \operatorname{div} Q^\nu - \kappa \partial_t \theta^\nu.$$

En utilisant l'équation de la température, on déduit que v^ν satisfait le problème auxiliaire suivant

$$(4.97) \quad (\mathcal{P}_v) : \begin{cases} \partial_t v^\nu - \gamma \Delta v^\nu = f^\nu + \operatorname{div} F^\nu & \text{dans } D_T, \\ v^\nu(0) = v_0 \equiv \tau\gamma \operatorname{div} Q_0 + \kappa\theta_0 & \text{dans } D, \\ v^\nu = 0 & \text{sur } \Gamma_T, \end{cases}$$

avec

$$f^\nu = (\kappa - \gamma) \operatorname{div} Q^\nu,$$

et

$$F^\nu = \kappa U^\nu \theta^\nu - \tau\gamma \omega^\nu \times Q^\nu - \kappa \nu \nabla \theta^\nu.$$

Par les estimations (4.92) et (4.93), on déduit les majorations suivantes

$$\|f^\nu\|_{L^2(0,T;L^2(D))} \leq C \text{ et } \|F^\nu\|_{L^2(0,T;L^{\frac{3}{2}}(D))} \leq C.$$

où $C > 0$ indépendante de ν . On déduit donc que le second membre de l'équation (4.97) est uniformément borné dans $L^2(0, T; W^{-1, \frac{3}{2}}(D))$. On utilise le résultat de régularité $L^p - L^q$ des solutions des équations paraboliques, voir **Appendice B**, on déduit l'estimation de v^ν suivante

$$(4.98) \quad \|\partial_t v^\nu\|_{L^2(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(D))} + \|v^\nu\|_{L^2(0,T;W^{1,\frac{3}{2}}(D))} \leq C \left(\|v_0\|_{L^{\frac{3}{2}}(D)} + \right.$$

$$\|f^\nu\|_{L^2(0,T;L^{\frac{3}{2}}(D))} + \|F^\nu\|_{L^2(0,T;L^{\frac{3}{2}}(D))}.$$

Par conséquent, on a le lemme suivant

Lemme 4.2.16. On peut extraire une sous-suite de v^ν , qu'on note toujours v^ν , telle que

$$(4.99) \quad \|v^\nu\|_{L^2(0,T;L^3(D))} \leq C.$$

De plus, on a

$$(4.100) \quad v^\nu \rightarrow v \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^q(D)), \text{ pour } 1 \leq q < 3,$$

où $v = \tau\gamma \operatorname{div} Q - \kappa\theta$.

Démonstration. • La majoration (4.99) est une conséquence de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, voir théorème (3.1.1), avec $p^* = 3$.

• Pour (4.100), on applique le lemme de compacité d'Aubin, en prenant

$$B_0 = W^{1,\frac{3}{2}}(D), \quad B = L^q(D), \quad B_1 = W^{-1,\frac{3}{2}}(D),$$

avec $\frac{1}{q} > \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$. □

Etape 2 : Régularité de θ^ν :

Lemme 4.2.17. On suppose que $\theta_0 \in L^3(D)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ν , telle que

$$(4.101) \quad \|\theta^\nu\|_{L^\infty(0,T;L^3(D))} \leq C.$$

Démonstration. On réécrit l'équation de θ^ν en fonction de la nouvelle variable v^ν , en utilisant la relation

$$(4.102) \quad \operatorname{div} Q^\nu = \frac{1}{\tau\gamma}(v^\nu + \kappa\theta^\nu),$$

on obtient l'équation

$$(4.103) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \theta^\nu + U^\nu \cdot \nabla \theta^\nu - \nu \Delta \theta^\nu = -\frac{1}{\tau\gamma} v^\nu - \frac{\kappa}{\tau\gamma} \theta^\nu, \text{ dans } D_T \\ \theta^\nu(0) = \theta_0, \text{ dans } D, \\ \nu \nabla \theta^\nu \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \Gamma_T. \end{array} \right.$$

Soit maintenant $T_m(s)$ une fonction de troncature croissante de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, définie par

$$(4.104) \quad T_m(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0, \\ s^2 & \text{si } 0 \leq s \leq m, \\ 4m^2 & \text{si } s \geq 2m. \end{cases}$$

La fonction $T_m(s)$ satisfait les propriétés suivante

$$0 \leq T_m(s) \leq (s^+)^2, \quad 0 \leq T'_m(s) \leq C_m \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(s) = (s^+)^2, \forall s \in \mathbb{R},$$

s^+ étant la partie positive de s . On pose

$$S_m(s) = \int_{-\infty}^s T_m(u) du, \quad s \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction $S_m(s)$ satisfait

$$(4.105) \quad 0 \leq S_m(s) \leq (s^+)^3 \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(s) = \frac{(s^+)^3}{3}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Comme $\theta^\nu \in L^2(0, T; H^1(D))$, et par l'injection continue de $H^1(D)$ dans $L^6(D)$, on a $\theta^\nu \in L^2(0, T; L^6(D))$. On déduit que $T_m(\theta^\nu) \in L^2(0, T; H^1(D))$. On peut donc multiplier l'équation satisfaite par θ^ν par la fonction $T_m(\theta^\nu)$, on trouve

$$\left\langle \partial_t \theta^\nu; T_m(\theta^\nu) \right\rangle + \int_D (U \cdot \nabla \theta^\nu) T_m(\theta^\nu) dx + \nu \int_D \nabla \theta^\nu \cdot \nabla T_m(\theta^\nu) dx = - \int_D \operatorname{div} Q^\nu T_m(\theta^\nu) dx.$$

On a

$$\int_D (U \cdot \nabla \theta^\nu) T_m(\theta^\nu) dx = - \int_D U \theta^\nu \cdot \nabla T_m(\theta^\nu) dx = - \int_D T'_m(\theta^\nu) (U^\nu \cdot \nabla \theta^\nu) \theta^\nu = 0,$$

et

$$\int_D \nabla \theta^\nu \cdot \nabla T_m(\theta^\nu) dx = \int_D |\nabla \theta^\nu|^2 T_m(\theta^\nu) dx \geq 0.$$

On aura donc

$$(4.106) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D S_m(\theta^\nu) dx &\leq - \int_D \operatorname{div} Q^\nu T_m(\theta^\nu) dx, \\ &\leq \int_D |\operatorname{div} Q^\nu| |T_m(\theta^\nu)| dx, \\ &\leq \int_D |\operatorname{div} Q^\nu| |\theta^\nu|^2 dx. \end{aligned}$$

Par la relation (4.102) et l'inégalité de Hölder, on obtient la majoration

$$\int_D |\operatorname{div} Q^\nu| |\theta^\nu|^2 dx \leq \frac{1}{\tau\gamma} \left(\|v^\nu\|_{L^3(D)} \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^2 + \kappa \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^3 \right).$$

A la fin, on obtient l'inégalité

$$(4.107) \quad \frac{d}{dt} \int_D S_m(\theta^\nu) \leq \frac{1}{\tau\gamma} \left(\|v^\nu\|_{L^3(D)} \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^2 + \kappa \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^3 \right).$$

On intègre maintenant (4.107) en temps, on trouve

$$\int_D S_m(\theta^\nu(t)) \leq \int_D S_m(\theta_0) + \frac{1}{\tau\gamma} \int_0^t \left(\|v^\nu\|_{L^3(D)} \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^2 + \kappa \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^3 \right) ds.$$

On fait tendre m vers l'infini, et pour ν fixé, en utilisant (4.105) on aura

$$\int_D (\theta^\nu(t)^+)^3 \leq \int_D (\theta_0^+)^3 + \frac{3}{\tau\gamma} \int_0^t \left(\|v^\nu\|_{L^3(D)} \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^2 + \kappa \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^3 \right) ds.$$

On peut élaborer la même estimation pour $(\theta^-)^3$, on obtient l'estimation

$$\|\theta^\nu(t)\|_{L^3(D)}^3 \leq \|\theta_0\|_{L^3(D)}^3 + \frac{6}{\tau\gamma} \int_0^t \left(\|v^\nu\|_{L^3(D)} \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^2 + \kappa \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^3 \right) ds.$$

En posant

$$a(t) = \max(1, \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^3), \quad a_0 = (1, \|\theta_0\|_{L^3(D)}^3), \quad b(t) = \|v^\nu\|_{L^3(D)} + \kappa,$$

on obtient l'inégalité

$$a(t) \leq a_0 + \frac{6}{\tau\gamma} \int_0^t b(s)a(s)ds.$$

Par le lemme de Gronwall et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \|\theta^\nu\|_{L^3(D)}^3 &\leq a_0 \exp\left(\frac{6}{\tau\gamma} \int_0^t (\kappa + \|v^\nu\|_{L^3(D)}) ds\right), \\ &\leq a_0 \exp\left(\frac{6}{\tau\gamma} (\kappa T + \sqrt{T} \int_0^t \|v^\nu\|_{L^3(D)} ds)\right), \\ (4.108) \quad &\leq C_T. \end{aligned}$$

□

Etape 3 : L'équation satisfaite par θ . Dans cette partie, nous définissons l'équation de θ par un passage à la limite, quand ν tend vers 0, dans (\mathcal{P}_{mc}^ν) de θ^ν . D'après les estimations (4.90) et (4.101), on déduit les convergences suivantes

$$(4.109) \quad \theta^\nu \rightharpoonup \theta \text{ faiblement dans } L^\infty(0, T; L^3(D)),$$

$$(4.110) \quad \nu \nabla \theta^\nu \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^2(D)),$$

On multiplie la première l'équation de (\mathcal{P}_{mc}^ν) par $f \in \mathcal{D}([0, T[)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\overline{D})$, on trouve

$$-\int_{D_T} \theta^\nu f' \psi \, dxdt - \int_D f(0) \theta_0 \psi \, dx + \nu \int_{D_T} (\nabla \theta^\nu \cdot \nabla \psi) f \, dxdt = \int_{D_T} (U^\nu \theta^\nu \cdot \nabla \psi) f \, dxdt - \int_{D_T} \operatorname{div} Q^\nu \psi f \, dxdt.$$

On fait tendre ν vers 0, en utilisant les convergences (4.109), (4.110), on obtient l'équation

$$-\int_{D_T} \theta f' \psi \, dxdt - \int_D f(0) \theta_0 \psi \, dx = \int_{D_T} (U \theta \cdot \nabla \psi) f \, dxdt - \int_{D_T} \operatorname{div} Q \psi f \, dxdt,$$

On peut prendre par densité $\phi \in \mathcal{D}([0, T[\times \overline{D})$, on aura

$$(4.111) \quad \int_{D_T} \theta (\partial_t \phi + U \cdot \nabla \phi) \, dxdt = - \int_D \theta_0 \phi(0, x) \, dx + \int_{D_T} \operatorname{div} Q \phi \, dxdt,$$

En utilisant la relation (4.102), on déduit que $\theta \in L^\infty(0, T; L^3(D))$ est une solution faible de l'équation de transport, donné par

$$(4.112) \quad \begin{cases} \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta - \frac{\kappa}{\tau \gamma} \theta = \frac{1}{\tau \gamma} v, & \text{dans } D_T, \\ \theta(0) = \theta_0, & \text{dans } D. \end{cases}$$

Etape 4 : L'équation de θ^2 . On remarque que les données de l'équation de transport (4.112) U, v et θ_0 satisfont les conditions

$$\begin{cases} \operatorname{div} U = 0 \text{ dans } D_T, \quad U \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T, \quad U \in L^1(0, T; \mathbb{L}^{\frac{3}{2}}(D)), \\ v \in L^2(0, T; L^3(D)) \subset L^1(0, T; L^3(D)), \quad \theta_0 \in L^3(D). \end{cases}$$

On utilise la notion des solutions renormalisées de l'équation de transport, voir **Appendice A**, on déduit que $b(\theta)$ est aussi solution de l'équation de l'équation (4.112) pour la donnée initiale $b(\theta_0)$.

On prend en particulier $b(s) = s^2$, on aura

$$(4.113) \quad \begin{cases} \partial_t \theta^2 + U \cdot \nabla \theta^2 - \frac{2\kappa}{\tau \gamma} \theta^2 = \frac{2}{\tau \gamma} v \theta, & \text{dans } D_T, \\ \theta^2(0) = \theta_0^2, & \text{dans } D. \end{cases}$$

Cette équation est satisfaite au sens des distributions, c'est à dire pour $\phi \in \mathcal{D}([0, T[\times \overline{D})$ on a

$$(4.114) \quad - \int_{D_T} \theta^2 (\partial_t \phi + U \cdot \nabla \phi) \, dxdt + \frac{2\kappa}{\tau \gamma} \int_{D_T} \theta^2 \phi \, dxdt = \frac{2}{\tau \gamma} \int_{D_T} v \theta \phi \, dxdt - \int_D \theta_0^2 \phi(0) \, dx.$$

Etape 5 : L'équation satisfaite par $(\theta^\nu)^2$. Soit $\phi \in \mathcal{D}([0, T[\times\bar{D}])$, on multiplie la première équation de (\mathcal{P}_{mc}^ν) par la fonction test $\theta^\nu \phi \in L^2(0, T; H^1(D))$, on trouve

$$\left\langle \partial_t \theta^\nu; \theta^\nu \phi \right\rangle - \int_{D_T} (U \theta^\nu) \cdot (\nabla \theta^\nu \phi) \, dx dt + \int_{D_T} \nabla \theta^\nu \cdot \nabla (\theta^\nu \phi) \, dx dt = -\frac{1}{\tau \gamma} \int_{D_T} (v^\nu + \kappa \theta^\nu) \theta^\nu \phi \, dx dt.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \int_D U^\nu \theta^\nu \cdot \nabla (\theta^\nu \phi) \, dx &= \int_D \phi (U^\nu \theta^\nu \cdot \nabla \theta^\nu) \, dx + \int_D (\theta^\nu)^2 U^\nu \cdot \nabla \phi \, dx \\ &= \int_D (\theta^\nu)^2 U^\nu \cdot \nabla \phi \, dx, \end{aligned}$$

et

$$\int_D \nabla \theta^\nu \cdot \nabla (\theta^\nu \phi) \, dx = \int_D |\nabla \theta^\nu|^2 \phi \, dx + \int_D \theta^\nu \nabla \theta^\nu \cdot \nabla \phi \, dx.$$

On pose $(\theta^\nu)^2 = \theta_2^\nu$, on aura donc

$$(4.115) \quad - \int_{D_T} \theta_2^\nu \partial_t \phi \, dx dt - \int_{D_T} \theta_2^\nu U^\nu \cdot \nabla \phi \, dx dt + 2\nu \int_{D_T} \theta^\nu \nabla \theta^\nu \cdot \nabla \phi \, dx dt + 2\nu \int_{D_T} |\nabla \theta^\nu|^2 \phi \, dx dt = \\ \int_D \theta_0^2 \phi(0) \, dx - \frac{2}{\tau \gamma} \int_{D_T} (v^\nu + \kappa \theta^\nu) \theta^\nu \phi \, dx dt$$

Comme θ^ν est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; L^3(D))$, donc θ_2^ν est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(D))$. De plus, comme l'équation de transport admet une unique solution, voir **Appendice A**, donc

$$(4.116) \quad \theta_2^\nu \rightharpoonup \theta_2 \text{ faiblement-}\star \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(D)).$$

Nous allons maintenant passer à la limite dans l'équation (4.115) pour pouvoir montrer que la limite θ_2 n'est que le carré de θ .

Lemme 4.2.18. La limite θ_2 satisfait l'équation

$$(4.117) \quad - \int_{D_T} \theta_2 \partial_t \phi \, dx dt - \int_{D_T} \theta_2 U \cdot \nabla \phi \, dx dt + \int_{D_T} \mu_{x,t} \, dx dt = \int_{D_T} \theta_0^2 \phi(0) \, dx \\ - \frac{2}{\tau \gamma} \int_{D_T} (v \theta + \kappa \theta_2) \phi \, dx dt, \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{D}([0, T[\times\bar{D}]).$$

De plus

$$(4.118) \quad \theta_2 = \theta^2 \text{ p.p. dans } D_T.$$

Démonstration. Le but est de passer à la limite dans l'équation (4.115). Pour cela, nous devons juste justifier le passage à la limite dans les termes non linéaires. On a

- De (4.91) et (4.116), on déduit que la suite $U^\nu \theta_2^\nu$ est bornée dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^{\frac{6}{5}}(D))$, on peut donc extraire une sous-suite, telle que

$$U^\nu \theta_2^\nu \rightharpoonup \chi \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^{\frac{6}{5}}(D)),$$

et grâce à (4.91), on a

$$\chi = U\theta_2.$$

- De (4.90), on a

$$\nu \|\theta^\nu \nabla \theta^\nu\|_{L^2(0, T; \mathbb{L}^{\frac{6}{5}}(D))} \leq C.$$

on en déduit que

$$\nu \theta^\nu \nabla \theta^\nu \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^{\frac{6}{5}}(D)).$$

- Comme la suite $|\nabla \theta^\nu|^2$ est bornée dans $L^1(0, T; \mathbb{L}^1(D))$, il existe donc une mesure de Radon, qu'on note $\mu_{x,t} \geq 0$, telle que

$$\int_{D_T} |\nabla \theta^\nu|^2 \phi \, dx dt \rightarrow \langle \mu_{x,t}, \phi \rangle, \forall \phi \in \mathcal{C}([0, T[\times \overline{D}).$$

On peut prendre en particulier $\phi \in \mathcal{D}([0, T[\times \overline{D})$.

- De (4.100) et (4.99), et par l'inégalité d'interpolation (3.4.1) on déduit que

$$v^\nu \rightarrow v \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^p(D)), \quad 1 \leq p < \frac{9}{5}.$$

De plus, comme θ^ν converge faiblement- \star dans $L^\infty(0, T; L^3(D))$, donc

$$v^\nu \theta^\nu \rightharpoonup v\theta \text{ faiblement-}\star \text{ dans } L^\infty(0, T; L^q(D)), \quad 1 \leq q < \frac{8}{9}.$$

Il reste à montrer (4.118), pour cela on va soustraire l'équation (4.114) de l'équation (4.117) et on obtient pour tout $\phi \in \mathcal{D}([0, T[\times \overline{D})$

$$-\int_{D_T} (\theta_2 - \theta^2)(\partial_t + U \cdot \nabla \phi + \frac{2\kappa}{\tau\gamma} \phi) \, dx dt + \int_{D_T} \phi d\mu = 0.$$

On pose $\xi = \theta_2 - \theta^2$, ξ satisfait l'inégalité suivante

$$-\int_{D_T} \xi(\partial_t + U \cdot \nabla \phi + \frac{2\kappa}{\tau\gamma} \phi) \, dx dt \leq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}([0, T[\times \overline{D}); \quad \phi \geq 0$$

c'est à dire ξ est une solution faible de l'inéquation

$$(4.119) \quad \begin{cases} \partial_t \xi + U \cdot \nabla \xi + \frac{2\kappa}{\tau\gamma} \xi \leq 0, & \text{dans } D_T, \\ \xi(0) = 0, & \text{dans } D. \end{cases}$$

Soit $\psi \in L^1(0, T, L^3(D))$, telle que $\psi \geq 0$ dans D_T , on a

$$\int_{D_T} (\theta^\nu)^2 \psi \, dxdt \geq \int_{D_T} \theta^2 \psi \, dxdt + 2 \int_{D_T} \theta(\theta^\nu - \theta) \psi \, dxdt,$$

par un passage à la limite, quand ν tend vers 0, on obtient

$$\int_{D_T} \theta_2 \psi \, dxdt \geq \int_{D_T} \theta^2 \psi \, dxdt$$

c'est à dire

$$(4.120) \quad \int_{D_T} \xi \psi \, dxdt \geq 0, \quad \forall \psi \in L^1(0, T, L^3(D)), \quad \psi \geq 0.$$

On prend maintenant $\psi = ((\zeta)^-)^{\frac{1}{2}}$, dans (4.120), on trouve

$$- \int_{D_T} ((\zeta)^-)^{\frac{3}{2}} \geq 0,$$

donc la partie négative de ζ est nulle, ce qui donne

$$(4.121) \quad \zeta \geq 0 \text{ p.p. dans } D_T.$$

On multiplie l'équation (4.119) par $\phi(x, t) = w(t) \in \mathcal{D}(]0, T[)$ telle que $w \geq 0$, on trouve

$$- \int_{D_T} \xi w'(t) \, dxdt + \int_{D_T} (U\xi) \cdot \nabla w(t) \, dxdt + \frac{2\kappa}{\gamma\tau} \int_{D_T} \xi w(t) \, dxdt \leq 0,$$

donc ξ satisfait, dans $\mathcal{D}'([0, T[)$, l'inéquation

$$(4.122) \quad \int_D \xi \, dx + \frac{2\kappa}{\tau\gamma} \int_D \xi \, dx \leq 0.$$

On multiplie l'inéquation (4.122) par $\exp(\frac{2\kappa t}{\gamma\tau}) > 0$, on intègre en temps, on aura

$$\exp\left(\frac{2\kappa t}{\gamma\tau}\right) \int_D \zeta \, dx \leq 0,$$

ce qui permet de conclure que

$$(4.123) \quad \zeta = 0 \text{ p.p. dans } D_T.$$

On a donc

$$(\theta^\nu)^2 \rightarrow \theta^2 \text{ p.p. dans } D_T,$$

et

$$(\theta^\nu)^2 \rightarrow \theta^2 \text{ faiblement-} \star \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{\frac{3}{2}}(D)).$$

On écrit

$$\int_{D_T} |\theta^\nu - \theta|^2 dxdt = \int_{D_T} (|\theta^\nu|^2 - 2\theta^\nu\theta + |\theta|^2) dxdt = \int_{D_T} |\theta^\nu|^2 dxdt - 2 \int_D \theta^\nu\theta dx + \int_{D_T} |\theta|^2 dxdt$$

On passe à la limite à l'aide des convergences faibles de θ^ν et $(\theta^\nu)^2$, on trouve

$$\int_{D_T} (|\theta^\nu - \theta|^2) dxdt \rightarrow 0,$$

on déduit que

$$(4.124) \quad \theta^\nu \rightarrow \theta \text{ fortement dans } L^2(D_T).$$

De plus, comme θ^ν est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; L^3(D))$, on obtient le résultat (4.95) en utilisant l'inégalité d'interpolation (3.4.1). Pour la deuxième partie de la preuve, on la déduit à partir de la relation $\xi^\nu = \gamma\tau \operatorname{div} Q^\nu - \kappa\theta^\nu$ comme ξ^ν est compacte dans $L^2(0, T; L^p(D))$ avec $\frac{3}{2} \leq p < 3$, θ^ν compacte dans $L^p(0, T; L^q(D))$ pour $p \geq 1$, $1 \leq q \leq 3$, ce que donne

$$\operatorname{div} Q^\nu \rightarrow \operatorname{div} Q \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^s(D))$$

avec $1 \leq s < 3$. □

4.2.6 Passage à la limite quand $\nu \rightarrow 0$

Pour pouvoir passer à la limite, quand ν tend vers 0, il suffit juste de justifier le passage à la limite dans les termes non linéaires du problème (\mathcal{P}^ν). Pour cela on a le lemme suivant

Lemme 4.2.19. Pour $1 \leq q < 6$ et $1 \leq p < \infty$, on a les convergences suivantes

$$(4.125) \quad \Sigma(\theta^\nu) \rightarrow \Sigma(\theta) \text{ fortement dans } L^p(D_T), \forall p \in [1, \infty[$$

$$(4.126) \quad \frac{B^\nu}{1 + \nu|B^\nu|} \rightarrow B \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^q(D)), \forall q \in [1, 6[.$$

$$(4.127) \quad \Sigma(\theta^\nu) \frac{B^\nu}{1 + \nu|B^\nu|} \rightarrow \Sigma(\theta)B \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D)).$$

Démonstration. • La convergence (4.125) est une conséquence de (4.95), et de la majoration $|\Sigma(\theta^\nu)| \leq \Sigma_2$.

• Pour la convergence (4.126), on écrit

$$\frac{B^\nu}{1 + \nu|B^\nu|} - B = \frac{B^\nu - B}{1 + \nu|B^\nu|} - \frac{\nu B|B^\nu|}{1 + \nu|B^\nu|},$$

On remarque que

$$\left\| \frac{B^\nu - B}{1 + \nu|B^\nu|} \right\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^q(D))} \leq \|B^\nu - B\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}^q(D))}, \quad 1 \leq q < 6,$$

de la convergence forte de B^ν vers B dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^q(D))$, on déduit que

$$\frac{B^\nu - B}{1 + \nu|B^\nu|} \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^q(D)).$$

Pour le deuxième terme, on a

$$\left| \frac{\nu B B^\nu}{1 + \nu|B^\nu|} \right| \leq |B|.$$

De plus, comme la fonction $f(s) = \frac{|s|}{1+\nu|s|}$ est continue sur \mathbb{R}^3 et grâce à la convergence forte de B^ν , on trouve

$$\frac{\nu B|B^\nu|}{1 + \nu|B^\nu|} \rightarrow 0 \text{ p.p. dans } D_T,$$

donc d'après le théorème de Lebesgue, on déduit que

$$\frac{\nu B|B^\nu|}{1 + \nu|B^\nu|} \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{L}^q(D)).$$

• De l'inégalité d'interpolation (3.4.1) pour $\varepsilon = \frac{1}{10}$, on a

$$L^2(0, T; H^1(D)) \cap L^\infty(0, T; L^2(D)) \subset L^{\frac{20}{9}}(0, T; L^5(D)).$$

D'autre part, on a

$$\Sigma(\theta^\nu) \frac{B^\nu}{1 + \nu|B^\nu|} - \Sigma(\theta)B = \left(\Sigma(\theta^\nu) - \Sigma(\theta) \right) \frac{B^\nu}{1 + \nu|B^\nu|} + \Sigma(\theta) \left(\frac{B^\nu}{1 + \nu|B^\nu|} - B \right)$$

Comme $\Sigma(\theta) \in L^\infty(D_T)$, donc grâce à (4.126) le deuxième terme converge fortement vers 0 dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^4(D))$. \square

On passe à la limite, quand ν tend vers 0, dans le système variationnel de (\mathcal{P}^ν) en utilisant les lemmes 4.2.13, 4.2.19 et le théorème 4.2.3, pour déduire l'existence d'une solution $(U, \omega, B, \theta, Q)$ faible et globale en temps du système (\mathcal{P}).

Conclusion générale et Perspectives

Ce travail de recherche m'a permis d'enrichir mes connaissances dans le domaine des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. J'ai appris au cours de ces années de recherche les différentes techniques de résolution, citons par exemple, la méthode de Faedo-Galerkin, le théorème du point fixe de Leray-Schauder, les injections de Sobolev et les lemmes de compacité.

Nous nous sommes intéressés, dans ce travail, à l'étude théorique d'un modèle de la magnétohydrodynamique micropolaire couplé avec la loi de transfert thermique de Maxwell-Cattaneo. Nous avons pu montrer l'existence de solutions faibles et globales en temps de ce système, qui est donné dans (1.1). Nous avons commencé la résolution par l'introduction d'un système régularisé. Nous avons montré, grâce au théorème de point fixe de Leray-Schauder, que le système régularisé admet une solution faible globale en temps. Ensuite, Nous avons établi la compacité de la famille de solutions du système régularisé. A la fin, par un passage à la limite dans le système régularisé on a pu récupérer l'existence des solutions du problème initial.

Il serait intéressant de poursuivre cette étude par les questions suivantes

- Etudier le comportement des solutions faibles en temps long.
- Faire une étude du problème avec une loi de Maxwell-Cattaneo non linéaire.
- Refaire la même étude avec une viscosité variable en plus de la conductivité et la densité.
- Etudier l'existence de solution forte.
- Faire une étude numérique du modèle.
- Etudier la positivité de la température.

Bibliographie

- [1] F. Aggoune, K. Hamdache, D. Hamroun, *Global Weak Solutions to Magnetic Fluid Flows with Nonlinear Maxwell-Cattaneo Heat Transfer Law*, J. Math. Fluid Mech. 17, pp. 103-127 (2015).
- [2] Y. Amirat, K. Hamdache, *Global Weak Solutions to the Equations of Thermal Convection in Micropolar Fluids Subjected to Hall Current*, Nonlinear Analysis 102, pp. 186-207 (2014).
- [3] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault, *Vector Potentials in Three-Dimensional Non-Smooth Domains*, Math. Methods Appl. Sci., 21(9), pp. 823-864, (1998).
- [4] F. Boyer, *Trace Theorems and Spatial Continuity Properties for the Solutions of the Transport Equation*, Differential and Integral Equations 18 N.8, pp. 891-934 (2005).
- [5] F. Boyer, P. Fabrie, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London 183.
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London (2010).
- [7] M.C. Cattaneo, *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée*, Note CRAS, Série I 247, pp. 431-433 (1958).
- [8] T.G. Cowling, *Magnetohydrodynamics, second ed.*, Adam Hilger, London, (1976).
- [9] C.I. Christov, P.M Jordan, *Heat Conduction Paradox Involving Second-Sound Propagation in Moving Media*, Physical Review Letters, PRL 94, pp. 154-301 (2005).
- [10] R. Dautray, J.L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 2*, Masson (1987).
- [11] R.J. Di Perna, P.L. Lions, *Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spaces*, Invent. Math, pp. 511-547 (1989).

-
- [12] B. Ducomet, E. Feireisl, *The Equations of Magnetohydrodynamics : on the Interaction between Matter and Radiation in the Evolution of Gaseous Stars*, Comm. Math. Phys. 266, no 3, pp. 595-629, (2006).
- [13] F. Ekoue, A. Fouache, D. Gigon, G. Plantamp, E. Zajdman, *Maxwell-Cattaneo Regularization of Heat Equation*, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol :7 (2013).
- [14] A.C. Eringen, *Theory of Micropolar Fluids*, J. Math. Mech. 16, No.1, pp. 1-16 (1966).
- [15] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Volume 19*, American Mathematical Society, (1997).
- [16] E. Feireisl, *Dynamics of Viscous Compressible Fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. 26, (2003).
- [17] E. Feireisl, A. Novotný, *Singular Limits in Lheormodunamics of Viscous Fluids*, Advances in Mathematical Fluids Mechanics. Birkhauser, (2009).
- [18] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Combridge university press (2009).
- [19] G.P. Galdi, S. Rionero, *A Note on the Existence and Uniqueness of Solutions of the Micropolar Fluid Equations*, Int. J. Engrg. Sci. 15, pp. 105-108 (1977).
- [20] G.P. Galdi, *An Introduction to the Navier-Stokes Initial-Boundary Value Problem, Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, Vol. 1 Birkhauser- Verlag, Basel, pp. 1-98 (2000).
- [21] J-F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, *Mathematical Methods for the Magnetohydrodynamics of Liquid Metals*, Oxford University Press, (2006).
- [22] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, (1983).
- [23] R.A. Guyer, J.A. Krumhansl, *Solution of the Linearized Phonon Boltzman Equation*, Phys. Rev. 148(2), pp. 766-778 (2003).
- [24] K. Hamdache, D. Hamroun, A. Louardani, *Global Weak Solutions to a Model of Micropolar Fluids with Maxwell-Cattaneo Heat Transfer Law*, Nonlinear Analysis 142, pp. 69-96 (2016).
- [25] H. Inoue, K. Matsuura, M. Ôtani, *Strong solutions of Magneto-Micropolar Fluid Equation*, in : Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, Wilmington NC, USA, pp. 439-448 (2002).
- [26] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonikov, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Mathematical Monograph, vol. 23, AMS Providence, Rhode Island, (1968).

- [27] H. Le Dret *Equations aux dérivées partielles elliptiques*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2013).
- [28] C. Lin, L.E. Payne, *Continuous Dependence on Spatial Geometry for the Generalized Maxwell-Cattaneo System*, Math. Meth. in the Appl. Sciences, 24, pp. 1113-1124 (2001).
- [29] C. Lin, L.E. Payne, *Continuous Dependence of Heat Flux on Spatial Geometry for Generalized Maxwell-Cattaneo System*, Z. angew. Math. Phys. Doi 10.1007/s00033-004-1136-1 (2004).
- [30] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Dunod (1969).
- [31] P.L. Lions, *Mathematical Topics in Fluids Mechanics*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. 10, Vol. 2.
- [32] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and Applications*, Birkhauser, (1999).
- [33] A. Novotný, I. Straškraba, *Theory of Compressible Flow*, Oxford University Press, (2004).
- [34] L.E. Payne, P.W. Schaefer, J.C. Song, *Improved Bounds for Some Nonstandard Problems in Generalized Heat Conduction*, J. Math. anal. Appl. 298, pp. 325-340 (2004).
- [35] L.E. Payne, J.C. Song, *Improved Spatial Decay Bounds in Generalized Heat Conduction*, Z. angew. Math. Phys. 56, pp. 805-820 (2005).
- [36] S. Pranesh, R.V. Kiran, *Study of Rayleigh-Bénard Magneto Convection Micro Polar Fluid With Maxwell-Cattaneo Law*, Applied mathematics, 3, pp. 417-424 (2012)
- [37] M. Rojas-Medar, J. Boldrini, *Magneto-Micropolar Fluid Motion : Existence of Weak Solutions*, Rev. Mat. Complut. 11, pp. 443-460 (1998).
- [38] P. Siddheshwar, S. Pranesh, *Magnetoconvection in a Micropolar Fluid*, Internat. J. Engrg. Sci. 36, pp. 1173-1181 (1998).
- [39] J. Simon, *Compactness Sets in the Space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Math. Pura. Appl. IV, Vol 146, pp. 65-96 (1985).
- [40] J. Simon, *Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids : Existence of Velocity, Density and Pressure*, SIAM J. Math. Anal. 21 N.5, pp. 1093-1117 (1990).
- [41] B. Straughan, F. Franchi, *Bénard Convection and the Cattaneo Law of Heat Conduction*, Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 96A, pp. 175-178 (1984).
- [42] L. Tartar, *Topics in Nonlinear Analysis*, Publications Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud Orsay, (1978).
- [43] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Publishing Company-Amsterdam, New York OXFORD, (1977).

- [44] N. Yamaguchi, *Existence of Global Strong Solution to the Micropolar Fluid System in a Bounded Domain*, Math. Meth. Appl. Sci. 28, pp. 1507-1526 (2005).
- [45] R.Kh Zeytounian, *Theory and Application of Viscous Fluid Flows*, Springer, New York, (2004).

Appendice A

A : L'équation de transport

Référence : voir ([4], [11])

Soit D un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N . L'équation de transport, avec un terme de réaction, qui est une équation linéaire du premier ordre de type hyperbolique, est donnée par

$$(T) : \begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta + c\theta = 0 & \text{dans } (0, T) \times D, \\ \theta(0) = \theta_0 & \text{dans } D. \end{cases}$$

Soient $\theta_0 \in L^p(D)$, $1 \leq p \leq \infty$, et

$$(CD) \begin{cases} u \in L^1(0, T; \mathbb{L}^{p'}(D)), \operatorname{div} u \in L^1(0, T; L^{p'}(D)), \\ u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial D, \\ c \in L^1(0, T; L^{p'}(D)). \end{cases}$$

où p' est le conjugué de Hölder de p .

Définition 5.0.2. On dit qu'une fonction $\theta \in L^\infty(0, T, L^p(D))$ est une solution faible de (T) si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \overline{D})$ telle que $\phi(T) = 0$, on a

$$(5.1) \quad \int_0^T \int_D \theta \left(\partial_t \phi + u \cdot \nabla \phi + (\operatorname{div} u - c)\phi \right) dt dx + \int_D \theta_0 \phi(0, \cdot) dx = 0.$$

Théorème 5.0.4. Il existe au moins une solution faible $\theta \in L^\infty(0, T; L^p(D))$ de l'équation de transport (T).

Définition 5.0.3. (Solutions renormalisées). On dit que $\theta \in L^\infty(0, T; L^p(D))$ est une solution renormalisée de l'équation de transport (T), si θ vérifie l'équation

$$(5.2) \quad \begin{cases} \partial_t b(\theta) + u \cdot \nabla b(\theta) + c\theta b'(\theta) = 0 & \text{dans } (0, T) \times D, \\ b(\theta)(0) = b(\theta_0) & \text{dans } D, \end{cases}$$

$$(5.3) \quad \forall b \in C^1(\mathbb{R}), |b'(x)| \leq C(1 + |x|^r),$$

avec

$$\begin{cases} r = p - 1 & \text{si } p > N, \\ r < p - 1 & \text{si } p = N, \\ r = \frac{p}{N} & \text{si } p < N. \end{cases}$$

La fonction b est dite fonction admissible.

Théorème 5.0.5. Soient $\theta_0 \in L^p(D)$, $u \in L^1(0, T; (W^{1,p'}(D))^N)$, $\operatorname{div} u = 0$ et $u \cdot \mathbf{n} = 0$ sur ∂D , et $c \in L^1(0, T; L^{p'}(D))$. Alors pour toute solution faible $\theta \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ est une solution renormalisée.

Théorème 5.0.6. On suppose que

$$\begin{cases} \theta_0 \in L^p(D), L^1(0, T; (W^{1,p'}(D))^N), c \in L^1(0, T; L^{p'}(D)), \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ telle que } u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial D. \end{cases}$$

Alors l'équation (5.1) admet une unique solution faible $\theta \in L^\infty(0, T; L^p(D))$, de plus $\theta \in C([0, T]; L^q(D))$, $q \leq p$.

Appendice B

B : Régularité maximale $L^p - L^q$ de l'équation parabolique

Référence : voir ([31], [33], [26], [16], [17])

On considère le problème parabolique suivant

$$(6.1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f + \operatorname{div} g & \text{dans } (0, T) \times D, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } D, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial D, \end{cases}$$

où $D \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné de classe \mathcal{C}^2 .

Théorème 6.0.7. *On suppose que*

$$f, g \in L^p(0, T; L^q(D)),$$

$$u_0 \in L^p(D).$$

avec $1 < p, q < \infty$. Alors l'équation (6.1) admet une unique solution $u \in L^p(0, T; W_0^{1,q}(D))$ qui satisfait l'estimation

(6.2)

$$\|\partial_t u\|_{L^p(0,T;W^{-1,q}(D))} + \|u\|_{L^p(0,T;W^{1,q}(D))} \leq C(\|u_0\|_{L^q(D)} + \|f\|_{L^p(0,T;L^q(D))} + \|g\|_{L^p(0,T;L^q(D))}).$$