

*REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE*

*MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE*

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE**

**FACULTE DE GENIE CIVIL**

Département Géotechnique & Hydraulique

**THESE DE MAGISTER**

Option : Construction

**CONTRIBUTION A L'ETUDE  
EXPERIMENTALE DES ONDES DE SURFACE  
DANS UN CANAL HYDRAULIQUE**

Présentée par :

**Taous GUENDOZEN ép DABOUZ**

Devant le jury d'examen composé de :

**Président : Mr F. KAOUA**

**Maître de conférence (U.S.T.H.B.)**

**Examineurs : Mme K. BOUHADEF**

**Professeur (U.S.T.H.B.)**

**Melle H. KAHALERRAS**

**Maître de conférence (U.S.T.H.B.)**

**Mr M.C. KHELLAF**

**Chargé de Recherche ( U.S.T.H.B.)**

**Mr T. ZITOUN**

**Chargé de Recherche ( U.S.T.H.B.)**

**Rapporteur : Mr M. BOUHADEF**

**Professeur (U.S.T.H .B.)**

**Soutenue le : 07/07/2002**

# SOMMAIRE

<i>INTRODUCTION GENERALE</i> .....	1
------------------------------------	---

## ***Chapitre I SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE***

<i>INTRODUCTION</i> .....	3
<i>ETUDES ANTERIEURES</i> .....	3

## ***Chapitre II EQUATIONS GENERALES***

<i>INTRODUCTION</i> .....	7
<i>A / ONDES DE GRAVITE</i> .....	7
<i>II-1/ OBSTACLE QUELCONQUE</i> .....	7
II-1-1 Formulation du problème .....	7
II-1-2/ Détermination de la fonction de courant .....	8
II-1-3/ Détermination de l'équation de la surface libre.....	11
<i>II-2/ OBSTACLE TRIANGULAIRE</i> .....	11
II-2-1/ L'expression de la surface libre .....	12
II-2-2/ Recherche des pôles .....	15
II-2-3 / Calcul des résidus.....	16
II-2-4 / Application du théorème des résidus.....	17
<i>II-3/ SOLUTION GENERALE DE LA SURFACE LIBRE</i> .....	20
II-3-1 / Cas d'un triangle quelconque .....	20
II-3-2/ Cas d'un triangle isocèle .....	21
<i>II-4 / PROFIL DE VITESSE</i> .....	23
<i>B - ONDES GRAVITO-CAPILLAIRES</i> .....	25
<i>II-5/ EQUATIONS DU MOUVEMENT</i> .....	25
<i>II-6 / HYPOTHÈSES</i> .....	27
II-6-1 / Ecoulement de base .....	27
II-6-2 / Perturbation.....	27
<i>II-7 / EQUATIONS LINEARISEES</i> .....	27
II-7-1 / Equations du mouvement et de continuité .....	28
II-7-2 / Conditions aux limites.....	28
a/ Condition sur le fond .....	28
b/ Condition cinématique sur la surface libre .....	28

c / Condition de pression sur la surface libre.....	29
<i>II-8 / VARIABLES ADIMENSIONNELLES</i> .....	29
<i>II-9 / ONDES SINUSOIDALES</i> .....	30
<i>II-10/ RESOLUTION ANALYTIQUE DES EQUATIONS</i> .....	32
II-10-1 / Cas d'un profil constant .....	33
II-10-2 / Cas d'un profil linéaire de vitesse .....	35
II-10-3 / Cas d'un profil de vitesse parabolique.....	36
<i>II-11/ ANALYSE DES RESULTATS</i> .....	40
<i>CONCLUSION</i> .....	44

### **Chapitre III CONCEPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL**

<i>INTRODUCTION</i> .....	45
<i>II-1/ DESCRIPTION DU CANAL HYDRAULIQUE</i> .....	45
<i>II-2/ TRANSFORMATION DU CANAL HYDRAULIQUE</i> .....	46
<i>II-3/ DESCRIPTION DU SYSTEME D'ENTRAINEMENT</i> .....	47
<i>II-4/ MISE EN PLACE DU MOTEUR</i> .....	49
<i>II-5/ MISE EN PLACE DU VARIATEUR DE FREQUENCE</i> .....	51
<i>II-6/ REALISATION DE L'OBSTACLE</i> .....	52
II-6-1/ Obstacle du fond.....	52
II-6-2/ Limnimètre à pointe .....	53
<i>II-7/ APPAREILS ET PRINCIPES DE MESURE</i> .....	53
II-7-1/ Métrologie des vitesses .....	53
II-7-2/ Mesure des longueurs d'ondes .....	57
♦ cas des ondes de gravité.....	57
♦ cas des ondes de capillarité.....	58
<i>CONCLUSION</i> .....	58

### **Chapitre IV RESULTATS EXPERIMENTAUX**

<i>INTRODUCTION</i> .....	59
<i>IV-1 / RESULTATS EXPERIMENTAUX</i> .....	59
<i>IV-1-1/ PROFILS DE VITESSES DANS UN CANAL</i> .....	59
<i>IV-1-2/ SURFACE LIBRE</i> .....	74
IV-1-2-a / Ondes de gravité .....	74
IV-1-2-b / Ondes capillaires .....	79
<i>IV-2/ ETUDE COMPARATIVE</i> .....	83
IV-2-1/ ONDES DE GRAVITE .....	83

IV- 2-1-1/ Profile de vitesse.....	83
IV-2-1-2 / Longueur d'onde .....	83
IV-2-1-3/ Profil de la surface libre .....	84
IV-2-2/ Ondes capillaires .....	85
<i>CONCLUSION</i> .....	86

<i>CONCLUSION GENERALE</i> .....	89
----------------------------------	----

## **ANNEXES**

<i>ANNEXE I</i> .....	91
<i>ANNEXE II</i> .....	95
<i>ANNEXE III</i> .....	101
<i>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</i>	

## **RESUME**

L'étude a trait à la propagation des ondes de surface de gravité et de capillarité dans un canal hydraulique. Un dispositif expérimental, entièrement conçu et réalisé au laboratoire, nous a permis de faire plusieurs types de mesures. On peut citer celles de vitesse (anémomètre laser embarqué), de profils de surface libre, pour les longueurs d'ondes, dans le cas d'un fluide initialement au repos. Le déplacement, à vitesse constante réglable, d'un obstacle noyé au fond du canal. Permet de générer les ondes de gravité avec, dans ce cas un profil constant de vitesse dans le mouvement relatif. Une tige affleurant la surface libre permet de créer les rides capillaires.

Par application de la méthode de Lamb, pour les obstacles isolés, de petites hauteurs, en supposant un écoulement permanent irrotationnel d'un fluide incompressible, nous avons déterminé théoriquement les profils de surface libre. Par application des équations de Navier – Stokes, pour un fluide visqueux incompressible, nous avons déterminé la vitesse de propagation des ondes grvito– capillaires pour certains profils de vitesses. Les résultats expérimentaux obtenus ont corroboré les prévisions théoriques.

**Mots clés : Ondes de gravité, ondes de capillarité, obstacles, dispositif expérimental.**

## **INTRODUCTION GENERALE**

Le but de toute science est la prévision chiffrée, aussi précise que possible, des phénomènes susceptibles de se produire lorsque l'on place un système physique particulier dans des conditions données.

Pour y parvenir, on s'efforce d'élaborer des théories de plus en plus précises afin de décrire le comportement du système avec le maximum d'exactitude.

A chaque stade de cette recherche, la confrontation entre l'étude théorique et le résultat de l'observation physique est nécessaire, pour contrôler la validité des hypothèses sur lesquelles repose la théorie. Elle s'effectue généralement sur des cas imaginés de toute pièce à cet effet, appelés expériences, pour lesquelles il est facile de mesurer les principaux paramètres caractéristiques de l'état du système.

C'est le cas de l'étude des ondes de surface qui a suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Certains ont modélisé les différentes caractéristiques du mouvement ondulatoire, à savoir la vitesse de propagation, la longueur d'onde, l'amplitude, etc., sous forme d'équations mathématiques. D'autres ont reproduit les ondes de surface en laboratoire, en utilisant différents moyens.

Néanmoins, il reste difficile de reproduire le mouvement des ondes tel qu'il se produit dans la nature. Chaque chercheur porte donc son amélioration de la reproduction du phénomène physique.

C'est pour cela que notre étude s'est basée, dans un premier temps, sur la conception d'un dispositif expérimental permettant l'étude des ondes gravito-capillaires dans un canal hydraulique. Celui-ci a été tout d'abord aménagé de manière à ce qu'il puisse être rempli d'une quantité d'eau immobile à une hauteur donnée. Un système permet d'y déplacer, à une vitesse constante réglable, un obstacle noyé au fond du canal ou une tige affleurant la surface libre. On créera ainsi des ondes gravitaires et capillaires.

La connaissance des différentes caractéristiques de ces ondes est utile dans la vie pratique. Pour montrer cette utilité, regardons un corps en mouvement par rapport à un fluide, ou le contraire. Ce corps est soumis à des contraintes qui s'exercent sur chaque élément de surface en contact avec le milieu extérieur. En fonction du problème qu'on rencontre, on cherche soit à minimiser ou amplifier ces contraintes.

De nombreux exemples peuvent être donnée en distinguant deux classes. Dans une première classe de problèmes, le corps est fixe et le fluide en mouvement par exemple des bâtiments, ouvrages d'art dans ce cas, le fluide étant l'air, on cherche à minimiser l'effet du vent. Pour un écoulement de l'eau dans un bassin de dissipation d'un évacuateur de crue, là on cherche à amplifier le mouvement jusqu' a obtention d'un ressaut pour dissiper l'énergie de l'eau.

Dans une seconde classe de problèmes le corps est en mouvement dans un fluide au repos, c'est le cas de tous véhicules se déplaçant au sol (voitures, trains, etc.), dans l'air (avions, missiles, etc.), dans l'eau ( sous marin ) ou à la surface de l'eau (navire). Dans ces cas on cherche une forme du corps qui nous permet de minimiser la résistance à l'avancement de ces véhicules. Pour mieux éclaircir ce problème prenant le cas d'un navire, la connaissance de l'amplitude des vagues créées par le moteur qui fait déplacer le navire, ou l'énergie pour les créer, donnera une idée de la puissance du moteur. En fait, l'énergie nécessaire à l'avancement du navire sert, d'une part à entretenir un champ de vagues d'accompagnement du navire et d'autre part, vaincre la résistance visqueuse. Dans les études classiques, on admet le plus souvent l'hypothèse, dite de Reech-Froude, selon laquelle les efforts de traînée de vague sont découplés des effets de frottements. Ainsi si on fait abstraction des frottements visqueux, car inévitable, le problème revient à se placer en fluide parfait et savoir comment trouver la carène optimale donnant le minimum de vagues c'est-à-dire trouver une forme de navire donnant une résistance minimale à l'avancement de celui-ci.

Dans la première partie de ce mémoire, nous parlerons brièvement de certains travaux réalisés traitant les problème des ondes gravito-capillaires.

La deuxième partie sera consacrée à une étude théorique, à partir des équations générales de la mécanique des fluides. On établit les équations de la propagation des ondes superficielles dans un canal hydraulique.

On expliquera, dans la troisième partie, les différentes étapes de la réalisation du dispositif ainsi que son fonctionnement.

La quatrième partie sera consacrée à une étude expérimentale menée sur le nouveau dispositif.

Des mesures de profils de vitesse sont effectuées en plusieurs sections transversales du canal, à l'aide d'un anémomètre laser qui ne perturbe pas l'écoulement. Des mesures des longueurs d'ondes de gravité et des rides capillaires sont réalisées.

Notre étude s'achève par une comparaison des résultats expérimentaux avec ceux issus de la théorie, suivie d'une conclusion générale.

# CHAPITRE I

## **SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE**

## **INTRODUCTION**

Ce chapitre résume les principales études consacrées au phénomène d'ondes de surface dans un fluide homogène. Parmi ces recherches, certaines traitent un aspect théorique du problème ; leur but est d'adopter un modèle analytique permettant la meilleure estimation des caractéristiques de l'écoulement. D'autres se basent sur des modèles numériques.

## **ETUDES ANTERIEURES**

Les premiers travaux théoriques remontent au XVIII<sup>e</sup> siècle lorsque Bernoulli (1738) et Euler (1755) établissent les principaux théorèmes relatifs aux écoulements. Dans la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, Navier (1823) et Stokes (1845) introduisent les contraintes intérieures du fluide et obtiennent des lois fondamentales de la mécanique des fluides.

Les ondes de relief sont générées par la présence d'un relief (une montagne par exemple), ce qui perturbe l'écoulement de l'air. Certaines particules d'air sont donc écartées de leur position d'équilibre ; ceci crée une force, appelée force de rappel, qui a tendance à ramener les particules à leur position d'équilibre initiale, et c'est alors l'installation d'un mouvement ondulatoire. Ce mouvement ondulatoire peut être observé aussi dans le cas d'une stratification de la densité de l'air.

Ce problème fut étudié par Lyra [23]. On peut citer également les travaux de Queney [25],[26] et Long [21]. Celui-ci étudia, en laboratoire, une analogie hydraulique en réalisant la variation de la masse volumique, par escalier, en superposant plusieurs fluides non miscibles ; il utilise ensuite de l'eau salée pour introduire une variation continue de la densité.

Les premières études des ondes de surface, qui sont un cas particulier des ondes de relief (variation de densité eau- air), produites par un obstacle placé au fond d'un canal, ont été menées par Rayleigh [27] et Kelvin [17]. Plusieurs autres chercheurs se sont intéressés au problème d'ondes de surface. Citons les travaux de Wehausen [30] relatifs aux problèmes de résistance de vague et ceux de Longuet-Higgins [22] relatifs aux problèmes d'instabilité.

En utilisant la «méthode du col» ou «Steepest descent», Bouhadeh [6] a traité quelques exemples particuliers d'obstacles. Dans un premier temps, il a considéré le cas d'une bosse isolée de longueur caractéristique adimensionnelle  $l$  petite. Cette méthode aboutit à l'équation de la surface libre qui est une fonction linéaire de l'aire  $Q$  de l'obstacle et non de la forme de celui-ci

$$Y_0(x) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{chk - \frac{g}{ku_0^2} shkH} dk$$

Ce résultat est également trouvé par Zitoun [32] pour un obstacle quelconque.

Par la suite, il a étudié l'obstacle en forme de cloche d'équation :

$$f(x) = \frac{b^3}{b^2 + x^2}$$

puis un obstacle symétrique de longueur  $l$  et d'équation :

$$f(x) = \frac{b}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$$

Il constate, pour un nombre de Froude  $Fr < 1$ , que pour certains profils sinusoïdaux symétriques, les amplitudes sont nulles ; c'est d'ailleurs le résultat auquel ont abouti Wehausen et Laitone [30].

En traçant la courbe de la surface libre (particulièrement la cloche), il a mis en évidence la dépression créée au-dessus de l'obstacle, suivie d'un système d'ondes.

Il nota aussi que le profil de la composante horizontale de la vitesse est perturbé aux alentours de l'obstacle, avec un ralentissement du fluide au voisinage de la surface libre. En aval, le fluide est accéléré au niveau des creux des ondes et ralenti aux crêtes.

Boutros et al [9] ont été les premiers à analyser un obstacle triangulaire en utilisant la méthode de Lamb [20]. Le résultat de la surface libre qu'ils obtiennent présente une élévation au-dessus de l'obstacle, ce qui contredit le phénomène physique. Zitoun [32] a étudié le même obstacle et il a réussi à corriger l'erreur commise ; il montre qu'il y a une dépression locale au sommet de l'obstacle, suivie d'un train d'ondes stationnaires en aval. En amont de l'obstacle, la surface libre reste horizontale.

Cette perturbation dépend du nombre de Froude et des caractéristiques géométriques de l'obstacle, ce qui a été confirmé par Laleg et Aknouche [19].

Afin de modéliser analytiquement la présence d'ondes à la surface libre, uniquement en aval de l'obstacle (dissymétrie amont aval), Zitoun [32] a traité le même obstacle triangulaire par trois méthodes différentes :

◆ **Méthode des résidus**

Le calcul des intégrales figurant dans l'expression de la surface libre  $Y_0(x)$  peut se faire par application du théorème des résidus où on doit déterminer d'abord les pôles annulant le dénominateur de l'équation, puis calculer les résidus correspondant aux pôles.

L'équation de la surface libre ainsi obtenue étant symétrique de part et d'autre de l'obstacle, il est nécessaire de rajouter une solution particulière. C'est ainsi qu'on ramènera la solution générale mathématique à mieux représenter le phénomène physique dissymétrique.

◆ **Méthode de la valeur principale « complémentée »**

Elle adopte le même principe que la méthode des résidus ; son avantage réside dans l'évaluation d'une intégrale particulière réalisant la dissymétrie et faisant la liaison entre l'expression mathématique et le phénomène physique.

◆ **Méthode du potentiel des vitesses**

Elle consiste à introduire une viscosité artificielle dans les calculs analytiques assurant ainsi la dissymétrie amont- aval. Mais la résolution de l'équation différentielle est difficile.

Parmi ces trois méthodes, qui aboutissent toutes au même résultat, la méthode de la valeur principale « complémentée » aboutit à la dissymétrie amont-aval directement.

Le principe de la viscosité artificielle est utilisé par Euvrard [15] et d'autres chercheurs, pour stabiliser leur calculs numériques.

Avec la méthode des résidus, Zitoun [32] a obtenu, par passage à la limite, la solution de la surface libre de certains obstacles particuliers tels que le triangle rectangle et la marche semi-infinie. Cette dernière est calculée également par Bloor et King [18].

En étudiant l'effet du couplage des obstacles, Bouzelha [10] a montré que la solution de la surface libre pour deux obstacles couplés, distants de  $d$ , est la superposition des ondes induites par chacun des obstacles pris séparément.

La variation de l'amplitude de ces ondes obéit à une loi périodique. Elle est maximale pour des distances  $d$  multiples pairs de la longueur d'onde et nulle pour des distances  $d$  multiples impairs de la demi-longueur d'onde.

Pour les études concernant l'influence des ondes capillaires, nous citerons les travaux de Amaouche[1], Chen et saffman [13], Samsari [29] et plus récemment Younsi [31]. Celui-ci détermine, à partir des équations générales de la mécanique des fluides, les équations de la propagation des ondes superficielles de faible amplitude.

Pour résoudre l'équation différentielle de la pression, Younsi [31] a utilisé deux méthodes.

- **Méthode de perturbation**

Pour de petits nombres de Froude, il détermine l'influence du gradient vertical de vitesse sur la célérité et la longueur d'onde. Il propose des solutions analytiques approchées pour des profils de vitesses pour lesquels le calcul d'intégrale n'est pas facile. Il donne l'expression de la vitesse de phase adimensionnelle, pour certains profils de vitesse.

- **Méthode numérique**

Pour des obstacles de forme quelconque et des nombres de Froude non nécessairement petits, Younsi [31] utilise une méthode d'éléments finis unidimensionnels. Il résout le problème de valeurs propres associé à la détermination de la célérité des ondes afin de déterminer les diagrammes de dispersion.

# CHAPITRE II

## **EQUATIONS GENERALES**

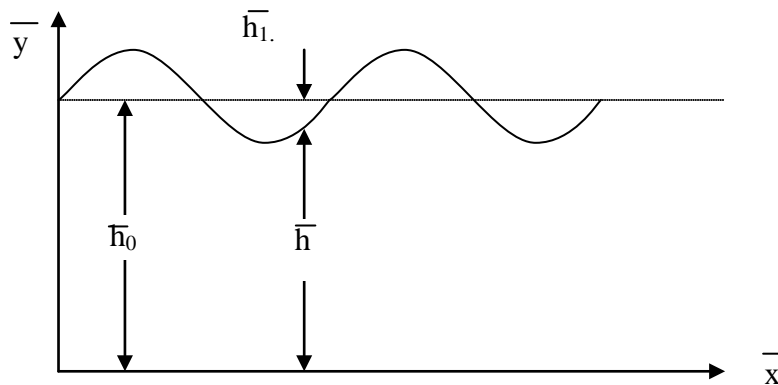
**B - ONDES GRAVITO-CAPILLAIRES**

Tout phénomène d’onde est caractérisé par sa longueur d’onde, son amplitude, sa phase, sa célérité et sa vitesse de propagation.

Dans cette partie, nous déterminerons la vitesse de propagation des ondes gravito-capillaires en fonction de la variation de la longueur d’onde.

**II-5/ EQUATIONS DU MOUVEMENT**

Soit un écoulement bidimensionnel d’un fluide visqueux incompressible et permanent en présence d’ un obstacle.



**Figure II-5 Géométrie du problème**

$\bar{u}$  : composante horizontale de la vitesse

$\bar{v}$  : composante verticale de la vitesse

Les équations de Navier –Stokes, qui régissent l’écoulement bidimensionnel, s’écrivent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \nu \Delta \bar{u} + g_x \tag{II-42}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \nu \Delta \bar{v} + g_y \tag{II-43}$$

avec

$\rho$  : la masse volumique

$\nu$  : la viscosité cinématique du fluide

$g_x$  et  $g_y$  : composantes de l'accélération de la pesanteur

$\Delta$  : Laplacien à deux dimensions 
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{II-44}$$

Les conditions aux limites sont celle d'adhérence :

$$\text{à } \bar{y}=0 \quad \begin{cases} \bar{u}=0 \\ \bar{v}=0 \end{cases}$$

et cinématique :

$$\text{à } \bar{y}=\bar{h} \quad \bar{v}(\bar{h}) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \bar{u}(\bar{h}) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \tag{II-45}$$

La condition aux limites pour la pression s'écrit :

$$\bar{P}(\bar{h})_{\text{relative}} = \frac{\sigma}{R}$$

où  $\bar{P}(\bar{h})_{\text{relative}} = \bar{P}_{\text{fluide}} - \bar{P}_{\text{atm}}$

$\sigma$  est le coefficient de tension superficielle et R le rayon de courbure.

Donc 
$$\bar{P}_r = \frac{-\sigma \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{II-46}$$

## II-6 / HYPOTHÈSES

### II-6-1 / Ecoulement de base

L'écoulement permanent de base, de vitesse  $U_0(\bar{y})$ , correspond à une surface libre plane et à une hauteur de fluide constante  $h_0$ .

Les équations de Navier-Stokes sont réduites à :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \bar{y}} - g_y \quad (\text{II-47})$$

où  $P_0$  est la pression hydrostatique de l'écoulement de base.

La résolution de la 2<sup>ème</sup> équation donne :

$$P_0 = \rho g (h_0 - \bar{y})$$

### II-6-2 / Perturbation

La surface libre de l'écoulement de base est à l'origine, plane. On modifie ensuite sa forme par une perturbation instationnaire et bidimensionnelle. L'amplitude de l'onde résultante est supposée suffisamment faible pour permettre la linéarisation des équations du mouvement.

## II-7 / EQUATIONS LINEARISEES

On admet que l'écoulement se décompose en un écoulement de base et un écoulement dû à une perturbation ; nous avons alors :

$$\bar{u} = U_0(\bar{y}) + \bar{u}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$$

$$\bar{v} = \bar{v}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$$

$$\bar{P} = P_0(\bar{y}) + \bar{P}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$$

$$\bar{h} = h_0 + \bar{h}_1(\bar{x}, \bar{t})$$

où  $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{P}_1, \bar{h}_1$  sont des perturbations de l'écoulement de base, supposées petites.

**II-7-1 / Equations du mouvement et de continuité**

En introduisant le développement précédent dans les équations du mouvement et de continuité, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_1 \frac{dU_0}{d\bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{x}} \quad (\text{II-48})$$

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{II-49})$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{II-50})$$

**II-6-2 / Conditions aux limites**

**a/ Condition sur le fond**

$$\begin{aligned} \bar{y} = 0 \quad \bar{v}_1 = 0 \\ \bar{y} = 0 \quad \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{y}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-51})$$

**b/ Condition cinématique sur la surface libre**

Les développements limités de  $\bar{v}_1(\bar{h})$ ,  $\bar{u}_1(\bar{h})$  et  $U_0(\bar{h})$  donnent:

$$\bar{u}_1(\bar{h}) = \bar{u}_1(h_0 + \bar{h}_1) = \bar{u}_1(h_0) + \bar{h}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{y}}(h_0) + o(h_0^2)$$

$$\bar{v}_1(\bar{h}) = \bar{v}_1(h_0 + \bar{h}_1) = \bar{v}_1(h_0) + \bar{h}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}}(h_0) + o(h_0^2)$$

$$\bar{P}_1(\bar{h}) = \bar{P}_1(h_0 + \bar{h}_1) = \bar{P}_1(h_0) + \bar{h}_1 \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{y}}(h_0) + o(h_0^2)$$

$$U_0(\bar{h}) = U_0(h_0 + \bar{h}_1) = U_0(h_0) + \bar{h}_1 \frac{\partial U_0}{\partial \bar{y}}(h_0) + o(h_0^2)$$

Si on néglige les termes quadratiques du second membre, on a :

$$\bar{v}_1(\bar{h}) \approx \bar{v}_1(h_0) \quad (\text{II-52})$$

et l'équation (II-45) devient :

$$\bar{v}_1(h_0) = \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{x}} \quad (\text{II-53})$$

**c / Condition de pression sur la surface libre**

Nous avons :

$$\bar{P}_r = \frac{-\sigma \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2}}{[1 + (\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}})^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{II-46})$$

comme  $(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{x}})^2 \ll 1$ , la pression se réduit à :

$$P(\bar{h}) \approx -\sigma \frac{\partial^2 \bar{h}_1}{\partial \bar{x}^2} \approx -\rho g \bar{h}_1 + \bar{P}_1(h_0) \Rightarrow$$

$$\bar{P}_1(h_0) \approx \rho g \bar{h}_1 - \sigma \frac{\partial^2 \bar{h}_1}{\partial \bar{x}^2} \quad (\text{II-54})$$

**II-8 / VARIABLES ADIMENSIONNELLES**

Afin de rendre les équations adimensionnelles, on définit les grandeurs caractéristiques suivantes :

$\lambda_0 = c_0 T_0$  : longueur d'onde caractéristique.

$C_0 = \sqrt{gh_0}$  : Vitesse de propagation d'ondes de gravité en absence d'écoulement

$T_0$  : période caractéristique des ondes

$U_d$  : vitesse de débit de l'écoulement

$q$  : vitesse de débit de perturbation

Les variables adimensionnelles s'écrivent :

$$x = \frac{\bar{x}}{\lambda_0}; \quad y = \frac{\bar{y}}{h_0}; \quad t = \frac{\bar{t}}{T_0}; \quad u = \frac{\bar{u}_1}{q}; \quad v = \frac{\bar{v}_1 \lambda_0}{qh_0};$$

$$h = \frac{\bar{h}_1}{h_0}; \quad p = \frac{\bar{P}_1}{\rho C_0 q}; \quad U = \frac{U_0}{U_d}; \quad \beta = \frac{C}{C_0}$$

En introduisant ces expressions dans les équations du mouvement et les conditions aux limites, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Fr[U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y}] = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{II-55-1})$$

$$\frac{h_0^2}{\lambda_0^2} [\frac{\partial v}{\partial t} + FrU \frac{\partial v}{\partial x}] = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{II-55-2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-55-3})$$

Les conditions aux limites associées s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 & y=0 \quad v=0 \\
 & y=1 \quad \left\{ \begin{aligned}
 & v = \frac{C_0}{q} \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(1) + FrU(1) \frac{\partial h}{\partial x}(1) \right] \\
 & P = \frac{C_0}{q} \left[ h(1) - B \frac{h_0^2}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1) \right]
 \end{aligned} \right. \quad (II-56)
 \end{aligned}$$

où  $Fr = \frac{U_d}{C_0}$  est le nombre de Froude et

$$B = \frac{\sigma}{\rho g h_0^2} \quad \text{le nombre de Bond}$$

Les équations du mouvement, combinées entre elles, se réduisent à l'équation adimensionnelle aux dérivées partielles de la pression.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{h_0^2}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2 \frac{h_0^2}{\lambda_0^2} Fr \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (II-57)$$

La solution de cette équation, dans le cas général est difficile. Cependant, il existe des solutions dans certaines conditions particulières, comme par exemple le cas des ondes sinusoidales.

**II-9 / ONDES SINUSOIDALES**

On pose

$$\begin{aligned}
 P &= R_e \quad \{ P(y).exp2i\pi(x- \beta t) \} \\
 U &= R_e \quad \{ U(y).exp2i\pi(x- \beta t) \} \\
 V &= R_e \quad \{ V(y).exp2i\pi(x- \beta t) \} \\
 h &= R_e \quad \{ a.exp2i\pi(x- \beta t) \}
 \end{aligned} \quad (II-58)$$

où

a est l' amplitude de l' onde ,

P l' amplitude complexe de la pression,

U et V les amplitudes complexes des composantes de la vitesse et

β la célérité adimensionnelle qu' on supposera réelle.

En reportant ces expressions dans le système (II-55), on obtient l'équation de la pression et les conditions aux limites correspondantes.

$$- 2i\pi\beta U + Fr \left[ 2i\pi UU + V \frac{dU}{dy} \right] = -2i\pi P \quad (\text{II-59-1})$$

$$\frac{h}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} \left[ - 2i\pi \beta V + 2i\pi FrU V \right] = - \frac{dP}{dy} \quad (\text{II-59-2})$$

$$2i\pi U + \frac{dV}{dy} = 0 \quad (\text{II-59-3})$$

En les introduisant dans l'équation (II-57), nous obtenons :

$$\frac{d^2P}{dy^2} - \frac{4\pi^2 h_0^2}{\lambda_0^2} P = -4i\pi \frac{h_0^2}{\lambda_0^2} Fr V \frac{dU}{dy} \quad (\text{II-60})$$

A partir de (II-59-2), on peut tirer :

$$V = - \frac{dP}{dy} \frac{\lambda_0^2}{2i\pi h_0^2 [-\beta + FrU]}$$

que nous remplaçons dans l'équation (II-60) pour obtenir :

$$\frac{d^2P}{dy^2} - \varepsilon^2 P = \frac{2Fr}{[FrU - \beta]} \frac{dP}{dy} \frac{dU}{dy} \quad (\text{II-61-1})$$

$$\text{avec } \varepsilon = \frac{2\pi h_0}{\lambda}$$

L'équation différentielle de pression (II-61-1) est analogue à celle obtenue en acoustique par PRIDMORE – BROWN et généralisée par PEUBE et JALLET d'après [31].

A partir de l'équation (II-59-2), pour  $y = 0$ , la condition sur le fond s'écrit :

$$\frac{dP}{dy}(0) = 0 \quad (\text{II-61-2})$$

Pour obtenir la condition à la surface libre  $y=1$ , on introduit (II-58) dans l'équation (II-56) et en dérivant nous aurons :

$$V(1) = 2 i\pi a \frac{C_0}{q} [FrU(1) - \beta]$$

$$P(1) = a \frac{C_0}{q} \left[ 1 + 4\pi^2 B \frac{h_0^2}{\lambda^2} \right]$$

En remplaçant  $V(1)$  et  $P(1)$  par leurs valeurs dans l'équation (II-59-2), nous obtenons :

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2 [\beta - FrU(1)]^2}{1 + B\varepsilon^2} \cdot P(1) \tag{II-61-3}$$

avec  $\varepsilon = \frac{2\pi\pi_0}{\lambda}$  qui est le nombre d'onde adimensionnel

### II-10/ RESOLUTION ANALYTIQUE DES EQUATIONS

Nous avons donc à résoudre le système suivant d'équations :

$$\frac{d^2P}{dy^2} - \varepsilon^2 P = \frac{2Fr}{FrU - \beta} \frac{dP}{dy} \frac{dU}{dy} \tag{II-61-1}$$

$$\frac{dP}{dy}(0) = 0 \tag{II-61-2}$$

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2 [\beta - FrU(1)]^2}{1 + B\varepsilon^2} P(1) \tag{II-61-3}$$

$$\text{avec } P(1) = \frac{1 + B\varepsilon^2}{\beta - FrU(1)}$$

L'équation différentielle (II-61-1) n'a pas généralement de solution analytique, sauf pour des profils particuliers de vitesse.

**II-10-1 / Cas d'un profil constant**

Pour un écoulement à vitesse uniforme constante  $U=1$ , le système d'équations devient :

$$\frac{d^2P}{dy^2} - \varepsilon^2 P = 0 \quad (\text{II-62-1})$$

$$\frac{dP}{dy}(0) = 0 \quad (\text{II-62-2})$$

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2(\beta - Fr)^2}{1 + B\varepsilon^2} \quad (\text{II-62-3})$$

L'équation différentielle obtenue admet pour solution :

$$P(y) = A \cosh \varepsilon y .$$

La vitesse de phase adimensionnelle  $\beta$  est alors déterminée par l'intermédiaire de la condition à la surface libre.

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2(\beta - Fr)^2}{1 + B\varepsilon^2} P(1)$$

$$\frac{dP}{dy}(1) = \varepsilon A \sinh \varepsilon$$

$$\text{avec } P(1) = A \cosh \varepsilon$$

On obtient alors une équation en  $\beta$  du second degré.

$$\varepsilon^2 \cosh \varepsilon \beta^2 - 2\varepsilon^2 Fr \cosh \varepsilon \beta + \varepsilon^2 Fr^2 \cosh \varepsilon - \varepsilon(1 + B\varepsilon^2) \sinh \varepsilon = 0$$

Après réarrangement, on obtient :

$$\beta^2 - 2Fr\beta + Fr^2 - (1 + B\varepsilon^2)\frac{th\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \quad (II-63)$$

Cette équation admet deux solutions :

$$\beta = \frac{1}{2(\varepsilon \exp 2\varepsilon + \varepsilon)} (2\varepsilon Fr \exp 2\varepsilon + 2Fr\varepsilon \pm 2\sqrt{\varepsilon \exp 4\varepsilon + \varepsilon^3 B \exp 4\varepsilon - \varepsilon - B\varepsilon^3})$$

Après simplification, on aboutit à l'équation bien connue :

$$\beta = Fr \pm \sqrt{\frac{th\varepsilon}{\varepsilon}(1 + B\varepsilon^2)} \quad (II-64)$$

Pour les ondes stationnaires ( $\beta = 0$ ), nous avons :

$$Fr \pm \sqrt{\frac{th\varepsilon}{\varepsilon}(1 + B\varepsilon)} = 0$$

$$Fr = \pm \sqrt{\frac{th\varepsilon}{\varepsilon}(1 + B\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow Fr^2 = \frac{th\varepsilon}{\varepsilon}(1 + B\varepsilon^2)$$

Les expériences que nous avons effectuées ont montré que les longueurs d'ondes de gravité sont de l'ordre de grandeur de la hauteur d'eau. A titre d'exemple, pour une hauteur de 0.30m, la longueur d'onde est égale à 40 cm.

Dans ce cas, nous avons :  $\varepsilon = \frac{2\pi h_0}{\lambda} \approx 4.7$

$$th\varepsilon = 0.999 \approx 1$$

Il est bien sûr évident que pour les rides capillaires, la longueur d'onde est bien moindre et  $th\varepsilon$  est encore plus proche de la valeur 1.

posons  $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ ,

l'équation précédente s'écrit alors sous la forme :

$$Fr^2 = \alpha + \frac{B}{\alpha}$$

$$\alpha^2 - Fr^2\alpha + B = 0 \tag{II-65}$$

Cette équation du second degré admet pour solutions :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}Fr^2 + \frac{1}{2}\sqrt{Fr^4 - 4B} \tag{II-65-1}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}Fr^2 - \frac{1}{2}\sqrt{Fr^4 - 4B} \tag{II-65-2}$$

où  $\alpha_1$  correspond à la longueur des ondes de gravité.

et  $\alpha_2$  celle des ondes capillaires.

**II-10-2 / Cas d'un profil linéaire de vitesse**

Pour un écoulement de profil linéaire de vitesse  $U(y)=2y$ , le système d'équations devient :

$$\frac{d^2P}{dy^2} - \frac{4Fr}{2Fry - \beta} \frac{dP}{dy} - \varepsilon^2 P = 0 \tag{II-66-1}$$

$$\frac{dP}{dy}(0) = 0 \tag{II-66-2}$$

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2(\beta - 2Fr)^2}{1 + B\varepsilon^2} P(1) \tag{II-66-3}$$

La solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$P(y) = C_1(-2Fr + 2Fr \varepsilon y - \varepsilon \beta) \exp(\varepsilon y) + C_2(2Fr + 2Fr \varepsilon y - \varepsilon \beta) \exp(-\varepsilon y) \tag{II-67}$$

La première condition aux limites se traduit par l'égalité :  $C_1 = C_2 = C$

La deuxième condition aux limites donne :

$$\frac{dP}{dy}(1) = C[\varepsilon^2(\beta - 2Fr)(\exp \varepsilon - \exp - \varepsilon)]$$

comme

$$P(1) = C[-2Fr(\exp \varepsilon - \exp - \varepsilon) + (2Fr\varepsilon - \varepsilon\beta)(\exp \varepsilon + \exp - \varepsilon)],$$

on obtient :

$$\varepsilon \cosh \varepsilon \beta^2 + (2Fr \sinh \varepsilon - 4Fr\varepsilon \cosh \varepsilon)\beta - 4Fr^2 \sinh \varepsilon + 4Fr^2 \varepsilon \cos \varepsilon - (1 + B\varepsilon^2) \sinh \varepsilon = 0$$

Après réarrangement, on aboutit à :

$$\beta^2 + (2Fr \frac{\tanh \varepsilon}{\varepsilon} - 4Fr)\beta - 4Fr^2 \frac{\tanh \varepsilon}{\varepsilon} + 4Fr^2 - (1 + B\varepsilon^2) \frac{\tanh \varepsilon}{\varepsilon} = 0 \quad (II-68)$$

C'est une équation du second degré qui admet deux solutions :

$$\beta = \frac{1}{2(\varepsilon \exp 2\varepsilon + \varepsilon)} (-2Fr \exp 2\varepsilon + 2Fr + 4Fr\varepsilon \exp 2\varepsilon + 4Fr\varepsilon \pm$$

$$2\sqrt{Fr^2 \exp 4\varepsilon - 2Fr^2 \exp 2\varepsilon + Fr^2 + \varepsilon \exp 4\varepsilon + \varepsilon^3 B \exp 4\varepsilon - \varepsilon - B\varepsilon^3}$$

Après simplification, on trouve

$$\beta = 2Fr - Fr \frac{\tanh \varepsilon}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{Fr^2 \tanh^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} + (1 + B\varepsilon^2) \frac{\tanh \varepsilon}{\varepsilon}} \quad (II-69)$$

### II-10-3 / Cas d'un profil de vitesse parabolique

Pour un écoulement de profil parabolique de vitesse  $U(y) = 3(y - \frac{y^2}{2})$ , le système

s'écrit :

$$\frac{d^2P}{dy^2} - \frac{6Fr(1-y)}{3Fr(y - \frac{y^2}{2}) - \beta} \frac{dP}{dy} - \varepsilon^2 P = 0 \quad (II-70-1)$$

$$\frac{dP}{dy}(0) = 0 \quad (II-70-2)$$

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2 [\beta - \frac{3}{2}Fr]^2}{1 + B\varepsilon^2} P(1) \quad (II-70-3)$$

La solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$P(y) = C_1 \exp\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} y + C_2 \exp-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} y + (1-y)^k \exp\frac{\varepsilon^2}{16}(1-y)^2 \quad (\text{II-71})$$

où on a posé  $k = \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{\beta}{3Fr} - \frac{1}{2} \right)$

Déterminons les constantes  $C_1$  et  $C_2$ .

A partir de la première condition aux limites, nous avons :

$$C_1 = C_2 + \frac{k\sqrt{2}}{\varepsilon} \exp\frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{8} \exp\frac{\varepsilon^2}{16} \quad (\text{II-72-1})$$

En tenant compte de la deuxième condition aux limites

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2(\beta - \frac{3}{2}Fr)^2}{1 + B\varepsilon^2} P(1),$$

avec  $P(1) = \frac{1 + B\varepsilon^2}{\beta - \frac{3}{2}Fr}$ ,

nous arrivons à :

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}\varepsilon(\beta - \frac{3}{2}Fr)}{2 \sinh\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} - \frac{D}{2 \sinh\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} \left[ \frac{\sqrt{2}k}{\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{8} \right] \quad (\text{II-72-2})$$

La vitesse de phase adimensionnelle  $\beta$  est déterminée par l'intermédiaire de la deuxième condition à la surface libre.

$$\frac{dP}{dy}(1) = \frac{\varepsilon^2(\beta - \frac{3}{2}Fr)^2}{1 + B\varepsilon^2} P(1)$$

En remplaçant  $P(1)$ ,  $dP/dy(1)$  et les constantes  $C_1$  et  $C_2$  par leurs valeurs respectives, nous obtenons une équation du second degré :

$$\left(1 - \frac{D}{12Fr} + \frac{D}{12Fr} \tanh \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \beta^2 + \left(-3Fr + \frac{3D}{24} - \frac{3D}{24} \tanh \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \beta + \quad (II-73)$$

$$\frac{9}{4} Fr^2 - \frac{(1 + B\varepsilon^2)}{\sqrt{2}\varepsilon} \tanh \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = 0$$

où on a posé  $D = \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$

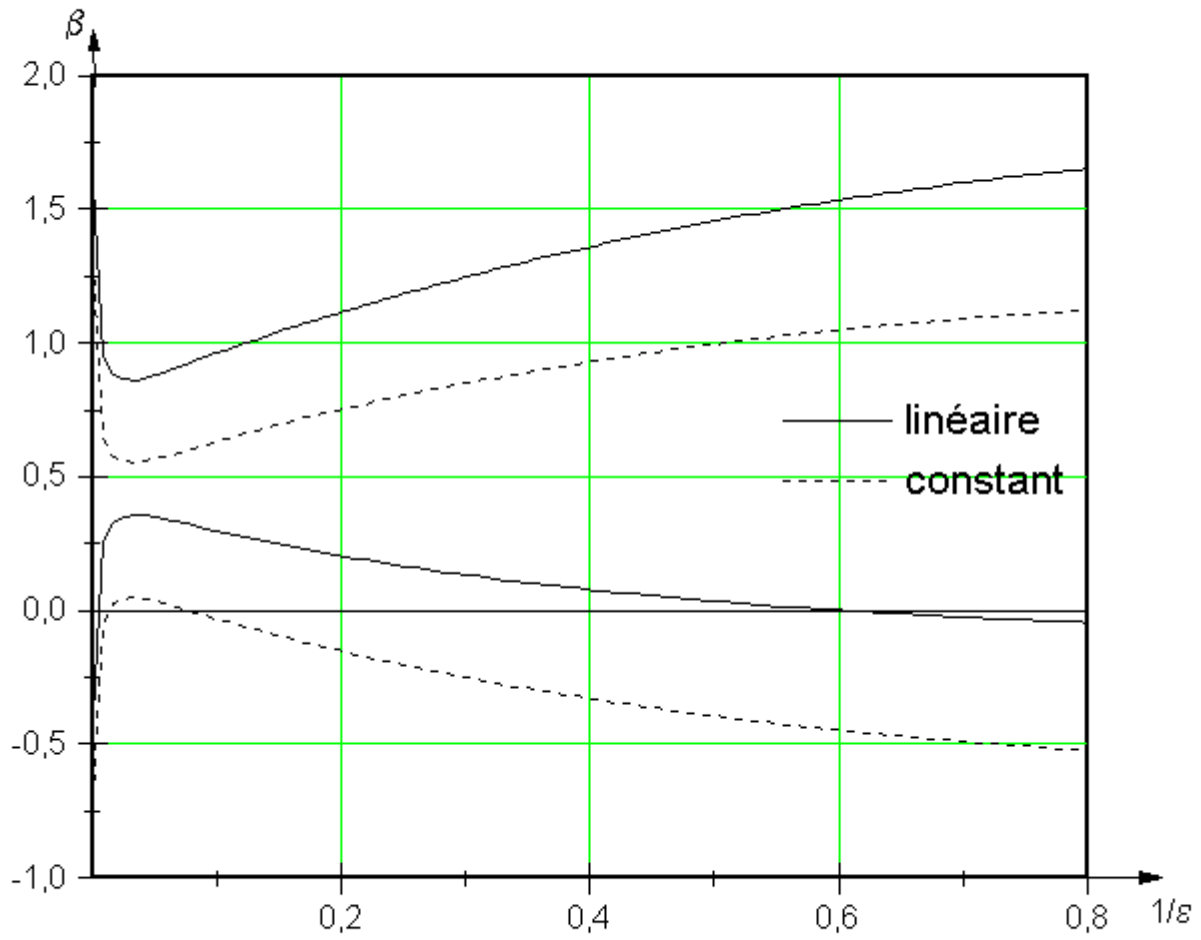
Cette équation admet deux solutions :

$$\beta = \frac{1}{2(12\varepsilon Fr(\exp \varepsilon \sqrt{2} + 1) - 2\varepsilon D)} [-3Fr\varepsilon D + 36Fr^2\varepsilon(\exp \varepsilon \sqrt{2} + 1) \pm \sqrt{9Fr^2\varepsilon^2 D^2 + (1 + B\varepsilon^2)(288Fr^2\varepsilon\sqrt{2} \exp 2\varepsilon\sqrt{2}(\exp 2\varepsilon\sqrt{2} - 1) - 48\varepsilon D\sqrt{2}Fr(\exp \varepsilon\sqrt{2} - 1)}]$$

(II-74)

A partir des équations (II-64 et II-69), exprimant la vitesse de phase  $\beta$  en fonction du nombre d'onde  $\beta = f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ , on peut tracer les diagrammes de dispersion pour les différents profils de vitesse étudiés et ce pour un nombre de Froude et de Bond fixés (Figure II-6).





**Figure II-6 Diagramme de dispersion  
Fr = 0.3 et B = 0.001**

**II-11/ ANALYSE DES RESULTATS**

Considérons le profil constant de vitesse. Le diagramme de dispersion (figure II-7) est constitué de deux branches, une supérieure correspondant aux « ondes positives », l'autre inférieure pour les « ondes négatives ».

On remarque que la branche des « ondes négatives » coupe l'axe des abscisses en deux points (A,B) correspondant à une vitesse de phase nulle. Ceci exprime la présence de deux ondes stationnaires.

La plus grande longueur d'onde correspond aux ondes stationnaires de gravité et la plus petite à celles des ondes stationnaires capillaires.

Traçons les tangentes aux points A et B ; l'intersection de celles-ci avec l'axe des ordonnées nous donne la vitesse de groupe définie par  $V_g = \beta - \lambda \frac{d\beta}{d\lambda}$ . Elle représente la vitesse de propagation de l'énergie pour ces ondes.

La vitesse de groupe  $V_g$  est strictement positive pour les ondes de gravité, ce qui traduit la présence d'ondes uniquement en aval de l'obstacle [6].

La vitesse de groupe  $V_g$  est strictement négative pour les ondes capillaires ; celles-ci seront donc localisées uniquement en amont de l'obstacle.

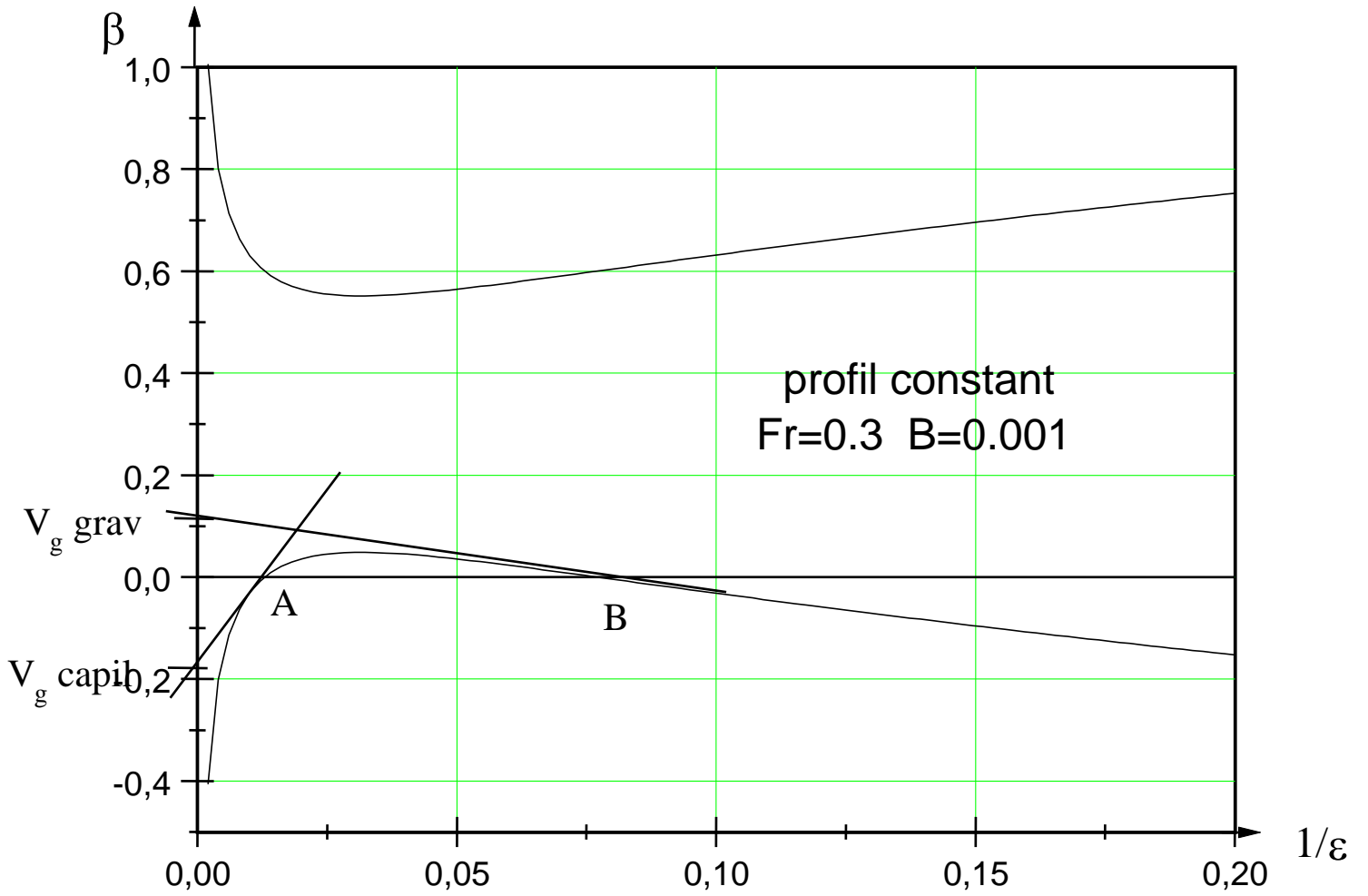


Figure II-7 Existence d'ondes stationnaires de gravité et de capillarité

Pour montrer l'effet du nombre de Bond sur la propagation des ondes, traçons le diagramme de dispersion pour différents nombres de Bond (figure II-8).

On remarque que pour un nombre de Bond nul (absence d'ondes capillaires), les deux branches correspondant aux ondes « positives » et négatives prennent une forme parabolique de sommet  $\beta = FrU(1)$  alors que lorsque  $B \neq 0$  l'allure des branches est asymptotique.

La courbe représentant l'évolution de la longueur d'onde stationnaire en fonction du nombre de Froude montre que :

Quand le nombre de Froude augmente, les longueurs d'ondes de gravité augmentent et celles des rides capillaires diminuent.

Quand le nombre de Froude diminue, la longueur des ondes de gravité diminue et celles des ondes capillaires augmentent ; l'écart entre elles est ainsi réduit jusqu'à se confondre ( Figure II-9). A cette longueur d'onde est associé un nombre de Froude  $Fr_{min}$  au dessous duquel il y a absence totale des ondes. Ceci a pu être confirmé par nos expériences.

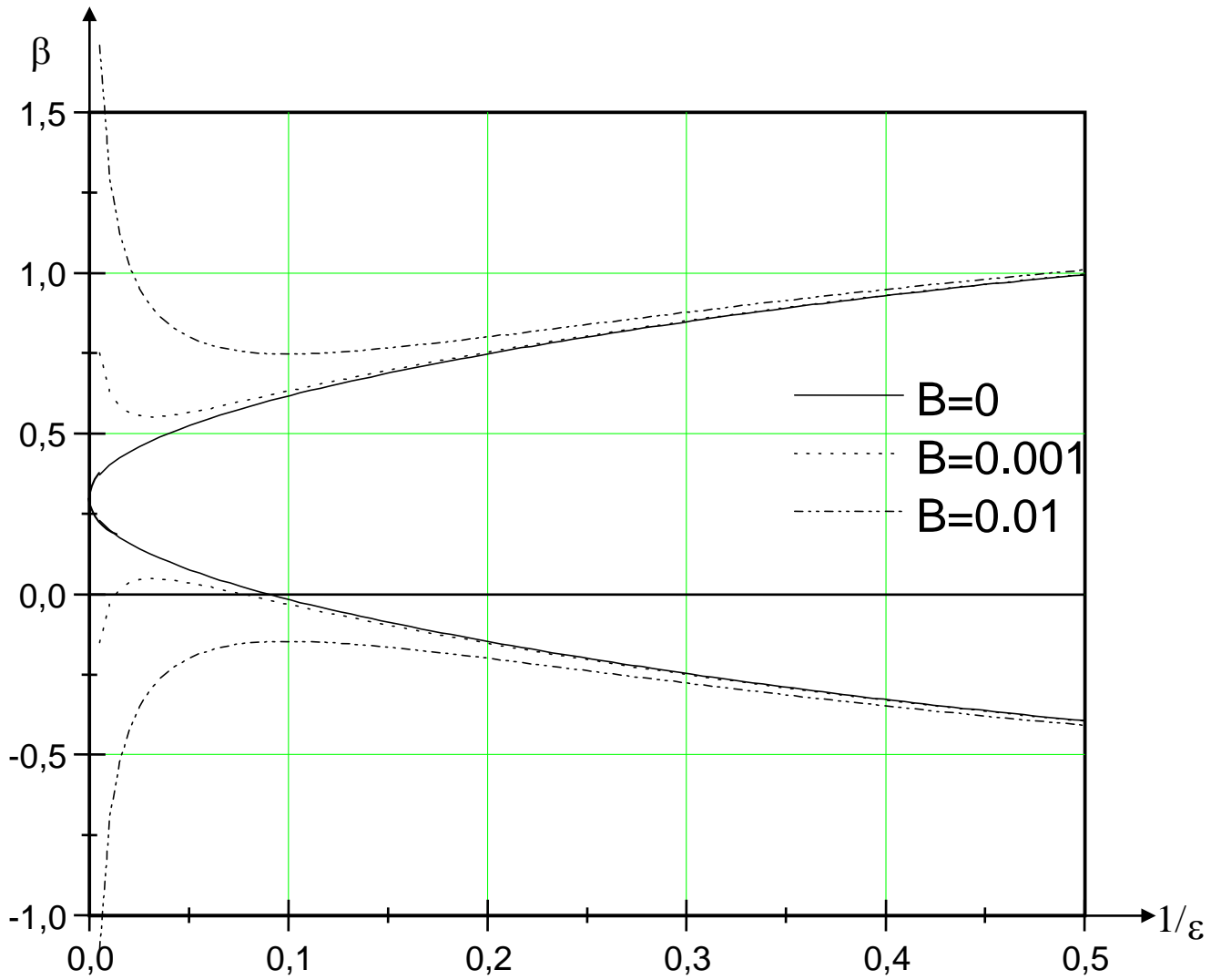
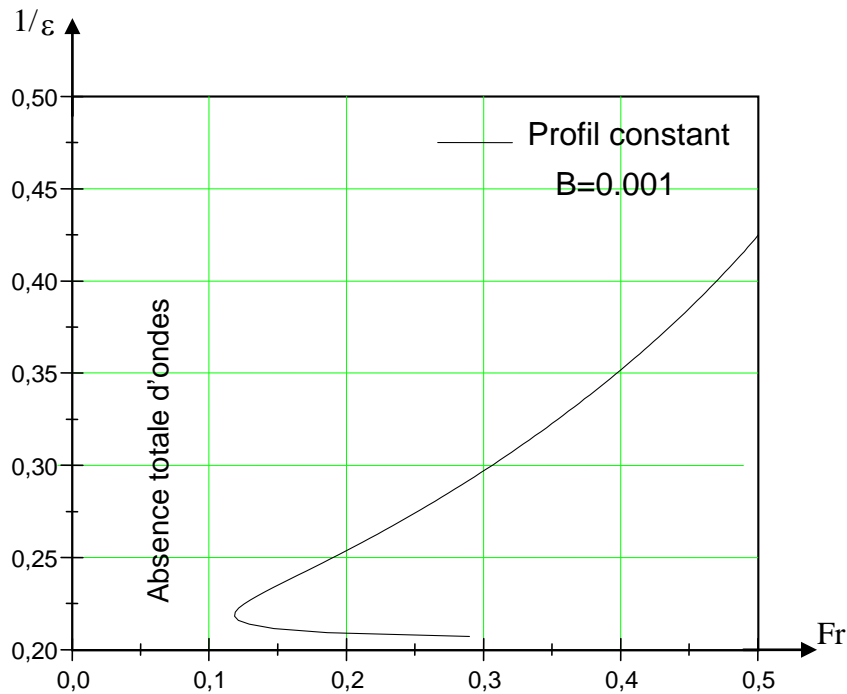


Figure II-8 Diagramme de dispersion pour différents nombres de Bond



**Figure II-9** Mise en évidence de l'absence d'ondes.

## CONCLUSION

Nous avons déterminé l'équation de la surface libre régissant un écoulement au-dessus d'un obstacle triangulaire. Cette équation conduit à un profil quasi horizontal en amont, suivi d'une dépression locale au-dessus de l'obstacle, puis d'un train d'ondes stationnaires en aval.

A partir des équations générales de Navier-Stokes, nous avons pu mettre en évidence les différents paramètres gouvernant le phénomène de propagation des ondes de surface.

Tous ces résultats seront confrontés à ceux d'une étude expérimentale.

## INTRODUCTION

Le présent chapitre est consacré à l'étude analytique des ondes de surface, en théorie linéaire. A partir des équations générales de la mécanique des fluides, on déterminera les équations régissant l'écoulement ondulatoire d'un fluide dans un canal.

## A / ONDES DE GRAVITE

### II-1/ OBSTACLE QUELCONQUE

Dans ce paragraphe, on expose une méthode approchée, inspirée de Lamb[20], où on calcule l'équation de la surface libre d'un écoulement dans un canal, pour des obstacles de petites hauteurs  $d$ .

#### II-1-1 Formulation du problème

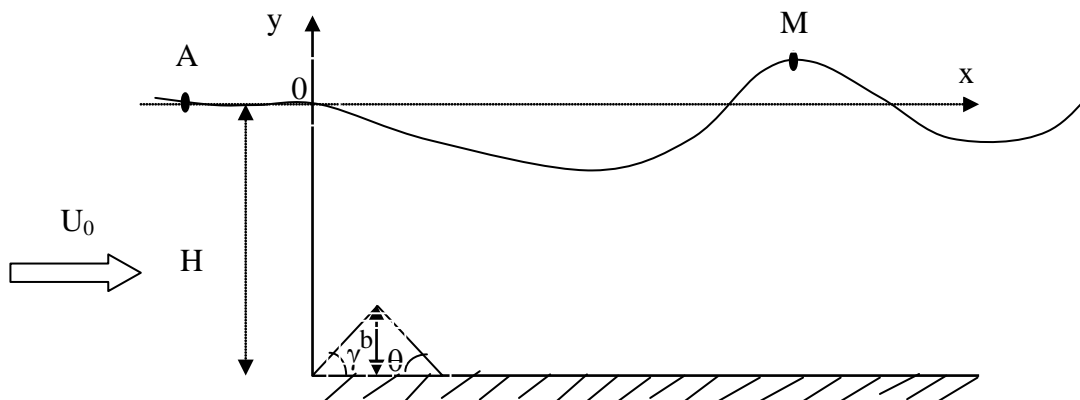


Figure II-1 Géométrie du problème

Soit un écoulement plan bidimensionnel, permanent, d'un fluide parfait incompressible. L'écoulement en amont de l'obstacle (figure II-1) est supposé permanent et uniforme de vitesse  $U_0$ , donc irrotationnel, et de hauteur  $H$ .

Dans le système d'axe  $xoy$  (figure II-1),  $y = 0$  représente le plan de la surface libre non perturbée.

L'obstacle est décrit par une fonction analytique  $f(x)$  supposée régulière et satisfaisant aux conditions de Dirichlet ; elle possède donc une intégrale de Fourier qui s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos k(x-s) ds \quad (\text{II-1})$$

L'équation du fond s'écrit alors :

$$y_f = -H + f(x) \quad (\text{II-2})$$

L'écoulement étant irrotationnel et le fluide incompressible, il existe un potentiel de vitesse  $\Phi(x, y)$  et une fonction de courant  $\Psi(x, y)$  tels que :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (\text{II-3})$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\text{avec } \Delta \Phi = \Delta \Psi = 0 \quad (\text{équation de Laplace}) \quad (\text{II-4})$$

$u$  et  $v$  désignent respectivement les composantes horizontale et verticale de la vitesse du fluide.

Il s'agit donc de trouver les fonctions  $\Psi$  et  $\Phi$ , répondant aux conditions aux limites appropriées.

**II-1-2/ Détermination de la fonction de courant**

La fonction de courant globale est donnée par :

$$\Psi(x, y) = -U_0 y + \Psi_p(x, y) \quad (\text{II-5})$$

où  $U_0 y$  est la fonction de courant de l'écoulement uniforme non perturbé.

et  $\Psi_p(x, y)$  est la fonction de courant de l'écoulement perturbé.

**Condition aux limites**

- La surface libre constitue une ligne de courant

$$\Psi(x, y_0) = \text{constante} \quad (\text{II-6-1})$$

- On choisit arbitrairement la fonction de courant  $\Psi$  nulle en amont soit :

$$\Psi(x, y_0) = 0 \quad (\text{II-6-2})$$

où  $y_0 = 0$  l'équation de la surface libre

- Le fond est également une ligne de courant

$$\Psi(x, y_p) = -U_0 y_f + \Psi_p(x, y_p) \tag{II-6-3}$$

où  $y_f$  est l'équation du fond

Sachant qu'en amont l'équation du fond  $y_f = -H$ , nous avons donc

$$\Psi(x, -H) = -U_0 (-H) + \Psi_p(x, -H) \tag{II-7}$$

Ecrivons la conservation du débit unitaire de fluide entre une section à l'amont et l'autre au droit de l'obstacle.

1. à l'infini amont nous avons

$$\Psi(x, -H) = U_0 H$$

2. à la section au droit de l'obstacle

$$\Psi(x, y_f) = -U_0 (-H + f(x)) + \Psi_p(x, -H+f(x))$$

Egalisons les deux équations nous obtenons

$$U_0 H = -U_0 (-H + f(x)) + \Psi_p(x, -H + f(x)) \tag{II-8}$$

En effectuant le développement limité de  $\Psi_p(x, -H + f(x))$  ; on obtient :

$$\Psi_p(x, -H + f(x)) = \Psi_p(x, -H) + f(x) \frac{\partial \Psi_p(x, -H)}{\partial y} + O(H^2) \tag{II-9}$$

En écrivant l'équation de Bernoulli entre deux sections, A en amont et M en aval (figure II-1) on obtient :

$$\frac{\partial \Psi_p(x, 0)}{\partial y} = \frac{g}{U_0^2} \Psi_p(x, 0) \tag{II-10}$$

En rapportant l'expression (II-7) dans (II-10) on obtient la condition cinématique suivante :

$$\Psi_p(x, -H) = U_0 f(x) \tag{II-11}$$

La fonction de courant correspond au terme de perturbation est déterminée, dans un premier temps, pour un fond complètement sinusoïdal d'équation

$$f(x) = e \cos(kx) \quad (\text{II-12})$$

Pour le cas où la fonction  $f(x)$  est quelconque  $\Psi(x, y)$  est donnée par :

$$\Psi(x, y) = F(y) \cos kx \quad (\text{II-13})$$

$F(y)$  est déterminée en rapportant cette équation dans (II-10) et (II-11)

En remplaçant  $f(x)$  par son expression dans (II-11), puis comparée à (II-13) on obtient :

$$\Psi_p(x, -H) = U_0 e \cos kx$$

$$\text{avec } F(-H) = U_0 e \quad (\text{II-14})$$

Tenant compte de la relation (II-10) l'équation (II-13) s'écrit sous la forme

$$\frac{dF}{dy} \cos kx - \frac{g}{U_0^2} F(y) \cos kx = 0 \quad (\text{II-15})$$

L'équation de Laplace (II-4) s'écrit :

$$\Delta \Psi_p = \frac{d^2 F(y)}{dy^2} \cos kx - F(y) k^2 \cos kx = 0 \quad (\text{II-16})$$

C'est une équation différentielle du second ordre dont la solution, en tenant compte de (II-14), est :

$$F(y) = \left[ \frac{\text{chky} + \frac{g}{kU_0^2} \text{shky}}{\text{chkH} - \frac{g}{kU_0^2} \text{shkH}} \right] e U_0 \quad (\text{II-17})$$

donc

$$\Psi_p(x, y) = \left[ \frac{\text{chky} + \frac{g}{kU_0^2} \text{shky}}{\text{chkH} - \frac{g}{kU_0^2} \text{shkH}} \right] U_0 e \cos kx \quad (\text{II-18})$$

**II-1-3/ Détermination de l'équation de la surface libre**

En divisant l'équation (II-18) par  $U_0$  et faisant tendre  $y$  vers zéro, nous obtenons l'équation de la surface libre :

$$y_0 = \frac{e \cos kx}{ch kH - \frac{g}{kU_0^2} sh kH} \tag{II-19}$$

**II-2/ OBSTACLE TRIANGULAIRE**

Soit un obstacle triangulaire de hauteur maximum  $b$ , placé sur le fond d'un canal hydraulique. Le déplacement de celui-ci perturbe une masse liquide au repos de hauteur  $H$  ( $H \gg b$ ) (Figure II-1) , génère à la surface libre un train d'ondes.

Ces ondes dépendent essentiellement du nombre de Froude calculé en amont de l'obstacle. La vitesse à l'infini amont est notée  $U$ .

Désignons par  $f(x)$  la fonction analytique décrivant le profil de l'obstacle, qu'on supposera triangulaire.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x \operatorname{tg} \gamma & 0 < x < b \operatorname{ctg} \gamma \\ -x \operatorname{tg} \theta + b(\operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \gamma + 1) & b \operatorname{ctg} \gamma < x < b(\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \theta) \\ 0 & x \geq b(\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \theta) \end{cases} \tag{II-20}$$

Nous supposons que la fonction  $f(x)$  est assez régulière et répond aux conditions de Dirichlet, elle possède donc une intégrale de Fourier sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(s) \cos k(x-s) ds \tag{II-21}$$

$$l_1 = b \operatorname{ctg} \gamma$$

on pose

$$l_2 = b \operatorname{ctg} \theta$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x \operatorname{tg} \gamma & 0 < x < l_1 \\ \operatorname{tg} \theta (l_1 + l_2 - x) & l_1 < x < l_1 + l_2 \\ 0 & x \geq (l_1 + l_2) \end{cases} \quad (\text{II-22})$$

**II-2-1/ L'expression de la surface libre**

Après détermination de l'équation du profil de la surface libre pour un fond complètement sinusoïdal, il est possible d'accéder à celui d'un fond d'équation  $f(x)$ . On écrit pour cela l'équation de la surface libre  $y_0(x)$  sous forme d'une intégrale de Fourier :

$$y_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s) \cos k(x-s) ds}{\operatorname{ch} kH - \frac{g}{ku^2} \operatorname{sh} kH} \quad (\text{II-23})$$

En remplaçant la fonction  $f(s)$  par sa valeur particulière dans l'équation (II-4), on a :

$$y_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_0^{l_1} \frac{s \operatorname{tg} \gamma \cos k(x-s) ds}{\operatorname{ch} kH - \frac{g}{ku^2} \operatorname{Sh} kH} + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{\operatorname{tg} \theta (l_1 + l_2 - s) \cos k(x-s) ds}{\operatorname{ch} kH - \frac{g}{ku^2} \operatorname{sh} kH} \quad (\text{II-24})$$

$$y_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\operatorname{ch} kH + \frac{g}{ku^2} \operatorname{sh} kH} \left[ \int_0^{l_1} s \operatorname{tg} \gamma \cos k(x-s) ds + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \operatorname{tg} \theta (l_1 + l_2 - s) \cos k(x-s) ds \right] \quad (\text{II-25})$$

posons

$$I = \int_0^l s \cos k(x-s) ds$$

En intégrant par parties on obtient :

$$I = \left[ \frac{s \sin k(x-s)}{-k} + \frac{\cos k(x-s)}{k^2} \right]_0^l$$

$$I = \left[ \frac{l_1 \sin k(x - l_1)}{-k} + \frac{\cos k(x - l_1)}{k^2} - \frac{\cos kx}{k^2} \right]$$

appelons J l'intégrale suivante :

$$J = \int_{l_1}^{l_1+l_2} (l_1 + l_2 - s) \cos k(x - s) ds$$

Pour calculer J, nous intégrons par parties et nous obtenons :

$$J = \left[ (l_1 + l_2 - s) \frac{\sin k(x - s)}{-k} + \frac{\cos k(x - s)}{k^2} \right]_{l_1}^{l_1+l_2}$$

$$J = \left[ \frac{\cos k(x - (l_1 + l_2))}{k^2} + \frac{l_2 \sin k(x - l_1)}{k} - \frac{\cos k(x - l_2)}{k^2} \right]$$

En portant les résultats de I et J dans l'équation (II-6) et après simplifications, on obtient :

$$y_0(x) = \frac{\text{tg} \gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{\text{ch}kH - \frac{g}{u^2} \text{sh}kH} \left[ \frac{\cos k(x - l_1)}{k^2} - \frac{\cos kx}{k^2} \right] - \frac{\text{tg} \theta}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{\text{ch}kH - \frac{g}{u^2} \text{sh}kH} \left[ \frac{\cos k(x - l_1 - l_2)}{k^2} - \frac{\cos k(x - l_1)}{k^2} \right]$$

on pose

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x - l_1$$

$$x_3 = x - l_1 - l_2$$

$$y_0(x) = \frac{\text{tg} \gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx_2 - \cos kx_1}{k^2(\text{ch}kH - \frac{g}{u^2} \text{sh}kH)} dk - \frac{\text{tg} \theta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx_3 - \cos kx_2}{k^2(\text{ch}kH - \frac{g}{u^2} \text{sh}kH)} dk \quad (\text{II-26})$$

Introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$X_1 = \frac{x_1}{H}, X_2 = \frac{x_2}{H}, X_3 = \frac{x_3}{H}, Y_0 = \frac{y_0}{H}, t = kH$$

Rappelons que le nombre de Froude est défini par :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

Après ce changement de variables, nous obtenons une équation de la surface libre sous sa forme adimensionnelle :

$$Y_0(X) = \frac{tg\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos tX_2 - \cos tX_1}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt - \frac{tg\theta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos tX_3 - \cos tX_2}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt \quad (\text{II-27})$$

Cette équation étant une fonction paire, on peut écrire :

$$Y_0(X) = \frac{tg\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tX_2 - \cos tX_1}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt - \frac{tg\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tX_3 - \cos tX_2}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt \quad (\text{II-28})$$

Pour faciliter le calcul de la solution, nous posons :

$$\cos tX = \text{réel } e^{itX}$$

il vient alors

$$Y_0(x) = \text{Réel} \frac{tg\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itX_2} - e^{itX_1}}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt - \text{Réel} \frac{tg\theta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itX_3} - e^{itX_2}}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt \quad (\text{II-29})$$

Cette équation peut être décomposée en

$$Y_{01}(x) = \frac{tg\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itX_2} - e^{itX_1}}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt \quad (\text{II-30-a})$$

et

$$Y_{02} = \frac{tg\theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itX_3} - e^{itX_2}}{t^2\left(\text{cht} - \frac{sht}{Fr^2t}\right)} dt \quad (\text{II-30-b})$$

Pour calculer ces deux intégrales, nous utilisons la méthode des résidus.

Etant donné que les deux intégrales ont la même forme, nous calculons la première tandis que la deuxième sera déduite du résultat trouvé.

### II-2-2/ Recherche des pôles

Considérons l'expression :

$$Y_{01}(x) = \frac{tg\gamma}{2\pi} \text{Réel} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itxX_2} - e^{itX_1}}{t^2 \left( cht - \frac{sht}{Fr^2 t} \right)} dt$$

Pour intégrer cette équation, choisissons la fonction a variable complexe z suivante :

$$Y_{01}(z) = \frac{e^{izX_2} - e^{izX_1}}{z^2 \left( chz - \frac{shz}{Fr^2 z} \right)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Les pôles de f(z) sont les zéros réels ou imaginaires de Q(z)

$$Q(z) = z^2 \left( chz - \frac{shz}{Fr^2 z} \right) = 0$$

$$\Rightarrow z = 0$$

et

$$chz - \frac{shz}{Fr^2 z} = 0$$

(II-31)

$$thz - Fr^2 z = 0$$

Les racines de l'équation (II-32) [annexe III] sont :

$$z = \pm\alpha ; z_n = \pm i\beta n$$

II-2-3 / Calcul des résidus

Pour le calcul des résidus des différents pôles, écrivons  $f(z)$  sous la forme :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$\text{avec } Q(z) = z^2 \left( chz - \frac{shz}{Fr^2 z} \right)$$

$$Q'(z) = 2z \left( chz - \frac{shz}{Fr^2 z} \right) + z^2 \left( \frac{Fr^2 ch^2 z - 1}{shz} \right)$$

Le résidu d'un pôle  $z_0$  se calcule de la manière suivante :

$$Res(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)}$$

♦ pour le pôle  $z = 0$

$$Res(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^{izX_2} - e^{izX_1})}{z \left( chz - \frac{shz}{Fr^2 z} \right)}$$

En effectuant un développement limité des deux exponentielles, on trouve

$$Res(0) = - \frac{iFr^2(X_1 - X_2)}{(Fr^2 - 1)}$$

♦ pour le pôle  $z = +\alpha$

$$Res(+\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

$$Res(+\alpha) = \frac{e^{i\alpha X_2} - e^{i\alpha X_1}}{\alpha^2 (Fr^2 ch^2 \alpha - 1)} sh\alpha = \frac{Fr^2 ch\alpha}{\alpha (Fr^2 ch^2 \alpha - 1)} (e^{i\alpha X_2} - e^{i\alpha X_1})$$

◆ pour le pôle  $z = -\alpha$

$$\text{Res}(-\alpha) = -\frac{e^{i\alpha X_2} - e^{i\alpha X_1}}{\alpha^2(\text{Fr}^2 \text{ch}^2 \alpha - 1)} \text{sh} \alpha = \frac{\text{Fr}^2 \text{ch} \alpha}{\alpha(\text{Fr}^2 \text{ch}^2 \alpha - 1)} (e^{i\alpha X_2} - e^{i\alpha X_1})$$

pour les pôles imaginaires  $i\beta_n$

$$\text{Res}(i\beta_n) = -\frac{e^{-\beta_n X_2} - e^{-\beta_n X_1}}{\beta_n^2(\text{Fr}^2 \text{ch}^2 i\beta_n - 1)} \text{sh} i\beta_n$$

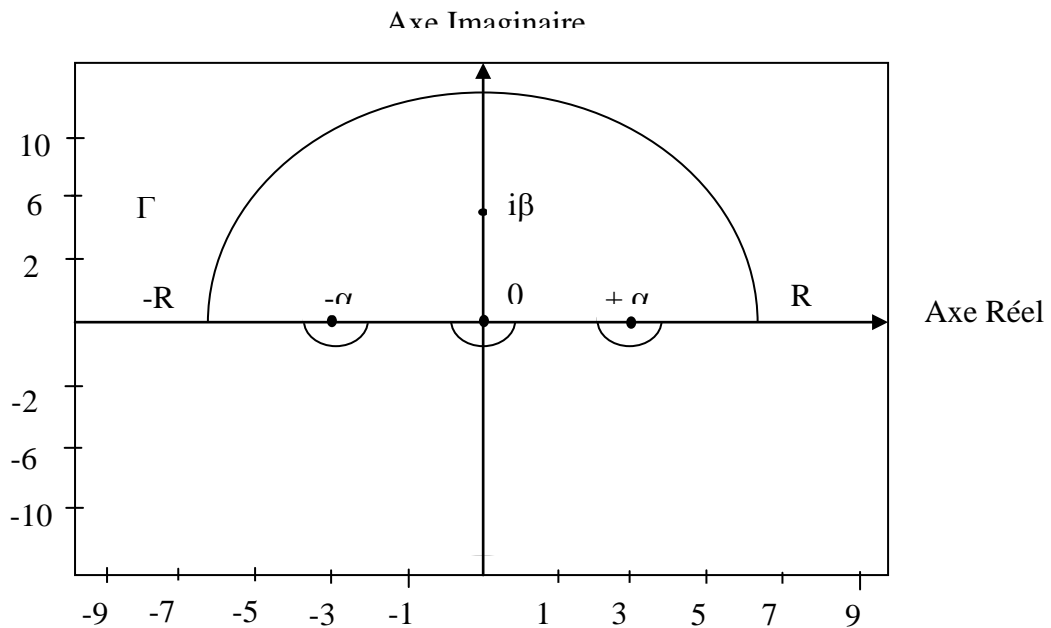
$$\text{Res}(i\beta_n) = -\frac{i \text{Fr}^2 \cos \beta_n (e^{-\beta_n X_2} - e^{-\beta_n X_1})}{\beta_n (\text{Fr}^2 \cos^2 \beta_n - 1)}$$

**II-2-4 / Application du théorème des résidus**

D'après le théorème des résidus, nous avons :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res} \quad (\text{pôles intérieurs au contour d'intégration}) \quad (\text{II-32})$$

Pour calculer l'intégrale (II-30-a), choisissons le contour  $\Gamma$  constitué par un disque de rayon  $R$  et de centre  $O$ , orienté positivement dans le sens trigonométrique (Figure II-2)



**Figure II-2 : Chemin d'intégration**

Après développement, l'équation (II-33) s'écrit :

$$\int_{-R}^{-\alpha-\varepsilon} f(t)dt + \int_{-\alpha+\varepsilon}^{-0-\varepsilon} f(t)dt + \int_{0+\varepsilon}^{\alpha-\varepsilon} f(t)dt + \int_{\alpha+\varepsilon}^{+R} f(t)dt + \int_{C_{-\alpha}} f(t)dt + \int_{C_0} f(t)dt + \int_{C_\varepsilon} f(t)dt + \int_{C_R} f(t)dt$$

$$= 2\pi i (Res(-\alpha) + Res(0) + Res(\alpha)) + 2\pi i \sum Res(i\beta_n)$$

En faisant tendre R vers l'infini, il suit :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t)dt + \int_{C_{-\alpha}} f(t)dt + \int_{C_0} f(t)dt + \int_{C_\varepsilon} f(t)dt + \int_{C_R} f(t)dt =$$

$$2\pi i (Res(-\alpha) + Res(0) + Res(\alpha) + \sum Res(i\beta_n))$$

si  $X_1$  et  $X_2$  sont positifs,  $\int_{C_R} = 0$  par application du lemme de Jordan.

$$\int_{C_\alpha} f(t)dt + \int_{C_0} f(t)dt + \int_{C_{-\alpha}} f(t)dt = \pi i (Res(-\alpha) + Res(0) + Res(\alpha))$$

Par application du lemme de Jordan ,on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \pi i (Res(-\alpha) + Res(0) + Res(\alpha)) + 2\pi i \sum Res(i\beta_n)$$

Finalement :

$$Y_{01} = \frac{Fr^2 \operatorname{tg} \gamma}{2(Fr^2 - 1)} (X_1 - X_2) - \frac{Fr^2 \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ch} \alpha}{\alpha(Fr^2 \operatorname{ch}^2 \alpha - 1)} (\sin \alpha X_2 - \sin \alpha X_1) +$$

$$Fr^2 \operatorname{tg} \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n X_2} - e^{-\beta_n X_1})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)}$$

(II-33)

Le lemme de Jordan n'est vérifié que si  $X_1 > 0$  et  $X_2 > 0$ . Regardons le cas où  $X_1$  et  $X_2$  sont négatifs ; pour cela changeons X en  $-X$  dans l'expression de  $Y_{01}$ , on obtient :

$$Y_{01} = \frac{tg\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(-X_2)} - e^{it(-X_1)}}{t^2(cht - \frac{sh t}{Fr^2 t})} dt \quad (II-34)$$

(-x) étant positive, nous nous ramenons ainsi au même plan d'intégration que précédemment, (plan supérieur positif) satisfaisant ainsi le lemme de Jordan.

Il faut donc changer tous les  $x_n$  en  $-x_n$  dans la valeur de l'intégrale lorsque  $x_n$  est négatif.

Nous avons ainsi :

$$Y_{01} = \frac{Fr^2 tg\gamma}{2(Fr^2 - 1)} (|X_1| - |X_2|) - \frac{Fr^2 tg\gamma ch\alpha}{\alpha(Fr^2 ch^2\alpha - 1)} (\sin \alpha|X_2| - \sin \alpha|X_1|) +$$

$$Fr^2 tg\gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n|X_2|} - e^{-\beta_n|X_1|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} \quad (II-35)$$

La même procédure de calcul nous conduit à la résolution de l'équation (II-30-b).

$$Y_{02} = \frac{Fr^2 tg\theta}{2(Fr^2 - 1)} (|X_2| - |X_3|) - \frac{Fr^2 tg\theta ch\alpha}{\alpha(Fr^2 ch^2\alpha - 1)} (\sin \alpha|X_3| - \sin \alpha|X_2|) +$$

$$Fr^2 tg\theta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n|X_3|} - e^{-\beta_n|X_2|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} \quad (II-36)$$

La solution complète s'écrit alors :

$$Y_0 = \frac{Fr^2 tg\gamma}{2(Fr^2 - 1)} (|X_1| - |X_2|) + \frac{Fr^2 tg\theta}{2(Fr^2 - 1)} (|X_2| - |X_3|) +$$

$$Fr^2 tg\gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n|X_2|} - e^{-\beta_n|X_1|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} + Fr^2 tg\theta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n|X_3|} - e^{-\beta_n|X_2|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} -$$

$$\frac{Fr^2 tg\gamma ch\alpha}{\alpha(Fr^2 ch^2\alpha - 1)} (\sin \alpha|X_2| - \sin \alpha|X_1|) - \frac{Fr^2 tg\theta ch\alpha}{\alpha(Fr^2 ch^2\alpha - 1)} (\sin \alpha|X_3| - \sin \alpha|X_2|) \quad (II-37)$$

**II-3/ SOLUTION GENERALE DE LA SURFACE LIBRE**

**II-3-1 / Cas d'un triangle quelconque**

La solution obtenue est symétrique en X, correspond à la perturbation du fluide sans écoulement. Pour obtenir l'équation de la surface libre de perturbation globale, nous ajoutons la solution du fond plat, c'est à dire celle de l'écoulement sans perturbation. A l'infini amont les perturbations sont nulles, nous pouvons dire que la solution du fond plat se confond avec la solution de la perturbation.

Nous écrivons alors :

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} Y_0 = \text{solution du fond plat}$$

$$= -\frac{Fr^2 \text{tg} \gamma \text{ch} \alpha}{\alpha (Fr^2 \text{ch}^2 \alpha - 1)} (\sin \alpha X_2 - \sin \alpha X_1) - \frac{Fr^2 \text{tg} \theta \text{ch} \alpha}{\alpha (Fr^2 \text{ch}^2 \alpha - 1)} (\sin \alpha X_2 - \sin \alpha X_3)$$

Enfin, la solution générale de la surface libre recherchée s'écrit :

◆ **En régime fluvial : Fr < 1**

$$Y_0 = \frac{Fr^2 \text{tg} \gamma}{2(Fr^2 - 1)} (|X_1| - |X_2|) + \frac{Fr^2 \text{tg} \theta}{2(Fr^2 - 1)} (|X_3| - |X_2|) +$$

$$Fr^2 \text{tg} \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n |X_2|} - e^{-\beta_n |X_1|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} + Fr^2 \text{tg} \theta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n |X_2|} - e^{-\beta_n |X_3|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} -$$

(II-38)

$$\frac{Fr^2 \text{tg} \gamma \text{ch} \alpha}{\alpha (Fr^2 \text{ch}^2 \alpha - 1)} (\sin \alpha |X_2| + \sin \alpha X_2 - \sin \alpha |X_1| - \sin \alpha X_1) -$$

$$\frac{Fr^2 \text{tg} \theta \text{ch} \alpha}{\alpha (Fr^2 \text{ch}^2 \alpha - 1)} (\sin \alpha |X_2| + \sin \alpha X_2 - \sin \alpha |X_3| - \sin \alpha X_3)$$

◆ **Pour un régime torrentiel Fr > 1**

Les pôles de F(z) sont :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad z = \pm i \beta_n$$

En Procédant de la même manière que pour Fr < 1 nous obtenons

$$Y_0 = \frac{Fr^2 \operatorname{tg} \gamma}{2(Fr^2 - 1)} (|X_1| - |X_2|) + \frac{Fr^2 \operatorname{tg} \theta}{2(Fr^2 - 1)} (|X_3| - |X_2|) + \quad (\text{II-39})$$

$$Fr^2 \operatorname{tg} \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n |X_2|} - e^{-\beta_n |X_1|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} + Fr^2 \operatorname{tg} \theta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n |X_2|} - e^{-\beta_n |X_3|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)}$$

### II-3-2/ Cas d'un triangle isocèle

Pour un triangle isocèle,  $\gamma = \theta$  ; l'équation de la surface libre devient :

**Pour  $Fr < 1$**

$$Y_0 = \frac{Fr^2 \operatorname{tg} \gamma}{2(Fr^2 - 1)} (|X_1| - 2|X_2| + |X_3|) + Fr^2 \operatorname{tg} \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (e^{-\beta_n 2|X_2|} - e^{-\beta_n |X_1|} - e^{-\beta_n |X_3|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} - \frac{Fr^2 \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ch} \alpha}{\alpha (Fr^2 \operatorname{ch}^2 \alpha - 1)} (2 \sin \alpha |X_2| + 2 \sin \alpha X_2 - \sin \alpha |X_1| - \sin \alpha X_1 - \sin \alpha |X_3| - \sin \alpha X_3) \quad (\text{II-40})$$

**Pour  $Fr > 1$**

$$Y_0 = Fr^2 \operatorname{tg} \gamma (|X_1| - 2|X_2| + |X_3|) + Fr^2 \operatorname{tg} \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \beta_n (2e^{-\beta_n |X_2|} - e^{-\beta_n |X_1|} - e^{-\beta_n |X_3|})}{\beta_n (Fr^2 \cos^2 \beta_n - 1)} \quad (\text{II-41})$$

Remarquons qu'en régime fluvial, la solution apparaît sous forme de trois parties, en fonction des différents pôles :

- Le premier terme, correspondant au pôle zéro, met en évidence la dépression locale bien connue expérimentalement.
- Le second terme en  $\beta$  est amorti de part et d'autre de l'obstacle.
- Le troisième terme (pôle  $\alpha$ ) caractérise les ondes forcées d'obstacle.

La programmation de l'équation  $Y_0$  de la surface libre nous permet de tracer l'aspect de la surface libre pour de différents nombres de Froude, différentes hauteurs et longueurs de l'obstacle (Figure II-3-a,b et c)

D'après ces figures, nous constatons que la solution générale de la surface libre conduit à une dépression locale au dessus de l'obstacle, suivie d'un train d'ondes stationnaires à l'aval. La surface libre est quasi horizontale en amont de l'obstacle.

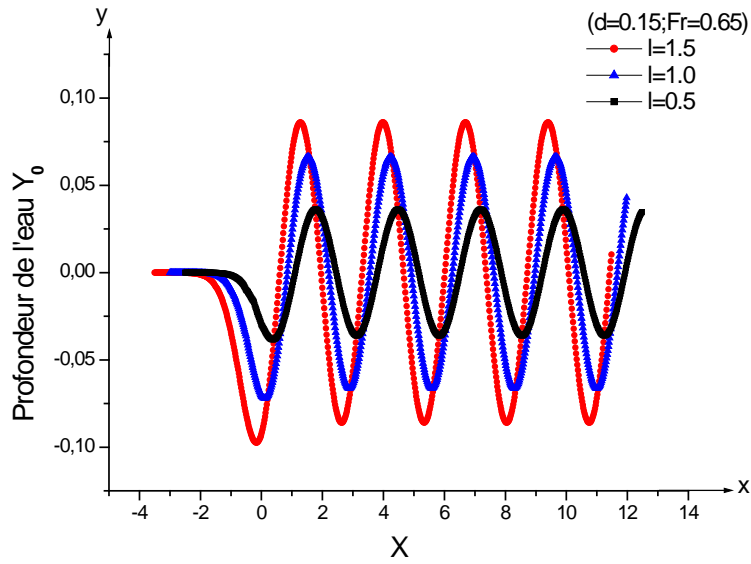


Figure II-3-a : Ondes de surface pour différentes longueurs de l'obstacle.

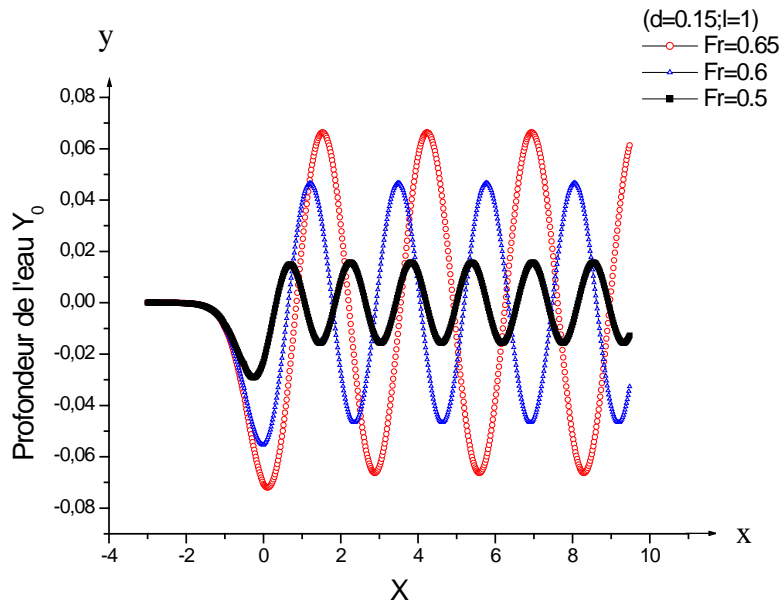


Figure II-3-b : Ondes de surface pour différents Nombre de Froude

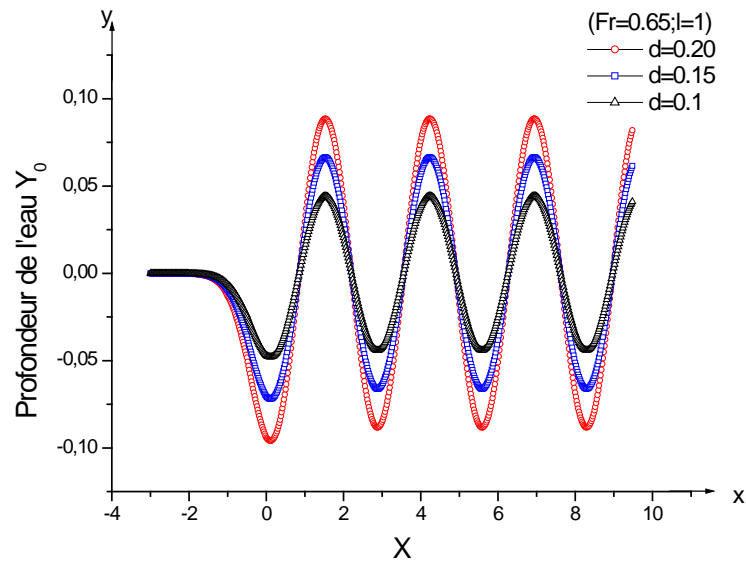
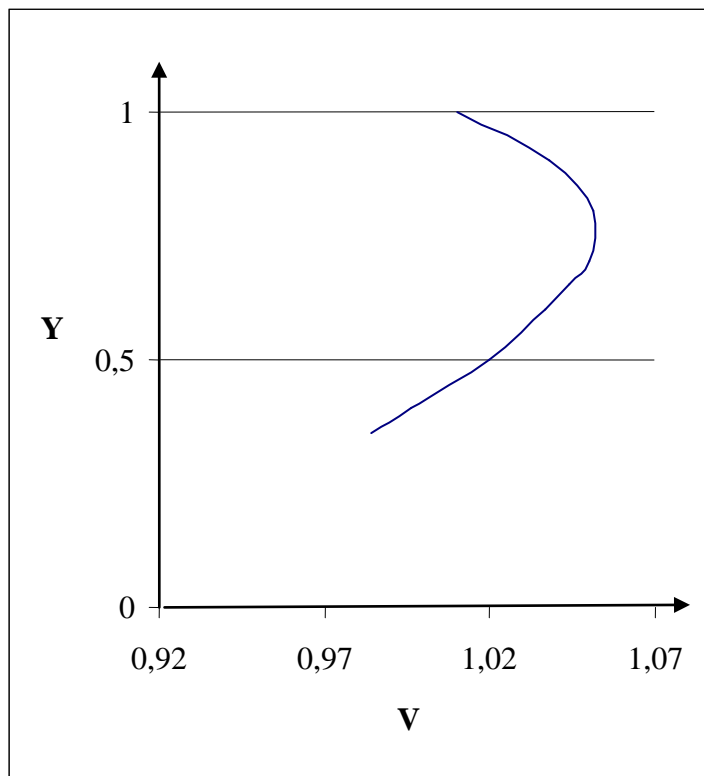


Figure II-3-c : Ondes de surface pour différentes hauteurs de l'obstacle.

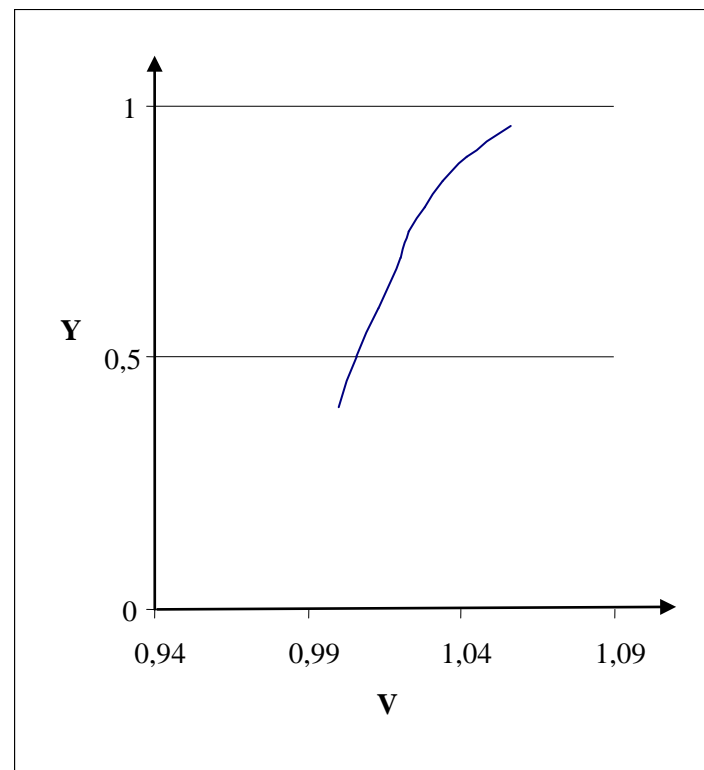
#### II-4 / Profil de vitesse

Pour tracer les profils de vitesse, on a repris l'étude analytique de Bouhade [ 3 ]. Celui-ci a déterminé l'équation des profils théoriques de vitesse aux sections correspondant respectivement à une crête et un creux, que nous présentons sur la figure (II-4 ).

Les graphes (II-4 a et b) montrent qu'au niveau du creux le fluide est accéléré au voisinage de la surface libre. Par contre, au niveau de la crête, le fluide est ralenti au voisinage de la surface libre.



a- Crête



b- Creux

Figure II -4 Profils théoriques de vitesse ( d'après [ 3 ] )

# CHAPITRE III

## **CONCEPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL**

**INTRODUCTION**

Afin de palier les perturbations dues aux pompes, nous avons procédé à la mise au point d'un dispositif expérimental original permettant l'étude des ondes gravito-capillaires dans un canal hydraulique. Celui-ci a été tout d'abord aménagé de manière à ce qu'il puisse être rempli d'une quantité d'eau immobile à une hauteur donnée. Un système permet d'y déplacer, à une vitesse constante réglable, un obstacle noyé au fond du canal.

**II-1/ DESCRIPTION DU CANAL HYDRAULIQUE**

Le dispositif de base est un canal, à pente variable, constitué d'éléments vitrés juxtaposés sur une longueur de 10m, de section transversale rectangulaire uniforme, de 0.30m de largeur sur 0.48m de hauteur.

L'alimentation de ce canal est assurée par un réservoir surélevé, d'une capacité de  $6\text{m}^3$ , muni d'un trop plein imposant une charge constante à l'écoulement. Trois pompes, refoulant chacune d'elle un débit de  $160\text{m}^3$ , alimentent le réservoir en question d'une façon continue.

En amont du canal se trouve une vanne d'alimentation ( photo N° 1) suivie d'un système tranquillisateur, formé d'un empilement de tubes en P.V.C.



**Photographie N° 1**

En aval, le canal se termine par une vanne à volet incliné qui permet le contrôle du tirant d'eau ( photo N°2).



**Photographie N° 2**

## **II-2/ TRANSFORMATION DU CANAL HYDRAULIQUE**

Le canal a été aménagé de manière à retenir une quantité d'eau au repos à une hauteur donnée. Nous l'avons donc transformé en le fermant à l'aide d'une plaque métallique, boulonnée sur la section aval du canal. Pour assurer l'étanchéité, nous avons inséré un joint en «caoutchouc» entre la plaque et la paroi avec adjonction d'un cordon en silicone ( photo N°3).



**Photographie N° 3**

**II-3/ DESCRIPTION DU SYSTEME D'ENTRAINEMENT**

Avant de placer définitivement la plaque à sa place, nous avons soudé, à un endroit bien précis, deux cornières évidées sur lesquelles sont placées deux poulies fixées à l'aide de boulons de part et d'autre de la section du canal.

Sur la même verticale des poulies, à l'extérieur du canal et en haut, nous avons placé un cylindre en inox, fermé sur les deux côtés par deux disques en P.V.C., percé au centre afin d'y faire passer une tige filetée de 10mm de diamètre. Cette tige passe dans un roulement de diamètre intérieur égal au diamètre de la tige filetée. La surface du roulement étant lisse, il est difficile de consolider la tige au roulement. En effet, quand le tambour tourne, la tige glisse à l'intérieur du roulement. Nous avons donc opté pour des roulements de plus grand diamètre sur lesquels nous avons placé des disques en P.V.C qui ont exactement le même diamètre extérieur que le diamètre intérieur des roulements. Nous faisons ensuite entrer de force le système pour que le roulement et le disque soient consolidés. Ce dernier est percé au centre et fileté pour pouvoir faire passer la tige à l'intérieur qui ne glisse alors plus. ( photo N°4)



**Photographie N° 4**

Ces roulements sont placés et fixés sur des supports, boulonnés à leur tour sur les parois du canal. La tige entre dans le premier roulement, passe par le tambour, puis arrive au deuxième roulement qui sera fixé de part et d'autre par des écrous. ( photo N°5).



**Photographie N° 5**

En amont du canal, nous avons également placé deux cornières évidées sur lesquelles sont placées quatre poulies fixées à l'aide de boulons de part et d'autre de sa section ( photo N°6)



**Photographie N° 6**

Nous avons utilisé du fil de pêche pour entraîner l'obstacle au fond du canal. Le fil est enroulé sur le tambour avec une longueur équivalente à la longueur du canal ; il passe par la première poulie qui se trouve au-dessous du tambour. Ce fil, bien tendu, est accroché à l'obstacle, puis passe par les poulies se trouvant de l'autre côté du canal, et revient au tambour où il est bien fixé à l'aide d'une vis. Ce système permet donc de faire glisser l'obstacle sur le fond du canal dès que le tambour est en rotation ( photo N°7).



**Photographie N° 7**

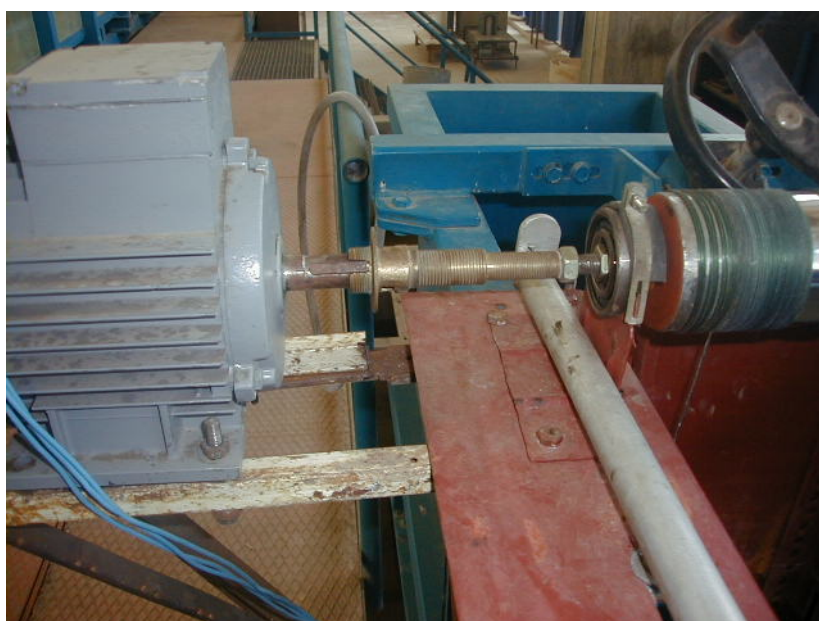
#### **II-4/ MISE EN PLACE DU MOTEUR**

Pour faire tourner le tambour, nous utilisons un moteur de 0.55KW de puissance fixé sur un socle triangulaire qui est lui-même boulonné sur les parois du canal (photo N°8).



**Photographie N° 8**

Afin de relier l'axe du moteur à celui du tambour, nous avons conçu une pièce à partir de deux tubes en cuivre de différents diamètres soudés entre eux. Le premier tube, qui constitue un côté de la pièce, est lié à l'axe du tambour par un système vis-écrou, l'axe du tambour étant la vis et l'extrémité de la pièce étant l'écrou. Le deuxième tube, qui constitue l'autre côté de la pièce, est lié au moteur en faisant pénétrer l'axe de celui-ci dans la pièce, par force. Il a été réalisé en chauffant l'extrémité de la pièce. Son refroidissement fait que l'ajustement est serré. ( photo N°9).



**Photographie N° 9**

**II-5/ MISE EN PLACE DU VARIATEUR DE FREQUENCE**

Pour faire varier la vitesse de rotation du moteur, ainsi que le sens du mouvement, le moteur est relié à un variateur de fréquence muni d'un cadran digital et de boutons poussoir. L'inconvénient de ce système réside dans le fait qu'il n'est pas simple et rapide de faire varier le sens du mouvement ou arrêter le moteur.

Nous avons alors opté pour un variateur de fréquence avec des paramètres pouvant être changés plus aisément. Pour cela, nous avons relié le variateur à un potentiomètre, permettant de changer la fréquence, et à un interrupteur, dont la fonction est de faire tourner le moteur dans un sens ou dans un autre, plus facilement ( photo N°10).



**Photographie N°10**

**II-6/ REALISATION DE L'OBSTACLE****II-6-1/ OBSTACLE DU FOND**

L'obstacle du fond est réalisé avec une feuille en P.V.C pliée sous forme de triangle de 29.8cm de largeur pour qu'il puisse glisser facilement. Toutefois, dès qu'on accroche l'obstacle au fil pour l'entraîner, il se casse. Nous avons alors utilisé un obstacle prismatique en aluminium, percé au niveau de la base, d'où on fait entrer les fils de traction de telle façon qu'il fasse une boucle. Nous introduisons une tige au travers de la boucle, puis nous serrons les fils de telle façon que la tige soit serrée contre la base du prisme ; ceci nous permet d'entraîner l'obstacle. Dès les premiers essais, nous avons rencontré des problèmes liés au fait que l'obstacle ne glisse pas facilement ; il bute sur les parois du canal à cause de la différence de tension des deux fils. Pour y remédier, nous avons confectionné un autre obstacle fabriqué par superposition de plaques en P.V.C. coupées sous forme prismatique. Les fils d'entraînement sont coincés entre les deux plaques du fond qui sont serrées entre elles par des vis ( photo N°11) en songeant à bien régler la tension des fils. Cet obstacle glisse alors plus facilement dans le canal. Pour changer sa hauteur et sa longueur, il suffit d'ajouter d'autres plaques à la base du prisme, lesquelles sont coupées de telle façon à former à chaque fois un triangle isocèle. Les plaques sont attachées entre elles par des vis.

**Photographie N°11**

**II-6-2/ Linnimètre à pointe**

L'obstacle qui génère les ondes capillaires est formé d'une tige filetée limée à son bout pour former une pointe et introduite à travers le chariot, au milieu de la section du canal. Elle est maintenue par deux écrous ; ceci nous permet de la positionner au niveau désiré.

Dès que le chariot se déplace, la tige affleurant la surface de l'eau génère des ondes capillaires en amont de l'obstacle ( photo N°12).



**Photographie n°12**

**II-7/ APPAREILS ET PRINCIPES DE MESURE****II-7-1/ Métrologie des vitesses**

L'instrument utilisé pour mesurer les vitesses est le laser à effet Döppler qui se compose des éléments suivants :

- Une source laser à Helium-Néon d'une puissance de 10 mw.
- Une optique d'émission comprenant
  - un élargisseur de faisceaux
  - une cellule de Bragg

- Une optique de réception constituée de :
  - Un objectif de focalisation avec zoom incorporé
  - Un filtre spécial « trou d'épingle»
  - Un détecteur
- Une unité de traitement du signal qui comprend :
  - Un compteur
  - Un démodulateur de Bragg
- Un micro-ordinateur équipé d'une carte d'acquisition et d'un logiciel de pilotage (photo N°13).



**Photographie N°13**

Vu l'importance de l'équipement du laser à translater, ce qui est difficile, nous avons opté à n'entraîner que le laser. Pour cela, son support est fixé sur un cric de voiture, lui même boulonné sur un chariot se déplaçant le long des rails situés sur la partie supérieure des vitres du canal. Nous avons remarqué que, pendant le mouvement du chariot, le cric vibrait et le laser oscillait alors qu'il doit être stable.

Nous avons donc boulonné le support du laser sur une plaque en fer plat, elle-même traversée par deux longues tiges filetées, soutenues par deux écrous de chaque côté ; ceci permet de déplacer le socle verticalement le long des tiges ( photo N°14).



**Photographie N°14**

Pour le déplacement le long du canal, les deux tiges sont fixées sur une plaque métallique, elle-même fixée sur le chariot. Celui-ci, qui entraîne également l'obstacle, est accroché à un fil, lequel est fixé sur le tambour et passant sur une poulie, disposée à l'autre extrémité du canal, avant de revenir vers le tambour. De ce fait, le chariot peut être accroché à n'importe quel point désiré par rapport à l'obstacle ( photo N°15). Ceci nous permet d'avoir des profils de vitesses à différents endroits par rapport à l'obstacle.

**Photographie N°15**

Pour respecter la longueur limitée de la fibre optique du laser, nous avons placé, de chaque côté du canal, des fins de courses (micro-switch) pour que le chariot, transportant le laser, s'arrête aux endroits voulus ( photo N°16). Ces micro-switch sont reliés au variateur de fréquence qui commande le mouvement de va-et-vient. Dès que le chariot arrive au micro-switch, l'obstacle s'arrête.

**Photographie N°16**

**II-7-2/ Mesure des longueurs d'ondes**

L'instrument utilisé pour la mesure de la longueur d'onde est un appareil photo ; le choix de la façon de l'utiliser dépend de la nature de l'onde.

**◆ cas des ondes de gravité**

Le déplacement de l'obstacle génère une onde. Une prise de vue de cette onde est effectuée à l'aide de l'appareil photo, placé à une distance suffisante de la paroi, afin d'avoir une photographie nette.

Sur la deuxième paroi du canal, nous avons posé une feuille de papier millimétré qui sert de référence.

Une fois la photographie acquise sur le fond quadrillé, on procède à son transfert sur micro-ordinateur. Sur la photo agrandie, on peut estimer la distance entre deux crêtes successives, ce qui permet de déterminer la longueur d'onde ( photo N°17). L'incertitude commise est due particulièrement à l'erreur de parallaxe.

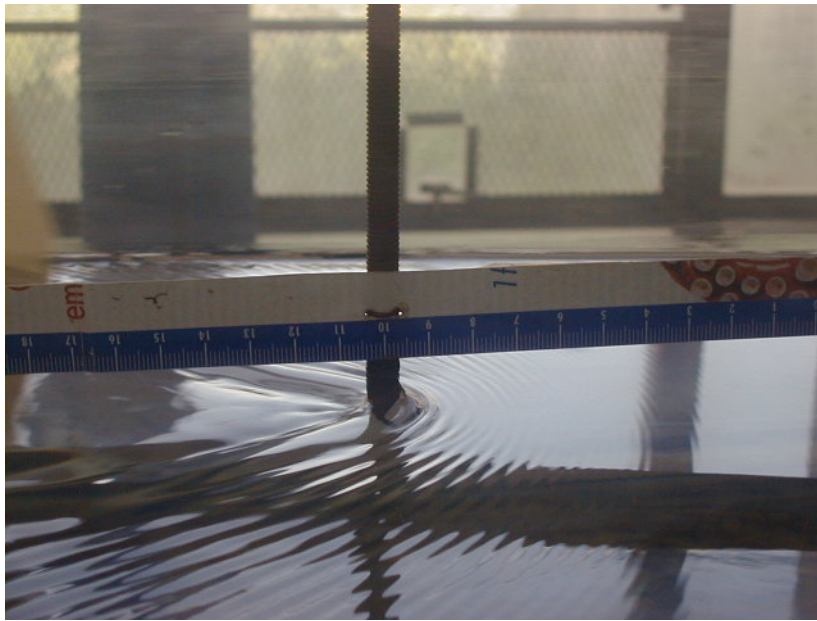


**Photographie n°17**

**◆ cas des ondes de capillarité**

L'obstacle qui génère les ondes se déplaçant, nous avons placé l'appareil photo sur un chariot qui se déplace avec l'obstacle.

Pour la dimension spatiale, nous avons accroché une règle graduée sur la tige (photo N°18).



**Photographie N°18**

Une fois la photo acquise, on transfère vers l'ordinateur la photo qui est alors agrandie pour décompter le nombre de crêtes nettes. La longueur d'onde est évaluée par le rapport de l'espace longitudinal contenant les rides, lu sur la règle, à leur nombre, en se référant aux crêtes, d'apparence plus nette, et non aux creux.

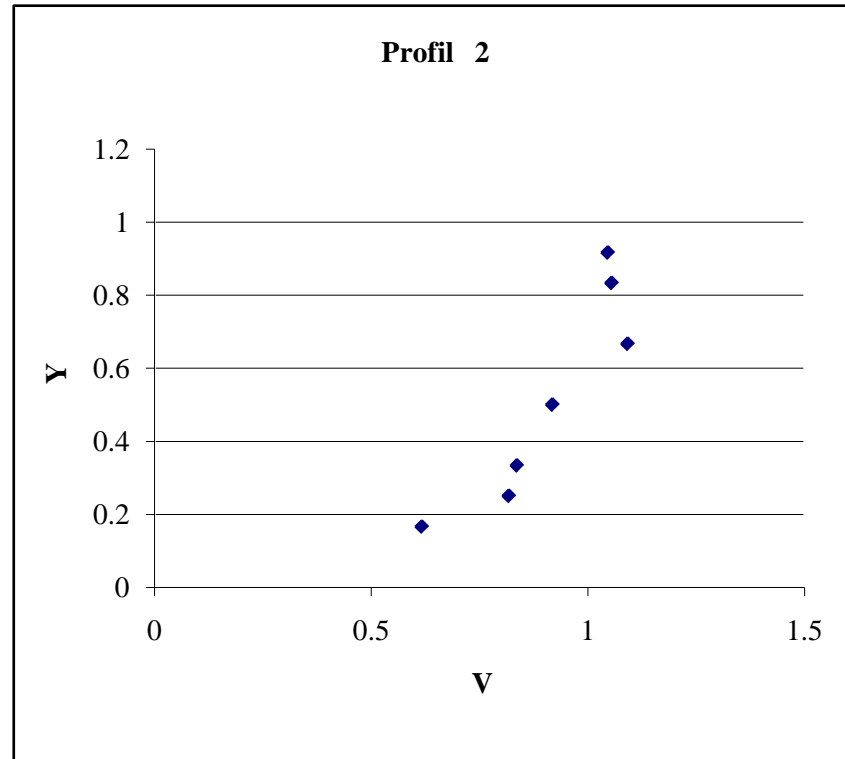
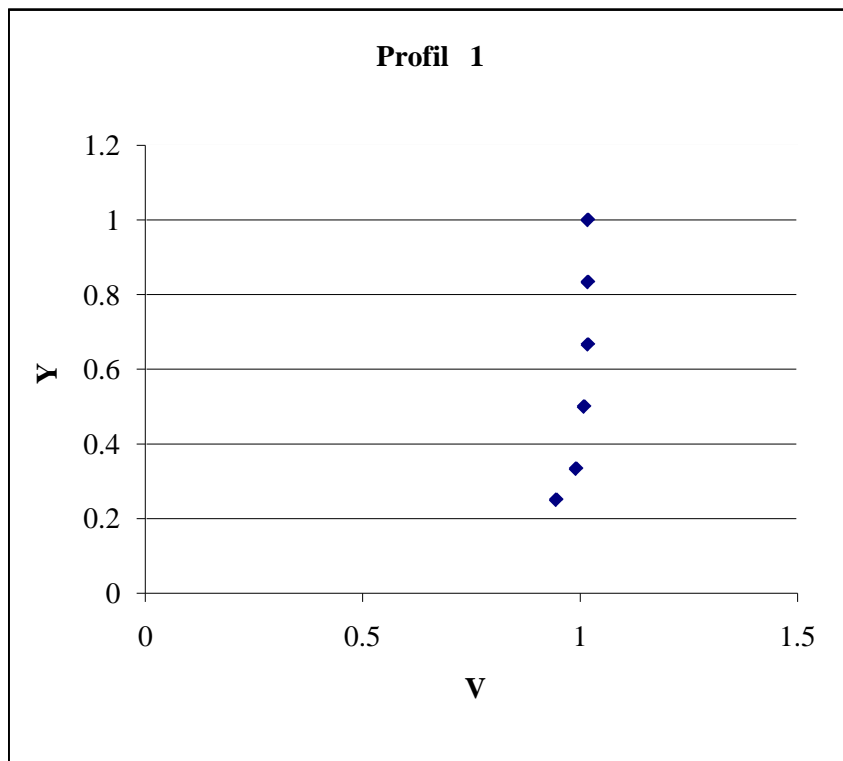
**CONCLUSION**

Après plusieurs essais, nous avons réussi à réaliser un dispositif tel que le canal, rempli d'une quantité d'eau au repos, puisse recevoir un obstacle s'y déplaçant à vitesse constante réglable.

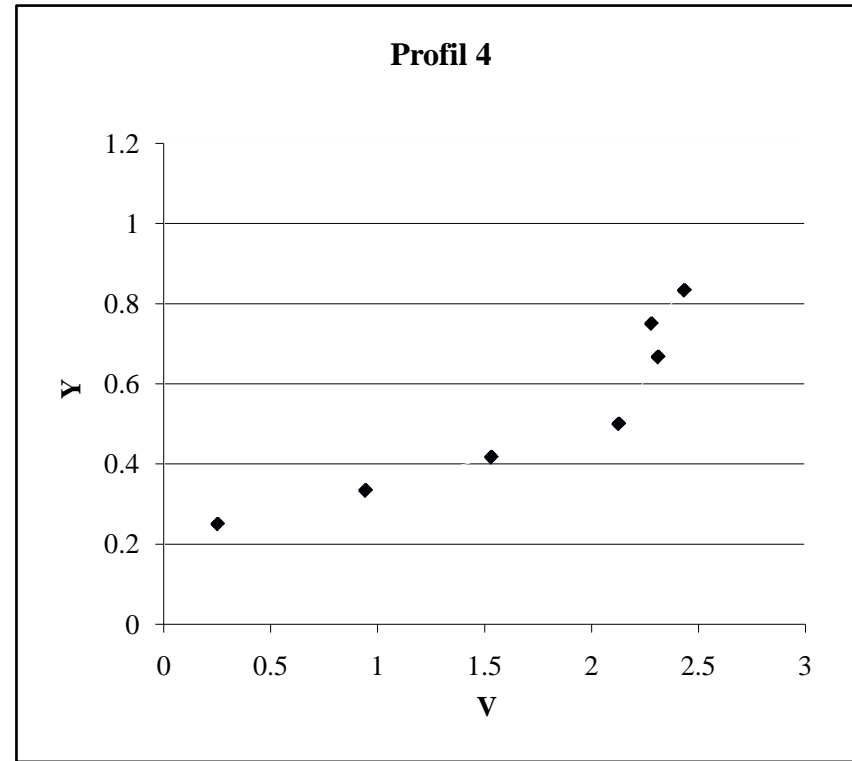
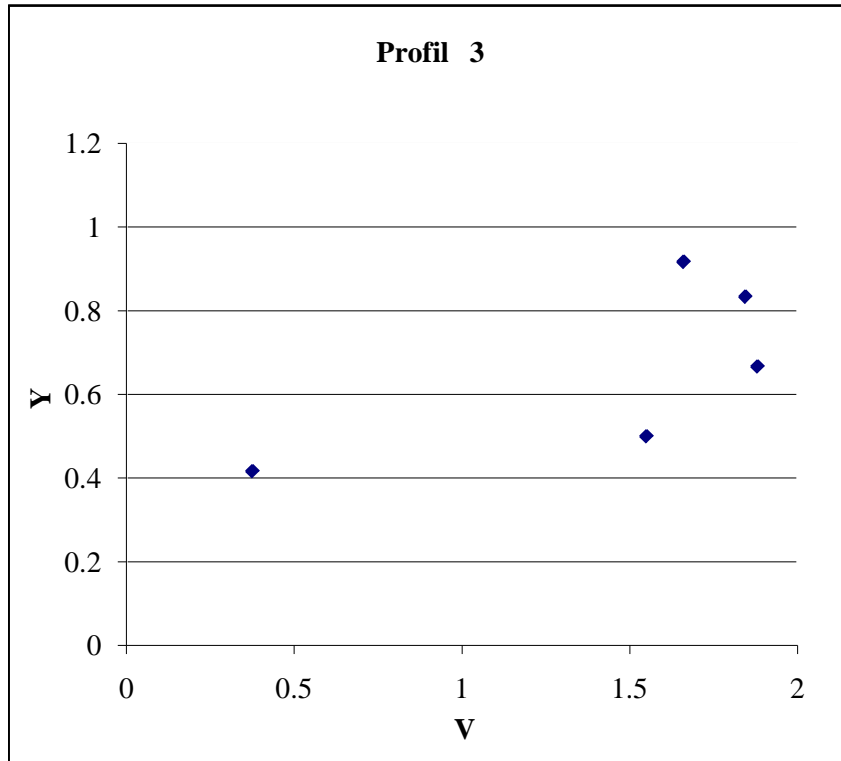
# CHAPITRE IV

## **RESULTATS EXPERIMENTAUX**

Profils de vitesses  $H=0,12m$   $U_0=0,30m/s$

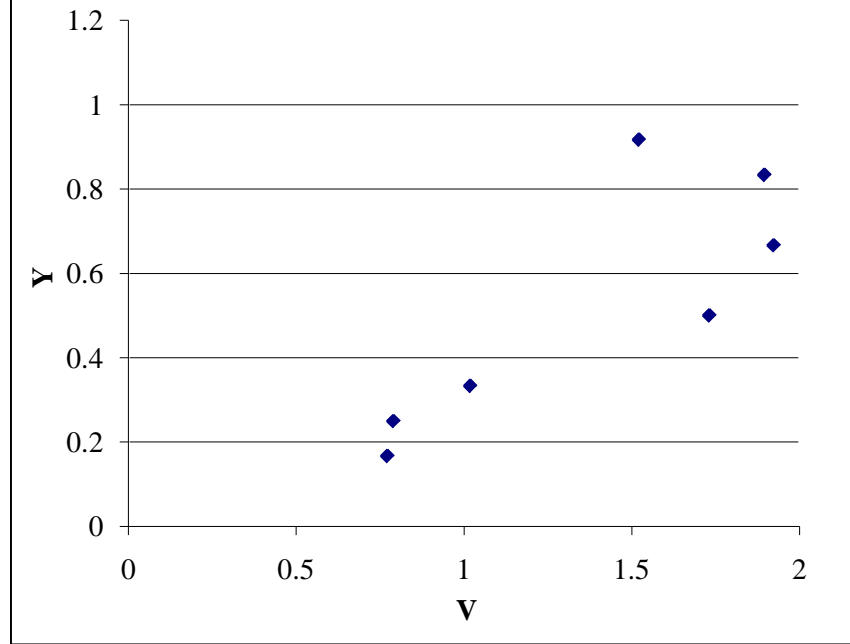


Profils de vitesses  $H=0,12m$   $U_0=0,30m/s$

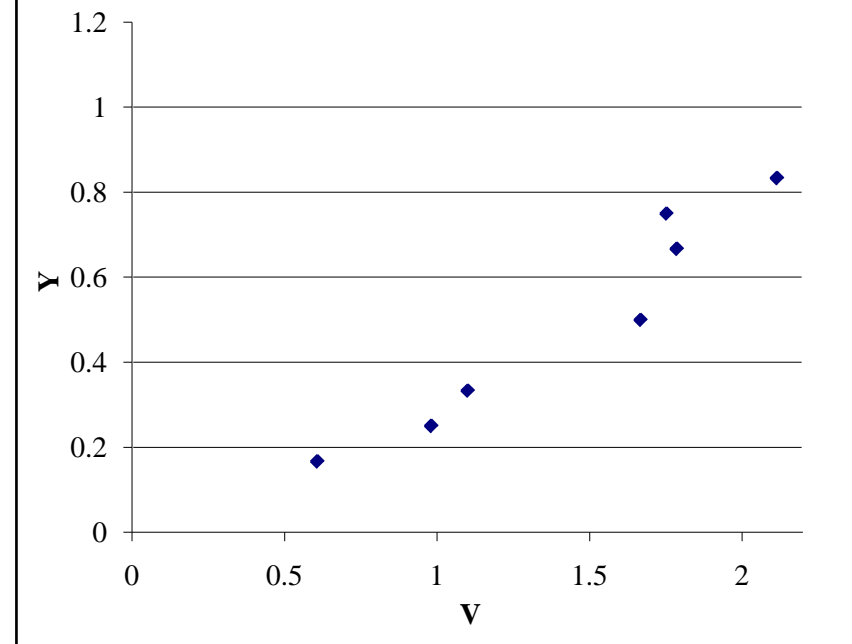


Profils de vitesses  $H=0,12m$   $U_0=0,30m/s$

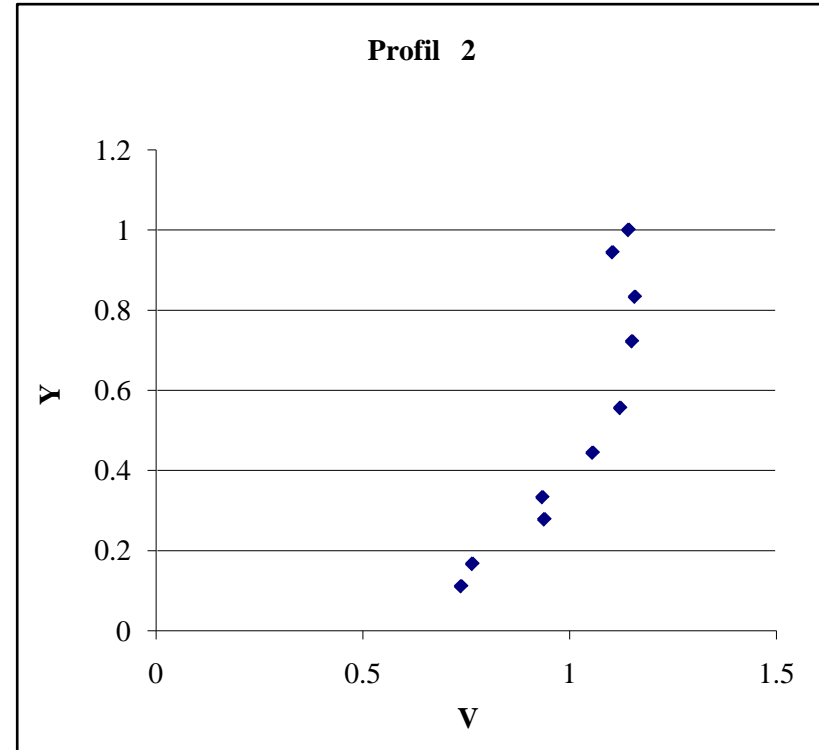
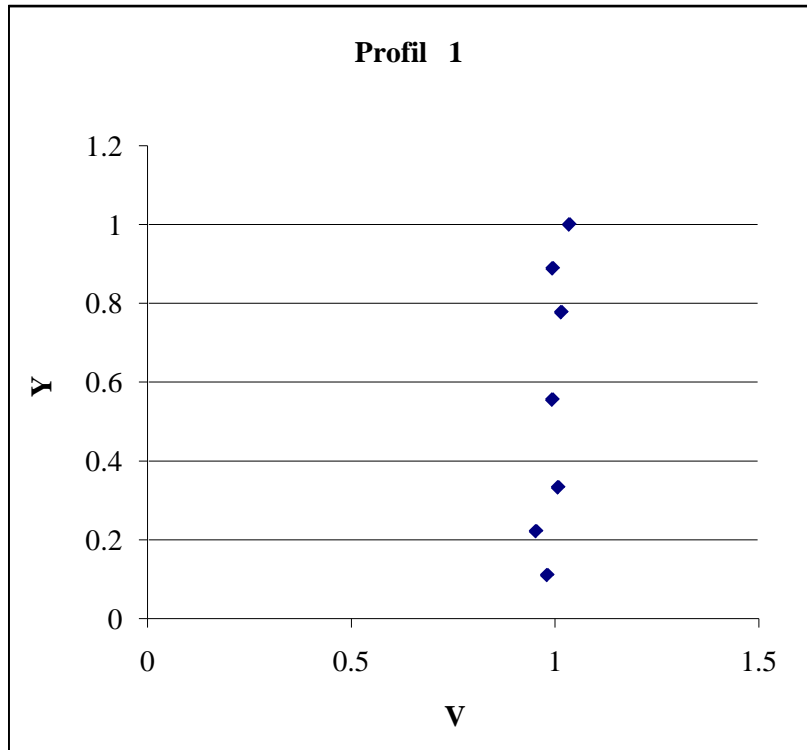
**Profil 5**



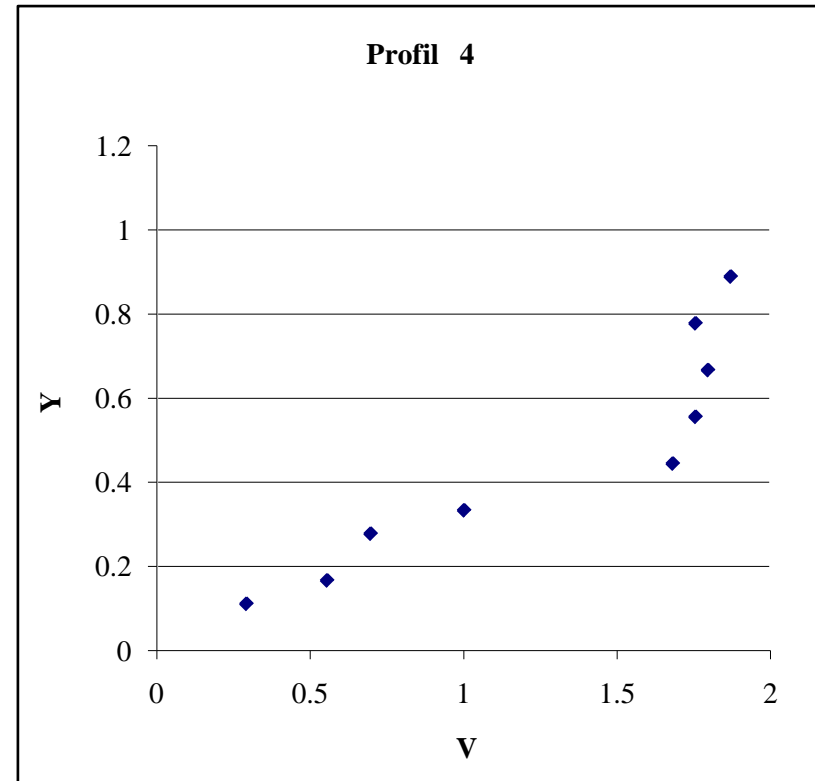
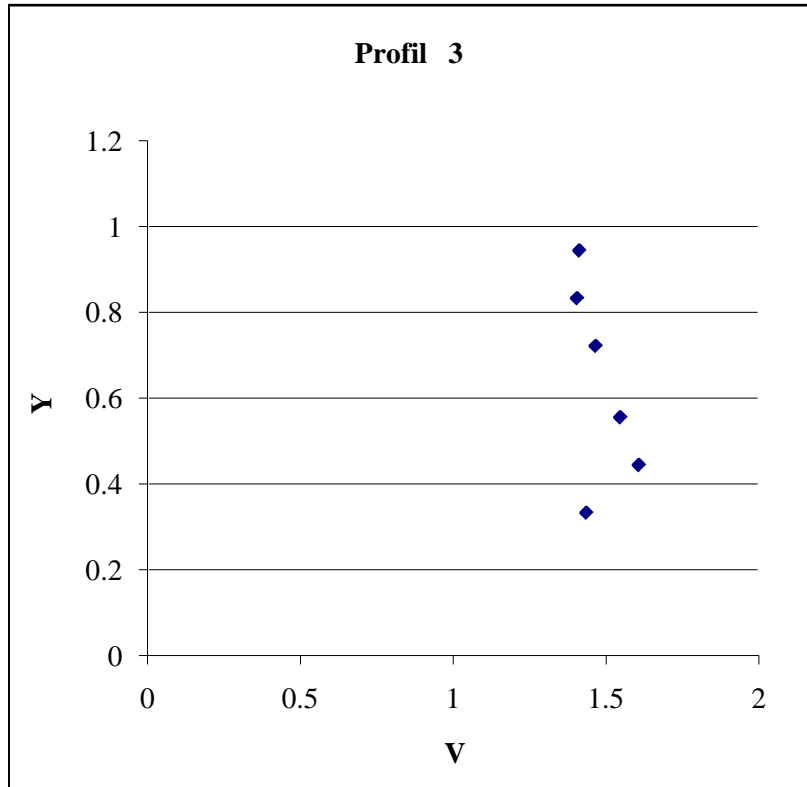
**Profil 6**



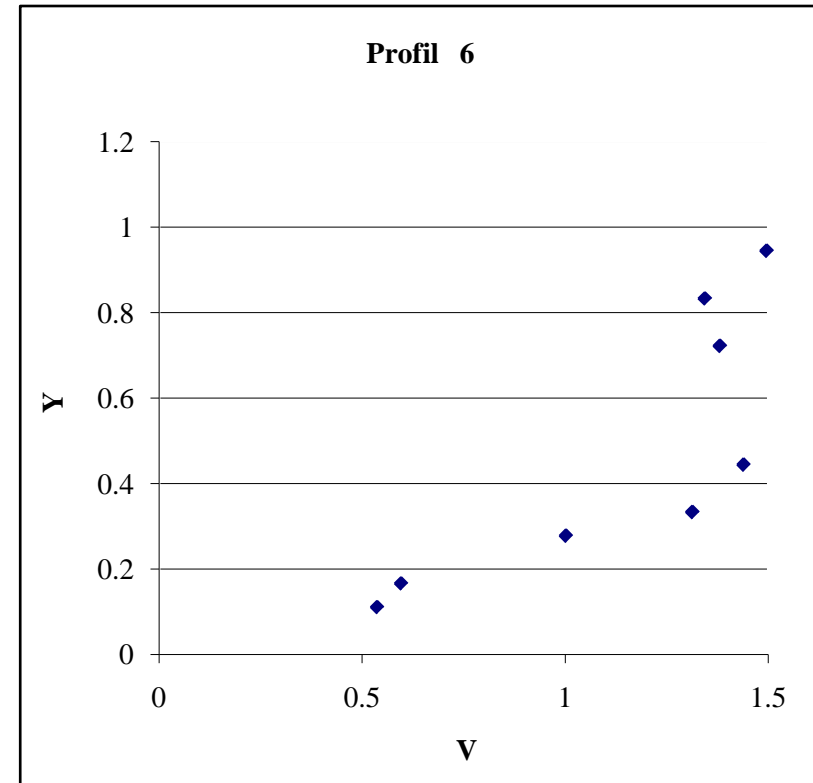
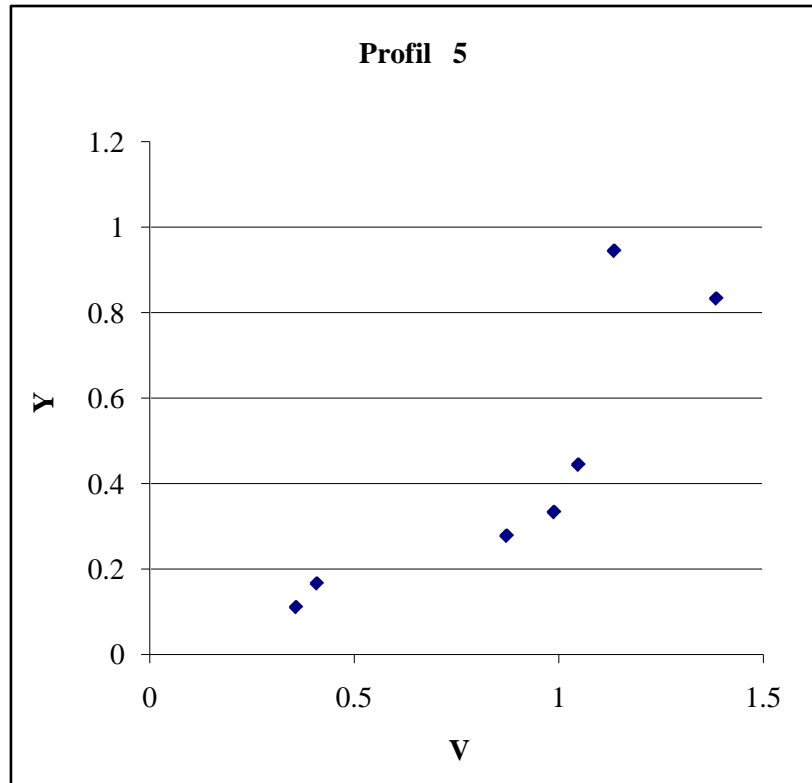
**Profils de vitesses  $H=0,18m$   $U_0=0,41m/s$**



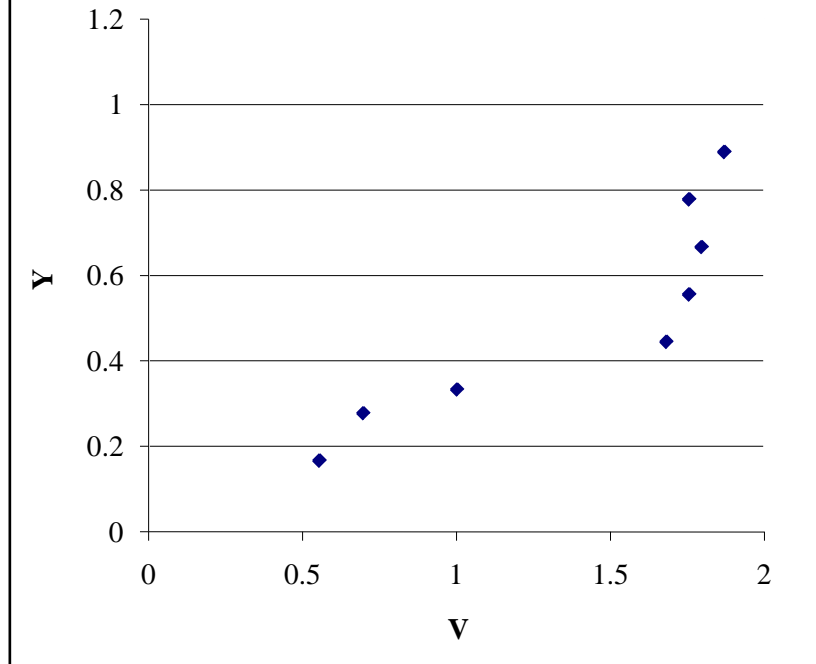
Profils de vitesses  $H=0,18m$   $U_0=0,41m/s$



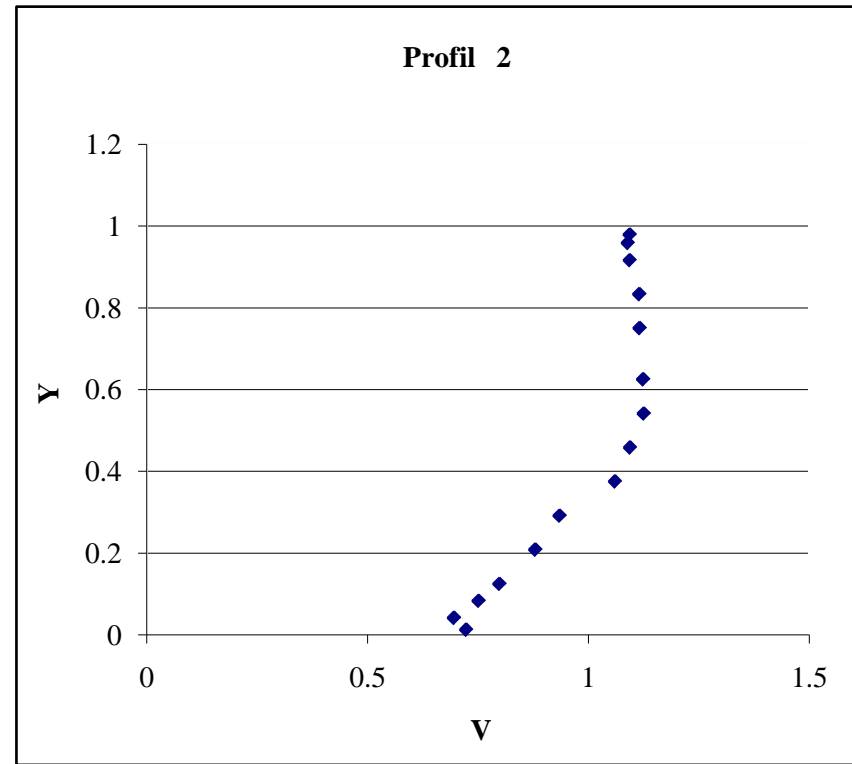
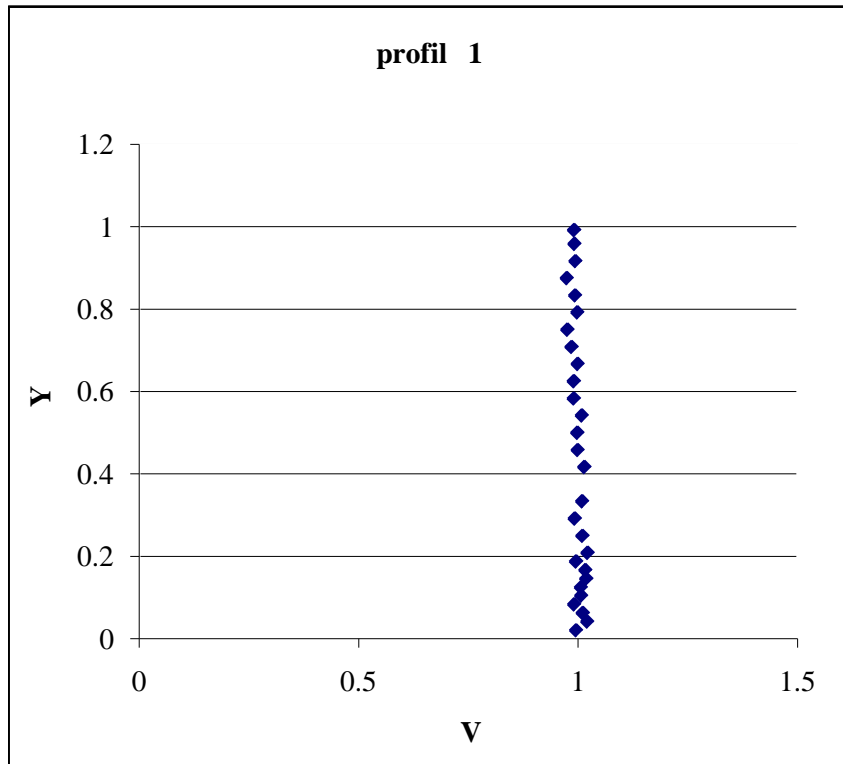
Profils de vitesses  $H=0,18m$   $U_0=0,41m/s$



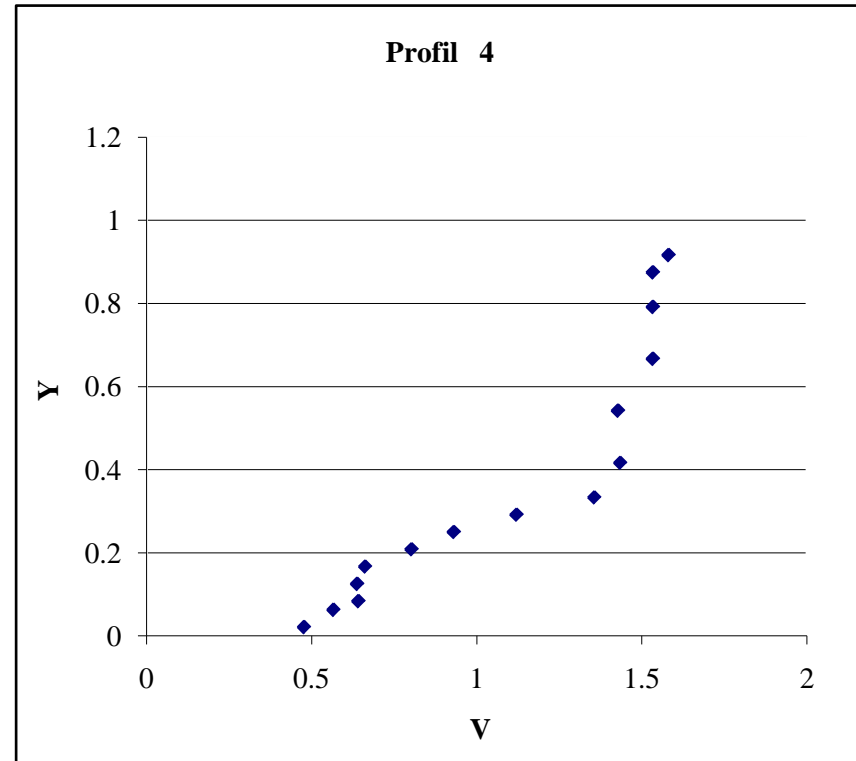
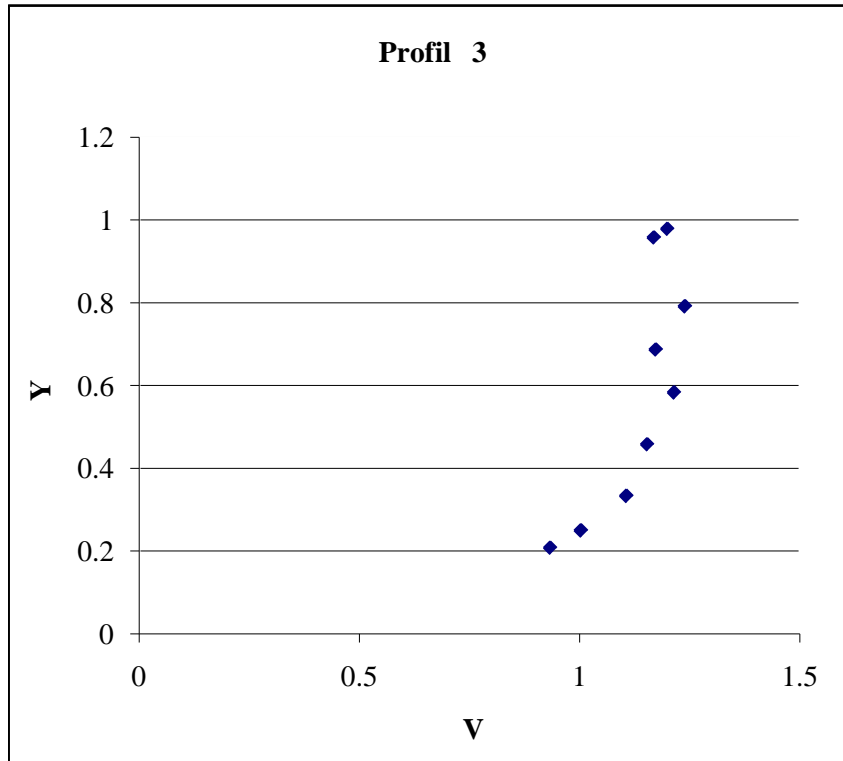
**Profil 4**



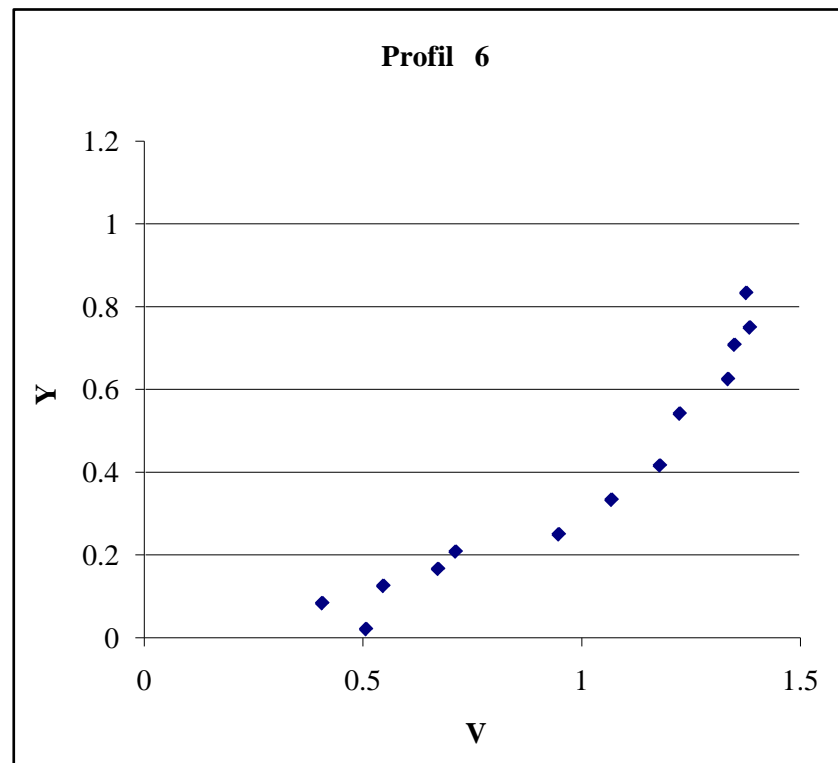
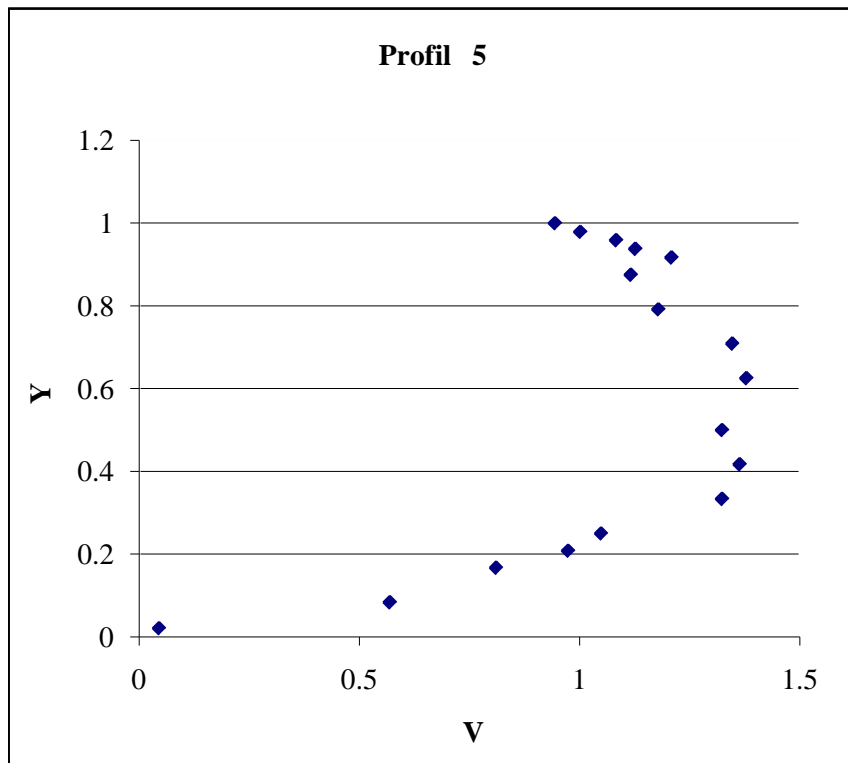
Profils de vitesses  $H=0,24m$   $U_0=0,55m/s$



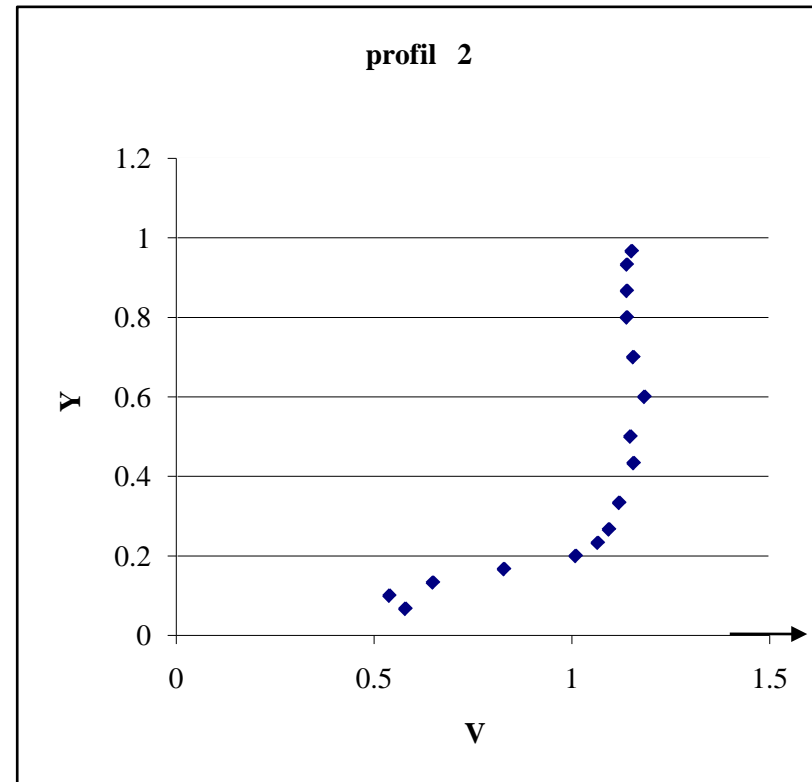
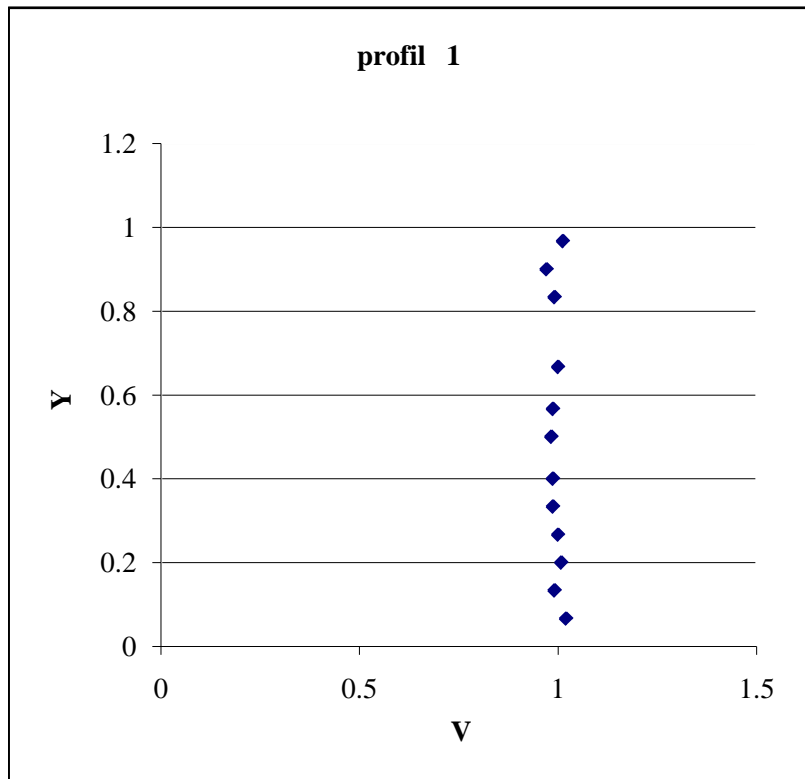
**Profils de vitesses H=0,24m Uo=0,55m/s**



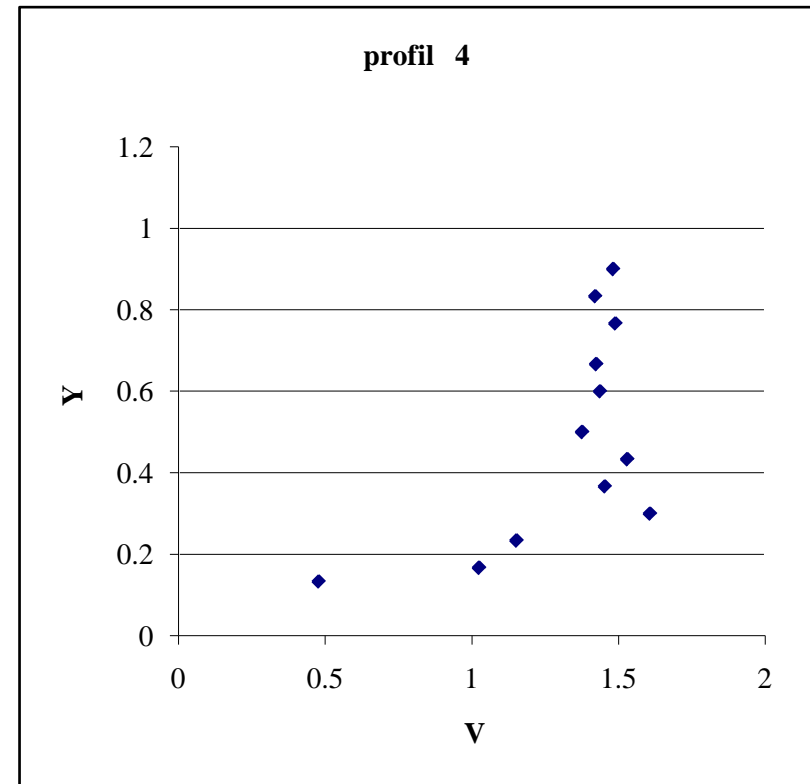
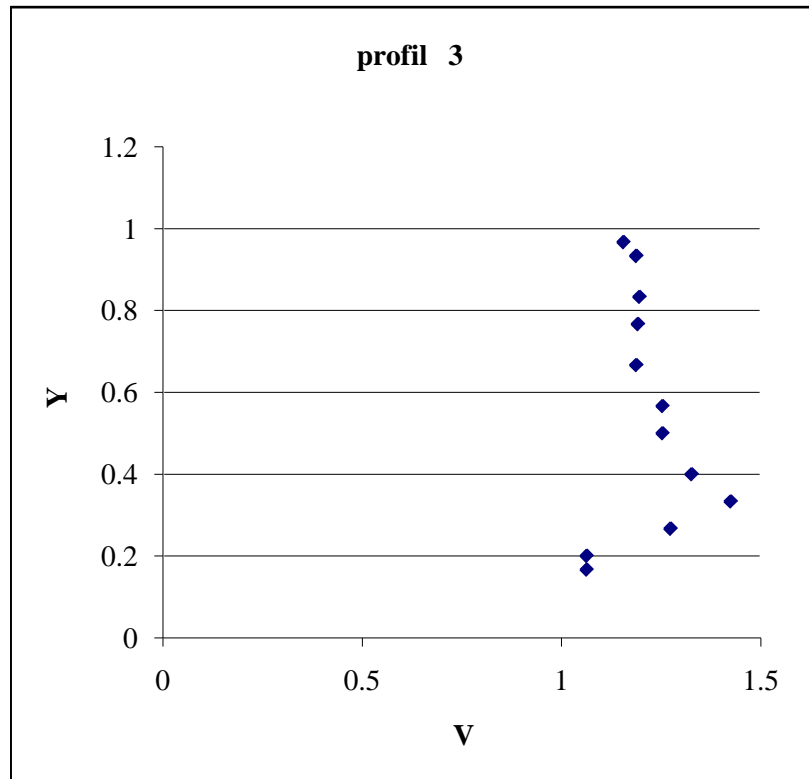
**Profils de vitesses H=0,24m Uo=0,55m/s**



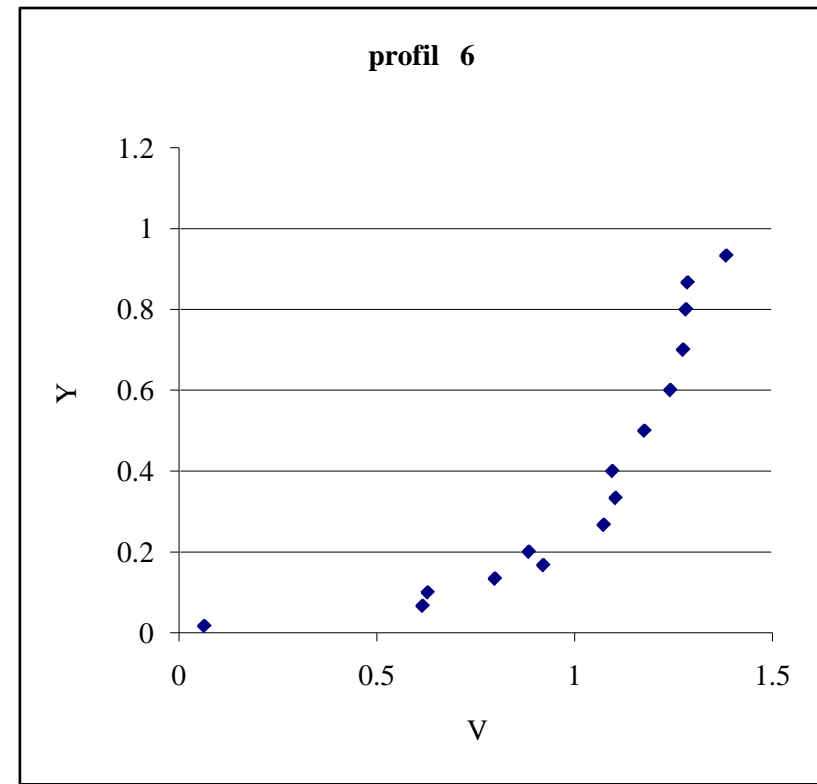
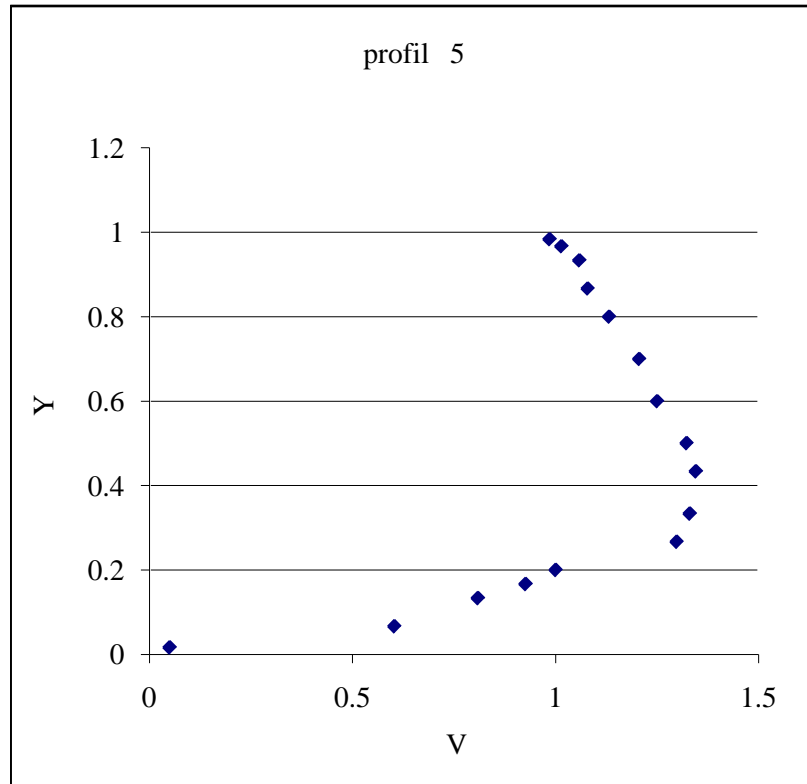
Profile de vitesse  $H_0 = 0,30\text{m}$   $U_0 = 0,68\text{ m/s}$



Profile de vitesse  $H = 0,30\text{m}$   $U_0 = 0,68 \text{ m/s}$



Profile de vitesse  $H = 0,30\text{m}$   $U_0 = 0,68\text{ m/s}$



## **INTRODUCTION**

Afin de valider les résultats de l'étude des ondes d'obstacles, obtenus dans le cadre de la théorie linéaire, il est intéressant de les confronter à la réalité d'une étude expérimentale.

C'est ainsi que nous consacrons ce dernier chapitre à l'étude expérimentale, en laboratoire. Des mesures de profils de vitesses, ainsi que des longueurs d'ondes, ont été menées pour un écoulement au dessus d'un obstacle triangulaire dans un canal hydraulique. On s'intéresse ensuite à des mesures des longueurs d'ondes des rides capillaires, qui se forment à la surface libre perturbée par une tige pointue. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à ceux issus de l'étude théorique.

## **IV-1 / RESULTATS EXPERIMENTAUX**

### **IV-1-1/ PROFILS DE VITESSES DANS UN CANAL.**

Il s'agit d'établir les profils de vitesses obtenus par mesures ponctuelles dans le canal. Pour cela, on se fixe une vitesse de déplacement de l'obstacle par le choix d'une valeur de la fréquence de rotation du tambour. La variation de celle-ci permet alors d'obtenir l'aspect désiré de la surface, comme par exemple des ondes très apparentes.

On procède à la mesure de la composante horizontale  $V$  de la vitesse en des points  $y$  allant du fond du canal jusqu'à la surface libre. Ceci est effectué pour différents nombres de Bond et nombres de Froude. Le nombre de Bond n'est fixé que par la hauteur d'eau choisie et le nombre de Froude tient compte également de la vitesse de déplacement de l'obstacle.

Pour chaque hauteur d'eau, six profils de vitesses ont été effectués de la façon suivante :

- un profil de référence à 50cm en amont de l'obstacle
- 5 profils P aux emplacements indiqués sur la figure IV.1.

Le choix de la position des sections de mesure a été fait en se référant à la forme géométrique de la surface libre, et de l'obstacle, comme dans [7], à savoir :

- section 1 : assez loin en amont de l'obstacle.
- section 2 : début de l'obstacle .
- section 3 : sommet de l'obstacle .
- section 4 : 1<sup>ère</sup> dépression.
- section 5 : 1<sup>ère</sup> crête d'onde.
- section 6 : 1<sup>er</sup> creux d'onde.

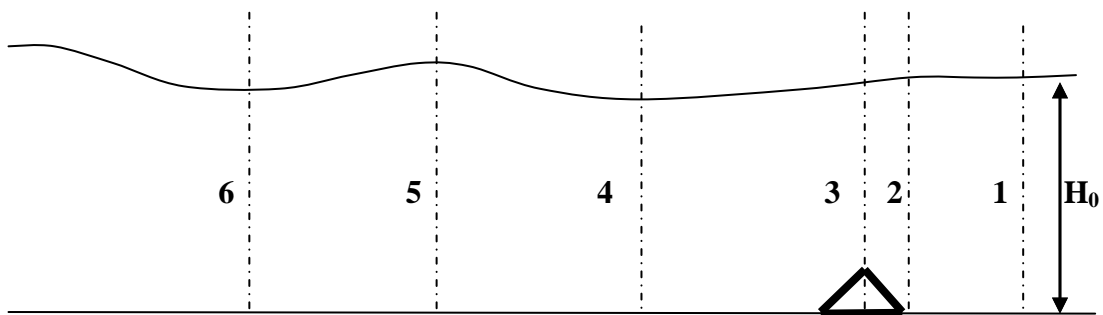


Figure IV.1 Position des sections de mesure

Afin de procéder plus aisément à des comparaisons avec d'autres résultats, on représente les profils sous forme adimensionnelle en utilisant la vitesse moyenne  $U_0$  mesurée à 50cm en amont de l'obstacle, et la hauteur d'eau au repos  $H_0$ , comme grandeurs de référence.

Les résultats obtenus sont présentés sous forme adimensionnelle, dans des tableaux (annexe I)

A partir de ces tableaux, on représente les différents profils de vitesses, sur les figures (IV.2.a, IV.2.b, IV.2.c et IV.2.d).

Après analyse de ces profils, nous avons constaté ce qui suit :

En amont de l'obstacle, (profils de vitesses enregistrés à 0.50m), on remarque une quasi uniformité des profils dans la section du canal et ce pour les différentes hauteurs d'eau.

Au niveau de la section 2, on constate que la vitesse augmente jusqu'au milieu de la section du canal, puis diminue ; l'écoulement est ensuite accéléré au voisinage de la surface libre.

Au droit du sommet de l'obstacle (section 3), la veine liquide est rétrécie du fait de la présence de l'obstacle ; on enregistre ainsi des vitesses plus importantes.

En aval, au niveau des creux qui correspondent aux sections 4 et 6, le fluide est accéléré du fait que la section mouillée est réduite. On note une accélération au voisinage de la surface libre. Ceci est en accord avec les prédictions théoriques.

Au niveau des crêtes (section 5), le fluide est ralenti au voisinage de la surface libre ; ceci pourrait expliquer la présence de « bouffées de turbulence » déjà mentionnées par [6].

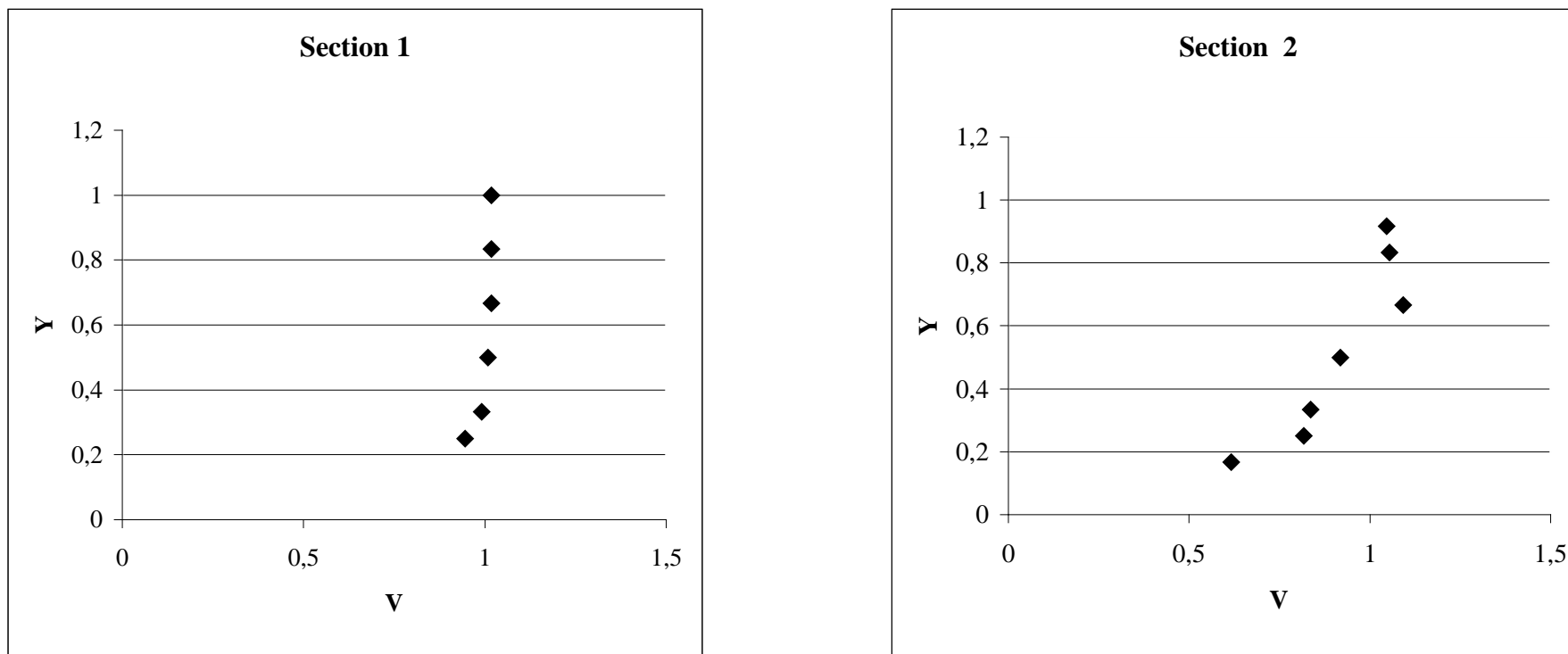


Figure IV-2-a Profils de vitesse pour  $H_0=0.12$ ;  $U_0=0.30\text{m/s}$ ;  $Fr = 0.28$

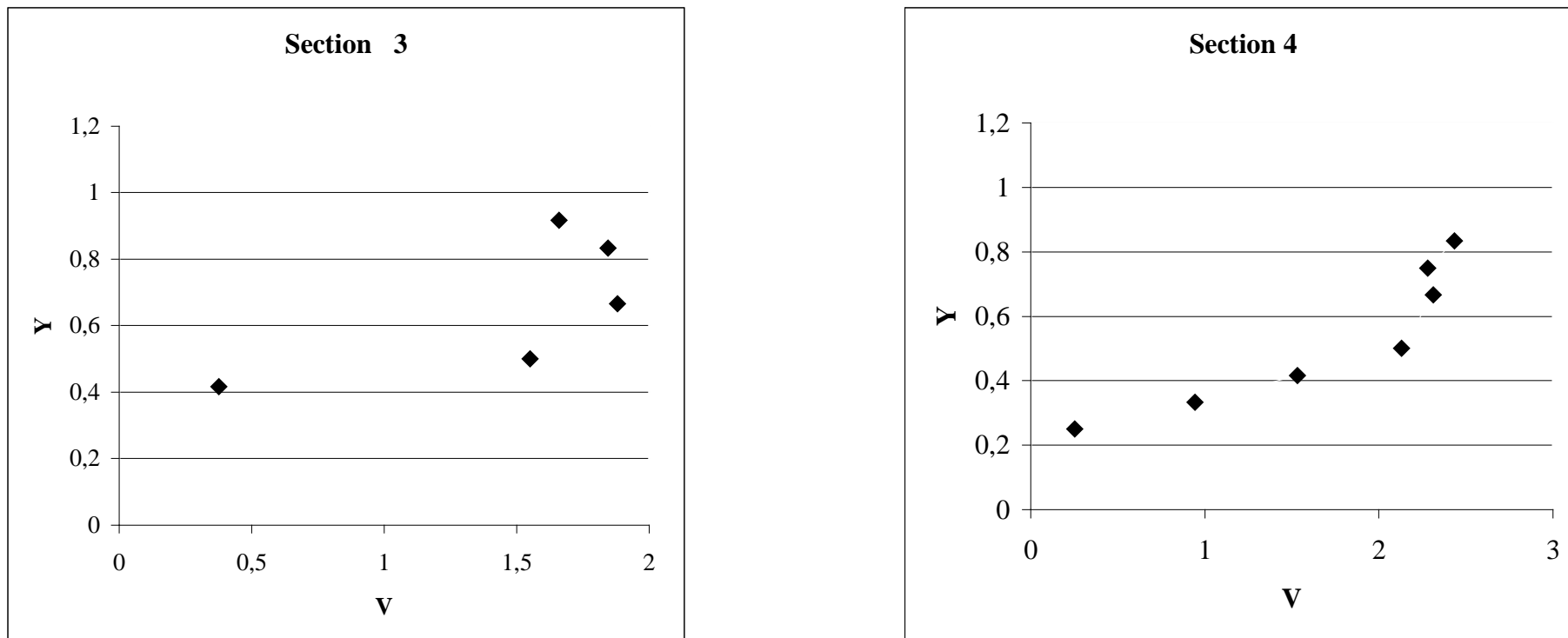


Figure IV-2-b Profils de vitesse pour  $H_0=0.12m$ ;  $U_0=0.30m/s$ ;  $Fr = 0.28$

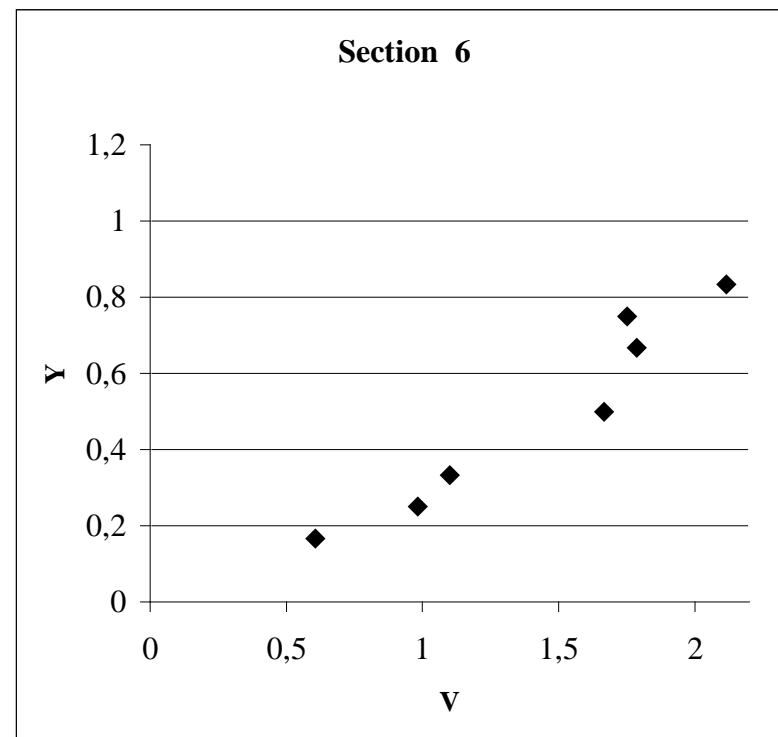
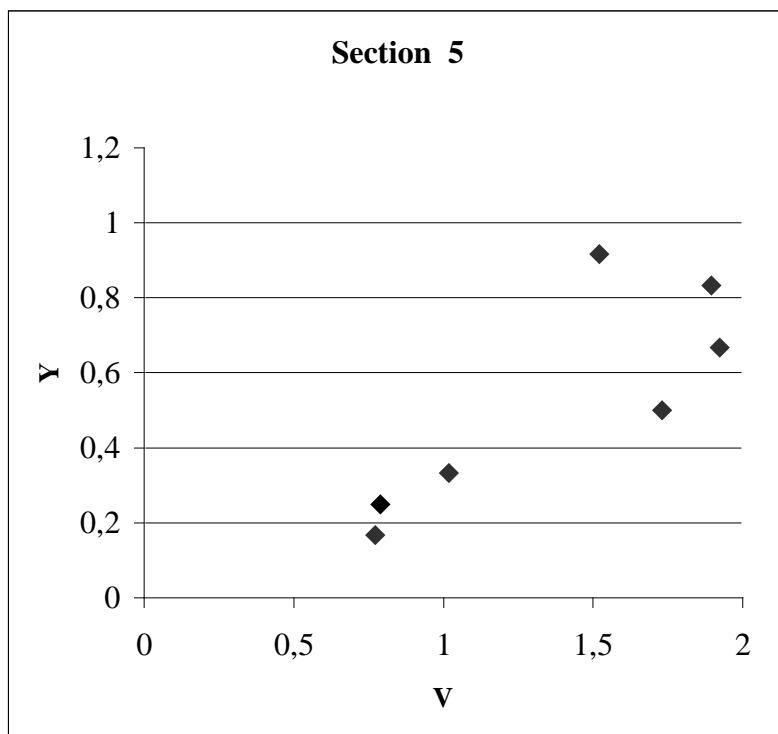
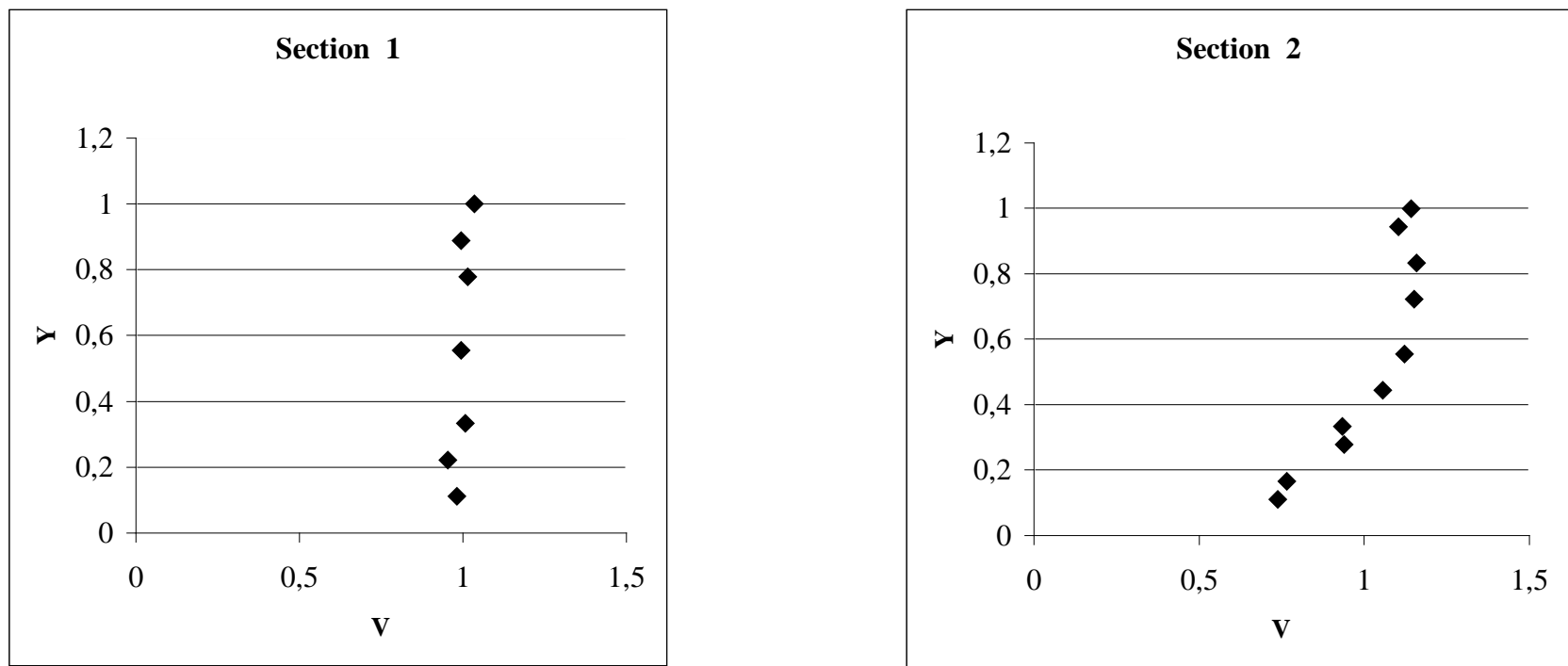


Figure IV-2-c Profils de vitesse pour  $H_0=0.12m$ ;  $U_0=0.30m/s$ ;  $Fr = 0.28$



**Figure IV-3-a** Profils de vitesse pour  $H_0=0.18m$ ;  $U_0=0.41m/s$ ;  $Fr = 0.31$

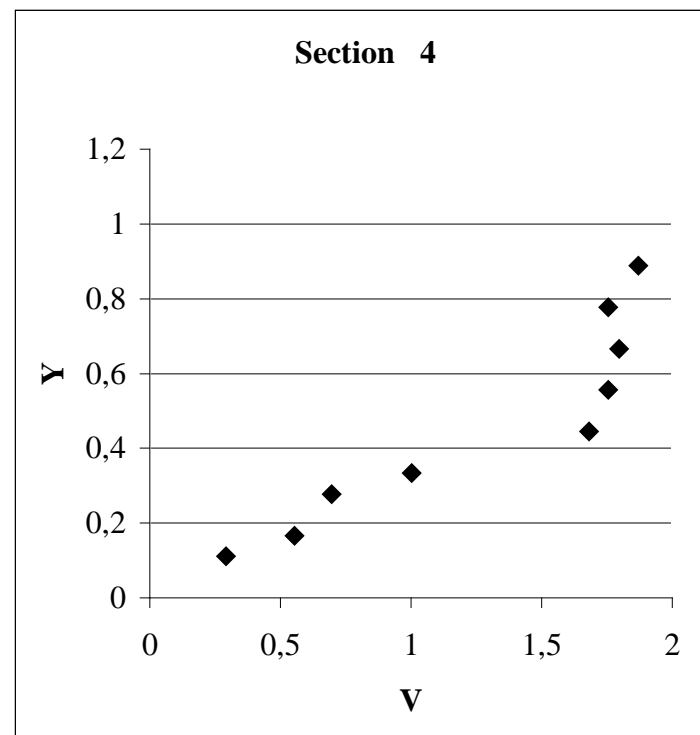
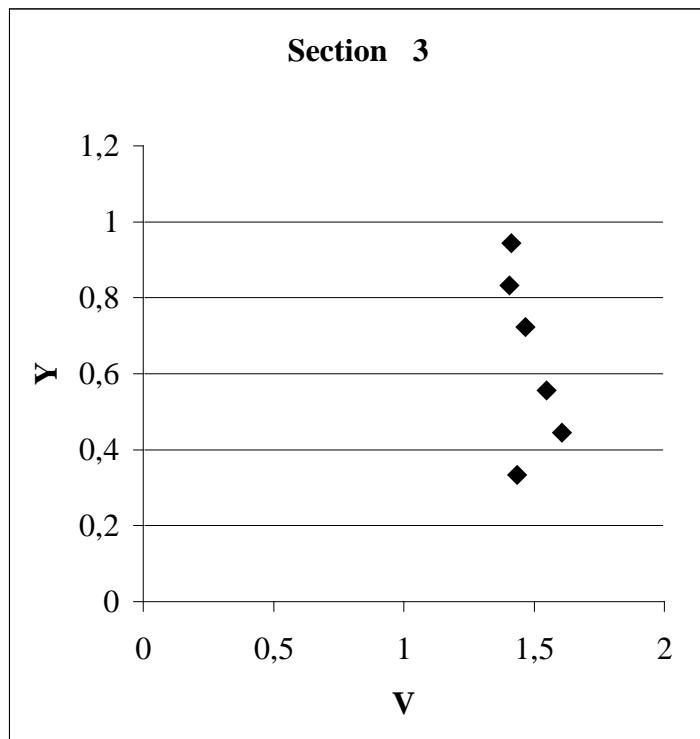


Figure IV-3-b Profils de vitesse pour  $H_0=0.18m$ ;  $U_0=0.41m/s$ ;  $Fr = 0.31$

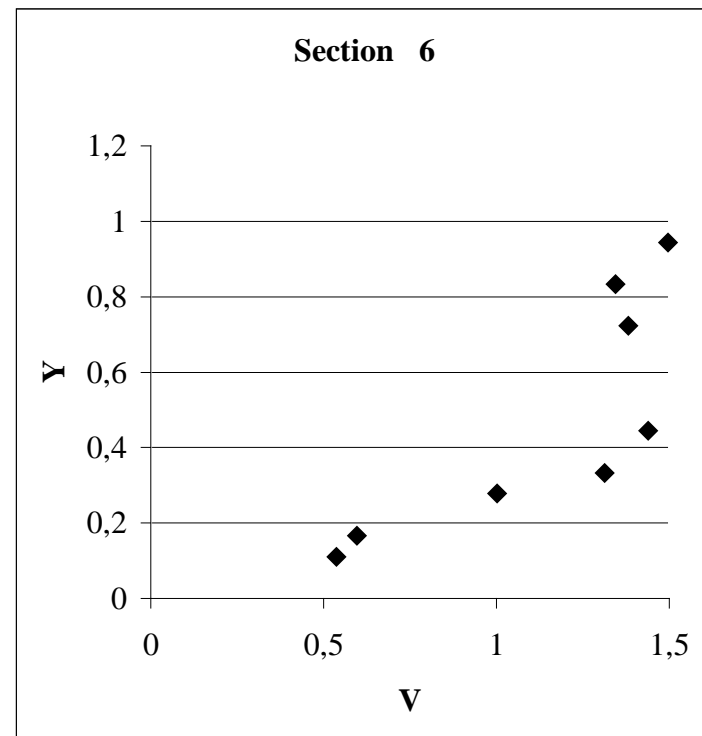
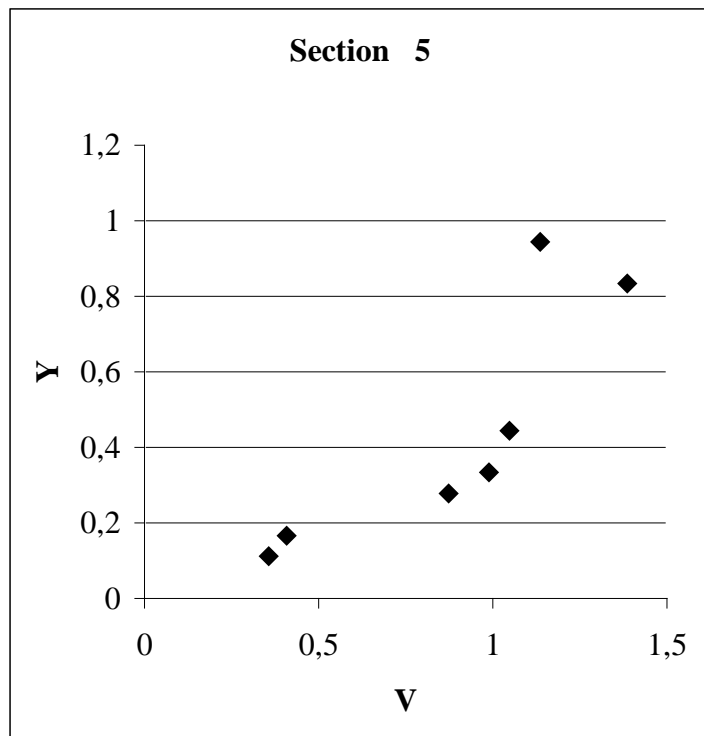


Figure IV-3-c Profils de vitesse pour  $H_0=0.18m$ ;  $U_0=0.41m/s$ ;  $Fr = 0.31$

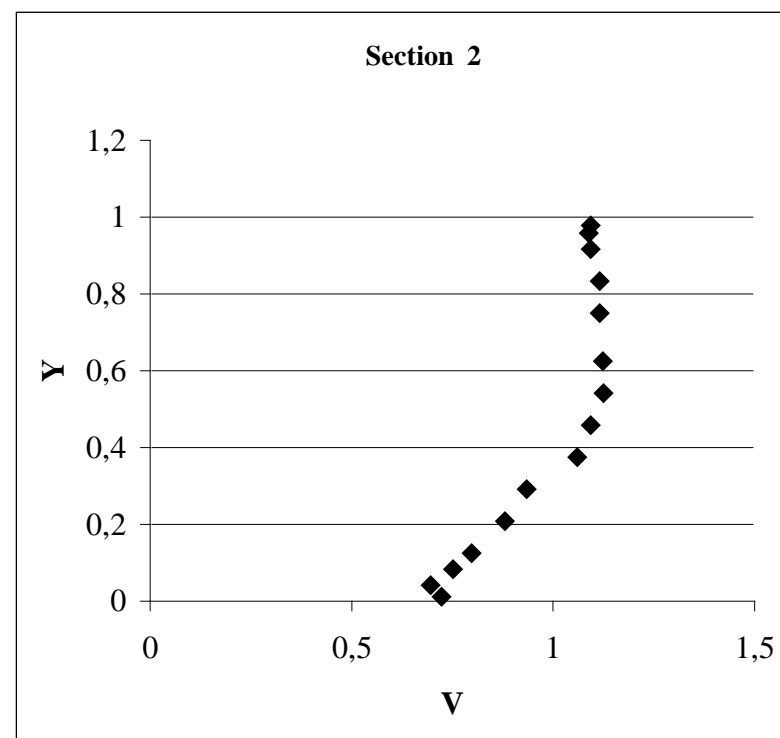
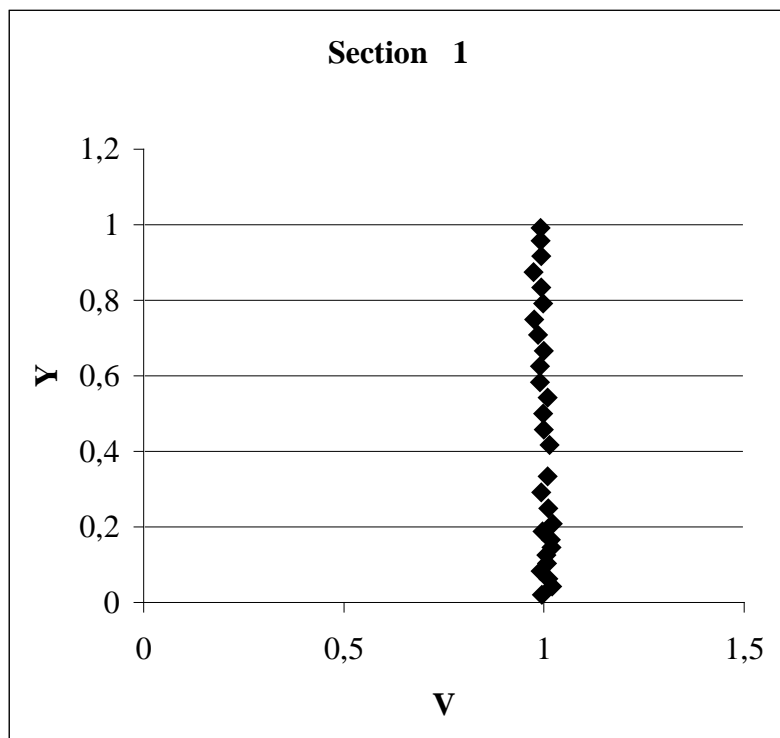


Figure IV-4-a Profils de vitesse pour  $H_0=0.24m$ ;  $U_0=0.55m/s$ ;  $Fr =0.36$

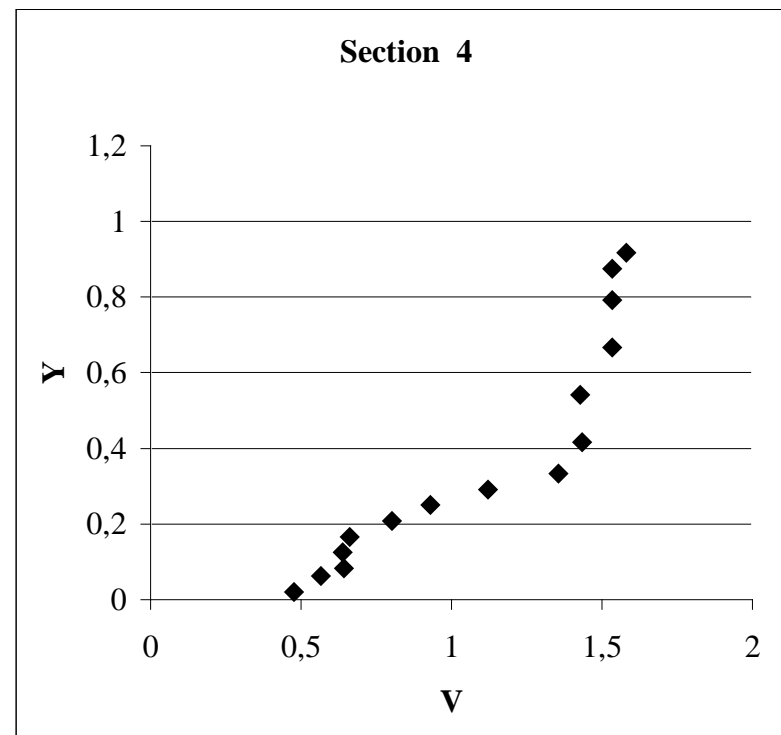
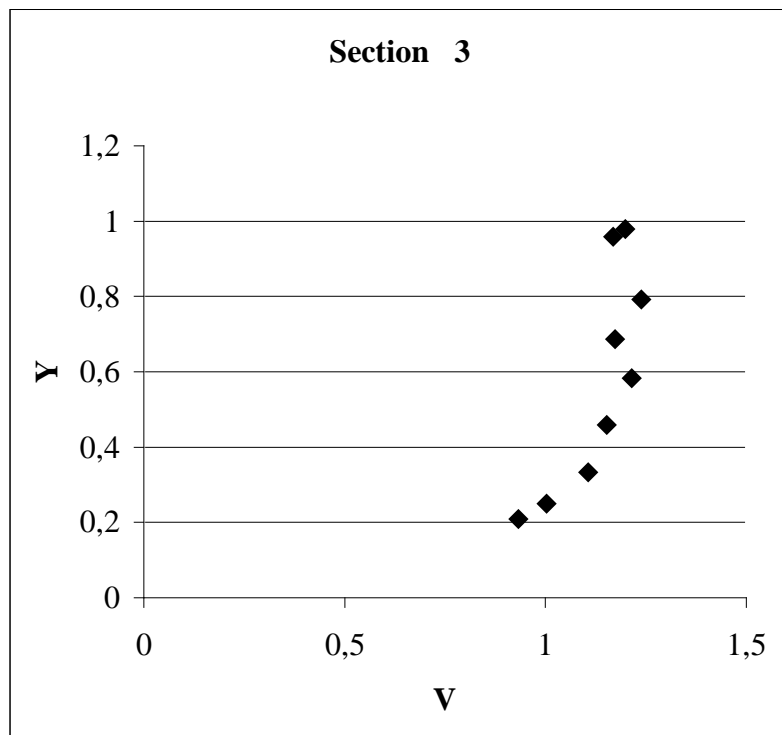


Figure IV-4-b Profils de vitesse pour  $H_0=0.24m$ ;  $U_0=0.55m/s$ ;  $Fr = 0.36$

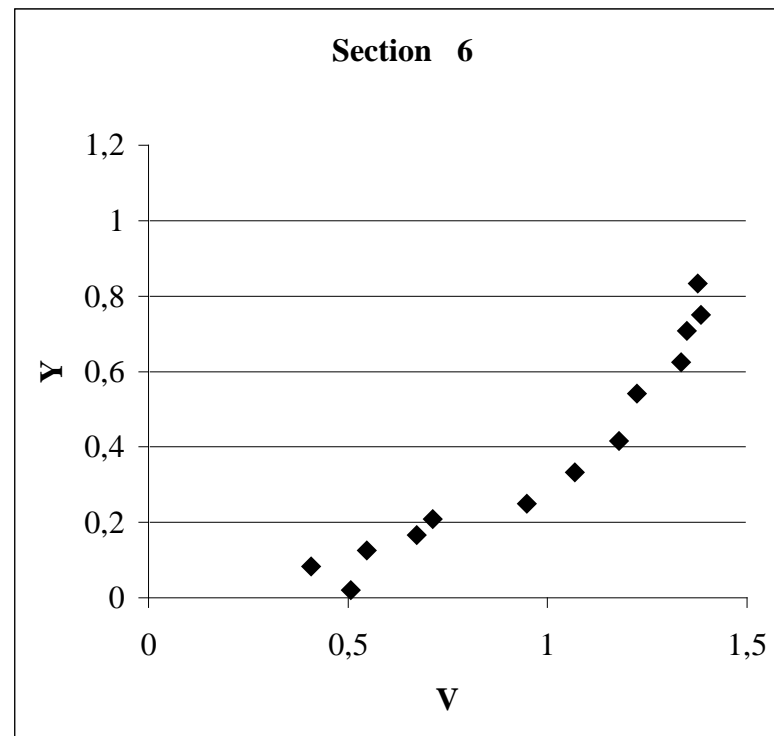
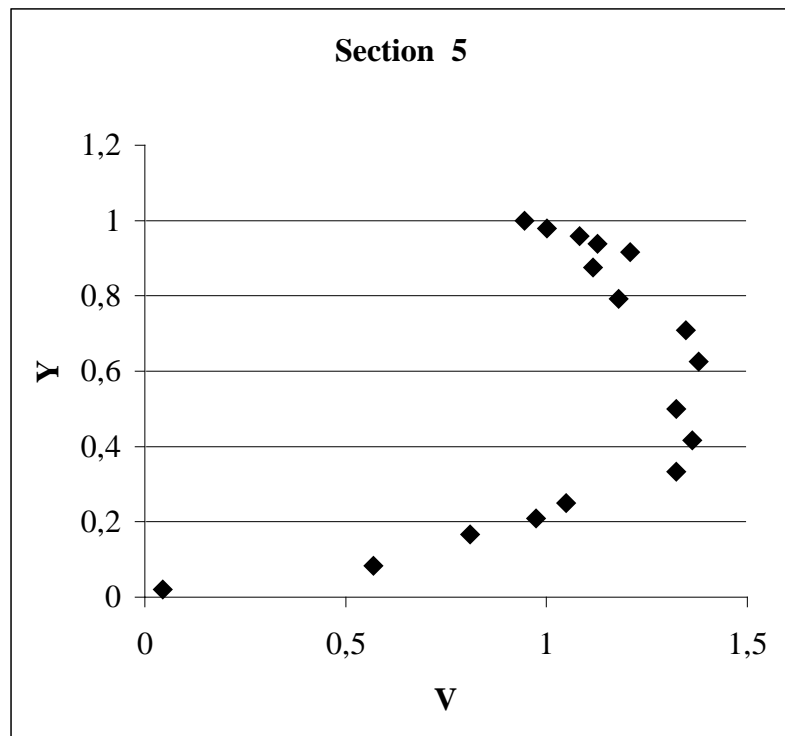


Figure IV-4-c Profils de vitesse pour  $H_0=0.24m$ ;  $U_0=0.55m/s$ ;  $Fr = 0.36$

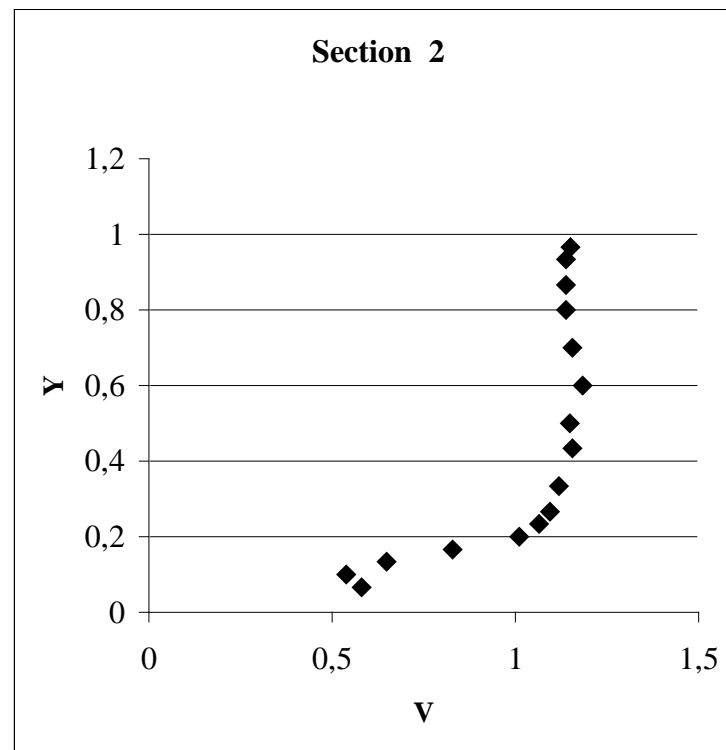
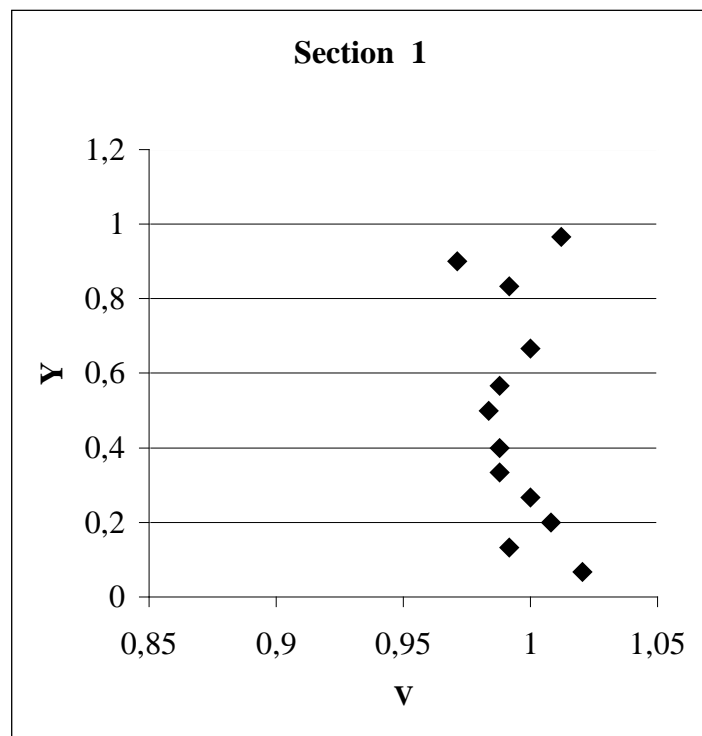


Figure IV-5-a Profils de vitesse pour  $H_0=0.30m$ ;  $U_0=0.68m/s$ ;  $Fr = 0.40$

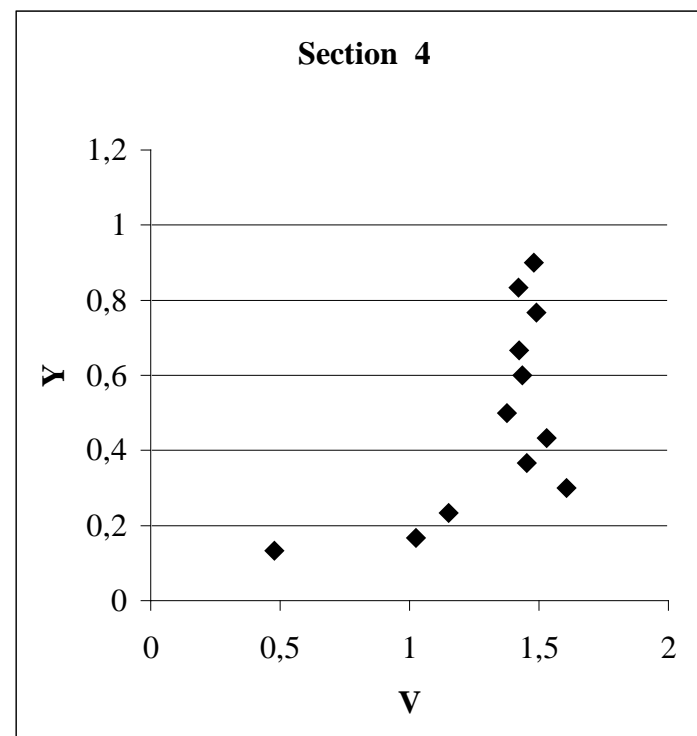
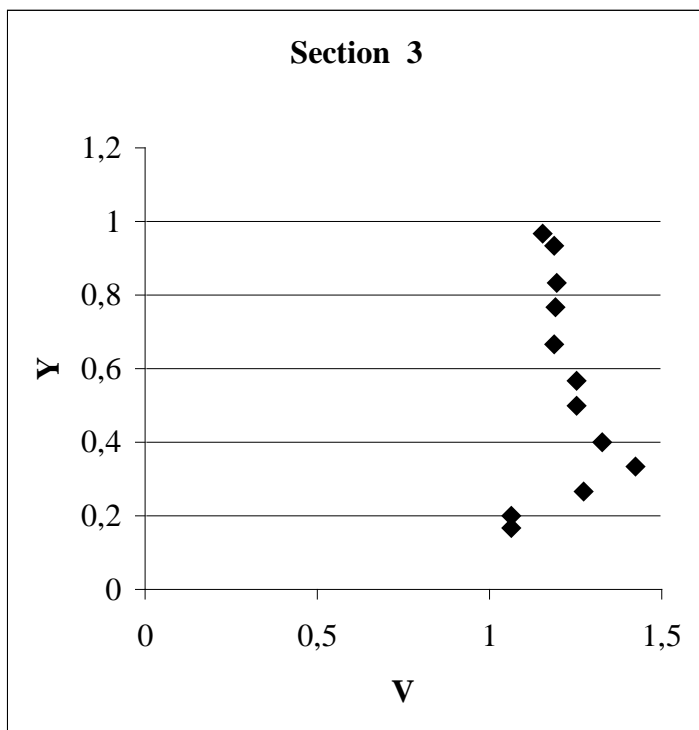


Figure IV-5-b Profils vitesse pour  $H_0=0.30m$ ;  $U_0=0.68m/s$ ;  $Fr = 0.40$

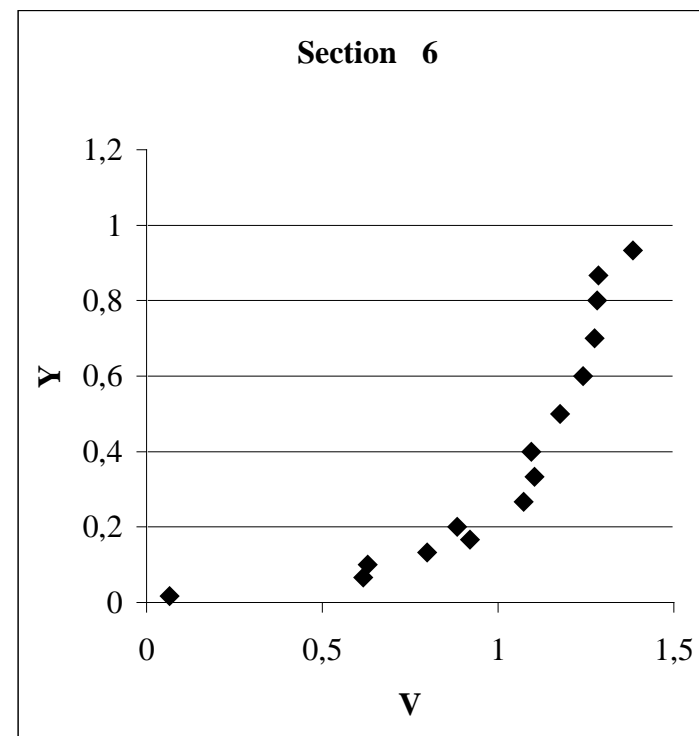
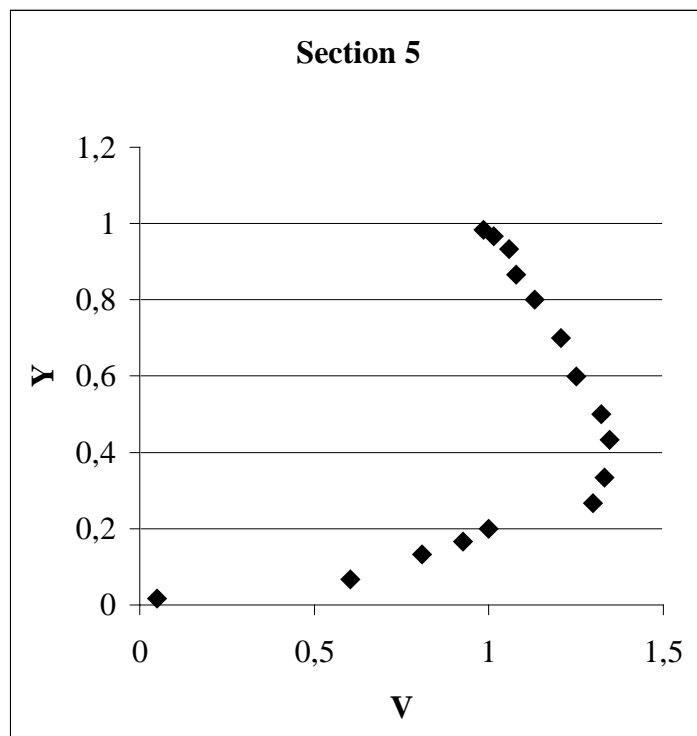


Figure IV-5-c Profils de vitesse pour  $H_0=0.30m$ ;  $U_0=0.68m/s$ ;  $Fr = 0.40$

**IV-1-2/ SURFACE LIBRE****IV-1-2-a / Ondes de gravité**

La surface libre présente différents aspects en fonction de la valeur du nombre de Froude.

Lorsque le nombre de Froude est relativement faible, il apparaît une dépression locale au-dessus de l'obstacle, suivie d'une surface libre très peu perturbée (photo IV.1).



**Photographie IV.1**

En augmentant le nombre de Froude, la dépression se creuse et est suivie d'une onde (photo IV.2).



**Photographie IV.2**

En augmentant davantage le nombre de Froude, il y a formation d'un ressaut turbulent (photo IV.3).



**Photographie IV.3**

En supposant un écoulement de fluide parfait unidimensionnel, et par application des principes généraux de conservation (charge et débit), on montre (annexe II) que le régime d'écoulement où apparaît un ressaut hydraulique peut être défini graphiquement dans l'espace supérieur délimité par la courbe (figure IV-6) d'équation :

$$F_r^2 - 3F_r^{2/3} - 2(b-1) = 0$$

où  $Fr$  est le nombre de Froude

et  $b$  la hauteur maximale adimensionnelle de l'obstacle.

Si on augmente progressivement la vitesse, le ressaut turbulent sera atteint pour des vitesses relativement élevées. Il s'ensuit que, pour des vitesses plus faibles, le régime d'écoulement est soit sans ondes, soit ondulé. Ces deux régimes fluviaux correspondent à des nombres de Froude locaux partout inférieurs à l'unité (partie inférieure de la courbe). Nous avons représenté, sur la figure IV.6, les points expérimentaux avec l'état correspondant de la surface libre.

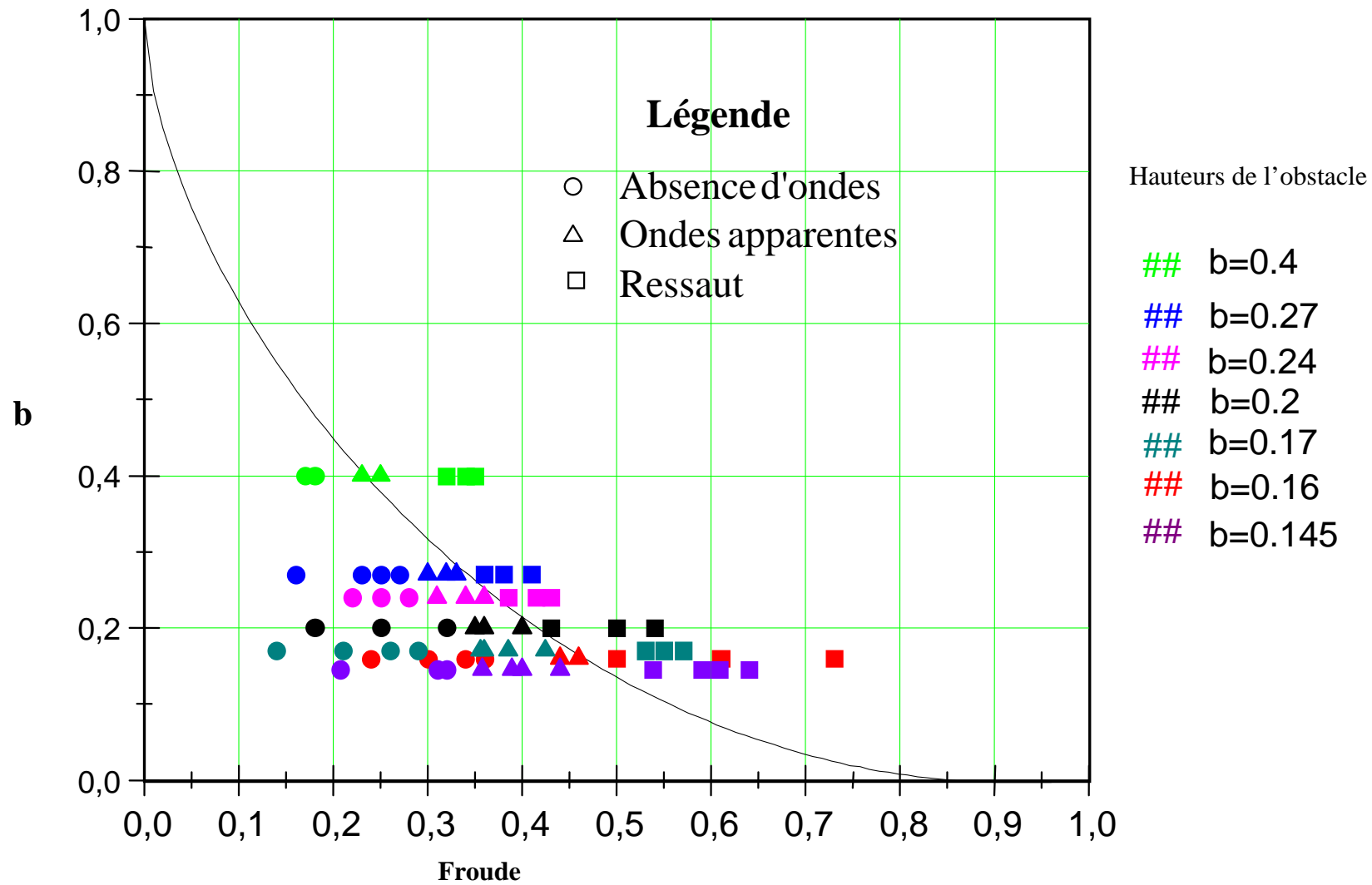
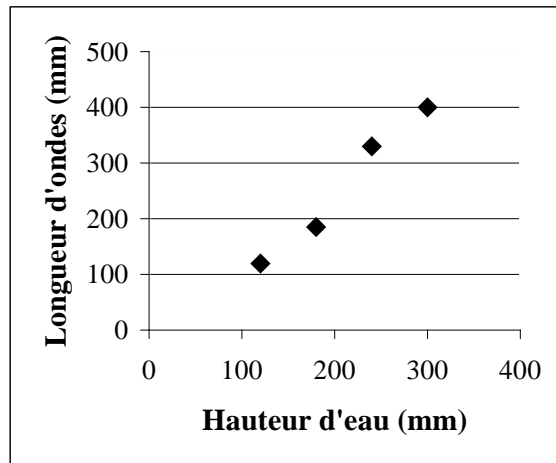


Figure IV-6 Etat de la surface libre en fonction du nombre de Froude et pour différentes hauteurs relatives de l'obstacle

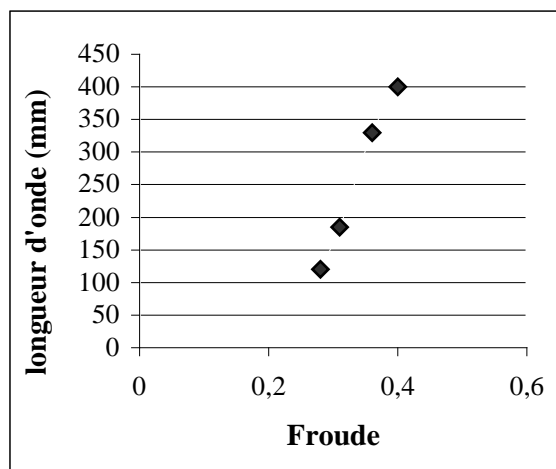
La longueur d’onde expérimentale est obtenue, sur les photos, par mesure de la distance séparant deux crêtes consécutives. Dans le tableau IV.1, nous présentons les valeurs expérimentales de la longueur d’onde pour un obstacle triangulaire et pour différentes hauteurs d’eau et nombres de Froude correspondant à l’existence d’ondes. Ces points expérimentaux sont représentés sur les figures IV.7 et IV.8

**Tableau IV.1**

H(mm)	300	240	180	120
$\lambda$ (mm)	400	330	185	120
Froude	0.40	0.36	0.31	0.28



**Figure IV.7** Variation expérimentale de la longueur d’onde en fonction de la hauteur d’eau



**Figure IV.8.** Variation expérimentale de la longueur d’onde en fonction du nombre de Froude

**IV-1-2-b / Ondes capillaires**

Pour représenter l'évaluation de la longueur d'onde en fonction du nombre de Froude, on se fixe une hauteur d'eau donnée et on agit sur la vitesse de déplacement de l'obstacle, à l'aide du variateur de fréquence.

Les mesures obtenues sont représentées dans les tableaux suivants :

**hauteur d'eau = 120mm Tableau IV.2**

<b><math>\lambda(\text{mm})</math></b>	10	8.7	7.6	5.3	4
<b>Froude</b>	0.23	0.27	0.30	0.35	0.40

**hauteur d'eau = 180mm Tableau IV.3**

<b><math>\lambda(\text{mm})</math></b>	4.8	2.63	2.15	1.8
<b>Froude</b>	0.23	0.30	0.33	0.36

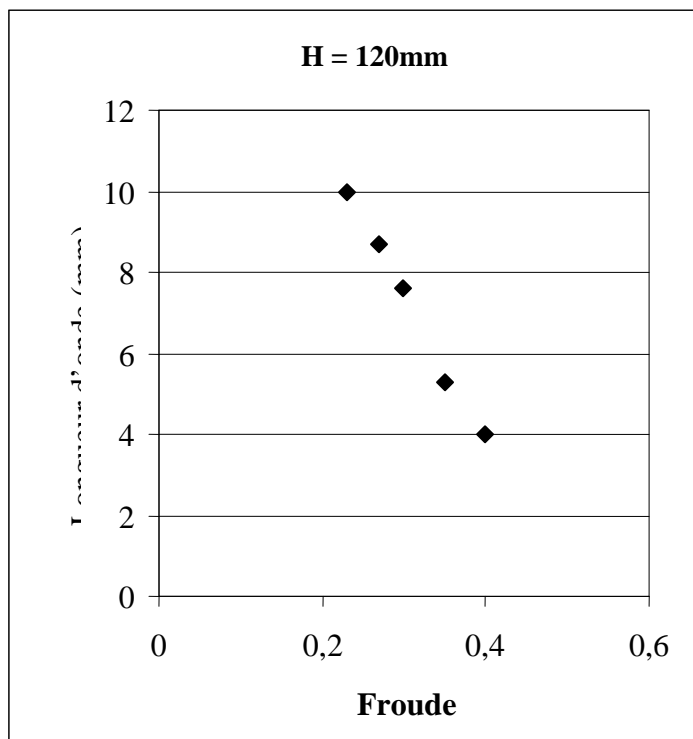
**hauteur d'eau = 240mm Tableau IV.4**

<b><math>\lambda(\text{mm})</math></b>	4.69	2.15	1.28	1.07
<b>Froude</b>	0.18	0.25	0.32	0.35

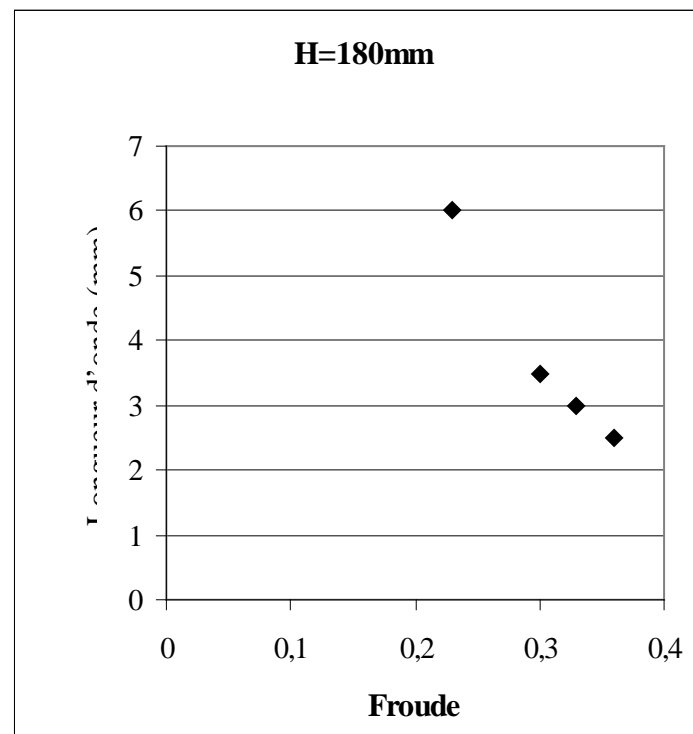
**hauteur d'eau = 300mm Tableau IV.5**

<b><math>\lambda(\text{mm})</math></b>	6	3	1.5	1.25
<b>Froude</b>	0.15	0.24	0.30	0.34

Les points expérimentaux obtenus sont représentés sur les figures IV.9.a à IV.9.d.

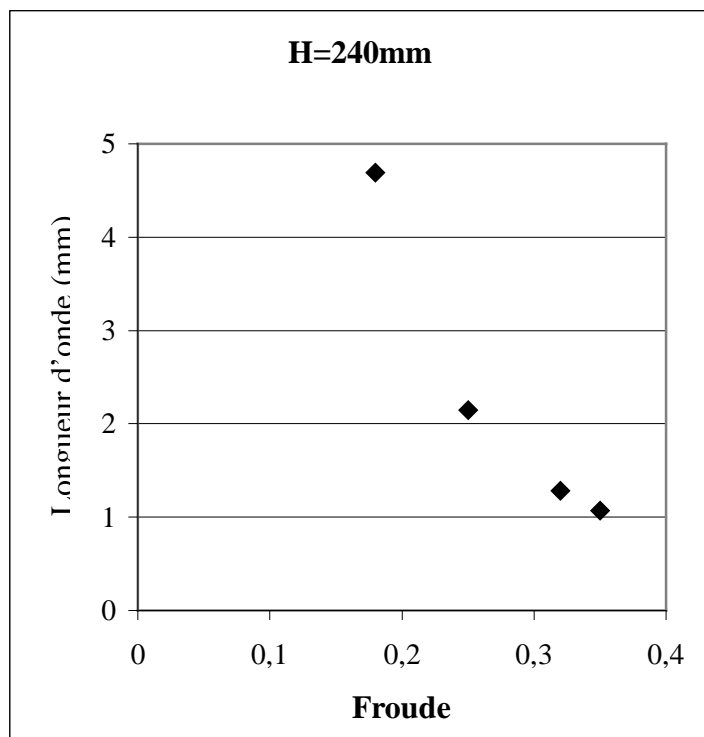


( a )

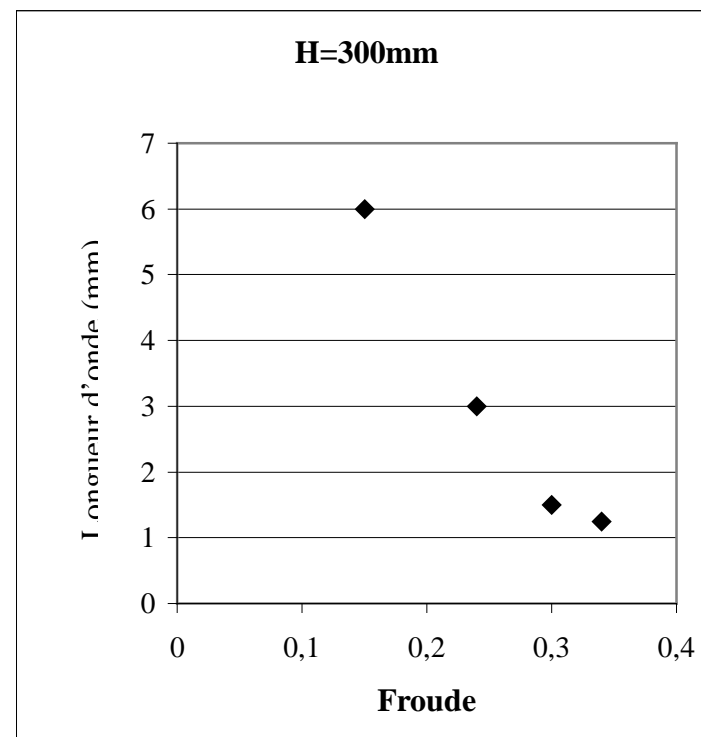


( b )

**Figure IV-9** Variation de la longueur d'onde capillaire en fonction du nombre de Froude



( c )



( d )

**Figure IV-9** Variation de la longueur d'onde capillaire en fonction du nombre de Froude

D'après les courbes IV.9.a à IV.9.d, on constate que la longueur des ondes capillaires diminue quand le nombre de Froude augmente.

Notons que, lors de la manipulation, nous avons constaté que, pour une hauteur d'eau donnée dans le canal, et au fur et à mesure que la vitesse augmente, les ondes se resserrent, leurs amplitudes augmentent et leurs longueurs d'ondes diminuent. La diminution progressive de la vitesse fait étaler ces ondes et leur amplitude s'atténue jusqu'à leur disparition complète.

L'existence des ondes est donc liée à la valeur du nombre de Froude. C'est pourquoi, pour une hauteur d'eau donnée, il existe un nombre de Froude pour lequel la surface libre reste plane malgré la présence d'obstacle perturbateur, comme le montre la photo IV.4.

Le tableau IV.6 nous donne les valeurs du nombre de Froude pour lesquelles il n'y a ni ondes de gravité ni rides capillaires, ceci pour une hauteur d'eau donnée. (Figure IV.10.a et IV.10.b).

**Tableau IV.6**

<b>H(mm)</b>	120	180	240	300
<b>Froude</b>	0.14	0.13	0.12	0.095

**Photographie IV.4**

## IV-2/ ETUDE COMPARATIVE

Pour des caractéristiques de l'écoulement (nombre de Froude, vitesse) et de l'obstacle, nous effectuons le calcul théorique, pour chaque configuration expérimentale, en vue de leur comparaison.

### IV-2-1/ ONDES DE GRAVITE

#### IV- 2-1-1- Profil de vitesse

Les résultats expérimentaux des profils de vitesse que nous avons obtenus, (figure IV-2-c, IV-3-c, IV-4 -c et IV-5-c), sont en parfait accord avec ceux prévus par la théorie (figure II-4 ). En effet, on remarque que, pour les deux cas, le fluide est accéléré au voisinage de la surface libre au niveau des creux par contre, au niveau des crêtes, le fluide est ralenti au voisinage de la surface libre.

#### IV-2-1-2 / Longueur d'onde

Afin de comparer la longueur d'onde expérimentale, avec la longueur d'onde théorique, considérons la longueur d'onde  $\lambda_{\text{thé}}$

$$\text{On sait que } \varepsilon = \frac{2\pi h_0}{\lambda_{\text{thé}}} \Rightarrow \lambda_{\text{thé}} = \frac{2\pi h_0}{\varepsilon}$$

A partir de l'équation  $\alpha_1$  (II-66-1)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\text{Fr}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{(\text{Fr}^4 - 4B)},$$

On détermine la longueur d'onde adimensionnelle de gravité  $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$  des ondes.

Pour cela, on calcule d'abord le nombre de Froude à partir de la vitesse d'écoulement prise juste en amont de l'obstacle, correspondant à la présence d'ondes en aval de celui ci, avec la hauteur d'eau relative à ce point. Les longueurs d'ondes expérimentales sont mesurées à partir des photos. Les résultats sont représentés dans le tableau IV-7.

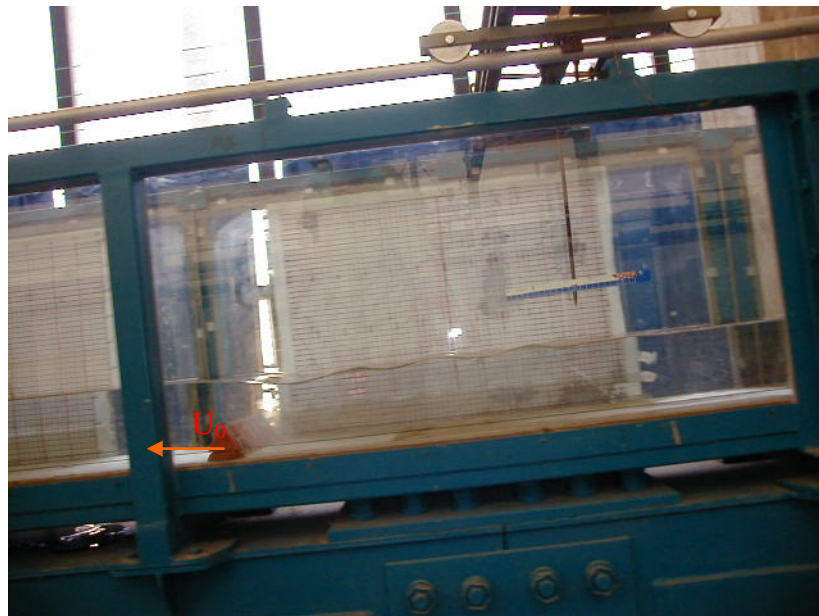
**Tableau N° IV-7**

Nombre de Froude	0.31	0.35	0.40	0.46
$\lambda_{\text{exp}}$ (mm)	120	185	330	400
$\lambda_{\text{the}}$ (mm)	66	132.8	230	397

Après l'analyse des résultats du tableau, nous constatons que l'écart est maximum pour de faibles valeurs du nombre de Froude, ce qui correspond à une faible hauteur d'eau. Cet écart ne peut être attribué à l'erreur de parallaxe de l'appareil photo. Il est plus probable que nous assistons à un système de plusieurs ondes qui interagissent du fait que la vitesse constante de notre obstacle n'est pas obtenue instantanément.

#### **IV-2-1-3/ Profil de la surface libre**

Les résultats qualitatifs de visualisation de la surface libre, en régime fluvial, concordent avec ceux issus de la théorie linéaire. Dans les deux cas, le profil de la surface libre est pratiquement plat en amont, suivi d'une dépression au voisinage du sommet de l'obstacle et qui se termine par une onde à l'aval (photo IV-5).



**Photographie IV.5**

#### IV-2-2. Ondes capillaires

La longueur des rides capillaires est donnée par la deuxième racine de l'équation (II-66-2)

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}Fr^2 - \frac{1}{2}\sqrt{(Fr^4 - 4B)}$$

Cette relation permet de tracer les courbes théoriques d'évolution des longueurs d'ondes adimensionnelles, en fonction du nombre de Froude, pour un nombre de Bond fixé.

Pour mieux comparer les longueurs d'ondes théorique et expérimentale, on calcule la longueur d'onde dimensionnelle  $\lambda_{thé}$ .

On sait que  $\varepsilon = \frac{2\pi h_0}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi h_0}{\varepsilon}$

On détermine  $\frac{1}{\varepsilon}$  à partir de la relation  $\alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon}$  et on calcule  $\lambda_{thé}$  pour différents nombres de Froude.

Les longueurs d'ondes expérimentales sont obtenues, à partir des photos, en comptant le nombre de crêtes qu'on divise par la longueur spatiale.

Les résultats obtenus sont représentés dans les tableaux suivants :

**Tableau IV-8-a Hauteur d'eau=120mm**

Nombre de Froude	0.23	0.27	0.30	0.35	0.40
$\lambda_{exp}$ (mm)	10	8.7	7.6	5.3	4
$\lambda_{thé}$ (mm)	10.1	6.2	4.7	3.4	2.6

**Tableau IV-8- b Hauteur d'eau=180mm**

Nombre de Froude	0.23	0.30	0.33	0.36
$\lambda_{exp}$ (mm)	4	3.5	3	2.5
$\lambda_{thé}$ (mm)	3.6	2	1.6	1.4

**Tableau IV-8-c Hauteur d'eau=240mm**

Nombre de Froude	0.18	0.25	0.32	0.35
$\lambda_{\text{exp}}$ (mm)	4.7	2.2	1.3	1.1
$\lambda_{\text{teo}}$ (mm)	7.1	3.2	1.9	1.6

**Tableau IV-8-d Hauteur d'eau=300mm**

Nombre de Froude	0.15	0.24	0.30	0.34
$\lambda_{\text{exp}}$ (mm)	8	3	1.5	1.3
$\lambda_{\text{teo}}$ (mm)	9	2.9	1.8	1.4

Sur les figures qui suivent (IV-10-a et IV-10-b), nous présentons les courbes théoriques avec les points expérimentaux.

L'écart observé entre la courbe et les points expérimentaux peut être attribué aux rides qui sont très petites ; leur mesure peut donc être entachée d'erreur. A cela s'ajoute l'erreur de parallaxe de l'appareil photo.

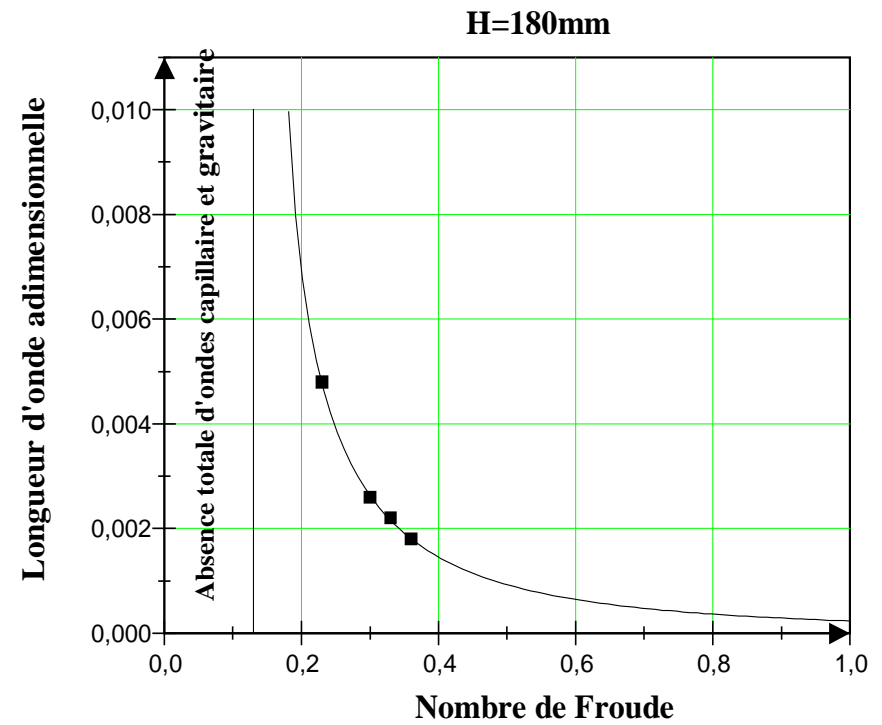
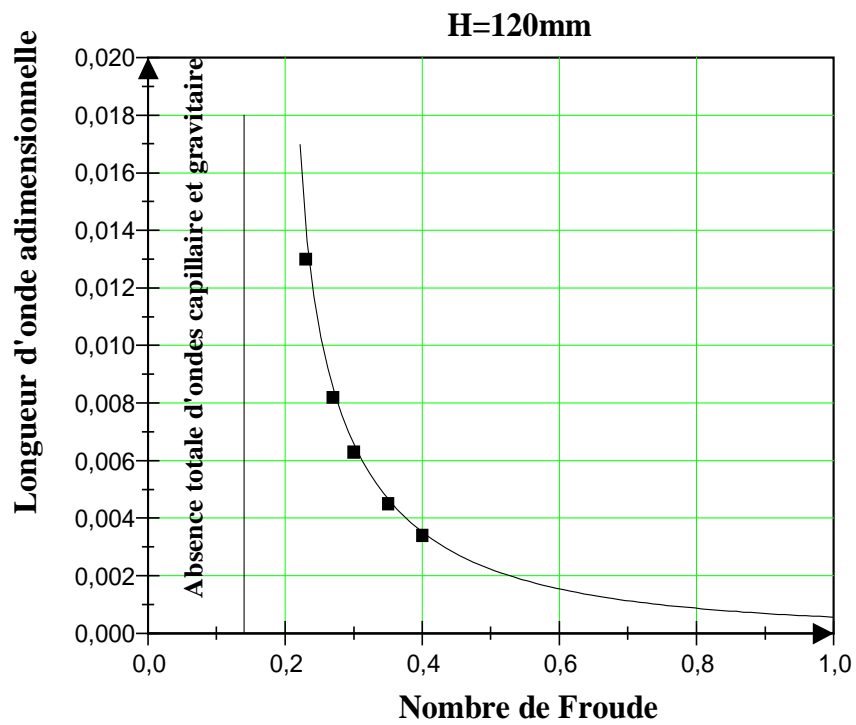
Sur les même figures, on montre le domaine où il y a absence totale des ondes de gravité et de capillarité.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons montré que le profil de vitesse en amont de l'obstacle est quasiment uniforme. De plus les particules fluides sont accélérées au niveau des creux et ralenties aux crêtes.

Nous avons également montré que l'écoulement passe par trois régimes en fonction du nombre de Froude.

Pour un nombre de Froude faible, il y a présence d'une dépression locale suivie d'une surface libre quasi horizontale. En augmentant le nombre de Froude, il y a un train d'onde qui s'installe. En augmentant davantage le nombre de Froude, un régime turbulent apparaît.



**Figure IV-10-a** Variation de la longueur d'onde théorique et expérimentale en fonction du nombre de Froude

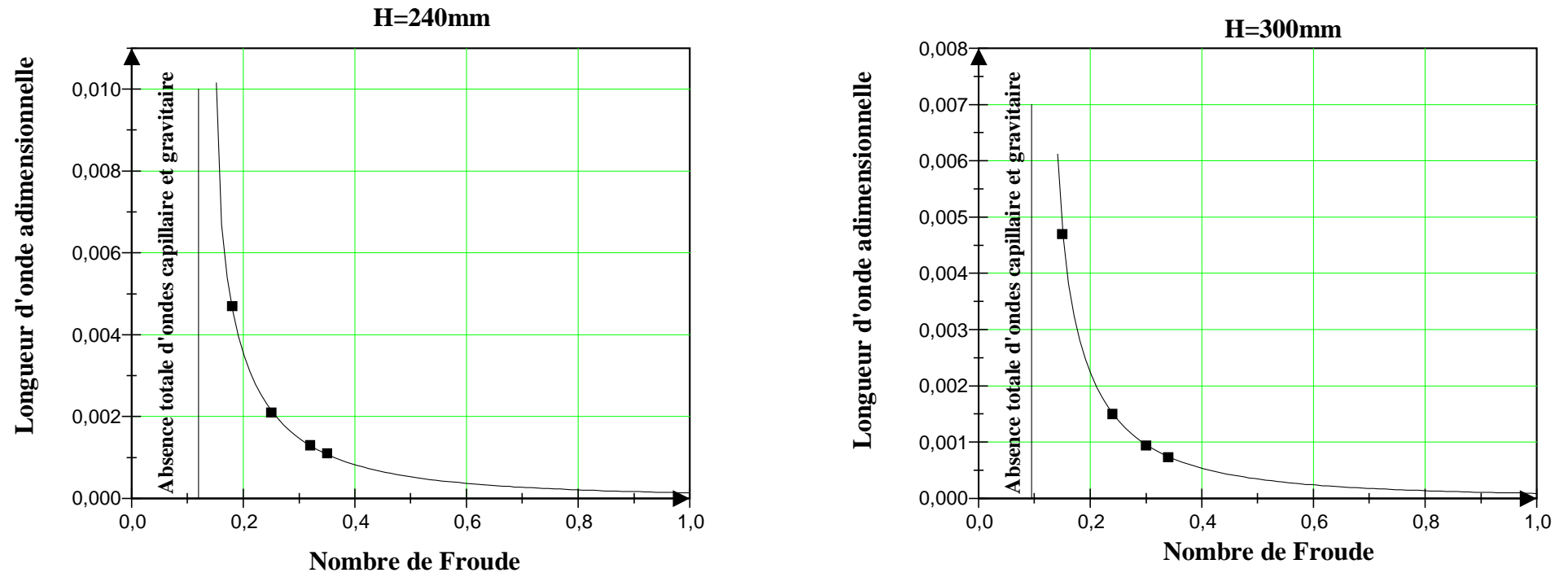
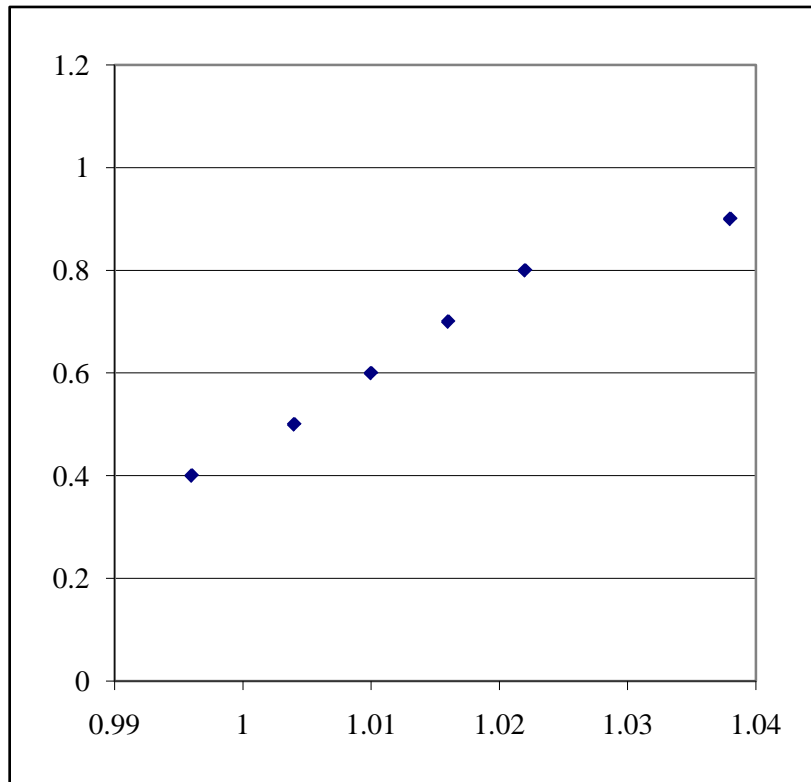
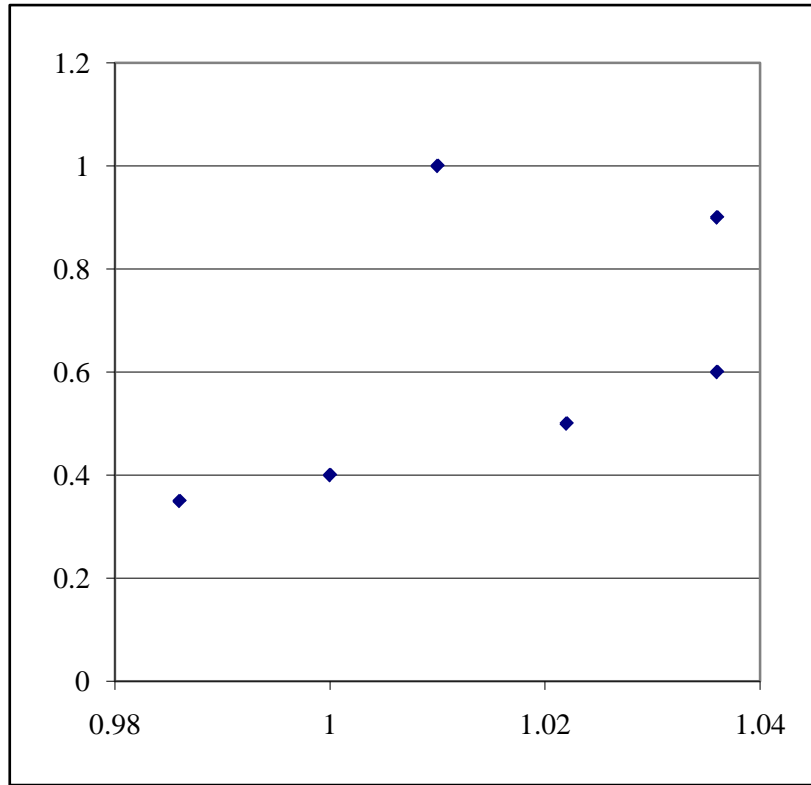


Figure IV-10-b Variation de la longueur d'onde théorique et expérimentale en fonction du nombre de Froude

0.35	0.986
0.4	1
0.5	1.022
0.6	1.036
0.7	1.048
0.8	1.048
0.9	1.036
1	1.01

0.4	0.996
0.5	1.004
0.6	1.01
0.7	1.016
0.8	1.022
0.9	1.038



## CONCLUSION GENERALE

A partir des équations générales de l'écoulement, nous avons pu tirer les conclusions suivantes :

La solution de l'équation de  $Y_0(x)$  ne vérifie pas la condition à l'infini amont, l'addition de la solution du fond plat a pour effet de dissymétriser l'amont de l'aval décrivant ainsi le phénomène physique observé lors des expériences. En effet, la surface libre est horizontale en amont, suivie d'une dépression locale au dessus de l'obstacle et d'un train d'ondes en aval.

En étudiant la vitesse de propagation des ondes stationnaires, on a constaté que leur existence est liée à la valeur du nombre de Froude. Quand le nombre de Froude diminue, la longueur d'onde de gravité diminue et celle des ondes capillaires augmente jusqu'à se confondre.

A cette longueur d'onde est associé un nombre de Froude  $Fr_{min}$  au-dessous duquel il y a absence totale des ondes ; ceci a été confirmé par nos observations en laboratoire.

Avec des mesures expérimentales des vitesses, nous avons montré qu'en amont de l'obstacle la répartition des vitesses est constante le long de la section. Celles-ci sont accélérées au niveau des creux du système d'onde et ralenties aux crêtes.

En faisant varier la fréquence du moteur, nous avons observé l'état de la surface libre. Pour de faibles valeurs de la fréquence, la surface libre est peu perturbée. Une fréquence plus élevée donne lieu à un ressaut turbulent et de belles ondes apparaissent entre les deux régimes.

Pour les ondes capillaires, quand la vitesse du moteur augmente, elles se resserrent davantage. Lorsque la vitesse diminue, les ondes s'étalent jusqu'à leur effacement de la surface.

La conception et la réalisation du dispositif expérimental nous a pris beaucoup de temps car, à chaque fois qu'on pense à un système, il y a toujours des problèmes qui accompagnent sa réalisation ou bien son fonctionnement. Nous avons, par exemple, refait plusieurs fois l'obstacle avant d'aboutir à celui qui peut glisser dans le canal.

Le système d'entraînement a été conçu et refait plusieurs fois pour enfin aboutir à entraîner l'ensemble, à savoir l'obstacle au fond, l'obstacle à la surface libre, le laser et l'appareil photos.

En conclusion, nous pensons que nous avons, pour une vitesse vraiment constante et uniforme, pu éliminer l'effet des perturbation dues aux pompes sur un écoulement dans un canal. Ainsi nous obtenons de meilleurs résultats de mesures des paramètres d'écoulement.

## PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

$x$	: Variable longitudinale
$y$	: Variable transversale
$b$	: Hauteur d'obstacle
$H$	: Profondeur d'eau amont
$l$	: Longueur de l'obstacle
$U_0$	: Vitesse de l'écoulement amont
$f(x)$	: Fonction décrivant le profil de l'obstacle
$k$	: Nombre d'onde
$y_f$	: Côte du fond
$y_0$	: Côte de la surface libre
$Y_0$	: Côte de la surface libre adimensionnelle
$u$	: Composante horizontale de la vitesse du fluide
$v$	: Composante verticale de la vitesse du fluide
$\phi$	: Potentiel des vitesses
$\Psi$	: Fonction de courant
$\Psi_p$	: Fonction de courant de perturbation
$\Delta$	: Laplacien
$g$	: Accélération de la pesanteur
$\gamma$	: Première angle à la base du profil triangulaire
$\theta$	: Deuxième angle à la base du profil triangulaire
$Fr$	: Nombre de Froude
$\alpha$	: Pôle réel
$\beta_n$	: Pôle imaginaire d'ordre $n$
$\rho$	: Masse volumique
$\nu$	: Viscosité cinématique du fluide
$\sigma$	: Coefficient de tension superficielle
$R$	: Rayon de courbure
$P_r$	: Pression relative
$\lambda_0$	: Longueur d'onde caractéristique
$C$	: Vitesse de propagation d'onde
$C_0$	: Vitesse de propagation d'onde
$T_0$	: Période caractéristique des ondes

**B** : Nombre de Bond  
 $\varepsilon$  : Nombre d'onde réduit  
 $\beta$  : Vitesse de phase adimensionnelle  
**P** : Pression  
 $\lambda_{\text{exp}}$  : Longueur d'onde expérimentale  
 $\lambda_{\text{thé}}$  : Longueur d'onde théorique

# ANNEXES

## ANNEXE I

## TABLEAUX 1 PROFILS ADIMENSIONNELS DES VITESSES V(Y)

Hauteur d'eau = 0.12m    Uamont=0.30m/s

Tableau 1-a Section -1

Y	0,17	0,25	0,33	0,5	0,67	0,83
V	0,95	0,99	1,01	1,02	1,02	1,02

Tableau 1-f Section -2

Y	0,17	0,25	0,33	0,5	0,67	0,83	0,92
V	0,62	0,82	0,84	0,92	1,09	1,05	1,05

Tableau 1-b Section -3

Y	0,42	0,5	0,67	0,83	0,92
V	0,38	1,55	1,88	1,84	1,66

Tableau 1-c Section -4

Y	0,25	0,33	0,42	0,5	0,67	0,75	0,83
V	0,25	0,94	1,53	2,13	2,31	2,28	2,43

Tableau 1-d Section -5

Y	0,17	0,25	0,33	0,5	0,67	0,83	0,92
V	0,77	0,79	1,02	1,7	1,92	1,9	1,52

Tableau 1-e Section -6

Y	0,17	0,25	0,33	0,5	0,67	0,75	0,83
V	0,61	0,98	1,1	1,67	1,79	1,79	2,11

**TABLEAUX 2 PROFILS ADIMENSIONNELS DES VITESSES V(Y)****Hauteur d'eau = 0.18m    Uamont=0.41m/s****Tableau 2-a Section -1**

<b>Y</b>	0,11	0,22	0,33	0,56	0,78	0,89	1
<b>V</b>	0,98	0,95	1,01	0,99	1,02	0,99	1,03

**Tableau 2-b Section -2**

<b>Y</b>	0,11	0,17	0,28	0,33	0,44	0,56	0,72	0,83	0,94
<b>V</b>	0,74	0,76	0,94	0,93	1,06	1,12	1,15	1,16	1,1

**Tableau 2-c Section -3**

<b>Y</b>	0,33	0,44	0,56	0,72	0,83	0,94
<b>V</b>	1,44	1,61	1,55	1,47	1,41	1,41

**Tableau 2-d Section -4**

<b>Y</b>	0,11	0,17	0,28	0,33	0,44	0,56	0,67	0,78	0,89
<b>V</b>	0,29	0,56	0,7	1	1,68	1,99	1,8	1,76	1,87

**Tableau 2-e Section -5**

<b>Y</b>	0,11	0,17	0,28	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9
<b>V</b>	0,36	0,41	0,87	0,99	1,05	1,52	1,51	1,4	1,1

**Tableau 2-f Section -6**

<b>Y</b>	0,11	0,17	0,28	0,33	0,44	0,56	0,72	0,83	0,94
<b>V</b>	0,54	0,6	1	1,31	1,44	1,5	1,38	1,34	1,5

### TABLEAUX 3 PROFILS ADIMENSIONNELS DES VITESSES V(Y)

Hauteur d'eau = 0.24m Uamont=0.55m/s

**Tableau 3-a Section -1**

Y	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,13	0,15	0,17	0,2	0,21	0,3	0,3	0,33	0,42
V	1	1,02	1,01	0,99	1,01	1,01	1,02	1,02	1	1,02	1	1	1,01	1,01

Suite 3-a

Y	0,46	0,5	0,54	0,58	0,63	0,67	0,71	0,75	0,79	0,83	0,88	0,92	0,96	0,99
V	1	1	1,01	0,99	0,99	1	0,99	0,98	1	0,99	0,97	0,99	0,99	0,99

**Tableau 3-b Section -2**

Y	0,01	0,04	0,08	0,13	0,21	0,29	0,38	0,46	0,54	0,63	0,75	0,83	0,92	0,96	0,98
V	0,72	0,7	0,75	0,8	0,88	0,93	1,06	1,09	1,13	1,12	1,12	1,12	1,09	1,09	1,09

**Tableau 3-c Section -3**

Y	0,21	0,25	0,33	0,46	0,58	0,69	0,79	0,96	0,98
V	0,93	1	1,11	1,15	1,21	1,17	1,24	1,17	1,2

**Tableau 3-d Section -4**

Y	0,02	0,06	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,33	0,42	0,54	0,67	0,79	0,88	0,92
V	0,48	0,57	0,64	0,64	0,66	0,8	0,93	1,44	1,43	1,34	1,53	1,53	1,53	1,58

**Tableau 3-e Section -5**

Y	0,02	0,08	0,17	0,21	0,25	0,33	0,42	0,5	0,63	0,71	0,79	0,88	0,92	0,94	0,96	0,98	1
V	0,05	0,57	0,81	0,97	1,05	1,32	1,36	1,32	1,38	1,35	1,18	1,12	1,21	1,13	1,08	1	0,94

**Tableau 3 -f Section -6**

Y	0,02	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,33	0,42	0,54	0,63	0,71	0,75	0,83	0,88	0,92
V	0,51	0,41	0,55	0,67	0,71	0,95	1,07	1,18	1,22	1,33	1,35	1,38	1,38	1,6	1,56

**TABLEAUX 4 PROFILS ADIMENSIONNELS DES VITESSES V(Y)****Hauteur d'eau = 0.30m    Uamont=0.68m/s****Tableau 4 -a    Section -1**

<b>Y</b>	0,07	0,13	0,2	0,27	0,4	0,33	0,5	0,57	0,67	0,83	0,9	0,97
<b>V</b>	1,02	0,99	1,01	1	0,99	0,99	0,98	0,99	1	0,99	0,97	1,01

**Tableau 4 -b    Section -2**

<b>Y</b>	0,07	0,1	0,13	0,17	0,2	0,23	0,27	0,33	0,43	0,5	0,6	0,7	0,8	0,87	0,93	0,97
<b>V</b>	0,58	0,54	0,65	0,83	1,01	1,07	1,09	1,12	1,16	1,15	1,18	1,16	1,14	1,14	1,14	1,15

**Tableau 4 -c    Section -3**

<b>Y</b>	0,17	0,2	0,27	0,33	0,4	0,5	0,57	0,67	0,77	0,83	0,93	0,97
<b>V</b>	1,06	1,06	1,27	1,42	1,33	1,25	1,25	1,19	1,19	1,2	1,19	1,16

**Tableau 4 -d    Section -4**

<b>Y</b>	0,13	0,17	0,23	0,3	0,37	0,43	0,5	0,6	0,67	0,77	0,83	0,9
<b>V</b>	0,48	1,02	1,15	1,61	1,45	1,53	1,38	1,44	1,42	1,49	1,42	1,48

**Tableau 4 -e    Section -5**

<b>Y</b>	0,02	0,07	0,13	0,17	0,2	0,27	0,33	0,43	0,5	0,6	0,7	0,8	0,87	0,93	0,97	0,98
<b>V</b>	0,05	0,6	0,81	0,93	1	1,3	1,33	1,18	1,32	1,21	1,25	1,13	1,08	1,06	1,01	0,99

**Tableau 4 -f    Section -6**

<b>Y</b>	0,02	0,07	0,1	0,13	0,17	0,2	0,27	0,33	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,87	0,93
<b>V</b>	0,06	0,62	0,63	0,8	0,92	0,88	1,07	1,1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,28	1,29	1,38

## ANNEXE II

## Écoulement critique dans un canal

Si  $H$  désigne la charge le théorème de Bernoulli, pour un écoulement permanent, s'écrit :

$$H = \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + y = \text{constante} \quad (1)$$

$P$  : pression statique

$u$  : la vitesse au point considéré

$y$  : la hauteur du point considéré

Considérons un écoulement de fluide parfait au dessus d'un obstacle, d'équation  $y = b(x)$ , noyé au fond d'un canal hydraulique.

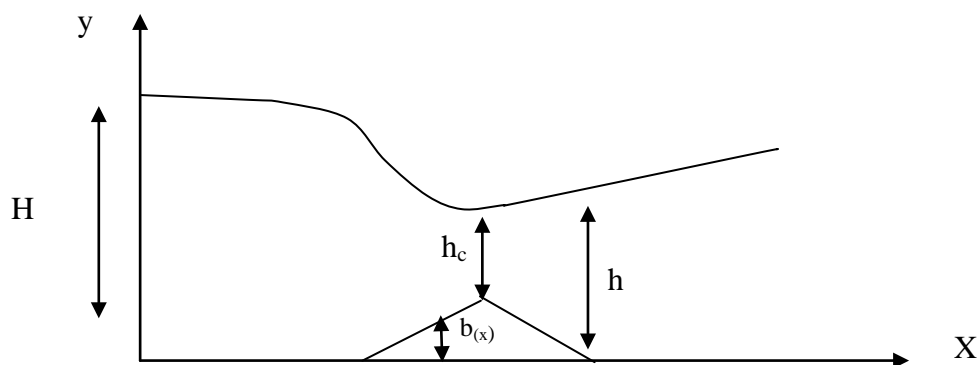


Fig II- a

La surface libre étant une ligne de courant, nous avons :

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + h_c + b = \text{constante} \quad (2)$$

Où  $h_c$  est le tirant d'eau.

A la surface libre, la pression est égale à la pression atmosphérique qui est constante. La conservation de la charge devient :

$$\frac{u^2}{2g} + h_c + b(x) = \text{constante} \quad (3)$$

Considérons l'énergie spécifique E du fluide. Elle est équivalente, à une hauteur et s'écrit :

$$E = \frac{u^2}{2g} + h \quad (4)$$

Etudions la variation de E dans un canal.

Assez loin en amont le débit Q s'écrit :

$$Q = S \cdot U. a = \text{constante}$$

où a est la largeur constante du canal

En un point quelconque d'abscisse x, la vitesse, qu'on supposera uniforme, est U et la hauteur h.

Soit

$$q = U \cdot h \quad \text{le débit unitaire.}$$

Nous avons évidemment

$$UH = uh$$

Le débit étant conservé, nous avons :

$$\frac{dq}{q} = \frac{du}{u} + \frac{dh}{h} = 0 \quad (5)$$

L'énergie spécifique s'écrit :

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} \quad (6)$$

D'après (4), nous avons :

$$\frac{dE}{E} = 2 \frac{du}{u} + \frac{dh}{h} = \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{dh}{h} = \frac{du}{u} + \frac{dq}{q} = \frac{du}{u}$$

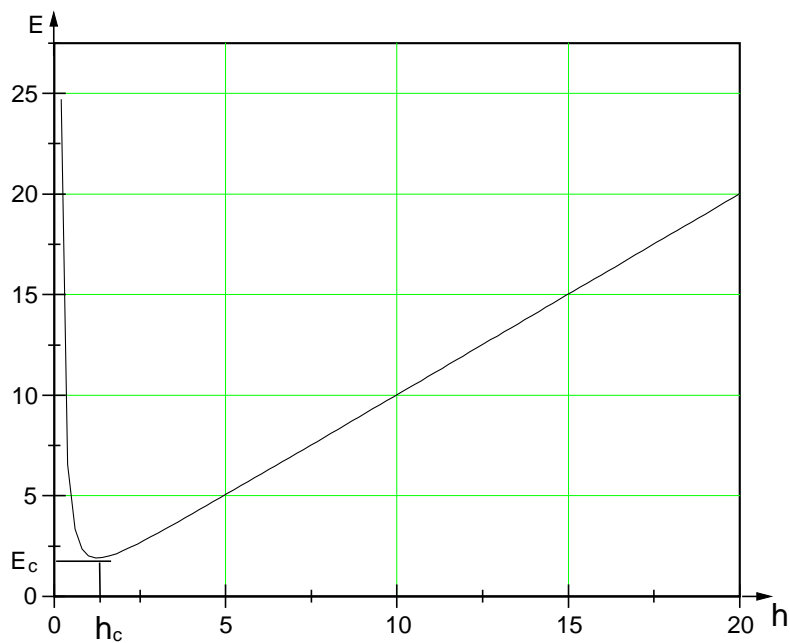
D'après l'expression (5) et compte tenu de la conservation du débit, on a :

$$\frac{du}{u} = -\frac{dh}{h} \Rightarrow \frac{du}{dh} = -\frac{u}{h}$$

soit 
$$\frac{dE}{E} = \frac{du}{U} = -\frac{dh}{dh} \Rightarrow -\frac{E}{h}$$

et 
$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{u^2}{gh}$$

Traçons la courbe  $E(h)$  d'après (6) :



**Fig II-b**

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

pour  $h \rightarrow 0 \Rightarrow E \rightarrow \infty$

pour  $h \rightarrow \infty \Rightarrow E \rightarrow \infty$

Comme  $E$  possède des valeurs finies, ses variations en fonction de  $h$  doivent passer par un minimum (Fig II-b) qui est obtenu pour :

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{u^2}{gh} = 0$$

$$\text{Soit } \frac{u^2}{gh} = 1 \quad (7)$$

qui n'est rien d'autre que le nombre de Froude qui correspond à un écoulement critique. L'énergie spécifique E est donc minimale (Energie critique) pour une hauteur critique et un nombre de Froude égal à 1.

Ecrivons la conservation de la charge à la surface libre :

$$\frac{u^2}{2g} + h(x) + b(x) = E(x) + b(x) = \text{constante}$$

Donc

$$\frac{dE}{dx} + \frac{db}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{db}{dx}$$

Lorsque E est minimale, b est donc maximale ; cela correspond à la section critique. Le régime critique d'un écoulement à surface libre est donc atteint au sommet de l'obstacle, et pour un nombre de Froude local  $\frac{u_c}{\sqrt{gh_c}} = 1$ .

Pour déterminer l'équation de la courbe délimitant les différents régimes d'écoulement, à savoir le régime turbulent et le régime fluvial, écrivons la relation de Bernoulli entre la section à l'infini amont et la section critique :

$$\frac{U^2}{2g} + H = \frac{u_c^2}{2g} + h_c + b_c \quad (8)$$

Comme le débit est conservé, on a :

$$UH = u_c h_c \quad (9)$$

$$\text{Soit } Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}} \quad \text{le nombre de Froude en amont} \quad (10)$$

Des relations (9) et (10), on déduit :

$$u_c = (gUH)^{1/3} \quad \text{et} \quad h_c = (U^2H^2/g)^{1/3}$$

En divisant la relation (8) par  $H$  et en remplaçant  $u_c$  et  $h_c$  par leurs expressions, on obtient :

$$\frac{U^2}{2gH} + 1 = \frac{(gUH)^{2/3}}{2gH} + \frac{(U^2H^2/g)^{1/3}}{H} + \frac{b_c}{H}$$

$$\frac{1}{2}F_r^2 + 1 = \frac{1}{2}F_r^{2/3} + F_r^{2/3} + b'$$

où  $b' = \frac{b_c}{H}$  est la hauteur adimensionnelle de l'obstacle.

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad b' &= \frac{1}{2}F_r^2 - \frac{3}{2}F_r^{2/3} + 1 \\ 2(b' - 1) &= F_r^2 - 3F_r^{2/3} \end{aligned} \tag{11}$$

La courbe  $b=f(Fr)$  correspond donc à un écoulement critique pour lequel le nombre de Froude est égal à 1 au sommet de l'obstacle. Il s'ensuit que la partie inférieure correspond au régime partout fluvial et la partie supérieure au régime présentant un écoulement torrentiel.

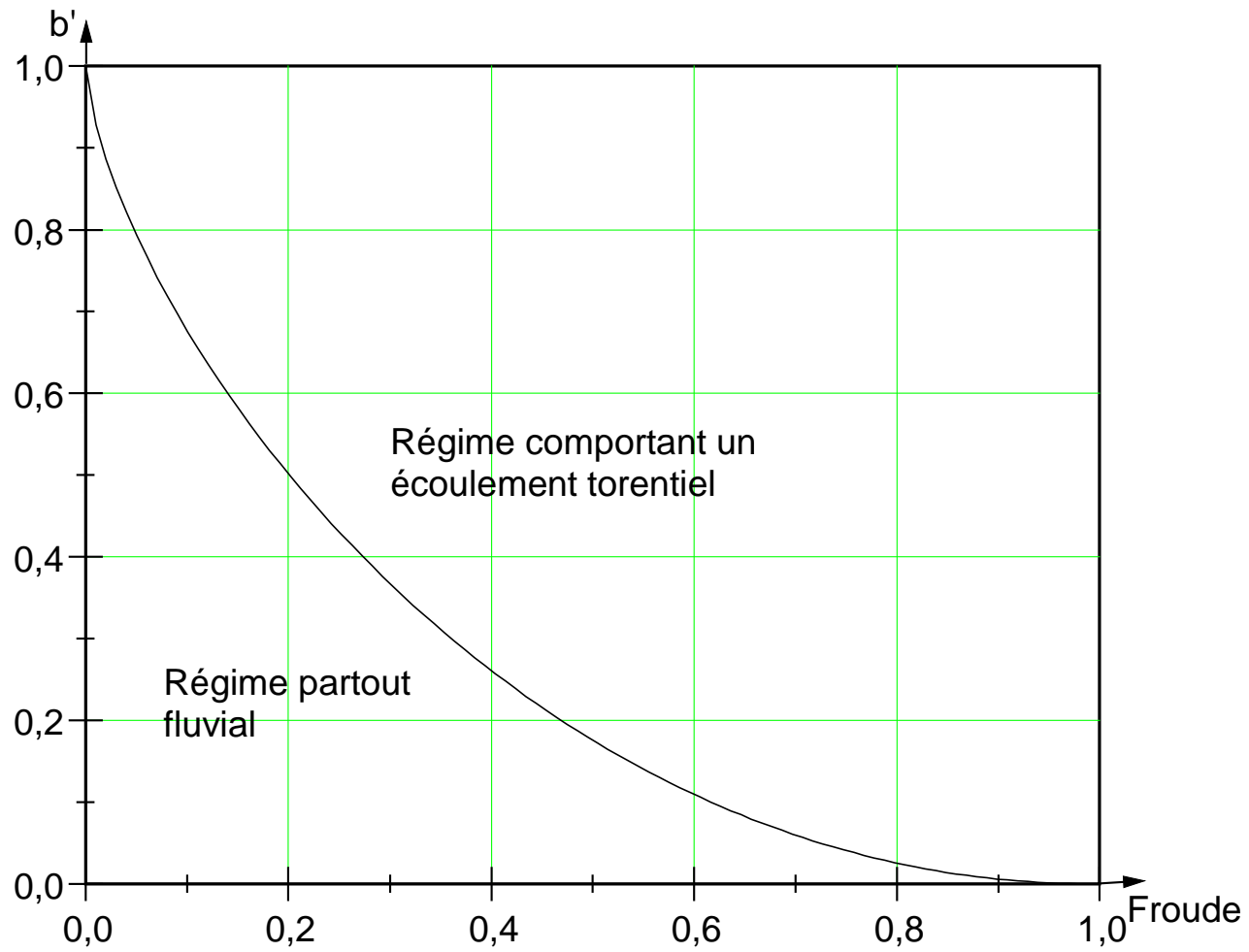


Fig II-c

## ANNEXE III

## Calcul des pôles

Le calcul de la surface libre se ramène à la résolution d'intégrales du type :

$$I = \int \frac{P(z)}{Q(z)} dz \quad (A3-1)$$

$$\text{avec } Q(z) = z^2 \left( \text{ch}z - \frac{\text{sh}z}{\text{Fr}^2 z} \right) \quad (A3-2)$$

où P et Q sont deux fonctions holomorphes.

Les pôles désignent, par définition, les points singuliers isolés annulant la fonction Q(z), à savoir :

$$z = 0$$

et les racines de l'équation

$$\text{th}z = \text{Fr}^2 z \quad (A3-3)$$

Sachant que  $z = \alpha + i\beta$

$$\text{avec } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0$$

L'équation (A3-3) devient :

$$\frac{e^{\alpha+i\beta} - e^{-\alpha-i\beta}}{e^{\alpha+i\beta} + e^{-\alpha-i\beta}} = \text{Fr}^2(\alpha + i\beta) \quad (A3-4)$$

$$\frac{e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta) - e^{-\alpha}(\cos \beta - i \sin \beta)}{e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta) + e^{-\alpha}(\cos \beta - i \sin \beta)} = \text{Fr}^2(\alpha + i\beta)$$

$$\frac{\cos \beta(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) + i \sin \beta(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{\cos \beta(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) + i \sin \beta(e^{\alpha} + e^{-\alpha})} = \text{Fr}^2(\alpha + i\beta)$$

$$\frac{\cos \beta \text{sh} \alpha + i \sin \beta \text{ch} \alpha}{\cos \beta \text{ch} \alpha + i \sin \beta \text{sh} \alpha} = \text{Fr}^2(\alpha + i\beta)$$

Rendons le dénominateur réel en le multipliant par son conjugué :

$$\frac{(\cos\beta\operatorname{sh}\alpha + i\sin\beta\operatorname{ch}\alpha)(\cos\beta\operatorname{sh}\alpha - i\sin\beta\operatorname{ch}\alpha)}{\cos^2\beta\operatorname{ch}^2\alpha + \sin^2\beta\operatorname{sh}^2\alpha}$$

$$= \frac{\cos\beta\operatorname{sh}\alpha + i\sin\beta\operatorname{ch}\alpha}{\cos^2\beta\operatorname{ch}^2\alpha + \sin^2\beta\operatorname{sh}^2\alpha} = \operatorname{Fr}^2(\alpha - i\beta)$$
(A3-5)

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\frac{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha}{\cos^2\beta\operatorname{ch}^2\alpha + \sin^2\beta\operatorname{sh}^2\alpha} = \operatorname{Fr}^2\alpha$$
(A3-6)

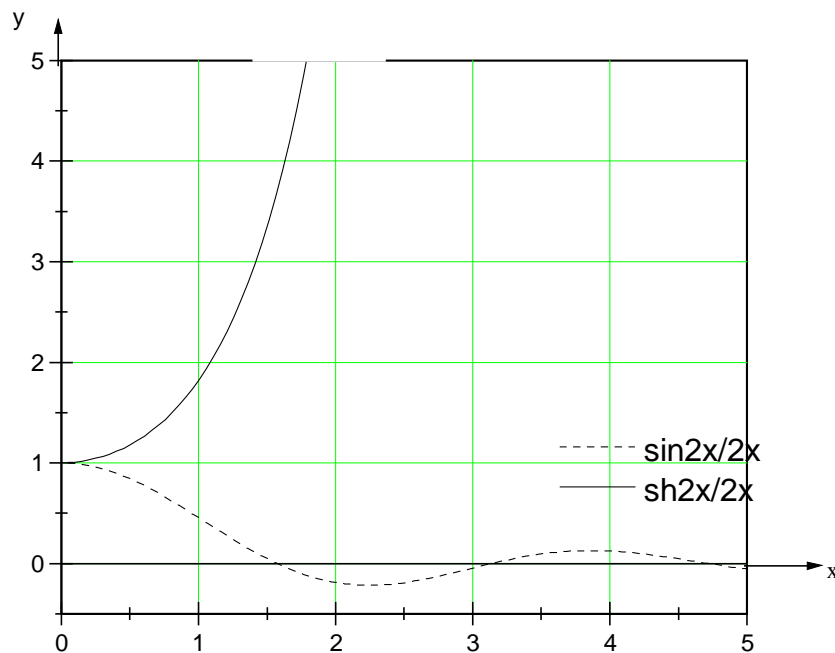
$$\frac{\cos\beta\sin\beta}{\cos^2\beta\operatorname{ch}^2\alpha + \sin^2\beta\operatorname{sh}^2\alpha} = \operatorname{Fr}^2\beta$$

Ces dernières s'écrivent aussi de la manière suivante :

$$\frac{\operatorname{sh}2\alpha}{2\alpha} = \operatorname{Fr}^2(\cos^2\beta\operatorname{ch}^2\alpha + \sin^2\beta\operatorname{sh}^2\alpha)$$

$$\frac{\sin 2\beta}{2\beta} = \operatorname{Fr}^2(\cos^2\beta\operatorname{ch}^2\beta + \sin^2\beta\operatorname{sh}^2\beta)$$

$$\frac{\operatorname{sh}2\alpha}{2\alpha} = \frac{\sin 2\beta}{2\beta} = \operatorname{Fr}^2(\cos^2\beta\operatorname{ch}^2\alpha + \sin^2\beta\operatorname{sh}^2\alpha)$$
(A3-7)



**Figure A3-1** Représentation graphique des solutions de l'équation (A3-7)

Comme l'illustrent la figures (A3-1), on constate que :

$$\frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2\alpha} \geq 1 \text{ et } \frac{\sin 2\beta}{2\beta} \leq 1 \quad (A3-8)$$

L'égalité (A3-8) n'est vérifiée que pour  $\frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2\alpha} = \frac{\sin 2\beta}{2\beta} = 1$

$$\text{soit } \alpha = \beta = 0$$

Le résultat étant en contradiction avec l'hypothèse de départ,  $\alpha \neq \beta \neq 0$ , nous considérons les deux cas séparément.

1. /  $\alpha \neq \beta = 0$

Dans ce cas, la relation (A3-3) s'écrit :

$$\operatorname{th}\alpha = \operatorname{Fr}^2 \quad (A3-9)$$

Traçons la courbe  $\operatorname{th}\alpha$  ainsi que la courbe de  $\operatorname{Fr}^2\alpha$  pour  $\operatorname{Fr} < 1$  et  $\operatorname{Fr} > 1$

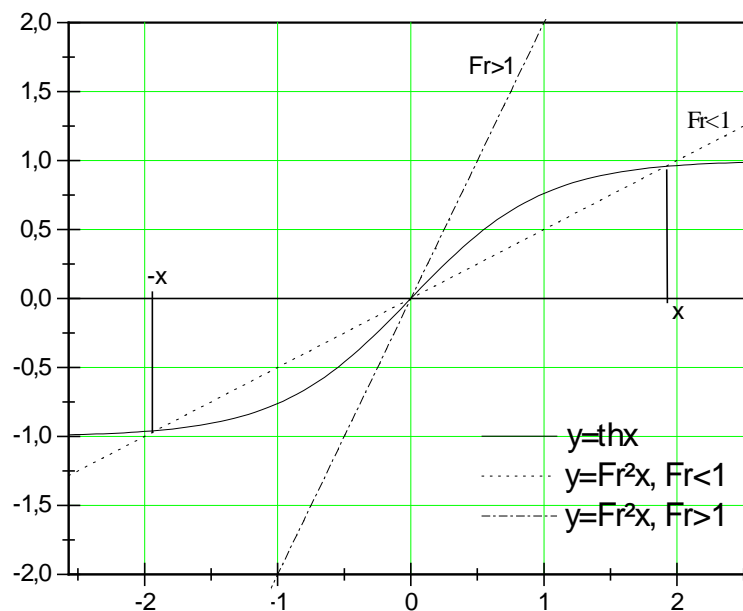


Figure A3-2 représentation graphique des solutions de l'équation (A3-9)

En analysant ces courbes, nous constatons que :

- Pour  $Fr > 1$  (régime torrentiel), la droite d'équation  $y = Fr^2\alpha$  ne coupe le graphe de  $th\alpha$  qu'en zéro; l'équation (A3-9) admet donc une racine unique réelle  $\alpha = 0$ .
- Pour  $Fr < 1$  (régime Fluvial), la droite d'équation  $y = Fr^2\alpha$  coupe le graphe  $th\alpha$  en zéro,  $-\alpha$  et  $\alpha$ . Par conséquent, la relation (A3-9) admet pour solutions les racines réelles  $-\alpha$ ,  $0$  et  $\alpha$ .

2. /  $\alpha = 0$ , et  $\beta \neq 0$

$z = i\beta$ ; l'équation (A3 - 3) devient :

$$thi\beta = i\beta Fr^2$$

Le développement trigonométrique nous conduit à :

$$\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{e^{i\beta} + e^{-i\beta}} = \frac{\cos \beta + i \sin \beta - \cos \beta + i \sin \beta}{\cos \beta + i \sin \beta + \cos \beta - i \sin \beta} = i\beta Fr^2 \quad (A3-10)$$

Après simplification, l'équation (A3-10) prend la forme :

$$tg\beta = Fr^2\beta$$

Si  $Fr > 1$ , nous avons une série de racines telles que :

$$\frac{\pi}{4} < \beta_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{4} < \beta_2 < \frac{3\pi}{2}$$

Pour  $n$  assez grand, nous avons approximativement :

$$\beta_n \cong (2n - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Pour  $Fr < 1$ , nous avons également une série de racines telles que :

$$\pi < \beta_2 < \frac{3\pi}{2} \quad \text{où } \beta_2 \text{ est la 1}^{\text{ère}} \text{ racine}$$

$$2\pi < \beta_3 < \frac{5\pi}{2}$$

Pour  $n$  assez grand, nous avons :

$$\beta_n \cong (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

### **1- AMAOUCHE .M**

« Contribution à l'étude des ondes gravito-capillaires forcées d'amplitude finie ».  
Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle. Université d'ALGER, (1976).

### **2- BIZIEN .M – DEVILLERS .J.F**

« Contribution expérimentale à l'étude de la résistance de vague bidimensionnelle ».  
Rapport de recherche 191 E.N.S.T.A.(1984)

### **3- BOUHADEF .M**

« Contribution à l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle en présence d'ondes de relief ».  
Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle. Université d'ALGER, (1978)

### **4- BOUHADEF .M ; BAUCHE .B ; PEUBE .J ET PEUBE .J.L**

« Structure de l'écoulement à surface libre derrière un obstacle noyé au fond d'un canal ».  
C.R.A.S. de Paris 292, série II, N° 21,1424, (1981)

### **5- BOUHADEF .M**

« Contribution à l'étude des ondes de surface dans un canal. Application à l'écoulement au dessus d'un obstacle immergé ».  
Thèse de doctorat ès Sciences, U.E.R. C.E.A.T. POITIERS, (1988).

### **6- BOUHADEF .M et PEUBE .J.L**

« Propagation des ondes de surface de faible amplitude dans un écoulement cisailé ».  
C.R.A.S. de Paris, t.308, série II, pp1667-1670, (1989).

**7- BOUHAFEF .M**

« Influence du profil de vitesse sur la propagation des ondes de surface dans un canal hydraulique ».

3<sup>ème</sup> Coll. Maghr. sur les Mod. Num. de l'ing. Tunis, Tome 2 pp 472-478, (1991)

**8- BOUHAFEF .M**

« The influence of a sheared velocity profile on the wavelength of standing small amplitude surface waves ». Computer Methods and Experimental Measurements VI, Vol.1, Heat and Fluid Flow, pp 293-301 C. M. publ, (1993).

**9- BOUTROS .Y.Z, ABDELMALEK .M.B et MASOUD .S.Z**

« Linearized solution of a flow over a nonuniform bottom ».

J. of comput. and Appli. Math., 16,105, (1986).

**10-BOUZELHA .K**

« Modélisation analytique des écoulements à surface libre au dessus d'obstacles noyés ».

Thèse de magister Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou , (1997).

**11-CALVO.B, DOYEN.J.CALVO.A , et BOSCHET.F**

« Cours d'analyse VI. Fonction de variable complexe ».

Premier cycle de l'enseignement supérieur et classes préparatoires scientifiques, librairie Armond Colin, 103,Bd St Michel, Paris (1978).

**12-CARLIER .M**

« Hydraulique générale et appliquée ». Edition Eyrolles, (1980)

**13-CHEN .B ET SAFFMAN P.G.**

« Steady gravity-capillarity waves on deep water. I : weakly nonlinear waves ».

Stud. Appl. Math, 60, pp 183-210, (1979)

**14-COMOLET .R**

« Dynamique des fluides réels, Turbomachines ». édition Masson, (1982).

**15-EUVRARD .D**

« Sur la possibilité d'une résolution numérique directe du problème de Neumann-Kelvin, par introduction d'une perturbation singulière ».

C.R.A.S de Paris, 262, A, 385, (1976)

**16-EUVRARD .D**

« La résolution du problème de Neumann-Kelvin : une première approche par différences finies ». Rapport E.N.S.T.A. N°86, Paris, (1977).

**17-KELVIN .L**

« On stationary waves in flowing water ».

Phil. Mag. 22, 353 et 23, 52, (1886, 1887).

**18-KING.A.C et BLOOR M.I.G**

« Free- surface Flow over a step ». J- Fluid .Mech. 182,193, (1987)

**19-LALEG .K et M-A KNOUCHE .M**

« Etude théorique de l'hydrodynamique d'un écoulement à surface libre en présence d'obstacle ». Projet de Fin d'Etudes U.S.T.H.B. Alger (1992).

**20-LAMB .H**

« Hydrodynamics ». Cambridge University Press (6<sup>th</sup> Edition, 1932).

**21-LONG .RR**

« Some aspects of the flow of stratified fluids ».

I.A theoretical investigation Tellus 5, 42, (1953).

**22- LONGUET-HIGGINS .M.S**

« Limiting forms for capillary-gravity waves ».  
J.Fluid Mech. 114, 315-330, (1988).

**23-LYRA .G**

« Theorie der stationären Leewellenströmung in freier Atmosphäre ».  
Z. angew. Math. Mech. 23,1, (1943)

**24-PEUBE .J.L et JALLET .M.F**

« Propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement en conduite cylindrique ».  
Acoustica, 29, 86, (1973).

**25-QUENEY .P**

« Recherches relatives à l'influence du relief sur les éléments météorologiques ».  
La météorologie, 334- 470, (1936).

**26-QUENEY .P**

« Ondes de gravité produites dans un courant aérien par une petite chaîne de montagnes ».  
C.R.A.S. de Paris, 213,588, (1941).

**27-RAYLEIGH .L**

«The form of standing waves on the surface of running water ».  
Proc. Lond. Math. Soc. 15, 69, (1883).

**28-SCHLICHTING .H**

« Boundary-Layer Theory ».  
McGraw-Hill Compagny (6<sup>th</sup> Edition), (1968)

**29-SEMSARI .N**

« Sur les perturbations d'origine gravito-capillaire engendrées dans un écoulement à surface libre ». Thèse de Magister, U.S.T.H.B, (1993).

**30-WEHAUSEN .J.V ET LAITONE .E.V**

« Surface waves ».

Handbuch der Physik, vol 9, Springer Verlag Berlin, (1960)

**31-YOUNSI .A**

« Contribution à l'étude de l'influence du profil de vitesse sur la propagation des ondes de gravité-capillarité ». Thèse de Magister, U.S.T.H.B, (2001).

**32-ZITOUN .T**

« Contribution à l'étude analytique, en théorie linéaire, des ondes de surface dans un canal hydraulique ». Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, U.S.T.H.B. Alger, (1992).