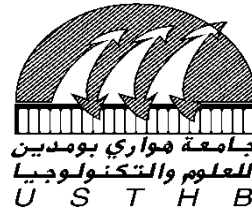


N° d'ordre : 12/2015-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : Equations aux Dérivées Partielles

Par : BOUTARENE Khaled El Ghaouti

Sujet

**Approximation de l'impédance d'une inclusion mince
contrastée pour un problème de transmission en
diffraction des ondes**

Soutenue publiquement, le 17/12/2015 devant le jury composé de :

M. M. MOULAY	Professeur, à l'USTHB / FMT	Président
M. K. LEMRABET	Professeur, à l'USTHB / FMT	Directeur de thèse
M. D. TENIOU	Professeur, à l'USTHB / FMT	Examinateur
M. M. MOUSSAOUI	Professeur, à l'ENS KOUBA	Examinateur
Mme. L. RAHMANI	Professeur, à l'U. TIZI-OUZOU	Examinateur
M. A. AIBECHE	Professeur, à l'U. SETIF	Examinateur

A ma famille et mes amis

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma reconnaissance à mon directeur de thèse Mr K. Lemrabet dont les conseils et la marque de confiance ont grandement contribué à l'élaboration de cette étude.

Je remercie également et bien vivement Mr M.S. Moulay pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de thèse.

Je suis très sensible à l'intérêt que Mr D.E. Teniou témoigne à mon travail et je suis heureux d'avoir ici l'occasion de l'en remercier.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à Mme L. Rahmani, Mr. A. Aibeche et Mr M.A. Moussaoui qui ont accepté d'examiner cette thèse et de se joindre au jury.

Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire AMNEDP. L'ambiance a été vraiment agréable et chaleureuse et j'espère qu'elle durera.

Je souhaite aussi remercier, pour leur soutien, mes amis de la faculté de mathématiques : Amine, Fayçal, Hamid, Mourad, Lyes, Mohammed... ou d'ailleurs Aissam, Sofiane, Sid Ahmed, Yacine, Nabil, Ilies, Nacim qui nous a quitté, ... et tous ceux que j'ai oublié.

Je joins également à ces remerciements mes parents, mes sœurs, mais aussi mes oncles, mes tantes et mes cousins. Je leur exprime à tous ma reconnaissance et ma gratitude pour leur soutien sans faille.

Mes pensées se tournent enfin vers, sans doute celle qui a le plus de mérite, mon épouse Siham pour sa patience, son affection, sa compréhension et surtout pour m'avoir supporté et encouragé durant toute la période de préparation de cette thèse. Qu'elle en soit vivement remerciée!!!

Merci aussi à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette entreprise.

Table des matières

Introduction générale	vi
I Conditions de transmission approchées pour un problème de Poisson à moyenne diffusion	1
1 Présentation du problème	2
1.1 Position du problème et Objectifs	2
1.2 Réécriture du problème à l'aide de l'interface Γ	4
2 Quelques outils de géométrie différentielle et d'analyse fonctionnelle	6
2.1 Paramétrisation de la surface Γ ($P = 3$)	7
2.2 Quelques espaces de fonctions sur Γ	9
2.3 Paramétrisation de $\Omega_{\delta,\beta}$	10
2.4 Quelques espaces de fonctions sur $\Omega_{\delta,\beta}$	13
2.5 Le cas bidimensionnel	15
3 Développement asymptotique	17
3.1 Hiérarchie d'équations variationnelles	18
3.2 Calcul des premiers termes	24
3.2.1 Termes d'ordre 0	27
3.2.2 Termes d'ordre 1	28
3.3 Existence et unicité des suites (u_j^\pm) et $(u_{\text{int},j}^{[\beta]})$	30
4 Justification du développement asymptotique	32
5 Conditions de transmission approchées	42
5.1 Existence et unicité	43

5.2	Estimation de l'erreur	46
II	Conditions de transmission de type Ventcel pour un problème de diffraction d'ondes par une couche mince parfaitement absorbante	49
6	Position du problème	50
6.1	Introduction	50
6.2	Existence et unicité	52
6.3	Stabilité uniforme	57
7	Analyse asymptotique	61
7.1	Hierarchie d'équations variationnelles	64
7.2	Calcul des premiers termes	68
7.2.1	Termes d'ordre 0	69
7.2.2	Termes d'ordre 1	70
7.3	Justification du développement asymptotique	71
8	Conditions de transmission approchées	73
8.1	Existence et unicité	75
8.2	Estimation de l'erreur	81
III	Conditions de transmission de type Ventcel pour un problème de diffraction d'ondes par une couche mince fortement absorbante	88
9	Introduction	89
10	Stabilité uniforme	92
10.1	Existence, unicité et régularité de la solution du problème de Ventcel.	93
10.2	Lemme de densité	97
10.3	Preuve du Théorème de stabilité uniforme	101
11	Analyse asymptotique	109
11.1	Calcul des premiers termes	111
11.1.1	Termes d'ordre 0	111

11.1.2 Termes d'ordre 1	114
12 Conditions de transmission approchées	119
12.1 Réécriture des conditions de transmission	119
12.2 Problème Modèle	121
12.3 Existence et unicité	124
12.4 Estimation de l'erreur	128
13 Conclusion et perspectives	130
A Régularité de la solution du problème de Poisson	132
B Opérateurs de Fredholm	135
C Opérateurs pseudo-différentiels	138
C.1 Symboles	138
C.2 Opérateurs pseudo-différentiels	139
C.3 Hypoellipticité et ellipticité	140
C.4 Opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés	141
D Théorème et Lemmes de Rellich	143
Bibliographie	144
Index des notations	150
Index	153
Liste des figures	156

Introduction générale

A l'ère du 21^{ème} siècle et de la culture numérique, de nouveaux ordinateurs ont vu le jour pouvant faire jusqu'à 16,32 pétaflops (16,32 million de milliards d'opérations à virgule flottante par seconde). En conséquence, l'exigence d'une demande à la précision et à l'exactitude des calculs est d'autant plus grande qu'elle a engendré des problèmes de plus en plus complexes. Là où dans un passé proche, on se permettait de négliger certains petits paramètres (épaisseur d'une membrane cellulaire, petites rugosités au fond d'un canal...) et de considérer des géométries simples (circulaires, ovales...) mais physiquement peu réalistes, une étude plus précise devient plus que nécessaire à l'heure actuelle.

Dans de nombreuses situations physiques, nous sommes amenés à résoudre des problèmes qui sont liés à la géométrie du domaine considéré présentant des couches minces d'épaisseur δ très petite par rapport à la taille du domaine considéré. Citons par exemple, la furtivité radar : la peinture recouvrant un avion ou un missile absorbe les ondes émises par un radar et lui permet de demeurer invisible (cf. [53]), on parle de signature radar. Le missilier cherche ainsi à diminuer sa signature afin d'être détecté le plus tard possible. L'influence des champs électromagnétiques sur le corps humain, composé de plusieurs couches minces, ou particulièrement sur une cellule, est aussi primordial vue son utilité en médecine, par exemple en imagerie par résonance magnétique IRM ou Doppler lorsqu'il s'agit d'une cible en mouvement (globules rouges du sang, paroi du coeur). Ces problèmes sont aussi présents pour modéliser le son dans les salles de spectacle, la détection d'objets enfouis, télécommunication, antennes, satellites...

La résolution numérique de ce type de problème via des méthodes numériques (éléments finis par exemple) peut engendrer des instabilités numériques et un temps de calcul important : une discrétisation assez fine à l'échelle de l'épaisseur δ de la couche mince s'avère nécessaire ce qui conduit à des systèmes avec un nombre de conditionnement qui augmente considérablement lorsque δ tend vers 0.

Pour surmonter cette difficulté, nous adoptons des méthodes asymptotiques pour remplacer l'effet de la couche mince par des problèmes avec des conditions aux limites non-

standards (approchées) appelées conditions d'impédance généralisées ou, dans la littérature russe, conditions de Ventcel ([51, 52]) lorsque celles-ci sont exprimées à l'aide d'opérateurs différentiels tangentiels d'ordre supérieur ou égal à celui de l'opérateur intérieur.

Ces méthodes ont été largement utilisées par différents auteurs ces dernières années et divers résultats ont été obtenus. Nous pouvons citer par exemple, et sans être exhaustif, Leontovich ([36]) et Lemrabet ([35]) pour le cas de la diffraction par des obstacles fortement absorbants, bien connu sous le nom : effet de peau. Leontovich a obtenu une condition aux limites d'ordre 0 qui porte son nom. Lemrabet, quant à lui, a dérivé des conditions aux limites de Ventcel pour divers problèmes d'origine physique ou mécanique dans des domaines non-réguliers. Dans le cas de la diffraction par des obstacles parfaitement conducteurs, des conditions aux limites approchées ont été obtenues par Bendali-Lemrabet ([7, 8]) et Engquist-Nédélec ([30]) pour les équations de Helmholtz et Maxwell dans des géométries régulières et par Caloz, Costabel, Dauge et Vial ([15]) pour l'équation de Poisson dans le cas polygonal.

Le cas des conditions de transmission approchées, c'est-à-dire, le cas de deux domaines emboîtés séparés par une couche mince, a été étudié par Perrussel et Poignard ([40]) pour les équations électro-quasistatiques, par Péron et Poignard ([39]) pour les équations de Maxwell pour une couche mince d'épaisseur constante et par Ciuperca-Jai-Poignard ([18]) et Ciuperca-Perrussel-Poignard ([19]) pour l'équation de Poisson dans le cas d'une couche mince périodique. Des approximations d'ordre élevé ont été établies dans des géométries régulières par Schmidt et Tordeux pour l'équation de Helmholtz ([44]) et le problème de courants de Foucault (the eddy current problem) [45].

Delourme-Haddar-Joly ([24]) et Delourme-Claeys ([25]) ont étudié l'équation de Helmholtz dans le cas d'un anneau régulier fin contenant des fils régulièrement espacés par une distance de même grandeur que l'épaisseur de l'anneau. Nous pouvons citer aussi Schmidt ([43, Part II]) qui a déterminé une approximation de la solution à l'intérieur de la couche mince basée sur une famille de fonctions appelées "*optimal basis functions*".

L'objet de la présente thèse consiste en l'étude du comportement asymptotique de la solution de plusieurs problèmes avec couche mince, lorsque l'épaisseur δ tend vers 0. Nous y construirons et justifierons un développement asymptotique de la solution en fonction de δ à tout ordre. Ceci nous amènera à la modélisation de l'effet de la couche mince par des conditions de transmission approchées de type Ventcel avec un taux de convergence en $O(\delta^2)$.

Notre motivation provient essentiellement des travaux de Poignard, Schmidt et Tordeux ([41, 44]) où ces derniers ont travaillé sur des problèmes similaires d'origine biologique

et électromagnétique. Notre premier problème a été inspiré par celui qu'a traité Poignard dans sa thèse ([41, Chapitre II]) lorsqu'il a considéré une cellule plongée dans un milieu ambiant et a étudié le champ électrique en mode transverse magnétique (TM) à moyenne fréquence. Les deux autres problèmes ont été étudiés en collaboration avec Pierre-Henri Cocquet de l'université de la Réunion.

Démarche générale et objectifs

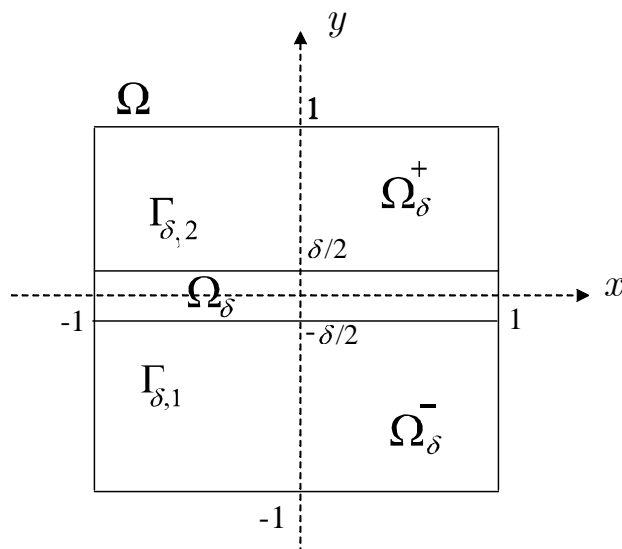
L'idée générale de cette thèse consiste à appliquer des méthodes asymptotiques à trois problèmes différents, définis dans des domaines contenant des couches minces, pour dériver des modèles approchés d'ordre 1. Pour ce faire, nous considérerons une surface Γ à l'intérieur de la couche mince Ω_δ , parallèle à $\partial\Omega_\delta$, divisant le domaine en deux parties indépendantes de δ . Nous y établirons un développement asymptotique de la solution en fonction de l'épaisseur de la couche mince δ . Nous remarquerons ensuite que les deux premiers termes du développement asymptotique conduiront à des modèles mal-posés. Pour cela, nous choisirons une position de Γ de sorte à avoir des problèmes bien-posés. Bien que l'heuristique, qui sera illustrée dans l'exemple ci-après, se répète pour les trois problèmes étudiés, la différence provient des difficultés techniques propres à chacun des problèmes.

Exemple

Soit $\Omega :=]-1, 1[\times]-1, 1[$ le pavé de \mathbb{R}^2 composé de $\Omega_\delta^- :=]-1, 1[\times]-1, -\delta/2[$, $\Omega_\delta^+ :=]-1, 1[\times]\delta/2, 1[$ et une couche mince $\Omega_\delta :=]-1, 1[\times]-\delta/2, \delta/2[$ d'épaisseur δ (destinée à tendre vers 0) séparant Ω_δ^- de Ω_δ^+ (voir Figure 1). Nous notons $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ les interfaces définies par

$$\begin{aligned}\Gamma_{\delta,1} & : =]-1, 1[\times \{-\delta/2\}, \\ \Gamma_{\delta,2} & : =]-1, 1[\times \{\delta/2\}.\end{aligned}$$

Etant données trois constantes strictement positives σ^+, σ^- et σ_δ et deux fonctions assez régulières f^+ et f^- à support compact dans Ω_δ^+ et Ω_δ^- respectivement, nous nous

Figure 1 – Le pavé Ω

intéressons au comportement asymptotique de la solution u_δ du problème suivant

$$-\sigma^\pm \Delta_{x,y} u_\delta^\pm = f^\pm \quad \text{dans } \Omega_\delta^\pm, \quad (1)$$

$$-\sigma_\delta \Delta_{x,y} u_{\text{int},\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta, \quad (2)$$

$$u_\delta|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3)$$

avec les conditions de transmission sur les interfaces $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$

$$\begin{cases} \sigma_\delta \partial_y u_{\text{int},\delta}(x, \delta/2) = \sigma^+ \partial_y u_\delta^+(x, \delta/2), \\ \sigma^- \partial_y u_\delta^-(x, -\delta/2) = \sigma_\delta \partial_y u_{\text{int},\delta}(x, -\delta/2), \\ u_{\text{int},\delta}(x, \delta/2) = u_\delta^+(x, \delta/2), \\ u_\delta^-(x, -\delta/2) = u_{\text{int},\delta}(x, -\delta/2), \end{cases} \quad (4)$$

où $u_\delta^\pm := u_\delta|_{\Omega_\delta^\pm}$ et $u_{\text{int},\delta} := u_\delta|_{\Omega_\delta}$.

Nous souhaitons remplacer l'effet de la couche mince par des conditions de transmission approchées définies sur une interface Γ parallèle à $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ et divisant Ω en deux parties (voir Figure 2). La position de l'interface limite Γ lorsque δ tend vers 0 est variable et un choix particulier de Γ conduit à un problème bien posé. Pour cela, posons

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega ; y := \alpha := p\delta\},$$

où $\alpha \in]-\delta/2, \delta/2[$, i.e., $p \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Le domaine Ω se divise ainsi en deux parties Ω^+ et

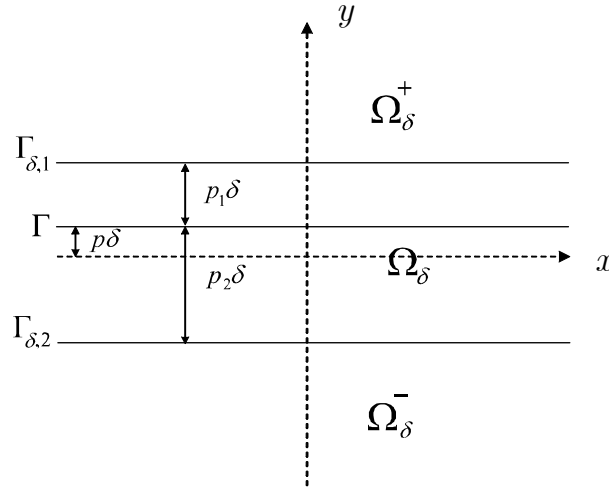


Figure 2 – La couche mince Ω_δ

Ω^- indépendante de δ et définies par (voir Figure 3) :

$$\Omega^- : =]-1, 1[\times]-1, \alpha[,$$

$$\Omega^+ : =]-1, 1[\times]\alpha, 1[.$$

Développement asymptotique.

Développement asymptotique de la solution.

Pour déterminer un développement asymptotique de la solution u_δ , nous considérons deux zones différentes :

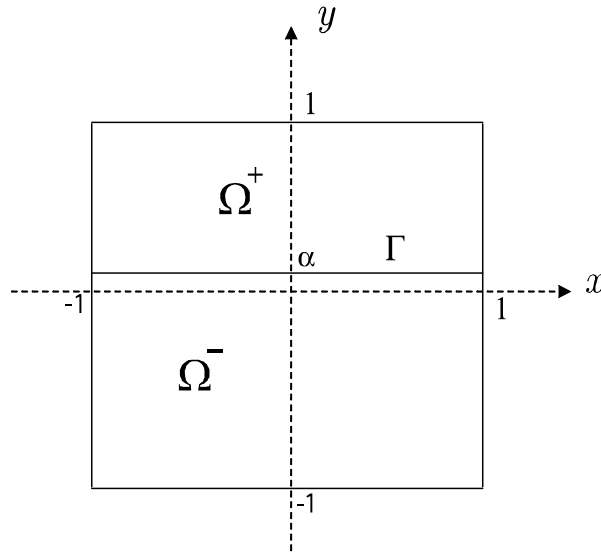
Loin de la couche mince, nous supposons que la solution admet le développement suivant

$$u_\delta^\pm(x, y) = \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^\pm(x, y) \text{ dans } \Omega_\delta^\pm, \quad (5)$$

où les fonctions u_n^\pm ($n \in \mathbb{N}$) sont indépendantes de δ et vérifient

$$\begin{aligned} -\sigma^\pm \Delta u_n^\pm &= \delta_{0,n} f^\pm \text{ dans } \Omega^\pm, \\ u_n^\pm|_{\partial\Omega} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

et $\delta_{0,n}$ est le symbole de Kronecker. Nous parlerons de développement externe. Au voisi-

Figure 3 – Le domaine fixe $\Omega^+ \cup \Omega^-$

nage de la couche mince, nous effectuons le changement d'échelle $\tau = y/\delta$, le domaine Ω_δ se transforme en

$$\Omega_0 :=]-1, 1[\times]-1/2, 1/2[.$$

Nous cherchons alors la solution $u_{\text{int},\delta}$ sous la forme

$$u_{\text{int},\delta}(x, y) = \widehat{u}_{\text{int},\delta}(x, \tau) = \sum_{n \geq 0} \delta^n \widehat{u}_{\text{int},n}(x, \tau), \quad (6)$$

où $\widehat{u}_{\text{int},n}$ sont indépendants de δ et définis sur le domaine fixe Ω_0 . Nous parlerons de développement asymptotique interne.

Compte tenu de (2), (6) et de

$$\partial_y u(x, y) = \delta^{-1} \partial_\tau \widehat{u}(x, \tau), \quad (7)$$

nous obtenons

$$[\delta^{-2} \sigma_\delta \partial_\tau^2 + \sigma_\delta \partial_x^2] \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n \widehat{u}_{\text{int},n}(x, \tau) \right) = 0 \text{ dans } \Omega_0.$$

Par identification des termes de même puissance en δ , nous obtenons une hiérarchie d'équa-

tions

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 \widehat{u}_{\text{int},0} &= 0 \text{ dans } \Omega_0, \\ \partial_\tau^2 \widehat{u}_{\text{int},1} &= 0 \text{ dans } \Omega_0, \\ \partial_\tau^2 \widehat{u}_{\text{int},n} + \partial_x^2 \widehat{u}_{\text{int},n-2} &= 0 \text{ dans } \Omega_0, \quad n \geq 2.\end{aligned}$$

Développement des conditions de transmission.

Le développement de Taylor au voisinage de $y = \alpha$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^-(x, -\delta/2) &= u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_y u_{0|\Gamma}^- \right) + \dots, \\ \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+(x, \delta/2) &= u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_y u_{0|\Gamma}^+ \right) + \dots\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \delta^n \partial_y u_n^-(x, -\delta/2) &= \partial_y u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(\partial_y u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^- \right) + \dots, \\ \sum_{n \geq 0} \delta^n \partial_y u_n^+(x, \delta/2) &= \partial_y u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(\partial_y u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) + \dots,\end{aligned}$$

où p_1 et p_2 sont deux constantes positives définies par $p_1 := p+1/2$ et $p_2 := 1-p_1 = 1/2-p$.

Les conditions (4) deviennent

$$\begin{aligned}u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_y u_{0|\Gamma}^- \right) + \dots &= \sum_{n \geq 0} \delta^n \widehat{u}_{\text{int},n}(x, -1/2), \\ \delta \sigma^- \partial_y u_{0|\Gamma}^- + \delta^2 \left(\sigma^- \partial_y u_{1|\Gamma}^- - p_1 \sigma^- \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^- \right) + \dots &= \sum_{n \geq 0} \delta^n \sigma_\delta \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},n}(x, -1/2), \\ u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_y u_{0|\Gamma}^+ \right) + \dots &= \sum_{n \geq 0} \delta^n \widehat{u}_{\text{int},n}(x, 1/2), \\ \delta \sigma^+ \partial_y u_{0|\Gamma}^+ + \delta^2 \left(\sigma^+ \partial_y u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \sigma^+ \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) + \dots &= \sum_{n \geq 0} \delta^n \sigma_\delta \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},n}(x, 1/2).\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de même puissance de δ , il vient la hiérarchie de conditions de transmission

$$\begin{aligned}\widehat{u}_{\text{int},0}(x, -1/2) &= u_{0|\Gamma}^-, \\ \widehat{u}_{\text{int},0}(x, 1/2) &= u_{0|\Gamma}^+, \\ \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},0}(x, -1/2) &= 0, \\ \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},0}(x, 1/2) &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{u}_{\text{int},1}(x, -1/2) &= u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_y u_{0|\Gamma}^-, \\ \sigma_\delta \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},1}(x, -1/2) &= \sigma^- \partial_y u_{0|\Gamma}^-, \\ \widehat{u}_{\text{int},1}(x, 1/2) &= u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_y u_{0|\Gamma}^+, \\ \sigma_\delta \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},1}(x, 1/2) &= \sigma^+ \partial_y u_{0|\Gamma}^+,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\delta \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},2}(x, -1/2) &= \sigma^- \partial_y u_{1|\Gamma}^- - p_1 \sigma^- \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^-, \\ \sigma_\delta \partial_\tau \widehat{u}_{\text{int},2}(x, 1/2) &= \sigma^+ \partial_y u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \sigma^+ \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^+, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Calcul des premiers termes des développements.

A l'aide d'un procédé de résolution intérieur-extérieur, nous pouvons dériver tous les termes des développements (5) et (6) pourvu que les données soient régulières.

Termes d'ordre 0 Le premier terme du développement externe u_0^\pm est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\sigma^\pm \Delta u_0^\pm = f^\pm & \text{dans } \Omega^\pm, \\ u_{0|\Gamma}^- = u_{0|\Gamma}^+, & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_y u_{0|\Gamma}^- = \sigma^+ \partial_y u_{0|\Gamma}^+ & \text{sur } \Gamma, \\ u_{0|\partial\Omega}^\pm = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le premier terme du développement interne est donné par

$$\widehat{u}_{\text{int},0}(x, \tau) = \widehat{u}_{\text{int},0}(x, 1/2) = \widehat{u}_{\text{int},0}(x, -1/2) = u_{0|\Gamma}^+ = u_{0|\Gamma}^-.$$

Termes d'ordre 1 Le terme u_1 est l'unique solution du problème

$$\begin{aligned} -\sigma^\pm \Delta u_1^\pm &= 0 \quad \text{dans } \Omega^\pm, \\ u_{1|\partial\Omega}^\pm &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

avec les conditions de transmission sur Γ

$$\begin{aligned} u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ &= \frac{\sigma_\delta (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1) - \sigma^+ \sigma^-}{2\sigma_\delta \sigma^+ \sigma^-} \left(\sigma^- \partial_y u_{0|\Gamma}^- + \sigma^+ \partial_y u_{0|\Gamma}^+ \right), \\ \sigma^- \partial_y u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_y u_{1|\Gamma}^+ &= \frac{\sigma_\delta - (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1)}{2} \left(\partial_x^2 u_{0|\Gamma}^- + \partial_x^2 u_{0|\Gamma}^+ \right). \end{aligned}$$

Le terme d'ordre 1 du champ proche, quant à lui, est donné par

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{\text{int},1}(m, \tau) &= u_{1|\Gamma}^- + [(\tau + p_1)\sigma^- \sigma_\delta^{-1} - p_1] \partial_y u_{0|\Gamma}^- \\ &= u_{1|\Gamma}^+ + [(\tau - p_2)\sigma^+ \sigma_\delta^{-1} + p_2] \partial_y u_{0|\Gamma}^+. \end{aligned}$$

Modèle d'ordre 1

Nous souhaitons modéliser l'effet de la couche mince par des conditions de transmission approchées. Plus précisément, nous cherchons un problème bien posé dont la solution $u_+^{\delta,ap}$ est une approximation de u_δ en dehors de la couche mince, à partir duquel nous déduisons une approximation de u_δ sur \mathbb{R}^2 tout entier avec un taux de convergence en $O(\delta^2)$.

Posons

$$u_\delta^\pm \simeq u_\delta^{\pm,(1)} = u_0^\pm + \delta u_1^\pm.$$

Les fonctions $u_\delta^{-,(1)}$ et $u_\delta^{+,(1)}$ sont solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\sigma^\pm \Delta u_\delta^{\pm,(1)} = f^\pm & \text{dans } \Omega^\pm, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \delta \frac{\sigma_\delta (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1) - \sigma^+ \sigma^-}{2\sigma_\delta \sigma^+ \sigma^-} \left(\sigma^- \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} + \sigma^+ \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} \right) + O(\delta^2) & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - \sigma^+ \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \delta \frac{\sigma_\delta - (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1)}{2} \left(\partial_x^2 u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} + \partial_x^2 u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} \right) + O(\delta^2) & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\delta|\partial\Omega}^{\pm,(1)} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

En négligeant les termes d'ordre 2, nous obtenons un problème approché défini par

$$\begin{cases} -\sigma^\pm \Delta u_\delta^{\pm,ap} = f^\pm & \text{dans } \Omega^\pm, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \frac{\sigma_\delta(\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1) - \sigma^+ \sigma^-}{2\sigma_\delta \sigma^+ \sigma^-} \left(\sigma^- \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \sigma^+ \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \right) & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \sigma^+ \partial_y u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \frac{\sigma_\delta - (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1)}{2} \left(\partial_x^2 u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \partial_x^2 u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \right) & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\delta|\partial\Omega}^{\pm,ap} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

qui s'écrit sous forme variationnelle

$$\begin{aligned} & \sigma^+ \int_{\Omega^+} \nabla u_\delta^{+,ap} \cdot \nabla v^+ \, d\Omega^+ + \sigma^- \int_{\Omega^-} \nabla u_\delta^{-,ap} \cdot \nabla v^- \, d\Omega^- \\ & + \frac{1}{\delta} \frac{\sigma_\delta \sigma^+ \sigma^-}{\sigma^+ \sigma^- - \sigma_\delta (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1)} \int_{\Gamma} \left(u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \right) \left(v_{|\Gamma}^+ - v_{|\Gamma}^- \right) \, d\Gamma \\ & + \delta \frac{\sigma_\delta - (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1)}{4} \int_{\Gamma} \left(\partial_x u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} + \partial_x u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \right) \left(\partial_x v_{|\Gamma}^+ + \partial_x v_{|\Gamma}^- \right) \, d\Gamma \\ & = \int_{\Omega^+} f^+ v^+ \, d\Omega^+ + \int_{\Omega^-} f^- v^- \, d\Omega^-, \end{aligned} \quad (9)$$

pour toutes fonctions v^+ et v^- assez régulières définies sur Ω^+ et Ω^- respectivement.

Il est facile de voir que la forme bilinéaire correspondante au problème (9) n'est coercive que si

$$\sigma^+ \sigma^- - \sigma_\delta (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1) > 0 \text{ et } \sigma_\delta - (\sigma^+ p_2 + \sigma^- p_1) > 0,$$

mais en général, nous ne pouvons pas conclure. Pour surmonter cette difficulté, nous utiliserons une technique qui consiste à transformer le problème (8) en une équation pseudo-différentielle sur la surface variable Γ , et un choix convenable de cette dernière, i.e., de la constante p , conduit à un problème bien posé.

Plan de la thèse

Cette thèse comporte trois parties principales. Nous avons choisi de les présenter par ordre de difficulté et chronologique. Dans la première partie, nous présenterons la méthode utilisée tout au long de nos développements. A cet effet, nous avons choisi d'illustrer cette méthode en l'appliquant à un problème de Poisson défini dans un domaine borné avec condition de Dirichlet homogène sur le bord dans le cas moyenne diffusion. Nous commencerons par rappeler quelques notions de géométrie différentielle et d'analyse fonctionnelle

(Chapitre 2), puis nous construirons et justifierons un développement asymptotique de la solution du problème (chapitres 3 et 4). Nous terminerons, par déterminer, dans le Chapitre 5, une position optimale de la surface Γ sur laquelle sont définies des conditions de transmission de type Ventcel afin de modéliser l'effet de la couche mince.

Dans les deux autres parties, nous traiterons, des problèmes de diffraction d'ondes par une couche mince faiblement (Partie 2) et fortement absorbante (Partie 3). Nous nous intéresserons plus particulièrement à la résolution de l'équation de Helmholtz en dimension 3. L'opérateur de Helmholtz n'étant pas coercif, nous commencerons les deux parties par établir un résultat de stabilité uniforme de la solution par rapport au petit paramètre δ , qui nous servira à justifier les développements asymptotiques. Ensuite, nous passerons rapidement sur l'analyse asymptotique des deux problèmes. Nous déterminerons enfin des modèles approchés d'ordre 1. Bien qu'il s'agisse, dans les deux parties 2 et 3, de l'équation de Helmholtz, nous verrons que les problèmes de faible et de forte conductivité diffèrent par les résultats obtenus mais surtout par les difficultés rencontrées.

Première partie

**Conditions de transmission
approchées pour un problème de
Poisson à moyenne diffusion**

Chapitre 1

Présentation du problème

1.1 Position du problème et Objectifs

Soit Ω un domaine borné simplement connexe de \mathbb{R}^P ($P = 2, 3$) composé de trois sous-domaines : un ouvert borné Ω_δ^- de frontière régulière $\Gamma_{\delta,1}$, un domaine extérieur Ω_δ^+ de frontière régulière $\Gamma_{\delta,2} \cup \partial\Omega$ et une membrane Ω_δ (couche mince) d'épaisseur δ (destinée à tendre vers 0) séparant Ω_δ^- de Ω_δ^+ (voir Figure 1.1).

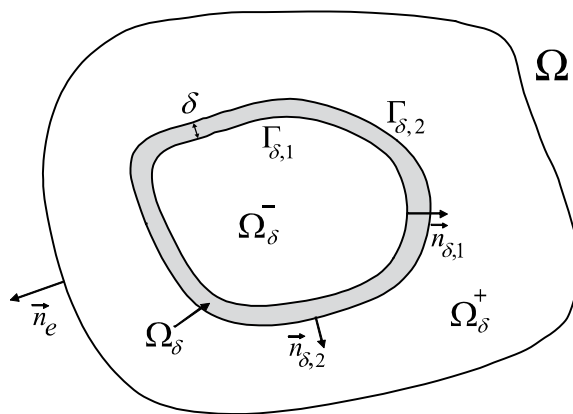


Figure 1.1 – Données géométriques

Nous introduisons la fonction α définie sur Ω par :

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha^+ & \text{si } x \in \Omega_\delta^+, \\ \alpha_\delta & \text{si } x \in \Omega_\delta, \\ \alpha^- & \text{si } x \in \Omega_\delta^-, \end{cases}$$

où α_δ, α^+ et α^- sont trois constantes strictement positives telles que $\alpha^- < \alpha_\delta < \alpha^+$ ou $\alpha^+ < \alpha_\delta < \alpha^-$ correspondants au cas moyenne diffusion. Etant donnée une fonction f dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution u_δ du problème de Poisson suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u_\delta) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\delta|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous souhaitons construire un modèle approché pour remplacer l'effet de la couche mince par des conditions de transmissions approchées dite d'impédance ou généralisées. Pour cela, nous utiliserons une méthode basée sur une hiérarchie d'équations variationnelles pour déterminer et justifier un développement asymptotique de la solution u_δ défini dans Ω , composé cette fois-ci de deux sous-domaines indépendants de δ et séparés par une interface Γ (chapitres 3 et 4). La position de l'interface limite Γ lorsque δ tend vers 0 est variable et un choix particulier de Γ conduit à un problème bien posé modélisant l'effet de la couche mince (Chapitre 5).

Il est facile de voir que le problème (1.1) est bien posé. En effet, une formulation variationnelle de (1.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), a_\delta(u_\delta, v) = \mathcal{F}_\delta(v), \end{cases} \quad (1.2)$$

avec

$$\begin{aligned} a_\delta(u_\delta, v) &:= \alpha^- \int_{\Omega_\delta^-} \nabla u_\delta^- \cdot \nabla v_\delta^- \, d\Omega_\delta^- + \alpha_\delta \int_{\Omega_\delta} \nabla u_{\text{int},\delta} \cdot \nabla v_{\text{int},\delta} \, d\Omega_\delta \\ &+ \alpha^+ \int_{\Omega_\delta^+} \nabla u_\delta^+ \cdot \nabla v_\delta^+ \, d\Omega_\delta^+, \end{aligned}$$

où u_δ^- et v_δ^- (resp. u_δ^+ et v_δ^+) sont les restrictions de u_δ et v sur Ω_δ^- (resp. sur Ω_δ^+); $u_{\text{int},\delta}$ et $v_{\text{int},\delta}$ sont les restrictions de u_δ et v sur Ω_δ et

$$\mathcal{F}_\delta(v) := \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

Nous avons le

Théorème 1 *Si $f \in L^2(\Omega)$, alors le problème (1.2) admet une unique solution $u_\delta \in$*

$H_0^1(\Omega)$. De plus, il existe une constante c , indépendante de δ , telle que

$$\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution u_δ du problème (1.2) découle du lemme de Lax-Milgram [14]. ■

1.2 Réécriture du problème à l'aide de l'interface Γ

Soit Γ une surface régulière parallèle à $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ divisant Ω_δ en deux couches minces $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ d'épaisseurs respectives $p_1\delta$ et $p_2\delta$ où p_1 et p_2 sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant $p_1 + p_2 = 1$ et tels que p_1 et p_2 appartiennent à un *petit voisinage* de $1/2$ (voir figures 1.2 et 1.3). Le terme *petit voisinage* signifie que les constantes p_1 et p_2 ne s'approchent pas trop de 1 et 0 afin d'éviter le cas d'une couche mince trop petite par rapport à l'autre. Par exemple une couche mince d'épaisseur δ^2 et l'autre d'épaisseur $\delta - \delta^2$. L'analyse développée tout au long de cette thèse ne se prête pas à ce cas.

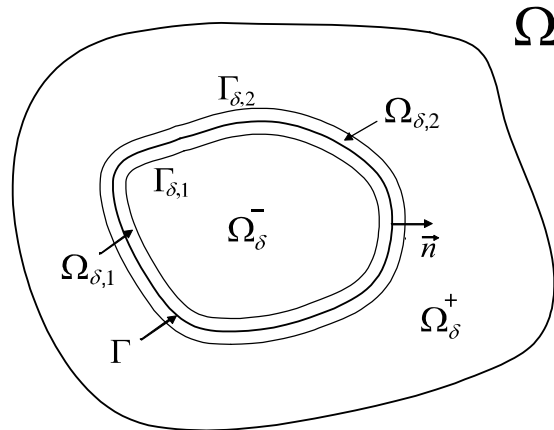
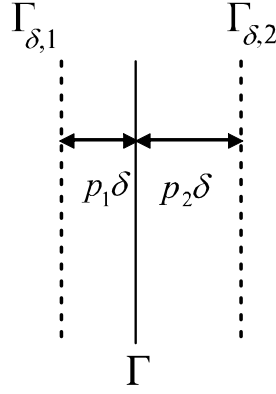


Figure 1.2 – Le domaine Ω

Nous noterons $u_{\text{int},\delta}^1$ et $u_{\text{int},\delta}^2$ les restrictions de $u_{\text{int},\delta}$ sur les domaines $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ respectivement. Sous les hypothèses ci-dessus, le problème (1.1) est équivalent au problème


 Figure 1.3 – La couche mince Ω_δ

de transmission suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha^+ \nabla u_\delta^+) = f_{|\Omega_\delta^+} & \text{dans } \Omega_\delta^+, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha_\delta \nabla u_{\text{int},\delta}^2) = f_{|\Omega_{\delta,2}} & \text{dans } \Omega_{\delta,2}, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha_\delta \nabla u_{\text{int},\delta}^1) = f_{|\Omega_{\delta,1}} & \text{dans } \Omega_{\delta,1}, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha^- \nabla u_\delta^-) = f_{|\Omega_\delta^-} & \text{dans } \Omega_\delta^-, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\delta|\partial\Omega}^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

avec les conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,2}}^2 = u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ & \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_\delta \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,2}}^2 = \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ & \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^1 = u_{\text{int},\delta|\Gamma}^2 & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_\delta \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^1 = \alpha_\delta \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^2 & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- = u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,1}}^1 & \text{sur } \Gamma_{\delta,1}, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- = \alpha_\delta \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,1}}^1 & \text{sur } \Gamma_{\delta,1}, \end{array} \right. \quad (1.13)$$

où $\partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}}$, $\partial_{\mathbf{n}}$, $\partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}}$ et $\partial_{\mathbf{n}_e}$ désignent les dérivées dans la direction des vecteurs unitaires normaux \mathbf{n} , $\mathbf{n}_{\delta,1}$, $\mathbf{n}_{\delta,2}$ et \mathbf{n}_e à Γ , $\Gamma_{\delta,1}$, $\Gamma_{\delta,2}$ et $\partial\Omega$ respectivement (Voir figures 1.1 et 1.2).

Chapitre 2

Quelques outils de géométrie différentielle et d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions de géométrie différentielle et d'analyse fonctionnelle, pour de plus amples détails, cf. e.g. Destuynder [26], Do Carmo [28], Nédélec [38]... Ces notions vont nous permettre de transformer le domaine Ω_δ en un domaine indépendant de δ . Les opérateurs différentiels définis sur Ω_δ vont alors être exprimés à l'aide de systèmes de coordonnées locales qui vont faire apparaître le petit paramètre δ . Ainsi, les espaces fonctionnels, les opérateurs différentiels et intégraux, que nous allons introduire seront à leur tour indépendants de δ , ceci constituera un outil remarquable qui nous conduira à un développement asymptotique de la solution u_δ en fonction du petit paramètre δ . Nous n'insisterons pas sur les notations en usage dans la théorie des équations aux dérivées partielles, par exemple $C^\infty(\overline{\Omega})$, $H_0^1(\Omega)$, $H^s(\Omega)$..., le lecteur pourra consulter [2, 4, 14].

Nous rappelons que, dans tout ce qui suit, Γ est supposée être une variété de classe C^∞ , compacte, sans bord et plongée dans \mathbb{R}^P ($P = 2$ ou 3). Nous traiterons les cas $P = 3$, le cas bidimensionnel sera abordé succinctement à la fin de ce chapitre.

2.1 Paramétrisation de la surface Γ ($P = 3$)

Nous introduisons une famille finie \mathcal{F} de cartes $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ recouvrant Γ i.e., \mathcal{U}_i est un ouvert de Γ et il existe \mathcal{U}'_i un ouvert de \mathbb{R}^2 tel que

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \mathcal{U}'_i &\rightarrow \mathcal{U}_i \\ (\xi^1, \xi^2) &\rightarrow m = \varphi_i(\xi^1, \xi^2). \end{aligned}$$

est un système de coordonnées locales sur Γ . Pour chaque point $m = \varphi_i(\xi^1, \xi^2) \in \Gamma$, nous définissons les vecteurs

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha(m) := \frac{\partial \varphi_i(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Ces deux vecteurs $\boldsymbol{\tau}_1(m)$ et $\boldsymbol{\tau}_2(m)$ sont supposés linéairement indépendants, ce qui permet de définir le plan tangent en m à Γ , que nous noterons $T_m(\Gamma)$. Nous supposons, en outre, que l'orientation de $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ est compatible avec celle de la normale $\mathbf{n}(m)$, i.e. la normale unitaire à $T_m(\Gamma)$ au point m est colinéaire à $\boldsymbol{\tau}_1(m) \times \boldsymbol{\tau}_2(m)$, dirigée vers $\Omega_{\delta,2}$ et est donnée par la relation

$$\mathbf{n}(m) := \frac{\boldsymbol{\tau}_1(m) \times \boldsymbol{\tau}_2(m)}{|\boldsymbol{\tau}_1(m) \times \boldsymbol{\tau}_2(m)|},$$

où \times et $|\cdot|$ sont respectivement le produit vectoriel et la norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 .

Nous définissons le tenseur métrique g relatif au système de coordonnées locale $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ qui opère du plan tangent dans le plan cotangent à Γ et dont la matrice est

$$g_{\gamma\alpha}(m) = \boldsymbol{\tau}_\gamma(m) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha(m) ; \quad \alpha, \gamma = 1, 2.$$

La matrice inverse, notée $g^{-1}(m)$, a pour coordonnées $g^{\gamma\alpha}(m)$. L'élément d'aire est alors donné par

$$d\Gamma = |\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2| d\xi^1 d\xi^2 = \sqrt{\det g} d\xi^1 d\xi^2.$$

Le plus souvent, nous sous-entendons le point m . Nous définissons l'opérateur de courbure de la surface Γ au point m par

$$\mathcal{R}\boldsymbol{\tau}_\alpha := \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^\alpha} ; \quad \alpha = 1, 2 ;$$

\mathcal{R} est un endomorphisme symétrique de $T_m(\Gamma)$. Notons par c_1, c_2 ses valeurs propres, appelées courbures principales de Γ au point m . Nous désignons par \mathcal{H} et \mathcal{K} la courbure

moyenne et la courbure de Gauss de la surface Γ au point m respectivement, définies par

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &:= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathcal{R} = \frac{1}{2} (c_1 + c_2), \\ \mathcal{K} &:= \det \mathcal{R} = c_1 c_2.\end{aligned}$$

Pour toute fonction v définie sur Γ nous associons une fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$v(m) := v \circ \varphi_i(\xi^1, \xi^2), \quad m \in \mathcal{U}_i,$$

où $(\mathcal{U}_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}$. Afin de simplifier les écritures, nous identifierons souvent v à $v \circ \varphi_i$ et nous écrirons indifféremment $v(\xi^1, \xi^2)$ ou $v(m)$. Soit maintenant v une fonction régulière définie sur Γ . Le gradient tangentiel $\nabla_\Gamma v(m)$ de v au point $m = \varphi_i(\xi^1, \xi^2) \in \Gamma$ est défini par

$$\nabla_\Gamma v(m) := \sum_{\gamma=1}^2 \left[\sum_{\alpha=1}^2 g^{\gamma\alpha}(m) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} v(\xi^1, \xi^2) \right] \boldsymbol{\tau}_\gamma(m).$$

Notant Π_m (ou plus simplement Π) l'opérateur de projection orthogonale de \mathbb{R}^3 dans $T_m(\Gamma)$, nous avons la décomposition suivante, pour tout vecteur \mathbf{w} de \mathbb{R}^3 ,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_T + w_n \mathbf{n} = \Pi_m \mathbf{w} + w_n \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

où $\mathbf{w}_T := \Pi_m \mathbf{w}$ et $w_n := \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ désignent respectivement la composante tangentielle et normale du vecteur \mathbf{w} . Il en découle que si \tilde{v} est une fonction régulière définie dans un voisinage de Γ , nous avons

$$\nabla_\Gamma (\tilde{v}|_\Gamma) = \Pi (\nabla \tilde{v}).$$

Soit \mathbf{w}_T un champ de vecteurs régulier tangent à Γ . Sa divergence tangentielle (surfaccique) est la fonction scalaire définie sur Γ par

$$\int_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{w}_T \phi \, d\Gamma := - \int_\Gamma \mathbf{w}_T \cdot \nabla_\Gamma \phi \, d\Gamma,$$

pour toute fonction régulière ϕ définie sur Γ . Nous en déduisons qu'en coordonnées locales la divergence tangentielle est définie par

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{w}_T(m) := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} [\sqrt{g} (\mathbf{w}_T \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha)] (\xi^1, \xi^2).$$

Enfin, nous définissons, à partir de ces deux expressions, l'opérateur de Laplace-Beltrami par :

$$\Delta_{\Gamma} v := \operatorname{div}_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma}) v,$$

pour toute fonction régulière v définie sur Γ .

2.2 Quelques espaces de fonctions sur Γ

Nous rappelons que puisque $\mathcal{F} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ est finie, il existe alors une partition de l'unité subordonnée à \mathcal{F} , à savoir une famille finie $(\chi_i)_{i \in I}$ de fonctions $C^{\infty}(\Gamma)$ telle que pour tout $i \in I$, nous avons

$$0 \leq \chi_i \leq 1, \forall x \in \Gamma, \quad \operatorname{supp}(\chi_i) \subset \mathcal{U}_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1, \forall x \in \Gamma.$$

Il en découle que pour toute fonction u définie sur Γ , il existe une famille finie de fonctions $(u_i)_{i \in I}$ définies sur Γ par $u_i(m) := \chi_i(m) u(m)$, telle que $\operatorname{supp}(u_i) \subset \mathcal{U}_i$ et $u = \sum_{i \in I} u_i$.

Pour tout $i \in I$, posons $\hat{u}_i := u_i \circ \varphi_i : \mathcal{U}'_i \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}). Nous pouvons maintenant définir quelques espaces fonctionnels sur Γ .

L'espace $L^2(\Gamma)$ des (classes de) fonctions mesurables de carré sommable sur Γ est défini par :

$$L^2(\Gamma) := \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Gamma), \hat{f}_i \in L^2(\mathcal{U}'_i), \forall i \in I \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(\Gamma)} := \left(\int_{\Gamma} |f(m)|^2 d\Gamma \right)^{1/2} := \left(\sum_{i \in I} \int_{\mathcal{U}'_i} |\hat{f}_i(\xi^1, \xi^2)|^2 \sqrt{\det g} d\xi^1 d\xi^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Pour $s > 0$, nous définissons l'espace de Sobolev $H^s(\Gamma)$ par

$$H^s(\Gamma) := \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Gamma), \hat{f}_i \in H^s(\mathcal{U}'_i), \forall i \in I \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left(\sum_{i \in I} \|\hat{f}_i\|_{H^s(\mathcal{U}'_i)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Pour $s = 0$, nous retrouvons $L^2(\Gamma) := H^0(\Gamma)$.

Remarque 2 Les deux normes définies dans (2.2) et (2.3) (pour $s = 0$) ne sont pas identiques mais elles sont équivalentes. Ceci découle du fait que les deux fonctions $\sqrt{\det g}$ et $(\sqrt{\det g})^{-1}$ sont bornées dans $L^\infty(\Gamma)$.

Identifiant $H^{-s}(\Gamma)$ à $(H^s(\Gamma))'$, pour $s > 0$, nous avons

$$\|u\|_{H^{-s}(\Gamma)} := \sup_{\substack{v \in H^s(\Gamma) \\ \|v\|_{H^s(\Gamma)} \neq 0}} \left(\frac{1}{\|v\|_{H^s(\Gamma)}} \left| \langle u, v \rangle_{H^{-s}(\Gamma) \times H^s(\Gamma)} \right| \right),$$

où le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-s}(\Gamma) \times H^s(\Gamma)}$ désigne la dualité entre $H^{-s}(\Gamma)$ et $H^s(\Gamma)$.

Remarque 3 Insistons sur le fait que, grâce à la compacité de Γ , les définitions ci-dessus et par conséquent les normes sous-jacentes, trouvent un sens puisque les sommes (2.2) et (2.3) sont finies. Par ailleurs, nous pouvons vérifier (cf. [48]) que la définition de ces normes est indépendante de l'atlas choisi.

Remarque 4 La définition des espaces $H^{-s}(\Gamma)$, $s > 0$, n'est plus valable si Γ est une variété avec bord, puisque dans ce cas nous avons $H^{-s}(\Gamma) \neq (H^s(\Gamma))'$.

Remarque 5 Pour $s = 1$, l'espace $H^1(\Gamma)$, pourrait être défini par :

$$H^1(\Gamma) := \{u \in \mathcal{D}'(\Gamma), u \in L^2(\Gamma), \nabla_\Gamma u \in \mathbb{L}^2(\Gamma)\}.$$

où $\mathbb{L}^2(\Gamma)$ désigne l'espace des champs de vecteurs tangents sur Γ à composantes dans $L^2(\Gamma)$, i.e. $\mathbf{w} \in \mathbb{L}^2(\Gamma)$ si et seulement si $\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \in L^2(\Gamma)$, $\alpha = 1, 2$.

Cet espace sera muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Gamma)} := \left(\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla_\Gamma u\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}.$$

2.3 Paramétrisation de $\Omega_{\delta, \beta}$

Posons maintenant

$$\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3; x := m + \eta \mathbf{n}(m) \text{ où } -p_1 \delta \leq \eta \leq p_2 \delta \text{ et } m \in \Gamma\}. \quad (2.4)$$

Dans toute la suite, nous ferons l'hypothèse dite de *coques minces* qui s'énonce comme suit (cf. [26]) :

$$\delta \max(|c_1|, |c_2|) < 1. \quad (2.5)$$

Cette hypothèse assure que l'égalité (2.4) définit une bijection entre $\overline{\Omega}_\delta$ et $\Gamma \times [-p_1\delta, p_2\delta]$. Ceci nous permet de caractériser chaque point x de la couche mince Ω_δ par ses coordonnées (ξ^1, ξ^2, η) .

Par ailleurs, nous serons amenés à décomposer Ω_δ en deux couches minces $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ d'épaisseurs respectives $p_1\delta$ et $p_2\delta$; et afin d'éviter les redondances, nous les noterons souvent $\Omega_{\delta,\beta}$ où l'indice grec β prendra les valeurs 1 et 2.

Soient $I_{\delta,1} = (-p_1\delta, 0)$ et $I_{\delta,2} = (0, p_2\delta)$, nous introduisons les applications

$$\begin{cases} \Gamma \times I_{\delta,\beta} & \xrightarrow{\psi_\beta} & \Omega_{\delta,\beta} \\ (m, \eta_\beta) & \rightarrow & x := m + \eta_\beta \mathbf{n}(m). \end{cases}$$

Compte tenu de (2.5), ψ_β est un C^∞ -difféomorphisme (de variétés). Il s'ensuit que pour tout élément x dans $\Omega_{\delta,\beta}$, il existe une carte locale $(\mathcal{U}_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}$ et un ouvert U de \mathbb{R}^3 contenant x , tels que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{U}_i \times I_{\delta,\beta} & \xrightarrow{\Psi_\beta} & U \subset \mathbb{R}^3 \\ (m, \eta_\beta) & \rightarrow & x := m + \eta_\beta \mathbf{n}(m), \end{cases}$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

A toute fonction v_β définie sur $\Omega_{\delta,\beta}$, nous associons la fonction \tilde{v}_β définie sur $\Gamma \times I_{\delta,\beta}$ par

$$\begin{cases} \tilde{v}_\beta(m, \eta_\beta) & := v_\beta(x), \\ x & = \psi_\beta(m, \eta_\beta). \end{cases}$$

Il en découle

$$\frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} = \nabla v_\beta \cdot (I + \eta_\beta \mathcal{R}) \tau_\alpha; \quad \alpha = 1, 2,$$

et

$$\frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial \eta_\beta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \eta_\beta} = \nabla v_\beta \cdot \mathbf{n},$$

où I est l'opérateur identité du plan tangent $T_m(\Gamma)$. Puisque le vecteur $(I + \eta_\beta \mathcal{R}) \tau_\alpha$ est dans $T_m(\Gamma)$ et que l'opérateur $(I + \eta_\beta \mathcal{R})$ est symétrique, nous obtenons

$$\frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial \xi^\alpha} = (I + \eta_\beta \mathcal{R}) \Pi_m \nabla v_\beta \cdot \tau_\alpha.$$

L'hypothèse (2.5) assure que l'opérateur $I + \eta_\beta \mathcal{R}$ est un automorphisme de $T_m(\Gamma)$, d'où

$$\Pi_m \nabla v_\beta = (I + \eta_\beta \mathcal{R})^{-1} \nabla_\Gamma \tilde{v}_\beta.$$

Grâce à la décomposition (2.1) nous déduisons l'identité

$$\nabla v_\beta = (I + \eta_\beta \mathcal{R})^{-1} \nabla_\Gamma \tilde{v}_\beta + \frac{\partial \tilde{v}_\beta}{\partial \eta_\beta} \mathbf{n}.$$

L'élément de volume dans la couche mince $\Omega_{\delta,\beta}$ au point $x = m + \eta_\beta \mathbf{n}(m)$ est donné par la relation

$$d\Omega_{\delta,\beta} = \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta_\beta} d\xi^1 d\xi^2 d\eta_\beta.$$

Comme

$$\frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi^2} = (I + \eta_\beta \mathcal{R}) \tau_1 \times (I + \eta_\beta \mathcal{R}) \tau_2 = \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) (\tau_1 \times \tau_2),$$

et

$$|\tau_1 \times \tau_2| d\xi^1 d\xi^2 = d\Gamma,$$

nous obtenons

$$d\Omega_{\delta,\beta} = \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta.$$

L'élément d'aire de la surface $\Gamma_{\delta,\beta}$ au point $x = m + (-1)^\beta \delta p_\beta \mathbf{n}(m)$ est lié à l'élément d'aire sur la surface Γ au point m par la relation

$$d\Gamma_{\delta,\beta} = \det(I + (-1)^\beta p_\beta \delta \mathcal{R}) d\Gamma.$$

Nous introduisons maintenant le changement d'échelle $s_\beta = \eta_\beta / p_\beta \delta$, les intervalles $I_1 = (-1, 0)$ et $I_2 = (0, 1)$ de telle sorte que le C^∞ -difféomorphisme Φ_β , défini par

$$\begin{cases} \Omega^\beta := \Gamma \times I_\beta & \xrightarrow{\Phi_\beta} & \Omega_{\delta,\beta} \\ (m, s_\beta) & \rightarrow & x := m + \delta p_\beta s_\beta \mathbf{n}(m), \end{cases}$$

paramétrise la couche mince $\Omega_{\delta,\beta}$.

A toute fonction v_β définie sur $\Omega_{\delta,\beta}$, nous associons la fonction $v^{[\beta]}$ définie sur Ω^β par

$$\begin{cases} v^{[\beta]}(m, s_\beta) & := v_\beta(x), \\ x & = \Phi_\beta(m, s_\beta). \end{cases}$$

Ainsi, en coordonnées locales (ξ^1, ξ^2, s_β) , le gradient prend la forme

$$\nabla v_\beta = (I + \delta p_\beta s_\beta \mathcal{R})^{-1} \nabla_\Gamma v^{[\beta]} + p_\beta^{-1} \delta^{-1} \frac{\partial v^{[\beta]}}{\partial s_\beta} \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

L'élément de volume dans la couche mince $\Omega_{\delta,\beta}$ au point $x = m + \delta p_\beta s_\beta \mathbf{n}(m)$ devient

$$d\Omega_{\delta,\beta} = p_\beta \delta \det J_{\delta,\beta} d\Gamma ds_\beta, \quad (2.7)$$

où $J_{\delta,\beta}$ est l'endomorphisme de $T_m(\Gamma)$ défini par

$$J_{\delta,\beta} := I + p_\beta \delta s_\beta \mathcal{R}.$$

Il vérifie l'identité

$$\det J_{\delta,\beta} = 1 + 2p_\beta s_\beta \delta \mathcal{H} + (p_\beta s_\beta \delta)^2 \mathcal{K}. \quad (2.8)$$

Soient maintenant u_β et v_β deux fonctions régulières définies sur $\Omega_{\delta,\beta}$. De (2.6) et (2.7), nous avons les formules de changement de variables suivantes :

$$\int_{\Omega_{\delta,\beta}} u_\beta v_\beta d\Omega_{\delta,\beta} = p_\beta \delta \int_{\Omega^\beta} u^{[\beta]} v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} d\Gamma ds_\beta, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\delta,\beta}} \nabla u_\beta \cdot \nabla v_\beta d\Omega_{\delta,\beta} &= p_\beta \delta \int_{\Omega^\beta} J_{\delta,\beta}^{-2} \nabla_\Gamma u^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} d\Gamma ds_\beta \\ &+ p_\beta^{-1} \delta^{-1} \int_{\Omega^\beta} \partial_{s_\beta} u^{[\beta]} \partial_{s_\beta} v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} d\Gamma ds_\beta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Remarque 6 Pour toute fonction u définie sur la couche mince $\Omega_{\delta,\beta}$, nous noterons indifféremment $u(x)$ ou $u(m, \eta_\beta)$. Ainsi, la trace de u sur la surface Γ sera notée indifféremment $u|_\Gamma$ ou $u(m, 0)$.

2.4 Quelques espaces de fonctions sur $\Omega_{\delta,\beta}$

Nous définissons l'espace $L^2(\Omega_{\delta,\beta})$ des (classes de) fonctions mesurables de carré sommable dans $\Omega_{\delta,\beta}$ par

$$L^2(\Omega_{\delta,\beta}) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega_{\delta,\beta}) ; \int_{\Omega_{\delta,\beta}} |u|^2 d\Omega_{\delta,\beta} < +\infty \right\},$$

muni de la norme usuelle

$$\|u\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})} = \left(\int_{\Omega_{\delta,\beta}} |u(x)|^2 d\Omega_{\delta,\beta} \right)^{1/2}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega_{\delta,\beta})$ est défini par :

$$H^1(\Omega_{\delta,\beta}) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega_{\delta,\beta}), u \in L^2(\Omega_{\delta,\beta}) \text{ et } \nabla u \in \mathbb{L}^2(\Omega_{\delta,\beta})\}.$$

Cet espace sera muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})} = \left(\int_{\Omega_{\delta,\beta}} |u(x)|^2 d\Omega_{\delta,\beta} + \int_{\Omega_{\delta,\beta}} |\nabla u(x)|^2 d\Omega_{\delta,\beta} \right)^{1/2},$$

où $\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta,\beta})$ désigne l'espace des champs de vecteurs définis sur $\Omega_{\delta,\beta}$.

Tout le long de notre travail, nous désignerons par c différentes constantes strictement positives indépendantes de δ . Soit maintenant u dans $L^2(\Omega_{\delta,\beta})$. En vertu de (2.5), nous avons l'inégalité

$$c^{-1} \leq \left\| [\det(I + \eta_\beta \mathcal{R})]^{-1} \right\|_{L^\infty(\Omega_{\delta,\beta})} + \|\det(I + \eta_\beta \mathcal{R})\|_{L^\infty(\Omega_{\delta,\beta})} \leq c. \quad (2.11)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} c^{-1} \|u\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})}^2 &= c^{-1} \int_{\Omega_{\delta,\beta}} |u(x)|^2 d\Omega_{\delta,\beta} = c^{-1} \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u(m, \eta_\beta)|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta \\ &\leq \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u(m, \eta_\beta)|^2 d\Gamma d\eta_\beta \leq c \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u(m, \eta_\beta)|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta \\ &= c \int_{\Omega_{\delta,\beta}} |u(x)|^2 d\Omega_{\delta,\beta} = c \|u\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})}^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Par conséquent $L^2(\Omega_{\delta,\beta})$ est isomorphe à l'espace $L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})} = \left(\int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u(m, \eta_\beta)|^2 d\Gamma d\eta_\beta \right)^{1/2}.$$

De même, nous pouvons montrer que $H^1(\Omega_{\delta,\beta})$ est isomorphe à $H^1(\Gamma \times I_{\delta,\beta})$ muni de la

norme

$$\|u\|_{H^1(\Gamma \times I_{\delta,\beta})} = \left(\int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u|^2 d\Gamma d\eta_\beta + \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} \left| \partial_{\eta_\beta} u \right|^2 d\Gamma d\eta_\beta + \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |\nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma d\eta_\beta \right)^{1/2}.$$

En effet, toujours de (2.11), nous avons, pour toute fonction u dans $H^1(\Omega_{\delta,\beta})$

$$\begin{aligned} c \|u\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})}^2 &= c \int_{\Omega_{\delta,\beta}} |u(x)|^2 d\Omega_{\delta,\beta} + c \int_{\Omega_{\delta,\beta}} |\nabla u(x)|^2 d\Omega_{\delta,\beta} \\ &= c \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta + c \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} \left| \partial_{\eta_\beta} u \right|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta \\ &\quad + c \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} (I + \eta_\beta \mathcal{R})^{-2} |\nabla_\Gamma u|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta \\ &\leq \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u|^2 d\Gamma d\eta_\beta + \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |\nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma d\eta_\beta \\ &\quad + \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} \left| \partial_{\eta_\beta} u \right|^2 d\Gamma d\eta_\beta \\ &\leq c' \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} |u|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta + c' \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} \left| \partial_{\eta_\beta} u \right|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta \\ &\quad + c' \int_{\Gamma \times I_{\delta,\beta}} (I + \eta_\beta \mathcal{R})^{-2} |\nabla_\Gamma u|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) d\Gamma d\eta_\beta \\ &= c' \|u\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})}^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.5 Le cas bidimensionnel

Dans le cas bidimensionnel, Γ est supposée être une courbe régulière, fermée de longueur l_Γ , paramétrée par $t \rightarrow m(t)$ où $t \in [0, l_\Gamma]$ est une abscisse curviligne (cf. [28]). Nous définissons le vecteur unitaire tangent $\boldsymbol{\tau}(m)$ à Γ au point m par

$$\boldsymbol{\tau}(m) := \frac{dm(t)}{dt},$$

il est dirigé dans le sens du mouvement que nous supposons contraire aux aiguilles d'une montre. Le vecteur unitaire normal à Γ au point m , noté $\mathbf{n}(m)$, et dirigé vers $\Omega_{\delta,2}$ est obtenu en effectuant une rotation de $-\pi/2$ du vecteur $\boldsymbol{\tau}(m)$ (un quart de tour dans le sens indirect). Ces deux vecteurs $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$ forment une base orthonormale directe qui a pour origine le point $m(t)$, appelée base de Frenet.

On rappelle les formules de Frénet qui définissent la courbure $\mathcal{R}(t)$ au point $m(t)$ d'abscisse curviligne t

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = -\mathcal{R}(t)\mathbf{n} \quad \text{and} \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathcal{R}(t)\boldsymbol{\tau}.$$

L'opérateur de courbure \mathcal{R} est une fonction scalaire en t (positive si $\Omega_{\text{ext},\delta}^-$ est convexe). Il en découle que, pour toute fonction régulière v_β définie sur $\Omega_{\delta,\beta}$, en coordonnées locales (m, s_β) , le gradient de v_β vérifie

$$\nabla v_\beta \cdot \boldsymbol{\tau} = (1 + p_\beta \delta s_\beta \mathcal{R})^{-1} \partial_t v^{[\beta]}.$$

Par conséquent, les formules de changement de variables (2.9) et (2.10) deviennent :

$$\int_{\Omega_{\delta,\beta}} u_\beta v_\beta \, d\Omega_{\delta,\beta} = p_\beta \delta \int_{\Omega^\beta} (1 + p_\beta \delta s_\beta \mathcal{R}) u^{[\beta]} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_\beta, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\delta,\beta}} \nabla u_\beta \cdot \nabla v_\beta \, d\Omega_{\delta,\beta} &= p_\beta^{-1} \delta^{-1} \int_{\Omega^\beta} (1 + p_\beta \delta s_\beta \mathcal{R}) \partial_{s_\beta} u^{[\beta]} \partial_{s_\beta} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_\beta \\ &\quad + p_\beta \delta \int_{\Omega^\beta} (1 + p_\beta \delta s_\beta \mathcal{R})^{-1} \partial_t u^{[\beta]} \partial_t v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_\beta, \end{aligned} \quad (2.15)$$

pour toutes fonctions régulières u_β et v_β définies sur $\Omega_{\delta,\beta}$.

Chapitre 3

Développement asymptotique

Cette section est dédiée à l'analyse asymptotique de la solution du problème (1.1). Nous montrerons que ce dernier induit une équation variationnelle définie dans un domaine fixe, indépendant de δ . Nous déduirons à partir de cette équation une hiérarchie d'équations variationnelles qui nous permettra de déterminer un développement asymptotique de la solution u_δ à tout ordre. Nous calculerons ensuite les deux premiers termes du développement asymptotique pour présenter un algorithme de construction.

Soit v_{int} une fonction dans $H^1(\Omega_\delta)$. Nous désignerons par v_{int}^β ses restrictions aux domaines $\Omega_{\delta,\beta}$. Multipliant l'équation

$$-\text{div}(\alpha_\delta \nabla u_{\text{int},\delta}) = f|_{\Omega_\delta} \quad \text{dans } \Omega_\delta,$$

par une fonction test v_{int} , utilisant les conditions (1.9), (1.13) et la formule de Green (cf. [4]), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left\langle \alpha^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^-, v_{\text{int}|\Gamma_{\delta,1}}^1 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_{\delta,1}) \times H^{1/2}(\Gamma_{\delta,1})} + \alpha_\delta \int_{\Omega_{\delta,1}} \nabla u_{\text{int},\delta}^1 \cdot \nabla v_{\text{int}}^1 \, d\Omega_{\delta,1} \\ & + \alpha_\delta \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla u_{\text{int},\delta}^2 \cdot \nabla v_{\text{int}}^2 \, d\Omega_{\delta,2} - \left\langle \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+, v_{\text{int}|\Gamma_{\delta,2}}^2 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_{\delta,2}) \times H^{1/2}(\Gamma_{\delta,2})} \\ & = \int_{\Omega_\delta} f|_{\Omega_\delta} v_{\text{int}} \, d\Omega_\delta. \end{aligned}$$

Compte tenu de la dilatation dans les couches minces et de la formule de changement de

variables (2.10), nous déduisons

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \alpha^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- \circ \Phi_1(m, -1), v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma \times \{-1\}) \times H^{1/2}(\Gamma \times \{-1\})} \\
 & - \left\langle \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ \circ \Phi_2(m, 1), v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma \times \{1\}) \times H^{1/2}(\Gamma \times \{1\})} \\
 & + \sum_{\beta=1}^2 \left[\alpha_{\delta} \delta a_{\delta}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},\delta}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] = \int_{\Omega_{\delta}} f_{|\Omega_{\delta}} v_{\text{int}} d\Omega_{\delta}, \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

où la forme bilinéaire $a_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 a_{\delta}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) & := p_{\beta} \int_{\Omega^{\beta}} J_{\delta,\beta}^{-2} \nabla_{\Gamma} u^{[\beta]} \cdot \nabla_{\Gamma} v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} d\Gamma ds_{\beta} \\
 & + p_{\beta}^{-1} \delta^{-2} \int_{\Omega^{\beta}} \partial_{s_{\beta}} u^{[\beta]} \partial_{s_{\beta}} v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} d\Gamma ds_{\beta}, \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

pour toutes fonctions $u^{[\beta]}$ et $v^{[\beta]}$ dans $H^1(\Omega^{\beta})$.

3.1 Hiérarchie d'équations variationnelles

Il est bien connu (cf. e.g., [7, 22, 24, 44]) que pour les problèmes de couches minces (problèmes de perturbation non-locale), nous ne pouvons pas déterminer un développement asymptotique de la solution u_{δ} en fonction de δ qui soit uniforme sur tout le domaine Ω . Il existe des régions (couches minces) où la solution peut subir de fortes variations. Nous parlerons de région de non-uniformité ou plus couramment de phénomène de couche limite.

Pour pallier cette difficulté, nous adopterons une méthode qui consiste à construire deux développements asymptotiques dans deux zones différentes. Le premier intervient en la variable standard x (échelle macroscopique ou variable lente), nous parlerons de développement asymptotique externe ou zone de champ lointain. Le second intervient en la variable semi-dilatée (m, s_{β}) (échelle microscopique ou variable rapide) et nous parlerons de développement interne ou zone de champ proche.

Le développement asymptotique externe correspond au développement de la solution u_{δ} restreinte aux domaines Ω_{δ}^- et Ω_{δ}^+ et est donné par l'ansatz

$$\begin{cases} u_{\delta}^- = u_0^- + \delta u_1^- + \dots, \\ u_{\delta}^+ = u_0^+ + \delta u_1^+ + \dots, \end{cases} \tag{3.3}$$

où les termes u_n^\pm ($n \in \mathbb{N}$) sont indépendants de δ et vérifient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha^+ \nabla u_n^+) = \delta_{0,n} f|_{\Omega^+} & \text{dans } \Omega^+, \\ -\operatorname{div}(\alpha^- \nabla u_n^-) = \delta_{0,n} f|_{\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-, \\ u_n|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

avec $\delta_{0,n}$ est le symbole de Kronecker, $\Omega^- := \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_\delta^- \cup \Gamma_{\delta,1} \cup \Omega_{\delta,1}$ et $\Omega^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ (voir Figure 3.1).

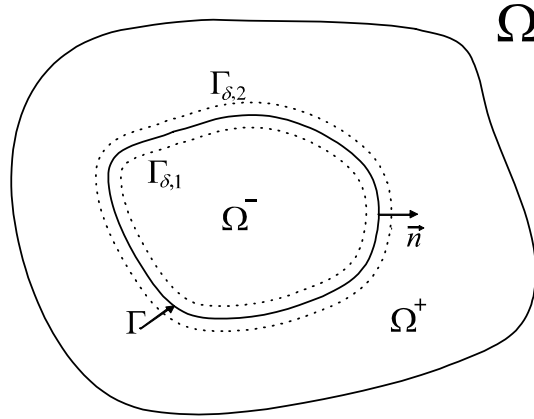


Figure 3.1 – Le domaine fixe Ω

Remarque 7 Dans ce document, nous utiliserons souvent u^\pm (resp. u^β) pour désigner les deux fonctions u^+ et u^- (resp. u^1 et u^2). Ceci est valable aussi pour les domaines Ω^\pm , Ω^β ...

Le développement asymptotique interne correspond au développement de la solution $u_{\text{int},\delta}^\beta$ exprimée en coordonnées curvilignes (m, s_β) et est donné par l'ansatz

$$u_{\text{int},\delta}^\beta \circ \Phi_\beta := u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} = u_{\text{int},0}^{[\beta]} + \delta u_{\text{int},1}^{[\beta]} + \dots, \quad \text{dans } \Omega^\beta, \quad (3.5)$$

où les termes $u_{\text{int},n}^{[\beta]}$, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendants de δ .

Bien entendu, rien jusqu'à présent ne nous permet de justifier une telle écriture, elle est purement formelle, nous nous contentons ici de calculer les termes u_n^\pm et $u_{\text{int},n}^{[\beta]}$. Nous donnerons dans le Chapitre 4 un sens à ces écritures.

Nous aurons besoin de connaître le comportement du champ lointain au voisinage de la couche mince pour d'une part, déterminer un développement des conditions de

transmission (1.8) et (1.12) en δ et d'autre part, exprimer le terme de droite dans (3.1) à l'aide d'un crochet de dualité défini sur la surface Γ et de la forme bilinéaire $a_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$. Bien sur, nous supposons que les termes de champ lointain sont très réguliers dans un voisinage de Γ (hypothèse qui sera vérifiée dans la suite). Le développement de Taylor permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^- \right) \circ \Phi_1(m, s_1) &= u_{0|\Gamma}^- + \delta(u_{1|\Gamma}^- + s_1 p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-) + \dots \\ &:= U_{\text{int},0}^- + \delta U_{\text{int},1}^- + \delta^2 U_{\text{int},2}^- + \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+ \right) \circ \Phi_2(m, s_2) &= u_{0|\Gamma}^+ + \delta(u_{1|\Gamma}^+ + s_2 p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+) + \dots \\ &:= U_{\text{int},0}^+ + \delta U_{\text{int},1}^+ + \delta^2 U_{\text{int},2}^+ + \dots. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les conditions (1.8) et (1.12) deviennent

$$u_{0|\Gamma}^+ + \delta(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+) + \dots = u_{\text{int},0|s_2=1}^{[2]} + \delta u_{\text{int},1|s_2=1}^{[2]} + \dots, \quad (3.8)$$

$$u_{0|\Gamma}^- + \delta(u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-) + \dots = u_{\text{int},0|s_1=-1}^{[1]} + \delta u_{\text{int},1|s_1=-1}^{[1]} + \dots. \quad (3.9)$$

De (1.10) et (3.5), nous aurons

$$u_{\text{int},0|s_1=0}^{[1]} + \delta u_{\text{int},1|s_1=0}^{[1]} + \dots = u_{\text{int},0|s_2=0}^{[2]} + \delta u_{\text{int},1|s_2=0}^{[2]} + \dots. \quad (3.10)$$

Par ailleurs, en reportant (3.3) dans la première équation de (3.4) et en utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\delta,2}} f_{\Omega_{\delta,2}} v_{\text{int}}^2 d\Omega_{\delta,2} &= \alpha^+ \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+ \right) \cdot \nabla v_{\text{int}}^2 d\Omega_{\delta,2} \\ &\quad + \left\langle \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+ \right), v_{\text{int}|\Gamma}^2 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad - \left\langle \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+ \right), v_{\text{int}|\Gamma_{\delta,2}}^2 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_{\delta,1}) \times H^{1/2}(\Gamma_{\delta,1})}, \end{aligned}$$

il en découle, en utilisant le changement d'échelle $s_2 = \eta_2/\delta$, que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\delta,2}} f_{|\Omega_{\delta,2}} v_{\text{int}}^2 d\Omega_{\delta,2} &= \int_{\Gamma} \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_{n|\Gamma}^+ \right) v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) d\Gamma + \alpha^+ \delta a_{\delta}^{[2]} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\ &- \left\langle \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_{n|\Gamma_{\delta,2}}^+ \right) \circ \Phi_2(m, 1), v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma \times \{1\}) \times H^{1/2}(\Gamma \times \{1\})}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De manière analogue, nous obtenons une expression du terme $\int_{\Omega_{\delta,1}} f_{|\Omega_{\delta,1}} v_{\text{int}}^1 d\Omega_{\delta,1}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\delta,1}} f_{|\Omega_{\delta,1}} v_{\text{int}}^1 d\Omega_{\delta,1} &= \alpha^- \delta a_{\delta}^{[1]} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) - \int_{\Gamma} \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_{n|\Gamma}^- \right) v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma \\ &+ \left\langle \alpha^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_{n|\Gamma_{\delta,1}}^- \right) \circ \Phi_1(m, -1), v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma \times \{-1\}) \times H^{1/2}(\Gamma \times \{-1\})}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Reportant les expressions (3.3) et (3.5) dans (3.1) et utilisant (3.6)-(3.7) et (3.11)-(3.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_{n|\Gamma}^- \right) v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma - \alpha^- \delta a_{\delta}^{[1]} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\ &+ \sum_{\beta=1}^2 \left[\alpha_{\delta} \delta a_{\delta}^{[\beta]} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_{\text{int},n}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] - \alpha^+ \delta a_{\delta}^{[2]} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\ &- \int_{\Gamma} \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_{n|\Gamma}^+ \right) v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A partir de l'équation (3.13) nous envisagerons de déterminer les termes du développement asymptotique de la solution u_{δ} . Mais avant, nous effectuerons un développement de la forme bilinéaire $a_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ de manière à rendre explicite la dépendance vis-à-vis du petit paramètre δ .

Utilisant (2.8) et l'identité (cf. [7, p. 1680])

$$\begin{aligned} J_{\delta,\beta}^{-2} &:= I - 2s_{\beta} p_{\beta} \delta \mathcal{R} + 3(p_{\beta} s_{\beta} \delta \mathcal{R})^2 + \dots + n(-p_{\beta} s_{\beta} \delta \mathcal{R})^{n-1} \\ &+ (-s_{\beta} p_{\beta} \delta \mathcal{R})^n [nJ_{\delta,\beta}^{-1} + J_{\delta,\beta}^{-2}], \end{aligned}$$

la forme bilinéaire $a_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ admet le développement suivant :

$$\begin{aligned} a_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot) &= \delta^{-2} a_{0,2}^{[\beta]} + \delta^{-1} a_{1,2}^{[\beta]} + \left(a_{2,2}^{[\beta]} + a_{0,1}^{[\beta]} \right) + \delta a_{1,1}^{[\beta]} + \dots \\ &\quad + \delta^{n-1} a_{n-1,1}^{[\beta]} + \delta^n r_n^{[\beta]}(\delta; \cdot, \cdot), \end{aligned} \quad (3.14)$$

où les formes bilinéaires $a_{k,l}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ sont indépendantes de δ et sont données par

$$\begin{aligned} a_{0,2}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} p_\beta^{-1} \partial_{s_\beta} u^{[\beta]} \partial_{s_\beta} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ a_{1,2}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} 2\mathcal{H} s_\beta \partial_{s_\beta} u^{[\beta]} \partial_{s_\beta} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ a_{2,2}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} p_\beta \mathcal{K} s_\beta^2 \partial_{s_\beta} u^{[\beta]} \partial_{s_\beta} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ a_{0,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} p_\beta \nabla_\Gamma u^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ a_{1,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} 2p_\beta^2 s_\beta (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma u^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ a_{2,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} p_\beta^3 (\mathcal{K}I - 4\mathcal{H}\mathcal{R} + 3\mathcal{R}^2) s_\beta^2 \nabla_\Gamma u^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ a_{n-1,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} p_\beta^n \left[(n-2)\mathcal{K}\mathcal{R}^{n-3} - (n-1)2\mathcal{H}\mathcal{R}^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + n\mathcal{R}^{n-1} \right] (-s_\beta)^{n-1} \nabla_\Gamma u^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \quad n > 3. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire $r_n^{[\beta]}(\delta; \cdot, \cdot)$ est le reste du développement (3.14) et est donnée par

$$r_n^{[\beta]}(\delta; u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^\beta} (B_{n,\delta} + 2\mathcal{H}B_{n-1,\delta} + \mathcal{K}B_{n-2,\delta}) s_\beta^n \nabla_\Gamma u^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta,$$

avec

$$B_{n,\delta} := \begin{cases} (-\mathcal{R})^n (nJ_{\delta,\beta}^{-1} + J_{\delta,\beta}^{-2}) & \text{si } n \geq 0, \\ J_{\delta,\beta}^{-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 8 Dans le cas bidimensionnel, compte tenu de (2.15), la forme bilinéaire $a_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ admet le développement

$$a_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot) = \delta^{-2} a_{0,2}^{[\beta]} + \delta^{-1} a_{1,2}^{[\beta]} + a_{0,1}^{[\beta]} + \delta a_{1,1}^{[\beta]} + \dots + \delta^{n-1} a_{n-1,1}^{[\beta]} + \delta^n r_n^{[\beta]}(\delta; \cdot, \cdot),$$

où

$$\begin{aligned} a_{n,2}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} p_\beta^{n-1} (s_\beta \mathcal{R})^n \partial_{s_\beta} u^{[\beta]} \partial_{s_\beta} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ a_{n,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} p_\beta^{n+1} (-s_\beta \mathcal{R})^n \partial_t u^{[\beta]} \partial_t v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \\ r_n^{[\beta]}(\delta; u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) &:= \int_{\Omega^\beta} J_{\delta,\beta}^{-1} (-s_\beta \mathcal{R})^n \partial_t u^{[\beta]} \partial_t v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta. \end{aligned}$$

Finalement, en reportant (3.14) dans (3.13), nous obtenons, par identification des termes de même puissance en δ , une hiérarchie d'équations variationnelles

$$a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},0}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{0,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},0}^+, v_{\text{int}}^{[2]}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &a_{1,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},0}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},1}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) \\ &+ a_{1,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},0}^+, v_{\text{int}}^{[2]}) + a_{0,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},1}^+, v_{\text{int}}^{[2]}) \\ &= \alpha^+ \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) d\Gamma - \alpha^- \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.16)$$

pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[\beta]}$ dans $H^1(I_\beta; L^2(\Gamma))$ telle que $v_{\text{int}}^{[1]}(\cdot, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(\cdot, 0)$, et

$$\begin{aligned} &a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},2}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},2}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{1,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},1}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) \\ &+ (a_{2,2}^{[1]} + a_{0,1}^{[1]}) (\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},0}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) \\ &+ a_{0,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{\text{int},2}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},2}^+, v_{\text{int}}^{[2]}) + a_{1,2}^{[2]}(\alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},1}^+, v_{\text{int}}^{[2]}) \\ &+ (a_{2,2}^{[2]} + a_{0,1}^{[2]}) (\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},0}^+, v_{\text{int}}^{[2]}) \\ &= \alpha^+ \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) d\Gamma - \alpha^- \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.17)$$

⋮

$$\begin{aligned} &a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},n+1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n+1}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{1,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) \\ &+ a_{2,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n-1}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{0,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n-1}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) \\ &+ a_{1,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},n-2}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n-2}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{2,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},n-3}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n-3}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=4}^n a_{l-1,1}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-l}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n-l}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + a_{0,2}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n+1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n+1}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 & + a_{1,2}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + a_{2,2}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n-1}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 & + a_{0,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n-1}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + a_{1,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-2}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n-2}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 & + a_{2,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-3}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n-3}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + \sum_{l=4}^n a_{l-1,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-l}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n-l}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 & = \alpha^+ \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u_{\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) d\Gamma - \alpha^- \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u_{\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma, \quad n \geq 4, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[\beta]}$ dans $H^1(\Gamma \times I_\beta)$ telle que $v_{\text{int}}^{[1]}(\cdot, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(\cdot, 0)$.

3.2 Calcul des premiers termes

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer explicitement les deux premiers termes des développements asymptotiques (3.3) et (3.5). Mais avant, démontrons quelques résultats permettant de prouver l'existence, l'unicité et la régularité des suites (u_j^-) , $(u_{\text{int},j}^{[\beta]})$ et (u_j^+) .

Théorème 9 *Si $F^- \in L^2(\Omega^-)$, $F^+ \in L^2(\Omega^+)$, $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $\zeta \in H^{-1/2}(\Gamma)$, alors le problème*

$$\begin{cases} -\text{div}(\alpha^- \nabla U^-) = F^- & \text{dans } \Omega^-, \\ -\text{div}(\alpha^+ \nabla U^+) = F^+ & \text{dans } \Omega^+, \\ U_{|\Gamma}^- - U_{|\Gamma}^+ = h & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} U_{|\Gamma}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} U_{|\Gamma}^+ = \zeta & \text{sur } \Gamma, \\ U_{|\partial\Omega}^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

admet une solution unique (U^-, U^+) dans $H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$. De plus, pour tout entier $k \geq 1$, si $F^- \in H^{k-2}(\Omega^-)$, $F^+ \in H^{k-2}(\Omega^+)$, $h \in H^{k-1/2}(\Gamma)$, $\zeta \in H^{k-3/2}(\Gamma)$ et $\Gamma \cup \partial\Omega$ est \mathcal{C}^k -continue, alors il existe une constante c_k telle que

$$\begin{aligned}
 \|U^-\|_{H^k(\Omega^-)} + \|U^+\|_{H^k(\Omega^+)} & \leq c_k \left(\|F^-\|_{H^{k-2}(\Omega^-)} + \|F^+\|_{H^{k-2}(\Omega^+)} \right. \\
 & \left. + \|h\|_{H^{k-1/2}(\Gamma)} + \|\zeta\|_{H^{k-3/2}(\Gamma)} \right). \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Preuve. Montrons d'abord l'existence et l'unicité de (U^-, U^+) . Soit V^- une fonction définie sur Ω^- telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha^- \nabla V^-) = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ V^- = h & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.21)$$

Il est aisé de vérifier, en utilisant un relèvement de h dans $H^1(\Omega^-)$ (cf. [38]) et le lemme de Lax-Milgram, que si $h \in H^{1/2}(\Gamma)$, alors le problème de Dirichlet non-homogène (3.21) admet une solution unique V^- dans $H^1(\Omega^-)$ de plus nous avons l'estimation

$$\|V^-\|_{H^1(\Omega^-)} \leq c \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (3.22)$$

Posons

$$\tilde{U}^- = U^- - V^-. \quad (3.23)$$

Alors (3.19) est équivalent au problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha^- \nabla \tilde{U}^-) = F^- & \text{dans } \Omega^-, \\ -\operatorname{div}(\alpha^+ \nabla U^+) = F^+ & \text{dans } \Omega^+, \\ \tilde{U}^- - U^+ = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} \tilde{U}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} U^+ = \zeta - \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} V^- & \text{sur } \Gamma, \\ U^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui s'écrit alors sous forme variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(U, v) = l(v), \end{cases} \quad (3.24)$$

où U est une fonction définie sur Ω par $U|_{\Omega_{\text{ext}}^-} := \tilde{U}^-$ et $U|_{\Omega^+} := U^+$,

$$a(u, v) := \alpha^- \int_{\Omega^-} \nabla u|_{\Omega^-} \cdot \nabla v|_{\Omega^-} \, d\Omega^- + \alpha^+ \int_{\Omega^+} \nabla u|_{\Omega^+} \cdot \nabla v|_{\Omega^+} \, d\Omega^+,$$

et

$$l(v) := \int_{\Omega^-} F^- v|_{\Omega^-} \, d\Omega^- + \int_{\Omega^+} F^+ v|_{\Omega^+} \, d\Omega^+ + \left\langle \zeta - \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} V^-|_{\Gamma}, v|_{\Gamma} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Ici encore, nous pouvons facilement montrer que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que $l(.)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent, l'existence et l'unicité de U s'obtiennent à l'aide du lemme de Lax-Milgram. D'où, (3.23) assure l'existence et l'unicité de (U^-, U^+) . L'estimation a priori (3.20), pour $k = 1$, découle immédiatement de la formulation variationnelle (3.24), de l'inégalité (3.22) et de (3.23). Pour démontrer la régularité de la solution, il suffit d'utiliser une partition de l'unité du domaine Ω et de combiner les deux théorèmes (52) et (53) (voir Annexe A) tout en remarquant que puisque la frontière $\Gamma \cup \partial\Omega$ est \mathcal{C}^k -continue alors elle est $\mathcal{C}^{k-1,1}$ -continue.

■

Nous aurons besoin aussi du lemme technique suivant, nous établirons un résultat général qui sera utile non seulement dans le prochain paragraphe mais aussi dans les parties 2 et 3. La formulation de ce lemme a été inspirée par [7] et la preuve est une simple vérification.

Lemme 10 *Pour $\beta = 1, 2$, soient $q^{[\beta]}$ dans $L^2(\Gamma)$, $\theta^{[\beta]}$ dans $L^2(\Omega^\beta)$ et $k^{[\beta]}$ dans $L^2(\Omega^\beta, \mathbb{C}^3)$ telle que l'application $s_\beta \rightarrow k^{[\beta]}(., s_\beta)$ définie presque partout dans $(0, 1)$ est à valeurs dans l'espace des champs de vecteurs tangents à Γ et $\text{div}_\Gamma k^{[\beta]} \in L^2(\Omega^\beta)$. Alors la solution $h^{[\beta]}$ de l'équation variationnelle*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[\beta]} v^{[\beta]} &:= \int_{\Omega^\beta} h^{[\beta]} \partial_{s_\beta} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta + \int_{\Omega^\beta} \left(k^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma v^{[\beta]} + \theta^{[\beta]} v^{[\beta]} \right) d\Gamma ds_\beta \\ &+ \int_\Gamma q^{[\beta]}(m) v^{[\beta]}(m, (-1)^\beta) d\Gamma = 0; \quad \forall v^{[\beta]} \in H^1(\Omega^\beta), \quad v^{[\beta]}(., 0) = 0, \end{aligned}$$

est explicitement donnée par

$$h^{[\beta]}(m, s_\beta) = (-1)^{\beta+1} q^{[\beta]}(m) + \int_{s_\beta}^{(-1)^\beta} \left(\text{div}_\Gamma k^{[\beta]} - \theta^{[\beta]} \right) (m, \lambda) d\lambda.$$

De plus, si $v^{[\beta]}(., 0) \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[\beta]} v^{[\beta]} &= (-1)^{\beta+1} \int_\Gamma h^{[\beta]}(m, 0) v^{[\beta]}(m, 0) d\Gamma \\ &= \int_\Gamma \left[q^{[\beta]}(m) - (-1)^\beta \int_0^{(-1)^\beta} \left(\text{div}_\Gamma k^{[\beta]} - \theta^{[\beta]} \right) (m, s_\beta) ds_\beta \right] v^{[\beta]}(m, 0) d\Gamma. \end{aligned}$$

3.2.1 Termes d'ordre 0

Le choix de $v_{\text{int}}^{[2]} = 0$ dans (3.15) donne

$$a_{0,2}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},0}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) = 0.$$

D'où, en appliquant le Lemme 10 avec

$$\begin{aligned} h^{[1]} &= p_1^{-1} \alpha_\delta \partial_{s_1} u_{\text{int},0}^{[1]} - p_1^{-1} \alpha^- \partial_{s_1} U_{\text{int},0}^- = p_1^{-1} \alpha_\delta \partial_{s_1} u_{\text{int},0}^{[1]}, \\ k^{[1]} &= 0, \quad \theta^{[1]} = 0, \quad q^{[1]} = 0, \end{aligned}$$

nous obtenons $\partial_{s_1} u_{\text{int},0}^{[1]} = 0$. De la même manière, nous montrons que $\partial_{s_2} u_{\text{int},0}^{[2]} = 0$, ainsi, en utilisant (3.8)-(3.10), il découle la première condition de transmission

$$u_{0|\Gamma}^- = u_{\text{int},0}^{[1]}(m, s_1) = u_{\text{int},0}^{[2]}(m, s_2) = u_{0|\Gamma}^+, \quad \forall (m, s_\beta) \in \Omega^\beta. \quad (3.25)$$

De manière analogue, nous obtenons la deuxième condition de transmission. En effet, le Lemme 10 et (3.16) conduisent à

$$p_1^{-1} \alpha_\delta \partial_{s_1} u_{\text{int},1}^{[1]} - \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- = 0, \quad (3.26)$$

$$p_2^{-1} \alpha_\delta \partial_{s_2} u_{\text{int},1}^{[2]} - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ = 0. \quad (3.27)$$

D'autre part, pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[\beta]}$ dans $H^1(\Omega^\beta)$, nous avons

$$\alpha^- \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) \, d\Gamma = \alpha^+ \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) \, d\Gamma.$$

Or $v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0)$, par conséquent

$$\alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- = \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+. \quad (3.28)$$

En posant

$$\alpha_0(x) := \begin{cases} \alpha^+ & \text{si } x \in \Omega^+, \\ \alpha^- & \text{si } x \in \Omega^-, \end{cases} \quad \text{et } u_n := \begin{cases} u_n^+ & \text{dans } \Omega^+, \\ u_n^- & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

et compte tenu de (3.4), (3.25), (3.28) et du Théorème 9, nous déduisons que u_0 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_0 \nabla u_0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_0|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notons que u_0 n'est rien d'autre que la solution du problème initial sans la couche mince.

3.2.2 Termes d'ordre 1

Intégrant les relations (3.26) et (3.27) par rapport à s_β et identifiant les termes d'ordre 1 dans (3.8) et (3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_{\text{int},1}^{[1]}(m, s_1) &= u_{\text{int},1}^{[1]}(m, -1) + (s_1 + 1)p_1\alpha^-\alpha_\delta^{-1}\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^- \\ &= u_{1|\Gamma}^- + p_1[(s_1 + 1)\alpha^-\alpha_\delta^{-1} - 1]\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^-, \quad \forall(m, s_1) \in \Omega^1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_{\text{int},1}^{[2]}(m, s_2) &= u_{\text{int},1}^{[2]}(m, 1) + (s_2 - 1)p_2\alpha^+\alpha_\delta^{-1}\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^+ \\ &= u_{1|\Gamma}^+ + p_2[(s_2 - 1)\alpha^+\alpha_\delta^{-1} + 1]\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^+, \quad \forall(m, s_2) \in \Omega^2, \end{aligned}$$

et par identification des termes d'ordre 1 dans (3.10), nous déduisons la première condition de transmission sur Γ

$$u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ = p_1(1 - \alpha^-\alpha_\delta^{-1})\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^- + p_2(1 - \alpha^+\alpha_\delta^{-1})\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^+. \quad (3.29)$$

D'autre part, en choisissant $v_{\text{int}}^{[2]} = 0$ dans (3.17) et en utilisant (3.26), nous obtenons

$$a_{0,2}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},2}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},2}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{0,1}^{[1]}(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},0}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) = 0.$$

D'où, en appliquant le Lemme 10 avec

$$\begin{aligned} h^{[1]} &= \frac{\alpha_\delta}{p_1}\partial_{s_1}u_{\text{int},2}^{[1]} - \frac{\alpha^-}{p_1}\partial_{s_1}U_{\text{int},2}^- = \frac{\alpha_\delta}{p_1}\partial_{s_1}u_{\text{int},2}^{[1]} - \alpha^-\partial_{\mathbf{n}}u_{1|\Gamma}^- - s_1p_1\alpha^-\partial_{\mathbf{n}}^2u_{0|\Gamma}^-, \\ k^{[1]} &= p_1\nabla_\Gamma(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},0}^-) = p_1(\alpha_\delta - \alpha^-)\nabla_\Gamma u_{0|\Gamma}^-, \quad \theta^{[1]} = 0, \quad q^{[1]} = 0, \end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_\delta}{p_1} \partial_{s_1} u_{\text{int},2}^{[1]}(m, s_1) - \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - s_1 p_1 \alpha^- \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \\ & = -(s_1 + 1) p_1 (\alpha_\delta - \alpha^-) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^-. \end{aligned}$$

En outre, pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[1]}$ dans $H^1(\Omega^1)$, nous avons

$$\begin{aligned} & a_{0,2}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},2}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},2}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + a_{0,1}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},0}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\ & = - \int_\Gamma p_1 (\alpha_\delta - \alpha_1) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma. \end{aligned}$$

Nous montrons, de manière analogue, que pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[2]}$ dans $H^1(\Omega^1)$, nous avons

$$\begin{aligned} & a_{0,2}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},2}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},2}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + a_{0,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},0}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},0}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\ & = - \int_\Gamma p_2 (\alpha_\delta - \alpha^+) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) d\Gamma. \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ = p_1 (\alpha_\delta - \alpha^-) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- + p_2 (\alpha_\delta - \alpha^+) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+. \quad (3.30)$$

En vertu de (3.4), (3.29), (3.30) et du Théorème 9, nous déduisons que u_1 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}(\alpha^- \nabla u_1^-) = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ -\text{div}(\alpha^+ \nabla u_1^+) = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u_{1|\partial\Omega}^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur Γ

$$\begin{aligned} u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ & = p_1 \left(1 - \frac{\alpha^-}{\alpha_\delta}\right) \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_2 \left(1 - \frac{\alpha^+}{\alpha_\delta}\right) \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ & = p_1 (\alpha_\delta - \alpha^-) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- + p_2 (\alpha_\delta - \alpha^+) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+. \end{aligned}$$

Remarque 11 *Il résulte de (3.25) et (3.28) que :*

$$\begin{aligned} u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ &= \left[p_1 \left(1 - \frac{\alpha^-}{\alpha_\delta} \right) + p_2 \left(\frac{\alpha^-}{\alpha^+} - \frac{\alpha^-}{\alpha_\delta} \right) \right] \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ &= \left[p_1 (\alpha_\delta - \alpha^-) + p_2 (\alpha_\delta - \alpha^+) \right] \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^-. \end{aligned}$$

Bien que ces conditions de transmission conduisent à un même problème, elles seront mieux adaptées, dans le Chapitre 5, pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème approché.

Remarque 12 *Dans le cas bidimensionnel, la détermination des deux premiers termes du développement asymptotique ne diffère guère du cas $P = 3$.*

3.3 Existence et unicité des suites (u_j^\pm) et $(u_{\text{int},j}^{[\beta]})$

Nous avons déterminé dans les paragraphes précédents les deux premiers termes des développements asymptotiques (3.3) et (3.5). Nous montrons dans ce qui suit un résultat garantissant l'existence, l'unicité et la régularité de tous les termes de ces développements, qui s'énonce comme suit :

Théorème 13 *Les suites (u_j^\pm) et $(u_{\text{int},j}^{[\beta]})$ sont déterminées de manière unique. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, il existe une constante c indépendante de δ telle que*

$$\|u_j^-\|_{H^k(\Omega^-)} + \|u_{\text{int},j}^{[\beta]}\|_{H^k(\Omega^\beta)} + \|u_j^+\|_{H^k(\Omega^+)} \leq c.$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur j . Dans les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2, nous avons établi, pourvu que f soit de classe \mathcal{C}^∞ , que pour $j = 0, 1$ et pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$\|u_j^-\|_{H^k(\Omega^-)} + \|u_j^+\|_{H^k(\Omega^+)} \leq c.$$

Par ailleurs, nous avons montré que $u_{\text{int},j}^{[\beta]}$ est un polynôme de degré j en s_β et en utilisant la régularité de $(u_j^\pm)_{0 \leq j \leq 1}$, nous en déduisons que

$$\|u_{\text{int},j}^{[\beta]}\|_{H^k(\Omega^\beta)} \leq c.$$

Supposons maintenant que les termes u_i^\pm et $u_{\text{int},i}^{[\beta]}$ sont déterminés pour $i < j$. La construction de u_j^\pm et $u_{\text{int},j}^{[\beta]}$ se fait en 4 étapes.

Étape 1. A partir du Lemme 10 et du problème (3.18) au rang $(j-1)$, nous déduisons que $\partial_{s_\beta} u_{\text{int},j}^{[\beta]}$ est un polynôme de degré i en s_β dont les coefficients sont des fonctions définies sur Γ faisant intervenir les opérateurs $\mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{K}$ et des dérivées normales et tangentiellles de u_i^\pm sur Γ . D'où, en utilisant (3.8)-(3.10), nous obtenons la condition de transmission $u_{j|\Gamma}^- - u_{j|\Gamma}^+$ définie par la relation

$$\begin{aligned} u_{j|\Gamma}^- - u_{j|\Gamma}^+ &:= \sum_{h=1}^j \frac{1}{h!} p_2^h \partial_{\mathbf{n}}^h u_{j-h|\Gamma}^+ - \sum_{h=1}^j \frac{(-1)^h}{h!} p_1^h \partial_{\mathbf{n}}^h u_{j-h|\Gamma}^- \\ &\quad - \int_{-1}^0 \partial_{s_1} u_{\text{int},j}^{[1]}(m, s_1) ds_1 - \int_0^1 \partial_{s_2} u_{\text{int},j}^{[2]}(m, s_2) ds_2. \end{aligned}$$

Étape 2. Le Lemme 10 et le problème (3.18) au rang i déterminent la condition $\alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{j|\Gamma}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{j|\Gamma}^+$ en fonction de dérivées normales et tangentiellles de u_i^\pm sur Γ ($i < j$).

Étape 3. Compte tenu des étapes 1 et 2, du problème (3.4) et du Théorème 9, nous déduisons l'existence, l'unicité et la régularité de u_j^\pm .

Étape 4. Finalement, à l'aide de (3.8) et (3.9) et en intégrant $\partial_{s_\beta} u_{\text{int},j}^{[\beta]}$, calculée à l'étape 1, par rapport à s_β , nous obtenons le terme $u_{\text{int},j}^{[\beta]}$. La régularité de ce dernier découle de celle de $(u_i^\pm)_{i \leq j}$. ■

Chapitre 4

Justification du développement asymptotique

Dans les paragraphes précédents, nous avons décrit un procédé de calcul des termes des développements asymptotiques (3.3) et (3.5), nous avons aussi montré que ces termes existent à tout ordre pourvu que la donnée f soit suffisamment régulière. Nous nous proposons dans ce chapitre de donner une justification rigoureuse des expressions (3.3) et (3.5) en estimant l'erreur commise en tronquant les séries à un nombre fini de termes.

Dans un souci de simplification, nous ferons l'hypothèse que f est de classe \mathcal{C}^∞ . Nous laissons au lecteur, en utilisant le Théorème 9 et le Lemme 14 qui va suivre, le soin de supposer moins de régularité sur la fonction f .

Soit n dans \mathbb{N} . Puisque f est de classe \mathcal{C}^∞ , tous les termes des développements (3.3) et (3.5) peuvent être déterminés jusqu'à l'ordre n . Posons

$$u_\delta^{-,(n)} := \sum_{j=0}^n \delta^j u_j^-, \quad u_\delta^{+,(n)} := \sum_{j=0}^n \delta^j u_j^+ \quad \text{et} \quad u_{\text{int},\delta}^{(n)} := \sum_{j=0}^n \delta^j u_{\text{int},j}, \quad (4.1)$$

où $u_{\text{int},j|\Omega_{\delta,\beta}}(x) := u_{\text{int},j}^\beta(x) := u_{\text{int},j}^\beta(m, \delta s_\beta) := u_{\text{int},j}^{[\beta]}(m, s_\beta)$, $\forall x = \Phi_\beta(m, s_\beta) \in \Omega_{\delta,\beta}$.

Nous définissons le reste $R_{\delta,\beta}^n$ du développement de Taylor de $u_\delta^{\pm,(n)}$ à l'ordre n au voisinage de $\eta_\beta = 0$ par

$$R_{\delta,\beta}^n(x) = R_{\delta,\beta}^n(m, \eta_\beta) := u_\delta^{\pm,(n)} - \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{n-j} \delta^j \frac{\eta_\beta^l}{l!} \partial_{\mathbf{n}}^l u_{j|\Gamma}^\pm \quad (4.2)$$

$$:= \left(u_{\delta}^{\pm, (n)} \right)^{[\beta]} - \sum_{j=0}^n \delta^j U_{\text{int}, j}^{\pm}, \quad \forall x = \Phi_{\beta}(m, s_{\beta}) \in \Omega_{\delta, \beta}, \quad (4.3)$$

avec la convention : $\beta = 1$ correspond au signe " - " et $\beta = 2$ correspond au signe " + ". Nous mimerons les étapes de la démonstration du Théorème 5.1 dans [44], nous décomposerons ainsi la démonstration en plusieurs étapes. Nous commencerons par redémontrer un résultat technique déterminant une borne du reste du développement de Taylor en fonction de δ .

Lemme 14 Soient $L \in \mathbb{N}$, $u \in H^{L+1}([-p_1\delta, p_2\delta] \setminus \{0\})$ et $r_{\delta, \beta}^L(u)$ le reste du développement de Taylor à l'ordre L de la fonction u au voisinage de 0 défini par

$$r_{\delta, \beta}^L(u) := u(\eta_{\beta}) - \sum_{l=0}^L (\eta_{\beta})^l u^{(l)}(\pm 0) ; \quad \forall \eta_{\beta} \in]0, (-1)^{\beta} p_{\beta} \delta].$$

Alors il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$|r_{\delta, \beta}^L(u)| \leq c \delta^{L+1/2} |u|_{H^{L+1}(I_{\delta, \beta})}. \quad (4.4)$$

Si plus, $u \in H^{L+2}([-p_1\delta, p_2\delta] \setminus \{0\})$, alors

$$|r_{\delta, \beta}^L(u)| \leq c \delta^{L+1} \left[|u|_{H^{L+2}(I_{\delta, \beta})} + u^{(L+1)}(\pm 0) \right]. \quad (4.5)$$

Preuve. Nous utilisons la formule de Taylor avec reste intégral

$$|r_{\delta, \beta}^L(u)| = \frac{1}{(L)!} \left| \int_0^{\eta_{\beta}} (\eta_{\beta} - r)^L \partial_r^{L+1} u(r) dr \right|.$$

Nous avons

$$|r_{\delta, \beta}^L(u)| \leq \frac{1}{(L)!} \left| \int_0^{(-1)^{\beta} p_{\beta} \delta} (\eta_{\beta} - r)^L \partial_r^{L+1} u(r) dr \right|.$$

D'autre part, en majorant le terme $|\eta_{\beta} - r|^L$ par sa valeur maximale $(p_{\beta} \delta)^L$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$|r_{\delta, \beta}^L(u)| \leq c \delta^{L+1/2} \left\| \partial_r^{L+1} u \right\|_{L^2(I_{\delta, \beta})} = c \delta^{L+1/2} |u|_{H^{L+1}(I_{\delta, \beta})}.$$

La deuxième inégalité découle de (4.4) et de la relation

$$r_{\delta, \beta}^L(u) = r_{\delta, \beta}^{L+1}(u) + (\eta_{\beta})^{L+1} u^{(L+1)}(\pm 0).$$

■

La trace du reste $R_{\delta,\beta}^n$ sur $\Gamma_{\delta,\beta}$ peut être considérée, via le difféomorphisme ψ_β , comme une fonction définie sur Γ . De ce fait, nous estimerons, dans la proposition suivante, $R_{\delta,\beta|_{\Gamma_{\delta,\beta}}}^n$ en norme $L^2(\Gamma)$. Nous donnerons ensuite une estimation de $\nabla R_{\delta,\beta}^n$ en norme $\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta,\beta})$ et nous construirons et estimerons un relèvement $\mathcal{P}R_\delta^n$ de $R_{\delta,\beta|_{\Gamma_{\delta,\beta}}}^n$ sur la couche mince Ω_δ .

Proposition 15 *Il existe une constante $c > 0$, indépendante de δ , telle que*

$$\left\| \nabla_\Gamma^{(j)} R_{\delta,\beta|_{\Gamma_{\delta,\beta}}}^n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \leq c\delta^{n+1}, \quad \text{pour } j = 0, 1, \quad (4.6)$$

$$\left\| \nabla R_{\delta,\beta}^n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta,\beta})} \leq c\delta^{n+1/2}. \quad (4.7)$$

De plus, il existe un relèvement $\mathcal{P}R_\delta^n$ de $R_{\delta,\beta|_{\Gamma_{\delta,\beta}}}^n$ sur Ω_δ vérifiant

$$\left\| \mathcal{P}R_\delta^n \right\|_{H^1(\Omega_\delta)} \leq c\delta^{n+1/2}. \quad (4.8)$$

Preuve.

1. Le développement de Taylor de $u_{\text{ext},j}^\pm$ à l'ordre $n - j$ ($0 \leq j \leq n$) permet de déduire

$$\begin{aligned} R_{\delta,\beta}^n(x) &= R_{\delta,\beta}^n(m, \eta_\beta) := u_\delta^{\pm,(n)} - \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{n-j} \delta^j \frac{\eta_\beta^l}{l!} \partial_{\mathbf{n}}^l u_{j|\Gamma}^\pm \\ &= \sum_{j=0}^n \delta^j r_{\delta,\beta}^{n-j}(u_j^\pm), \quad \forall \eta_\beta \in]0, (-1)^\beta p_\beta \delta]. \end{aligned}$$

Appliquant le Lemme 14, nous déduisons qu'il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$\left| R_{\delta,\beta}^n(m, \eta_\beta) \right| \leq c\delta^{n+1} \sum_{j=0}^n \left\| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+1} u_j^\pm \right\|_{L^2(I_{\delta,\beta})}, \quad \forall \eta_\beta \in]0, (-1)^\beta p_\beta \delta],$$

pour tout η_β dans $]0, (-1)^\beta p_\beta \delta]$ et en particulier pour $\eta_\beta = (-1)^\beta p_\beta \delta$. En utilisant l'inégalité triangulaire, $R_{\delta,\beta|_{\Gamma_{\delta,\beta}}}^n$ peut être borné en norme $L^2(\Gamma)$ par

$$\left\| R_{\delta,\beta|_{\Gamma_{\delta,\beta}}}^n \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\delta^{n+1} \sum_{j=0}^n \left\| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+1} u_j^\pm \right\|_{L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})}.$$

Compte tenu de (2.12) et (2.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+1} u_j^\pm \right\|_{L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})}^2 &\leq c \int_{\Gamma} \int_{I_{\delta,\beta}} \left| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+1} u_j^\pm(m, \eta_\beta) \right|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) \, d\Gamma d\eta_\beta \\ &\leq c \left| u_j^\pm \right|_{H^{n-j+1}(\Omega_{\delta,\beta})}^2 \leq c \left| u_j^\pm \right|_{H^{n-j+1}(\Omega_\pm)}^2. \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\left\| R_{\delta,\beta|\Gamma_{\delta,\beta}}^n \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\delta^{n+1} \sum_{j=0}^n \left| u_j^\pm \right|_{H^{n-j+1}(\Omega_\pm)} \leq c\delta^{n+1} \sum_{j=0}^n \left\| u_j^\pm \right\|_{H^{n+1}(\Omega_\pm)}.$$

D'où, en utilisant le fait que chaque terme u_j^\pm est borné en $H^{n+1}(\Omega_\pm)$ indépendamment de δ , nous obtenons

$$\left\| R_{\delta,\beta|\Gamma_{\delta,\beta}}^n \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\delta^{n+1}.$$

Nous montrons de manière analogue que

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_{\Gamma} R_{\delta,\beta|\Gamma_{\delta,\beta}}^n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} &\leq c\delta^{n+1} \sum_{j=0}^n \left\| \nabla_{\Gamma} u_j^\pm \right\|_{\mathbb{H}^{n+1}(\Omega_{\delta,1})} \leq c\delta^{n+1} \sum_{j=0}^n \left\| u_j^\pm \right\|_{H^{n+2}(\Omega_{\delta,\beta})} \\ &\leq c\delta^{n+1} \sum_{j=0}^n \left\| u_j^\pm \right\|_{H^{n+2}(\Omega_\pm)} \leq c\delta^{n+1}. \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \nabla R_{\delta,\beta}^n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta,\beta})}^2 &= \int_{\Omega_{\delta,\beta}} \left| \nabla R_{\delta,\beta}^n \right|^2 \, d\Omega_{\delta,\beta} \\ &= \int_{\Gamma} \int_{I_{\delta,\beta}} (I + \eta_\beta \mathcal{R})^{-2} \left| \nabla_{\Gamma} R_{\delta,\beta}^n \right|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) \, d\Gamma d\eta_\beta \\ &\quad + \int_{\Gamma} \int_{I_{\delta,\beta}} \left| \partial_{\eta_\beta} R_{\delta,\beta}^n \right|^2 \det(I + \eta_\beta \mathcal{R}) \, d\Gamma d\eta_\beta. \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.12) et (2.13), nous obtenons

$$\left\| \nabla R_{\delta,\beta}^n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta,\beta})}^2 \leq c \left(\left\| \nabla_{\Gamma} R_{\delta,\beta}^n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})}^2 + \left\| \partial_{\eta_\beta} R_{\delta,\beta}^n \right\|_{L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})}^2 \right).$$

Or, d'après (4.6), il existe une constante c indépendante de δ et de η_β , telle que

$$\|\nabla_\Gamma R_{\delta,\beta}^n(\eta_\beta)\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \leq c\delta^{n+1}; \quad \forall \eta_\beta \in]0, (-1)^\beta p_\beta \delta],$$

d'où

$$\|\nabla_\Gamma R_{\delta,\beta}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})} \leq c\delta^{n+3/2}.$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 14, nous avons

$$\partial_{\eta_\beta} R_{\delta,\beta}^n(m, \eta_\beta) = \sum_{j=0}^n \delta^j r_{\delta,\beta}^{n-j-1} \left(\partial_{\eta_\beta} u_j^\pm \right), \quad \forall \eta_\beta \in]0, (-1)^\beta p_\beta \delta].$$

Par conséquent

$$\left| \partial_{\eta_\beta} R_{\delta,\beta}^n(m, \eta_\beta) \right| \leq \left| \sum_{j=0}^n \delta^j r_{\delta,\beta}^{n-j-1} \left(\partial_{\eta_\beta} u_j^\pm \right) \right| \leq c\delta^n \sum_{j=0}^n \left\| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+2} u_j^\pm \right\|_{L^2(I_{\delta,\beta})},$$

d'où

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{\eta_\beta} R_{\delta,\beta}^n \right\|_{L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})} &\leq c\delta^n \sum_{j=0}^n \left\| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+2} u_j^\pm \right\|_{L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})} \\ &\leq c\delta^n \sum_{j=0}^n \left\| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+2} u_j^\pm \right\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})}. \end{aligned}$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^∞ , nous obtenons, en vertu du Théorème 9,

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{\eta_\beta}^{n-j+2} u_j^\pm \right\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})} &\leq c \|u_j^\pm\|_{H^{n-j+2}(\Omega_{\delta,\beta})} \leq c \|u_j^\pm\|_{H^{n-j+2}(\Omega_{\delta,\beta})} \\ &\leq c \|u_j^\pm\|_{W^{n-j+2,\infty}(\Omega_{\delta,\beta})} \sqrt{|\Omega_{\delta,\beta}|} \\ &\leq c \|u_j^\pm\|_{W^{n-j+2,\infty}(\Omega^\pm)} \delta^{1/2} \leq c\delta^{1/2}, \quad \forall j, \quad 0 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

où $|\Omega_{\delta,\beta}|$ désigne la mesure de $\Omega_{\delta,\beta}$. Ce qui conduit à

$$\left\| \partial_{\eta_\beta} R_{\delta,\beta}^n \right\|_{L^2(\Gamma \times I_{\delta,\beta})} \leq c\delta^{n+1/2}.$$

Ainsi

$$\left\| \nabla R_{\delta,\beta}^n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta,\beta})} \leq c\delta^{n+1/2}.$$

3. Soit χ_δ une fonction régulière par morceaux, définie sur $] -p_1\delta, p_2\delta[$, par

$$\chi_\delta(\eta) := \begin{cases} 0 & \text{si } -p_1\delta < \eta < -\frac{p_1\delta}{2}, \\ 2\frac{\eta}{\delta} + p_1 & \text{si } -\frac{p_1\delta}{2} \leq \eta \leq \frac{p_2\delta}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{p_2\delta}{2} < \eta < p_2\delta. \end{cases}$$

Un calcul classique conduit aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-p_1\delta}^{p_2\delta} \chi_\delta^2(\eta) \, d\eta &= \frac{\delta}{2}p_2 + \frac{\delta}{6} ; & \int_{-p_1\delta}^{p_2\delta} (1 - \chi_\delta(\eta))^2 \, d\eta &= \frac{\delta}{2}p_1 + \frac{\delta}{6} ; \\ \int_{-p_1\delta}^{p_2\delta} (\chi'_\delta(\eta))^2 \, d\eta &= \frac{2}{\delta}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Utilisant la fonction χ_δ , nous définissons le relèvement $\mathcal{P}R_\delta^n$ par :

$$\mathcal{P}R_\delta^n := \chi_\delta(\eta) R_{\delta,2|\Gamma_{\delta,2}}^n + (1 - \chi_\delta(\eta)) R_{\delta,1|\Gamma_{\delta,1}}^n.$$

Appliquant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|\mathcal{P}R_\delta^n\|_{H^1(\Omega_\delta)} \leq \left\| \chi_\delta(\eta) R_{\delta,2|\Gamma_{\delta,2}}^n \right\|_{H^1(\Omega_\delta)} + \left\| (1 - \chi_\delta(\eta)) R_{\delta,1|\Gamma_{\delta,1}}^n \right\|_{H^1(\Omega_\delta)}.$$

En vertu de (2.13), nous trouvons

$$\|\mathcal{P}R_\delta^n\|_{H^1(\Omega_\delta)} \leq c \left(\left\| \chi_\delta(\eta) R_{\delta,2|\Gamma_{\delta,2}}^n \right\|_{H^1(\Gamma \times] -p_1\delta, p_2\delta[)} + \left\| (1 - \chi_\delta(\eta)) R_{\delta,1|\Gamma_{\delta,1}}^n \right\|_{H^1(\Gamma \times] -p_1\delta, p_2\delta[)} \right).$$

En raison de la nature tensorielle des deux termes de droite, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}R_\delta^n\|_{H^1(\Omega_\delta)} &\leq c \left(\|\chi_\delta(\eta)\|_{H^1(]-p_1\delta, p_2\delta[)} \left\| R_{\delta,2|\Gamma_{\delta,2}}^n \right\|_{H^1(\Gamma)} \right. \\ &\quad \left. + \|1 - \chi_\delta(\eta)\|_{H^1(]-p_1\delta, p_2\delta[)} \left\| R_{\delta,1|\Gamma_{\delta,1}}^n \right\|_{H^1(\Gamma)} \right). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les relations (4.6) et (4.9), nous déduisons

$$\|\mathcal{P}R_\delta^n\|_{H^1(\Omega_\delta)} \leq c\delta^{n+1/2}.$$

■

Remarque 16 Nous aurions pu utiliser les estimations dans $W^{m,\infty}$ pour gagner un demi-

degré dans (4.6). Mais ceci ne nous aurait pas été utile puisque dans la démonstration du théorème qui va suivre nous allons additionner les estimations (4.6)-(4.8).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 17 (de convergence) *Pour tout entier positif n , il existe une constante c indépendante de δ , telle que*

$$\left\| u_{\delta}^{-} - u_{\delta}^{-,(n)} \right\|_{H^1(\Omega_{\delta}^{-})} + \delta^{1/2} \left\| u_{\text{int},\delta} - u_{\text{int},\delta}^{(n)} \right\|_{H^1(\Omega_{\delta})} + \left\| u_{\delta}^{+} - u_{\delta}^{+,(n)} \right\|_{H^1(\Omega_{\delta}^{+})} \leq c\delta^{n+1}.$$

Preuve. Soient $r_{\delta}^{-,n}$, $r_{\delta}^{+,n}$ et $r_{\text{int},\delta}^n$ les restes d'ordre n définis comme la différence entre les solutions exactes u_{δ}^{-} , u_{δ}^{+} , $u_{\text{int},\delta}$ et les séries tronquées (4.1)

$$r_{\delta}^{-,n} := u_{\delta}^{-} - u_{\delta}^{-,(n)}, \quad r_{\delta}^{+,n} := u_{\delta}^{+} - u_{\delta}^{+,(n)}, \quad r_{\text{int},\delta}^n := u_{\text{int},\delta} - u_{\text{int},\delta}^{(n)},$$

et \mathcal{L}_{δ} la forme linéaire définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\delta} v &:= \alpha^{-} \int_{\Omega_{\delta}^{-}} \nabla r_{\delta}^{-,n} \cdot \nabla v_{\delta}^{-} \, d\Omega_{\delta}^{-} + \alpha_{\delta} \int_{\Omega_{\delta}} \nabla (r_{\text{int},\delta}^n - \mathcal{P}R_{\delta}^n) \cdot \nabla v_{\text{int},\delta} \, d\Omega_{\delta} \\ &+ \alpha^{+} \int_{\Omega_{\delta}^{+}} \nabla r_{\delta}^{+,n} \cdot \nabla v_{\delta}^{+} \, d\Omega_{\delta}^{+}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $\mathcal{P}R_{\delta}^n$ est le relèvement des fonctions $R_{\delta,\beta|\Gamma_{\delta,\beta}}^n$ sur Ω_{δ} , v_{δ}^{\pm} et v_{int} sont les restrictions de v sur les domaines Ω_{δ}^{\pm} et Ω_{δ} . Utilisant la formule de Green dans Ω^{\pm} et (1.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\delta} v &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega - \alpha^{-} \int_{\Omega^{-}} \nabla u_{\delta}^{-,(n)} \cdot \nabla v|_{\Omega^{-}} \, d\Omega^{-} + \alpha^{-} \int_{\Omega_{\delta,1}} \nabla u_{\delta}^{-,(n)} \cdot \nabla v_{\text{int}}^1 \, d\Omega_{\delta,1} \\ &- \alpha_{\delta} \int_{\Omega_{\delta}} \nabla u_{\text{int},\delta}^{(n)} \cdot \nabla v_{\text{int}} \, d\Omega_{\delta} - \alpha^{+} \int_{\Omega^{+}} \nabla u_{\delta}^{+,(n)} \cdot \nabla v|_{\Omega^{+}} \, d\Omega^{+} \\ &+ \alpha^{+} \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla u_{\delta}^{+,(n)} \cdot \nabla v_{\text{int}}^2 \, d\Omega_{\delta,2} - \alpha_{\delta} \int_{\Omega_{\delta}} \nabla \mathcal{P}R_{\delta}^n \cdot \nabla v_{\text{int}} \, d\Omega_{\delta} \\ &= -\alpha^{-} \int_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^{-} + \cdots + \delta^n \partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^{-} \right) v_{\text{int}|\Gamma}^1 \, d\Gamma + \alpha^{-} \int_{\Omega_{\delta,1}} \nabla u_{\delta}^{-,(n)} \cdot \nabla v_{\text{int}}^1 \, d\Omega_{\delta,1} \\ &- \alpha_{\delta} \int_{\Omega_{\delta}} \nabla u_{\text{int},\delta}^{(n)} \cdot \nabla v_{\text{int}} \, d\Omega_{\delta} + \alpha^{+} \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla u_{\delta}^{+,(n)} \cdot \nabla v_{\text{int}}^2 \, d\Omega_{\delta,2} \\ &- \alpha_{\delta} \int_{\Omega_{\delta}} \nabla \mathcal{P}R_{\delta}^n \cdot \nabla v_{\text{int}} \, d\Omega_{\delta} + \alpha^{+} \int_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^{+} + \cdots + \delta^n \partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^{+} \right) v_{\text{int}|\Gamma}^2 \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Puis, à partir de (4.3), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\delta v &= -\alpha^- \int_\Gamma \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \cdots + \delta^n \partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^- \right) v_{\text{int}|\Gamma}^1 d\Gamma \\
 &\quad + \alpha^- \delta a_\delta^{[1]} (U_{\text{int},0}^- + \cdots + \delta^n U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]}) + \alpha^- \int_{\Omega_{\delta,1}} \nabla R_{\delta,1}^n \cdot \nabla v_{\text{int}}^1 d\Omega_{\delta,1} \\
 &\quad - \sum_{\beta=1}^2 \alpha_\delta \delta a_\delta^{[\beta]} (u_{\text{int},0}^{[\beta]} + \cdots + \delta^n u_{\text{int},n}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]}) + \alpha^+ \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla R_{\delta,2}^n \cdot \nabla v_{\text{int}}^2 d\Omega_{\delta,2} \\
 &\quad + \alpha^+ \delta a_\delta^{[2]} (U_{\text{int},0}^+ + \cdots + \delta^n U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]}) - \alpha_\delta \int_{\Omega_\delta} \nabla \mathcal{P} R_\delta^n \cdot \nabla v_{\text{int}} d\Omega_\delta \\
 &\quad + \alpha^+ \int_\Gamma \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \cdots + \delta^n \partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^+ \right) v_{\text{int}|\Gamma}^2 d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons le fait que $u_{\text{int},0}^{[\beta]}, \dots, u_{\text{int},n+1}^{[\beta]}$, ($\beta = 1, 2$) sont solutions des équations (3.15)-(3.18), et obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\delta v &= \delta^{n+1} \left\{ \delta^{-1} a_{0,2}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n+1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n+1}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) - \left(a_{2,2}^{[1]} + a_{0,1}^{[1]} \right) \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \right. \\
 &\quad - a_{1,1}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n-1}^- + \delta \alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[1]} - \delta \alpha^- U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\
 &\quad - a_{2,1}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-2}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},n-2}^- + \delta \alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[1]} - \delta \alpha^- U_{\text{int},n-1}^- + \delta^2 \alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[1]} - \delta^2 \alpha^- U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\
 &\quad - \cdots - a_{n-1,1}^{[1]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},1}^- + \cdots + \delta^{n-1} \alpha_\delta u_{n-1}^{[1]} - \delta^{n-1} \alpha^- U_{\text{int},n-1}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\
 &\quad - r_n^{[1]} \left(\delta; \alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[1]} - \alpha^- U_{\text{int},1}^- + \cdots + \delta^n \alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[1]} - \delta^n \alpha^- U_{\text{int},n}^-, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\
 &\quad + \delta^{-1} a_{0,2}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n+1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n+1}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) - \left(a_{2,2}^{[2]} + a_{0,1}^{[2]} \right) \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 &\quad - a_{1,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n-1}^+ + \delta \alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[2]} - \delta \alpha^+ U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 &\quad - a_{2,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},n-2}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},n-2}^+ + \delta \alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[2]} - \delta \alpha^+ U_{\text{int},n-1}^+ \right. \\
 &\quad \left. + \delta^2 \alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[2]} - \delta^2 \alpha^+ U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) - \cdots - a_{n-1,1}^{[2]} \left(\alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},1}^+ \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \delta^{n-1} \alpha_\delta u_{\text{int},n-1}^{[2]} - \delta^{n-1} \alpha^+ U_{\text{int},n-1}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 &\quad \left. - r_n^{[2]} \left(\delta; \alpha_\delta u_{\text{int},1}^{[2]} - \alpha^+ U_{\text{int},1}^+ + \cdots + \delta^n \alpha_\delta u_{\text{int},n}^{[2]} - \delta^n \alpha^+ U_{\text{int},n}^+, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \right\} \\
 &\quad + \alpha^- \int_{\Omega_{\delta,1}} \nabla R_{\delta,1}^n \cdot \nabla v_{\text{int}}^1 d\Omega_{\delta,1} + \alpha^+ \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla R_{\delta,2}^n \cdot \nabla v_{\text{int}}^2 d\Omega_{\delta,2} - \alpha_\delta \int_{\Omega_\delta} \nabla \mathcal{P} R_\delta^n \cdot \nabla v_{\text{int}} d\Omega_\delta.
 \end{aligned}$$

Compte tenu des estimations basées sur les expressions explicites des formes bilinéaires

$a_{k,l}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ et celles de la Propositions 15, nous déduisons

$$|\mathcal{L}_\delta v| \leq c\delta^{n+1} \sum_{\beta=1}^2 \left(\left\| \nabla_\Gamma v_{\text{int}}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} + \delta^{-1} \left\| \partial_{s_\beta} v_{\text{int}}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} + \left\| v_{\text{int}}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} \right) + c\delta^{n+1/2} \|v_{\text{int}}\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})}.$$

Ce qui conduit à

$$|\mathcal{L}_\delta v| \leq c\delta^{n+1/2} \sum_{\beta=1}^2 \left(\delta^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_\Gamma v_{\text{int}}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \left\| \partial_{s_\beta} v_{\text{int}}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} + \delta^{\frac{1}{2}} \left\| v_{\text{int}}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} \right) + c\delta^{n+1/2} \|v_{\text{int}}\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})}.$$

Ainsi

$$|\mathcal{L}_\delta v| \leq c\delta^{n+1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.11)$$

Posant dans (4.10) $v_\delta^\pm = r_\delta^{\pm,n}$ et $v_{\text{int}} = r_{\text{int},\delta}^n - \mathcal{P}R$, nous obtenons

$$\|r_\delta^{-,n}\|_{H^1(\Omega_\delta^-)} + \|r_{\text{int},\delta}^n - \mathcal{P}R\|_{H^1(\Omega_\delta)} + \|r_\delta^{+,n}\|_{H^1(\Omega_\delta^+)} \stackrel{(4.11)}{\leq} c\delta^{n+1/2}.$$

Enfin, de (4.8), nous trouvons

$$\|r_\delta^{-,n}\|_{H^1(\Omega_\delta^-)} + \|r_{\text{int},\delta}^n\|_{H^1(\Omega_\delta)} + \|r_\delta^{+,n}\|_{H^1(\Omega_\delta^+)} \leq c\delta^{n+1/2}. \quad (4.12)$$

D'autre part, puisque f est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout entier positif j , nous avons

$\|u_j^\pm\|_{H^1(\Omega_\delta^\pm)} = O(1)$, il découle (cf. e.g., [44]) que :

$$\begin{aligned} \|r_\delta^{\pm,n}\|_{H^1(\Omega_\delta^\pm)} &= \|\delta^{n+1} u_{n+1}^\pm + r_\delta^{\pm,n+1}\|_{H^1(\Omega_\delta^\pm)} \\ &\stackrel{(4.12)}{\leq} c\delta^{n+1} + c\delta^{n+3/2} \leq c\delta^{n+1}. \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 18 Dans [10], nous avons calculé explicitement les trois premiers termes des développements asymptotiques (3.3) et (3.5) pour $p_1 = 0$, i.e., nous n'avons considéré qu'une seule couche mince, nous pouvons faire de même pour le cas $p_1 = 1$. Mais une telle démarche n'a pas été fructueuse, puisque nous n'avons pas pu déterminer un modèle d'ordre 1 bien posé. D'où l'introduction des paramètres p_1 et p_2 . Nous verrons leur utilité

dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Conditions de transmission approchées

Dans ce chapitre nous déterminerons un modèle d'ordre 1 permettant de modéliser l'effet de la couche mince par des conditions de transmission approchées avec un taux de convergence en $O(\delta^2)$. Ainsi, à partir des deux premiers termes du développement asymptotique, nous construirons un problème dont la solution ne sera autre que le développement asymptotique tronqué $\sum_{k=0}^1 \delta^k u_j^\pm$. Le modèle d'ordre 1 sera obtenu en négligeant dans ce problème tous les termes en $O(\delta^2)$. En conséquence, nous obtiendrons une approximations du champ lointain, qui à son tour, permet de déduire celle du champ proche.

Nous tronquons les séries définissant les développements asymptotiques en ne conservant que les deux premiers termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} u_\delta^- &\simeq u_\delta^{-,(1)} := u_0^- + \delta u_1^- \quad \text{dans } \Omega_\delta^-, \\ u_\delta^+ &\simeq u_\delta^{+,(1)} := u_0^+ + \delta u_1^+ \quad \text{dans } \Omega_\delta^+, \\ u_{\text{int},\delta} &\simeq u_{\text{int},\delta}^{(1)} := u_{\text{int},0} + \delta u_{\text{int},1} \quad \text{dans } \Omega_\delta, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,1}}^{(1)}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{1,(1)}(x) := u_{\text{int},\delta}^{1,(1)}(m, \delta s_1) := u_{\text{int},\delta}^{[1],[1]}(m, s_1) \\ &= u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(u_{1|\Gamma}^- + p_1 \left[(s_1 + 1) \frac{\alpha^-}{\alpha_\delta} - 1 \right] \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right), \\ \forall x &= \Phi_1(m, s_1) \in \Omega_{\delta,1}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,2}}^{(1)}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{2,(1)}(x) := u_{\text{int},\delta}^{2,(1)}(m, \delta s_2) := u_{\text{int},\delta}^{[2],(1)}(m, s_2) \\
 &= u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \left[(s_2 - 1) \frac{\alpha^+}{\alpha_\delta} + 1 \right] \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right), \\
 \forall x &= \Phi_2(m, s_2) \in \Omega_{\delta,2},
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Compte tenu de la Remarque 11, $(u_\delta^{-,(1)}, u_\delta^{+,(1)})$ résout le problème suivant

$$\begin{cases} -\text{div} \left(\alpha^- \nabla u_\delta^{-,(1)} \right) = f_{|\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-, \\ -\text{div} \left(\alpha^+ \nabla u_\delta^{+,(1)} \right) = f_{|\Omega^+} & \text{dans } \Omega^+, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \delta \mathcal{A} \left(u_\delta^{-,(1)} \right) - \delta^2 \xi_\delta & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \delta \mathcal{B} \left(u_\delta^{-,(1)} \right) - \delta^2 \rho_\delta & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\delta|\partial\Omega}^{+,(1)} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(u) &:= \left[p_1(1 - \alpha^- \alpha_\delta^{-1}) + p_2 \left(\alpha^- (\alpha^+)^{-1} - \alpha^- \alpha_\delta^{-1} \right) \right] (\partial_{\mathbf{n}} u|_\Gamma), \\
 \mathcal{B}(u) &:= \left[p_1(\alpha_\delta - \alpha^-) + p_2(\alpha_\delta - \alpha^+) \right] \Delta_\Gamma u|_\Gamma, \\
 \xi_\delta &:= \left[p_1(1 - \alpha^- \alpha_\delta^{-1}) + p_2 \left(\alpha^- (\alpha^+)^{-1} - \alpha^- \alpha_\delta^{-1} \right) \right] \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^-, \\
 \rho_\delta &:= \left[p_1(\alpha_\delta - \alpha^-) + p_2(\alpha_\delta - \alpha^+) \right] \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^-.
 \end{aligned}$$

Ce dernier problème nous conduit à introduire $(u_\delta^{-,ap}, u_\delta^{+,ap})$ solution du problème (5.3) mais cette fois-ci avec $\rho_\delta = 0$ et $\xi_\delta = 0$. Nous obtenons ainsi un problème, noté $(\mathcal{P}_\delta^{ap})$, avec des conditions de transmission approchées de type *Ventcel* exprimées à l'aide d'opérateurs différentiels tangentiels d'ordre 2 sur la surface Γ et définies par :

$$\begin{cases} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \left[p_1(1 - \alpha^- \alpha_\delta^{-1}) + p_2 \left(\alpha^- (\alpha^+)^{-1} - \alpha^- \alpha_\delta^{-1} \right) \right] \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \left[p_1(\alpha_\delta - \alpha^-) + p_2(\alpha_\delta - \alpha^+) \right] \Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}. \end{cases} \tag{5.4}$$

5.1 Existence et unicité

Nous nous proposons maintenant de montrer l'existence et l'unicité de la solution $(u_\delta^{-,ap}, u_\delta^{+,ap})$. De manière naturelle, nous souhaiterons écrire la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_\delta^{ap})$ et appliquer par conséquent le lemme de Lax-Milgram ; mais ceci ne sera pas possible ! Il est facile de voir, en général, que la forme bilinéaire correspondante au

problème $(\mathcal{P}_\delta^{ap})$ n'est pas coercive. Nous envisagerons alors d'appliquer une technique due à Bonnaillie-Noël & al. (cf. [9]) qui consiste à transformer $(\mathcal{P}_\delta^{ap})$ en une équation pseudo-différentielle sur la surface Γ . Encore une fois, ceci ne nous permet pas de conclure. En effet, une utilisation directe des conditions de transmission (5.4) conduit à un opérateur non auto-adjoint. Pour y remédier, nous déterminerons la position de la surface Γ de telle sorte que le saut de la solution à travers Γ soit nul.

Posons alors

$$p_1(1 - \alpha^- \alpha_\delta^{-1}) + p_2 \left(\alpha^- (\alpha^+)^{-1} - \alpha^- \alpha_\delta^{-1} \right) = 0.$$

Nous obtenons

$$p_1 = \frac{\alpha^- (\alpha^+ - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta (\alpha^+ - \alpha^-)} \text{ et } p_2 = \frac{\alpha^+ (\alpha_\delta - \alpha^-)}{\alpha_\delta (\alpha^+ - \alpha^-)},$$

qui sont valables uniquement si $\alpha^- < \alpha_\delta < \alpha^+$ ou $\alpha^+ < \alpha_\delta < \alpha^-$, ce qui correspond au cas moyenne diffusion. Le Problème $(\mathcal{P}_\delta^{ap})$ devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(\alpha^- \nabla u_\delta^{-,ap}) = f_{|\Omega^-} & \text{dans } \Omega^-, \\ -div(\alpha^+ \nabla u_\delta^{+,ap}) = f_{|\Omega^+} & \text{dans } \Omega^+, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\delta|\partial\Omega}^{+,ap} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Pour établir le résultat d'existence et d'unicité, nous allons nous ramener au cas avec second membre nul. En effet, soit G une fonction dans $H_0^1(\Omega)$ telle que $-div(\alpha_0 \nabla G) = f$. En notant G^\pm les restrictions de G sur les domaines Ω^\pm , $(\Psi^-, \Psi^+) := (u_\delta^{-,ap} - G^-, u_\delta^{+,ap} - G^+)$ est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(\alpha^+ \nabla \Psi^+) = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ -div(\alpha^- \nabla \Psi^-) = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \Psi_{|\Gamma}^- - \Psi_{|\Gamma}^+ = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} \Psi_{|\Gamma}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} \Psi_{|\Gamma}^+ - \delta \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma \Psi_{\text{ext}|\Gamma}^- = g & \text{sur } \Gamma, \\ \Psi_{|\partial\Omega}^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où nous avons noté $g := (\alpha^+ - \alpha^-) \partial_{\mathbf{n}} G_{|\Gamma} + \delta \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma G_{|\Gamma}$.

Cela étant, nous introduisons les opérateurs (DtN) de Dirichlet-to-Neumann S^- et S^+ (appelés aussi opérateurs de Steklov-Poincaré) définis de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ par

$S^-\varphi := \partial_{\mathbf{n}}u^-|_{\Gamma}$, où u^- est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u^-|_{\Gamma} = \varphi & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et $S^+\psi := \partial_{-\mathbf{n}}u^+|_{\Gamma}$, où u^+ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u^+|_{\Gamma} = \psi & \text{sur } \Gamma, \\ u^+|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème (5.5) est équivalent à l'équation

$$\alpha^- S^- \omega + \alpha^+ S^+ \omega - \delta \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma \omega = g \text{ sur } \Gamma,$$

où ω est la trace de Ψ^+ sur la surface Γ . Ainsi, nous avons ramené le problème (5.5) à une équation non locale sur la surface Γ . Pour établir un résultat d'existence et d'unicité, nous allons tout d'abord énoncer quelques propriétés pseudo-différentielles sur les opérateurs $-\Delta_\Gamma$, S^- et S^+ (cf. e.g., [17, 49]).

Proposition 19

1. L'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_\Gamma$ est semi-borné¹, auto-adjoint et pseudo-différentiel¹ elliptique¹ à symbole¹ réel d'ordre 2.
2. Les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann S^- et S^+ sont auto-adjoint, pseudo-différentiels elliptiques à symboles réels d'ordre 1.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le

Théorème 20 (d'existence et d'unicité) L'opérateur

$$L_\delta := \delta \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma - \alpha^- S^- - \alpha^+ S^+$$

est un opérateur elliptique, auto-adjoint, semi-borné et pseudo-différentiel d'ordre 2. De plus, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de valeurs propres de L_δ qui tend vers l'infini telle que pour tout $g \in H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$, nous avons :

¹Voir Annexe C

1. Si $0 \notin (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors l'équation $-L_\delta \omega = g$ admet une solution unique dans $H^{s+2}(\Gamma)$;
2. Si $0 \in (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors soit il n'existe pas de solutions ou bien il existe un sous-espace de $H^{s+2}(\Gamma)$, affine complet de dimension finie, de solutions.

Preuve. Compte tenu de la Proposition 19, L_δ est un opérateur auto-adjoint, semi-borné et pseudo-différentiel elliptique d'ordre 2 dont le symbole principal est celui de $-\Delta_\Gamma$. Ainsi, le Théorème 20 est une conséquence directe du Théorème 76. ■

5.2 Estimation de l'erreur

La solution approchée $(u_\delta^{-,ap}, u_\delta^{+,ap})$ du champs lointain $(u_\delta^{-,(1)}, u_\delta^{+,(1)})$ étant construite, nous pouvons maintenant déterminer une solution approchée u_δ^{ap} de la solution exacte u_δ et donner une estimation de l'erreur d'approximation. De manière naturelle, nous définissons u_δ^{ap} sur Ω par

$$u_\delta^{ap} := \begin{cases} u_\delta^{-,ap} & \text{dans } \Omega_\delta^-, \\ u_\delta^{+,ap} & \text{dans } \Omega_\delta^+, \\ u_{\text{int},\delta}^{ap} & \text{dans } \Omega_\delta, \end{cases}$$

où $u_{\text{int},\delta}^{ap}$ est définie à partir de (5.1) et (5.2) en ajoutant et en retranchant un terme d'ordre 2 en δ . Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,1}}^{ap}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{1,ap}(x) := u_{\text{int},\delta}^{[1],ap}(m, s_1) \\ &:= u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \delta \frac{\alpha^- (\alpha^+ - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta (\alpha^+ - \alpha^-)} \left[(s_1 + 1) \frac{\alpha^-}{\alpha_\delta} - 1 \right] \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}, \quad \forall x = \Phi_1(m, s_1) \in \Omega_{\delta,1}, \\ u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,2}}^{ap}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{2,ap}(x) := u_{\text{int},\delta}^{[2],ap}(m, s_2) \\ &:= u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} + \delta \frac{\alpha^+ (\alpha_\delta - \alpha^-)}{\alpha_\delta (\alpha^+ - \alpha^-)} \left[(s_2 - 1) \frac{\alpha^+}{\alpha_\delta} + 1 \right] \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}, \quad \forall x = \Phi_2(m, s_2) \in \Omega_{\delta,2}. \end{aligned}$$

Nous avons le résultat suivant

Théorème 21 *Il existe une constante c indépendante de δ telle que*

$$\|u_\delta^- - u_\delta^{-,ap}\|_{H^1(\Omega_\delta^-)} + \delta^{1/2} \sum_{\beta=1}^2 \|u_{\text{int},\delta}^\beta - u_{\text{int},\delta}^{\beta,ap}\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})} + \|u_\delta^+ - u_\delta^{+,ap}\|_{H^1(\Omega_\delta^+)} \leq c\delta^2.$$

Preuve. Compte tenu de

$$\begin{aligned} \left\| u_{\text{int},\delta}^{[1],ap} - u_{\text{int},\delta}^{(1)} \right\|_{H^1(\Omega^1)} &\leq c \left(\left\| u_{\delta}^{-} - u_{\delta}^{-,(1)} \right\|_{H^1(\Omega^{-})} + \delta^2 \left\| u_1^{-} \right\|_{H^1(\Omega^{-})} \right), \\ \left\| u_{\text{int},\delta}^{[2],ap} - u_{\text{int},\delta}^{(2)} \right\|_{H^1(\Omega^2)} &\leq c \left(\left\| u_{\delta}^{+} - u_{\delta}^{+,(1)} \right\|_{H^1(\Omega^{+})} + \delta^2 \left\| u_1^{+} \right\|_{H^1(\Omega^{+})} \right), \end{aligned}$$

et du Théorème 17 (de convergence), il suffit d'estimer la quantité $\left\| u_{\delta}^{\pm,ap} - u_{\delta}^{\pm,(1)} \right\|_{H^1(\Omega^{\pm})}$. Remarquons, tout d'abord qu'une utilisation des méthodes classiques, qui consiste à analyser précisément le problème qui définit la différence $u_{\delta}^{\pm,ap} - u_{\delta}^{\pm,(1)}$, pour estimer l'erreur $u_{\delta}^{\pm,ap} - u_{\delta}^{\pm,(1)}$ ne conduit pas à un résultat optimal. Pour cela, nous reprendrons une démarche fort voisine de celle de la démonstration du Théorème 1.12 dans [53, p. 36] en effectuant un développement asymptotique de $u_{\delta}^{\pm,ap}$. Soit l'ansatz

$$u_{\delta}^{-,ap} = \sum_{j \geq 0} \delta^j w_j^{-}, \quad u_{\delta}^{+,ap} = \sum_{j \geq 0} \delta^j w_j^{+}, \quad (5.6)$$

où les termes w_j^{\pm} sont indépendants de δ . En reportant l'expression (5.6) dans (5.5), nous obtenons, par identification des termes de même puissance en δ , la relation de récurrence

$$\begin{cases} -\text{div}(\alpha^{+} \nabla w_j^{+}) = \delta_{j,0} f|_{\Omega^{+}} & \text{dans } \Omega^{+}, \\ -\text{div}(\alpha^{-} \nabla w_j^{-}) = \delta_{j,0} f|_{\Omega^{-}} & \text{dans } \Omega^{-}, \\ w_{j|\Gamma}^{-} - w_{j|\Gamma}^{+} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^{-} \partial_{\mathbf{n}} w_{j|\Gamma}^{-} - \alpha^{+} \partial_{\mathbf{n}} w_{j|\Gamma}^{+} = \frac{(\alpha^{+} - \alpha_{\delta})(\alpha^{-} - \alpha_{\delta})}{\alpha_{\delta}} \Delta_{\Gamma} w_{j-1|\Gamma}^{-} & \text{sur } \Gamma, \\ w_{j|\partial\Omega}^{+} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec la convention $w_{-1}^{\pm} = 0$. Un simple calcul montre que w_0^{\pm} et w_1^{\pm} coïncident avec u_0^{\pm} et u_1^{\pm} . Par ailleurs, puisque f est de classe \mathcal{C}^{∞} , tous les termes de (5.6) sont bornés dans $H^1(\Omega^{\pm})$.

Considérons maintenant la fonction \mathcal{R}_w définie sur Ω par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{w|\Omega^{-}} &:= \mathcal{R}_w^{-} := u_{\delta}^{-,ap} - w_0^{-} - \delta w_1^{-} - \delta^2 w_2^{-}, \\ \mathcal{R}_{w|\Omega^{+}} &:= \mathcal{R}_w^{+} := u_{\delta}^{+,ap} - w_0^{+} - \delta w_1^{+} - \delta^2 w_2^{+}. \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{R}_w est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\alpha^+ \nabla \mathcal{R}_w^+) = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ -\operatorname{div}(\alpha^- \nabla \mathcal{R}_w^-) = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \mathcal{R}_{w|\Gamma}^- - \mathcal{R}_{w|\Gamma}^+ = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha^- \partial_{\mathbf{n}} \mathcal{R}_{w|\Gamma}^- - \alpha^+ \partial_{\mathbf{n}} \mathcal{R}_{w|\Gamma}^+ = \delta \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma \mathcal{R}_{w|\Gamma}^- \\ \quad + \delta^3 \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma w_{2|\Gamma}^- & \text{sur } \Gamma, \\ \mathcal{R}_{w|\partial\Omega}^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Ce qui conduit, pour toute fonction v dans $H_0^1(\Omega)$, à

$$\begin{aligned} & \alpha^- \int_{\Omega^-} \nabla \mathcal{R}_w^- \cdot \nabla v|_{\Omega^-} \, d\Omega^- + \alpha^+ \int_{\Omega^+} \nabla \mathcal{R}_w^+ \cdot \nabla v|_{\Omega^+} \, d\Omega^+ \\ & - \int_\Gamma \left[\delta \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma \mathcal{R}_{w|\Gamma}^- + \delta^3 \frac{(\alpha^+ - \alpha_\delta)(\alpha^- - \alpha_\delta)}{\alpha_\delta} \Delta_\Gamma w_{2|\Gamma}^- \right] v|_\Gamma \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Choisissant $v = \mathcal{R}_w$ dans (5.7), nous déduisons

$$\|\mathcal{R}_w\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\delta \|\mathcal{R}_w\|_{H^1(\Omega)} + \delta^3 \|w_2^-\|_{H^1(\Omega^-)} \right),$$

d'où

$$\|\mathcal{R}_w\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\delta^3 c}{(1 - c\delta)} \|w_2^-\|_{H^1(\Omega^-)}.$$

Puisque δ est assez petit, nous trouvons

$$\|\mathcal{R}_w\|_{H^1(\Omega)} \leq c\delta^2 \|w_2^-\|_{H^1(\Omega^-)}.$$

Finalement, en vertu de la définition de \mathcal{R}_w et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat escompté. ■

Deuxième partie

Conditions de transmission de type
Ventcel pour un problème de
diffraction d'ondes par une couche
mince parfaitement absorbante

Chapitre 6

Position du problème

6.1 Introduction

Dans cette partie, nous étudions l'asymptotique d'un problème de diffraction dans \mathbb{R}^3 par un obstacle pénétrable recouvert d'une couche mince d'épaisseur δ (destinée à tendre vers 0). Nous appliquerons le formalisme de la 1^{ère} partie à l'équation de Helmholtz afin, d'une part, de déterminer et justifier un développement asymptotique de la solution à tout ordre et d'autre part de dériver un problème permettant d'approcher la solution du problème de diffraction avec une erreur d'ordre 2 en δ . Bien que la démarche ne diffère guère de celle utilisée dans la première partie, nous verrons que dans le cas de l'équation de Helmholtz, nous pouvons déterminer un nombre infini de position de la surface Γ permettant de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du modèle approché. Par contre, la difficulté est de taille, l'opérateur de Helmholtz n'est pas coercif et par conséquent le résultat de stabilité n'est pas évident.

Nous commencerons, dans un premier paragraphe, par vérifier que le problème étudié est bien posé et nous établirons un résultat de stabilité uniforme par rapport au second membre qui nous sera utile tout le long de cette partie. Nous aborderons, ensuite, l'asymptotique du problème de diffraction.

Soient Ω_δ^- un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , de frontière régulière $\Gamma_{\delta,1}$, recouvert d'une couche mince Ω_δ d'épaisseur δ (destinée à tendre vers 0) et Ω_δ^+ un domaine extérieur défini par $\Omega_\delta^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{\Omega_\delta^- \cup \Omega_\delta} \right)$ (voir Figure 6.1).

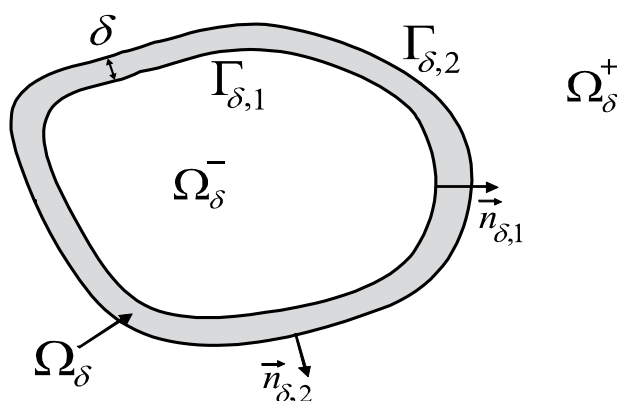


Figure 6.1 – Géométrie du problème

Nous introduisons les fonctions σ_{δ} et k_{δ}^2 définies sur \mathbb{R}^3 par

$$\sigma_{\delta}(x) := \begin{cases} \sigma^+ & \text{si } x \in \Omega_{\delta}^+, \\ \tilde{\sigma}_{\delta} & \text{si } x \in \Omega_{\delta}, \\ \sigma^- & \text{si } x \in \Omega_{\delta}^-, \end{cases} \quad k_{\delta}^2(x) := \begin{cases} k_+^2 & \text{si } x \in \Omega_{\delta}^+, \\ \tilde{k}_{\delta}^2 & \text{si } x \in \Omega_{\delta}, \\ k_-^2 & \text{si } x \in \Omega_{\delta}^-, \end{cases}$$

où σ^- et $\tilde{\sigma}_{\delta}$ sont deux constantes strictement positives décrivant les propriétés de contraste des milieux Ω_{δ}^- et Ω_{δ} par rapport au milieu de propagation Ω_{δ}^+ , et telles que k_-^2 et \tilde{k}_{δ}^2 sont deux nombres complexes à partie réelle strictement positive et à partie imaginaire positive. Nous supposons, en outre que σ^+ et k_+ sont strictement positifs et que les nombres σ^{\pm} et k_{\pm} sont indépendants de δ .

Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution u_{δ} du problème de Helmholtz

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\delta} \nabla u_{\delta}) + k_{\delta}^2 u_{\delta} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_{\delta} - u_{inc}) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Le terme source ou l'onde incidente u_{inc} correspond à l'onde propagée dans le vide en l'absence d'obstacle. Elle vérifie

$$\operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_{inc}) + k_+^2 u_{inc} = 0.$$

Il existe un type particulier d'ondes incidentes appelée *onde plane*. On les utilise pour deux raisons. Premièrement, ce sont des sources qu'on peut générer en pratique, ce qui est fondamental pour les applications réelles (cf. [31]). Deuxièmement, elles ont une expression

analytique très simple donnée par

$$u_{inc}(x) := e^{i \frac{k_+}{\sqrt{\sigma^+}}(x \cdot \mathbf{d})},$$

où $x \in \mathbb{R}^3$, \mathbf{d} est un vecteur normalisé de \mathbb{R}^3 indiquant la direction dans laquelle Ω_δ est illuminé, $\frac{k_+}{\sqrt{\sigma^+}} := \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde, ω est la fréquence et c est la vitesse de propagation.

6.2 Existence et unicité

Rellich, dans [42], a montré que la solution du problème (6.1) n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et donc a fortiori n'est pas dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. Nous nous proposons par conséquent de chercher la solution dans un espace plus gros $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ (cf. [54]) défini par :

$$H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) := \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) ; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \varphi u \in H^1(\mathbb{R}^3)\}.$$

Nous avons le

Théorème 22 *Le problème (6.1) admet au plus une solution u_δ dans $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$.*

Preuve. Considérons le problème homogène associé à (6.1) :

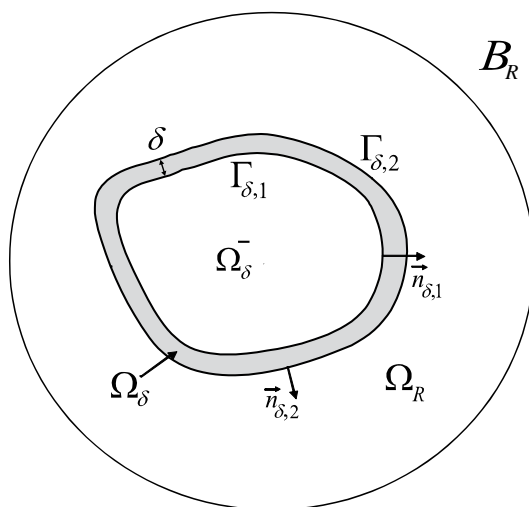
$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \text{ telle que} \\ \text{div}(\sigma_\delta \nabla u_\delta) + k_\delta^2 u_\delta = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) u_\delta = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

En notant $u_{\text{ext},\delta}^-$, $u_{\text{int},\delta}$ et $u_{\text{ext},\delta}^+$ les restrictions de u_δ les domaines Ω_δ^- , Ω_δ et Ω_δ^+ , les résultats classiques sur la régularité de la solution de ce type de problèmes (cf. [3]) montrent que $(u_\delta^-, u_{\text{int},\delta}, u_\delta^+) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_\delta^-}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_\delta}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_\delta^+})$.

Soient maintenant B_R la boule de centre O et de rayon R assez grand pour enclore la couche mince Ω_δ et Ω_R le domaine de \mathbb{R}^3 défini par $\Omega_R := B_R \cap \Omega_\delta^+$ (voir Figure 6.2).

Multipliant l'équation

$$\text{div}(\sigma_\delta \nabla u_\delta) + k_\delta^2 u_\delta = 0,$$


 Figure 6.2 – La boule B_R

par $\overline{u_\delta}$, intégrant sur B_R et utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \sigma^- \int_{\Omega_\delta^-} |\nabla u_\delta^-|^2 d\Omega_\delta^- - k_-^2 \int_{\Omega_\delta^-} |u_\delta^-|^2 d\Omega_\delta^- \\
 & + \tilde{\sigma}_\delta \int_{\Omega_\delta} |\nabla u_{\text{int},\delta}|^2 d\Omega_\delta - \tilde{k}_\delta^2 \int_{\Omega_\delta} |u_{\text{int},\delta}|^2 d\Omega_\delta \\
 & + \sigma^+ \int_{\Omega_R} |\nabla u_\delta^+|^2 d\Omega_R - k_+^2 \int_{\Omega_R} |u_\delta^+|^2 d\Omega_R = \sigma^+ \int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+ \overline{u_{\delta|S_R}^+} dS_R, \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

où S_R désigne la sphère de centre O et de rayon R . D'où, en prenant la partie imaginaire de (6.4) nous avons

$$\Im \left(\int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+ \overline{u_{\delta|S_R}^+} dS_R \right) \leq 0. \quad (6.5)$$

Par ailleurs, compte tenu de

$$\begin{aligned}
 \frac{k_+}{2} \int_{S_R} |u_{\delta|S_R}^+|^2 dS_R &= \frac{1}{2k_+} \left\{ k_+^2 \int_{S_R} |u_{\delta|S_R}^+|^2 dS_R + \int_{S_R} |\partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+|^2 dS_R \right. \\
 &\quad \left. - 2k_+ \Im \left(\int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+ \overline{u_{\delta|S_R}^+} dS_R \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2k_+} \int_{S_R} |\partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+|^2 dS_R + \Im \left(\int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+ \overline{u_{\delta|S_R}^+} dS_R \right),
 \end{aligned}$$

il découle de (6.5)

$$\frac{k_+}{2} \int_{S_R} \left| u_{\delta|S_R}^+ \right|^2 dS_R \leq \frac{1}{2k_+} \int_{S_R} \left| \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+ - ik_+ u_{\delta|S_R}^+ \right|^2 dS_R.$$

Utilisant la condition de radiation (6.3), nous pouvons écrire, pour tout ε positif

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \left| u_{\delta|S_R}^+ \right|^2 dS_R &\leq \frac{1}{k_+^2} \int_{S_R} \left| \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+ - ik_+ u_{\delta|S_R}^+ \right|^2 dS_R \\ &\leq \frac{1}{k_+^2} \frac{\varepsilon^2}{R^2} \text{mes}(S_R) = \frac{1}{k_+^2} \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} \varepsilon^2, \end{aligned}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction d'Euler (cf. [27]). Ainsi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| u_{\delta|S_R}^+ \right|^2 dS_R = 0.$$

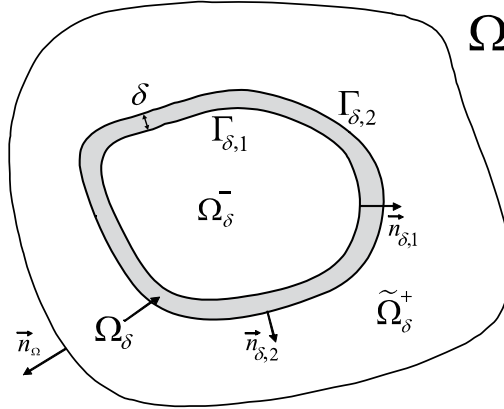
En vertu du Lemme 78 (de Rellich) (voir Annexe D), nous obtenons $u_{\delta}^+ = 0$ sur Ω_{δ}^+ . Par conséquent, en prenant encore une fois, si $\Im(k_-^2)$ et $\Im(\tilde{k}_{\delta}^2)$ sont non-nulles, la partie imaginaire de (6.4), nous déduisons que $u_{\delta} = 0$ sur \mathbb{R}^3 . Dans le cas contraire, nous obtenons, en utilisant des arguments d'unicité des solutions des EDP de type Cauchy-Kovalevski, $u_{\delta} = 0$ sur \mathbb{R}^3 . ■

Pour montrer l'existence de la solution u_{δ} , nous utiliserons une technique classique qui consiste à tronquer l'espace \mathbb{R}^3 par une surface fictive et de ramener (6.1) en un problème posé dans un domaine borné via un opérateur de type DtN. Nous exhiberons les étapes de la démonstration afin de construire un tel opérateur qui nous sera utile dans la suite.

Soit Ω ouvert borné de \mathbb{R}^3 , contenant la couche mince Ω_{δ} , de frontière $\partial\Omega$ assez régulière (au moins de classe \mathcal{C}^2). Nous pouvons considérer, par exemple, une boule de rayon R assez grand pour enclore Ω_{δ} (voir Figure 6.3).

Nous introduisons l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann T défini de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ par $T\varphi := -\partial_{\mathbf{n}_{\Omega}}\omega$, où \mathbf{n}_{Ω} est la normale unitaire extérieure au bord $\partial\Omega$ (dirigée vers $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$) et ω est l'unique solution (cf. [38]) du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \omega \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega), & \\ \text{div}(\sigma^+ \nabla \omega) + k_+^2 \omega = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ \omega|_{\partial\Omega} = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) \omega = 0. & \end{array} \right. \quad (6.6)$$


 Figure 6.3 – Le domaine tronqué Ω

L'opérateur T est pseudo-différentiel (OΨD) d'ordre 1 (cf. e.g., [7, 49]), il est linéaire continu de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Ainsi, (6.1) est remplacé par un problème défini dans un domaine borné Ω avec une condition aux limites sur $\partial\Omega$:

$$(\partial_{\mathbf{n}_\Omega} + T) u_\delta = (\partial_{\mathbf{n}_\Omega} + T) u_{inc},$$

appelée condition transparente, i.e., (6.1) est équivalent au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in H^1(\Omega), \\ \operatorname{div}(\sigma_\delta \nabla u_\delta) + k_\delta^2 u_\delta = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (\partial_{\mathbf{n}_\Omega} + T) u_\delta|_{\partial\Omega} = (\partial_{\mathbf{n}_\Omega} + T) u_{inc}|_{\partial\Omega} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.7)$$

Une formulation variationnelle de (6.7) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \\ a_\delta(u_\delta, v) := \int_\Omega \sigma_\delta \nabla u_\delta \cdot \nabla \bar{v} - k_\delta^2 u_\delta \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle T u_\delta|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ = l_\delta(v), \end{cases} \quad (6.8)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}$ désigne la dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ and $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et l_δ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ donnée par

$$l_\delta(v) := \sigma^+ \int_{\partial\Omega} (\partial_{\mathbf{n}_\Omega} + T) u_{inc} \bar{v} \, d\sigma.$$

Notons que la forme bilinéaire $a_\delta(\cdot, \cdot)$ n'est pas coercive, c'est pour cela que nous allons ramener, par perturbation, le problème (6.8) à une alternative de Fredholm¹. Soit T_0 l'opérateur défini de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, par $T_0\phi = -\partial_{\mathbf{n}_\Omega}\omega_0$ où ω_0 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}), \\ \Delta\omega_0 - \omega_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ \omega_0|_{\partial\Omega} = \phi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le lemme suivant donne quelques propriétés de cet opérateur. Pour la preuve, nous incitons le lecteur à consulter [7].

Lemme 23 *L'opérateur T_0 est borné et coercif de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, il existe un opérateur compact K défini de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ dans $H^{3/2}(\partial\Omega)$ tel que :*

$$T = T_0 + K. \quad (6.9)$$

Nous avons le

Théorème 24 *Le problème (6.8) admet une unique solution u_δ dans $H^1(\Omega)$.*

Preuve. Le résultat peut être obtenu en utilisant l'alternative de Fredholm sous sa forme variationnelle (voir Corollaire 61¹). Soient $\tilde{a}_\delta(\cdot, \cdot)$ et $\tilde{b}_\delta(\cdot, \cdot)$ deux formes bilinéaires définies sur $H^1(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\delta(u, v) &:= \int_{\Omega} \sigma_\delta \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle T_0 u|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \\ \tilde{b}_\delta(u, v) &:= - \int_{\Omega} k_\delta^2 u \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle K u|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Le problème (6.8) est alors équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega) \\ \tilde{a}_\delta(u_\delta, v) + \tilde{b}_\delta(u_\delta, v) = l_\delta(v). \end{cases} \quad (6.10)$$

Il est clair, d'après le Lemme 23, que $\tilde{a}_\delta(\cdot, \cdot)$ est coercive. Par ailleurs, compte tenu de la compacité de l'injection $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ (voir Théorème 79) et de l'opérateur K , nous

¹Voir Annexe B

déduisons que si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites faiblement convergentes dans $H^1(\Omega)$ vers \tilde{u} et \tilde{v} respectivement, alors

$$\tilde{b}_\delta(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{b}_\delta(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Par conséquent, d'après le Corollaire 61, l'équivalence entre (6.8) et (6.1) ainsi que l'unicité de la solution de ce dernier permettent d'achever la démonstration. ■

6.3 Stabilité uniforme

Nous nous proposons maintenant d'étudier la stabilité de la solution de (6.8) par rapport au second membre, dépendant ici du champ incident, lorsque δ tend vers 0. Cela nous permettra d'établir, dans la suite, des estimations d'erreur justifiant la convergence du développement asymptotique de u_δ .

Théorème 25 [*Stabilité uniforme*] *Sous les hypothèses*

$$\exists \varepsilon > 0, \tilde{\sigma}_\delta = O(\delta^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tilde{k}_\delta^2 = O(\delta^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}); \quad (6.11)$$

$$\exists \alpha > 0, \forall \delta > 0, \sigma_\delta > \alpha; \quad (6.12)$$

il existe, pour toute forme linéaire l_δ dans $(H^1(\Omega))'$, une constante positive c indépendante de δ telle que la solution de (6.8) satisfait à l'estimation

$$\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|l_\delta\|_{(H^1(\Omega))'}.$$

Preuve. L'estimation de stabilité est établie en démontrant l'inégalité suivante

$$\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|a_\delta(u_\delta, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Pour ce faire, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux suites $(\delta_n)_{n \geq 0}$ et $(u_{\delta_n})_{n \geq 0}$ (notée $(u_n)_{n \geq 0}$) telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0, \|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}=1} |a_{\delta_n}(u_n, \varphi)| = 0. \quad (6.13)$$

En vertu de (6.13) et du Théorème 79 (de Rellich) (voir Annexe D), il existe une sous-suite de $(u_n)_{n \geq 0}$, notée encore $(u_n)_{n \geq 0}$, telle que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ u_n \rightharpoonup u_0 \text{ dans } H^1(\Omega). \end{cases} \quad (6.14)$$

Par ailleurs, la condition (6.11) implique

$$\sigma_\delta \rightarrow \sigma_0 := \sigma^- \chi_{\Omega^-}(x) + \sigma^+ \chi_{\tilde{\Omega}^+}(x) \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (6.15)$$

$$k_\delta^2 \rightarrow k_0^2 := k_-^2 \chi_{\Omega^-}(x) + k_+^2 \chi_{\tilde{\Omega}^+}(x) \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (6.16)$$

où nous avons noté $\Omega^- = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega_\delta^-$, $\tilde{\Omega}^+ := \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ (voir Figure 6.4) et $\chi_{\mathcal{O}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ouvert \mathcal{O} .

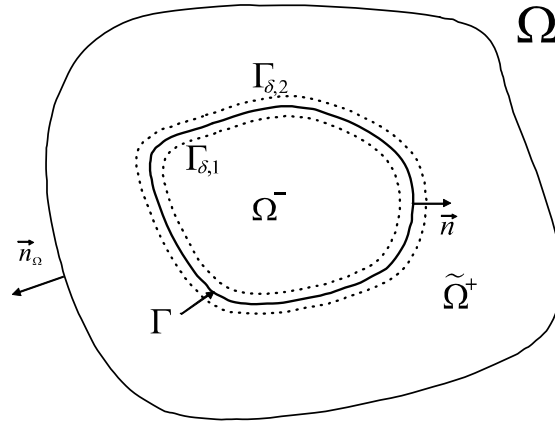


Figure 6.4 – Le domaine fixe $\Omega^- \cup \tilde{\Omega}^+$

En effet, nous avons

$$\|\sigma_\delta - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega_\delta} |\sigma_\delta - \sigma_0|^2 d\Omega_\delta \leq \int_{\Omega_{\delta,1}} |\sigma^-|^2 d\Omega_{\delta,1} + \int_{\Omega_\delta} |\tilde{\sigma}_\delta|^2 d\Omega_\delta + \int_{\Omega_{\delta,2}} |\sigma^+|^2 d\Omega_{\delta,2}.$$

Utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\delta,1}} |\sigma^-|^2 d\Omega_{\delta,1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\delta,2}} |\sigma^+|^2 d\Omega_{\delta,2} = 0,$$

et compte tenu de

$$\int_{\Omega_\delta} |\tilde{\sigma}_\delta|^2 d\Omega_\delta \leq C \left(\delta^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \right)^2 |\Omega_\delta| = C \delta^{2\varepsilon} |\Gamma| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

nous déduisons (6.15). De manière similaire, le lecteur pourra démontrer la relations (6.16). Utilisant maintenant (6.14)-(6.16), nous obtenons

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\delta_n}(u_n, \varphi) = \int_{\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \bar{\varphi} - k_0^2 u_0 \bar{\varphi} d\Omega + \sigma^+ \langle T u_0|_{\partial\Omega}, \bar{\varphi}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

pour tout φ dans $H^1(\Omega)$. Ainsi $u_0 \in H^1(\Omega)$ vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_0 \nabla u_0) + k_0^2 u_0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (\partial_{\mathbf{n}_\Omega} + T) u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Compte tenu de la définition de l'opérateur T , la fonction u_0 vérifie l'équation de Helmholtz et la condition de radiation sur tout l'espace \mathbb{R}^3 . Le lemme 78 (de Rellich) assure alors que $u_0 = 0$. Afin d'obtenir la contradiction, nous allons montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Remarquons d'abord qu'en vertu de l'unicité de la solution u_0 , toute la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $u_0 = 0$ dans $L^2(\Omega)$. il ne reste plus qu'à démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

A l'aide de (6.12), nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c \Re \left(\int_{\Omega} \sigma_\delta \nabla u_n \cdot \nabla \bar{u}_n d\Omega \right) = c \int_{\Omega} \sigma_\delta |\nabla u_n|^2 d\Omega \\ &= c \Re \left(a_n(u_n, u_n) + \int_{\Omega} k_{\delta_n}^2 |u_n|^2 d\Omega - \sigma^+ \langle T u_n|_{\partial\Omega}, \bar{u}_n|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \end{aligned}$$

D'où, en utilisant le Lemme 23, nous déduisons

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left\{ \Re \left[a_n(u_n, u_n) + \int_{\Omega} k_{\delta_n}^2 |u_n|^2 d\Omega - \sigma^+ \langle K u_n|_{\partial\Omega}, \bar{u}_n|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \right] \right\}.$$

Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 = 0$ dans $L^2(\Omega)$ et $k_{\delta_n}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k_0^2$ dans $L^2(\Omega)$, nous pouvons écrire

$$\int_{\Omega} k_{\delta_n}^2 |u_n|^2 d\Omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part, puisque K est compact et $u_n \rightharpoonup 0$ dans $H^1(\Omega)$, nous obtenons

$$\langle Ku_n|_{\partial\Omega}, \overline{u_n}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Re[a_n(u_n, u_n)] = 0$ conduit à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$ ce qui contredit $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$. ■

Remarque 26 Dans la preuve du Théorème 24, nous avons eu besoin de la convergence dans L^2 de σ_δ et k_δ . Ceci justifie l'hypothèse (6.11) utilisée pour démontrer (6.15) et (6.16).

Remarque 27 Dans la suite, nous supposerons que les constantes $\tilde{\sigma}_\delta$ et \tilde{k}_δ sont indépendantes de δ . Ce choix permettra de simplifier la présentation de l'analyse asymptotique du problème (6.1).

Chapitre 7

Analyse asymptotique

Ce chapitre est consacré au développement asymptotique de la solution u_δ de (6.1). Nous souhaitons, en outre (Chapitre 8), construire un modèle pour remplacer l'effet de la couche mince par des conditions de transmission approchées. La démarche suivie dans la première partie se prête mutadis mutandis à ce problème. Soit Γ une surface régulière parallèle à $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ divisant Ω_δ en deux couches minces $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ d'épaisseurs respectives $p_1\delta$ et $p_2\delta$ où p_1 et p_2 sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant $p_1 + p_2 = 1$ (Voir figures 7.1 et 1.3).

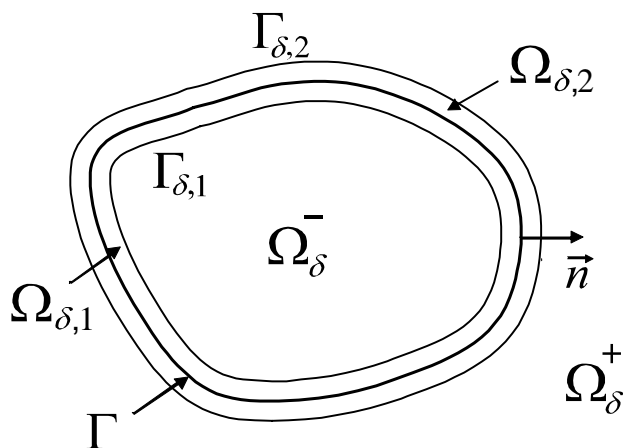


Figure 7.1 – Données géométriques du problème de diffraction avec l'interface Γ

Notant $u_{\text{int},\delta}^1$ et $u_{\text{int},\delta}^2$ les restrictions de $u_{\text{int},\delta}$ sur les domaines $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ respectivement, le problème (6.1) est équivalent au problème de transmission suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \text{ telle que} \\ \text{div}(\sigma^- \nabla u_\delta^-) + k_-^2 u_\delta^- = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta^-, \quad (7.1) \\ \text{div}(\tilde{\sigma}_\delta \nabla u_{\text{int},\delta}^1) + \tilde{k}_\delta^2 u_{\text{int},\delta}^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\delta,1}, \quad (7.2) \\ \text{div}(\tilde{\sigma}_\delta \nabla u_{\text{int},\delta}^2) + \tilde{k}_\delta^2 u_{\text{int},\delta}^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\delta,2}, \quad (7.3) \\ \text{div}(\sigma^+ \nabla u_\delta^+) + k_+^2 u_\delta^+ = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta^+, \quad (7.4) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_\delta^+ - u_{inc}) = 0, \quad (7.5) \end{array} \right.$$

avec les conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- = u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,1}}^1 \quad \text{sur } \Gamma_{\delta,1}, \quad (7.6) \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- = \tilde{\sigma}_\delta \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,1}}^1 \quad \text{sur } \Gamma_{\delta,1}, \quad (7.7) \\ u_{\text{int},\delta|\Gamma}^1 = u_{\text{int},\delta|\Gamma}^2 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (7.8) \\ \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^1 = \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^2 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (7.9) \\ u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,2}}^2 = u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ \quad \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, \quad (7.10) \\ \tilde{\sigma}_\delta \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,2}}^2 = \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ \quad \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, \quad (7.11) \end{array} \right.$$

où $\partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}}$, $\partial_{\mathbf{n}}$ et $\partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}}$ désignent les dérivées dans la direction des vecteurs unitaires normaux \mathbf{n} , $\mathbf{n}_{\delta,1}$ et $\mathbf{n}_{\delta,2}$ à Γ , $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ respectivement (Voir figure 6.1 et 7.1).

Soit v_{int} une fonction dans $H^1(\Omega_\delta)$. Rappelons que v_{int}^β désigne sa restriction au domaines $\Omega_{\delta,\beta}$. Multipliant les équations (7.2) et (7.3) par des fonctions tests v_{int}^1 et v_{int}^2 assez régulières, intégrant sur $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ et utilisant (7.7), (7.7), (7.11) et la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \langle \sigma^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^-, v_{\text{int}|\Gamma_{\delta,1}}^1 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_{\delta,1}) \times H^{1/2}(\Gamma_{\delta,1})} \\ & - \langle \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+, v_{\text{int}|\Gamma_{\delta,2}}^2 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_{\delta,2}) \times H^{1/2}(\Gamma_{\delta,2})} \\ & + \tilde{\sigma}_\delta \int_{\Omega_{\delta,1}} \nabla u_{\text{int},\delta}^1 \cdot \nabla v_{\text{int}}^1 \, d\Omega_{\delta,1} - \tilde{k}_\delta^2 \int_{\Omega_{\delta,1}} u_{\text{int},\delta}^1 v_{\text{int}}^1 \, d\Omega_{\delta,1} \\ & + \tilde{\sigma}_\delta \int_{\Omega_{\delta,2}} \nabla u_{\text{int},\delta}^2 \cdot \nabla v_{\text{int}}^2 \, d\Omega_{\delta,2} - \tilde{k}_\delta^2 \int_{\Omega_{\delta,2}} u_{\text{int},\delta}^2 v_{\text{int}}^2 \, d\Omega_{\delta,2} = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Compte tenu du changement d'échelle dans la couche mince Ω_δ et des formules (2.9) et

(2.10), nous déduisons

$$\begin{aligned}
 & \langle \sigma^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- \circ \Phi_1(m, -1), v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma \times \{-1\}) \times H^{1/2}(\Gamma \times \{-1\})} \\
 & - \langle \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ \circ \Phi_2(m, 1), v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma \times \{1\}) \times H^{1/2}(\Gamma \times \{1\})} \\
 & + \sum_{\beta=1}^2 \left[\delta a_{\delta}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},\delta}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \delta b_{\delta}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},\delta}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

où les formes bilinéaires $a_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ et $b_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ ($\beta = 1, 2$) sont définies par

$$\begin{aligned}
 a_{\delta}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) & := \tilde{\sigma}_{\delta} p_{\beta} \int_{\Omega^{\beta}} J_{\delta,\beta}^{-2} \nabla_{\Gamma} u^{[\beta]} \cdot \nabla_{\Gamma} v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_{\beta} \\
 & + \tilde{\sigma}_{\delta} p_{\beta}^{-1} \delta^{-2} \int_{\Omega^{\beta}} \partial_{s_{\beta}} u^{[\beta]} \partial_{s_{\beta}} v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_{\beta},
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

$\forall u^{[\beta]}, v^{[\beta]} \in H^1(\Omega^{\beta})$ et

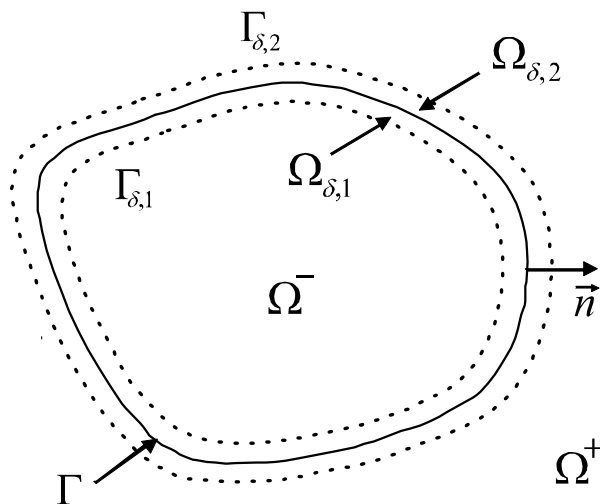
$$b_{\delta}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := -\tilde{k}_{\delta}^2 p_{\beta} \int_{\Omega^{\beta}} u^{[\beta]} v^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_{\beta}, \quad , \quad \forall u^{[\beta]}, v^{[\beta]} \in L^2(\Omega^{\beta}). \tag{7.15}$$

Les résultats classiques de régularité des solutions de problèmes elliptiques (cf. e.g., [3]) assurent que la trace de u_{δ} sur $\Gamma_{\delta,\beta}$ est de classe \mathcal{C}^{∞} . L'équation (7.13) devient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\text{ext},\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- \circ \Phi_1(m, -1) v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \det(I - p_1 \delta \mathcal{R}) \, d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma} \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\text{ext},\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ \circ \Phi_2(m, 1) v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \det(I + p_2 \delta \mathcal{R}) \, d\Gamma \\
 & + \sum_{\beta=1}^2 \left[\delta a_{\delta}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},\delta}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \delta b_{\delta}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},\delta}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

ceci constitue le point de départ de notre analyse asymptotique.

Remarque 28 Afin d'éviter une écriture trop lourde, nous avons inclus, dans la seconde partie de ce mémoire, la constante $\tilde{\sigma}_{\delta}$ dans la définition de $a_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$.


 Figure 7.2 – Le domaine fixe $\Omega^- \cup \Omega^+$

7.1 Hiérarchie d'équations variationnelles

Ici encore, nous considérons deux types de développements asymptotiques. Un externe correspondant au développement de u_δ^\pm et donné par l'ansatz

$$\begin{cases} u_\delta^- = u_0^- + \delta u_1^- + \dots, & \text{dans } \Omega_\delta^-, \\ u_\delta^+ = u_0^+ + \delta u_1^+ + \dots, & \text{dans } \Omega_\delta^+, \end{cases} \quad (7.17)$$

où les termes u_n^\pm ($n \in \mathbb{N}$) sont indépendants de δ , définis sur Ω^\pm (Voir 7.2) et vérifient

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_n^-) + k_-^2 u_n^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_n^+) + k_+^2 u_n^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_n^+ - \delta_{0,n} u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (7.18)$$

et un interne correspondant au développement de $u_{\text{int},\delta}^\beta$ exprimée en coordonnées curvilignes (m, s_β) et donné par

$$u_{\text{int},\delta}^\beta \circ \Phi_\beta := u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} = u_{\text{int},0}^{[\beta]} + \delta u_{\text{int},1}^{[\beta]} + \dots, \quad \text{dans } \Omega^\beta, \quad (7.19)$$

où les termes $u_{\text{int},n}^{[\beta]}$, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendants de δ .

De manière analogue, à celle de la première partie, nous déterminerons une hiérarchie d'équations variationnelles qui nous permettra de calculer les termes des développements

asymptotiques (7.17) et (7.19) à tout ordre. En utilisant le développement de Taylor en la variable normale η_β , nous obtenons

$$\left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^- \right) \circ \Phi_1(m, -1) = u_{0|\Gamma}^- + \delta(u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-) + \cdots, \quad (7.20)$$

$$\left(\sum_{n \geq 0} \delta^n \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{n|\Gamma_{\delta,1}}^- \right) \circ \Phi_1(m, -1) = \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \delta(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^-) + \cdots, \quad (7.21)$$

$$\left(\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+ \right) \circ \Phi_2(m, 1) = u_{0|\Gamma}^+ + \delta(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+) + \cdots, \quad (7.22)$$

$$\left(\sum_{n \geq 0} \delta^n \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{n|\Gamma_{\delta,2}}^+ \right) \circ \Phi_2(m, 1) = \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \delta(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+) + \cdots. \quad (7.23)$$

D'où, les conditions (7.6) et (7.10) deviennent

$$u_{0|\Gamma}^+ + \delta(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+) + \cdots = u_{\text{int},0|s_2=1}^{[2]} + \delta u_{\text{int},1|s_2=1}^{[2]} + \cdots, \quad (7.24)$$

$$u_{0|\Gamma}^- + \delta(u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-) + \cdots = u_{\text{int},0|s_1=-1}^{[1]} + \delta u_{\text{int},1|s_1=-1}^{[1]} + \cdots. \quad (7.25)$$

De (7.8) et (7.19), nous avons

$$u_{\text{int},0|s_1=0}^{[1]} + \delta u_{\text{int},1|s_1=0}^{[1]} + \cdots = u_{\text{int},0|s_2=0}^{[2]} + \delta u_{\text{int},1|s_2=0}^{[2]} + \cdots. \quad (7.26)$$

D'autre part, de (2.8) nous déduisons

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- \circ \Phi_1(m, -1) v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \det(I - p_1 \delta \mathcal{R}) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \sigma^- \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- - 2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) \right. \\ &+ \delta^2 \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{2|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{1|\Gamma}^- + \frac{1}{2} p_1^2 \partial_{\mathbf{n}}^3 u_{0|\Gamma}^- - 2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- \right. \\ &\left. \left. + 2p_1^2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- + p_1^2 \mathcal{K} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) + \cdots \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (7.27)$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ \circ \Phi_2(m, 1) v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \det(I + p_2 \delta \mathcal{R}) \, d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ + 2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) \right. \\
 &+ \delta^2 \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{2|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{1|\Gamma}^+ + \frac{1}{2} p_2^2 \partial_{\mathbf{n}}^3 u_{0|\Gamma}^+ + 2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ \right. \\
 &\left. \left. + 2p_2^2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ + p_2^2 \mathcal{K} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) + \dots \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma. \tag{7.28}
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer un développement de $a_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ et $b_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ en fonction de δ . Un raisonnement similaire à celui du Chapitre 3 conduit à

$$a_{\delta}^{[\beta]}(\cdot, \cdot) = \delta^{-2} a_{0,2}^{[\beta]} + \delta^{-1} a_{1,2}^{[\beta]} + \left(a_{2,2}^{[\beta]} + a_{0,1}^{[\beta]} \right) + \delta a_{1,1}^{[\beta]} + \dots + \delta^{n-1} a_{n-1,1}^{[\beta]} + \delta^n r_n^{[\beta]}(\cdot, \cdot), \tag{7.29}$$

où les formes bilinéaires $a_{k,l}^{[\beta]}$ sont indépendantes de δ et sont données par

$$a_{0,2}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^{\beta}} p_{\beta}^{-1} \tilde{\sigma}_{\delta} \partial_{s_{\beta}} u^{[\beta]} \partial_{s_{\beta}} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta}, \tag{7.30}$$

$$a_{1,2}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^{\beta}} 2\tilde{\sigma}_{\delta} \mathcal{H} s_{\beta} \partial_{s_{\beta}} u^{[\beta]} \partial_{s_{\beta}} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta}, \tag{7.31}$$

$$a_{2,2}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^{\beta}} p_{\beta} \tilde{\sigma}_{\delta} \mathcal{K} s_{\beta}^2 \partial_{s_{\beta}} u^{[\beta]} \partial_{s_{\beta}} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta}, \tag{7.32}$$

$$a_{0,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^{\beta}} p_{\beta} \tilde{\sigma}_{\delta} \nabla_{\Gamma} u^{[\beta]} \cdot \nabla_{\Gamma} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta}, \tag{7.33}$$

$$a_{1,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^{\beta}} 2p_{\beta}^2 \tilde{\sigma}_{\delta} s_{\beta} (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u^{[\beta]} \cdot \nabla_{\Gamma} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta}, \tag{7.34}$$

$$a_{2,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^{\beta}} p_{\beta}^3 \tilde{\sigma}_{\delta} (\mathcal{K}I - 4\mathcal{H}\mathcal{R} + 3\mathcal{R}^2) s_{\beta}^2 \nabla_{\Gamma} u^{[\beta]} \cdot \nabla_{\Gamma} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta}, \tag{7.35}$$

$$\begin{aligned}
 a_{n-1,1}^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := & \int_{\Omega^{\beta}} p_{\beta}^n \tilde{\sigma}_{\delta} \left[(n-2) \mathcal{K}\mathcal{R}^{n-3} - (n-1) 2\mathcal{H}\mathcal{R}^{n-2} \right. \\
 & \left. + n\mathcal{R}^{n-1} \right] (-s_{\beta})^{n-1} \nabla_{\Gamma} u^{[\beta]} \cdot \nabla_{\Gamma} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta}, \quad n > 3. \tag{7.36}
 \end{aligned}$$

La forme bilinéaire $r_n^{[\beta]}(\delta; \cdot, \cdot)$ est le reste du développement (7.29) et est donnée par

$$r_n^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^{\beta}} \tilde{\sigma}_{\delta} (B_{n,\delta} + 2\mathcal{H}B_{n-1,\delta} + \mathcal{K}B_{n-2,\delta}) s_{\beta}^n \nabla_{\Gamma} u^{[\beta]} \cdot \nabla_{\Gamma} v^{[\beta]} \, d\Gamma ds_{\beta},$$

avec

$$B_{n,\delta} := \begin{cases} (-\mathcal{R})^n (nJ_{\delta,\beta}^{-1} + J_{\delta,\beta}^{-2}) & \text{si } n \geq 0, \\ J_{\delta,\beta}^{-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La forme $b_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ admet le développement

$$b_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot) = b_0^{[\beta]}(\cdot, \cdot) + \delta b_1^{[\beta]}(\cdot, \cdot) + \delta^2 b_2^{[\beta]}(\cdot, \cdot), \quad (7.37)$$

où

$$b_0^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^\beta} -p_\beta \tilde{k}_\delta^2 u^{[\beta]} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \quad (7.38)$$

$$b_1^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^\beta} -p_\beta^2 \tilde{k}_\delta^2 2s_\beta \mathcal{H} u^{[\beta]} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta, \quad (7.39)$$

$$b_2^{[\beta]}(u^{[\beta]}, v^{[\beta]}) := \int_{\Omega^\beta} -p_\beta^3 \tilde{k}_\delta^2 s_\beta^2 \mathcal{K} u^{[\beta]} v^{[\beta]} d\Gamma ds_\beta. \quad (7.40)$$

Enfin, en reportant dans (7.16) les expressions (7.19), (7.27)-(7.29) et (7.37), nous obtenons, par identification des termes de même puissance en δ , les équations

$$a_{0,2}^{[1]}(u_{\text{int},0}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]}) + a_{0,2}^{[2]}(u_{\text{int},0}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]}) = 0, \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) d\Gamma + \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{1,2}^{[\beta]}(u_{\text{int},0}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]}) + a_{0,2}^{[\beta]}(u_{\text{int},1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]}) \right] \\ & - \int_{\Gamma} \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (7.42)$$

pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[\beta]}$ dans $H^1(I_\beta; L^2(\Gamma))$ telle que $v_{\text{int}}^{[1]}(\cdot, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(\cdot, 0)$, et

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) d\Gamma \\ & + \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{1,2}^{[\beta]}(u_{\text{int},1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]}) + (a_{2,2}^{[\beta]} + a_{0,1}^{[\beta]} + b_0^{[\beta]})(u_{\text{int},0}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]}) + a_{0,2}^{[\beta]}(u_{\text{int},2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]}) \right] \\ & - \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \sigma^- \left[p_1^2 \mathcal{K} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - 2p_1 \mathcal{H} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right) + \partial_{\mathbf{n}} u_{2|\Gamma}^- \right. \\
 & - \left. p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{1|\Gamma}^- + \frac{p_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_{0|\Gamma}^- \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma + \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{0,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},3}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right. \\
 & + \left. a_{1,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \left(a_{2,2}^{[\beta]} + a_{0,1}^{[\beta]} + b_0^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{1,1}^{[\beta]} + b_1^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] \\
 & - \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[p_2^2 \mathcal{K} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + 2p_2 \mathcal{H} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) + \partial_{\mathbf{n}} u_{2|\Gamma}^+ \right. \\
 & + \left. p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{1|\Gamma}^+ + \frac{p_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0, \tag{7.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \sigma^- \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^- + \dots \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma + \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{0,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},n+1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + a_{1,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},n}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right. \\
 & + \left(a_{0,1}^{[\beta]} + b_0^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},n-1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{1,1}^{[\beta]} + b_1^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},n-2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{2,1}^{[\beta]} + b_2^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},n-3}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \\
 & + \left. \sum_{l=4}^n a_{l-1,1}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},n-l}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] - \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^+ + \dots \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0, \quad n \geq 4, \tag{7.45}
 \end{aligned}$$

pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[\beta]}$ dans $H^1(\Gamma \times I_{\beta})$ telle que $v_{\text{int}}^{[1]}(\cdot, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(\cdot, 0)$.

Remarque 29 *A la différence de la première partie, le second membre de (7.16) est nul. Ceci nous a amené à utiliser directement (7.16) sans passer par des relations de type (3.11) et (3.12).*

7.2 Calcul des premiers termes

Nous nous proposons dans ce paragraphe de déterminer les deux premiers termes des développements (7.17) et (7.19). Par ailleurs, vu la similitude avec le § 3.2, nous nous contentons, dans les sous-paragraphe 7.2.1 et 7.2.2, d'énoncer les résultats sans démonstration. Aussi, à l'instar de la première partie, nous commencerons par un théorème justifiant l'existence, l'unicité et la régularité des termes des développements asymptotiques.

Introduisant l'espace fonctionnel $H_{loc}^1(\overline{\Omega}^+)$ défini par (cf. [54])

$$H_{loc}^1(\overline{\Omega}^+) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega^+) \mid u \in H^1(\Omega^+ \cap K) \text{ pour tout compact } K \subset \mathbb{R}^3 \right\},$$

et rappelant que $\tilde{\Omega}^+ := \Omega \setminus \overline{\Omega}^-$ où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 contenant Ω^- (voir 6.4),

nous avons le

Théorème 30 *Si $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ et $\zeta \in H^{-1/2}(\Gamma)$, alors le problème*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla U^-) + k_-^2 U^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla U^+) + k_+^2 U^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ U^-_{|\Gamma} - U^+_{|\Gamma} = h & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} U^-_{|\Gamma} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} U^+_{|\Gamma} = \zeta & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) U^+ = 0, & \end{cases} \quad (7.46)$$

admet une solution unique (U^-, U^+) in $H^1(\Omega^-) \times H^1_{loc}(\overline{\Omega^+})$. De plus, pour tout entier $k \geq 1$, si $h \in H^{k-1/2}(\Gamma)$, $\zeta \in H^{k-3/2}(\Gamma)$ et $\Gamma \cup \partial\Omega$ est \mathcal{C}^k -continue, alors il existe une constante c_k telle que

$$\|U^-\|_{H^k(\Omega^-)} + \|U^+\|_{H^k(\tilde{\Omega}^+)} \leq c_k \left(\|h\|_{H^{k-1/2}(\Gamma)} + \|\zeta\|_{H^{k-3/2}(\Gamma)} \right). \quad (7.47)$$

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution (U^-, U^+) de (7.46) sont obtenues par des arguments, similaires à ceux utilisés dans la preuve des théorèmes 22 et 23, basés sur l'alternative de Fredholm sous sa forme variationnelle (voir Corollaire 61) et sur le lemme de Rellich. La régularité de la solution (U^-, U^+) ainsi que l'estimation (7.47) découlent de la même manière que celle de la démonstration du Théorème 9 en utilisant le Théorème 53. ■

7.2.1 Termes d'ordre 0

Rappelant que σ_0 et k_0 sont deux fonctions régulières par morceaux définies par

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} \sigma^+ & \text{si } x \in \Omega^+, \\ \sigma^- & \text{si } x \in \Omega^-, \end{cases} ; k_0^2(x) = \begin{cases} k_+^2 & \text{si } x \in \Omega^+, \\ k_-^2 & \text{si } x \in \Omega^-, \end{cases}$$

et posant

$$u_n = \begin{cases} u_n^- & \text{dans } \Omega^-, \\ u_n^+ & \text{dans } \Omega^+, \end{cases}$$

le terme d'ordre 0 du développement externe (7.17) vérifie le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_0 \nabla u_0) + k_0^2 u_0 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_0 - u_{inc}) = 0. & \end{cases} \quad (7.48)$$

A partir duquel, nous définissons le premier terme du développement interne (7.19) donné par

$$u_{\text{int},0}^{[\beta]}(m, s_\beta) = u_{0|\Gamma}^- = u_{0|\Gamma}^+, \quad \forall (m, s_\beta) \in \Omega^\beta. \quad (7.49)$$

Notons que u_0 n'est rien d'autre que la solution du problème initial sans la couche mince.

7.2.2 Termes d'ordre 1

Le terme d'ordre 1 du champ lointain est obtenu en résolvant le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_1^-) + k_-^2 u_1^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_1^+) + k_+^2 u_1^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) u_1^+ = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur l'interface Γ

$$u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ = p_1(1 - \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta^{-1}) \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_2(1 - \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta^{-1}) \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+, \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ &= p_1(\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- + p_2(\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^+) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ \\ &+ p_1(\tilde{k}_\delta^2 - k_-^2) u_{0|\Gamma}^- + p_2(\tilde{k}_\delta^2 - k_+^2) u_{0|\Gamma}^+. \end{aligned} \quad (7.51)$$

et le terme d'ordre 1 du champ proche, quant à lui, est donné par

$$u_{\text{int},1}^{[1]}(m, s_1) = u_{1|\Gamma}^- + p_1[(s_1 + 1)\sigma^- \tilde{\sigma}_\delta^{-1} - 1] \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-, \quad \forall (m, s_1) \in \Omega^1,$$

et

$$u_{\text{int},1}^{[2]}(m, s_2) = u_{1|\Gamma}^+ + p_2[(s_2 - 1)\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta^{-1} + 1] \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+, \quad \forall (m, s_2) \in \Omega^2.$$

Remarque 31 Pour obtenir les conditions de transmission (7.50) et (7.51), nous avons fait appel à l'identité [38, p. 75]

$$\Delta u = \Delta_\Gamma u + 2\mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u + \partial_{\mathbf{n}}^2 u.$$

Remarque 32 Dans le chapitre suivant, nous utiliserons les conditions (7.50) et (7.51)

sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ &= \frac{p_1\sigma^+\tilde{\sigma}_\delta + p_2\sigma^-\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-\sigma^+}{2\sigma^-\sigma^+\tilde{\sigma}_\delta} \left(\sigma^-\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^- + \sigma^+\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^+ \right), \\ \sigma^-\partial_{\mathbf{n}}u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+\partial_{\mathbf{n}}u_{1|\Gamma}^+ &= \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\delta - p_1\sigma^- - p_2\sigma^+) \left(\Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- + \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\tilde{k}_\delta^2 - p_1k_-^2 - p_2k_+^2 \right) \left(u_{0|\Gamma}^- + u_{0|\Gamma}^+ \right), \end{aligned}$$

qui est mieux adaptée pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème approché.

7.3 Justification du développement asymptotique

Dans ce paragraphe, nous établissons une estimation de l'erreur commise en tronquant les séries (7.17) et (7.19) à un nombre fini de termes. Par ailleurs, et afin d'éviter les redondances, nous laisserons au lecteur le soin de démontrer l'existence et l'unicité des suites (u_j^\pm) et $(u_{\text{int},j}^{[\beta]})$, $j \in \mathbb{N}$. La démonstration est similaire à celle du Théorème 13.

Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $\tilde{\Omega}_\delta^+ = \tilde{\Omega}^+ \setminus \overline{\Omega_{\delta,2}}$,

$$u_\delta^{-,(n)} := \sum_{j=0}^n \delta^j u_j^-, \quad u_\delta^{+,(n)} := \sum_{j=0}^n \delta^j u_j^+ \quad \text{et} \quad u_{\text{int},\delta}^{(n)} := \sum_{j=0}^n \delta^j u_{\text{int},j}, \quad (7.52)$$

où $u_{\text{int},j|\Omega_{\delta,\beta}}(x) := u_{\text{int},j}^\beta(x) := u_{\text{int},j}^\beta(m, \delta s_\beta) := u_{\text{int},j}^{[\beta]}(m, s_\beta)$, $\forall x = \Phi_\beta(m, s_\beta) \in \Omega_{\delta,\beta}$.

Théorème 33 (de convergence) *Pour tout entier positif n , il existe une constante c indépendante de δ , telle que*

$$\left\| u_\delta^- - u_\delta^{-,(n)} \right\|_{H^1(\Omega_\delta^-)} + \delta^{1/2} \left\| u_{\text{int},\delta} - u_{\text{int},\delta}^{(n)} \right\|_{H^1(\Omega_\delta)} + \left\| u_\delta^+ - u_\delta^{+,(n)} \right\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\delta^+)} \leq c\delta^{n+1}.$$

Preuve. Rappelons que $r_\delta^{-,n}$, $r_\delta^{+,n}$ et $r_{\text{int},\delta}^n$ sont les restes d'ordres n définis comme la différence entre les solutions exactes u_δ^- , u_δ^+ , $u_{\text{int},\delta}$ et les séries tronquées (7.52) et $a_\delta(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire défini sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ par

$$a_\delta(u, v) := \int_\Omega \sigma_\delta \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k_\delta^2 u \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle Tu|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Nous introduisons r_δ^n , le reste d'ordre n , défini sur Ω par

$$r_{\delta|\Omega_\delta^\pm}^n := r_\delta^{\pm,n} := u_\delta^\pm - u_\delta^{\pm,(n)}, \quad r_{\delta|\Omega_\delta}^n := r_{\text{int},\delta}^n := u_{\text{int},\delta} - u_{\text{int},\delta}^{(n)}.$$

En suivant une démarche similaire à celle de la démonstration du Théorème 17, nous aboutissons à

$$|a_\delta (r_\delta^n - \mathcal{P}R_\delta^n \chi_{\Omega_\delta}, v)| \leq c\delta^{n+1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où $\mathcal{P}R_\delta^n$ est le relèvement de $R_{\delta,\beta|\Gamma_{\delta,\beta}}^n$ sur Ω_δ (voir Proposition 15). Compte tenu du Théorème 25 (de Stabilité), nous obtenons

$$\|r_\delta^{-,n}\|_{H^1(\Omega_\delta^-)} + \|r_{\text{int},\delta}^n - \mathcal{P}R\|_{H^1(\Omega_\delta)} + \|r_\delta^{+,n}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\delta^+)} \leq c\delta^{n+1/2}.$$

Le Théorème 33 s'en déduit. ■

Chapitre 8

Conditions de transmission approchées

Dans ce paragraphe, nous chercherons à construire un modèle approché dont la solution U_δ^{ap} est une approximation du champ lointain (c'est-à-dire, une approximation de la solution u_δ en dehors de la couche mince) et à partir duquel nous déduisons une approximation de u_δ sur \mathbb{R}^3 tout entier avec un taux de convergence en $O(\delta^2)$. Comme dans la première partie, nous commencerons par introduire le problème vérifié par le développement asymptotique tronqué $\sum_{k=0}^1 \delta^k u_j^\pm$ et négliger ensuite tous les termes d'ordre 2 en δ . L'originalité de cette partie par rapport à la précédente consiste en le choix de la position de la surface Γ . En effet, nous montrerons que, dans ce cas, nous pouvons déterminer un nombre infini de position de Γ permettant de démontrer l'existence et l'unicité de la solution U_δ^{ap} ; contrairement à la première partie où l'existence et l'unicité de la solution étaient conditionnées par une seule position de la surface Γ et par l'alternative de Fredholm.

Tronquant les séries définissant les développements asymptotiques en ne conservant que les deux premiers termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} u_\delta^+ &\simeq u_\delta^{+, (1)} := u_0^+ + \delta u_1^+ \quad \text{dans } \Omega_\delta^+, \\ u_\delta^- &\simeq u_\delta^{-, (1)} := u_0^- + \delta u_1^- \quad \text{dans } \Omega_\delta^-, \\ u_{\text{int}, \delta} &\simeq u_{\text{int}, \delta}^{(1)} := u_{\text{int}, 0} + \delta u_{\text{int}, 1} \quad \text{dans } \Omega_\delta, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
 u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,1}}^{(1)}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{1,(1)}(x) := u_{\text{int},\delta}^{1,(1)}(m, \delta s_1) := u_{\text{int},\delta}^{[1],(1)}(m, s_1) \\
 &= u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(u_{1|\Gamma}^- + p_1 [(s_1 + 1)\sigma^- \tilde{\sigma}_\delta^{-1} - 1] \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right), \\
 \forall x &= \Phi_1(m, s_1) \in \Omega_{\delta,1},
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,2}}^{(1)}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{2,(1)}(x) := u_{\text{int},\delta}^{2,(1)}(m, \delta s_2) := u_{\text{int},\delta}^{[2],(1)}(m, s_2) \\
 &= u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 [(s_2 - 1)\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta^{-1} + 1] \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right), \\
 \forall x &= \Phi_2(m, s_2) \in \Omega_{\delta,2}.
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Le développement asymptotique tronqué du champ lointain $(u_\delta^{-,(1)}, u_\delta^{+,(1)})$ résout le problème suivant

$$\begin{cases}
 \operatorname{div} \left(\sigma^- \nabla u_\delta^{-,(1)} \right) + k_-^2 u_\delta^{-,(1)} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\
 \operatorname{div} \left(\sigma^+ \nabla u_\delta^{+,(1)} \right) + k_+^2 u_\delta^{+,(1)} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\
 u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \delta \mathcal{A} \left(u_\delta^{-,(1)}, u_\delta^{+,(1)} \right) - \delta^2 \xi_\delta & \text{sur } \Gamma, \\
 \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \delta \mathcal{B} \left(u_\delta^{-,(1)}, u_\delta^{+,(1)} \right) - \delta^2 \rho_\delta & \text{sur } \Gamma, \\
 \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left(\partial_{|x|} - ik_+ \right) \left(u_\delta^{+,(1)} - u_{\text{inc}} \right) = 0,
 \end{cases} \tag{8.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(u, v) &:= \frac{p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+}{2\sigma^- \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta} \left(\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{|\Gamma} + \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} v_{|\Gamma} \right), \\
 \mathcal{B}(u, v) &:= \frac{1}{2} \left(\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+ \right) \left(\Delta_\Gamma u_{|\Gamma} + \Delta_\Gamma v_{|\Gamma} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2 \right) \left(u_{|\Gamma} + v_{|\Gamma} \right), \\
 \xi_\delta &:= \frac{p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+}{2\sigma^- \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta} \left(\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- + \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ \right), \\
 \rho_\delta &:= \frac{1}{2} \left(\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+ \right) \left(\Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^- + \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^+ \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2 \right) \left(u_{1|\Gamma}^- + u_{1|\Gamma}^+ \right).
 \end{aligned}$$

Une approximation de la solution en dehors de la couche mince est alors donnée par

$$U_\delta^{ap} := \begin{cases} u_\delta^{+,ap} & \text{dans } \Omega^+, \\ u_\delta^{-,ap} & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

où U_δ^{ap} est solution de (8.3) en négligeant tous les termes en $O(\delta^2)$. Nous obtenons, comme dans la première partie, un problème noté $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ défini par

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_\delta^{-,ap}) + k_-^2 u_\delta^{-,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_\delta^{+,ap}) + k_+^2 u_\delta^{+,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_\delta^{+,ap} - u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (8.4)$$

avec des conditions de transmission de type Ventcel sur la surface Γ

$$\begin{cases} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \frac{p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+}{2\sigma^- \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta} \left(\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \right), \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+) \left(\Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \right) \\ \quad + \delta \frac{1}{2} \left(\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2 \right) \left(u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \right). \end{cases} \quad (8.5)$$

8.1 Existence et unicité

Nous donnerons, dans ce paragraphe, un résultat d'existence et d'unicité de la solution de $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$. Nous étudierons séparément deux cas ; nous commencerons par le cas général $p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+ \neq 0$ et nous terminerons par le cas particulier $p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+ = 0$.

1^{er} cas : $p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+ \neq 0$

Pour démontrer l'unicité de la solution U_δ^{ap} , nous introduisons l'opérateur de DtN T^- défini de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ par $T^- \varphi := \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^-$, où u^- est solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^- \in H^1(\Omega^-), \\ \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u^-) + k_-^2 u^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u_{\delta|\Gamma}^- = \varphi & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.7)$$

L'opérateur T^- est pseudo-différentiel d'ordre 1 (cf. e.g., [7, 49]), il est, par conséquent, linéaire continu de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s-1}(\Gamma)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ (voir Théorème 76).

Remarque 34 *Il est bien connu (cf. [38]) que la fonction u^- n'est définie de manière unique que si la constante k_-^2/σ^- n'est pas valeur propre de l'opérateur $(-\Delta, H_0^1(\Omega^-))$. Mais comme le spectre de cet opérateur est réel discret, nous ferons par conséquent l'hypothèse que le problème (8.7) est bien posé.*

Dans le cas où Ω^- est la boule unité de frontière S , la solution du problème de Dirichlet (8.7) est donnée, en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, ϑ) , par (cf. [38]) :

$$u^-(r, \theta, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_l^m \frac{j_l\left(\frac{k_-}{\sqrt{\sigma^-}} r\right)}{j_l\left(\frac{k_-}{\sqrt{\sigma^-}}\right)} Y_l^m(\theta, \vartheta),$$

où $j_l, l \in \mathbb{N}$, sont les fonctions de Bessel sphériques usuelles,

$$u_l^m = \int_S \varphi(\theta, \vartheta) Y_l^m(\theta, \vartheta) dS$$

et $Y_l^m, -l \leq m \leq l$, sont les harmoniques sphériques. Il est clair que u^- n'est définie que si $\frac{k_-}{\sqrt{\sigma^-}}$ n'est pas un zéro d'une des fonctions de Bessel sphériques. Cette racine induit d'ailleurs exactement la valeur propre du Laplacien $-k_-^2/\sigma^-$ avec condition de Dirichlet sur la sphère unité, de multiplicité $2l + 1$, dont les fonctions propres sont $j_l\left(\frac{k_-}{\sqrt{\sigma^-}} r\right) Y_l^m(\theta, \vartheta), m = -l$ à l .

Théorème 35 *Sous les hypothèses*

$$\Im\left(\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2\right) \geq 0, \quad (8.8)$$

$$\lambda_{\delta,1} := \frac{1}{\delta} \frac{2\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta \sigma^-}{p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+} \notin \sigma(T^-), \quad (8.9)$$

le problème $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ admet au plus une solution.

Preuve. Considérons le problème homogène associé à $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_\delta^{-,ap}) + k_-^2 u_\delta^{-,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_\delta^{+,ap}) + k_+^2 u_\delta^{+,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) u_\delta^{+,ap} = 0, \end{cases} \quad (8.10)$$

$$(8.11)$$

avec les conditions de transmission sur la surface Γ

$$\begin{cases} u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} - u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap} = \delta \frac{p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+}{2\sigma^- \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta} \left(\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} + \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap} \right), \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap} = \delta \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+) \left(\Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} + \Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap} \right) \\ \quad + \delta \frac{1}{2} \left(\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2 \right) \left(u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} + u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap} \right). \end{cases} \quad (8.12)$$

Les résultats classiques sur la régularité des systèmes elliptiques (cf. [3]) montrent que $u_\delta^{\pm,ap} \in C^\infty(\overline{\Omega^\pm})$. Soient B_R la boule de centre O et de rayon R assez grand pour enclure Ω^- et Ω_R le domaine de \mathbb{R}^3 défini par $\Omega_R := B_R \cap \Omega^+$. Multipliant les équations (8.10) et (8.11) par $\overline{u_\delta^-,{}^{ap}}$ et $\overline{u_\delta^+,{}^{ap}}$ respectivement, intégrant sur B_R et utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sigma^- \int_{\Omega^-} |\nabla u_\delta^-,{}^{ap}|^2 d\Omega^- - k_-^2 \int_{\Omega^-} |u_\delta^-,{}^{ap}|^2 d\Omega^- + \sigma^+ \int_{\Omega_R} |\nabla u_\delta^+,{}^{ap}|^2 d\Omega_R \\ & - k_+^2 \int_{\Omega_R} |u_\delta^+,{}^{ap}|^2 d\Omega_R + \gamma_1 \int_\Gamma \left(|u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap}|^2 + |u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap}|^2 \right) d\Gamma \\ & + \delta \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+) \int_\Gamma |\nabla_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} + \nabla_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap}|^2 d\Gamma \\ & + 2\gamma_2 \int_\Gamma \Re \left(u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} \overline{u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap}} \right) d\Gamma = \sigma^+ \int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+,{}^{ap} \overline{u_{\delta|S_R}^+,{}^{ap}} dS_R, \end{aligned} \quad (8.13)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1 & := -\frac{\sigma^- \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta}{\delta (p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+)} - \delta \frac{\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2}{4}, \\ \gamma_2 & := \frac{\sigma^- \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta}{\delta (p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+)} - \delta \frac{\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2}{4}, \end{aligned}$$

et S_R désigne la sphère de centre O et de rayon R . D'où, en prenant la partie imaginaire de (8.13) et en utilisant (8.8), nous avons

$$\Im \left(\int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^+,{}^{ap} \overline{u_{\delta|S_R}^+,{}^{ap}} dS_R \right) \leq 0. \quad (8.14)$$

A l'aide de la démonstration calquée sur celle du Théorème 22, nous déduisons

$$u_\delta^+,{}^{ap} = 0 \text{ sur } \Omega^+.$$

Le problème (8.11)-(8.12) se réduit donc à trouver $u_\delta^{-,ap}$ vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_\delta^{-,ap}) + k_-^2 u_\delta^{-,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} = \delta \frac{p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+}{2\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta} \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} = \delta \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+) \Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \\ + \delta \frac{1}{2} (\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2) u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.15)$$

L'équation

$$u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} = \delta \frac{p_1 \sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta + p_2 \sigma^- \tilde{\sigma}_\delta - \sigma^- \sigma^+}{2\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta} \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap},$$

implique

$$(T^- - \lambda_{\delta,1} I) \varphi^- = 0,$$

où φ^- est la trace de $u_\delta^{-,ap}$ sur la surface Γ . Compte tenu de (8.9), il découle que $u_\delta^{-,ap} = 0$ sur Γ . Par conséquent, $u_\delta^{-,ap} = 0$ sur Ω^- . ■

Pour montrer l'existence de la solution $(u_\delta^{-,ap}, u_\delta^{+,ap})$, nous introduisons l'opérateur de DtN T^+ défini de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ par $T^+ \psi := -\sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_\Gamma^+$, où u^+ est la solution de

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^+ \in H_{loc}^1(\overline{\Omega^+}), \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u^+) + k_+^2 u^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u_\Gamma^+ = \psi & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) u^+ = 0. \end{cases}$$

L'opérateur T^+ est aussi pseudo-différentiel d'ordre 1 (cf. e.g., [7, 49]). Le problème $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ est alors équivalent au système

$$\begin{cases} (T^- - \lambda_{\delta,1} I) \omega - (T^+ - \lambda_{\delta,1} I) \varkappa = g & (8.16) \\ T^- \omega + T^+ \varkappa - \delta \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+) (\Delta_\Gamma \omega + \Delta_\Gamma \varkappa) \\ - \delta \frac{1}{2} (\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2) (\omega + \varkappa) = -g, & (8.17) \end{cases}$$

où

$$g := -\sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{inc|\Gamma} - T^+ u_{inc|\Gamma} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma),$$

ω et \varkappa désignent respectivement la trace de $u_\delta^{-,ap}$ et de $u_\delta^{+,ap}$ sur la surface Γ . Compte tenu de (8.9), $T^- - \lambda_{\delta,1}I$ est inversible. Posons

$$K_\delta := (T^- - \lambda_{\delta,1}I)^{-1}. \quad (8.18)$$

Evidemment, K_δ est un O Ψ D d'ordre -1 . D'où, de (8.16), nous déduisons

$$\omega = K_\delta (T^+ - \lambda_{\delta,1}I) \varkappa + K_\delta g.$$

Ainsi, le système (8.16)-(8.17) est équivalent à l'équation au bord

$$A_\delta \varkappa := B_\delta \varkappa - \lambda_{\delta,2} \Delta_\Gamma K_\delta (T^+ + T^- - 2\lambda_{\delta,1}I) \varkappa = \theta,$$

où

$$\lambda_{\delta,2} := \delta \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+),$$

$$\theta := -g - T^- K_\delta g + \lambda_{\delta,2} \Delta_\Gamma K_\delta g + \lambda_{\delta,3} K_\delta g,$$

$$B_\delta := T^- K_\delta T^+ - \lambda_{\delta,1} T^- K_\delta + T^+ - \lambda_{\delta,3} K_\delta T^+ + \lambda_{\delta,3} \lambda_{\delta,1} K_\delta - \lambda_{\delta,3} I,$$

$$\lambda_{\delta,3} := \delta \frac{1}{2} (\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2).$$

Pour établir un résultat d'existence de la solution, démontrons la proposition suivante.

Proposition 36 *Pour tout entier k dans \mathbb{N} , l'opérateur A_δ défini de $H^{k+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{k-3/2}(\Gamma)$ est de Fredholm¹ d'indice 0.*

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme T^- et T^+ sont des O Ψ D d'ordre 1, ils envoient donc $H^k(\Gamma)$ dans $H^{k-1}(\Gamma)$. Par ailleurs, K_δ est aussi un O Ψ D d'ordre -1 , il envoie $H^k(\Gamma)$ dans $H^{k+1}(\Gamma)$. Par conséquent B_δ envoie $H^k(\Gamma)$ dans $H^{k-1}(\Gamma)$. Or l'injection de $H^{k-1}(\Gamma)$ dans $H^{k-2}(\Gamma)$ est compacte, il en découle que l'opérateur A_δ défini de $H^{k+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{k-3/2}(\Gamma)$ est une perturbation compacte de $\lambda_{\delta,2} \Delta_\Gamma K_\delta (T^+ + T^- - 2\lambda_{\delta,1}I)$. Ainsi, puisque Δ_Γ est de Fredholm d'indice 0, il découle, compte tenu de la Proposition 60, que pour montrer que A_δ est d'indice 0, il suffit de montrer que $T^+ + T^- - 2\lambda_{\delta,1}I$ est inversible.

Soit l'équation

$$(T^+ + T^- - 2\lambda_{\delta,1}I) \varphi = \psi, \quad \psi \in H^{k-1/2}(\Gamma), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8.19)$$

¹Voir Annexe B

Utilisant la définition des opérateurs T^+ et T^- , l'équation (8.19) est équivalente au problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla V^-) + k_-^2 V^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla V^+) + k_+^2 V^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ V_{|\Gamma}^- - V_{|\Gamma}^+ = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} V_{|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} V_{|\Gamma}^+ = 2\lambda_{\delta,1} V_{|\Gamma}^- + \psi & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) V^+ = 0, \end{cases} \quad (8.20)$$

où $\varphi = V_{|\Gamma}^- = V_{|\Gamma}^+$. Une démonstration similaire à celle des Théorèmes 22, 24 et 30 montre que, pour tout k dans \mathbb{N} , si $\psi \in H^{k-1/2}(\Gamma)$, alors le problème (8.20) admet une unique solution (V^-, V^+) dans $H^{k+1}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k+1}(\overline{\Omega^+})$ et donc une unique trace $\varphi \in H^{k+1/2}(\Gamma)$. Par conséquent, l'opérateur $T^+ + T^- - 2\lambda_{\delta,1}I$, défini de $H^{k+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{k-1/2}(\Gamma)$, est inversible, il est donc de Fredholm d'indice 0. Comme les opérateurs Δ_Γ et K_δ sont de Fredholm d'indice 0, l'opérateur $\lambda_{\delta,2}\Delta_\Gamma K_\delta(T^+ + T^- - 2\lambda_{\delta,1}I)$ défini de $H^{k+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{k-3/2}(\Gamma)$ est lui même de Fredholm d'indice 0. Par conséquent A_δ , étant une perturbation compacte de $\lambda_{\delta,2}\Delta_\Gamma K_\delta(T^+ + T^- - 2\lambda_{\delta,1}I)$, est aussi de Fredholm d'indice 0. ■

Théorème 37 *Sous les hypothèses du Théorème 35, le problème $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ admet une unique solution $(u_\delta^{-,ap}, u_\delta^{+,ap})$ dans $H^{k+1}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k+1}(\overline{\Omega^+})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Preuve. En vertu de la Proposition 36, l'unicité de la solution de $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ implique son existence. Ainsi, du Théorème 35, nous déduisons, que pour tout k dans \mathbb{N} , il existe une unique solution $(u_\delta^{-,ap}, u_\delta^{+,ap})$ dans $H^{k+1}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k+1}(\overline{\Omega^+})$. ■

2^{ème} cas : $p_1\sigma^+\tilde{\sigma}_\delta + p_2\sigma^-\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-\sigma^+ = 0$

Dans le cas où les constantes positives σ^+ , $\tilde{\sigma}_\delta$ et σ^- vérifient $\sigma^- < \tilde{\sigma}_\delta < \sigma^+$ ou $\sigma^+ < \tilde{\sigma}_\delta < \sigma^-$, nous pouvons, comme dans la première partie, choisir p_1 et p_2 de sorte que la solution de $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ soit continue à travers la surface Γ . En effet, en posant dans (8.5)

$$p_1\sigma^+\tilde{\sigma}_\delta + p_2\sigma^-\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-\sigma^+ = 0,$$

nous obtenons

$$p_1 = \frac{\sigma^-(\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta)}{\tilde{\sigma}_\delta(\sigma^+ - \sigma^-)} \text{ et } p_2 = \frac{\sigma^+(\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-)}{\tilde{\sigma}_\delta(\sigma^+ - \sigma^-)}.$$

Ceci est valable uniquement si $\sigma^- < \tilde{\sigma}_\delta < \sigma^+$ ou $\sigma^+ < \tilde{\sigma}_\delta < \sigma^-$. Les conditions de transmission (8.5) et (8.6) deviennent

$$\begin{cases} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = 0, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta \frac{(\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta)(\sigma^- - \tilde{\sigma}_\delta)}{\tilde{\sigma}_\delta} \Delta_\Gamma u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \\ + \delta \frac{\tilde{\sigma}_\delta \tilde{k}_\delta^2 (\sigma^+ - \sigma^-) - \sigma^- k_-^2 (\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta) - \sigma^+ k_+^2 (\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-)}{\tilde{\sigma}_\delta (\sigma^+ - \sigma^-)} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}. \end{cases}$$

Compte tenu de la définition des opérateurs de DtN T^- et T^+ , le problème $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ est équivalent alors à l'équation au bord

$$\begin{aligned} A_\delta \omega &:= -\Delta_\Gamma \omega + \frac{\tilde{\sigma}_\delta \sigma^-}{\delta (\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta) (\sigma^- - \tilde{\sigma}_\delta)} T^- \omega + \frac{\tilde{\sigma}_\delta \sigma^+}{\delta (\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta) (\sigma^- - \tilde{\sigma}_\delta)} T^+ \omega \\ &+ \frac{\sigma^- k_-^2 (\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta) + \sigma^+ k_+^2 (\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-) - \tilde{\sigma}_\delta \tilde{k}_\delta^2 (\sigma^+ - \sigma^-)}{(\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta) (\sigma^- - \tilde{\sigma}_\delta) (\sigma^+ - \sigma^-)} \omega \\ &= \frac{\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta}{\delta (\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta) (\sigma^- - \tilde{\sigma}_\delta)} \partial_{\mathbf{n}} u_{inc|\Gamma} + \frac{\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta}{\delta (\sigma^+ - \tilde{\sigma}_\delta) (\sigma^- - \tilde{\sigma}_\delta)} T^+ u_{inc|\Gamma} \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

où ω est la trace de $u_\delta^{-,ap}$ sur la surface Γ . Comme dans le paragraphe précédent, l'existence et l'unicité de la solution de $(\mathcal{Q}_\delta^{ap})$ sont obtenues en utilisant la théorie de opérateurs de Fredholm. L'avantage ici, est que nous n'aurons plus besoin de (8.9). Seule la condition (8.8) suffit.

8.2 Estimation de l'erreur

Nous terminons cette partie avec l'estimation de l'erreur en solution, entre le problème exact (6.1) et le modèle approché dont la solution u_δ^{ap} est définie sur \mathbb{R}^3 par

$$u_\delta^{ap} := \begin{cases} u_\delta^{-,ap} & \text{dans } \Omega_\delta^-, \\ u_{\text{int},\delta}^{ap} & \text{dans } \Omega_\delta, \\ u_\delta^{+,ap} & \text{dans } \Omega_\delta^+, \end{cases}$$

où $u_{\text{int},\delta}^{ap}$ est obtenu à partir de (8.1) et (8.2) en ajoutant et en retranchant un terme d'ordre 2 en δ . Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,1}}^{ap}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{1,ap}(x) := u_{\text{int},\delta}^{[1],ap}(m, s_1) \\ &:= u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \delta p_1 [(s_1 + 1)\sigma^- \tilde{\sigma}_\delta^{-1} - 1] \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}, \quad \forall x = \Phi_1(m, s_1) \in \Omega_{\delta,1}, \\ u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,2}}^{ap}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{2,ap}(x) := u_{\text{int},\delta}^{[2],ap}(m, s_2) \\ &:= u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} + \delta p_2 [(s_2 - 1)\sigma^+ \tilde{\sigma}_\delta^{-1} + 1] \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}, \quad \forall x = \Phi_2(m, s_2) \in \Omega_{\delta,2}. \end{aligned}$$

Théorème 38 *Il existe une constante c indépendante de δ telle que*

$$\begin{aligned} \|u_\delta^- - u_\delta^{-,ap}\|_{H^1(\Omega_\delta^-)} &+ \delta^{1/2} \sum_{\beta=1}^2 \left\| u_{\text{int},\delta}^\beta - u_{\text{int},\delta}^{\beta,ap} \right\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})} \\ &+ \left\| u_\delta^+ - u_\delta^{+,ap} \right\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\delta^+)} \leq c\delta^2. \end{aligned}$$

Pour démontrer le Théorème 38 nous avons besoin d'un résultat de stabilité. Soient $\mathbb{H}^1(\Omega)$ l'espace de Hilbert défini par :

$$\mathbb{H}^1(\Omega) := \left\{ v = (v^-, v^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\tilde{\Omega}^+) \right\},$$

muni de la norme naturelle et $b_\delta(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie $\mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} b_\delta(u, v) &:= \sigma^- \int_{\Omega^-} \nabla u^- \cdot \nabla v^- \, d\Omega^- - k_-^2 \int_{\Omega^-} u^- v^- \, d\Omega^- \\ &+ \sigma^+ \int_{\tilde{\Omega}^+} \nabla u^+ \cdot \nabla v^+ \, d\tilde{\Omega}^+ - k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}^+} u_{\text{ext}} v_{\text{ext}} \, d\tilde{\Omega}^+ \\ &- \frac{1}{2} \lambda_{\delta,1} \int_{\Gamma} (u_{|\Gamma}^- - u_{|\Gamma}^+) (v_{|\Gamma}^- - v_{|\Gamma}^+) \, d\Gamma \\ &+ \sigma^+ \left\langle T u_{|\partial\Omega}^+, v_{|\partial\Omega}^+ \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 39 *1) Pour toute forme linéaire h_δ dans $(\mathbb{H}^1(\Omega))'$, il existe une constante positive c indépendante de δ telle que la solution du problème variationnel*

$$\begin{cases} \text{Find } u_\delta \in \mathbb{H}^1(\Omega), \quad \forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega), \\ b_\delta(u_\delta, v) = h_\delta(v), \end{cases}$$

satisfait à l'estimation

$$\|u_\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c\delta^{-1/2} \|h_\delta\|_{(\mathbb{H}^1(\Omega))'}. \quad (8.21)$$

2) De plus, si $p_1\sigma^+\tilde{\sigma}_\delta + p_2\sigma^-\tilde{\sigma}_\delta - \sigma^-\sigma^+ \leq 0$, nous avons

$$\|u_\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c \|h_\delta\|_{(\mathbb{H}^1(\Omega))'}. \quad (8.22)$$

Preuve. 1) L'estimation de stabilité est établie en démontrant l'inégalité suivante

$$\|u_\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c\delta^{-1/2} \sup_{v \in \mathbb{H}^1(\Omega)} \frac{|b_\delta(u_\delta, v)|}{\|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}}.$$

Pour ce faire, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux suites $(\delta_n)_{n \geq 0}$ et $(u_{\delta_n})_{n \geq 0}$, (notée $(u_n)_{n \geq 0}$) telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0, \quad \left\| \sqrt{\delta} u_n \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}=1} |b_{\delta_n}(u_n, \varphi)| = 0. \quad (8.23)$$

Il existe alors une sous-suite de $(\sqrt{\delta} u_n)_{n \geq 0}$, notée encore $(\sqrt{\delta} u_n)_{n \geq 0}$, telle que

$$\begin{cases} \sqrt{\delta} u_n \rightarrow u_0 \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \sqrt{\delta} u_n \rightharpoonup u_0 \text{ dans } \mathbb{H}^1(\Omega). \end{cases} \quad (8.24)$$

Par ailleurs, pour tout v dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}^-) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}^+)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\delta} \lambda_{\delta,1} \int_{\Gamma} (u_{n|\Gamma}^- - u_{n|\Gamma}^+) (v_{|\Gamma}^- - v_{|\Gamma}^+) \, d\Gamma \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sigma^- \int_{\Omega^-} \sqrt{\delta} \nabla u_n^- \cdot \nabla v^- \, d\Omega^- - k_-^2 \int_{\Omega^-} \sqrt{\delta} u_n^- v^- \, d\Omega^- \right. \\ &+ \sigma^+ \int_{\tilde{\Omega}^+} \sqrt{\delta} \nabla u_n^+ \cdot \nabla v^+ \, d\tilde{\Omega}^+ - k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}^+} \sqrt{\delta} u_n^+ v^+ \, d\tilde{\Omega}^+ \\ &- \left. \sqrt{\delta} b_\delta(u_n, v) + \sigma^+ \left\langle \sqrt{\delta} T u_{n|\partial\Omega}^+, v_{|\partial\Omega} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \right] \\ &= \sigma^- \int_{\Omega^-} \nabla u_0^- \cdot \nabla v^- \, d\Omega^- - k_-^2 \int_{\Omega^-} u_0^- v^- \, d\Omega^- \\ &+ \sigma^+ \int_{\tilde{\Omega}^+} \nabla u_0^+ \cdot \nabla v^+ \, d\tilde{\Omega}^+ - k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}^+} u_0^+ v^+ \, d\tilde{\Omega}^+ \\ &+ \sigma^+ \left\langle T u_{0|\partial\Omega}^+, v_{|\partial\Omega} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Le terme de droite étant indépendant de δ , il découle que

$$\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\lambda_{\delta,1} \int_{\Gamma} \left(u_{n|\Gamma}^- - u_{n|\Gamma}^+\right) \left(v_{|\Gamma}^- - v_{|\Gamma}^+\right) d\Gamma = O(1), \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^-}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\tilde{\Omega}^+}), \quad (8.25)$$

et par densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^-}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\tilde{\Omega}^+})$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, nous déduisons que l'égalité est vraie pour tout v dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Posons $v = \overline{u_n}$, nous obtenons

$$\left\|u_{n|\Gamma}^- - u_{n|\Gamma}^+\right\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\delta^{1/4}. \quad (8.26)$$

Par conséquent $u_o^- = u_o^+$ sur Γ et, pour tout v dans $H^1(\Omega)$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\delta}b_\delta(u, v) &:= \sigma^- \int_{\Omega^-} \nabla u_o^- \cdot \nabla v^- d\Omega^- - k_-^2 \int_{\Omega^-} u_o^- v^- d\Omega^- \\ &+ \sigma^+ \int_{\tilde{\Omega}^+} \nabla u_o^+ \cdot \nabla v^+ d\tilde{\Omega}^+ - k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}^+} u_o^+ v^+ d\tilde{\Omega}^+ \\ &+ \sigma^+ \left\langle T u_{0|\partial\Omega}^+, v_{|\partial\Omega} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Compte tenu du Théorème 30, le problème : *Trouver u_0 dans $H^1(\Omega)$ vérifiant (8.27), $\forall v \in H^1(\Omega)$, est bien-posé. Ceci conduit à $u_0 = 0$. Afin d'obtenir la contradiction, nous allons montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sqrt{\delta}u_n \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = 0$. Remarquons d'abord qu'en vertu de l'unicité de la solution u_0 , toute la suite converge vers $u_0 = 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Il ne reste plus qu'à démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sqrt{\delta}\nabla u_n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$. Nous avons*

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\delta}\nabla u_n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 &\leq c\delta \left(\sigma^- \int_{\Omega^-} |\nabla u_n^-|^2 d\Omega^- + \sigma^+ \int_{\tilde{\Omega}^+} |\nabla u_n^+|^2 d\tilde{\Omega}^+ \right) \\ &= c\Re \left(\delta b_\delta(u_n, \overline{u_n}) + k_-^2 \int_{\Omega^-} \delta |u_n^-|^2 d\Omega^- + k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}^+} \delta |u_n^+|^2 d\tilde{\Omega}^+ \right. \\ &+ \frac{1}{2}\delta\lambda_{\delta,1} \int_{\Gamma} |u_{n|\Gamma}^- - u_{n|\Gamma}^+|^2 d\Gamma \\ &\left. - \delta\sigma^+ \left\langle T u_{n|\partial\Omega}^+, \overline{u_{n|\partial\Omega}^+} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \end{aligned}$$

D'où en utilisant le Lemme 23, nous déduisons

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\delta} \nabla u_n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c \Re \left[\delta b_n(u_n, \overline{u_n}) + k_-^2 \int_{\Omega^-} \delta |u_n^-|^2 d\Omega^- + k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}^+} \delta |u_n^+|^2 d\tilde{\Omega}^+ \right. \\ &+ \frac{1}{2} \delta \lambda_{\delta,1} \int_{\Gamma} |u_{n|\Gamma}^- - u_{n|\Gamma}^+|^2 d\Gamma \\ &\left. - \sigma^+ \left\langle \sqrt{\delta} K u_{n|\partial\Omega}^+, \sqrt{\delta u_{n|\partial\Omega}^+} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Comme K est compact et $\sqrt{\delta} u_n \rightarrow 0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, nous obtenons

$$\left\langle \sqrt{\delta} K u_{n|\partial\Omega}^+, \sqrt{\delta u_{n|\partial\Omega}^+} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \rightarrow 0.$$

Par conséquent, l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Re [b_n(u_n, \overline{u_n})] = 0$ et (8.26) conduit à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sqrt{\delta} \nabla u_n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$, ce qui contredit $\left\| \sqrt{\delta} u_n \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = 1$.

2) L'Inégalité (8.22) est obtenue par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (8.21). ■

Preuve du Théorème 38. Le Théorème 38 se démontre aisément en reprenant les idées de la preuve du Théorème 21 et en utilisant le Lemme 39. En effet, compte tenu du Théorème 33 (de convergence), il suffit d'estimer l'erreur $U_\delta^{ap} - U_\delta^{(1)}$. Soit l'ansatz

$$u_\delta^{\pm, ap} = \sum_{j \geq 0} \delta^j w_j^\pm, \quad (8.28)$$

où les termes w_j^\pm sont indépendants de δ . En reportant (8.28) dans (8.4)-(8.6), nous obtenons, par identification des termes de même puissance en δ , les relations de récurrence

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla w_j^-) + k_-^2 w_j^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla w_j^+) + k_+^2 w_j^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ w_{j|\Gamma}^- - w_{j|\Gamma}^+ = \mathcal{A}(w_{j-1}^-, w_{j+1}^+) & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} w_{j|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} w_{j|\Gamma}^+ = \mathcal{B}(w_{j-1}^-, w_{j+1}^+) & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (w_{j|\Gamma}^+ - \delta_{0,j} u_{inc}) = 0, \end{cases}$$

avec la convention $w_{-1}^\pm = 0$. Un simple calcul montre que w_0^\pm et w_1^\pm coïncident avec u_0^\pm et u_1^\pm . Par ailleurs, tous les termes de (8.28) sont bornés dans $H^1(\Omega^\pm)$. Soit \mathcal{R}_w le reste

où

$$\begin{aligned}
 h_\delta(v) &:= \delta \frac{1}{4} \left(\tilde{k}_\delta^2 - p_1 k_-^2 - p_2 k_+^2 \right) \int_\Gamma \left(\mathcal{R}_{w|\Gamma}^- + \mathcal{R}_{w|\Gamma}^+ \right) \left(v_{|\Gamma}^- + v_{|\Gamma}^+ \right) d\Gamma \\
 &+ \delta \frac{1}{4} \left(\tilde{\sigma}_\delta - p_1 \sigma^- - p_2 \sigma^+ \right) \int_\Gamma \left(\Delta_\Gamma \mathcal{R}_{w|\Gamma}^- + \Delta_\Gamma \mathcal{R}_{w|\Gamma}^+ \right) \left(v_{|\Gamma}^- + v_{|\Gamma}^+ \right) d\Gamma \\
 &+ \frac{1}{2} \delta^4 \int_\Gamma \mathcal{B}(w_3^-, w_3^+) \left(v_{|\Gamma}^- + v_{|\Gamma}^+ \right) d\Gamma \\
 &+ \delta^4 \int_\Gamma \lambda_{\delta,1} \mathcal{A}(w_3^-, w_3^+) \left(v_{|\Gamma}^- - v_{|\Gamma}^+ \right) d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Compte tenu du Lemme 39, il existe une constante c indépendante de δ telle que

$$\|\mathcal{R}_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c \delta^{-1/2} \|h_\delta\|_{(\mathbb{H}^1(\Omega))'}.$$

Ainsi

$$\|\mathcal{R}_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c \left(\delta^{1/2} \|\mathcal{R}_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \delta^{5/2} \|w_3\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \right),$$

d'où

$$\|\mathcal{R}_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq \frac{\delta^{5/2} c}{(1 - c\delta^{1/2})} \|w_3\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}.$$

Puisque δ est assez petit, nous avons

$$\|\mathcal{R}_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c\delta^2 \|w_3\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)},$$

d'où le résultat escompté. ■

Troisième partie

Conditions de transmission de type
Ventcel pour un problème de
diffraction d'ondes par une couche
mince fortement absorbante

Chapitre 9

Introduction

Dans cette dernière partie, nous nous proposons d'étendre notre méthode à un problème de diffraction par une couche mince fortement absorbante (cf. [35, 43] pour des problèmes similaires). Contrairement à la partie précédente, nous verrons que ce problème induit des conditions de transmission de type Ventcel dès le premier terme du développement asymptotique (terme d'ordre 0) modélisant l'effet de la couche mince. Par ailleurs, en suivant la même démarche que celle utilisée dans la Partie 2, nous rencontrerons deux difficultés : le résultat de stabilité uniforme (Théorème 40) et le traitement des conditions de transmission approchées, qui n'ont pas été simples à établir. Nous verrons aussi que dans ce cas nous n'allons déterminer qu'une seule position de la surface limite Γ permettant de montrer l'existence et l'unicité de la solution du modèle d'ordre 1.

Au cours de cette partie, nous utiliserons les notations introduites dans la Partie 2. Pour ne créer aucune ambiguïté d'une partie à une autre, nous rappellerons les définitions de ces notations.

Soient Ω_δ^- un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , de frontière régulière $\Gamma_{\delta,1}$, recouvert d'une couche mince Ω_δ d'épaisseur δ (destinée à tendre vers 0) et Ω_δ^+ un domaine extérieur défini par $\Omega_\delta^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{\Omega_\delta^-} \cup \Omega_\delta \right)$ (voir Figure 6.1). Nous introduisons les fonctions σ_δ et k_δ^2 définies sur \mathbb{R}^3 par

$$\sigma_\delta(x) := \begin{cases} \sigma^+ & \text{si } x \in \Omega_\delta^+, \\ \tilde{\sigma} & \text{si } x \in \Omega_\delta, \\ \sigma^- & \text{si } x \in \Omega_\delta^-, \end{cases} \quad k_\delta^2(x) := \begin{cases} k_+^2 & \text{si } x \in \Omega_\delta^+, \\ \tilde{k}^2 & \text{si } x \in \Omega_\delta, \\ k_-^2 & \text{si } x \in \Omega_\delta^-, \end{cases}$$

où σ^- et $\tilde{\sigma}$ sont deux nombres strictement positifs décrivant les propriétés de contraste des milieux Ω_δ^- et Ω_δ par rapport au milieu de propagation Ω_δ^+ , et telles que k_-^2 et \tilde{k}^2

sont deux nombres complexes à partie réelle strictement positive et à partie imaginaire positive. Nous supposons, en outre que σ^+ et k_+ sont strictement positifs et que toutes les constantes $\sigma^\pm, k_\pm, \tilde{\sigma}$ et \tilde{k} sont indépendantes de δ .

Nous envisageons d'étudier le problème de Helmholtz suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \\ \text{div}(\sigma_\delta \nabla u_\delta) + k_\delta^2 u_\delta = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_\delta - u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (9.1)$$

Le terme source u_{inc} est, comme dans la deuxième partie, défini par une onde plane $u_{inc}(x) := e^{i \frac{k_+}{\sqrt{\sigma^+}}(x \cdot \mathbf{d})}$ où $x \in \mathbb{R}^3$, \mathbf{d} est un vecteur normalisé de \mathbb{R}^3 indiquant la direction dans laquelle Ω_δ est illuminée et $\frac{k_+}{\sqrt{\sigma^+}}$ est le nombre d'onde.

La technique utilisée dans la Partie 3 est identique à celle employée dans les deux parties précédentes, i.e., nous introduisons une surface Γ régulière parallèle à $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ divisant Ω_δ en deux couches minces $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ d'épaisseurs respectives $p_1\delta$ et $p_2\delta$ où p_1 et p_2 sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant $p_1 + p_2 = 1$ (Voir figures 7.1 et 1.3).

Notant $u_\delta^-, u_{\text{int},\delta}^1, u_{\text{int},\delta}^2$ et u_δ^+ les restrictions de u_δ sur les domaines $\Omega_\delta^-, \Omega_{\delta,1}, \Omega_{\delta,2}$ et Ω_δ^+ respectivement, le problème (9.1) est équivalent au problème de transmission suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \text{ telle que} \\ \text{div}(\sigma^- \nabla u_\delta^-) + k_-^2 u_\delta^- = 0 & \text{dans } \Omega_\delta^-, & (9.2) \\ \text{div}(\tilde{\sigma}_\delta \nabla u_{\text{int},\delta}^1) + \tilde{k}_\delta^2 u_{\text{int},\delta}^1 = 0 & \text{dans } \Omega_{\delta,1}, & (9.3) \\ \text{div}(\tilde{\sigma}_\delta \nabla u_{\text{int},\delta}^2) + \tilde{k}_\delta^2 u_{\text{int},\delta}^2 = 0 & \text{dans } \Omega_{\delta,2}, & (9.4) \\ \text{div}(\sigma^+ \nabla u_\delta^+) + k_+^2 u_\delta^+ = 0 & \text{dans } \Omega_\delta^+, & (9.5) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_\delta^+ - u_{inc}) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- = u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,1}}^1 & \text{sur } \Gamma_{\delta,1}, \end{array} \right. \quad (9.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,1}}^- = \frac{\tilde{\sigma}}{\delta} \partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,1}}^1 & \text{sur } \Gamma_{\delta,1}, \end{array} \right. \quad (9.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^1 = u_{\text{int},\delta|\Gamma}^2 & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (9.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^1 = \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{int},\delta|\Gamma}^2 & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (9.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,2}}^2 = u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ & \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, \end{array} \right. \quad (9.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\tilde{\sigma}}{\delta} \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\text{int},\delta|\Gamma_{\delta,2}}^2 = \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}} u_{\delta|\Gamma_{\delta,2}}^+ & \text{sur } \Gamma_{\delta,2}, \end{array} \right. \quad (9.11)$$

où $\partial_{\mathbf{n}_{\delta,1}}$, $\partial_{\mathbf{n}}$ et $\partial_{\mathbf{n}_{\delta,2}}$ désignent les dérivées dans la direction des vecteurs unitaires normaux \mathbf{n} , $\mathbf{n}_{\delta,1}$ et $\mathbf{n}_{\delta,2}$ à Γ , $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ respectivement (Voir figure 6.1 et 7.1).

Chapitre 10

Stabilité uniforme

Nous souhaitons dériver une approximation de la solution u_δ à l'aide d'un développement asymptotique en fonction de l'épaisseur de la couche mince δ . Pour justifier cette démarche, nous commencerons par étudier la stabilité de u_δ par rapport au second membre, dépendant ici du champ incident, lorsque δ tend vers 0. Toute la difficulté de la preuve du théorème de stabilité ci-dessous vient du fait que le problème (10.1), qui suit, n'est pas coercif mais surtout du terme $1/\delta$ dans la couche mince Ω_δ qui rend les estimations et les passages à limite difficile à établir et qui, quand δ tend vers 0, fera apparaître des intégrales sur la surface Γ avec des opérateurs différentiels tangentiels d'ordre 2.

Établissons, tout d'abord, l'existence et l'unicité de la solution u_δ de (9.1). Soit Ω ouvert borné de \mathbb{R}^3 , contenant la couche mince Ω_δ (voir Figure 6.3), de frontière $\partial\Omega$ assez régulière (au moins de classe \mathcal{C}^2). En utilisant la définition de l'opérateur de DtN T (voir Chapitre 6), une formulation variationnelle de (9.1) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\delta \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \\ a_\delta(u_\delta, v) := \int_{\Omega} \sigma_\delta \nabla u_\delta \cdot \nabla \bar{v} - k_\delta^2 u_\delta \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle T u_\delta|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ \qquad \qquad \qquad = l_\delta(v), \end{array} \right. \quad (10.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}$ désigne la dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ and $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et l_δ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ donnée par

$$l_\delta(v) := \sigma^+ \int_{\partial\Omega} (\partial_{\mathbf{n}_\Omega} + T) u_{inc} \bar{v} \, d\sigma.$$

A nouveau le problème (10.1) est bien posé : il y a existence et unicité. Il s'agit de reprendre

pas à pas les démonstrations des théorèmes 22 et 24. Nous pouvons maintenant énoncer notre le résultat principal :

Théorème 40 [*Stabilité uniforme*] *Si l_δ est dans $(H^1(\Omega))'$, il existe une constante positive c indépendante de δ telle que la solution de (10.1) satisfait à l'estimation*

$$\|u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|l_\delta\|_{(H^1(\Omega))'}. \quad (10.2)$$

L'idée de la preuve nous est venue en lisant les thèses de Lemrabet [35] et Claeys [20] bien que traitant de problèmes différents. Avant d'entamer la démonstration, nous aurons besoin de deux résultats : le premier concerne l'existence, l'unicité et la régularité de la solution d'un problème de Helmholtz avec conditions de transmission de type Ventcel sur l'interface Γ et le second porte sur un lemme de densité dans $H_\Gamma^1(\Omega)$ de l'ensemble des fonctions dans $H_\Gamma^1(\Omega)$ et constantes dans un voisinage de Γ par rapport à la variable normale.

En première lecture, ce passage peut être évité et le lecteur pourra directement se reporter à la démonstration du Théorème 40, donnée à la page 101.

10.1 Existence, unicité et régularité de la solution du problème de Ventcel.

Le caractère non-standard des conditions de transmission du problème de Ventcel nous conduit à introduire de nouveaux espaces de Sobolev $H^{1,1}(\Omega^-)$, $H_{loc}^{1,1}(\overline{\Omega^+})$ et $H_\Gamma^1(\Omega)$ définis par

$$\begin{aligned} H^{1,1}(\Omega^-) &:= \{v \in H^1(\Omega^-), v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}, \\ H_\Gamma^1(\Omega) &:= \{v \in H^1(\Omega), v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}, \\ H_{loc}^{1,1}(\overline{\Omega^+}) &:= \{v \in H_{loc}^1(\overline{\Omega^+}), v|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}, \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 contenant Ω^- (voir Figure 6.4). Nous les munissons des normes

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^{1,1}(\Omega^-)}^2 &= \|v\|_{H^1(\Omega^-)}^2 + \|v|_\Gamma\|_{H^1(\Gamma)}^2, \\ \|v\|_{H_\Gamma^1(\Omega)}^2 &= \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v|_\Gamma\|_{H^1(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

et de la semi-norme

$$\|v\|_{H^{1,1}(\Omega \cap K)}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega \cap K)}^2 + \|v\|_{H^1(\Gamma)}^2,$$

où K est un compact dans \mathbb{R}^3 . Rappelant que $\tilde{\Omega}^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$, nous avons le

Théorème 41 *Si $h \in H^1(\Gamma)$ et $\zeta \in H^{-1}(\Gamma)$, alors le problème*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla U^-) + k_-^2 U^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla U^+) + k_+^2 U^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ U^-_{|\Gamma} - U^+_{|\Gamma} = h & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} U^-_{|\Gamma} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} U^+_{|\Gamma} = p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} U^-_{|\Gamma} + p_1 \tilde{k}^2 U^-_{|\Gamma} \\ + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} U^+_{|\Gamma} + p_2 \tilde{k}^2 U^+_{|\Gamma} + \zeta & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) U^+ = 0, & \end{array} \right. \quad (10.3)$$

admet une solution unique (U^-, U^+) dans $H^{1,1}(\Omega^-) \times H_{loc}^{1,1}(\overline{\Omega^+})$ vérifiant

$$\|U^-\|_{H^{1,1}(\Omega^-)} + \|U^+\|_{H^{1,1}(\tilde{\Omega}^+)} \leq c_k \left(\|h\|_{H^1(\Gamma)} + \|\zeta\|_{H^{-1}(\Gamma)} \right). \quad (10.4)$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $h \in H^k(\Gamma)$, $\zeta \in H^{k-2}(\Gamma)$ et Γ est \mathcal{C}^{k+1} -continue, alors $(U^-, U^+) \in H^{k+1/2}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k+1/2}(\overline{\Omega^+})$.

Preuve. L'unicité de la solution (U^-, U^+) du problème (10.3) est obtenue en reprenant les idées de la démonstration du Théorème 22 utilisant le Lemme 78 (de Rellich). L'existence de la solution découle, par exemple, de l'alternative de Fredholm sous sa forme variationnelle (voir Corollaire 61) après transformation de (10.3) en un problème avec un saut nul de la solution à travers Γ . En effet, soit V^+ une fonction définie sur Ω^+ vérifiant le problème extérieur suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla V^+) + k_+^2 V^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ V^+_{|\Gamma} = h & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) V^+ = 0. & \end{array} \right. \quad (10.5)$$

Il est aisé de vérifier (cf. [16, 38, 54]) que si $h \in H^1(\Gamma)$, alors le problème de Dirichlet non-homogène (10.5) admet une solution unique V^+ dans $H_{loc}^{3/2}(\overline{\Omega^+})$, de plus nous avons l'estimation

$$\|V^+\|_{H^{3/2}(\tilde{\Omega}^+)} \leq c \|h\|_{H^1(\Gamma)}. \quad (10.6)$$

Posons

$$\tilde{U}^+ = U^+ + V^+, \quad (10.7)$$

alors (10.3) est équivalent au problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla U^-) + k_-^2 U^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla \tilde{U}^+) + k_+^2 \tilde{U}^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ U_{|\Gamma}^- - \tilde{U}_{|\Gamma}^+ = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} U_{|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} \tilde{U}_{|\Gamma}^+ = \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} U_{|\Gamma}^- + \tilde{k}^2 U_{|\Gamma}^- \\ + \zeta - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} V_{|\Gamma}^+ - p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} h - p_2 \tilde{k}^2 h & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) \tilde{U}^+ = 0. \end{cases} \quad (10.8)$$

Utilisant la définition de l'opérateur de DtN T , une formulation variationnelle de (10.8) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in H_{\Gamma}^1(\Omega), \forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega), \\ a(U, v) = l(v), \end{cases} \quad (10.9)$$

où U est défini sur Ω par $U_{|\Omega^-} := U^-$, $U_{|\tilde{\Omega}^+} := \tilde{U}^+$,

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \sigma^- \int_{\Omega^-} \nabla u_{|\Omega^-} \cdot \nabla \bar{v}_{|\Omega^-} \, d\Omega^- - k_-^2 \int_{\Omega^-} u_{|\Omega^-} \bar{v}_{|\Omega^-} \, d\Omega^- \\ &+ \sigma^+ \int_{\tilde{\Omega}^+} \nabla u_{|\tilde{\Omega}^+} \cdot \nabla \bar{v}_{|\tilde{\Omega}^+} \, d\tilde{\Omega}^+ - k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}^+} u_{|\tilde{\Omega}^+} \bar{v}_{|\tilde{\Omega}^+} \, d\tilde{\Omega}^+ \\ &+ \tilde{\sigma} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u_{|\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma} \bar{v}_{|\Gamma} \, d\Gamma - \tilde{k}^2 \int_{\Gamma} u_{|\Gamma} \bar{v}_{|\Gamma} \, d\Gamma \\ &+ \sigma^+ \langle T u_{|\partial\Omega}, \bar{v}_{|\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$l(v) := \left\langle \zeta - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} V_{|\Gamma}^+ - p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} h - p_2 \tilde{k}^2 h, \bar{v}_{|\Gamma} \right\rangle_{H^{-1}(\Gamma) \times H^1(\Gamma)}.$$

Montrons maintenant que les hypothèses du Corollaire 61 sont satisfaites. Posons, par exemple

$$a(u, v) = a_0(u, v) + a_1(u, v),$$

où

$$\begin{aligned} a_0(u, v) &:= \sigma^- \int_{\Omega^-} \nabla u|_{\Omega^-} \cdot \nabla \bar{v}|_{\Omega^-} \, d\Omega^- + \sigma^+ \int_{\tilde{\Omega}^+} \nabla u|_{\tilde{\Omega}^+} \cdot \nabla \bar{v}|_{\tilde{\Omega}^+} \, d\tilde{\Omega}^+ \\ &\quad + \tilde{\sigma} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u|_{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma} \bar{v}|_{\Gamma} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} \bar{v}|_{\Gamma} \, d\Gamma \\ &\quad + \sigma^+ \langle T_0 u|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_1(u, v) &:= -k_-^2 \int_{\Omega^-} u|_{\Omega^-} \bar{v}|_{\Omega^-} \, d\Omega^- - (1 + k_+^2) \int_{\tilde{\Omega}^+} u|_{\tilde{\Omega}^+} \bar{v}|_{\tilde{\Omega}^+} \, d\tilde{\Omega}^+ \\ &\quad - \tilde{k}^2 \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} \bar{v}|_{\Gamma} \, d\Gamma + \sigma^+ \langle K u|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 23, $a_0(\cdot, \cdot)$ est coercive. Par ailleurs, de la compacité de l'injection $H_{\Gamma}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ (voir Théorème 79 de Rellich) et de celle de l'opérateur K , nous déduisons que si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites faiblement convergentes dans $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ vers \tilde{u} et \tilde{v} respectivement, alors

$$a_1(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_1(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Ainsi, d'après le Corollaire 61, l'unicité de la solution de (10.3) implique l'existence de (U^-, \tilde{U}^+) et par conséquent celle de (U^-, U^+) . De plus, nous avons l'estimation

$$\|U^-\|_{H^{1,1}(\Omega^-)} + \|U^+\|_{H^{1,1}(\tilde{\Omega}^+)} \leq c_k \left(\|h\|_{H^1(\Gamma)} + \|\zeta\|_{H^{-1}(\Gamma)} \right).$$

Pour montrer la régularité de la solution (U^-, U^+) nous allons raisonner par induction sur l'entier k . En effet, pour $k = 1$, nous avons montré, dans la première partie de la preuve, que si $h \in H^1(\Gamma)$ et $\zeta \in H^{-1}(\Gamma)$, alors le problème (10.3) admet une solution unique (U^-, U^+) dans $H^{1,1}(\Omega^-) \times H_{loc}^{1,1}(\overline{\Omega^+})$. D'où $U_{\Gamma}^{\pm} \in H^1(\Gamma)$, or $\operatorname{div}(\sigma^{\pm} \nabla U^{\pm}) + k_{\pm}^2 U^{\pm} = 0$ dans Ω^{\pm} et Γ étant de classe \mathcal{C}^2 , nous déduisons de [16] que $(U^-, U^+) \in H^{3/2}(\Omega^-) \times H_{loc}^{3/2}(\overline{\Omega^+})$. Supposons maintenant que le théorème est vrai jusqu'à $k - 1$ et montrons le pour k . Soient $h \in H^k(\Gamma)$ et $\zeta \in H^{k-2}(\Gamma)$. Puisque $H^k(\Gamma) \subset H^{k-1}(\Gamma)$ et $H^{k-2}(\Gamma) \subset H^{k-3}(\Gamma)$ donc $h \in H^{k-1}(\Gamma)$ et $\zeta \in H^{k-3}(\Gamma)$. Il existe alors une unique solution (U^-, U^+) de (10.3) dans $H^{k-1/2}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k-1/2}(\overline{\Omega^+})$. Appliquant le théorème de trace des fonctions dans $H^{k-1/2}$ (cf. [16]), nous obtenons $\partial_{\mathbf{n}} U_{\Gamma}^{\pm} \in H^{k-2}(\Gamma)$.

Par ailleurs, de

$$\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} U_{|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} U_{|\Gamma}^+ = p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} U_{|\Gamma}^- + p_1 \tilde{k}^2 U_{|\Gamma}^- + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} U_{|\Gamma}^+ + p_2 \tilde{k}^2 U_{|\Gamma}^+ + \zeta,$$

nous pouvons écrire

$$\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} (p_1 U_{|\Gamma}^- + p_2 U_{|\Gamma}^+) = \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} U_{|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} U_{|\Gamma}^+ - p_1 \tilde{k}^2 U_{|\Gamma}^- - p_2 \tilde{k}^2 U_{|\Gamma}^+ - \zeta.$$

D'où $\Delta_{\Gamma} (p_1 U_{|\Gamma}^- + p_2 U_{|\Gamma}^+) \in H^{k-2}(\Gamma)$. Nous avons $p_1 U_{|\Gamma}^- + p_2 U_{|\Gamma}^+ \in H^{k-1}(\Gamma)$, $\Delta_{\Gamma} (p_1 U_{|\Gamma}^- + p_2 U_{|\Gamma}^+) \in H^{k-2}(\Gamma)$ et puisque l'opérateur Δ_{Γ} est elliptique d'ordre 2 sur une variété compacte sans bord Γ de classe \mathcal{C}^{k+2} , cela implique que $p_1 U_{|\Gamma}^- + p_2 U_{|\Gamma}^+ \in H^k(\Gamma)$ (voir Théorème 76), et puisque $U_{|\Gamma}^- - U_{|\Gamma}^+ \in H^k(\Gamma)$, alors $U_{|\Gamma}^{\pm}$ sont dans $H^k(\Gamma)$. Finalement, de

$$\operatorname{div}(\sigma^{\pm} \nabla U^{\pm}) + k_{\pm}^2 U^{\pm} = 0 \text{ dans } \Omega^{\pm},$$

et de [16] nous concluons que $(U^-, U^+) \in H^{k+1/2}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k+1/2}(\overline{\Omega^+})$. ■

10.2 Lemme de densité

Rappelons que, compte tenu de l'hypothèse de coques minces (2.5), il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\Omega_{\delta_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 ; x := m + \eta \mathbf{n}(m) \text{ où } -\delta_0 \leq \eta \leq \delta_0 \text{ et } m \in \Gamma\} \quad (10.10)$$

réalise une bijection entre $\overline{\Omega_{\delta_0}}$ et $\Gamma \times [-\delta_0, \delta_0]$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$, vérifiant $\varepsilon < \delta_0$. Nous désignons par $H_{\eta,0}^1(\Omega)$ l'espace de fonctions défini par :

$$H_{\eta,0}^1(\Omega) := \{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega) / \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \partial_{\eta} v(m, \eta) = 0, \forall |\eta| < \varepsilon\}.$$

Alors nous avons le lemme de densité suivant

Lemme 42 $H_{\eta,0}^1(\Omega)$ est dense dans $H_{\Gamma}^1(\Omega)$.

Preuve. Soit $v \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$. Nous allons construire une suite $(v_{\varepsilon})_{\varepsilon} \subset H_{\eta,0}^1(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{\varepsilon} \rightarrow v$ dans $H_{\Gamma}^1(\Omega)$. L'espace $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ étant dense dans $H_{\Gamma}^1(\Omega)$, il suffit alors de construire une telle suite pour $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Soit $\varepsilon > 0$, nous introduisons la fonction φ_{ε}

définie sur $[-\delta_0, \delta_0]$ par

$$\varphi_\varepsilon(\eta) := \begin{cases} 0 & \text{si } |\eta| < \varepsilon, \\ \delta_1 \frac{\eta - \varepsilon}{\delta_1 - \varepsilon} & \text{si } \varepsilon \leq \eta \leq \delta_1, \\ \delta_1 \frac{\eta + \varepsilon}{\delta_1 - \varepsilon} & \text{si } -\delta_1 \leq \eta \leq -\varepsilon, \\ \eta & \text{si } |\eta| > \delta_1, \end{cases} \quad (10.11)$$

où δ_1 vérifie $\varepsilon < \delta_1 \leq \delta_0$. Posons alors

$$v_\varepsilon(x) := \begin{cases} v(m, \varphi_\varepsilon(\eta)) & \text{si } x = (m, \eta) \in \overline{\Omega_{\delta_0}}, \\ v(x) & \text{si } x \in \Omega_{\delta_0}^- \cup \widetilde{\Omega}_{\delta_0}^+. \end{cases}$$

Nous avons bien $v_\varepsilon \in H_{\eta,0}^1(\Omega)$ et $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v$ dans $H_\Gamma^1(\Omega)$. En effet, puisque $v_\varepsilon = v$ sur $\Omega_{\delta_0}^- \cup \widetilde{\Omega}_{\delta_0}^+$, il suffit de montrer la convergence sur Ω_{δ_0} . Nous avons, compte tenu de (2.12) et (10.11)

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v\|_{L^2(\Omega_{\delta_0})}^2 &\leq c \int_\Gamma \int_{-\delta_1}^{\delta_1} |v_\varepsilon(m, \eta) - v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\ &\leq c \int_\Gamma \int_{|\eta| < \varepsilon} |v(m, 0) - v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\ &\quad + c \int_\Gamma \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |v_\varepsilon(m, \eta) - v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta. \end{aligned}$$

La fonction v étant dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, nous avons

$$\int_\Gamma \int_{|\eta| < \varepsilon} |v(m, 0) - v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \leq 4 \sup_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|^2 \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Par ailleurs, le changement de variables

$$t = \begin{cases} \delta_1 \frac{\eta - \varepsilon}{\delta_1 - \varepsilon} & \text{si } \varepsilon \leq \eta \leq \delta_1, \\ \delta_1 \frac{\eta + \varepsilon}{\delta_1 - \varepsilon} & \text{si } -\delta_1 \leq \eta \leq -\varepsilon, \end{cases} \quad (10.12)$$

donne

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |v_{\varepsilon}(m, \eta) - v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\
 &= \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^0 \left| v(m, t) - v\left(m, \frac{(\delta_1 - \varepsilon)}{\delta_1} t - \varepsilon\right) \right|^2 d\Gamma dt \\
 &+ \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_0^{\delta_1} \left| v(m, t) - v\left(m, \frac{(\delta_1 - \varepsilon)}{\delta_1} t + \varepsilon\right) \right|^2 d\Gamma dt.
 \end{aligned}$$

Les suites $\left(\left| v(m, t) - v\left(m, \frac{(\delta_1 - \varepsilon)}{\delta_1} t \pm \varepsilon\right) \right|^2 \right)_{\varepsilon}$ sont majorées par $4 \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|^2$ et convergent presque partout vers 0 lorsque ε tend vers 0. Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |v_{\varepsilon}(m, \eta) - v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta = 0.$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{\varepsilon} - v\|_{L^2(\Omega_{\delta_0})} = 0.$$

D'autre part, de (2.13) et (10.11), nous avons

$$\begin{aligned}
 \|\nabla v_{\varepsilon} - \nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta_0})}^2 &\leq c \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} |\nabla_{\Gamma} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \nabla_{\Gamma} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\
 &+ c \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} |\partial_{\eta} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \partial_{\eta} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\
 &\leq c \int_{\Gamma} \int_{|\eta| < \varepsilon} |\nabla_{\Gamma} v(m, 0) - \nabla_{\Gamma} v(m, \eta)|^2 + |\partial_{\eta} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\
 &+ c \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |\nabla_{\Gamma} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \nabla_{\Gamma} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\
 &+ c \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |\partial_{\eta} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \partial_{\eta} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta. \tag{10.13}
 \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$|\nabla_{\Gamma} v(m, 0) - \nabla_{\Gamma} v(m, \eta)|^2 + |\partial_{\eta} v(m, \eta)|^2 \leq c \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla v(x)|^2, \quad \forall (m, \eta) \in \Gamma \times [-\delta_0, \delta_0],$$

nous obtenons

$$\int_{\Gamma} \int_{|\eta| < \varepsilon} |\nabla_{\Gamma} v(m, 0) - \nabla_{\Gamma} v(m, \eta)|^2 + |\partial_{\eta} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \leq c \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla v(x)|^2 \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Par ailleurs, de (10.12) nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |\nabla_{\Gamma} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \nabla_{\Gamma} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\ &= \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^0 \left| \nabla_{\Gamma} v(m, t) - \nabla_{\Gamma} v\left(m, \frac{(\delta_1 - \varepsilon)}{\delta_1} t - \varepsilon\right) \right|^2 d\Gamma dt \\ &+ \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_0^{\delta_1} \left| \nabla_{\Gamma} v(m, t) - \nabla_{\Gamma} v\left(m, \frac{(\delta_1 - \varepsilon)}{\delta_1} t + \varepsilon\right) \right|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Les suites $\left(\left| \nabla_{\Gamma} v(m, t) - \nabla_{\Gamma} v\left(m, \frac{(\delta_1 - \varepsilon)}{\delta_1} t \pm \varepsilon\right) \right|_{\varepsilon}^2 \right)$ sont majorées par $4 \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla v(x)|^2$ et convergent presque partout vers 0 lorsque ε tend vers 0. Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |\nabla_{\Gamma} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \nabla_{\Gamma} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta = 0.$$

Il ne reste plus qu'à calculer la limite du dernier terme de (10.13). Toujours à l'aide de (10.12), nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |\partial_{\eta} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \partial_{\eta} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\ &= \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_0^{\delta_1} \left| \partial_t v(m, t) - \partial_t \left[v\left(m, \frac{t}{\delta_1} (\delta_1 - \varepsilon) + \varepsilon\right) \right] \right|^2 d\Gamma dt \\ &+ \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^0 \left| \partial_t v(m, t) - \partial_t \left[v\left(m, \frac{t}{\delta_1} (\delta_1 - \varepsilon) - \varepsilon\right) \right] \right|^2 d\Gamma dt \\ &= \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_0^{\delta_1} \left| \partial_t v(m, t) - \frac{\delta_1 - \varepsilon}{\delta_1} \partial_{\tau} v(m, \tau)_{|\tau = \frac{t}{\delta_1} (\delta_1 - \varepsilon) + \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt \\ &+ \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^0 \left| \partial_t v(m, t) - \frac{\delta_1 - \varepsilon}{\delta_1} \partial_{\tau} v(m, \tau)_{|\tau = \frac{t}{\delta_1} (\delta_1 - \varepsilon) - \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\partial_{\tau} v(m, \tau)_{|\tau = \frac{t}{\delta_1} (\delta_1 - \varepsilon) \pm \varepsilon}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_{\varepsilon \leq |\eta| \leq \delta_1} |\partial_{\eta} v_{\varepsilon}(m, \eta) - \partial_{\eta} v(m, \eta)|^2 d\Gamma d\eta \\ &\leq \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_0^{\delta_1} \left| \partial_t v(m, t) - \partial_{\tau} v(m, \tau)_{|\tau = \frac{t}{\delta_1} (\delta_1 - \varepsilon) + \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\delta_1 (\delta_1 - \varepsilon)} \int_{\Gamma} \int_0^{\delta_1} \left| \partial_{\tau} v(m, \tau)_{|\tau = \frac{t}{\delta_1} (\delta_1 - \varepsilon) + \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^0 \left| \partial_t v(m, t) - \partial_{\tau} v(m, \tau) \Big|_{\tau = \frac{t}{\delta_1}(\delta_1 - \varepsilon) - \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{\delta_1(\delta_1 - \varepsilon)} \int_{\Gamma} \int_{-\delta_1}^0 \left| \partial_{\tau} v(m, \tau) \Big|_{\tau = \frac{t}{\delta_1}(\delta_1 - \varepsilon) - \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt.
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

Les suites $\left(\left| \partial_t v(m, t) - \partial_{\tau} v(m, \tau) \Big|_{\tau = \frac{t}{\delta_1}(\delta_1 - \varepsilon) \pm \varepsilon} \right|^2 \right)_{\varepsilon}$ sont majorées par $4 \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla v(x)|^2$ et convergent presque partout vers 0 lorsque ε tend vers 0. Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{\delta_1 - \varepsilon} \int_{\Gamma} \int_0^{\pm \delta_1} \left| \partial_t v(m, t) - \partial_{\tau} v(m, \tau) \Big|_{\tau = \frac{t}{\delta_1}(\delta_1 - \varepsilon) \pm \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt = 0.$$

Par ailleurs

$$\left| \frac{\varepsilon^2}{\delta_1(\delta_1 - \varepsilon)} \int_{\Gamma} \int_0^{\pm \delta_1} \left| \partial_{\tau} v(m, \tau) \Big|_{\tau = \frac{t}{\delta_1}(\delta_1 - \varepsilon) \pm \varepsilon} \right|^2 d\Gamma dt \right| \leq c \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla v(x)|^2 \frac{\varepsilon^2}{\delta_1(\delta_1 - \varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla v_{\varepsilon} - \nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\delta_0})}^2 = 0.$$

Finalement, de (10.11) nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{\varepsilon}|_{\Gamma} - v|_{\Gamma}\|_{H^1(\Gamma)} = 0,$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{\varepsilon} - v\|_{H^1(\Omega_{\delta_0})}^2 = 0.$$

■

10.3 Preuve du Théorème de stabilité uniforme

Preuve. L'estimation de stabilité (10.2) est établie en démontrant l'inégalité suivante

$$\|u_{\delta}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|a_{\delta}(u_{\delta}, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux suites $(\delta_n)_{n \geq 0}$ et $(u_{\delta_n})_{n \geq 0}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0, \quad \|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}=1} |a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, \varphi)| = 0. \quad (10.15)$$

Dans la suite de la démonstration, nous supposons, quitte à extraire une sous-suite de $(\delta_n)_{n \geq 0}$ qu'il existe deux constantes positives ε et δ_1 telles que

$$\delta_n < \varepsilon < \delta_1 \leq \delta_0.$$

Nous allons démontrer en trois étapes que nous pouvons trouver une sous-suite de (u_{δ_n}) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Omega)} = 0$, ce qui conduira à une contradiction.

1^{ère} étape : *Montrons qu'il existe une sous-suite $(u_{\delta_n})_{n \geq 0}$ telle que $\|u_{\text{int}, \delta_n}^\beta\|_{H^1(\Omega_{\delta_n, \beta})} \leq c\delta_n^{1/2}$.*

En vertu de (10.15) et du Théorème 79 (de Rellich), il existe une sous-suite de $(u_{\delta_n})_{n \geq 0}$, notée encore $(u_{\delta_n})_{n \geq 0}$ telle que

$$\begin{cases} u_{\delta_n} \rightarrow u_0 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ u_{\delta_n} \rightharpoonup u_0 \text{ dans } H^1(\Omega). \end{cases} \quad (10.16)$$

Par ailleurs, pour toute fonction v dans $C^\infty(\bar{\Omega})$, $a_\delta(\cdot, \cdot)$ se met sous la forme

$$\begin{aligned} a_\delta(u_\delta, v) &= \int_{\Omega} \sigma_0 \nabla u_\delta \cdot \nabla \bar{v} - k_0^2 u_\delta \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle T u_\delta|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\quad - \int_{\Omega_{\delta,1}} \sigma^- \nabla u_{\text{int}, \delta}^1 \cdot \nabla \bar{v}_{\text{int}}^1 - k_-^2 u_{\text{int}, \delta}^1 \bar{v}_{\text{int}}^1 \, d\Omega_{\delta,1} - \int_{\Omega_{\delta,2}} \sigma^+ \nabla u_{\text{int}, \delta}^2 \cdot \nabla \bar{v}_{\text{int}}^2 - k_+^2 u_{\text{int}, \delta}^2 \bar{v}_{\text{int}}^2 \, d\Omega_{\delta,2} \\ &\quad + \int_{\Omega_\delta} \frac{\tilde{\sigma}}{\delta} \nabla u_{\text{int}, \delta} \cdot \nabla \bar{v}_{\text{int}} - \frac{\tilde{k}^2}{\delta} u_{\text{int}, \delta} \bar{v}_{\text{int}} \, d\Omega_\delta. \end{aligned} \quad (10.17)$$

où, rappelons le (cf. Partie 2)

$$\begin{cases} \sigma_0 := \sigma^- \chi_{\Omega^-}(x) + \sigma^+ \chi_{\Omega^+}(x), \\ k_0^2 := k_-^2 \chi_{\Omega^-}(x) + k_+^2 \chi_{\Omega^+}(x). \end{cases}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire impliquent

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_{\delta,1}} \sigma^- \nabla u_{\text{int},\delta}^1 \cdot \nabla \overline{v_{\text{int}}^1} - k_-^2 u_{\text{int},\delta}^1 \overline{v_{\text{int}}^1} d\Omega_{\delta,1} \right| &\leq c \|u_{\text{int},\delta}^1\|_{H^1(\Omega_{\delta,1})} \|v_{\text{int}}^1\|_{W^{1,\infty}(\Omega_{\delta,1})} \sqrt{|\Omega_{\delta,1}|} \\ &\leq c \|u_\delta\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \sqrt{|\Omega_{\delta,1}|}. \end{aligned}$$

Compte tenu de $\|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et du fait que $|\Omega_{\delta_n,1}| = c\delta_n$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega_{\delta_n,1}} \sigma^- \nabla u_{\text{int},\delta_n}^1 \cdot \nabla \overline{v_{\text{int}}^1} - k_-^2 u_{\text{int},\delta_n}^1 \overline{v_{\text{int}}^1} d\Omega_{\delta_n,1} \right| = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}). \quad (10.18)$$

De la même manière, nous montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega_{\delta_n,2}} \sigma^+ \nabla u_{\text{int},\delta_n}^2 \cdot \nabla \overline{v_{\text{int}}^2} - k_+^2 u_{\text{int},\delta_n}^2 \overline{v_{\text{int}}^2} d\Omega_{\delta_n,2} \right| = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}). \quad (10.19)$$

Par conséquent, nous déduisons de (10.15)-(10.19) que :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{\delta_n}} \frac{\tilde{\sigma}}{\delta_n} \nabla u_{\text{int},\delta_n} \cdot \nabla \overline{v_{\text{int}}} - \frac{\tilde{k}^2}{\delta_n} u_{\text{int},\delta_n} \overline{v_{\text{int}}} d\Omega_{\delta_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, v) - \int_{\Omega} \sigma_0 \nabla u_{\delta_n} \cdot \nabla \overline{v} - k_0^2 u_{\delta_n} \overline{v} dx \right. \\ &\quad \left. - \sigma^+ \langle T u_{\delta_n}|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} + \int_{\Omega_{\delta,1}} \sigma^- \nabla u_{\text{int},\delta}^1 \cdot \nabla \overline{v_{\text{int}}^1} - k_-^2 u_{\text{int},\delta}^1 \overline{v_{\text{int}}^1} d\Omega_{\delta,1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_{\delta_n,2}} \sigma^+ \nabla u_{\text{int},\delta_n}^2 \cdot \nabla \overline{v_{\text{int}}^2} - k_+^2 u_{\text{int},\delta_n}^2 \overline{v_{\text{int}}^2} d\Omega_{\delta_n,2} \right] \\ &= - \int_{\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \overline{v} - k_0^2 u_0 \overline{v} dx - \sigma^+ \langle T u_0|_{\partial\Omega}, \overline{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Le terme de droite étant indépendant de δ , il découle que

$$\int_{\Omega_{\delta_n}} \frac{\tilde{\sigma}}{\delta_n} \nabla u_{\text{int},\delta_n} \cdot \nabla \overline{v_{\text{int}}} - \frac{\tilde{k}^2}{\delta_n} u_{\text{int},\delta_n} \overline{v_{\text{int}}} d\Omega_{\delta_n} = O(1), \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad (10.20)$$

et par densité, nous déduisons que l'égalité est vraie pour tout v dans $H^1(\Omega)$.

Soit maintenant une fonction v dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Nous avons, pour tout $x = \psi_\beta(m, \eta_\beta)$

dans $\Omega_{\delta,\beta}$,

$$v_{\text{int}}^\beta(x) = v_{\text{int}}^\beta(m, \eta_\beta) = v_{\text{int}}^\beta(m, 0) + \int_0^{\eta_\beta} \partial_{\eta_\beta} v_{\text{int}}^\beta(m, \lambda) d\lambda,$$

donc

$$\left| v_{\text{int}}^\beta(m, \eta_\beta) \right|^2 \leq 2 \left| v_{\text{int}}^\beta(m, 0) \right|^2 + 2 \left| \int_0^{\eta_\beta} \partial_{\eta_\beta} v_{\text{int}}^\beta(m, \lambda) d\lambda \right|^2.$$

En intégrant sur Γ , nous trouvons

$$\int_\Gamma \left| v_{\text{int}}^\beta(m, \eta_\beta) \right|^2 d\Gamma \leq 2 \int_\Gamma \left| v_{\text{int}}^\beta(m, 0) \right|^2 d\Gamma + 2 \int_\Gamma \int_0^{p_\beta \delta} \left| \partial_{\eta_\beta} v_{\text{int}}^\beta(m, \lambda) \right|^2 d\lambda d\Gamma.$$

Compte tenu de (2.12), nous obtenons

$$\int_\Gamma \left| v_{\text{int}}^\beta(m, \eta_\beta) \right|^2 d\Gamma \leq 2 \left\| v_{\text{int}|_\Gamma}^\beta \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 2 \left\| \partial_{\eta_\beta} v_{\text{int}}^\beta \right\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})}^2.$$

Intégrons une deuxième fois par rapport à η_β nous avons

$$\int_0^{p_\beta \delta} \int_\Gamma \left| v_{\text{int}}^\beta(m, \eta_\beta) \right|^2 d\Gamma d\eta_\beta \leq c\delta \left(\left\| v_{\text{int}|_\Gamma}^\beta \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \left\| \partial_{\eta_\beta} v_{\text{int}}^\beta \right\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})}^2 \right).$$

D'où, en utilisant les inégalités de trace

$$\left\| v_{\text{int}}^\beta \right\|_{L^2(\Omega_{\delta,\beta})} \leq c\delta^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Puisque $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ est arbitraire, nous pouvons conclure par densité que la dernière estimation ci-dessus reste vraie pour tout v dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, pour $v = u_{\delta_n}$, nous obtenons

$$\left\| u_{\text{int},\delta_n}^\beta \right\|_{L^2(\Omega_{\delta_n,\beta})} \leq c\delta_n^{1/2}. \quad (10.21)$$

Finalement, de (10.20) et (10.21), nous concluons que

$$\left\| u_{\text{int},\delta_n}^\beta \right\|_{H^1(\Omega_{\delta_n,\beta})} \leq c\delta_n^{1/2}. \quad (10.22)$$

2^{ème} étape : Montrons que $u_0 = 0$ sur Ω .

Compte tenu de (2.11), (10.22) et de

$$\begin{aligned} \|u_\delta\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})}^2 &= p_\beta \delta \int_{\Omega^\beta} J_{\delta,\beta}^{-2} \left| \nabla_\Gamma u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} \right|^2 \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_\beta \\ &\quad + p_\beta^{-1} \delta^{-1} \int_{\Omega^\beta} \left| \partial_{s_\beta} u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} \right|^2 \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_\beta + \delta p_\beta \int_{\Omega^\beta} \left| u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} \right|^2 \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_\beta, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\left\| \nabla_\Gamma u_{\text{int},\delta_n}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} \leq c, \quad (10.23)$$

$$\left\| \partial_{s_\beta} u_{\text{int},\delta_n}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} \leq c \delta_n, \quad (10.24)$$

$$\left\| u_{\text{int},\delta_n}^{[\beta]} \right\|_{L^2(\Omega^\beta)} \leq c. \quad (10.25)$$

Soit maintenant l'espace de Hilbert X défini par

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ V := (v, v^{[1]}, v^{[2]}) \in H^1(\Omega) \times H^1(I_1, H^1(\Gamma)) \times H^1(I_2, H^1(\Gamma)) \ ; \right. \\ &\quad \left. v^{[\beta]}(m, 0) = v|_\Gamma, \ \beta = 1, 2 \right\}, \end{aligned}$$

équipé de la la norme naturelle. Il découle de (10.15) et (10.23)-(10.25) que la suite $(U_{\delta_n})_n$ définie par $U_{\delta_n} := (u_{\delta_n}, u_{\text{int},\delta_n}^{[1]}, u_{\text{int},\delta_n}^{[2]})$ est bornée dans X . Il existe alors une sous-suite de $(U_{\delta_n})_{n \geq 0}$, notée $(U_{\delta_n})_{n \geq 0}$, telle que $(U_{\delta_n})_{n \geq 0}$ converge faiblement vers un élément $U_0 := (u_0, \omega_0^{[1]}, \omega_0^{[2]})$ dans X .

De (10.24), nous obtenons $\partial_{s_\beta} \omega_0^{[\beta]} = 0$, par conséquent $\omega_0^{[\beta]}$ est indépendant de s_β , i.e.,

$$\omega_0^{[\beta]}(m, s_\beta) = u_0|_\Gamma, \quad \forall (m, s_\beta) \in \Omega^\beta.$$

Par ailleurs, pour toute fonction régulière v , $a_\delta(\cdot, \cdot)$ se met sous la forme

$$\begin{aligned}
 a_\delta(u_\delta, v) &= \int_{\Omega} \sigma_0 \nabla u_\delta \cdot \nabla \bar{v} - k_0^2 u_\delta \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle Tu_\delta|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \\
 &\quad - \int_{\Omega_{\delta,1}} \sigma^- \nabla u_{\text{int},\delta}^1 \cdot \nabla \bar{v}_{\text{int}}^1 - k_-^2 u_{\text{int},\delta}^1 \bar{v}_{\text{int}}^1 \, d\Omega_{\delta,1} - \int_{\Omega_{\delta,2}} \sigma^+ \nabla u_{\text{int},\delta}^2 \cdot \nabla \bar{v}_{\text{int}}^2 - k_+^2 u_{\text{int},\delta}^2 \bar{v}_{\text{int}}^2 \, d\Omega_{\delta,2} \\
 &\quad + \sum_{\beta=1}^2 \left[p_\beta \tilde{\sigma} \int_{\Omega^\beta} J_{\delta,\beta}^{-2} \nabla_\Gamma u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_\beta \right. \\
 &\quad + p_\beta^{-1} \delta^{-2} \tilde{\sigma} \int_{\Omega^\beta} \partial_{s_\beta} u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} \partial_{s_\beta} \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_\beta \\
 &\quad \left. - p_\beta \tilde{k}^2 \int_{\Omega^\beta} u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \det J_{\delta,\beta} \, d\Gamma ds_\beta \right]. \tag{10.26}
 \end{aligned}$$

Le choix de v assez régulier dans $H_{n,0}^1(\Omega)$ (Lemme 42), vérifiant par conséquent $\partial_{s_\beta} v_{\text{int}}^{[\beta]} = 0$, permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 &p_\beta \tilde{\sigma} \int_{\Omega^\beta} J_{\delta_n,\beta}^{-2} \nabla_\Gamma u_{\text{int},\delta_n}^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \det J_{\delta_n,\beta} \, d\Gamma ds_\beta + p_\beta^{-1} \delta_n^{-2} \tilde{\sigma} \int_{\Omega^\beta} \partial_{s_\beta} u_{\text{int},\delta_n}^{[\beta]} \partial_{s_\beta} \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \det J_{\delta_n,\beta} \, d\Gamma ds_\beta \\
 &\quad - p_\beta \tilde{k}^2 \int_{\Omega^\beta} u_{\text{int},\delta_n}^{[\beta]} \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \det J_{\delta_n,\beta} \, d\Gamma ds_\beta \\
 &\quad \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_\beta \tilde{\sigma} \int_{\Omega^\beta} \nabla_\Gamma \omega_0^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \, d\Gamma ds_\beta - p_\beta \tilde{k}^2 \int_{\Gamma} \omega_0^{[\beta]} \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \, d\Gamma ds_\beta. \tag{10.27}
 \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\omega_0^{[\beta]}$ est indépendant de s_β , nous trouvons

$$p_\beta \tilde{\sigma} \int_{\Omega^\beta} \nabla_\Gamma \omega_0^{[\beta]} \cdot \nabla_\Gamma \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \, d\Gamma ds_\beta = p_\beta \tilde{\sigma} \int_{\Gamma} \nabla_\Gamma u_{0|\Gamma} \cdot \nabla_\Gamma \bar{v}_{|\Gamma} \, d\Gamma \tag{10.28}$$

$$-p_\beta \tilde{k}^2 \int_{\Omega^\beta} \omega_0^{[\beta]} \bar{v}_{\text{int}}^{[\beta]} \, d\Gamma ds_\beta = -p_\beta \tilde{k}^2 \int_{\Gamma} u_{0|\Gamma} \bar{v}_{|\Gamma} \, d\Gamma. \tag{10.29}$$

Comme $U_0 \in X$ et $\omega_0^{[\beta]}$ est indépendant de s_β , alors $\omega_0^{[\beta]}(m, s_\beta) = \omega_0^{[\beta]}(m, 0) = u_{0|\Gamma} \in H^1(\Gamma)$, ce qui donne un sens aux deux dernières égalités. Finalement, nous obtenons de (10.15) et (10.27)-(10.29)

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, v) = \int_{\Omega} \sigma_0 \nabla u_0 \cdot \nabla \bar{v} - k_0^2 u_0 \bar{v} \, d\Omega + \sigma^+ \langle Tu_0|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \\
 &\quad + \tilde{\sigma} \int_{\Gamma} \nabla_\Gamma u_{0|\Gamma} \cdot \nabla_\Gamma \bar{v}_{|\Gamma} \, d\Gamma - \tilde{k}^2 \int_{\Gamma} u_{0|\Gamma} \bar{v}_{|\Gamma} \, d\Gamma. \tag{10.30}
 \end{aligned}$$

Par densité (Lemme 42), nous déduisons que (10.30) est vrai pour toute fonction v dans

$H^1(\Omega)$. Le Théorème 41 montre que le problème : Trouver u_0 dans $H^1_\Gamma(\Omega)$ vérifiant (10.30), $\forall v \in H^1_\Gamma(\Omega)$, est bien posé, de plus $u_0 = 0$.

3^{ème} étape : *Obtenir la contradiction*

Pour obtenir la contradiction, il suffit alors de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Compte tenu de l'unicité de la solution u_0 , toute la suite $(U_{\delta_n})_{n \geq 0}$ converge vers $U_0 = 0$ et par conséquent toute la suite $(u_{\delta_n})_{n \geq 0}$ converge vers $u_0 = 0$ dans $L^2(\Omega)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c \Re \left[\int_{\Omega} \sigma_{\delta_n} \nabla u_{\delta_n} \cdot \nabla \overline{u_{\delta_n}} \, d\Omega \right] = c \int_{\Omega} \sigma_{\delta_n} |\nabla u_{\delta_n}|^2 \, d\Omega \\ &= c \Re \left[a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, u_{\delta_n}) + \int_{\Omega} k_{\delta_n}^2 |u_{\delta_n}|^2 \, d\Omega - \sigma^+ \left\langle T u_{\delta_n}|_{\partial\Omega}, \overline{u_{\delta_n}|_{\partial\Omega}} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Utilisant le Lemme 23, nous pouvons écrire

$$\|\nabla u_{\delta_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \Re \left[a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, u_{\delta_n}) + \int_{\Omega} k_{\delta_n}^2 |u_{\delta_n}|^2 \, d\Omega - \sigma^+ \left\langle K u_{\delta_n}|_{\partial\Omega}, \overline{u_{\delta_n}|_{\partial\Omega}} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \right].$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_{\delta_n}^2 |u_{\delta_n}|^2 \, d\Omega &= \int_{\Omega_{\delta_n}^-} k_-^2 |u_{\delta_n}^-|^2 \, d\Omega_{\delta_n}^- + \int_{\Omega_{\delta_n}^+} k_+^2 |u_{\delta_n}^+|^2 \, d\Omega_{\delta_n}^+ \\ &\quad + \delta_n^{-1} \sum_{\beta=1}^2 \int_{\Omega_{\delta_n, \beta}} \tilde{k}^2 |u_{\text{int}, \delta_n}^{\beta}|^2 \, d\Omega_{\delta_n, \beta} \\ &= \int_{\Omega_{\delta_n}^-} k_-^2 |u_{\delta_n}^-|^2 \, d\Omega_{\delta_n}^- + \int_{\Omega_{\delta_n}^+} k_+^2 |u_{\delta_n}^+|^2 \, d\Omega_{\delta_n}^+ \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^2 \int_{\Omega^{\beta}} \tilde{k}^2 |u_{\text{int}, \delta_n}^{[\beta]}|^2 \det J_{\delta_n, \beta} \, d\Gamma ds_{\beta} \\ &= \int_{\Omega} k_0^2 |u_{\delta_n}|^2 \, d\Omega + \sum_{\beta=1}^2 \int_{\Omega^{\beta}} \tilde{k}^2 |u_{\text{int}, \delta_n}^{[\beta]}|^2 \det J_{\delta_n, \beta} \, d\Gamma ds_{\beta} \\ &\quad - \delta_n \int_{\Omega^1} k_-^2 |u_{\text{int}, \delta_n}^{[1]}|^2 \det J_{\delta, 1} \, d\Gamma ds_1 - \int_{\Omega^2} k_+^2 |u_{\text{int}, \delta_n}^{[2]}|^2 \det J_{\delta, 2} \, d\Gamma ds_2, \end{aligned}$$

$u_{\delta_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 = 0$ dans $L^2(\Omega)$ et $u_{\text{int}, \delta_n}^{[\beta]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_{\text{int}, 0}^{[\beta]} = u_0|_{\Gamma} = 0$ dans $L^2(I_{\beta}, H^1(\Gamma))$, par

conséquent $\int_{\Omega} k_{\delta_n}^2 |u_{\delta_n}|^2 \, d\Omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'autre part, puisque K est compact et $u_{\delta_n} \rightarrow 0$ dans

$H^1(\Omega)$, nous obtenons $\left\langle Ku_{\delta_n}|_{\partial\Omega}, \overline{u_{\delta_n}|_{\partial\Omega}} \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Re [a_{\delta_n}(u_{\delta_n}, u_{\delta_n})] = 0$ conduit à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_{\delta_n}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$ ce qui contredit $\|u_{\delta_n}\|_{H^1(\Omega)} = 1$. ■

Chapitre 11

Analyse asymptotique

Nous souhaitons, dans ce chapitre, construire un développement asymptotique de la solution u_δ du problème (9.1) quand le paramètre δ tend vers 0. A cause de la dépendance des conditions (9.1) et (9.11) du petit paramètre δ , les calculs et les résultats obtenus sont différents de ceux obtenus dans la 2^{ème} partie, voire même plus difficiles. Nous donc choisi d'exhiber les détails des calculs afin de rendre la lecture plus facile.

De manière similaire à celle des parties précédentes, nous supposons deux types de développements asymptotiques : un externe correspondant au développement de u_δ^\pm et donné par l'ansatz

$$\begin{cases} u_\delta^- = u_0^- + \delta u_1^- + \dots & \text{dans } \Omega_\delta^-, \\ u_\delta^+ = u_0^+ + \delta u_1^+ + \dots & \text{dans } \Omega_\delta^+, \end{cases} \quad (11.1)$$

où les termes u_n^\pm ($n \in \mathbb{N}$) sont indépendants de δ , définis sur Ω^\pm (Voir Fig. 7.2) et vérifient

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_n^-) + k_-^2 u_n^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_n^+) + k_+^2 u_n^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_n^+ - \delta_{0,n} u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

et un interne correspondant au développement de $u_{\text{int},\delta}^\beta$ exprimée en coordonnées curvilignes (m, s_β) et donné par

$$u_{\text{int},\delta}^\beta \circ \Phi_\beta := u_{\text{int},\delta}^{[\beta]} = u_{\text{int},0}^{[\beta]} + \delta u_{\text{int},1}^{[\beta]} + \dots \quad \text{dans } \Omega^\beta, \quad (11.3)$$

où les termes $u_{\text{int},n}^{[\beta]}$, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendants de δ .

En démarrant de (9.3) et (9.4) et en reprenant ligne par ligne les étapes du Chapitre

7, nous obtenons une hiérarchie d'équations variationnelles

$$a_{0,2}^{[1]} \left(u_{\text{int},0}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + a_{0,2}^{[2]} \left(u_{\text{int},0}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) = 0, \quad (11.4)$$

$$\sum_{\beta=1}^2 \left[a_{0,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + a_{1,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},0}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] = 0, \quad (11.5)$$

pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[\beta]}$ dans $H^1(I_\beta; L^2(\Gamma))$ telle que $v_{\text{int}}^{[1]}(\cdot, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(\cdot, 0)$, et

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{0,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + a_{1,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{2,2}^{[\beta]} + a_{0,1}^{[\beta]} + b_0^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] \\ & + \int_{\Gamma} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sigma^- \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - 2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma + \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{0,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},3}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right. \\ & + a_{1,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{2,2}^{[\beta]} + a_{0,1}^{[\beta]} + b_0^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{1,1}^{[\beta]} + b_1^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \left. \right] \\ & - \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + 2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sigma^- \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{2|\Gamma}^- + p_1^2 \mathcal{K} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - 2p_1 \mathcal{H} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right) - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{1|\Gamma}^- \right. \\ & + \left. \frac{p_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_{0|\Gamma}^- \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma + \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{0,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},4}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + a_{1,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},3}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right. \\ & + \left(a_{0,1}^{[\beta]} + a_{2,2}^{[\beta]} + b_0^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{1,1}^{[\beta]} + b_1^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \\ & + \left. \left(a_{2,1}^{[\beta]} + b_2^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] - \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{2|\Gamma}^+ + p_2^2 \mathcal{K} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right. \\ & + \left. 2p_2 \mathcal{H} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{1|\Gamma}^+ + \frac{p_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0, \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \sigma^- \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^- + \dots \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma \\
 & + \sum_{\beta=1}^2 \left[a_{0,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},n+2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + a_{1,2}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},n+1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{0,1}^{[\beta]} + a_{2,2}^{[\beta]} + b_0^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},n}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right. \\
 & + \left(a_{1,1}^{[\beta]} + b_1^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},n-1}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) + \left(a_{2,1}^{[\beta]} + b_2^{[\beta]} \right) \left(u_{\text{int},n-2}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \\
 & \left. + \sum_{l=3}^n a_{l,1}^{[\beta]} \left(u_{\text{int},n-l}^{[\beta]}, v_{\text{int}}^{[\beta]} \right) \right] - \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[\partial_{\mathbf{n}} u_{n|\Gamma}^+ + \dots \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0, \quad n \geq 3.
 \end{aligned}$$

pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[\beta]}$ dans $H^1(\Omega^\beta)$ telle que $v_{\text{int}}^{[1]}(\cdot, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(\cdot, 0)$, où les formes bilinéaires $a_{k,l}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ et $b_k^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ sont indépendantes de δ et sont définies par les relations (7.30)-(7.36) et (7.38)-(7.40) en remplaçant uniquement les paramètres $\tilde{\sigma}_\delta$ par $\tilde{\sigma}$ et \tilde{k}_δ^2 par \tilde{k}^2 .

11.1 Calcul des premiers termes

11.1.1 Termes d'ordre 0

L'équation (11.4) implique

$$\partial_{s_\beta} u_{\text{int},0}^{[\beta]} = 0. \quad (11.8)$$

D'où, en utilisant (7.24) et (7.26), nous obtenons

$$u_{0|\Gamma}^- = u_{\text{int},0}^{[1]}(m, s_1) = u_{\text{int},0}^{[2]}(m, s_2) = u_{0|\Gamma}^+, \quad m \in \Gamma. \quad (11.9)$$

De même, (11.8), (11.5) conduisent à

$$\partial_{s_\beta} u_{\text{int},1}^{[\beta]} = 0. \quad (11.10)$$

Choisissons maintenant $v_{\text{int}}^{[1]} = 0$ dans (11.6), nous avons

$$\begin{aligned}
 & a_{0,2}^{[2]} \left(u_{\text{int},2}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + \left(a_{0,1}^{[2]} + b_0^{[2]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 & - \int_{\Gamma} \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0.
 \end{aligned} \quad (11.11)$$

Appliquant le Lemme 10 avec

$$\begin{aligned} h^{[2]} &= p_2^{-1} \tilde{\sigma} \partial_{s_2} u_{\text{int},2}^{[2]}, & q^{[2]}(m) &= -\sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+, \\ k^{[2]} &= p_2 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{\text{int},0}^{[2]} = p_2 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+, \end{aligned}$$

et

$$\theta^{[2]} = -p_2 \tilde{k}^2 u_{\text{int},0}^{[2]} = -p_2 \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^+,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} p_2^{-1} \tilde{\sigma} \partial_{s_2} u_{\text{int},2}^{[2]} &= \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \int_{s_2}^1 \left(p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ + p_2 \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) (m, \lambda) \, d\lambda \\ &= \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + p_2 (1 - s_2) \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right). \end{aligned}$$

De plus, pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[2]}$ dans $H^1(\Omega^2)$, nous avons

$$\begin{aligned} &a_{0,2}^{[2]} \left(u_{\text{int},2}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + \left(a_{0,1}^{[2]} + b_0^{[2]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma \\ &\quad = - \int_{\Gamma} h^{[2]}(m, 0) v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left[-\sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ - p_2 \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) \, d\Gamma, \end{aligned} \tag{11.12}$$

De manière similaire, le choix de $v_{\text{int}}^{[2]} = 0$ dans (11.6) donne

$$\begin{aligned} &a_{0,2}^{[1]} \left(u_{\text{int},2}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + \left(a_{0,1}^{[1]} + b_0^{[1]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{11.13}$$

Appliquant le Lemme 10

$$\begin{aligned} h^{[1]} &= p_1^{-1} \tilde{\sigma} \partial_{s_1} u_{\text{int},2}^{[1]}, \\ q^{[1]}(m) &= \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-, \\ k^{[1]} &= p_1 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{\text{int},0}^{[1]} = p_1 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- \end{aligned}$$

et

$$\theta^{[1]} = -p_1 \tilde{k}^2 u_{\text{int},0}^{[1]} = -p_2 \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^-,$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} p_1^{-1} \tilde{\sigma} \partial_{s_1} u_{\text{int},2}^{[1]} &= \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - \int_{-1}^{s_1} \left(p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- + p_1 \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^- \right) d\lambda. \\ &= \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - (s_1 + 1) p_1 \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^- \right). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Par ailleurs, $\forall v_{\text{int}}^{[1]} \in H^1(\Omega^1)$, nous avons

$$\begin{aligned} &a_{0,2}^{[1]} \left(u_{\text{int},2}^{[1]}, v^{[1]} \right) + \left(a_{0,1}^{[1]} + b_0^{[1]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left[\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - p_1 \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^- \right) \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Par conséquent, de (11.6), (11.12) et (11.16), nous déduisons

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \left[\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - p_1 \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^- \right) \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \left[\sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + p_2 \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) d\Gamma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mais comme $v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) = v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ &= p_1 \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^- \right) + p_2 \left(\tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) \\ &= \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^-. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Compte tenu de (11.2), (11.9), (11.16) et du Théorème 41, (u_0^-, u_0^+) est l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_0^-) + k_-^2 u_0^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_0^+) + k_+^2 u_0^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u_{0|\Gamma}^- = u_{0|\Gamma}^+ & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ = \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- + \tilde{k}^2 u_{0|\Gamma}^- & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_0^+ - u_{\text{inc}}) = 0. & \end{array} \right.$$

Remarque 43 Notons que, dans ce cas, l'effet de la couche mince apparait dès le premier terme du développement asymptotique.

11.1.2 Termes d'ordre 1

En vertu de (11.10) et en identifiant les termes d'ordre 1 dans (7.24) et (7.26), nous obtenons, pour tout $(m, s_\beta) \in \Omega^\beta$

$$\begin{aligned} u_{\text{int},1}^{[1]}(m, s_1) &= u_{\text{int},1}^{[2]}(m, s_2) \\ &= u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \\ &= u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-. \end{aligned}$$

D'où

$$u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ = p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+. \quad (11.17)$$

Par ailleurs, en choisissant $v_{\text{int}}^{[1]} = 0$ dans (11.7), nous trouvons

$$\begin{aligned} a_{0,2}^{[2]} \left(u_{\text{int},3}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + a_{1,2}^{[2]} \left(u_{\text{int},2}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + \left(a_{0,1}^{[2]} + b_0^{[2]} \right) \left(u_{\text{int},1}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + \left(a_{1,1}^{[2]} + b_1^{[2]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\ - \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (11.18)$$

Ainsi, en appliquant le Lemme 10 avec

$$\begin{aligned} h^{[2]} &= p_2^{-1} \tilde{\sigma} \partial_{s_2} u_{\text{int},3}^{[2]} + 2\tilde{\sigma} \mathcal{H} s_2 \partial_{s_2} u_{\text{int},2}^{[2]}, \\ q^{[2]}(m) &= -\sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right], \\ k^{[2]} &= p_2 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{\text{int},1}^{[2]} + 2p_2^2 \tilde{\sigma} s_2 (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{\text{int},0}^{[2]} \\ &= p_2 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) + 2p_2^2 \tilde{\sigma} s_2 (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta^{[2]} &= -p_2 \tilde{k}^2 u_{\text{int},1}^{[2]} - p_2^2 \tilde{k}^2 2s_2 \mathcal{H} u_{\text{int},0}^{[2]} \\ &= -p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ - p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ - p_2^2 \tilde{k}^2 2s_2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$h^{[2]} = -q^{[2]}(m) + \int_{s_2}^1 \left(\text{div}_{\Gamma} k^{[2]} - \theta^{[2]} \right) (m, \lambda) \, d\lambda$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] \\
 &+ \int_{s_2}^1 \left[p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) + 2p_2^2 \tilde{\sigma} \lambda \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ \right) \right. \\
 &+ \left. p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 2\lambda \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ \right] d\lambda \\
 &= \sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] \\
 &+ (1 - s_2) \left(p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) \right) \\
 &+ (1 - s_2^2) \left[p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ \right) \right] \\
 &+ (1 - s_2) \left(p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) + (1 - s_2^2) \left(p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ \right).
 \end{aligned}$$

De plus, pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[2]}$ dans $H^1(\Omega^2)$

$$\begin{aligned}
 &a_{0,2}^{[2]} \left(u_{\text{int},3}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + a_{1,2}^{[2]} \left(u_{\text{int},2}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + \left(a_{0,1}^{[2]} + b_0^{[2]} \right) \left(u_{\text{int},1}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) + \left(a_{1,1}^{[2]} + b_1^{[2]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[2]}, v_{\text{int}}^{[2]} \right) \\
 &- \int_{\Gamma} \sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 1) \, d\Gamma \\
 &= - \int_{\Gamma} h^{[2]}(m, 0) v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) \, d\Gamma \\
 &= - \int_{\Gamma} \left[\sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] \right. \\
 &+ \left. p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) + p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ \right) \right. \\
 &+ \left. p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) \, d\Gamma. \tag{11.19}
 \end{aligned}$$

De façon similaire, le choix de $v_{\text{int}}^{[2]} = 0$ dans (11.7) conduit à

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma \\
 &+ a_{0,2}^{[1]} \left(u_{\text{int},3}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + a_{1,2}^{[1]} \left(u_{\text{int},2}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + \left(a_{0,1}^{[1]} + b_0^{[1]} \right) \left(u_{\text{int},1}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\
 &+ \left(a_{1,1}^{[1]} + b_1^{[1]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) = 0. \tag{11.20}
 \end{aligned}$$

D'où, en appliquant le Lemme 10 avec

$$\begin{aligned}
 h^{[1]} &= p_1^{-1} \tilde{\sigma} \partial_{s_1} u_{\text{int},3}^{[1]} + 2\tilde{\sigma} \mathcal{H} s_1 \partial_{s_1} u_{\text{int},2}^{[1]}, \\
 q^{[1]}(m) &= \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k^{[1]} &= p_1 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{\text{int},1}^{[1]} + 2p_1^2 \tilde{\sigma} s_1 (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{\text{int},0}^{[1]} \\
 &= p_1 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{\sigma} \nabla_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) + 2p_1^2 \tilde{\sigma} s_1 (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^-,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \theta^{[1]} &= -p_1 \tilde{k}^2 u_{\text{int},1}^{[1]} - p_{\beta}^2 \tilde{k}^2 2s_1 \mathcal{H}u_{\text{int},0}^{[1]} \\
 &= -p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{k}^2 2s_1 \mathcal{H}u_{0|\Gamma}^-,
 \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 h^{[1]} &= q^{[1]}(m) - \int_{-1}^{s_1} \left(\text{div}_{\Gamma} k^{[1]} - \theta^{[1]} \right) (m, \lambda) \, d\lambda \\
 &= \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] \\
 &\quad - \int_{-1}^{s_1} \left[p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) + 2p_1^2 \tilde{\sigma} \lambda \text{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} \right) u_{0|\Gamma}^- \right. \\
 &\quad \left. + p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{k}^2 2\lambda \mathcal{H}u_{0|\Gamma}^- \right] d\lambda \\
 &= \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] \\
 &\quad - \left[(s_1 + 1) \left(p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (s_1^2 - 1) p_1^2 \tilde{\sigma} \text{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} \right) u_{0|\Gamma}^- + (s_1^2 - 1) p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H}u_{0|\Gamma}^- \right. \\
 &\quad \left. + (s_1 + 1) \left(p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) \right].
 \end{aligned}$$

De plus, pour toute fonction $v_{\text{int}}^{[1]}$ dans $H^1(\Omega^1)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] v_{\text{int}}^{[1]}(m, -1) \, d\Gamma \\
 &+ a_{0,2}^{[1]} \left(u_{\text{int},3}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + a_{1,2}^{[1]} \left(u_{\text{int},2}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + \left(a_{0,1}^{[1]} + b_0^{[1]} \right) \left(u_{\text{int},1}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) + \left(a_{1,1}^{[1]} + b_1^{[1]} \right) \left(u_{\text{int},0}^{[1]}, v_{\text{int}}^{[1]} \right) \\
 &= \int_{\Gamma} h^{[1]}(m, 0) v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) \, d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \left\{ \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] \right. \\
 &\quad \left. - p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) + p_1^2 \tilde{\sigma} \text{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} \right) u_{0|\Gamma}^- \right. \\
 &\quad \left. - p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H}u_{0|\Gamma}^- \right\} v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) \, d\Gamma. \tag{11.21}
 \end{aligned}$$

Il découle de (11.7), (11.19) et (11.21)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \left\{ \sigma^- \left[-2p_1 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- \right] \right. \\
 & - p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) + p_1^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} \right) u_{0|\Gamma}^- \\
 & \left. - p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^- \right\} v_{\text{int}}^{[1]}(m, 0) \, d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma} \left[\sigma^+ \left[2p_2 \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] \right. \\
 & + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) + p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ \right) \\
 & \left. + p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ \right] v_{\text{int}}^{[2]}(m, 0) \, d\Gamma = 0,
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
 \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ &= 2p_2 \sigma^+ \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + 2p_1 \sigma^- \mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_2 \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^+ \\
 & + p_1 \sigma^- \partial_{\mathbf{n}}^2 u_{0|\Gamma}^- + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) \\
 & + p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ \right) - p_1^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} \right) u_{0|\Gamma}^- \\
 & + p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ \\
 & + p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) + p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- \\
 & - p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^-.
 \end{aligned} \tag{11.22}$$

Utilisant maintenant l'identité ([38, p. 75])

$$\Delta u = \Delta_{\Gamma} u + 2\mathcal{H} \partial_{\mathbf{n}} u + \partial_{\mathbf{n}}^2 u,$$

la condition (11.22) devient

$$\begin{aligned}
 \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ &= p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ \\
 & - p_2 \sigma^+ \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ - p_1 \sigma^- \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- - p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^- - p_1 k_-^2 u_{0|\Gamma}^- \\
 & + p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ - p_2 k_+^2 u_{0|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ \right) \\
 & - p_1^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} \right) u_{0|\Gamma}^- + p_2^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) \\
 & + p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ - p_1^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) - p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-.
 \end{aligned} \tag{11.23}$$

Finalement, en vertu de (11.2), (11.17), (11.23) et du Théorème 41, nous déduisons que (u_1^-, u_1^+) est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_1^-) + k_-^2 u_1^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_1^+) + k_+^2 u_1^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) u_1^+ = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur l'interface Γ

$$\begin{aligned} u_{1|\Gamma}^- - u_{1|\Gamma}^+ &= p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ &= p_1 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} u_{1|\Gamma}^+ + p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- \\ &\quad + p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ - p_2 \sigma^+ \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ - p_1 \sigma^- \Delta_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^- \\ &\quad - p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^- - p_1 k_-^2 u_{0|\Gamma}^- + p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ \\ &\quad - p_2 k_+^2 u_{0|\Gamma}^+ + p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{0|\Gamma}^+ \right) \\ &\quad - p_1^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} \right) u_{0|\Gamma}^- + p_2^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) \\ &\quad + p_2^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ - p_1^2 \tilde{\sigma} \Delta_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) - p_1^2 \tilde{k}^2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^-. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Remarque 44 Dans un souci de simplification, nous ne donnerons pas dans cette partie les résultats d'existence et d'unicité des suites (u_j^{\pm}) et $(u_{int,j}^{[\beta]})$ ni le théorème de convergence justifiant les expressions (11.1) et (11.3). La structure de ces résultats étant similaire à celle des parties précédentes, nous laissons au lecteur le soin de reformuler et de démontrer ces théorèmes.

Chapitre 12

Conditions de transmission approchées

A l'instar des deux parties précédentes, nous allons déterminer dans cette section un problème modèle à l'ordre 1 pour approcher le champ lointain qui, à son tour, conduira à une approximation de u_δ sur \mathbb{R}^3 tout entier avec un taux de convergence en $O(\delta^2)$. La structure complexe des conditions de transmission nous amène à ne considérer, cette fois-ci, qu'une seule position de la surface Γ en fonction des constantes σ^\pm et $\tilde{\sigma}$ contrairement à la deuxième partie où nous avons déterminé un nombre infini de positions de Γ . Nous supposerons en outre et jusqu'à la fin de ce mémoire que toutes les constantes k_\pm et \tilde{k} sont réelles.

12.1 Réécriture des conditions de transmission

Nous souhaitons suivre la démarche utilisée dans la 2^{ème} partie pour dériver un problème approché à l'ordre 1. Pour démontrer l'unicité de la solution, nous rencontrons deux problèmes : Le premier provient des termes $\Delta_\Gamma(\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^+)$ et $\Delta_\Gamma(\partial_{\mathbf{n}}u_{0|\Gamma}^-)$ dans la condition (11.24). Pour contourner cette difficulté, nous déterminerons les constantes p_1 et p_2 de sorte à faire disparaître ces termes. En effet, en vertu de (11.16), la condition (11.24) devient

$$\begin{aligned}\sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ &= p_1 \tilde{\sigma} \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^+ + p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- \\ &+ p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ - p_2 \sigma^+ \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ - p_1 \sigma^- \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^-\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ - p_2 k_+^2 u_{0|\Gamma}^+ - p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^- - p_1 k_-^2 u_{0|\Gamma}^- \\
 & + p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ \right) - p_1^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma \left((\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma \right) u_{0|\Gamma}^- \\
 & + (\sigma^- p_2^2 - p_1^2 \sigma^+) \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^-} \Delta_\Gamma \left(\partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right) + (\sigma^- p_2^2 - p_1^2 \sigma^+) \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \\
 & - 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- - p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^-} \left(\Delta_\Gamma^2 u_{0|\Gamma}^- \right) - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} u_{0|\Gamma}^-.
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

D'où, en posant $\sigma^- p_2^2 - p_1^2 \sigma^+ = 0$, nous obtenons

$$p_1 = \frac{\sqrt{\sigma^-}}{\sqrt{\sigma^-} + \sqrt{\sigma^+}} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{\sqrt{\sigma^+}}{\sqrt{\sigma^-} + \sqrt{\sigma^+}},$$

Par conséquent, (12.1) se transforme en

$$\begin{aligned}
 \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ & = p_1 \tilde{\sigma} \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^+ \\
 & + p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ - p_2 \sigma^+ \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ - p_1 \sigma^- \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- \\
 & + p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^+ - p_2 k_+^2 u_{0|\Gamma}^+ - p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} u_{0|\Gamma}^- - p_1 k_-^2 u_{0|\Gamma}^- \\
 & + p_2^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma \left[(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ \right] - p_1^2 \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma \left[(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma \right] u_{0|\Gamma}^- \\
 & - 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- - p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^-} \left(\Delta_\Gamma^2 u_{0|\Gamma}^- \right) - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} u_{0|\Gamma}^-.
 \end{aligned} \tag{12.2}$$

Nous ferons ainsi, dans tout ce qui suit, l'hypothèse

$$p_1 = \frac{\sqrt{\sigma^-}}{\sqrt{\sigma^-} + \sqrt{\sigma^+}} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{\sqrt{\sigma^+}}{\sqrt{\sigma^-} + \sqrt{\sigma^+}}.$$

Le deuxième problème, provient de la condition (12.2) elle-même et de sa complexité. Une nouvelle écriture est nécessaire. Ainsi, de (11.9) et (12.2), nous déduisons une forme, certes plus longue mais mieux adaptée pour traiter, toujours, l'unicité de la solution du problème approché

$$\begin{aligned}
 \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ & = p_1 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{k}^2 u_{1|\Gamma}^+ \\
 & + \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_2 k_+^2 - p_1 k_-^2 - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} \right) u_{0|\Gamma}^+ \\
 & + p_1 \tilde{\sigma} \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^- + p_2 \tilde{\sigma} \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_1^2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_2 k_+^2 - p_1 k_-^2 - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} \right) u_{0|\Gamma}^- \\
 & + \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(-p_2 \sigma^+ - p_1 \sigma^- - 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \right) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^+ \\
 & + \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(-p_2 \sigma^+ - p_1 \sigma^- - 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \right) \Delta_\Gamma u_{0|\Gamma}^- \\
 & + \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} (p_2 - p_1) \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] u_{0|\Gamma}^+ \\
 & + \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} (p_2 - p_1) \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] u_{0|\Gamma}^- \\
 & + \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(-p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^-} \right) \left(\Delta_\Gamma^2 u_{0|\Gamma}^+ \right) \\
 & + \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(-p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^-} \right) \left(\Delta_\Gamma^2 u_{0|\Gamma}^- \right)
 \end{aligned}$$

12.2 Problème Modèle

Tronquant les séries définissant les développements asymptotiques en ne conservant que les deux premiers termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 u_\delta^+ & \simeq u_\delta^{+, (1)} := u_0^+ + \delta u_1^+ \quad \text{dans } \Omega_\delta^+, \\
 u_\delta^- & \simeq u_\delta^{-, (1)} := u_0^- + \delta u_1^- \quad \text{dans } \Omega_\delta^-, \\
 u_{\text{int}, \delta} & \simeq u_{\text{int}, \delta}^{(1)} := u_{\text{int}, 0} + \delta u_{\text{int}, 1} \quad \text{dans } \Omega_\delta,
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
 u_{\text{int}, \delta|\Omega_{\delta, \beta}}^{(1)}(x) & := u_{\text{int}, \delta}^{\beta, (1)}(x) := u_{\text{int}, \delta}^{\beta, (1)}(m, \delta s_\beta) := u_{\text{int}, \delta}^{[\beta], (1)}(m, s_\beta) \\
 & = u_{0|\Gamma}^- + \delta \left(u_{1|\Gamma}^- - p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^- \right) \\
 & = u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left(u_{1|\Gamma}^+ + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{0|\Gamma}^+ \right), \\
 \forall x & = \Phi_\beta(m, s_\beta) \in \Omega_{\delta, \beta},
 \end{aligned} \tag{12.3}$$

Le développement asymptotique tronqué du champ lointain $(u_\delta^{-,(1)}, u_\delta^{+,(1)})$ résout le problème suivant

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\sigma^- \nabla u_\delta^{-,(1)} \right) + k_-^2 u_\delta^{-,(1)} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div} \left(\sigma^+ \nabla u_\delta^{+,(1)} \right) + k_+^2 u_\delta^{+,(1)} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} + \delta p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} - \delta^2 \pi & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} = \mathcal{K} \left(u_{\delta|\Gamma}^{-,(1)}, u_{\delta|\Gamma}^{+,(1)} \right) - \delta^2 \mu & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left(\partial_{|x|} - ik_+ \right) \left(u_\delta^{+,(1)} - u_{inc} \right) = 0, \end{cases} \quad (12.4)$$

avec

$$\pi := \left(p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^- + p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{1|\Gamma}^+ \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} (u_{|\Gamma}, v_{|\Gamma}) &:= \alpha_{\delta,1} u_{|\Gamma} + \alpha_{\delta,2} v_{|\Gamma} + \alpha_{\delta,3} \Delta_\Gamma u_{|\Gamma} \\ &\quad + \alpha_{\delta,4} \Delta_\Gamma v_{|\Gamma} - \alpha_{\delta,7} \Delta_\Gamma^2 u_{|\Gamma} - \alpha_{\delta,8} \Delta_\Gamma^2 v_{|\Gamma} \\ &\quad + \alpha_{\delta,5} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] u_{|\Gamma} \\ &\quad + \alpha_{\delta,6} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] v_{|\Gamma} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{\delta,1} &:= p_1 \tilde{k}^2 + \delta \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_1 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_2 k_e^2 - p_1 k_i^2 - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} \right), \\ \alpha_{\delta,2} &:= p_2 \tilde{k}^2 + \delta \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_1 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_2 k_e^2 - p_1 k_i^2 - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} \right), \\ \alpha_{\delta,3} &:= p_1 \tilde{\sigma} - \delta \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \sigma^+ + p_1 \sigma^- + 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \right), \\ \alpha_{\delta,4} &:= p_2 \tilde{\sigma} - \delta \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \sigma^+ + p_1 \sigma^- + 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \right), \\ \alpha_{\delta,5} &:= \delta \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} (p_2 - p_1) \tilde{\sigma}, \quad \alpha_{\delta,6} := \delta \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} (p_2 - p_1) \tilde{\sigma}, \\ \alpha_{\delta,7} &:= \delta \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^-} \right), \quad \alpha_{\delta,8} := \delta \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^-} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mu := & \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_1 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_2 k_e^2 - p_1 k_i^2 - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} \right) u_{1|\Gamma}^+ \\
 & + \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_1 \tilde{k}^2 \mathcal{H} - p_2 k_e^2 - p_1 k_i^2 - p_1^2 \frac{\tilde{k}^4}{\sigma^-} \right) u_{1|\Gamma}^- \\
 & - \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \sigma^+ + p_1 \sigma^- + 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \right) \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^+ \\
 & - \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_2 \sigma^+ + p_1 \sigma^- + 2p_1^2 \tilde{\sigma} \frac{\tilde{k}^2}{\sigma^-} \right) \Delta_\Gamma u_{1|\Gamma}^- \\
 & + \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} (p_2 - p_1) \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] u_{1|\Gamma}^+ \\
 & + \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} (p_2 - p_1) \tilde{\sigma} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] u_{1|\Gamma}^- \\
 & - \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^-} \right) \left(\Delta_\Gamma^2 u_{1|\Gamma}^+ \right) - \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \left(p_1^2 \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^-} \right) \left(\Delta_\Gamma^2 u_{1|\Gamma}^- \right)
 \end{aligned}$$

Une approximation de la solution en dehors de la couche mince est alors donnée par

$$U_\delta^{ap} := \begin{cases} u_\delta^{+,ap} & \text{dans } \Omega^+, \\ u_\delta^{-,ap} & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

où U_δ^{ap} est solution de (12.4) en négligeant tous les termes en $O(\delta^2)$. Nous obtenons, comme dans la première partie, un problème noté $(\mathcal{E}_\delta^{ap})$ défini par

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_\delta^{-,ap}) + k_-^2 u_\delta^{-,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla u_\delta^{+,ap}) + k_+^2 u_\delta^{+,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) (u_\delta^{+,ap} - u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (12.5)$$

avec des conditions de transmission de type Ventcel sur la surface Γ

$$\begin{cases} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \delta p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \mathcal{K} \left(u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}, u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \right). \end{cases} \quad (12.6)$$

12.3 Existence et unicité

Pour démontrer l'unicité de la solution U_δ^{ap} , nous introduisons l'opérateur de DtN T^- défini de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ par $T^-\varphi := \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u^-|_\Gamma$, où u^- est solution de

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^- \in H^1(\Omega^-), \\ \text{div}(\sigma^- \nabla u^-) + k_-^2 u^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u^-|_\Gamma = \varphi & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (12.7)$$

L'opérateur T^- est un OΨD d'ordre 1 (cf. [7, 49]), il est, par conséquent, linéaire continu de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s-1}(\Gamma)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Remarque 45 Nous ferons, comme dans la Partie 2, l'hypothèse que u^- est définie de manière unique, i.e., que la constante k_-^2/σ^- n'est pas valeur propre de l'opérateur $(-\Delta, H_0^1(\Omega^-))$.

Théorème 46 Sous l'hypothèse

$$\frac{\sigma^-}{\delta p_1} \notin \sigma(T^-), \quad (12.8)$$

le problème $(\mathcal{E}_\delta^{ap})$ admet au plus une solution.

Preuve. Considérons le problème homogène associé à $(\mathcal{E}_\delta^{ap})$

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma^- \nabla u_\delta^{-,ap}) + k_-^2 u_\delta^{-,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \text{div}(\sigma^+ \nabla u_\delta^{+,ap}) + k_+^2 u_\delta^{+,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) u_\delta^{+,ap} = 0, \end{cases} \quad (12.9)$$

$$\quad (12.10)$$

avec les conditions de transmission sur la surface Γ

$$\begin{cases} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} + \delta p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} - \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} = \mathcal{K} \left(u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}, u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \right). \end{cases} \quad (12.11)$$

Les résultats classiques sur la régularité des systèmes elliptiques (cf. [3]) montrent que $u_\delta^{\pm,ap} \in C^\infty(\overline{\Omega^\pm})$. Soient B_R la boule de centre O et de rayon R assez grand pour enclore Ω^- et Ω_R le domaine de \mathbb{R}^3 défini par $\Omega_R := B_R \cap \Omega^+$. Multipliant les équations (12.9) et (12.10) par $\overline{u_\delta^{-,ap}}$ et $\overline{u_\delta^{+,ap}}$ respectivement, intégrant sur B_R et utilisant la formule de

Green, nous obtenons, compte tenu de la symétrie de l'opérateur $\mathcal{H}I - \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
 & \sigma^- \int_{\Omega^-} |\nabla u_{\delta}^{-,ap}|^2 d\Omega^- - k_-^2 \int_{\Omega^-} |u_{\delta}^{-,ap}|^2 d\Omega^- + \sigma^+ \int_{\Omega_R} |\nabla u_{\delta}^{+,ap}|^2 d\Omega_R \\
 & - k_+^2 \int_{\Omega_R} |u_{\delta}^{+,ap}|^2 d\Omega_R + \gamma_{\delta,1} \int_{\Gamma} |u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}|^2 d\Gamma + \gamma_{\delta,2} \int_{\Gamma} |u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}|^2 d\Gamma \\
 & + 2\gamma_{\delta,3} \int_{\Gamma} \Re \left(u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \overline{u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}} \right) d\Gamma + \gamma_{\delta,4} \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}|^2 d\Gamma \\
 & + \gamma_{\delta,5} \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}|^2 d\Gamma + 2\gamma_{\delta,6} \int_{\Gamma} \Re \left(\nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \cdot \overline{\nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}} \right) d\Gamma \\
 & + \gamma_{\delta,7} \int_{\Gamma} (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \cdot \overline{\nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}} d\Gamma \\
 & + \gamma_{\delta,8} \int_{\Gamma} (\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap} \cdot \overline{\nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}} d\Gamma \\
 & + 2\gamma_{\delta,9} \int_{\Gamma} \Re \left[(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \cdot \overline{\nabla_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}} \right] d\Gamma + \gamma_{\delta,10} \int_{\Gamma} |\Delta_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}|^2 d\Gamma \\
 & + \gamma_{\delta,11} \int_{\Gamma} |\Delta_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}|^2 d\Gamma + 2\gamma_{\delta,12} \int_{\Gamma} \Re \left(\Delta_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} \overline{\Delta_{\Gamma} u_{\delta|\Gamma}^{+,ap}} \right) d\Gamma \\
 & = \sigma^+ \int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^{+,ap} \overline{u_{\delta|S_R}^{+,ap}} dS_R, \tag{12.12}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\delta,1} & := -\frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,1} - \frac{\sigma^- \sigma^+}{\delta (\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1)}, \\
 \gamma_{\delta,2} & := -\frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,2} - \frac{\sigma^- \sigma^+}{\delta (\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1)}, \\
 \gamma_{\delta,3} & := -\frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,1} + \frac{\sigma^- \sigma^+}{\delta (\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1)}, \\
 \gamma_{\delta,4} & := \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,3}, \quad \gamma_{\delta,5} := \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,4}, \\
 \gamma_{\delta,6} & := \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,3}, \quad \gamma_{\delta,7} := \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,5}, \\
 \gamma_{\delta,8} & := \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,6}, \quad \gamma_{\delta,9} := \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,5}, \\
 \gamma_{\delta,10} & := \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,7}, \quad \gamma_{\delta,11} := \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,8}, \\
 \gamma_{\delta,12} & := \frac{\sigma^+ p_1}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \alpha_{\delta,7},
 \end{aligned}$$

et S_R désigne la sphère de centre O et de rayon R . D'où, en prenant la partie imaginaire de (12.12), nous avons

$$\Im \left(\int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_{\delta|S_R}^{+,ap} \overline{u_{\delta|S_R}^{+,ap}} dS_R \right) = 0. \quad (12.13)$$

A l'aide de la démonstration calquée sur celle du Théorème 22, nous déduisons

$$u_{\delta}^{+,ap} = 0 \text{ sur } \Omega^+.$$

Le problème $(\mathcal{E}_{\delta}^{ap})$ se réduit donc à trouver $u_{\delta}^{-,ap}$ vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla u_{\delta}^{-,ap}) + k_-^2 u_{\delta}^{-,ap} = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} = \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma^- \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} = \mathcal{K}(u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}, 0) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (12.14)$$

L'équation

$$u_{\delta|\Gamma}^{-,ap} = \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^{-,ap}$$

implique

$$\left(T^- - \frac{\sigma^-}{\delta p_1} I \right) \varphi^- = 0,$$

où φ^- est la trace de $u_{\delta}^{-,ap}$ sur la surface Γ . Compte tenu de (12.8), il découle que $u_{\delta}^{-,ap} = 0$ sur Γ . Par conséquent, $u_{\delta}^{-,ap} = 0$ sur Ω^- . ■

Pour montrer l'existence de la solution $(u_{\delta}^{-,ap}, u_{\delta}^{+,ap})$, nous allons transformer $(\mathcal{E}_{\delta}^{ap})$ en un système d'équations pseudo-différentielles sur la surface Γ . Utilisant la définition des opérateurs de DtN T^+ et T^- (voir Partie 2), $(\mathcal{E}_{\delta}^{ap})$ est équivalent au système

$$\begin{cases} \left(T^- - \frac{\sigma^-}{\delta p_1} I \right) \omega - \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^+ p_1} \left(T^+ - \frac{\sigma^+}{\delta p_2} I \right) \varkappa = f, & (12.15) \\ T^- \omega + T^+ \varkappa - \mathcal{K}(\omega, \varkappa) = g, & (12.16) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} f &:= -\frac{\sigma^- p_2}{p_1} \partial_{\mathbf{n}} u_{inc|\Gamma} - \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^+ p_1} T^+ u_{inc|\Gamma} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma), \\ g &:= \sigma^+ \partial_{\mathbf{n}} u_{inc|\Gamma} + T^+ u_{inc|\Gamma} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma), \end{aligned}$$

et ω (resp. \varkappa) désigne la trace de $u_\delta^{-,ap}$ (resp. de $u_\delta^{+,ap}$) sur la surface Γ . Compte tenu de (12.8), l'opérateur $T^- - \frac{\sigma^-}{\delta p_1} I$ est inversible. Posons

$$S_\delta := \left(T^- - \frac{\sigma^-}{\delta p_1} I \right)^{-1}. \quad (12.17)$$

Evidemment, S_δ est un OΨD d'ordre -1 . D'où, de (12.15), nous déduisons

$$\omega = \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^+ p_1} S_\delta \left(T^+ - \frac{\sigma^+}{\delta p_2} I \right) \varkappa + S_\delta f.$$

Ainsi, le système (12.15)-(12.16) est équivalent à l'équation au bord

$$A_\delta \varkappa := B_\delta \varkappa + \frac{p_1 \tilde{\sigma}^2 \delta}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \Delta_\Gamma^2 S_\delta \left[p_2^2 \frac{\sigma^-}{\sigma^+} T^+ + p_1^2 \frac{\sigma^+}{\sigma^-} T^- - \left(\frac{\sqrt{\sigma^- \sigma^+}}{\delta} \right) I \right] \varkappa = \theta,$$

où

$$\begin{aligned} B_\delta &:= \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^+ p_1} T^- S_\delta \left(T^+ - \frac{\sigma^+}{\delta p_2} I \right) \varkappa + T^+ \varkappa - \alpha_{\delta,1} \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^+ p_1} S_\delta \left(T^+ - \frac{\sigma^+}{\delta p_2} I \right) \varkappa - \alpha_{\delta,2} \varkappa \\ &- \alpha_{\delta,3} \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^+ p_1} \Delta_\Gamma S_\delta \left(T^+ - \frac{\sigma^+}{\delta p_2} I \right) \varkappa - \alpha_{\delta,4} \Delta_\Gamma \varkappa - \alpha_{\delta,6} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] \varkappa \\ &- \alpha_{\delta,5} \frac{\sigma^- p_2}{\sigma^+ p_1} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] S_\delta \left(T^+ - \frac{\sigma^+}{\delta p_2} I \right) \varkappa, \\ \theta &:= -g - T^- S_\delta f + \alpha_{\delta,1} S_\delta f + \alpha_{\delta,3} \Delta_\Gamma S_\delta f - \alpha_{\delta,7} \Delta_\Gamma^2 S_\delta f + \alpha_{\delta,5} \operatorname{div}_\Gamma [(\mathcal{H}I - \mathcal{R}) \nabla_\Gamma] S_\delta f. \end{aligned}$$

Pour établir un résultat d'existence de la solution, démontrons la proposition suivante.

Proposition 47 *Pour tout entier k dans \mathbb{N} , l'opérateur A_δ défini de $H^{k+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{k-7/2}(\Gamma)$ est de Fredholm d'indice 0.*

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme T^-, T^+, S_δ et Δ_Γ sont des opérateurs OΨD d'ordre 1, 1, -1 et 2 respectivement, A_δ est un opérateur OΨD d'ordre 4, il envoie donc $H^k(\Gamma)$ dans $H^{k-4}(\Gamma)$. Par ailleurs, comme B_δ est un opérateur OΨD d'ordre 2, il envoie $H^k(\Gamma)$ dans $H^{k-2}(\Gamma)$. Or l'injection de $H^{k-1}(\Gamma)$ dans $H^{k-2}(\Gamma)$ est compacte, il en découle que l'opérateur A_δ défini de $H^k(\Gamma)$ dans $H^{k-4}(\Gamma)$ est une perturbation compacte de $\frac{p_1 \tilde{\sigma}^2 \delta}{\sigma^- p_2 + \sigma^+ p_1} \Delta_\Gamma^2 S_\delta \left[p_2^2 \frac{\sigma^-}{\sigma^+} T^+ + p_1^2 \frac{\sigma^+}{\sigma^-} T^- - \left(\frac{\sqrt{\sigma^- \sigma^+}}{\delta} \right) I \right]$. Ainsi, pour montrer que A_δ est de Fredholm d'indice 0, il suffit de montrer que $p_2^2 \frac{\sigma^-}{\sigma^+} T^+ + p_1^2 \frac{\sigma^+}{\sigma^-} T^- - \left(\frac{\sqrt{\sigma^- \sigma^+}}{\delta} \right) I$ est inversible.

Soit l'équation

$$\left[p_2^2 \frac{\sigma^-}{\sigma^+} T^+ + p_1^2 \frac{\sigma^+}{\sigma^-} T^- - \left(\frac{\sqrt{\sigma^- \sigma^+}}{\delta} \right) I \right] \varphi = \psi, \quad \psi \in H^{k-1/2}(\Gamma), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (12.18)$$

Utilisant la définition des opérateurs T^+ et T^- , (12.18) est équivalent au problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma^- \nabla V^-) + k_-^2 V^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ \operatorname{div}(\sigma^+ \nabla V^+) + k_+^2 V^+ = 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ V_{|\Gamma}^- - V_{|\Gamma}^+ = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} V_{|\Gamma}^- - \partial_{\mathbf{n}} V_{|\Gamma}^+ = \left(\frac{\sqrt{\sigma^- \sigma^+}}{\sigma^+ p_1^2 \delta} \right) V_{|\Gamma}^- + \frac{1}{\sigma^+ p_1^2} \psi & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - ik_+) V^+ = 0, & \end{cases} \quad (12.19)$$

où $\varphi = V_{|\Gamma}^- = V_{|\Gamma}^+$. Une démonstration similaire à celle des théorèmes 30 et 41 montre que, pour tout k dans \mathbb{N} , si $\psi \in H^{k-1/2}(\Gamma)$, alors le problème (12.19) admet une unique solution (V^-, V^+) dans $H^{k+1}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k+1}(\overline{\Omega^+})$ et donc une unique trace $\varphi \in H^{k+1/2}(\Gamma)$. Par conséquent, A_δ défini de $H^{k+1/2}(\Gamma)$ dans $H^{k-7/2}(\Gamma)$ est de Fredholm d'indice 0. ■

Théorème 48 *Sous les hypothèses du Théorème 46, le problème $(\mathcal{E}_\delta^{ap})$ admet une unique solution $(u_\delta^{-,ap}, u_\delta^{+,ap})$ dans $H^{k+1}(\Omega^-) \times H_{loc}^{k+1}(\overline{\Omega^+})$, $k \in \mathbb{N}$.*

Preuve. En vertu de la Proposition 47, l'unicité de la solution de $(\mathcal{E}_\delta^{ap})$ implique son existence. Ainsi, du Théorème 46, nous déduisons qu'il existe une unique solution. ■

12.4 Estimation de l'erreur

Nous terminons cette partie par une estimation de l'erreur en solution, entre le problème exact (9.1) et le modèle approché dont la solution u_δ^{ap} est définie sur \mathbb{R}^3 par

$$u_\delta^{ap} := \begin{cases} u_\delta^{-,ap} & \text{dans } \Omega_\delta^-, \\ u_{\text{int},\delta}^{ap} & \text{dans } \Omega_\delta, \\ u_\delta^{+,ap} & \text{dans } \Omega_\delta^+, \end{cases}$$

où $u_{\text{int},\delta}^{ap}$ est obtenu à partir de (12.3) en ajoutant et en retranchant un terme d'ordre 2 en δ . Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} u_{\text{int},\delta|\Omega_{\delta,\beta}}^{ap}(x) &:= u_{\text{int},\delta}^{\beta,ap}(x) := u_{\text{int},\delta}^{[\beta],ap}(m, s_\beta) \\ &:= u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} - \delta p_1 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^-,{}^{ap} \\ &= u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap} + \delta p_2 \partial_{\mathbf{n}} u_{\delta|\Gamma}^+,{}^{ap}, \quad \forall x = \Phi_\beta(m, s_\beta) \in \Omega_{\delta,\beta}, \end{aligned}$$

Théorème 49 *Il existe une constante c indépendante de δ telle que*

$$\begin{aligned} \|u_\delta^- - u_\delta^-,{}^{ap}\|_{H^1(\Omega_\delta^-)} &+ \delta^{1/2} \sum_{\beta=1}^2 \|u_{\text{int},\delta}^\beta - u_{\text{int},\delta}^{\beta,ap}\|_{H^1(\Omega_{\delta,\beta})} \\ &+ \|u_\delta^+ - u_\delta^+,{}^{ap}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\delta^+)} \leq c\delta^2. \end{aligned}$$

Preuve. Le Théorème 49 se démontre aisément en reprenant les idées de la démonstration du Théorème 38 et en utilisant le Lemme ?? . ■

Chapitre 13

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à trois problèmes différents définis dans des domaines avec couche mince : problème de Poisson à moyenne diffusion, problèmes de Helmholtz avec couche mince fortement et faiblement absorbante.

Dans les trois parties, nous avons construit et justifié un développement asymptotique de la solution en fonction de l'épaisseur de la couche mince. A l'aide des paramètres p_1 et p_2 que nous avons introduits, nous avons réussi à déterminer une (parties 1 et 3) ou plusieurs (Partie 2) positions de la surface limite Γ permettant de dériver des modèles approchés d'ordre 1 faisant intervenir des conditions de transmission de type Ventcel sur Γ .

Ce travail a été gratifié par les publications suivantes :

- K. E. Boutarène [10], *Asymptotic analysis for a diffusion problem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 349(1–2), 57–60, 2011.
- K. E. Boutarène [11], *Approximate transmission conditions for a Poisson problem at mid-diffusion*, Mathematical Modelling and Analysis, 20(1), 53–75, 2015.

et devrait conduire à la publication suivante :

- K. E. Boutarène et P. -H. Cocquet [12], *Scattering of a Scalar Time-Harmonic Wave by a Penetrable Obstacle with a Thin Layer*, Soumis.

Toutefois, pour compléter la lecture de ce document, nous recommandons, pour ceux intéressés par l'approximation numérique des différents problèmes traités, les thèses de Ségui [46] et de Dah [23] qui s'intéressent à la méthode PML "Perfectly Matched Layer" ; l'article de Barucq & al [5] et la thèse de Kirsch [34] qui utilisent, quant à eux, une méthode appelée "Non-reflecting Boundary Conditions".

Pour terminer nous nous contentons de lister quelques perspectives immédiates.

Tout d'abord, il serait intéressant d'étudier le problème de Poisson dans le cas à faible et forte diffusion. En effet, nous avons constaté que la méthode utilisée dans la Partie 1, nous a permis de choisir p_1 et p_2 que dans un seul cas : moyenne diffusion c'est-à-dire $\alpha^- < \alpha_\delta < \alpha^+$ ou $\alpha^+ < \alpha_\delta < \alpha^-$. Que se passe-t-il dans le cas faible ou forte diffusion ? Pouvons-nous trouver un modèle approché, au moins, d'ordre 1 ?

Il serait utile d'appliquer la technique utilisée dans cette thèse pour construire des conditions aux limites ou de transmission approchées pour les problèmes de Maxwell, d'élasticité ou du bilaplacien. Aussi d'explorer sur la possibilité d'obtenir des modèles d'ordre 2 et 3.

Il serait également intéressant d'étudier de nouveaux problèmes qui diffèrent de ceux de cette thèse par la géométrie. Par exemple considérer des couches minces non-homogène, c'est-à-dire à épaisseur non constante ou bien des domaines à frontières rugueuse.

Enfin, nous aimerions explorer la technique des développement asymptotique raccordés développée par l'école russe (cf. e.g., Il'in [33], Dyke [29], Delourme & al [24], Bendali & al [6]...), c'est peut être la plus célèbre et la plus importante mais aussi la plus délicate, et la comparer avec la méthode utilisée dans cette thèse.

Annexe A

Régularité de la solution du problème de Poisson

Dans cette annexe, nous étudions la régularité des solutions des équations de Poisson et de Helmholtz (cf. [37]). Pour cela, nous allons introduire les espaces des fonctions Höldériennes et $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Définition 50 Une fonction φ définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^P$ ($P = 2, 3$) est dite Höldérienne (ou α -höldérienne), $0 < \alpha \leq 1$, s'il existe une constante c telle que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Nous notons par $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions α -höldérienne, $0 < \alpha \leq 1$. C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Notons que pour $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, nous avons $C^{0,\beta}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Définition 51 Soit $k \in \mathbb{N}$. Nous notons par $C^{k,\alpha}(\Omega)$ l'espace des fonctions de Höldérienne φ dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$ telles que $\partial^\lambda \varphi$ est dans $C^{0,\alpha}(\Omega)$ pour tout $|\lambda| \leq k$. C'est aussi un espace de Banach muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|\varphi\|_{C^k(\Omega)} + \max_{|\lambda|=k} \|\partial^\lambda \varphi\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

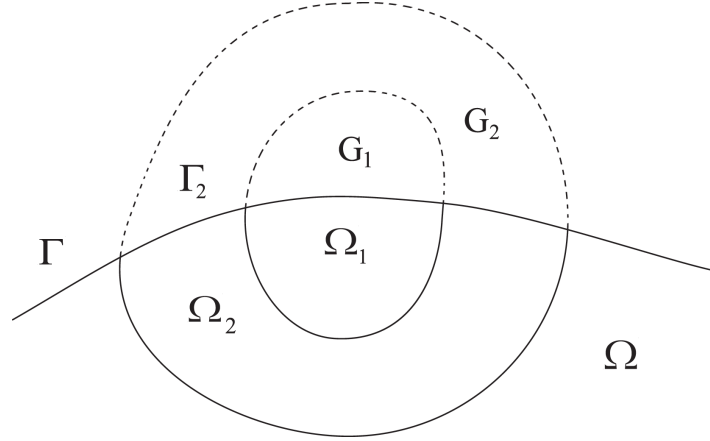


Figure A.1 – Géométrie intervenant dans le Théorème 52

Théorème 52 (Régularité au voisinage du bord) Soient G_1 et G_2 deux ouverts de \mathbb{R}^P tels que $\overline{G_1} \subset\subset G_2$ et G_1 intersecte la surface Γ d'un domaine lipschitzien Ω (voir Figure A.1). Posons

$$\Omega_j = G_j \cap \Omega, \quad j = 1, 2 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = G_2 \cap \Gamma.$$

Supposons que, pour tout entier k , Γ_2 est de classe $C^{k+1,1}$ et que $u \in H^1(\Omega_2)$ et $f \in H^k(\Omega_2)$ vérifient l'équation

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega_2.$$

Si $u|_{\Gamma_2} \in H^{k+3/2}(\Gamma_2)$, alors $u \in H^{k+2}(\Omega_1)$. De plus, il existe une constante positive c telle que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega_1)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega_2)} + c \|u|_{\Gamma_2}\|_{H^{k+3/2}(\Gamma_2)} + c \|f\|_{H^k(\Omega_2)}.$$

Passons maintenant à la régularité des problèmes de transmission. Soient Ω^- un ouvert borné de \mathbb{R}^P de frontière lipschitzienne Γ et Ω^+ le domaine extérieur défini par $\Omega^+ := \mathbb{R}^P \setminus \overline{\Omega^-}$. Pour toute fonction u définie dans un voisinage de Γ , nous notons par u^+ et u^- les restrictions de u sur les domaines Ω^+ et Ω^- respectivement et par $[u]_{|\Gamma}$ et $[\partial_{\mathbf{n}}u]_{|\Gamma}$ les sauts de la trace de u et de la trace de la dérivée normale de u à travers Γ définis par

$$[u]_{|\Gamma} := u_{|\Gamma}^+ - u_{|\Gamma}^- \quad \text{et} \quad [\partial_{\mathbf{n}}u]_{|\Gamma} := \partial_{\mathbf{n}}u_{|\Gamma}^+ - \partial_{\mathbf{n}}u_{|\Gamma}^-,$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur unitaire normale à Γ (extérieur à Ω^-) et $\partial_{\mathbf{n}}$ désigne la dérivée dans la direction du vecteur \mathbf{n} .

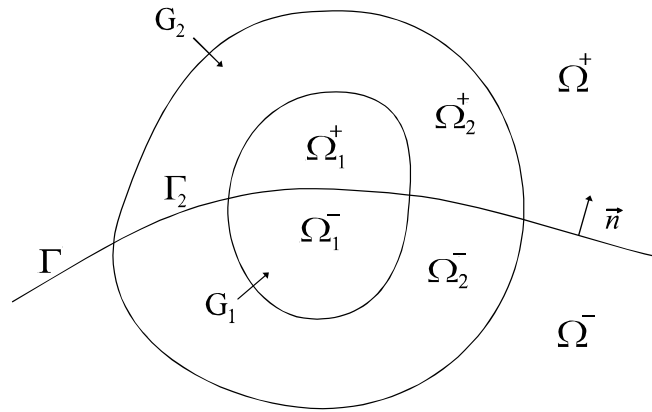


Figure A.2 – Géométrie intervenant dans le Théorème 53

Théorème 53 (Régularité au voisinage de l'interface) Soient G_1 et G_2 deux ouverts bornés de \mathbb{R}^P tels que $\overline{G_1} \subset\subset G_2$ et G_1 intersecte Γ (voir Figure A.2). Posons

$$\Omega_j^\pm = G_j \cap \Omega^\pm \quad \text{et} \quad \Gamma_j = G_j \cap \Gamma, \quad j = 1, 2.$$

Supposons que pour tout entier k , Γ_2 est de classe $C^{k+1,1}$ et considérons les équations

$$-\Delta u^\pm = f^\pm \quad \text{dans} \quad \Omega_2^\pm.$$

Si $u \in L^2(\Omega_2)$ est telle que $u^\pm \in H^1(\Omega_2^\pm)$, $[u]_\Gamma \in H^{k+3/2}(\Gamma_2)$ et $[\partial_{\mathbf{n}} u]_\Gamma \in H^{k+1/2}(\Gamma_2)$ et si $f^\pm \in H^k(\Omega_2^\pm)$. Alors $u^\pm \in H^{k+2}(\Omega_1^\pm)$. De plus, il existe une constante positive c telle que

$$\begin{aligned} \|u^+\|_{H^{k+2}(\Omega_1^+)} + \|u^-\|_{H^{k+2}(\Omega_1^-)} &\leq c \|u^+\|_{H^1(\Omega_2^+)} + c \|u^-\|_{H^1(\Omega_2^-)} + c \left\| [u]_\Gamma \right\|_{H^{k+3/2}(\Gamma_2)} \\ &\quad + c \left\| [\partial_{\mathbf{n}} u]_\Gamma \right\|_{H^{k+1/2}(\Gamma_2)} + c \|f^+\|_{H^k(\Omega_2^+)} + c \|f^-\|_{H^k(\Omega_2^-)}. \end{aligned}$$

Remarque 54 Les résultats de régularité de la solution du problème de Poisson restent valables pour l'équation de Helmholtz puisque la différence entre l'opérateur de Helmholtz et de Laplace est un terme de type $k_\delta^2 u$ qui est d'ordre inférieur.

Annexe B

Opérateurs de Fredholm

Nous rappelons dans ce paragraphe la définition et quelques propriétés des opérateurs de Fredholm. Nous incitons le lecteur à consulter Abboud-Terrasse [1], Brezis [14], Treves [50], Chen-Zhou [17],...

Soient E et F deux espaces de Banach. Nous notons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F .

Définition 55 *On dit qu'un opérateur linéaire $T : E \rightarrow F$ est compact, et on note $T \in \mathcal{K}(E, F)$, s'il transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact. Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$ alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Un opérateur compact transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente.*

Théorème 56 (Alternative de Fredholm) *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors*

1. $\text{Ker}(I - T)$ est de dimension finie ;
2. $\text{Im}(I - T)$ est fermée, et plus précisément $\text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$;
3. $\text{Ker}(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = H$;
4. $\dim(I - T) = \dim(I - T^*)$.

L'Alternative de Fredholm est souvent utilisée pour la résolution des équations de type $u - Tu = f$. L'opérateur $I - T$ étant une perturbation compacte de l'identité, tout se passe comme en dimension finie : l'injection implique la bijection ! Ce qui est faux en général en dimension infinie. L'Alternative de Fredholm exprime que :

ou bien pour tout $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ admet une unique solution,

ou bien l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement

si f vérifie n conditions d'orthogonalité, i.e. $f \in \text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$ qui est de dimension finie.

L'alternative de Fredholm n'est qu'un premier pas vers la théorie des opérateurs de Fredholm.

Définition 57 (Opérateurs de Fredholm) *On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est de Fredholm (ou opérateur à indice), et note $A \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\text{Ker}(A)$ est de dimension finie et si $\text{Im}(A)$ est fermée et de codimension finie. L'indice de A , noté $\text{ind}(A)$, est défini par $\text{ind}(A) = \dim \text{Ker}(A) - \text{codim Im}(A)$.*

Remarque 58 *La condition "Im(A) est fermée" est superflue, nous pouvons démontrer (cf. [47, Lemme 8.1]) que si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est tel que $\text{Ker}(A)$ soit de dimension finie et $\text{Im}(A)$ soit de codimension finie alors $\text{Im}(A)$ est fermée.*

Il découle de l'Alternative de Fredholm que si $T \in \mathcal{K}(E)$, alors $A = I - T$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 59 *Si E et F sont réflexifs et $A \in \mathcal{F}(E, F)$. Alors A^* est de Fredholm, de plus, nous avons $\text{ind}(A) = -\text{ind}(A^*)$.*

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de Fredholm si et seulement si T est inversible modulo les opérateurs compacts.

Proposition 60 *Soient E, F et K trois espaces de Banach.*

1. *Si $A \in \mathcal{F}(E, F)$ et K un opérateur compact dans $\mathcal{L}(E, F)$, alors $A + K \in \mathcal{F}(E, F)$ et $\text{ind}(A + K) = \text{ind}(A)$. Autrement dit, toute perturbation compacte d'un opérateur de Fredholm est de Fredholm.*
2. *Si $T_1 \in \mathcal{F}(E, F)$ et $T_2 \in \mathcal{F}(F, K)$ alors $T_2 T_1 \in \mathcal{F}(E, K)$ et $\text{ind}(T_2 T_1) = \text{ind}(T_1) + \text{ind}(T_2)$.*

Dans la pratique, nous utilisons souvent ce résultat sous forme variationnelle.

Corollaire 61 *Soient H un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$, $a_0(\cdot, \cdot)$ et $a_1(\cdot, \cdot)$ trois formes bilinéaires (ou sesquilinéaires) définies sur $H \times H$ telles que*

1. $a(\cdot, \cdot) = a_0(\cdot, \cdot) + a_1(\cdot, \cdot)$;
2. $a_0(\cdot, \cdot)$ et $a_1(\cdot, \cdot)$ sont continues sur $H \times H$;
3. $a_0(\cdot, \cdot)$ est H -coercive ;

4. $a_1(.,.)$ est telle que si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites faiblement convergentes dans H vers u et v respectivement. Alors $a_1(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_1(u, v)$.

Si la proposition suivante

$$(a(x, y) = 0, \forall y \in H) \Rightarrow x = 0,$$

est vraie, alors pour tout $f \in H'$, il existe une unique solution $u \in H$ de l'équation

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in H.$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_H \leq c \|f\|_{H'}.$$

Annexe C

Opérateurs pseudo-différentiels

Cette annexe est consacrée aux opérateurs pseudo-différentiels. Nous en donnons quelques définitions. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter, par exemple, Boutet de Monvel [13], Chazarain-Piriou [16], Hörmander [32], Shubin [47], Taylor [49], Treves [50],... Nous adopterons les notations standards concernant les opérateurs différentiels, notamment $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, \widehat{u} désigne la transformée de Fourier d'une distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et enfin, l'inclusion $K \Subset \Omega$, signifie que K est un compact inclus dans Ω .

C.1 Symboles

Définition 62 Soient $\mu, n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^μ et $\rho, \delta \in [0, 1]$. On désigne par $S_{\rho, \delta}^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $K \Subset \Omega$ et pour tous multi-indices α et β dans \mathbb{N}^n , il existe une constante $c_{\alpha, \beta}(K) > 0$ telle que :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta}(K) (1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}, \quad \forall (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n.$$

On dit que a est un symbole d'ordre m et de type (ρ, δ) .

Notant $S^{-\infty} := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho, \delta}^m$, nous avons la proposition suivante

Proposition 63 Soit $(a_j)_j$ une suite de symboles telle que $a_j \in S_{\rho, \delta}^{m_j}$ et $(m_j)_j$ est une suite décroissante qui tend vers $-\infty$ quand j tend vers $+\infty$. Alors il existe $a \in S_{\rho, \delta}^{m_0}$ unique modulo $S^{-\infty}$ tel que :

$$a - \sum_{j \geq k} a_j \in S_{\rho, \delta}^{m_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On dit que a est la somme asymptotique des a_j ou bien $\sum_j a_j$ est le développement asymptotique de a et on écrit $a \sim \sum_j a_j$.

C.2 Opérateurs pseudo-différentiels

Dans tout ce qui suit, nous supposons que Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 64 Soit $a \in S_{\rho,\delta}^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, l'opérateur A défini de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ par :

$$Au(x) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (\text{C.1})$$

est appelé opérateur pseudo-différentiel, noté $O\Psi D$, d'ordre m et de symbole a . On désigne par $L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ l'espace des $O\Psi D$ d'ordre m sur Ω . Un tel opérateur est linéaire continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et s'étend de manière unique de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple 65 Tout opérateur différentiel est un $O\Psi D$.

En effet, soit $P(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ où a_α est \mathcal{C}^∞ . Pour tout u dans $\mathcal{D}(\Omega)$, nous avons

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} (P(x, D)u)(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha (e^{ix\cdot\xi}) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

avec

$$a(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha \in S_{1,0}^m(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Définition 66 Un opérateur pseudo-différentiel A est appelé propre (proprement supporté) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. $\forall K \Subset \Omega, \exists K' \Subset \Omega / u|_{K'} = 0 \Rightarrow Au|_K = 0$;
2. $\forall K \Subset \Omega, \exists K' \Subset \Omega / \text{supp}(u) \subset K \implies \text{supp}(Au) \subset K'$.

L'opérateur $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ est un $O\Psi D$ propre puisqu'il diminue le support ($\text{supp}(Af) \subset \text{supp}(f)$).

Théorème 67 (Elimination de "y") Soit $A = op(a) \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ propre, $\delta < \rho$, donné par (C.1), alors :

$$\sigma_A(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} A(e^{i(\cdot) \cdot \xi})(x) \in S_{\rho,\delta}^m(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

et admet le développement asymptotique :

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_y^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi))_{/x=y}.$$

De plus

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \sigma_A(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

On appelle $\sigma_A(x, \xi)$ le symbole complet de A . Posant $L^{-\infty}(\Omega)$ l'espace des OΨD dont le symbole est dans $S^{-\infty}$, nous avons la relation

$$A \text{ est propre dans } L^{-\infty}(\Omega) \Leftrightarrow \sigma_A(x, \xi) \in S^{-\infty}.$$

Si maintenant $A \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$, nous pouvons le décomposer sous la forme $A = A' + A''$ où A' est propre dans $L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ et $A'' \in L^{-\infty}(\Omega)$. Ainsi, nous identifions σ_A à $\sigma_{A'}$ dans $S_{\rho,\delta}^m/S^{-\infty}$. Nous obtenons, par conséquent, une application bijective :

$$L_{\rho,\delta}^m/L^{-\infty} \rightarrow S_{\rho,\delta}^m/S^{-\infty}.$$

On appelle symbole principal de l'opérateur $A \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ et on note $\sigma_m(A)$ la classe des symboles σ_A modulo $S_{\rho,\delta}^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\sigma_m(A)$ est donc un élément de $S_{\rho,\delta}^m/S_{\rho,\delta}^{m-1}$. Si $\sigma_m(A) = 0$ ceci veut dire que A est un OΨD d'ordre $\leq m - 1$.

C.3 Hypoellipticité et ellipticité

Définition 68 Une fonction $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ est appelée symbole hypoelliptique si

1. Il existe deux réels m_0 et m_1 tels que pour tout compact K dans Ω , il existe c_1, c_2 et R tels que

$$c_1 |\xi|^{m_0} \leq \sigma(x, \xi) \leq c_2 |\xi|^{m_1}, \quad |\xi| \geq R, \quad x \in K; \quad (\text{C.2})$$

2. Il existe deux réels ρ et δ vérifiant $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, tels que pour tout compact $K \subset \Omega$

et tous multi-indices α et β dans \mathbb{N}^n , il existe un réel R tel que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta}(K) (1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}, \quad |\xi| \geq R, \quad x \in K. \quad (\text{C.3})$$

On note par $HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des (classes de) symboles satisfaisant (C.2) et (C.3) et par $HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$ l'ensemble des (classes d') opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés A pour lesquels $\sigma_A \in HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Définition 69 *Un opérateur pseudo-différentiel A est appelé hypoelliptique s'il existe un opérateur proprement supporté A_1 dans $HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$ et un opérateur régularisant $R \in L^{-\infty}(\Omega)$ tel que $A = A_1 + R$.*

Nous avons les propriétés suivantes.

Proposition 70 1. $HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega \times \mathbb{R}^n) \subset S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

2. Si $A \in HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$ et $R \in L_{\rho, \delta}^{m_1}(\Omega)$ avec $m_1 < m_0$ où R est proprement supporté, alors $A + R \in HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$.

Exemple 71 *Tout opérateur différentiel elliptique est dans $HL_{1, 0}^{m, m}$.*

Définition 72 *Un opérateur $A \in L_{\rho, \delta}^m(\Omega)$ est appelé elliptique si $A = A_1 + R$ où $A_1 \in HL_{\rho, \delta}^{m, m}(\Omega)$ et $R \in L^{-\infty}(\Omega)$.*

C.4 Opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés

Dans toute cette partie, nous supposons que M est une variété compacte de classe \mathcal{C}^∞ . Nous ne nous attarderons pas sur la définition des OΨD sur les variétés, nous renvoyons le lecteur à [47, 49, 50]. Le but de ce paragraphe est d'énoncer les résultats principaux sur OΨD sur les variétés qui nous ont été utiles pour la preuve du Théorème 20.

Définition 73 *Soient $A \in HL_{\rho, \delta}^{m, m}(M)$, $1 - \rho \leq \delta < \rho$ et $m > 0$. On note par A_0 (ou parfois par A) l'opérateur A défini comme étant un opérateur non-borné dans $L^2(M)$ à domaine $D(A_0) = H^m(M)$.*

Définition 74 *Un opérateur $A \in L_{\rho, \delta}^m(M)$ est appelé formellement auto-adjoint si*

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle,$$

pour toutes fonctions u, v dans $\mathcal{D}(M)$, où le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(M)$.

Définition 75 On dit que A_0 (ou parfois par A) est semi-borné s'il une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\Re \langle Au, u \rangle \geq c \|u\|_{L^2(M)}, \quad \forall u \in D(A_0).$$

Théorème 76 ([9]) Soit $A \in HL_{\rho, \delta}^{m, m}(M)$, $m > 0$, $1 - \rho \leq \delta < \rho$, formellement auto-adjoint et semi-borné. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous avons

1. $A \in \mathcal{L}(H^s(M), H^{s-m}(M))$;
2. le noyau $\text{Ker}(A)$ de l'opérateur A est inclus dans $\mathcal{C}^\infty(M)$;
3. A_0 est fermé et auto-adjoint dans $L^2(M)$, à résolvante compacte dans $L^2(M)$. De plus, il existe dans cet espace une base hilbertienne $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ composée des vecteurs propres de A_0 tels que $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ où les valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont réelles vérifiant $|\lambda_i| \rightarrow +\infty$ lorsque $i \rightarrow +\infty$;
4. le spectre de A est indépendant de s et coïncide avec l'ensemble des valeurs propres de A .
5. A est de Fredholm d'indice 0.

Annexe D

Théorème et Lemmes de Rellich

Cette annexe est dédiée aux théorèmes et lemmes de Rellich. Nous commencerons par le Lemme 77 tel qu'il a été établi par F. Rellich en 1943 dans [42] et nous énoncerons ensuite le lemme 78 qui plus pratique. Nous terminerons enfin par le Théorème 79, de compacité, toujours dû à F. Rellich.

Lemme 77 (de Rellich) *Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^2 pour $|x| > R_0 > 0$, et vérifiant l'équation de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ pour } |x| > R_0 > 0 \text{ avec } k > 0.$$

Alors, on a l'alternative :

1. $u \equiv 0$ pour $|x| > R_0$;
2. Pour tout $R_1 > R_0$, $\exists M > 0$ et $R_2 > R_1$ tels que

$$\int_{R_1 \leq |x| \leq R} |u(x)| dx \geq MR, \forall R, R \geq R_2.$$

Lemme 78 (de Rellich) ([21, p. 32]). *Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^3 . Si $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ est solution de l'équation*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k > 0,$$

vérifiant

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0.$$

Alors $u = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Théorème 79 (de Rellich) ([4]) *Si D est un ouvert borné de \mathbb{R}^N de classe \mathcal{C}^1 , alors de toute suite bornée de $H^1(D)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(D)$. On dit que l'injection canonique de $H^1(D)$ dans $L^2(D)$ est compacte.*

Bibliographie

- [1] T. Abboud et I. Terrasse, *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes, programme d'approfondissement sciences de l'ingénieur, simulation et modélisation*, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2007.
- [2] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.
- [3] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Comm. Pure Appl. Math., 17, 35–92, 1964.
- [4] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation, une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, France, 2012.
- [5] H. Barucq, A. -G. Dupouy St-Guirons et S. Tordeux, *Non-reflecting boundary condition on ellipsoidal boundary*, Numerical Analysis and Applications, 5(2), 109–115, 2012.
- [6] A. Bendali, P. -H. Cocquet et S. Tordeux, *Scattering of a scalar time-harmonic wave by N small spheres by the method of matched asymptotic expansions*, Numerical Analysis and Applications, 5(2), 116–123, 2012.
- [7] A. Bendali et K. Lemrabet, *The effect of a thin coating on the scattering of the time-harmonic wave for the Helmholtz equation*, SIAM J. Appl. Maths., 56(6), 1664–1693, 1996.
- [8] A. Bendali et K. Lemrabet, *Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell*, Asymptotic Analysis, 57(3–4), 199–227, 2008.
- [9] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, F. Hérau et G. Vial, *On generalized Ventcel's type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain*, SIAM J. Math. Anal., 42(2), 931–945, 2010.

- [10] K. E. Boutarène, *Asymptotic analysis for a diffusion problem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 349(1–2), 57–60, 2011.
- [11] K. E. Boutarène, *Approximate transmission conditions for a Poisson problem at mid-diffusion*, Mathematical Modelling and Analysis, 20(1), 53–75, 2015.
- [12] K. E. Boutarène et P. -H. Cocquet, *Scattering of a Scalar Time-Harmonic Wave by a Penetrable Obstacle with a Thin Layer*, Soumis.
- [13] L. Boutet de Monvel, *Opérateurs pseudo-différentiels et formule de l'indice*, Cours de DEA, université de Nice, 1970/1971.
- [14] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext. Springer, New York, 2011.
- [15] G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge et G. Vial, *Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer*, Asymptot. Anal., 50(1–2), 121–173, 2006.
- [16] J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction to the theory of linear partial differential equations*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [17] G. Chen et J. Zhou, *Boundary Element Methods with Applications to Nonlinear Problems*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2010.
- [18] I. S. Ciuperca, M. Jai et C. Poignard, *Approximate transmission conditions through a rough thin layer*, J. Comput. Appl. Math., 234(6), 1876–1885, 2010.
- [19] I. S. Ciuperca, R. Perrussel et C. Poignard, *Two-scale analysis for very rough thin layers. An explicit characterization of the polarization tensor*, J. Math. Pures Appl., 95, 277–295, 2011.
- [20] X. Claeys, *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d'ondes par des fils minces*, Thèse de Doctorat, Université Versailles St Quentin, France, 2008.
- [21] D. Colton et R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer, 93, 2012.
- [22] J. Cousteix et J. Mauss, *Analyse asymptotique et couche limite*, Springer, 2006.
- [23] B. Dah, *Sur la modélisation de milieux fictifs absorbants de type couches de Berenger*, Thèse de Doctorat, Université de Toulouse 3, France, 2001.
- [24] B. Delourme, H. Haddar et P. Joly, *Approximate models for wave propagation across thin periodic interfaces*, J. Math. Pures Appl., 98, 28–71, 2012.

- [25] B. Delourme et X. Claeys, *High order asymptotics for wave propagation across thin periodic interfaces*, *Asymptotic Analysis*, 83, 35–82, 2013.
- [26] PH. Destuynder. *Sur une justification des modèles de plaques minces et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse de Doctorat d'Etat Es-Sciences. Université Paris VI, France, 1980.
- [27] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, 1968.
- [28] M. P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [29] M. V. Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, California, 1975.
- [30] B. Engquist et J. C. Nédélec, *Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers*, Research Report CMAP 278, Ecole Polytechnique, France, 1993.
- [31] Y. Grisel, *Localisation de défauts et applications pour les milieux inhomogènes en propagation d'ondes acoustiques*, Thèse de Doctorat, Université Toulouse III Paul Sabatier, France, 2011.
- [32] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, New York, 1963.
- [33] A. M. Il'in, *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary-Value Problems*, Providence : Am. Math. Soc., 1992.
- [34] C. Kirsch, *Non-reflecting Boundary Conditions for the Numerical Solution of Wave Propagation Problems in Unbounded Domains*, PhD thesis, Université de Bâle, Suisse, 2005.
- [35] K. Lemrabet, *Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers*, Thèse de Doctorat d'Etat Es-Sciences, USTHB, Alger, Algérie, 1987.
- [36] M. A. Leontovitch, *Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of good conductor*, V.A. Fock ed. N.A. Logan, 1948.
- [37] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, 2000.
- [38] J. C. Nédélec, *Acoustic and electromagnetic equations, integral Representations for Harmonic Problems*, Springer, 2001.

- [39] V. Péron et C. Poignard, *Approximate transmission conditions for time-harmonic Maxwell equations in a domain with thin layer*, Research Report RR-6775. INRIA, 2008.
- [40] R. Perrussel et C. Poignard, *Asymptotic Expansion of Steady-State Potential in a High Contrast Medium. A Uniform Variational Formulation for Resistive Thin Layers*, Research Report RR-7163. INRIA, 2010.
- [41] C. Poignard, *Méthodes asymptotiques pour le calcul des champs électromagnétiques dans des milieux à couches minces. Application aux cellules biologiques*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard-Lyon 1, France, 2006.
- [42] F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 53, 57–65, 1943.
- [43] K. Schmidt, *High-order numerical modeling of highly conductive thin sheets*, PhD thesis, ETH Zurich, 2008.
- [44] K. Schmidt et S. Tordeux, *Asymptotic modelling of conductive thin sheets*, Z. Angew. Math. Phys., 61, 603–626, 2010.
- [45] K. Schmidt et S. Tordeux, *High order transmission conditions for thin conductive sheets in magneto-quasistatics*, ESAIM, Math. Model. Numer. Anal., 45, No. 6, 1115–1140, 2011.
- [46] L. Ségui, *Sur un problème inverse en diffraction d’ondes : identification des permittivités complexes d’un matériau à partir de données du champ proche*. Thèse de Doctorat, École nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace, Toulouse, France, 2000.
- [47] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2001.
- [48] L. Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Springer, Berlin, 2007.
- [49] M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton Math. Ser., 34, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1981.
- [50] F. Trèves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Plenum Press, New York, 1980.
- [51] A. D. Ventcel’, *Semigroups of operators that correspond to a generalized differential operator of second order*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 111, 269–272, 1956.

- [52] A. D. Ventcel', *On boundary conditions for multidimensional diffusion processes*, Theor. Probab. Appl., 4, 164–177, 1959.
- [53] G. Vial, *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, France, 2003.
- [54] C. H. Wilcox, *Scattering Theory for the D'Alembert Equation in Exterior Domains*, Lecture Notes in Math., 442, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

Index des notations

δ	Epaisseur de la couche mince, destinée à tendre vers 0 (p. 2).
Ω_δ^-	Domaine intérieur dont le bord est régulier (p. 2).
Ω_δ	Couche mince uniforme recouvrant Ω_δ^- (p. 2).
Ω	Domaine borné contenant la couche mince (p. 2)
Ω_δ^+	Domaine défini par $\Omega \setminus \left(\overline{\Omega_\delta^- \cup \Omega_\delta}\right)$ dans la Partie 1 (p. 2) et par $\mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{\Omega_\delta^- \cup \Omega_\delta}\right)$ dans les parties 2 et 3 (p. 50).
$\Gamma_{\delta,1}$	Bord du domaine intérieur Ω_δ^- (p. 2).
$\Gamma_{\delta,2}$	Bord extérieur de la couche mince (p. 2).
$\partial\Omega$	Bord du domaine Ω (p. 2).
α	Fonction régulière par morceaux définie sur Ω (p. 2).
α^-, α_δ et α^+	Constantes positives intervenant dans la définition de α (p. 2).
f	Fonction régulière définie sur Ω (p. 3).
u_δ	Solution exacte du problème de transmission (p. 3).
u_δ^-	Restriction de u_δ sur Ω_δ^- (p. 3).
u_δ^+	Restriction de u_δ sur Ω_δ^+ (p. 3).
$u_{\text{int},\delta}$	Restriction de u_δ sur $\Omega_{\text{int},\delta}$ (p. 3).
Γ	Surface parallèle à $\Gamma_{\delta,1}$ et $\Gamma_{\delta,2}$ divisant Ω_δ en deux couches minces $\Omega_{\delta,1}$ et $\Omega_{\delta,2}$ (p. 4).
p_1 et p_2	Deux constantes positives vérifiant $p_1 + p_2 = 1$ (p. 4).
$u_{\text{int},\delta}^1$	Restriction de u_δ sur $\Omega_{\delta,1}$ (p. 4).
$u_{\text{int},\delta}^2$	Restriction de u_δ sur $\Omega_{\delta,2}$ (p. 4).
$\mathbf{n}, \mathbf{n}_{\delta,1}, \mathbf{n}_{\delta,2}$ et \mathbf{n}_e	Vecteurs unitaires normaux à $\Gamma, \Gamma_{\delta,1}, \Gamma_{\delta,2}$ et $\partial\Omega$ respectivement (p. 5).
∂_ν	Dérivée dans la direction du vecteur ν (p. 5).
m	Point de la surface Γ (p. 7).
$T_m(\Gamma)$	Plan tangent en m à Γ (p. 7).

$d\Gamma$	Elément d'aire sur Γ (p. 7).
\mathcal{R}	Opérateur de courbure de Γ (p. 7).
\mathcal{H}	Courbure moyenne de Γ (p. 8).
\mathcal{K}	Courbure de Gauss de Γ (p. 8).
∇_{Γ}	Gradient tangentielle (p. 8).
div_{Γ}	Divergence tangentielle (p. 8).
Δ_{Γ}	Opérateur de Laplace-Beltrami (p. 9).
β	Constante valant 1 ou 2 (p. 11).
$I_{\delta,1}$	Intervalle $(-p_1\delta, 0)$ (p. 11).
$I_{\delta,2}$	Intervalle $(0, p_2\delta)$ (p. 11).
$I_{\delta,\beta}$	Intervalle $I_{\delta,1}$ ou $I_{\delta,2}$ (p. 11).
(m, η_{β})	Coordonnées locales dans $\Omega_{\delta,\beta}$, $m \in \Gamma$ et $\eta_{\beta} \in I_{\delta,\beta}$ la variable normale (p. 11).
ψ_{β}	Paramétrisation de $\Omega_{\delta,\beta}$ (p. 11).
\tilde{v}_{β}	Fonction $v_{\beta} \circ \psi_{\beta}$ (p. 11).
$d\Omega_{\delta,\beta}$	Elément de volume dans $\Omega_{\delta,\beta}$ (p. 12).
$d\Gamma_{\delta,\beta}$	Elément d'aire sur $\Gamma_{\delta,\beta}$ (p. 12).
I_1	Intervalle $(-1, 0)$ (p. 12).
I_2	Intervalle $(0, 1)$ (p. 12).
I_{β}	Intervalle I_1 ou I_2 (p. 12).
Ω^{β}	Domaine $\Gamma \times I_{\beta}$ (p. 12).
(m, s_{β})	Coordonnées semi-dilatées dans $\Omega_{\delta,\beta}$: $s_{\beta} = \eta_{\beta}/p_{\beta}\delta$ (p.12).
Φ_{β}	Paramétrisation de $\Omega_{\delta,\beta}$ (p.12).
$v^{[\beta]}$	Fonction $v_{\beta} \circ \Phi_{\beta}$ (p. 12).
$J_{\delta,\beta}$	Endomorphisme $I + p_{\beta}\delta s_{\beta}\mathcal{R}$ (p. 13).
$a_{\delta}^{[\beta]}(.,.)$	Forme bilinéaire intervenant dans la formulation variationnelle du problème de transmission (p. 18).
Ω^{-}	Domaine $\Omega_{\delta}^{-} \cup \Gamma_{\delta,1} \cup \Omega_{\delta,1}$ (p. 19).
Ω^{+}	Domaine $\Omega_{\delta,2} \cup \Gamma_{\delta,2} \cup \Omega_{\delta}^{+}$ (p. 19).
$u_n^{-}, n \geq 0$	Termes du développement asymptotique de u_{δ}^{-} (p. 19).
$u_n^{+}, n \geq 0$	Termes du développement asymptotique de u_{δ}^{+} (p. 19).
$u_{\text{int},n}^{[\beta]}, n \geq 0$	Termes du développement asymptotique de $u_{\text{int},\delta}^{[\beta]}$ (p. 19).

$U_{\text{int},n}^-, n \geq 0$	Fonctions intervenant dans le développement de Taylor de u_n^- (p. 20).
$U_{\text{int},n}^+, n \geq 0$	Fonctions intervenant dans le développement de Taylor de u_n^+ (p. 20).
$a_{k,l}^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$	Formes bilinéaires intervenant dans le développement de $a_\delta^{[\beta]}(\cdot, \cdot)$ (p. 20).
α_0	Fonction régulière par morceaux définie sur Ω (p. 27).
$u_n, n \geq 0$	Termes du développement asymptotique de u_δ loin de la couche mince (p. 27).
$u_\delta^{-,(n)}$	Développement asymptotique de u_δ^- tronqué à l'ordre n (p. 32).
$u_\delta^{+,(n)}$	Développement asymptotique de u_δ^+ tronqué à l'ordre n (p. 32).
$u_{\text{int},\delta}^{(n)}$	Développement asymptotique de $u_{\text{int},\delta}$ tronqué à l'ordre n (p. 32).
$R_{\delta,\beta}^n$	Reste du développement de Taylor de $u_\delta^{\pm,(n)}$ à l'ordre n au voisinage de $\eta_\beta = 0$ (p. 32).
$\mathcal{P}R_\delta^n$	Relèvement de $R_{\delta,\beta}^n _{\Gamma_{\delta,\beta}}$ sur Ω_δ (p. 34).
$r_\delta^{-,n}$	Différence entre u_δ^- et $u_\delta^{-,(n)}$ (p. 38).
$r_\delta^{+,n}$	Différence entre u_δ^+ et $u_\delta^{+,(n)}$ (p. 38).
$r_{\text{int},\delta}^n$	Différence entre $u_{\text{int},\delta}$ et $u_{\text{int},\delta}^{(n)}$ (p. 38).
$u_\delta^{-,(ap)}$	Approximation de u_δ^- sur Ω_δ^- (p. 43).
$u_\delta^{+,(ap)}$	Approximation de u_δ^+ sur Ω_δ^+ (p. 43).
$(\mathcal{P}_\delta^{ap})$	Problème approché (p. 43).
S^-	Opérateur de Dirichlet-to-Neumann (p. 44).
S^+	Opérateur de Dirichlet-to-Neumann (p. 44).
u_δ^{ap}	Solution approché du problème de transmission (p. 46).
$u_{\text{int},\delta}^{ap}$	Restriction de u_δ^{ap} sur $\Omega_{\text{int},\delta}$ (p. 46).
σ_δ et k_δ^2	Fonctions régulières par morceaux définies sur \mathbb{R}^3 (p. 51).
σ^-, σ^+ et $\tilde{\sigma}_\delta$	Constantes positives intervenant dans la définition de σ_δ (p. 51).
$k_+^2, \tilde{k}_\delta^2$ et k_-^2	Constantes complexes intervenant dans la définition de k (p. 51).
u_{inc}	Onde incidente (p. 51).
B_R	Boule de centre O et de rayon R (p. 52).
Ω_R	Domaine $B_R \cap \Omega^+$ (p. 52).
S_R	Sphère de centre O et de rayon R (p. 53).
dS_R	Élément d'aire sur S_R (p. 53).

T	Opérateur de Dirichlet-to-Neumann (p. 54).
$O\Psi D$	Opérateur pseudo-différentiel (p. 55).
σ_0 et k_0^2	Fonctions régulières par morceaux définies sur \mathbb{R}^3 (p. 58).
$\tilde{\Omega}^+$	Domaine $\Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ (p. 58).
$b_\delta^{[\beta]}(.,.)$	Forme bilinéaire intervenant dans la formulation variationnelle du problème de transmission (p. 63).
$b_l^{[\beta]}(.,.)$	Formes bilinéaires intervenant dans le développement de $b_\delta^{[\beta]}$ (p. 67).
$\tilde{\Omega}_\delta^+$	Domaine $\tilde{\Omega}^+ \setminus \overline{\Omega_{\delta,2}}$ (p. 71).
U_δ^{ap}	Approximation de u_δ sur $\Omega_\delta^- \cup \Omega_\delta^-$ (p. 75).
(Q_δ^{ap})	Problème approché (p. 75).
T^-	Opérateur de Dirichlet-to-Neumann (p. 75).
T^+	Opérateur de Dirichlet-to-Neumann (p. 78).
$(\mathcal{E}_\delta^{ap})$	Problème approché (p. 123).

Index

- Alternative de Fredholm, 56
- Champ
 - \sim lointain, 18
 - \sim proche, 18
- Composante
 - \sim normale, 8
 - \sim tangentielle, 8
- Condition
 - Conditions de transmission, 5, 62, 91
 - \sim de type Ventcel, 43, 75, 123
 - \sim s de transmission approchées, 43
 - \sim transparente, 55
- Couche
 - \sim limite, 18
 - \sim mince, 2, 50, 89
- Courbure
 - \sim de Gauss, 8
 - \sim moyenne, 7
 - \sim s principales, 7
- Développement asymptotique
 - \sim externe, 18, 64, 109
 - \sim interne, 18, 64, 109
- Divergence tangentielle, 8
- Echelle
 - \sim macroscopique, 18
 - \sim microscopique, 18
- Élément
 - \sim d'aire sur $\Gamma_{\delta,\beta}$, 12
 - \sim d'aire sur Γ , 7
 - \sim de volume, 12
- Espace
 - $\sim H^{-s}(\Gamma)$, 10
 - $\sim H^1(\Gamma)$, 10
 - $\sim H^1(\Omega_{\delta,\beta})$, 14
 - $\sim H^s(\Gamma)$, 9
 - $\sim L^2(\Gamma)$, 9
 - $\sim L^2(\Omega_{\delta,\beta})$, 13
- Frénet
 - Base de \sim , 15
 - Formules de \sim , 16
- Fredholm
 - Alternative de \sim , 56
 - Opérateur de \sim , 79
- Gradient tangentiel, 8
- Hierarchie d'équations variationnelles, 23
- Hypothèse de coques minces, 10
- Membrane, 2
- Moyenne diffusion, 3, 44
- Normale unitaire, 7
- Onde
 - Nombre d' \sim , 52
 - \sim incidente, 51
 - \sim plane, 51
- Opérateur
 - \sim de courbure, 7
 - Opérateur de Dirichlet-to-Neumann, 44
 - $\sim S^+$, 44
 - $\sim S^-$, 44
 - $\sim T$, 54
 - $\sim T^+$, 78
 - $\sim T^-$, 75
 - \sim de Fredholm, 79
 - \sim de Laplace-Beltrami, 9
 - \sim de projection orthogonale, 8
 - \sim elliptique, 45
 - \sim pseudo-différentiel, 45
 - \sim semi-borné, 45
 - \sim s de Steklov-Poincaré, 44
 - \sim s DtN, 44
- Partition de l'unité, 9
- Plan tangent, 7
- Problème
 - $\sim (\mathcal{E}_\delta^{ap})$, 123
 - $\sim (\mathcal{P}_\delta^{ap})$, 43
 - \sim de Poisson, 3

- ~ de Helmholtz, 51, 90
- ~ de Ventcel, 93
- ~ de transmission, 4, 61, 90
- ~ (Q_δ^{ap}), 75

Rellich

- Lemme de ~, 54
- Théorème de ~, 58

Solution

- ~ approchée, 46
- ~ exacte, 46

Stabilité uniforme, 57, 93

Surface régulière parallèle, 4

Symbole, 45

Tenseur métrique, 7

Variable

- ~ lente, 18
- ~ rapide, 18
- ~ semi-dilatée, 18

Ventcel

- Conditions de transmission de type ~, 43, 75, 123
- Problème de ~, 93

Table des figures

1	Le pavé Ω	ix
2	La couche mince Ω_δ	x
3	Le domaine fixe $\Omega^+ \cup \Omega^-$	xi
1.1	Données géométriques	2
1.2	Le domaine Ω	4
1.3	La couche mince Ω_δ	5
3.1	Le domaine fixe Ω	19
6.1	Géométrie du problème	51
6.2	La boule B_R	53
6.3	Le domaine tronqué Ω	55
6.4	Le domaine fixe $\Omega^- \cup \tilde{\Omega}^+$	58
7.1	Données géométriques du problème de diffraction avec l'interface Γ	61
7.2	Le domaine fixe $\Omega^- \cup \Omega^+$	64
A.1	Géométrie intervenant dans le Théorème 52	133
A.2	Géométrie intervenant dans le Théorème 53	134

Approximation de l'impédance d'une inclusion mince contrastée pour un problème de transmission en diffraction des ondes

Résumé :

Dans ce travail, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution de différents problèmes définis dans des domaines avec couche mince. Nous adoptons des méthodes asymptotiques pour modéliser l'effet de la couche mince par des problèmes avec des conditions de transmissions approchées de type Ventcel. Cette thèse est organisée en trois parties, nous choisissons de les présenter par ordre de difficulté et chronologique. Nous traitons d'abord un problème de Poisson défini dans un domaine borné avec condition de Dirichlet homogène sur le bord dans le cas moyenne diffusion. Nous étudions ensuite des problèmes de diffraction d'ondes par une couche mince faiblement (Partie 2) et fortement absorbante (Partie 3). Nous nous intéressons plus particulièrement à la résolution de l'équation de Helmholtz en dimension 3. Bien qu'il s'agisse, dans les deux parties 2 et 3, de l'équation de Helmholtz, nous verrons que les problèmes de faible et de forte conductivité diffèrent par les résultats obtenus mais surtout par les difficultés rencontrées.

Mots-clés : Analyse asymptotique, Développement asymptotique, Couche mince, Equation de Poisson, Equation de Helmholtz, Conditions de transmission approchées.
