N° d'ordre : 37/2016-C/MT

**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene**

**Thèse**

**Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat $3^{eme}$ cycle (LMD)**
**En : Mathématiques**

**Option : Recherche Opérationelle et Mathématiques Discrète**

**Présentée par**

**TIACHACHAT MERIEM**

**Thème**

# *Quelques applications des nombres $r$-Whitney et $r$-Stirling*

Soutenue publiquement, le 12/06/2016 devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr M. BOUDHAR | Professeur | USTHB | Président. |
| Mr M. MIHOUBI | Professeur | USTHB | Directeur de thèse. |
| Mr H. BELBACHIR | Professeur | USTHB | Examinateur. |
| Mr M. RAHMANI | M.C.A | USTHB | Examinateur. |
| Mr Y. ADNAN | Professeur | U. LE HAVRE(FRANCE) | Examinateur. |
| Mr A. DERBAL | Professeur | ENS-Kouba | Examinateur. |

# REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu ALLAH, pour la foi, la confiance et la volonté dont il m'a doté.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse, Professeur MIHOUBI Miloud, d'avoir su guider mes premiers pas vers la recherche. Je le remercie aussi, pour son aide, ses efforts incessants, sa patience, ses conseils, sa disponibilité, et sa clairvoyance mathématique m'ont permis de venir à bout de ce travail.

Je remercie l'ensemble des professeurs de l'USTHB pour l'enseignement qu'ils m'ont prodigué au cours de mes années d'études .

Je remercie sincèrement Mr BOUDHAR Mourad, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur en acceptent de présider le jury de soutenance de ma thèse.

Je remercie également Mr YASSINE Adnan Professeur à l'U.HAVRE(FRANCE), Mr BELBACHIR Hacene, Professeur à l'USTHB, Mr DERBAL Abdellah, Professeur à l'ENS-Kouba et Mr RAHMANI Mourad M.C.A à l'USTHB pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury.

Je voudrais remercier A. Amrani pour ses conseils, son aide, pour tout ce qu'il m'apporte mais surtout pour sa patience.

Je tiens à remercier plus personnellement ma mère, mes frères et mes soeurs pour le soutien et l'encouragement qu'ils m'ont apportés durant toutes mes années d'études, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé, de prés ou de loin.

Mes pensées vont a mes amis, pour tout ce qu'ils m'apportent, mais surtout pour leur amitié.

Je tiens à remercier tous ceux et celles qui m'ont aidé et soutenu pendant la réalisation de cette thèse.

# DÉDICACES

Je dédie ce travail

À ma mère

À ma mère

À ma mère

À l’homme que je n’ai jamais vu et qui reste toujours dans nos coeurs Mon Père

À ma grand mère

À mes soeurs et mes frères

À mes nièces et mes neveux

À toute ma famille,

À mes très chères amies : Asma et Asma.

À tout mes amis pour leur amitié, leurs encouragements, leur soutien.

# TABLE DES MATIÈRES

# LISTE DES TABLEAUX

# NOTATION

$\mathbb{N}$ : L'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{R}$ : L'ensemble des réels.

$[n]$ : L'ensemble $1, 2, 3, ..., n$.

$\binom{n}{k}$ : Coefficient binomial, tel que $n$ et $k$ des entiers où $0 \leq k \leq n$.

$(x)^{\overline{n}}$ : Factorielle croissante.

$(x)^{\underline{n}}$ : Factorielle décroissante.

$a \mid b$ : $a$ divise $b$.

$a \equiv b \pmod{n}$ : $a$ congru à $b$ modulo $n$.

$\delta_{0,n}$ : Symbole de Kronecker

$\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$ : Nombres de Stirling de première espèce.

$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ : Nombres de Stirling de seconde espèce.

$\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]^2$ : Nombres de Stirling $2-$associés de première espèce.

$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}^2$ : Nombres de Stirling $2-$associés de seconde espèce.

$\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_r$ : Nombres de $r-$Stirling de première espèce.

$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_r$ : Nombres de $r-$Stirling de seconde espèce.

$(l, \leq)$ : Ensemble ordonné.

$w_m(n,k)$ : Nombres de Whitney de première espèce.

$W_m(n,k)$ : Nombres de Whitney de seconde espèce.

$W_{(m,r)}(n,k)$ : Nombres de $r-$Whitney de seconde espèce.

$w_{(m,r)}(n,k)$ : Nombres de $r-$Whitney de première espèce.

$B_n$ : Nombre de Bernoulli.

$B_n(x)$ : Polynôme classique de Bernoulli.

$\mathbf{b}_n$ : Polynôme de Bell à une seule variable .

$A_{n,k}(a_1, a_2, ...)$ : Polynôme partiel de Bell.

$A_n$ : Polynôme complet de Bell.

$E_n$ : Nombre d'Euler.

$E_n(x)$ : Polynôme d'Euler.

$H_n$ : Nombre Harmonique.

$H_n^m$ : Nombre hyper-Harmonique.

$B_n^{(\alpha)}(x)$ : Polynôme de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce.

$B_n^{(\alpha)}$ : Nombre de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce .

$b_n^{(\alpha)}(x)$ : Polynôme de Bernoulli d'ordre supérieur de seconde espèce .

$b_n^{(\alpha)}$ : Polynôme de Bernoulli d'ordre supérieur de seconde espèce .

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La combinatoire est la science qui cherche à compter le nombre d'objets d'un problème mathématiques, informatiques ou de physique comme d'autre. En effet, les propriétés intéressente concernant des objets de grande taille, par exemple la complexité asymptotique en informatique,ainsi qu'un modèle discret qui tend vers la continuité en physique et l'estimation de la moyenne d'une population de taille $n$ lorsque l'on tire un échantillon de taille $t$ en statistiques. Ce dernier exemple utilise comme outil combinatoire les polynômes de Bernoulli et les nombres de Stirling qui font l'objectif de notre travail.

Les nombres de Stirling de première espèce $\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$ et de seconde espèce $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ sont trés connus en combinatoire énumérative et possèdent des applications riches dans plusieurs domaines de la science. Ces nombres ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs durant ce siècle. Ils sont apparus dans plusieurs ouvrages [9, 10, 11]. Cependant, ils apparaissent comme cas particulier dans les nombres $r$-Stirling de deux types $\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_r$, $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_r$ et $r-$ Whitney $w_{m,r}(n,k)$, $W_{m,r}(n,k)$ de première et seconde espèce.

Ainsi, ils sont principalement liés aux polynômes de Bernoulli de première et seconde espèce $B_n(x)$ et $b_n(x)$ par les deux identités bien connues pour $x = 0$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \qquad (1)$$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k+1} \left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] \qquad (2)$$

## *Apport et présentation*

En 1988, M. Srivastava et al, dans son ouvrage "An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials" ont prouvé des nouvelles formules explicites pour les polynômes de Bernoulli généralisés. Ils ont fournis une extension intéressante d'une représentation pour les

nombres de Bernoulli généralisés, mais malheureusement, ces formules explicite sont très difficiles à manipuler.
Cette thèse aborde une série de résultats relatifs aux liens entre les nombres de Stirling, $r$-Stirling, $r$-Whitney aux divers types de polynômes de Bernoulli généralisés, afin de trouver des formules explicites simples pour les valeurs entières et rationnelles des polynômes de Bernoulli généralisés. Ce lien est élaboré à l'aide de formule de Melzak.
Elle porte sur " Quelques applications des nombres $r-$Whitney et $r-$Stirling". Elle est composée de quatre chapitres :

**Chapitre 1 : Préliminaires et rappels**

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la combinatoire. Nous présentons les définitions, les relations de récurrences et les interprétions combinatoires des nombres de Stirling, $r$-Stirling et Whitney, ainsi que la définition et les propriétés des nombres et des polynômes de Bernoulli et d'Euler.

**Chapitre 2 : Application des nombres $r$-Stirling aux polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur**

Au moyen de l'analyse des fonctions génératrices et la formule de Melzak (voir[22, 23]) donnée par la relation suivante

$$f_n(\alpha + x) = \alpha\binom{\alpha+p}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{\alpha+j}\binom{p}{j}f_n(-j+x);$$

telle que $f$ est un polynôme de degrè $n \leq p$.

Nous exprimons dans le présent chapitre, les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de premiére espèce $B_n^{(\alpha)}(x)$ et de seconde espèce $b_n^{(\alpha)}(x)$ aux points entiers $x = r \in \mathbb{N}$ à l'aide des nombres $r$-Stirling de première espèce $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$, et seconde espèce $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_r$, par des formules explicites qui contiennent une seule somme, donc elles sont simples à manipuler. Le résultat principal est donné par ces deux expressions :

$$B_n^{(\alpha)}(r) = \alpha\binom{\alpha+n}{n}\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\alpha+j}\binom{2n}{n+j}\begin{Bmatrix} r+j \\ n+r+j \end{Bmatrix}_r,$$

$$b_n^{(\alpha)}(-r) = \alpha\binom{\alpha+n}{n}\frac{2n!}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{\alpha+j}\binom{2n}{n+j}\begin{bmatrix} r+j \\ n+r+j \end{bmatrix}_r.$$

Nous extrairons plusieurs cas particulier, et nous donnons aussi quelques résultats complémentaires sur les congruences et autres concernant les polynômes d'Euler et de Genouchi.

**Chapitre 3 : Application des nombres $r$-Stirling aux polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur**

Le troisième chapitre se divise en deux parties, dans la première partie nous introduisons une nouvelle classe de nombres de Stirling appelée les nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce, Ces nombres sont notés par $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^s$, nous donnons leur interprétation combinatoire, leur fonction génératrice et quelques relations de récurrence. Dans la deuxième partie, nous exprimons les polynômes de Bernoulli généralisés de première espèce $B_n^{[s-1,\alpha]}(x)$ à l'aide des nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de second espèce, nous établissons les identités

$$B_n^{[s-1,\alpha]}(r) = (s!)^{\alpha} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+sj}{n, s, \ldots, s}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^{s+1} (-\alpha)_j$$

$$B_n^{[s-1,-k]}(r) = \frac{n!k!}{(n+sk)!} \left\{ \begin{matrix} n+sk+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{s},$$

**Chapitre 4 : Quelques applications des nombres $r$-Whitney**

Le dernier chapitre porte sur l'application des nombres r-Whitney aux polynômes de Bernoulli. Nous exploitons la formule de Melzak et les nombres $r$-Whitney de première espèce $w_{m,s}(n,k)$ et de seconde espèce $W_{m,r}(n,j)$ pour donner de nouvelle expressions des valeurs des polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première et seconde espèce aux points rationnels $x = \frac{r-s}{m}$.

Nous montrons que

$$B_n^{(k)}(\frac{r-s}{m}) = \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{n} m^j \binom{j+k}{k}^{-1} w_{m,s}(j+k,k) W_{m,r}(n,j),$$

$$b_n^{(k)}(\frac{r-s}{m}) = \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} W_{m,r}(j+k,k) w_{m,s}(n,j).$$

Et

$$B_n^{(-k)}(\frac{r}{m}) = \frac{1}{m^n} \binom{n+k}{k}^{-1} W_{m,r}(n+k,k),$$

$$b_n^{(-k)}(\frac{-r}{m}) = \frac{1}{m^n} \frac{k!}{(n+k)!} w_{m,r}(n+k,k).$$

Les cas particuliers de ce derniers résultat montrent des nouvelle formules explicite des nombres et des polynômes de Bernoulli classiques.

# CHAPITRE 1

## PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS

# Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons des définitions de quelques notions de la combinatoire concernant notre sujet. Nous nous intéressons à quelques propriétés de coefficients binomiaux, des nombres de Stirling, des nombres de Whitney et des nombres et polynômes de Bernoulli ainsi leurs fonctions génératrice.

Nous rappelons aussi la définitions des nombres et polynômes d'Euler et les nombres Harmoniques, ainsi que leurs formules explicites.

Ces rappels et définitions sont principalement puisées dans les ouvrages de Comtet [10], Charalambides [11] et Graham, Knuth et Patashnik [16].

## 1.1 Dénombrement

Le dénombrement s'emploie à étudier et à compter divers types de regroupement d'objets d'un ensemble fini.
Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ où $n$ est un entier naturel.

**Définition 1.1.1.** *Une permutation de l'ensemble $E$ est toute bijection de l'ensemble $E$ dans lui même.*

**Définition 1.1.2.** *On définit un arrangement de $p$ éléments de $E$ toute partie de $E$ à $p$ éléments dont les éléments sont numérotés, ou encore, une combinaison arrangement est un tirage d'une quantité d'objets dont l'ordre est important.*

**Définition 1.1.3.** *On appelle combinaison de $p$ éléments de $E$ toute partie de $E$ à $p$ éléments. On peut aussi dire qu'une combinaison est un tirage d'une quantité d'objets sans ordre.*

## 1.2 Coefficients binomiaux

**Définition 1.2.1.** *Pour tout réel $\alpha$ et pour tout entier $k$, on définit le coefficient binomial par*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k-1)}{k!}$$

*avec* $\binom{\alpha}{0} = 1$, *et si* $k \geq 1$ *on peut définir* $\binom{\alpha-1}{k}$ *par* $\binom{\alpha-1}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha-j}{j}$.

Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes

Si $\alpha = n$ et $n$ est un entier tel que $n \geq k$ alors le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal à

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

– Si $\alpha = n$ et $n$ est un entier tel que $n \geq k \geq 0$, alors on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

– Si $k$ est un entier naturel alors on a $\binom{-1}{k} = k!(-1)^k$.

– Si $k$ est un entier naturel alors on a $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha-1}{k-1}$.

– Si $\alpha$ est un réel et $k$ est un entier alors, $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1}$.

– Si $n$ est un entier naturel alors on a $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$.

– Si $z$ est un nombre complexe et $|z| < 1$ alors $(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$.

–Si $\alpha, \beta$ sont des nombres réels et $k$ est un entier alors,

$$\sum_{k+l=n, k,l\geq 0} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{l} = \binom{\alpha+\beta}{n}.$$

## 1.3 Factorielle croissante et factorielle décroissante

**Définition 1.3.1.** *La factorielle croissante et décroissante sont respectivement définies par*

$$(x)^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1),$$
$$(x)^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-n+1),$$

*avec* $(x)^{\bar{0}} = (x)^{\underline{0}} = 1$

Si $x$ et $n$ sont des entiers, on a

$$(x)^{\overline{n}} = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!} \quad \text{Et} \quad (x)^{\underline{n}} = \frac{x!}{(x-1)!}.$$

**Quelques propriétés**

On peut exprimer la factorielle croissante en fonction de la factorielle décroissante comme suit

$$(x)^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}}$$
$$(x)^{\overline{n}} = (-1)^n (x)^{\underline{n}}$$

les identités suivantes relient les coefficients binomiaux avec la factorielle croissante et la factorielle décroissante

$$\frac{(x)^{\overline{n}}}{n!} = \binom{x+n-1}{n}$$
$$\frac{(x)^{\underline{n}}}{n!} = \binom{x}{n}$$

## 1.4 Nombres de Stirling de première espèce

**Définition 1.4.1.** *Les nombres de Stirling de première espèce notés* $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]$ *sont les coefficients du polynôme* $(x)^{\underline{n}}$

$$(x)^{\underline{n}} = (-1)^{n-k} \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] x^k$$

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient

$$\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right] = \delta_{0,n}$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = (n-1)\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right]$$

**Théorème 1.4.1.** *[11] Les nombres de Stirling de première espèce admettent la fonction génératrice exponentielle suivante*

$$\sum_{n,k\geq 0} (-1)^{n-k} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] \frac{t^n}{n!} x^n = (1+t)^x$$

*Ou d'une façon équivalente*

$$\sum_{n\geq k} (-1)^{n-k} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] \frac{t^n}{n!} = \frac{(ln(1+t))^k}{k!}$$

**Remarque 1.4.1.** *La valeur absolue des nombres de Stirling de première espèce compte le nombre de permutations de $n$ objets ayant exactement $k$ cycles*

**Théorème 1.4.2.** *[11] Pour tout entier naturel non nul $n$, pour tout entier naturel $k \leq n$, les nombres de Stirling de premiére espèce sont donnés par l'expression explicite*

$$\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} \Big(\frac{1}{1}\Big)^{k_1} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_2} ... \Big(\frac{1}{n}\Big)^{k_n}$$

*oú la somme porte sur toutes les solutions $k_1, k_2, ...$ d'entiers naturels tels que :*

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots = k$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots = n$$

**Théorème 1.4.3.** *[11] Pour tout entier naturel non nul $n$, et pour tout entier naturel $k \leq n$, les nombres de Stirling de premiére espèce admettent la formule explicite suivante*

$$\left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \binom{n+r-1}{k-1} \binom{2n-k}{n-k-r} \frac{j^{n-k+r}}{r!}$$

Les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce sont données dans la table suivante.

| n \ m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 2 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 0 | 6 | 11 | 6 | 1 | | | | | | |
| 5 | 0 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 | | | | | |
| 6 | 0 | 120 | 274 | 225 | 85 | 15 | 1 | | | | |
| 7 | 0 | 720 | 1764 | 1624 | 735 | 175 | 21 | 1 | | | |
| 8 | 0 | 5040 | 13068 | 13132 | 6769 | 1960 | 322 | 28 | 1 | | |
| 9 | 0 | 4050 | 109584 | 118124 | 67284 | 22449 | 4536 | 546 | 36 | 1 | |
| 10 | 0 | 362880 | 1026576 | 1172700 | 723680 | 269325 | 63273 | 9450 | 780 | 45 | 1 |

TABLE 1.1 – Nombres de Stirling de première espèce

## 1.5 Nombres de Stirling de seconde espèce

**Définition 1.5.1.** *Les nombres de Stirling de seconde espèce notés* $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ *sont définis par*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (x)^{\underline{k}}$$

les nombres de Stirling de seconde espèce vérifient

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right\} = \delta_{0,n}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$$

**Théorème 1.5.1.** *Les nombres de Stirling de seconde espèce* $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ *admettent la fonction génératrice exponentielle suivante.*

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t - 1)^k, \;\; k \geq 0$$

**Théorème 1.5.2.** *[11]Pour tout entier naturel non nul* $n$, *et pour tout entier naturel* $k \leq n$

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

**Théorème 1.5.3.** *[10] Pour tout entier naturel non nul* $n$, *pour tout entier naturel* $k \leq n$ *:*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \sum_{c_1 + c_2 + \ldots + c_k = n-k} 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots k^{c_k}$$

Donc, le nombre de Stirling de seconde espèce est la somme de tous les produits des $(n-k)$ entiers de l'ensemble $1, 2, ..., k$.

Par exemple : $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} = 1^2 + 1^2.2 + 2^2 = 7$ Les premières valeurs des nombres de Stirling de seconde espèce sont données dans la table suivante

### Orthogonalité

Les nombres de Stirling des deux espèces vérifient les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n} \left[ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right\} (-1)^{n-k} = \sum_{k=m}^{n} \left[ \begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (-1)^{n-k} = \delta_{n,m}$$

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | | |
| 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | | |
| 8 | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | | |
| 9 | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 | |

TABLE 1.2 – Nombres de Stirling de seconde espèce

## 1.6 Nombres de Stirling associés

**Définition 1.6.1.** *[40] Les nombres de Stirling associés de première espèce* $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]^2$ *donnent le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, ..., n\}$ *en* $k$ *cycles de longueur* $\geq 2$.

Ces nombres vérifient

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]^2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right]^2 = 1 \qquad n \geq 1$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right]^2 = (n-1)! \qquad n > 1$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]^2 = 0 \qquad n \geq 1 \qquad Si \;\; n < 2k \quad ou \quad k < 0$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]^2 = (n-1)\Big(\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]^2 + \left[\begin{array}{c} n-2 \\ k-1 \end{array}\right]^2\Big) \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{2}$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling associés de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n \geq 2k} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]^2 \frac{t^n}{n!} = \frac{(-ln(1-t)-1)^k}{k!} \tag{1.1}$$

**Définition 1.6.2.** *Les nombres de Stirling associés de seconde espèce* $\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}^2$ *donnent le nombre de partitions de l'ensemble* $\{1, 2, ..., n\}$ *en* $k$ *blocs de longueur* $\geq 2$.

Ces nombres vérifient

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}^2 = 1 \qquad n \geq 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^2 = 0 \qquad n \geq 1 \qquad Si \;\; n < 2k \quad ou \quad k < 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^2 = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}^2 + (n-1) \left\{ \begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\}^2$$

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling associés de première espèce est donnée par

$$\sum_{n \geq 2k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^2 \frac{t^n}{n!} = \frac{(exp(t) - t - 1)^k}{k!}. \tag{1.2}$$

Voici les tables des premières valeurs des nombres de Stirling asscociés de première et seconde espèce.

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | | | | |
| 3 | 2 | | | | |
| 4 | 6 | 3 | | | |
| 5 | 24 | 20 | | | |
| 6 | 120 | 130 | 15 | | |
| 7 | 720 | 924 | 210 | | |
| 8 | 5040 | 7308 | 2380 | 105 | |
| 9 | 40320 | 64224 | 2380 | 2520 | |
| 10 | 362880 | 623376 | 303660 | 44100 | 945 |

TABLE 1.3 – Nombres de Stirling associés de première espèce

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 3 | | | |
| 5 | 1 | 10 | | | |
| 6 | 1 | 25 | 15 | | |
| 7 | 1 | 56 | 105 | | |
| 8 | 1 | 119 | 490 | 105 | |
| 9 | 1 | 246 | 1918 | 1260 | |
| 10 | 1 | 501 | 6825 | 9450 | 945 |

TABLE 1.4 – Nombres de Stirling associés de seconde espèce

## 1.7 Nombres $r$-Stirling

Les nombres r-Stirling de seconde espèce apparurent chez N. Nielsen [54] comme étant la différence des puissances en un point arbitraire. J. Riordan [40] les utilisa comme constantes liant les puissances des moments autour d'un point arbitraire et les moments factoriels. Ces nombres furent étudiés par L. Carlitz [8] sous le nom de "weighted Stirling numbers" et M. Koutras, sous le nom de "non-central Stirling numbers". A. Z. Broder [7] les étudia et leur donna le nom "r-Stirling numbers".

**Définition 1.7.1.** *Les nombres $r$-Stirling de première espèce $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]_r$ comptent le nombre de permutations d'un ensemble à $n$ éléments en $k$ cycles tels que les nombres $1, 2, ..., r$ se trouvent dans des cycle différents.*

**Définition 1.7.2.** *Les nombres $r$-Stirling de seconde espèce $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}_r$ comptent le nombre de partitions d'un ensemble à $n$ éléments en $k$ blocs tels que les nombres $1, 2, ..., r$ se trouvent dans des blocs différents.*

Les nombres $r-$Stirling du première espèce sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante.

$$\sum_{n\geq k} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix}\right]_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{(-ln(1-t))^k}{(1-t)^r} \tag{1.3}$$

Les nombres $r-$Stirling de seconde espèce sont aussi définis par la fonction génératrice exponentielle suivante.

$$\sum_{n\geq k} \left\{\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix}\right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(exp(t)-1)^k exp(rt). \tag{1.4}$$

Broder [7] a prouvé que les nombres $r$-Stirling de seconde espèce vérifient :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= 0, && n < k \text{ ou } k < r, \\
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \delta_{k,r}, && n = r, \\
\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_r &= r^{n-r}, && n \leq r, \\
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r, \\
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, les nombres $r$-Stirling de première espèce satisfont :

$$\begin{aligned}
\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= 0, && n < r, \\
\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= \delta_{k,r}, && n = r, \\
\left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]_r &= (r)^{\overline{n-r}}, && n \leq r, \\
\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= (n-1) \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r + \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r, n > r,
\end{aligned}$$

Les premières valeurs de ces nombres pour $r = 2$ et $r = 3$, sont données dans les tables suivantes

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 2 | 4 | 5 | 1 | | | | | |
| 3 | 8 | 19 | 9 | 1 | | | | |
| 4 | 16 | 65 | 55 | 14 | 1 | | | |
| 5 | 32 | 211 | 285 | 215 | 20 | 1 | | |
| 6 | 64 | 665 | 1351 | 910 | 245 | 27 | 1 | |
| 7 | 128 | 2059 | 6069 | 5901 | 2380 | 434 | 35 | 1 |

TABLE 1.5 – Nombres 2-Stirling de seconde espèce

| n \ m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 2 | 6 | 5 | 1 | | | | | |
| 3 | 24 | 26 | 9 | 1 | | | | |
| 4 | 120 | 154 | 71 | 14 | 1 | | | |
| 5 | 720 | 1044 | 580 | 155 | 20 | 1 | | |
| 6 | 5040 | 8028 | 5104 | 1665 | 295 | 27 | 1 | |
| 7 | 40320 | 69264 | 48860 | 18424 | 4025 | 511 | 35 | 1 |

TABLE 1.6 – Nombres 2-Stirling de première espèce

| n \ m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 3 | 1 | | | | | | |
| 2 | 9 | 7 | 1 | | | | | |
| 3 | 27 | 37 | 12 | 1 | | | | |
| 4 | 81 | 175 | 97 | 18 | 1 | | | |
| 5 | 243 | 781 | 660 | 205 | 25 | 1 | | |
| 6 | 729 | 3367 | 4081 | 1890 | 380 | 33 | 1 | |
| 7 | 2181 | 14197 | 23772 | 15421 | 4550 | 644 | 42 | 1 |

TABLE 1.7 – Nombres 3-Stirling de seconde espèce

..

| n \ m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 3 | 1 | | | | | | |
| 2 | 12 | 7 | 1 | | | | | |
| 3 | 60 | 47 | 12 | 1 | | | | |
| 4 | 360 | 342 | 119 | 18 | 1 | | | |
| 5 | 2520 | 2754 | 1175 | 245 | 25 | 1 | | |
| 6 | 20160 | 24552 | 12154 | 3135 | 445 | 33 | 1 | |
| 7 | 181440 | 241128 | 133938 | 40369 | 7140 | 742 | 42 | 1 |

TABLE 1.8 – Nombres 3-Stirling de première espèce

## 1.8 Nombres de Whitney

Un ensemble ordonné $(l, \leq)$, est un treillis si chaque paire d'élément $(x, y)$ a une borne inférieure $x \wedge y$ et une borne supérieure $x \vee y$.

Un treillis fini possède au moins un plus grand élément $0$ ou $1$.
On dit que $y$ couvre $x$ si $x \leq t \leq y$ implique que $x = t$ ou $y = t$.
Un atome est un élément qui couvre $0$.
Le rang $l(x)$ d'un élément $x$ de $L$, est la borne supérieure de chaîne de longueur $k$ comprise entre $0$ et $k$.
Les nombres de Whitney de seconde espèce $W(l, k)$ de treillis $L$ est défini par :

$$W(l, k) = \mid x \in L : l(x) = k \mid$$

C'est à dire le nombre d'éléments de $L$ de rang $k$.

Les nombres de Whitney ont été inventés pour désigner les tailles de chacun des rang (grade) d'un niveau dans un réseau géométrique $L$. Donc le nombre de Whitney est le nombre d'appartenance en $L$ avec le rang $m$.

En 1973, Dowling a introduit une classe géométrique nommés les réseaux de Dowling, cette classe est basée sur un groupe fini ; dont il a renomé ces nombres par les nombres de Whitney de réseau de Dowling de premiére et seconde espèce notés $w_m(n, k), W_m(n, k)$ respectivement.

Benoumhani [4, 5, 6] a etudié ces nombres, leur fonction génératrice et leurs propriétés ainsi que les relations de récurrence.
Les nombres de Whitney de seconde espèce peuvent être écris comme des coefficients de polynôme $x^n$ tel que

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{x-1}{m})^{\underline{k}} m^k W_m(n,k)$$

Ainsi les nombres de Whitney de premiére espèce peuvent être définis à partir de la relation suivante

$$m^n (\frac{x-1}{m})^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k) x^k$$

Ces nombres vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$W_m(n,k) = W_m(n-1,k-1) + (mk+1) W_m(n-1,k)$$
$$w_m(n,k) = w_m(n-1,k-1) + (m(n-1)+1) w_m(n-1,k)$$

Les premières valeurs de ces nombres sont données dans la table suivante

| n \ m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 3 | 6 | 9 | 5 | | | |
| 5 | 1 | 4 | 12 | 30 | 44 | 26 | 3 | |
| 6 | 1 | 5 | 20 | 70 | 170 | 250 | 169 | 35 |
| 7 | 1 | 6 | 30 | 135 | 460 | 1110 | 1689 | 1254 |

TABLE 1.9 – Nombres de Whitney

## 1.9 Nombres et polynômes de Bernoulli

**Définition 1.9.1.** *La suite des nombres de Bernoulli est la suite des nombres rationnels définie par*

$$\sum_{n\geq 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}$$

Les premières valeurs des nombres de Bernoulli sont

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$
$$B_{2k+1} = 0 \qquad k = 1, 2, ...$$

**Définition 1.9.2.** *Les polynômes de Bernoulli sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante*

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}e^{xt} \qquad |t| \leq 2\pi;$$

*avec*

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n \qquad si \quad n \neq 1$$

Les polynômes de Bernoulli vérifient la récursivité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x) = nx^{n-1} \qquad n = 2, 3, ...$$

Les premiérs polynômes de Bernoulli sont

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

Kurt[19] a montré les propriétés suivantes

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} B_k(x),$$

$$\begin{aligned} B_n(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} B_k(x) y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} B_k(y) x^{n-k} \end{aligned}$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad n \geq 0$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

## 1.10 Nombres et polynômes de Bell

**Définition 1.10.1.** *Les nombres de Bell $\boldsymbol{b}_n$ est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à $n$ éléments, ces nombres sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante*

$$\sum_{n\geq 0} \boldsymbol{b}_n \frac{t^n}{n!} = exp(e^t - 1).$$

Les nombres de Bell sont aussi définis comme étant la somme des nombres de Stirling de seconde espèce

$$\mathbf{b}_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}.$$

**Définition 1.10.2.** *Les polynômes partiels de Bell notés $A_{n,k}(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$ sont définis par la fonction génératrice exponentielle*

$$\sum_{n,k\geq 0} A_{n,k}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} x^k = exp\Big(x \sum_{m\geq 1} a_m \frac{t^m}{m!}\Big)$$

*Ou encore,*

$$\sum_{n\geq k} A_{n,k}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\Big(x \sum_{m\geq 1} a_m \frac{t^m}{m!}\Big)^k$$

Les polynômes de Bell pour $k = 0, 1, 2$ sont

- Pour $k = 0$, on a

$$A_{0,0}(a_1, a_2, ...) = 1 \quad et \qquad A_{n,0}(a_1, a_2, ...) = 0, n \geq 1$$

- Pour $k = 1$, on a

$$\sum_{n\geq 1} A_{n,1}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{t^n}{n!}$$

- Pour $k = 2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2} A_{n,2}(a_1,a_2,...)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\geq 2} a_n\frac{t^n}{n!}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{i!}\frac{a_{n-i}}{(n-i)!}t^n\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\tbinom{n}{i}a_i a_{n-i}\Big)^2\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Par identification des deux membres, on trouve

$$A_{n,2}(a_1,a_2,...) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}a_i a_{n-i}$$

Voici quelques identités célébres

$A_{n,k}(1!,2!,...,i!,...) = \dbinom{n-1}{k-1}\dfrac{n!}{k!}$ c'est les nombres de Lah.

$A_{n,k}(0!,-1!,...) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, c'est les nombres de Stirling de première espèce.

$A_{n,k}(0!,1!,...,i!,...) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, c'est la valeur absolue des nombres de Stirling de première espèce.

$A_{n,k}(1,1,...) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$, c'est les nombres de Stirling de seconde espèce.

**Définition 1.10.3.** *Les polynômes complets de Bell $A_n$ sont définis par leurs fonction génératrice exponentielle comme suit*

$$\sum_{n\geq 0} A_n\frac{t^n}{n!} = exp\Big(\sum_{n\geq 1} a_n\frac{t^n}{n!}\Big)$$

*où*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}(a_1,a_2,...,a_{n-k+1}) \;\; si \;\; n\geq 1, \quad et \;\; \boldsymbol{A}_0(a_1,a_2,...,a_n) = 1.$$

## 1.11 Nombres et polynômes d'Euler

**Définition 1.11.1.** *Les nombres d'Euler sont définis par la fonction génératrice exponentielle*

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2e^t}{e^{2t}+1}$$

Les premières valeurs de $E_n$ sont données dans la table suivante

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_n$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 61 | 0 | 1385 | 0 | 50521 |

TABLE 1.10 – Nombres d'Euler

**Définition 1.11.2.** *Pour tout entier positive $n$, le polynôme d'Euler $E_n(x)$est défini par*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \big(x - \frac{1}{2}\big)^{n-k}$$

$$Avec \quad E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$$

On donne dans la table suivant les valeurs de $E_n(x)$ pour $n \leq 5$

| $E_0(x)$ | $1$ |
|---|---|
| $E_1(x)$ | $x - \frac{1}{2}$ |
| $E_2(x)$ | $x^2 - x$ |
| $E_3(x)$ | $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}$ |
| $E_4(x)$ | $x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x$ |
| $E_5(x)$ | $x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{2}$ |

TABLE 1.11 – Polynômes d'Euler

La fonction génératrice exponentielle des polynômes d'Euler est

$$\sum_{n\geq 0} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2e^{tx}}{e^{2t}+1}$$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_n$ | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{25}{12}$ | $\frac{137}{60}$ | $\frac{49}{20}$ | $\frac{363}{140}$ | $\frac{761}{280}$ | $\frac{7129}{2520}$ | $\frac{3781}{2520}$ |

TABLE 1.12 – Nombres Harmoniques

## 1.12 Nombres Harmoniques

**Définition 1.12.1.** *(consulter [15]) Le $n^{ime}$ nombre Harmonique $H_n$ est la somme des inverses des $n$ premiers entiers naturels tel que*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Les nombres harmoniques sont aussi définis par la fonction génératrice ordinaire

$$\sum_{n \neq 0} H_n t^n = \frac{ln(1-t)}{1-t}$$

On a la relation suivante

$$H_n = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Les nombres hyper-harmoniques notés $H_n^{(m)}$, est une généralisation de nombres harmoniques, on définit les nombres hyper-harmonique par

$$H_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}, \quad m \in N^*$$

# CHAPITRE $2$

## APPLICATION DES NOMBRES $R$-STIRLING AUX POLYNÔMES DE BERNOULLI D'ORDRE SUPÉRIEUR

# Introduction

Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur ont été utilisés dans plusieurs ouvrages mathématiques et ont été étudies par plusieurs chercheurs (voir [42, 43, 44, 46, 49]) selon leurs domaines d'application.

Dans ce chapitre on vas exploiter les nombres $r$-Stirling de première et seconde espèce afin de donner des formules explicites des valeurs entières des polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de deux genres. On donne aussi quelques identités et congruences qui relient les nombres $r$-Stirling et les coefficients binomiaux.

## 2.1 Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur

**Définition 2.1.1.** *Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce $B_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante*

$$\sum_{n\geq 0} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \Big(\frac{t}{exp(t)-1}\Big)^{\alpha} exp(xt) \tag{2.1}$$

*Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de seconde espèce $b_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante*

$$\sum_{n\geq 0} b_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \Big(\frac{t}{ln(1+t)}\Big)^{\alpha}(1+t)^x \tag{2.2}$$

*Avec $B_n^1(x) = B_n(x)$ et $b_n^1(x) = b_n(x)$ c'est les polynômes de Bernoulli classiques de première et seconde espèce.*

*Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première et seconde espèce vérifient*

$$(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_k^{(\alpha)} b_{n-k}^{(-\alpha)}(x)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{(\alpha+k)!}B_{n-k}^{(\alpha-1)}(x)$$

*Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce peuvent être exprimÃ©s à l'aide de nombres de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce par la formule suivante*

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_n^{(\alpha)} x^{n-k}$$

*Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de seconde espèce peuvent être exprimÃ©s à l'aide de nombres de Bernoulli d'ordre supérieur de seconde espèce par la formule suivante*

$$b_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_n^{(\alpha)} x^{n-k}$$

**Théorème 2.1.1.** *[38] soit $\alpha$ un entier positif. On a*

$$b_n^{(\alpha)}(\alpha + x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} (n)_k b_{n-k}^{(\alpha)}(x) \tag{2.3}$$

*Ce théorème a permis à Prabhakar et al, [38] d'établir l'identités suivantes*

$$b_n^{(\alpha)}(x + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k^{(\alpha)}(x) b_{n-k}^{(\alpha)}(y)$$

**Théorème 2.1.2.** *[19] Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce vérifient*

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x + y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_n^{(\alpha)}(x) y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_n^{(\alpha)}(y) x^{n-k} \end{aligned}$$

$$B_n^{(\alpha)}(ix) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_n^{(\alpha)}(x)(i-1)^{n-k} x^{n-k}$$

## 2.2 Polynômes de Bernoulli et nombres $r$-Stirling de première espèce

### 2.2.1 Lien entre les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur et les nombres $r$-Stirling

*Rappelant que les nombres $r-$Stirling de première espèce comptent le nombre de partitions d'un ensemble à $n$ éléments en $k$ cycles tels que les $r$ premièrs éléments se trouvent dans des cycles différents. Ces nombres sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante*

$$\sum_{n \geq k} \left[ \begin{array}{c} n+r \\ k+r \end{array} \right]_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{(-ln(1-t))^k}{(1-t)^r} \tag{2.4}$$

Les nombres $r-$Stirling de seconde espèce comptent le nombre de partitions d'un ensemble à $n$ éléments en $k$ blocs tels que les $r$ premièrs éléments se trouvent dans des blocs différents. Ces nombres sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{array}{c} n+r \\ k+r \end{array} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \Big( exp(t) - 1 \Big)^k exp(rt). \tag{2.5}$$

Par combinaison de l'équation (2.2) et l'équation (2.4) on trouve une relation qui relie les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de seconde espèce et les nombres $r$-Stirling de première espèce tels que

$$b_n^{(-k)}(-r) = (-1)^n \binom{n+k}{k}^{-1} \left[ \begin{matrix} n+k+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r, r, k \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

Ainsi, Par combinaison de l'équation (2.1) et l'equation (2.5) on trouve une relation qui relie les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce et les nombres $r$-Stirling de seconde espèce tels que

$$B_n^{(-k)}(r) = \binom{n+k}{k}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+k+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r, r, k \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

Melzak [22, 23] a défini la relation suivante

$$f_n(\alpha + x) = \alpha \binom{\alpha+p}{p} \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{\alpha+j} \binom{p}{j} f_n(-j+x); \tag{2.8}$$

telle que $f$ est un polynôme de degrè $n \leq p$.

Comme application de la relation (2.8), on donne la proposition :

**Proposition 2.2.1.** *Soit $\alpha$ un nombre reél, et soient $p, q, r, n$ des entiers positifs avec $p \geq n$. Alors nous avons*

$$b_n^{(\alpha)}(-r) = (\alpha+q) \binom{\alpha+p+q}{p} \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^{n+j}}{\alpha+q+j} \binom{p}{j} \frac{\left[ \begin{matrix} n+r+j+q \\ r+j+q \end{matrix} \right]_r}{\binom{n+j+q}{n}}, \tag{2.9}$$

$$B_n^{(\alpha)}(-r) = (n+1+\alpha+q) \binom{n+1-\alpha+p+q}{p} \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^{n+j}}{n+1-\alpha+q+j} \times \tag{2.10}$$

$$\binom{p}{j} \frac{\left[ \begin{matrix} n+r+j+q+1 \\ r+j+q+1 \end{matrix} \right]_{r+1}}{\binom{n+j+q}{n}}$$

Cette proposition nous permet d'obtenir un lien entre les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première et seconde espèce et les nombres $r$-Stirling de première espèce.

**Preuve.** *Pour $x = -p$, et en remplaçant $\alpha$ par $\alpha + q$ dans l'équation (2.8), on obtient*

$$f(\alpha) = (\alpha+q)\tbinom{\alpha+p+q}{p} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \frac{f(-j-q)}{\alpha+q+j}. \tag{2.11}$$

*Si on prend $f(x) = b_n^{(x)}(-r)$, alors l'équation (2.11) devient*

$$b_n^{(\alpha)}(-r) = (\alpha+q)\binom{\alpha+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\frac{b_n^{(-j-q)}(-r)}{\alpha+q+j}. \tag{2.12}$$

*En utilisant l'équation (2.6), l'équation (2.12) est l'identité (2.9) de la proposition 2.2.1.*

*Pour obtenir l'équation (2.10) de la proposition 2.2.1, on utilise l'identité de Carlitz ([9],Eqs.(2.11),(2.12)),*

$$B_n^{(\alpha)}(x) = b_n^{(n+1-\alpha)}(x-1).$$

*On obtient*

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(-r) &= b_n^{(n+1-\alpha)}(-r-1) \\ &= (n+1+\alpha+q)\binom{n+1-\alpha+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\frac{b_n^{(-j-q)}(-r-1)}{n+1-\alpha+q+j}. \end{aligned}$$

*On a bien l'équation (2.10) de la proposition 2.2.1.*

La proposition suivante permet de préciser le lien entre les valeurs entières des polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première et seconde espèce et les nombres $r$-Stirling de seconde espèce.

**Proposition 2.2.2.** *Soit $\alpha$ un nombre reél et soient $p, q, r, n$ des entiers positifs.*

*Pour $p \geq n$, nous avons*

$$B_n^{(\alpha)}(r) = (\alpha+q)\binom{\alpha+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{\alpha+q+j}\binom{p}{j}\frac{\left\{\begin{matrix} n+r+j+q \\ r+j+q \end{matrix}\right\}_r}{\binom{n+j+q}{n}}, \tag{2.13}$$

$$b_n^{(\alpha)}(r) = (n+1+\alpha+q)\binom{n+1-\alpha+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{n+1-\alpha+q+j}\times$$
$$\binom{p}{j}\frac{\left\{\begin{matrix} n+r+j+q+1 \\ r+j+q+1 \end{matrix}\right\}_{r+1}}{\binom{n+j+q}{n}}. \tag{2.14}$$

**Preuve.** *On prend $f(x) = B_n^{(x)}(r)$, l'équation (2.11) devient*

$$B_n^{(\alpha)}(r) = (\alpha+q)\binom{\alpha+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j \times \binom{p}{j}\frac{B_n^{(-j-q)}(r)}{\alpha+q+j}. \tag{2.15}$$

*En utilisant (2.7), on obtient l'équation (2.15) qui est l'identité (2.13) de la proposition 2.2.2.*

*Pour obtenir l'équation (2.14) de la proposition 2.2.2, on utilise l'identité de Carlitz [9]*

$$b_n^{(\alpha)}(x) = B_n^{(n+1-\alpha)}(x+1).$$

*on aura alors*

$$\begin{aligned} b_n^{(\alpha)}(r) &= B_n^{(n+1-\alpha)}(r+1) \\ &= (n+1-\alpha+q)\binom{n+1-\alpha+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\frac{B_n^{(-j-q)}(r+1)}{n+1-\alpha+q+j}. \end{aligned}$$

*ce qui nous mène à l'équation (2.14).*

Les identités des deux corollaires suivants vont nous permettre d'exprimer le lien entre les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de deux espèces et les nombres $r$-Stirling de première et seconde espèce.

### 2.2.2 Lien entre les polynômes de Bernoulli et les nombres de Stirling de première espèce

**Corollaire 2.2.1.** *Soit $\alpha$ un nombre réel et soient $r, n$ des entiers positifs.*
*Nous avons*

$$b_n^{(\alpha)}(-r) = \alpha\binom{\alpha+n}{n}\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{\alpha+j}\binom{2n}{n+j}\left[\begin{matrix} n+r+j \\ r+j \end{matrix}\right]_r;$$

$$B_n^{(\alpha)}(-r) = (n+1-\alpha)\binom{2n-\alpha+1}{n}\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{n+1-\alpha+j}\binom{2n}{n+j}\left[\begin{matrix} n+r+j+1 \\ r+j+1 \end{matrix}\right]_{r+1}$$

Le corollaire 2.2.1 est établi , en remplaçant $p$ par $n$ et $q$ par $0$ dans la proposition 2.2.1

#### Application

Le corollaire 2.2.1 permet d'obtenir des identités qui relient les nombres de Bernoulli de première et seconde espèce et les nombres de Stirling de première espèce.

Pour $\alpha = 1$

Les valeurs de polynômes classiques de Bernoulli aux entiers négatifs sont

$$b_n(-r) = b_n^{(1)}(-r) = (n+1)\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{j+1}\binom{2n}{n+j}\left[\begin{matrix} n+r+j \\ r+j \end{matrix}\right]_r; \tag{2.16}$$

$$B_n(-r) = B_n^{(1)}(-r) = n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{n+j}\binom{2n}{n+j}\left[\begin{matrix} n+r+j+1 \\ r+j+1 \end{matrix}\right]_{r+1} \tag{2.17}$$

Pour $r=0$, dans l'équation (2.16) et l'équation (2.17), les nombres de Bernoulli peuvent être ècrits à l'aide des nombres de Stirling de première espèce

$$b_n=(n+1)\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{j+1}\binom{2n}{n+j}\left[\begin{array}{c} n+j \\ j \end{array}\right]; \tag{2.18}$$

$$B_n=n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{n+j}\binom{2n}{n+j}\left[\begin{array}{c} n+j+1 \\ j+1 \end{array}\right]. \tag{2.19}$$

### 2.2.3 Lien entre les polynômes de Bernoulli et les nombres de Stirling de seconde espèce

En remplaçant $p$ par $n$ et $q$ par $0$ dans la proposition 2.2.2, on obtient le corollaire suivant

**Corollaire 2.2.2.** *Soit $\alpha$ un nombre reèl et soient $r,n$ des entiers positifs.*
*Nous avons*

$$B_n^{(\alpha)}(r)=\alpha\binom{\alpha+n}{n}\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{\alpha+j}\binom{2n}{n+j}\left\{\begin{array}{c} n+r+j \\ r+j \end{array}\right\}_r;$$

$$b_n^{(\alpha)}(r)=(n+1-\alpha)\binom{2n-\alpha+1}{n}\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j}}{n+1-\alpha+j}\binom{2n}{n+j}\left\{\begin{array}{c} n+r+j+1 \\ r+j+1 \end{array}\right\}_{r+1}.$$

**Application**

Le corollaire 2.2.2 nous permet de déterminer les valeurs des polynômes de Bernoulli de première et seconde espèce aux entiers positifs en fonction des nombres de Stirling de seconde espèce.

Pour $\alpha=1$
Les valeurs de polynômes classiques de Bernoulli aux entiers positifs sont

$$B_n(r)=B_n^{(1)}(r)=(n+1)\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j+1}\binom{2n}{n+j}\left\{\begin{array}{c} n+r+j \\ r+j \end{array}\right\}_r; \tag{2.20}$$

$$b_n(r)=b_n^{(1)}(r)=n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}}{n+j}\binom{2n}{n+j}\left\{\begin{array}{c} n+r+j+1 \\ r+j+1 \end{array}\right\}_{r+1}. \tag{2.21}$$

Pour $r=0$ dans l'équation (2.20) et l'équation (2.21), les nombres de Bernoulli peuvent être écrits à l'aide des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$B_n=(n+1)\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j+1}\binom{2n}{n+j}\left\{\begin{array}{c} n+j \\ j \end{array}\right\}; \tag{2.22}$$

$$b_n = n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{n+j}\binom{2n}{n+j}\left\{\begin{array}{c} n+j+1 \\ j+1 \end{array}\right\}. \qquad (2.23)$$

**Remarque 2.2.1.** *Remarquant que ces formules explicites des nombres de Bernoulli $B_n$ sont similaires à celles obtenues par R.K.Muthumalai [35]. ce qui affirme que les corollaires 2.2.1 et 2.2.2 sont plus généraux.*

### 2.2.4 Lien entre les nombres de Genocchi et les nombres de Stirling

les nombres de Genocchi forment la suite des entiers $(G_n)_{n\geq 1}$ definie par la fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{j\geq 1} G_n\frac{t^n}{n} = \frac{2t}{e^t+1}$$

Ces nombres sont reliés aux nombres de Bernoulli $B_n$ par la formule (voir [9], page 88)

$$G_n = 2(1-2^{2n})B_n, n\geq 1;$$

Les nombres de Genocchi peuvent être reliés aux nombres de Stirling de première et seconde espèce, en utilisant les équations (2.19) et (2.22). Ce qui nous mène à

$$G_n = 4n(1-2^{2n})\sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2n+j}\frac{(-1)^j}{2n+j}\left[\begin{array}{c} 2n+j+1 \\ j+1 \end{array}\right];$$

$$G_n = 2(2n+1)(1-2^{2n})\binom{4n}{2n}^{-1}\sum_{j=0}^{2n}\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{4n}{2n+j}\left\{\begin{array}{c} 2n+j \\ j \end{array}\right\};$$

Le lien entre les polynômes de Bernoulli et les polynômes d'Euler à travers l'identitè

$$E_{n-1}(2x) = \frac{2}{n}(B_n(2x) - 2^nB_n(x))$$

montre que les valeurs de polynômes d'Euler en entiers pairs peuvent être ècrites en utilisant les expressions de $B_n(-r)$ et $B_n(r)$ telles que

$$E_{n-1}(-2r) = \frac{2}{n}(B_n(-2r) - 2^nB_n(-r))$$
$$E_{n-1}(2r) = \frac{2}{n}(B_n(2r) - 2^nB_n(r))$$

$$\begin{aligned} E_{n-1}(-2r) &= \frac{2}{n}(B_n(-2r) - 2^nB_n(-r)) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{2(-1)^{n+j}}{n+j}\binom{2n}{n+j}\Big(\left[\begin{array}{c} n+2r+j+1 \\ 2r+j+1 \end{array}\right]_{2r+1} - 2^n\left[\begin{array}{c} n+r+j+1 \\ r+j+1 \end{array}\right]_{r+1}\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{n-1}(2r) &= \frac{2}{n}(B_n(2r) - 2^n B_n(r)) \\ &= \frac{2(n+1)}{n}\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{2n}{n+j}\left(\left\{ \begin{array}{c} n+2r+j \\ 2r+j \end{array} \right\}_{2r} - 2^n \left\{ \begin{array}{c} n+r+j \\ r+j \end{array} \right\}_{r}\right). \end{aligned}$$

## 2.3 Lien entre les nombres $r$-Stirling et les coefficients binomiaux

Les propositions précédentes peuvent être utilisées pour déduire les relations entre les nombres $r$-Stirling et les coefficients binomiaux

**Corollaire 2.3.1.** *Soient $r, n, p, q, k$ des entiers positifs tel que $p \geq n$. On a*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{j+q}{q}\binom{n+k+q+j}{k}\binom{n+k+p+q+1}{p-j}\left[ \begin{array}{c} n+r+j+q \\ r+j+q \end{array} \right]_r$$
$$= \binom{n+k+q}{q}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n+k}{j+k}\left\{ \begin{array}{c} j+k \\ k \end{array} \right\}(r-1)^{\overline{n-j}} \qquad (2.24)$$

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{j+q}{q}\binom{n+k+q+j}{k}\binom{n+k+p+q+1}{p-j}\left\{ \begin{array}{c} n+r+j+q \\ r+j+q \end{array} \right\}_r$$
$$= \binom{n+k+q}{q}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n+k}{j+k}\left[ \begin{array}{c} j+k \\ k \end{array} \right](r-1)^{\underline{n-j}}. \qquad (2.25)$$

**Preuve.** *En remplaçant $\alpha$ par $n+k+1$ dans l'équation (2.9) de la proposition 2.2.1, on obtient*

$$b_n^{(n+k+1)}(-r) = (n+k+1+q)\binom{n+k+1+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^{n+j}}{n+k+1+q+j}\times$$
$$\binom{p}{j}\frac{\left[ \begin{array}{c} n+r+j+q \\ r+j+q \end{array} \right]_r}{\binom{n+j+q}{n}},$$

*Ce qui affirme qu'on a*

$$\binom{n+k}{k}b_n^{(n+k+1)}(-r) = \textstyle\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{j+q}{q}\binom{n+k+q+j}{k}\times$$
$$\binom{n+k+p+q+1}{p-j}\left[ \begin{array}{c} n+r+j+q \\ r+j+q \end{array} \right]_r$$

*et par le fait qu'on a*

$$\begin{aligned}
b_n^{(n+k+1)}(x) &= B_n^{(-k)}(x+1) \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\Big(\Big(\frac{exp(t)-1}{t}\Big)^k exp((x+1)t)\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{n!}{(n+k)!}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}\frac{d^j}{dt^j}(exp(t)-1)^k\frac{d^{n+k-j}}{dt^{n+k-j}}(exp((x+1)t))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\binom{n+k}{k}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+k}{j+k}\left\{\begin{array}{c} j+k \\ k \end{array}\right\}(x+1)^{\overline{n-j}}
\end{aligned}$$

*L'équation (2.24) du corollaire 2.3.1 est bien acquise*

*En remplaçant maintenant $\alpha$ par $n+k+1$ dans l'équation (2.13) de la proposition 2.2.2, on obtient*

$$B_n^{(n+k+1)}(r) = (n+k+1+q)\binom{n+k+1+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{n+k+1+q+j}\times$$
$$\binom{p}{j}\frac{\left\{\begin{array}{c} n+r+j+q \\ r+j+q \end{array}\right\}_r}{\binom{n+j+q}{n}},$$

*ou d'une manière équivalente*

$$\binom{n+k}{k}B_n^{(n+k+1)}(r) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{j+q}{q}\binom{n+k+q+j}{k}\times$$
$$\binom{n+k+p+q+1}{p-j}\left[\begin{array}{c} n+r+j+q \\ r+j+q \end{array}\right]_r$$

*et par le fait qu'on a*

$$\begin{aligned}
B_n^{(n+k+1)}(r) &= b_n^{(-k)}(x-1) \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\Big(\Big(\frac{ln(1+t)}{t}\Big)^k(1+t)^{x-1}\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{n!}{(n+k)!}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\Big(\Big((ln(1+t))^t\Big)^k(1+t)^{x-1}\Big)\Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n^{(n+k+1)}(r) &= \frac{n!}{(n+k)!}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}\frac{d^j}{dt^j}(ln(1+t))^k\frac{d^{n+k-j}}{dt^{n+k-j}}(1+t)^{x-1}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\binom{n+k}{k}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+k}{j+k}\left[\begin{matrix} j+k \\ k\end{matrix}\right](x-1)^{\underline{n-j}} \end{aligned}$$

*on obtient l'équation (2.25) du corollaire 2.3.1.*

Dans ce qui suit on prśente quelques cas particuliers de corollaire 2.3.1

**Exemple 2.3.1.** *Pour $r=1$, le corollaire 2.3.1 met en évidence ces deux identités qui relient les coefficients binomiaux et les nombres de Stirling de première et seconde espèce.*

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{j+q}{q}\binom{n+k+q+j}{k}\binom{n+k+p+q+1}{p-j}\left[\begin{matrix} n+j+q+1 \\ j+q+1\end{matrix}\right]_r \\ &= \binom{n+k+q}{q}\left\{\begin{matrix} n+k \\ k\end{matrix}\right\}; \\ &\textstyle\sum_{j=0}^{p}(-1)^{n-j}\binom{j+q}{q}\binom{n+k+q+j}{k}\binom{n+k+p+q+1}{p-j}\left\{\begin{matrix} j+n+q+1 \\ j+q+1\end{matrix}\right\} \\ &= \binom{n+k+q}{q}\left[\begin{matrix} n+k \\ k\end{matrix}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, le corollaire 2.3.1 donne pour $k=0$ la relation entre les coefficients binomiaux et les nombres $r$-Stirling de première et seconde espèce.

**Exemple 2.3.2.** *pour $k=0$, on a*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^{n-j}\binom{j+q}{q}\binom{n+p+q+1}{p-j}\left[\begin{matrix} n+r+j+q \\ r+j+q\end{matrix}\right]_r = \binom{n+q}{q}(r-1)^{\overline{n}}$$

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j}\binom{j+q}{q}\binom{n+p+q+1}{p-j}\left\{\begin{matrix} n+r+j+q \\ r+j+q\end{matrix}\right\}_r = \binom{n+q}{q}(r-1)^{\underline{n}}.$$

**Exemple 2.3.3.** *Pour $n=0$, le corollaire 2.3.1 affirme la relation de récurrence entre les coefficients binomiaux suivante*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j}\binom{j+q}{q}\binom{k+q+j}{k}\binom{k+q+p+1}{p-j} = \binom{k+q}{q}.$$

**Exemple 2.3.4.** *Pour $n=1$ le corollaire 2.3.1 affirme une relation de récurrence entre les nombres $r$-Stirling de première espèce, de seconde espèce et les coefficients binomiaux*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j}\binom{j+q}{q}\binom{k+q+j+1}{k}\binom{k+q+p+2}{p-j}\left[\begin{matrix} r+j+q+1 \\ r+j+q\end{matrix}\right]_r$$

$$= -\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{j+q}{q}\binom{k+q+j+1}{k}\binom{k+q+p+2}{p-j}\left\{ \begin{matrix} r+j+q+1 \\ r+j+q \end{matrix} \right\}_r$$
$$= -\binom{k+q+1}{q}\big(k(r-2)+r-1\big).$$

**Corollaire 2.3.2.** *Pour tout entiers positifs $r, n, p, q, k$ tel que $p \geq n$. On a*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{n+p+q+k+1}{p-j}\binom{q+j}{j}\binom{k+q+j+1}{k}\left[ \begin{matrix} n+r+j+q+k+1 \\ r+j+q+k+1 \end{matrix} \right]_r$$
$$= (-1)^n\binom{n+p+q+k+1}{n+k}\left[ \begin{matrix} n+r+k \\ r+k \end{matrix} \right]_r \tag{2.26}$$

*et on a aussi*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{n+p+q+k+1}{p-j}\binom{q+j}{j}\binom{k+q+j+1}{k}\left\{ \begin{matrix} n+r+j+q+k+1 \\ r+j+q+k+1 \end{matrix} \right\}_r$$
$$= \binom{n+p+q+k+1}{n+k}\left\{ \begin{matrix} n+r+k \\ r+k \end{matrix} \right\}_r. \tag{2.27}$$

**Preuve.** *Choisissons $\alpha = -k$ (tel que $k+1 \leq q$ ) dans l'équation (2.9) de la proposition 2.2.1, on obtient*

$$b_n^{(-k)}(-r) = (q-k)\binom{p-k+q}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^{n+j}}{q-k+j}\binom{p}{j}\frac{\left[ \begin{matrix} n+r+j+q \\ r+j+q \end{matrix} \right]_r}{\binom{n+j+q}{n}},$$

*ce qui affirme que*

$$\binom{n+p+q}{n+k}b_n^{(-k)}(-r) = \textstyle\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{n+p+q+k+1}{p-j}\binom{q+j}{j}\times$$
$$\binom{k+q+j+1}{k}\left[ \begin{matrix} n+r+j+q+k+1 \\ r+j+q+k+1 \end{matrix} \right]_r$$

*En utilisant ainsi l'identité (2.6) l'équation (2.26) découle, en remplaçant $q$ par $q+k+1$.*

*Choisissons $\alpha = -k$ (tel que $k+1 \leq q$ ) dans l'équation (2.13) de la proposition 2.2.2, on obtient*

$$B_n^{(-k)}(r) = (q-k)\binom{p+q-k}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{q-k+j}\binom{p}{j}\frac{\left\{ \begin{matrix} n+r+j+q \\ r+j+q \end{matrix} \right\}_r}{\binom{n+j+q}{n}},$$

*On a alors,*

$$\binom{n+k}{k}\binom{n+p+q}{n+k}B_n^{(-k)}(r) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{n+p+q+k+1}{p-j}\binom{q+j}{j}\times$$
$$\binom{k+q+j+1}{k}\left\{ \begin{matrix} n+r+j+q+k+1 \\ r+j+q+k+1 \end{matrix} \right\}_r$$

*En utilisant ainsi l'identité (2.7) l'équation (2.27) découle, en remplaçant $q$ par $q+k+1$.*

**Exemple 2.3.5.** *Pour $k=0$, le corollaire 2.3.2 devient*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{n+p+q+1}{p-j}\binom{q+j}{j}\left[ \begin{matrix} n+r+j+q+1 \\ r+j+q+1 \end{matrix} \right]_r = \binom{n+p+q+1}{n}r^n$$

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{n+p+q+1}{p-j}\binom{q+j}{j}\left\{ \begin{matrix} n+r+j+q+1 \\ r+j+q+1 \end{matrix} \right\}_r = \binom{n+p+q+1}{n}r^n$$

*Pour $n=0$ le corollaire 2.3.2 devient*

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p+q+k+1}{p-j}\binom{q+j}{j}\binom{q+k+1+j}{k} = \binom{p+q+k+1}{k}$$

**Corollaire 2.3.3.** *Pour touts entiers positifs $r,n,p,q,k$, et si $m=2n+k+p+q+1$ est un nombre premier, on a*

$$\binom{n+k+q}{q}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+k}{j+k}\left\{ \begin{matrix} j+k \\ k \end{matrix} \right\}(1-r)^{\overline{n-j}}$$
$$\equiv (-1)^{n+p+k}\binom{n+p+q}{q}\left[ \begin{matrix} 2n+p+q+r \\ n+p+q+r \end{matrix} \right]_r \pmod{m}$$
$$\binom{n+k+q}{q}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+k}{j+k}\left[ \begin{matrix} j+k \\ k \end{matrix} \right](1-r)^{\underline{n-j}}$$
$$\equiv (-1)^{p+k}\binom{n+p+q}{q}\left\{ \begin{matrix} 2n+p+q+r \\ n+p+q+r \end{matrix} \right\}_r \pmod{m}.$$

**Preuve.** *Avant de prouver ce corollaire, on donne le théorème bien connu suivant,*

**Théorème 2.3.1.** *Pour tout nombre premier $p$, on a*

$$\binom{p}{j} \equiv 0 \pmod{p} \quad 0 < j < p$$

$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod{p} \qquad 0 \leq j \leq p$$

*Remarquons que le corollaire 2.3.1 affirme l'identité suivante*

$$\binom{m}{p-j} \equiv 0 \qquad \pmod{m}$$

*et si $j \leq p-1$, on a*

$$\binom{m-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{m}$$

*on sait que $m$ est premier et $m >$ à tout facteur de $\binom{n+p+q}{q}$, alors $m \nmid \binom{n+p+q}{q}$, Enfin, en remplaçant $p$ par $p+n$ le résultat du corollaire 2.3.3 est bien atteint.*

Comme application de ces congruences, on considère quelques cas particuliers du corollaire 2.3.3

**Exemple 2.3.6.** *Pour $r = 0$, si $m := 2n+k+p+q+1$ est un nombre premier. Alors on a*

$$\binom{n+k+q}{q} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+k}{j+k} \left\{ \begin{matrix} j+k \\ k \end{matrix} \right\} \equiv (-1)^{n+p+k} \binom{n+p+q}{q} \left[ \begin{matrix} 2n+p+q \\ n+p+q \end{matrix} \right] \pmod{m},$$

$$\frac{(n+k+q)!}{q!} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+k)!} \left[ \begin{matrix} j+k \\ k \end{matrix} \right] \equiv (-1)^{p+k} \binom{n+p+q}{q} \left\{ \begin{matrix} 2n+p+q \\ n+p+q \end{matrix} \right\} \pmod{m}.$$

Pour $r = 1$, si $m := 2n+k+p+q+1$ est un nombre premier. Alors on a

$$\binom{n+p+q}{q} \left[ \begin{matrix} 2n+p+q+1 \\ n+p+q+1 \end{matrix} \right] \equiv (-1)^{n+p+k} \binom{n+k+q}{q} \left\{ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right\} \pmod{m},$$

$$\binom{n+p+q}{q} \left\{ \begin{matrix} 2n+p+q+1 \\ n+p+q+1 \end{matrix} \right\} \equiv (-1)^{p+k} \binom{n+k+q}{q} \left[ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right] \pmod{m}.$$

Et pour $r = 1, k = 0$ et $n \geq 1$, si $m := 2n + k + p + q + 1$ est un nombre premier, les dernières congruences deviennent

$$\left[ \begin{array}{c} 2n+p+q+1 \\ n+p+q+1 \end{array} \right] \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2n+p+q+1 \\ n+p+q+1 \end{array} \right\} \equiv 0 \pmod{m}, 1 \leq n \leq m-1,$$

Ou de manière équivalente, pour n'importe quel nombre premier $m$, on a

$$\left[ \begin{array}{c} m \\ s \end{array} \right] \equiv \left\{ \begin{array}{c} m \\ s \end{array} \right\} \equiv 0 \pmod{m}, 1 < s \leq m-1.$$

**Exemple 2.3.7.** *Pour $k = 1$, si $m := 2(n+1) + p + q$ est un nombre premier. Alors on a*

$$\binom{n+p+q}{q} \left[ \begin{array}{c} 2n+p+q+ \\ n+p+q+r \end{array} \right]_r \equiv (-1)^p \binom{k+q}{q} (r-1)^{\underline{n}} \pmod{m},$$

$$\binom{n+p+q}{q} \left\{ \begin{array}{c} 2n+p+q+r \\ n+p+q+r \end{array} \right\}_r \equiv (-1)^p \binom{k+q}{q} (r-1)^{\overline{n}} \pmod{m},$$

**Exemple 2.3.8.** *Pour $k = 1$, si $m := 2(n+1) + p + q$ est un nombre premier. Alors on a*

$$\binom{n+p+q}{q} \left[ \begin{array}{c} 2n+p+q+r \\ n+p+q+r \end{array} \right]_r \equiv -(-1)^p \binom{n+q+1}{q} \big((r-2)^{n+1} - (r-1)^{n+1} \pmod{m},$$

$$\binom{n+p+q}{q} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j+1} j!(1-r)^{\overline{n-j}} \equiv (-1)^p \binom{n+q+1}{q} \left\{ \begin{array}{c} 2n+p+q+r \\ n+p+q+r \end{array} \right\}_r \pmod{m}.$$

*Pour $r = 0$, on a*

$$\binom{n+p+q}{q} \left[ \begin{array}{c} 2n+p+q \\ n+p+q \end{array} \right] \equiv (-1)^{p+n} \binom{n+q+1}{q} (2^{n+1} - 1) \pmod{m},$$

$$(n+1)! \binom{n+q+1}{q} H_{n+1} \equiv -(-1)^p \binom{n+q+q}{q} \left\{ \begin{array}{c} 2n+p+q \\ n+p+q \end{array} \right\} \pmod{m},$$

**Exemple 2.3.9.** *Pour $k = p$, si $m := 2(n+1) + p + q + 1$ est un nombre premier. Alors on a*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+p}{j+p} \left\{ \begin{matrix} j+p \\ p \end{matrix} \right\} (1-r)^{\overline{n-j}} \equiv (-1)^n \left[ \begin{matrix} 2n+p+q+r \\ n+p+q+r \end{matrix} \right]_r \pmod{m},$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+p}{j+p} \left[ \begin{matrix} j+p \\ p \end{matrix} \right] (1-r)^{\underline{n-j}} \equiv \left\{ \begin{matrix} 2n+p+q+r \\ n+p+q+r \end{matrix} \right\}_r \pmod{m},$$

**Exemple 2.3.10.** *Pour $n = 0$, si $m := k + p + q$ est un nombre premier. Alors on a*

$$\binom{k+q}{q} \equiv (-1)^{p+q} \binom{p+q}{q} \pmod{m}.$$

**Exemple 2.3.11.** *Pour $n = 1$, si $m := k + p + q$ est un nombre premier, on a*

$$\binom{n+q+1}{q} \left[ \begin{matrix} r+p+q+2 \\ r+p+q+1 \end{matrix} \right]_r \equiv (-1)^{p+k} \binom{k+q+1}{q} (k(r-2)+r-1) \pmod{m},$$

$$\binom{n+q+1}{q} \left\{ \begin{matrix} r+p+q+2 \\ r+p+q+1 \end{matrix} \right\}_r \equiv (-1)^{p+k+1} \binom{k+q+1}{q} (k(r-2)+r-1) \pmod{m}.$$

# CHAPITRE 3

## UNE NOUVELLE CLASSE DES NOMBRES $R$-STIRLING ET LES POLYNÔMES DE BERNOULLI GÉNÉRALISÉS

# Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux parties dont la première porte sur la description d'une nouvelle classe des nombres de Stirling appelés nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce. On donne une interprétation combinatoires de ces nombres, leurs propriétés et ainsi que quelques relations de récurrences.

Dans la deuxiéme partie, on met en évidence le lien entre les nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce et les valeurs de polynômes de Bernoulli generalisés de première et seconde espèce.

## 3.1 Les nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce

**Définition 3.1.1.** *Les nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce notés par $\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^s$; comptent le nombre de partitions d'un ensemble á $n$ éléments en $k$ blocs tels que les $r$ premièrs éléments se trouvent dans des blocs différents et n'importe le quel des $k-r$ blocs restants doit contenir au minimum $s$ éléments.*

De cette définition découle

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^s &= 0, \quad n < sk \ \text{ ou } k < r, \\
\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^s &= \delta_{n,0}, \quad n \geq 0, \\
\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^s &= r^{n-r}, \ \ n \geq sr.
\end{aligned}
$$

**Théorème 3.1.1.** *Pour $n \geq sk \geq sr \geq 1$, les nombres de $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce vérifient la relation*

$$
\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^s = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n-r-s(k-r)} \frac{1}{n_1!\cdots n_r!\,(n_{r+1}+s)!\cdots(n_k+s)!}.
$$

**Preuve.** *Partitionner un ensemble à $n$ éléments en $k$ blocs $B_1,\ldots,B_k$ tels-que chaque bloc qui ne contient aucun élément de l'ensemble $[r]$ doit être de cardinale $\geq s$, et les $r$ premièrs éléments doivent être dans des blocs différents (de cardinale $\geq 1$).*

*Supposons que les éléments de l'ensemble $[r]$ sont dans les $r$ premièrs blocs $B_1,\ldots,B_r$.*

*Donc on a*

- $\frac{1}{(k-r)!}\binom{n-r}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!}\frac{1}{n_1!\cdots n_k!}$ *façons de choisir* $n_1,\ldots,n_k$ *parmi les* $[n]\setminus[r]$ *tel que*

- $n_1 \geq 0,\ldots,n_r \geq 0 : n_1,\ldots,n_r$ *sont respectivement, dans* $B_1,\ldots,B_r$,

- $n_{r+1} \geq s,\ldots,n_k \geq s : n_{r+1},\ldots,n_k$ *sont respectivement, dans* $B_{r+1},\ldots,B_k$.

*Le nombre total de la partition est égal à*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_r^s = \frac{1}{(k-r)!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n-r,\ n_{r+1}\geq s,\ldots,n_k\geq s} \binom{n-r}{n_1,\ldots,n_k}$$
$$= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n-r-s(k-r)} \frac{1}{n_1!\cdots n_r!\,(n_{r+1}+s)!\cdots(n_k+s)!}.$$

### 3.1.1 Fonction génératrice

**Corollaire 3.1.1.** *la fonction génératrice des nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce est donnée par la formule suivante*

$$\sum_{n\geq k} \left\{ \begin{array}{c} n+r \\ k+r \end{array} \right\}_r^s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{i\geq s}\frac{t^i}{i!}\right)^k \exp(rt).$$

Les premières valeurs des nombres de $3-$Stirling $2-$quasi associés de seconde espèce $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_3^s$ sont données pour $n \leq 11$, dans la table suivante

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | 3 | | | | |
| 5 | | | 9 | 1 | | | |
| 6 | | | 27 | 10 | | | |
| 7 | | | 81 | 67 | 3 | | |
| 8 | | | 243 | 376 | 55 | | |
| 9 | | | 729 | 1909 | 610 | 15 | |
| 10 | | | 2187 | 9094 | 5306 | 420 | |
| 11 | | | 6561 | 41479 | 39893 | 6789 | 105 |

TABLE 3.1 – Nombres de $r-$Stirling $2-$quasi associés de seconde espèce

### 3.1.2 Relations de récurrences

En utilisant des arguments combinatoires, nous énoncons les propositions suivantes

**Proposition 3.1.1.** *Pour $n > sr \geq 1$ on a*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_r^s = k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}_r^s + \binom{n-r-1}{s-1} \left\{ \begin{array}{c} n-s \\ k-1 \end{array} \right\}_r^s .$$

**Preuve.** *Pour partitionner un ensemble à $n$ éléments en $k$ blocs tel que n'import quel bloc qui ne s'intersecte pas avec l'ensemble $[r]$ doit être de cardinale $\geq s$ et les éléments de l'ensemble $[r]$ doivent être dans des blocs différents, on sépare l'élément $n$ et on suit les étapes :*

– *Si l'élément $n$ se trouve dans un bloc et ce bloc intersecte avec l'ensemble $[r]$, il existe $\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}_r^s$ façons de partitionner un ensemble à $n-1$ éléments en $k$ blocs tel qu'un bloc qui ne s'intersecte pas avec l'ensemble $[r]$ doit être de cardinale $\geq s$ et les éléments de l'ensemble $[r]$ doivent être dans des blocs différents, on peut injecter l'élément $n$ dans l'un des blocs qui ne s'intersectent pas avec l'ensemble $[r]$, on compte $r \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}_r^s$.*
– *Si l'élément $n$ se trouve dans un bloc de cardinale exactement $s$ et qui ne s'intersecte pas avec l'ensemble $[r]$, on a alors $\binom{n-r-1}{s-1}$ façons de choisir les $s-1$ éléments qui sont dans le même bloc que $n$. Les $n-s$ éléments restants peuvent être partitionner en $k-1$ blocs, donc on a $\left\{ \begin{array}{c} n-s \\ k-s \end{array} \right\}_r^s$ façons de faire cette opération. Le nombre de façons dans ce cas est donné par*
  $\binom{n-r-1}{s-1} \left\{ \begin{array}{c} n-s \\ k-s \end{array} \right\}_r^s$.
– *Si l'élément $n$ se trouve dans un bloc de cardinale $\geq s+1$ et qui ne s'intersecte pas avec l'ensemble $[r]$, il existe $(k-r) \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}_r^s$ façons.*

*Enfin, le nombre de toute les partitions est donné par*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_r^s = r \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}_r^s + \binom{n-r-1}{s-1} \left\{ \begin{array}{c} n-s \\ k-s \end{array} \right\}_r^s + (k-r) \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}_r^s .$$

**Proposition 3.1.2.** *Pour $r \geq 2$ on a*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_r^s = \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_{r-1}^s - (r-1) \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}_{r-1}^s .$$

**Preuve.** *Pour partitionner un ensemble à $n$ éléments en $k$ blocs tel qu'un bloc qui ne s'intersecte pas avec l'ensemble $[r]$ doit être de cardinale $\geq s$ et les éléments de l'ensemble $[r]$ doivent être dans des blocs différents mais non pas l'élément $r$, on a alors $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}^{s} - \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r}^{s}$ façons.*

*Cette partition peut être obtenue en considèrant l'élément $r$ dans l'un des blocs qui s'intersectent avec l'ensemble $[r-1]$ ce qui donne $(r-1)\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}^{s}$ façons.*

**Proposition 3.1.3.** *Pour $r \geq 1$ on a*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r}^{s} = \sum_{j\geq 0} \binom{n-r}{j} \left\{ \begin{matrix} n-1-j \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}^{s}.$$

**Preuve.** *Pour partitionner un ensemble à $n$ éléments en $k$ blocs tel qu'un bloc qui ne s'intersecte pas avec l'ensemble $[r]$ doit être de cardinale $\geq s$ et les éléments de l'ensemble $[r]$ doivent être dans des blocs différents, on raisonne sur l'appartenance de l'élément $r$.*

*En effet, si l'élément $r$ se trouve dans un bloc de cardinale $\geq j+1$, il y a $\binom{n-r}{j} \left\{ \begin{matrix} n-1-j \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}^{s}$ façons ;*

- *$\binom{n-r}{j}$ est le nombre de façons de choisir les $j$ éléments parmi les $(n-1)-(r-1)$ éléments qui sont dans l'ensemble $[n] \setminus [r]$ d'être dans le même bloc que l'élément $r$.*
- *$\left\{ \begin{matrix} n-1-j \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}^{s}$ est le nombre de partitions de $n-(j+1)$ éléments restants en $k-1$ blocs tel que un bloc qui ne s'intersecte pas avec l'ensemble $[r]$ doit être de cardinale $\geq s$ et les éléments de l'ensemble $[r-1]$ doivent être dans des blocs différents.*

**Remarque 3.1.1.** *les nombres $r$-Stirling de seconde espèce représentent une restriction des nombres $r$-Stirling $s$-quasi asscociés de seconde espèce.*

*Pour $s = 1$, on a*

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r} &= (k-r+1)\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r-1}, \quad r \geq 1, \\
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r} &= k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_{r}, \quad n > r, \\
\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r} &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1} - (r-1)\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}, \quad r \geq 1,
\end{aligned}$$

*Le théorème 3.1.1 affirme que*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_r = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n-k} \frac{(n_1+1)\cdots(n_r+1)}{(n_1+1)!\cdots(n_k+1)!}.$$

*Les nombres de Stirling $s$-asscociés de seconde espèce représentent aussi une restriction de nombres $r$-Stirling $s$-quasi asscociés de seconde espèce.*

*Pour $r=0.$, on a*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}_0^s := \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}^s$$

*On conclu l'identité bien connue des nombres de Stirling $s$asscociés de seconde espèce.*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}^s = k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}^s + \binom{n-1}{s-1} \left\{ \begin{array}{c} n-s \\ k-1 \end{array} \right\}^s, \quad n > sk > 0,$$

*Du théorème 3.1.1 découle la formule explicite des nombres de Stirling $s-$associes*

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}^s = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n-sk} \frac{1}{(n_1+s)!\cdots(n_k+s)!}.$$

## 3.2 Les polynômes de Bernoulli généralisés

### 3.2.1 Définition

Une extension des polynômes de Bernoulli a été introduite et étudiée par Natalini et Bernardini [36]. Ils ont nommé ces polynômes par les polynômes de Bernoulli généralisés notés par $B_n^{[s-1]}(x)$, ils ont défini ces nombres par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n\geq 0} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left( \frac{t}{\exp(t)-1} \right)^\alpha \exp(xt),$$

Avec $B_n^{(1)}(x) = B_n(x)$

Récemment, Kurt [19] a introduit une autre classe des polynômes de Bernoulli $B_n^{[s-1,\alpha]}(x)$.il a défini ces polynômes par la fonction génératrice suivante

$$\sum_{n\geq 0} B_n^{[s-1,\alpha]}(x) \frac{t^n}{n!} = \left( \frac{t^s}{\exp(t) - \sum\limits_{j=0}^{s-1} \frac{t^j}{j!}} \right)^\alpha \exp(xt), \quad s \geq 1. \tag{3.1}$$

Les nombres de Bernoulli généralisés sont définis par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n\geq 0} B_n^{[s-1,\alpha]} \frac{t^n}{n!} = \left( \frac{t^s}{\exp(t) - \sum\limits_{j=0}^{s-1} \frac{t^j}{j!}} \right)^{\alpha}, \quad s \geq 1. \tag{3.2}$$

Une relation entre les polynômes et les nombres de Bernoulli généralisés est donnée par la formule suivante

$$B_n^{[s-1,\alpha]}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[s-1,\alpha]} x^{n-k}.$$

**Théorème 3.2.1.** *[19] les polynômes de Bernoulli généralisés vérifient*

$$B_n^{[s-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[s-1,\alpha]}(x) y^{n-k}.$$

$$B_n^{[s-1,\alpha+\beta]}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[s-1,\alpha]}(x) B_{n-k}^{[s-1,\beta]}(y).$$

Dans la suite de ce chapitre, nous exprimons les polynômes de Bernoulli généralisés de première espèce à l'aide des nombres $r$-Stirling $s-$quasi-associés de seconde espèce.

## 3.3 Lien entre les nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de seconde espèce et les polynômes de Bernoulli généralisés

Howard [18] a défini le polynôme potentiel généralisé $F_n^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, par

$$\sum_{n\geq 0} F_n^{(\alpha)} \frac{t^n}{n!} = \left( \frac{a_s}{s!} \frac{t^s}{F(t)} \right)^{\alpha}, \quad F(t) = \sum_{n\geq s} a_n \frac{t^n}{n!}, \ s \geq 1, \tag{3.3}$$

et a établi la formule suivante

$$F_n^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{n} \left( \frac{s!}{a_s} \right)^j \frac{n!}{(n+sj)!} A_{n+sj,j} \left( \overbrace{0, \ldots, 0}^{s}, a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots \right) (-\alpha)_j , \tag{3.4}$$

$$(3.5)$$

$$F_n^{(-k)} = \left( \frac{s!}{a_s} \right)^k \frac{n!k!}{(n+sk)!} A_{n+sk,k} \left( \overbrace{0, \ldots, 0}^{s-1}, a_s, a_{s+1}, \ldots \right), \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.6}$$

Tel que $B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots)$ est le polynôme partiel de Bell ,(voir [3, 10, 27]).

Les polynômes de Bernoulli généralisés apparaissent comme un cas particulier de $F_n^{(\alpha)}$ si on choisi $F(t) = \exp(t) - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{t^j}{j!}$. On aura alors, $B_n^{[s-1,\alpha]}(0) = (s!)^\alpha F_n^{(\alpha)}$.

En utilisant (3.4), on déduit que $B_n^{[s-1,\alpha]}(0)$ sont liées aux nombres de Stirling $s-$ associés par la formule

$$B_n^{[s-1,\alpha]}(0) = \sum_{j=0}^{n} (s!)^{\alpha+j} \frac{n!}{(n+sj)!} \left\{ \begin{matrix} n+sj \\ j \end{matrix} \right\}^{s+1} (-\alpha)^{\underline{j}}, \ \ s \geq 1, \ \alpha \in R. \tag{3.7}$$

Dans cette section, on va donner deux expressions en termes des nombres $r$-Stirling $s-$quasi-associés pour les valeurs entieres de polynômes généralisés de Bernoulli $B_n^{[s-1,\alpha]}(r)$. Le théorème suivant donne une simple expression pour $B_n^{[s-1,\alpha]}(r)$ pour n'importe quel entier positif $r$.

**Théorème 3.3.1.** *On a*

$$B_n^{[s-1,\alpha]}(r) = (s!)^\alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{n+sj}{n, s, \ldots, s}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^{s+1} (-\alpha)^{\underline{j}}$$

*Et pour $\alpha = -k$ est un entier négatif , on aura*

$$B_n^{[s-1,-k]}(r) = \frac{n!k!}{(n+sk)!} \left\{ \begin{matrix} n+sk+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{s},$$

**Preuve.** *A partir de la définition de $B_n^{[s-1,\alpha]}(x)$ on obtient*

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} B_n^{[s-1,\alpha]}(r) \frac{t^n}{n!} &= (s!)^\alpha \left( \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+s}{s}^{-1} \frac{t^j}{j!} \right)^{-\alpha} \exp(rt) \\ &= (s!)^\alpha \exp(rt) \sum_{n\geq 0} f_n(-\alpha) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

*On aura alors*

$$B_n^{[s-1,\alpha]}(r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} f_k(-\alpha),$$

*tel que $(f_n(x))$ est une suite binomiale et $f_n(1) = \binom{n+s}{s}^{-1}$.*
*La relation suivante (voir [41])*

$$f_n(-\alpha) = \sum_{j=0}^{n} A_{n,j} \left( \binom{i+s}{s}^{-1} \right) (-\alpha)^{\underline{j}}$$

*nous permet d'écrire l'équation suivante :*

$$B_n^{[s-1,\alpha]}(r) = \sum_{j=0}^{n} (-\alpha)^{\underline{j}} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} A_{k,j}\left(\binom{i+s}{s}^{-1}\right),$$

*tels que $A_{n,k}(x_i) := A_{n,k}(x_1, x_2, ...)$ est le polynôme partiel de Bell [3, 10, 27]. Alors la fonction génératrice exponentielle de*

$$A(n,j) := \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} A_{k,j}\left(\binom{i+s}{s}^{-1}\right)$$

*est donnée par*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq j} A(n,j)\frac{t^n}{n!} &= \exp(rt)\sum_{k\geq j} A_{k,j}\left(\binom{i+s}{s}^{-1}\right)\frac{t^k}{k!} \\
&= \frac{1}{j!}\left(\sum_{i\geq 1}\frac{t^i}{(i+s)!}\right)^j \exp(rt) \\
&= \frac{t^{-sj}}{j!}\left(\sum_{i\geq s+1}\frac{t^i}{i!}\right)^j \exp(rt) \\
&= \sum_{n\geq j}\frac{n!}{(n+sj)!}\left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^{s+1} \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

*Donc, on aura*

$$\begin{aligned}
A(n,j) &= \frac{n!}{(n+sj)!}\left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^{s+1} \\
&\underline{\textit{et}} \\
B_n^{[s-1,\alpha]}(r) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n+sj)!}\left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^{s+1} (-\alpha)^{\underline{j}}.
\end{aligned}$$

*la deuxième partie de théorème est obtenue à travers cette expression*

$$\sum_{n\geq 0} B_n^{[s-1,-k]}(r)\frac{t^n}{n!} = t^{-sk}\left(\sum_{i\geq s}\frac{t^i}{i!}\right)^k \exp(rt) = k!t^{-sk}\sum_{n\geq sk}\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{s} \frac{t^n}{n!}.$$

En particulier, si on remplace $s$ par $1$ On obtient

$$B_n^{(\alpha)}(r) := B_n^{[0,\alpha]}(r) = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n+j)!}\left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^{2} (-\alpha)^{\underline{j}}.$$

Alors on peut dire que les valeurs de polynômes de Bernoulli en entiers positifs sont données par la formule suivante

$$B_n(r) := B_n^{(1)}(r) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+j}{j}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+j+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^2,$$

l'identité ([41, p. 96, Formula 4.2.8])

$$B_n^{(n+k+1)}(x) = \frac{n!}{(n+k)!} \frac{d^k}{dx^k} (x-1)_{n+k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

On donne pour $\alpha = n+1$,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left\{ \begin{matrix} n+j+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^2 = (r-1)^{\underline{n}}.$$

Autres expressions en terme de nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associé de seconde espèce pour $B_n^{[s-1,\alpha]}(r)$ sont exploitées dans ce qui suit.

**Théorème 3.3.2.** *Pour tout entiers positifs $p,\ r, n, s$ tel que $s \geq 1$, et $p \geq n$, on a*

$$\begin{aligned} B_n^{[s-1,\alpha]}(r) &= (s!)^{\alpha} \alpha \binom{\alpha+p}{p} \\ &\times \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \frac{j!}{\alpha+j} \binom{n+sj}{n, s, \ldots, s}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^s, \end{aligned}$$

**Preuve.** *Pour tout polynôme $f$ de degré $n \leq p$, la formule de Melzak ([22]) est donnée par*

$$f(x+\alpha) = \alpha \binom{\alpha+p}{p} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \frac{f(x-j)}{\alpha+j},$$

*On conclu à partir du théorème 3.3.2 que $(s!)^{-\alpha} B_n^{[s-1,\alpha]}(x)$ est un polynôme en $\alpha$ de degré $\leq n$,*

*ainsi si on met $f(x) = (s!)^{-x} B_n^{[s-1,x]}(r)$ dans la formule de Melzak, on obtient*

$$\frac{B_n^{[s-1,\alpha]}(r)}{(s!)^{\alpha}} = \alpha \binom{\alpha+p}{p} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \frac{B_n^{[s-1,-j]}(r)}{(\alpha+j)(s!)^{-j}}.$$

*le résultat est obtenu en utilisant la deuxième équation de théorème 3.3.1.*

Si on choisi $p = n$, le théorème 3.3.2 sera

$$\begin{aligned} B_n^{[s-1,\alpha]}(r) &= (s!)^{\alpha} \alpha \binom{\alpha+n}{n} \\ &\times \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{j!}{\alpha+j} \binom{n+sj}{n, s, \ldots, s}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+sj+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^s, \end{aligned}$$

Ce qui donne les valeurs de polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur en entiers positifs

$$B_n^{(\alpha)}(r) \quad : \quad = B_n^{[0,\alpha]}(r) = \alpha\binom{\alpha+n}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\alpha+j}\frac{\binom{n}{j}}{\binom{n+j}{j}}\left\{\begin{array}{c} n+j+r \\ j+r \end{array}\right\}_r .$$

Donc les valeurs de polynômes de Bernoulli en entiers positifs sont

$$B_n(r) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\binom{n+1}{j+1}}{\binom{n+j}{j}}\left\{\begin{array}{c} n+j+r \\ j+r \end{array}\right\}_r .$$

# CHAPITRE 4

## QUELQUES APPLICATIONS DES NOMBRES $R$-WHITNEY

# Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de donner une application des nombres $r$-Whitney aux polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur et Euler, afin de donner de nouvelles expressions des valeurs des polynômes de Bernoulli de première et seconde espèce aux points rationnels. Les formules obtenues gènèralisent les formules connues des nombres de Bernoulli de première et seconde espèce. Nous donnons d'abord, la définition, la fonction génératrice et quelques propriétés des nombres $r$-Whitney. nous exprimons ainsi le lien entre les nombres de Stirling et les nombres de Bernoulli et le lien entre les nombres $r$-Whitney et les polynômes de bernoulli.

## 4.1 Nombres $r$-Whitney

En $2010$, Mezõ [24] a introduit et étudié les nombres $r$-Whitney comme étant une généralisation des nombres de Whitney et $r$-Stirling.

### 4.1.1 Définition

Les nombres $r$-Whitney de première espèce $w_{m,r}(n,k)$ peuvent être dèfinis comme des coefficients lorsque on ècrit $m^n(x)_n$ dans la base $\{(mx+r)^k; \;\; k=0,...,n\}$

$$m^n(x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)(mx+r)^k \tag{4.1}$$

Les nombres $r$-Whitney de seconde speèce $W_{m,r}(n,k)$ peuvent être dèfinis comme des coefficients lorsque on ècrit $(mx+r)^n$ dans la base $\{(x)^{\underline{k}}; \;\; k=0,...,n\}$

$$(mx+r)^n = \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k)(x)^{\underline{k}} \tag{4.2}$$

### 4.1.2 Fonction génératrice

Les nombres $r$-Whitney de première espèce possèdent la série gènèratrice suivante

$$\sum_{n\geq k} w_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\Big(\frac{ln(1+mt)}{m}\Big)^k(1+mt)^{-\frac{r}{m}};$$

Les nombres $r$-Whitney de seconde espèce admettent la série gènèratrice suivante

$$\sum_{n\geq k} W_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\Big(\frac{exp(mt)-1}{m}\Big)^k exp(rt).$$

Pour obtenir la fonction génératrice des nombres $r$-Whitney de seconde espèce, on multiplie l'équation (4.2) par le coefficient $\frac{t^n}{n!}$ et on somme sur $n$. On aura alors,

$$\begin{aligned} e^{(mx+r)t} &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k)(x)_k \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{k\geq 0} m^k (x)^{\underline{k}} \sum_{n\geq k} W_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

D'une autre manière, $e^{(mx+r)t}$ peut être exprimé par

$$\begin{aligned} e^{(mx+r)t} &= e^{rt}\Big(e^{mt}\Big)^x \\ &= e^{rt}\Big(e^{mt}-1+1\Big)^x \\ &= e^{rt}\sum_{n\geq k}(x)^{\underline{k}}\frac{\big(e^{mt}-1\big)^k}{k!} \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $(x)_k$, on obtient

$$\sum_{n\geq k} W_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\Big(\frac{exp(mt)-1}{m}\Big)^k exp(rt).$$

On peut écrire l'équation (4.1) comme suit

$$\sum_{n\geq 0} m^n \Big(\frac{x-r}{m}\Big)^{\underline{n}} = \sum_{k\geq 0} w_{m,r}(n,k)x^k$$

Pour obtenir la fonction génératrice des nombres $r$-Whitney de première espèce, on multiplie aussi l'équation précédente par le coefficient $\frac{t^n}{n!}$ et on somme sur $n$.

On obtient alors,

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} m^n \Big(\frac{x-r}{m}\Big)^{\underline{n}}\frac{t^n}{n!} &= (1+mt)^{\frac{x-r}{m}} \\ &= (1+mt)^{\frac{-r}{m}} e^{\left(\frac{x}{m}ln(1+mt)\right)} \\ &= (1+mt)^{\frac{-r}{m}} \sum_{n\geq k} x^k \frac{ln(1+mt)^k}{m^k k!} \end{aligned}$$

Le deuxième membre de l'équation est égal à

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k\geq 0} w_{m,r}(n,k)x^k\Big)\frac{t^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} x^k \sum_{n\geq k} w_{m,r}(n,k).$$

En Comparant les coefficients de $x^k$, on obtient

$$\sum_{n\geq k} w_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\Big(\frac{ln(1+mt)}{m}\Big)^k (1+mt)^{-\frac{r}{m}}.$$

### 4.1.3 Propriétés

De la définition des nombres $r$-Whitney découlent les propriétés suivantes

Les nombres $r$-Whitney de premiére espèce $w_{m,r}(n,k)$ redonnent

– les nombres de Stirling absolus de premiére espèce $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ telque,
$w_{1,0}(n,k) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

– les nombres $r$-Stirling absolus de premiére espèce $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$ dont,
$w_{1,r}(n,k) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r$

– les nombre de Whitney de premiére espèce $w_m(n,k)$ car, $w_{m,0}(n,k) = w_m(n,k)$

– Les nombres $r$-Whitney premiére espèce $w_{m,r}(n,k)$ vérifient

$$w_{m,r}(n,k) = w_{m,r}(n-1,k-1) + (m(n-1)-r)w_{m,r}(n-1,k)$$

Les nombres $r$-Whitney de seconde espèce $W_{m,r}(n,k)$ redonnent

– les nombres de Stirling absolus de seconde espèce $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ telque, $W_{1,0}(n,k) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$

– les nombres $r$-Stirling absolus de seconde espèce $\begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_r$ tel que, $W_{1,r}(n,k) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_r$

– les nombre de Whitney de seconde espèce $W_m(n,k)$ dont, $W_{m,0}(n,k) = W_m(n,k)$

Les nombres $r$-Whitney de seconde espèce $W_{m,r}(n,k)$ vérifient

- $W_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} (mi+r)^n$
- $W_{m,r}(n,k) = W_{m,r}(n-1,k-1) + (km+r)W_{m,r}(n-1,k)$
- $\delta_{n,p} = \sum_{j=0}^{n} w_{m,r}(n,k) W_{m,r}(k,p)$

Cheon[13], a prouvé quelques identités algébriques des nombres $r$-Whitney de première et seconde espèce . Par exemple, les nombres $r$-Whitney peuvent être écrites en terme de nombres de Stirling et $r$-Stirling tel que

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} m^{i-k} r^{n-i} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} m^{n-i} (-r)^{i-k} \left[ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right]$$

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} m^{i-k} (r-mr)^{n-i} \left\{ \begin{matrix} i+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r$$

Ainsi, pour $r \geq s$ la relation suivante relie les nombres $r$-Whitney et les nombres $s-$Whitney de seconde espèce

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (r-s)^{n-i} W_{m,s}(i,k)$$

Récemment, Merca [21] a ajouté d'autre identités des nombres $r$-Whitney

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (-m)^{n-i} (mr-r)^{i-k} \left[ \begin{matrix} i+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r$$

$$\left[ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r = \frac{1}{p^{n-k}} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} w_{m,r}(n,i) (-1)^{n-i} (mr-r)^{i-k}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r = \frac{1}{p^{n-k}} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} W_{m,r}(i,k) (mr-r)^{n-i}$$

la relation suivante relie les nombres $r$-Whitney et les nombres $s-$Whitney de première espèce

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (s-r)^{i-k} w_{m,s}(i,k)$$

## 4.2 Polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur et nombres de Stirling

Les nombres de Bernoulli $B_n := B_n(0)$ et $b_n := b_n(0)$ sont liès aux nombres de Stirling de première et seconde espèce par ces formules

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{j!}{j+1} \left\{ \begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right\} \tag{4.3}$$

Et

$$b_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j+1} \left[ \begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] \tag{4.4}$$

Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première et seconde espèce $B_n^{(\alpha)}(x)$ et $b_n^{(\alpha)}(x)$ respèctivement sont dèfinis par les deux fonctions gènèratrice suivantes

$$\sum_{n\geq 0} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \Big(\frac{t}{exp(t)-1}\Big)^{\alpha} exp(xt) \tag{4.5}$$

$$\sum_{n\geq 0} b_n^{(\alpha)}(x) t^n = \Big(\frac{t}{ln(1+t)}\Big)^{\alpha} (1+t)^x \tag{4.6}$$

Avec $B_n^{(1)}(x) = B_n(x)$ et $b_n^{(1)}(x) = b_n(x)$ sont les polynômes de Bernoulli classique de première et seconde espèce.

Pour $\alpha = 1$ et pour $x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq k} B_n \frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e^t - 1} \\
&= \frac{ln(e^t)}{e^t - 1} \\
&= \frac{ln(1 + e^t - 1)}{e^t - 1} \\
&= \frac{1}{e^t - 1} \sum_{n\geq k} (-1)^{n-1} \frac{\left(e^t - 1\right)^n}{n} \\
&= \sum_{n\geq k} (-1)^k \frac{\left(e^t - 1\right)^k}{k+1} \times \frac{k!}{k!} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient une relation entre les polynômes de Bernoulli de première espèce et les nombre de Stirling de seconde espèce telle que

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$$

Pour $\alpha = 1$ et $x = r$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k} B_n(r) \frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e^t - 1} e^{rt} \\
&= \frac{ln(e^t)}{e^t - 1} e^{rt} \\
&= \frac{1}{e^t - 1} \sum_{n \geq k} (-1)^{n-1} \frac{(e^t - 1)^n}{n} \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} (e^t - 1)^k e^{rt} \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} k! \Big( \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k e^{rt} \Big) \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k k!}{k+1} \Big( \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{array}{c} n+r \\ k+r \end{array} \right\}_r \frac{t^n}{n!} \Big) \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n+r \\ k+r \end{array} \right\}_r
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient une relation entre les nombre de Bernoulli de première espèce et les nombre de $r$-Stirling de seconde espèce

$$B_n(r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{k+1} \left\{ \begin{array}{c} n+r \\ k+r \end{array} \right\}_r$$

Pour $\alpha = k$ et $x = r$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq k} B_n^{(k)}(r)\frac{t^n}{n!} &= \Big(\frac{t}{e^t-1}\Big)^k e^{rt}\\
&= \frac{t^k}{(e^t-1)^k}e^{rt}\\
&= k!\frac{e^{rt}}{(e^t-1)^k}\frac{(ln(1+(e^t-1)))^k}{k!}\\
&= k!e^{rt}\sum_{j\geq 0}(-1)^{j-k}\left[\begin{array}{c} j\\ k\end{array}\right]\frac{t^{j-k}}{j!}\\
&= k!\sum_{n\geq k}(-1)^k\left[\begin{array}{c} n+k\\ k\end{array}\right]\frac{t^n}{n!}e^{rt}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n\geq k} B_n^{(k)}(r)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!(-1)^k\left[\begin{array}{c} n+k\\ k\end{array}\right]e^{rt}$$

Par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient une relation entre les polynômes de Bernoulli de première espèce et les nombres de Stirling de première espèce

$$B_n^{(k)}(r) = \sum_{k=0}^{n} k!(-1)^k\left[\begin{array}{c} n+k\\ k\end{array}\right]e^{rt}$$

## 4.3 Application de nombres de $r$-Whitney aux polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur

**Théorème 4.3.1.** *Pour tout entiers positifs $r, s, k, n, m$ et $m \neq 0$, on a*

$$B_n^{(k)}\Big(\frac{r-s}{m}\Big) = \frac{1}{m^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1} w_{m,s}(j+k,k)W_{m,r}(n,j), \tag{4.7}$$

$$b_n^{(k)}\Big(\frac{r-s}{m}\Big) = \frac{1}{m^n n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1} W_{m,r}(j+k,k)w_{m,s}(n,j). \tag{4.8}$$

*Et*

$$B_n^{(-k)}(\frac{r}{m}) = \frac{1}{m^n}\binom{n+k}{k}^{-1} W_{m,r}(n+k,k), \tag{4.9}$$

$$b_n^{(-k)}(\frac{-r}{m}) = \frac{1}{m^n}\frac{k!}{(n+k)!}w_{m,r}(n+k,k). \tag{4.10}$$

**Preuve.** *Pour prouver la relation (4.7), nous utilisons la fonction génératrice des nombres $r$-Whitney de première et de seconde espèce*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} B_n^{(-k)}\Big(\frac{r-s}{m}\Big)\frac{t^n}{n!} &= \Big(\frac{t}{exp(t)-1}\Big)^k exp\Big((\frac{r-s}{m})t\Big) \\
&= m^k k! \frac{exp(rt)}{(exp(t)-1)^k}\left[\frac{\big(ln(1+m(\frac{exp(t)-1}{m}))\big)^k}{m^k k!\big(1+m(\frac{exp(t)-1}{m})\big)^{\frac{s}{m}}}\right] \\
&= k! \frac{exp(rt)}{(exp(t)-1)^k}\sum_{j\geq 0} w_{m,s}(j,k)\frac{(\frac{exp(t)-1}{m})^j}{j!} \\
&= \sum_{j\geq 0}\binom{j+k}{k} w_{m,s}(j+k,k)\frac{(exp(t)-1)^j}{j!}exp(rt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} B_n^{(-k)}\Big(\frac{r-s}{m}\Big)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{j\geq 0}\binom{j+k}{k} m^j w_{m,s}(j+k,k)\frac{\Big(\frac{(exp(m\frac{t}{m})-1)}{m}\Big)^j}{j!}exp(r\frac{t}{m}) \\
&= \sum_{j\geq 0}\binom{j+k}{k} m^j w_{m,s}(j+k,k)\sum_{n\geq j} W_{m,r}(n,j)\frac{(\frac{t}{m})^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1}\frac{w_{m,s}(j+k,k)W_{m,r}(n,j)}{m^{n-j}}
\end{aligned}$$

*Par identification des coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$ des deux membres on a*

$$B_n^{(-k)}(\frac{r-s}{m}) = \sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1}\frac{w_{m,s}(j+k,k)W_{m,r}(n,j)}{m^{n-j}}$$

*Pour prouver la relation (4.8), on utilise*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} b_n^{(k)}\Big(\frac{r-s}{m}\Big)t^n &= \Big(\frac{t}{ln(1+t)}\Big)^k (1+t)^{\frac{r-s}{m}} \\
&= k!\frac{(1+t)^{\frac{-s}{m}}}{\Big(\frac{ln(1+t)}{m}\Big)^k}\Big[\frac{1}{k!}\Big(\frac{exp\big(m\frac{ln(1+t)}{m}\big)-1}{m}\Big)^k exp\big(r\frac{ln(1+t}{m})\Big] \\
&= k!(1+t)^{-\frac{s}{m}}\sum_{j\geq k} W_{m,r}(j,k)\frac{\Big(\frac{ln(1+t)}{m}\Big)^{j-k}}{j!} \\
&= \sum_{j\geq 0}\binom{j+k}{k}^{-1} m^j W_{m,r}(j+k,k)\sum_{n\geq j} w_{m,s}(n,j)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{n} m^j\binom{j+k}{k}^{-1} W_{m,r}(j+k,k)w_{m,s}(n,j)
\end{aligned}$$

*Nous utilisons pour prouver l'identité (4.9), le fait que*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} B_n^{(-k)}\Big(\frac{r}{m}\Big)\frac{(mt)^n}{n!} &= t^{-k}\Big(\frac{exp(mt)-1}{m}^k\Big)exp(rt) \\
&= \sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k}^{-1} W_{m,r}(n+k,k)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

*Pour prouver la relation(4.10), nous utilisons*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} b_n^{(k)}\Big(-\frac{r}{m}\Big)\frac{(mt)^n}{n!} &= t^{-k}\Big(\frac{ln(1+mt)}{m}^k\Big)(1+mt)^{-\frac{r}{m}} \\
&= \sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k}^{-1} w_{m,r}(n+k,k)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Comme conséquence de ce dernier théorème, et pour $k=1$ on obtient

**Corollaire 4.3.1.** *Pour tout entiers positifs $r, s, k, n, m$ et $m \neq 0$, on a*

$$B_n\Big(\frac{r-s}{m}\Big) = \frac{1}{m^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}w_{m,s}(j+1,1)W_{m,r}(n,j),$$

$$b_n\Big(\frac{r-s}{m}\Big) = \frac{1}{m^{n+1}n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{m^j}{j+1}\Big((m+r)^{j+1}-r^{j+1}\Big)w_{m,s}(n,j),$$

**Preuve.** *La preuve du corollaire 4.3.1 est une conséquence immédiate du théorème 4.3.1 en remplaçant $k$ par $1$.*

## Application

Si on remplace $s$ par $0$ et $k$ par $1$ dans le thèorème, on trouve les deux relations suivantes

$$B_n\Big(\frac{r}{m}\Big) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{j!}{j+1}\frac{W_{m,r}(n,j)}{m^{n-j}},$$

$$b_n\Big(\frac{r}{m}\Big) = \frac{1}{m^{n+1}n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\Big((m+r)^{j+1} - r^{j+1}\Big)w_m(n,j)$$

**Remarque 4.3.1.** *Mezõ [24] a établi d'autres identités sur les polynômes de Bernoulli de première espèce $B_n\Big(\dfrac{r}{m}\Big)$ et les nombres de Bernoulli de première espèce $B_n$ en utilisant les nombres de Whitney*

Si on remplace $r$ par $0$ et $k$ par $1$ dans le théorème 4.3.1, on extrait les deux équations ci-dessous qui relient les polynômes de Bernoulli et les nombres $r$-Whitney

$$B_n\Big(-\frac{s}{m}\Big) = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\left\{\begin{matrix} n \\ j \end{matrix}\right\}\frac{W_{m,s}(j+1,1)}{m^j},$$

$$B_n\Big(\frac{r}{m}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{m^j}{j+1}\frac{W_{m,s}(n,j)}{m^{n-j}}.$$

Du théorème 4.3.1, on déduit le corollaire suivant en remplaçant $m$ par $1$.

**Corollaire 4.3.2.** *Pour tout entiers positifs $r, s, k, n$ on a :*

$$B_n^{(k)}(r-s) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{j+k}{k}^{-1}\left[\begin{matrix} j+k+s \\ k+s \end{matrix}\right]_s\left\{\begin{matrix} n+r \\ j+k \end{matrix}\right\}_r,$$

$$b_n^{(k)}(r-s) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{j+k}{k}^{-1}\left\{\begin{matrix} j+k+r \\ k+r \end{matrix}\right\}_r\left[\begin{matrix} n+s \\ j+s \end{matrix}\right]_s.$$

## Application

Comme consèquence du corollaire 4.3.2, si on remplace $m$ par $0$ et en utilisant ces deux identitès

$$\left[\begin{matrix} n+s \\ 1+s \end{matrix}\right] = n!H_n^{(s)}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ r+1 \end{matrix} \right\}_r = (r+1)^{j+1} - r^{j+1}$$

On obtient alors

$$B_n(r-s) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! H_{j+1}^{(s)} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r,$$

$$b_n(r-s) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j+1} \Big( (r+1)^{j+1} - r^{j+1} \Big) \left[ \begin{matrix} n+s \\ j+s \end{matrix} \right]_s,$$

Les deux identitès suivantes sont une conséquence immédiate du corollaire 4.3.2, si on remplace $s$ par $0$ et $k$ par $1$.

$$B_n(r) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{j!}{j+1} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r,$$

$$b_n(r) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j+1} \Big( (r+1)^{j+1} - r^{j+1} \Big) \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right].$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ cette dernière équation devient

$$b_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j+1} \big( (x+1)^{j+1} - x^{j+1} \big) \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right].$$

Si on remplace maintenant $r$ par $0$ et $k$ par $1$ dans le corollaire 4.3.2 on obtient les deux identitès suivantes

$$B_n(-s) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! H_{j+1}^{(s)} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\},$$

$$b_n(-s) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j+1} \left[ \begin{matrix} n+s \\ j+s \end{matrix} \right]_s.$$

Le théorème suivant permet d'exprimer les polynômes d'Euler généralisés à l'aide des nombres $r$-Whitney

**Théorème 4.3.2.** *Pour tout entiers positifs $r, k, n, m$ avec $m \neq 0$, on a*

$$E_n^{(\alpha)}\Big(\frac{r}{m}\Big) = \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{n} \Big(\frac{m}{2}\Big)^j W_{m,r}(n,j) (\alpha)^{\overline{j}}.$$

En particulier, si on remplace $\alpha$ par $1$ et $m$ par $1$ dans le théorème 4.3.2, on obtient

$$E_n\Big(\frac{r}{m}\Big) = \frac{1}{m^n} \sum_{j=0}^{n} \Big(\frac{-m}{2}\Big)^j j! W_{m,r}(n,j),$$

$$E_n^{(\alpha)}(r) = \sum_{j=0}^{n} \Big(\frac{-1}{2}\Big)^j \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r (\alpha)^{\overline{j}}.$$

**Preuve.** *En utilisant la fonction génératrice des polynômes d'Euler et quelques techniques combinatoires, on prouve le théorème*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{(mt)^n}{n!} &= \Big(\frac{2}{exp(mt)+1}\Big)^{\alpha} exp(rt) \\
&= exp(rt)\Big(\frac{exp(mt)-1}{2}+1\Big)^{-\alpha} \\
&= \sum_{j\geq 0} \tbinom{-\alpha}{j}(\frac{m}{2})^j(\frac{exp(mt)-1}{m})^j exp(rt) \\
&= \sum_{j\geq 0}(\frac{m}{2})^j(\alpha)^{\underline{j}}\sum_{n\geq j} W_{m,r}(n,j)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}(\frac{m}{2})^j W_{m,r}(n,j)(\alpha)^{\underline{j}}
\end{aligned}$$

**Théorème 4.3.3.** *pour tout entiers positifs $r, \alpha, k, n, m$ et $m \neq 0$, on a*

$$\begin{aligned}
b_n^{(\alpha)}\left(\frac{-r}{m}\right) &= \frac{(q-\alpha)}{m^n}\binom{p+q-\alpha}{p} \\
&\times\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{j+q-\alpha}\binom{p}{j}\frac{(-j-q)!}{(n-j-q)!}w_{m,r}\left(n-j-q,-j-q\right), \qquad (4.11)\\
B_n^{(\alpha)}\left(\frac{-r}{m}\right) &= \frac{(q+\alpha)}{m^n}\binom{p+q+\alpha}{p} \qquad (4.12)\\
&\times\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j+q-\alpha}\binom{p}{j}\binom{n+j}{j}\binom{n+j+q}{j+q}w_{m,r}\left(n+j+q,j+q\right),
\end{aligned}$$

**Preuve.** *Rappelons la formule de Melzak[22] citée au deuxième chapitre*

$$f_n(\alpha+x) = \alpha\tbinom{\alpha+p}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{\alpha+j}\tbinom{p}{j}f_n(-j+x); \qquad (4.13)$$

*tel que $f$ est un polynôme de degrè $n \leq p$.*

*si on remplace $f(x) = b_n^{(x)}\left(\frac{-r}{m}\right)$ dans la formule (4.13) on obtient*

$$b_n^{(\alpha)}\left(\frac{-r}{m}\right) = (\alpha+q)\binom{\alpha+q+p}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\frac{b_n^{(-j-q)}\left(\frac{-r}{m}\right)}{\alpha+q+j}.$$

*et par le fait qu'on a*

$$b_n^{(-k)}\left(-\frac{r}{m}\right)=\frac{1}{m^n}\frac{k!}{(n+k)!}w_{m,r}\left(n+k,k\right).$$

*la première équation du théorème est obtenue.*

*La deuxième équation du théorème est obtenue si on on choisie* $f\left(x\right)=B_n^{(x)}\left(\frac{-r}{m}\right)$.

**Proposition 4.3.1.** *Soit $\alpha$ un nombre reél, et soient $p,q,r,n$ des entiers positifs avec $p\geq n$. Alors nous avons*

$$b_n^{(\alpha)}(-r)=(\alpha+q)\binom{\alpha+p+q}{p}\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{\alpha+q+j}\binom{p}{j}\frac{(j+q)}{(n+j+q)!}w_r(n+j+q,j+q),$$

$$B_n^{(\alpha)}(r)=(n+1+\alpha+q)\binom{n+1-\alpha+p+q}{p}\times \sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^j}{n+1-\alpha+q+j}\binom{p}{j}\frac{w_{r+1}(n+j+q,j+q)}{\binom{n+j+q}{j+q}}.$$

**Preuve.** *Pour $m=1$ dans le théorème 4.3.1 on a*

$$b_n^{(-k)}(-r)=\frac{k!}{(n+k)!}w_{1,r}(n+k,k).$$

*En utilisant la formule de Melzak, les identités sont obtenues.*

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les nombres $r$-Whitney, $r$-Stirling et les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur et les polynômes de Bernoulli généralisés sont trés connus en combinatoire énumérative et possèdent des applications riches dans plusieurs domaines tels que l'informatique, la biologie et aussi la physique. Ils interviennent ainsi dans toutes les branches de mathématiques : en algèbre, théorie des graphes et en probabilité. Ces nombres ont été étudiés par plusieurs chercheurs durant ce siècle.

Les travaux de cette thèse, nous ont permis d'exprimer des nouvelles formules explicites des polynômes de Bernoulli généralisés à l'aide des $r$-Whitney et $r$-Stirling.

Nous avons présenté dans le premier chapitre, les connaissances et quelques notions de base de la combinatoire énumérative . Nous avons présenté un bagage sur les interprétations combinatoires, les fonctions génératrices et quelques propriétés de nombres de Stirling, nombres $r$-Stirling, nombres de Whitney et polynômes de Bernoulli et d'Euler.

Au moyen d'analyse des fonctions génératrices et la formule de Melzak, nous avons réussi à exprimer dans le deuxième et le quatrième chapitre, les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première et seconde espèce aux points entiers à l'aide des nombres $r$-Stirling des deux espèces, et aux points rationnels à l'aide des nombres $r$-Whitney des deux espèces.

Nous avons réalisé dans le troisième chapitre, une description dètaillèe sur une nouvelle classe de nombres c'est la classe de nombres $r$-Stirling $s$-quasi associés de seconde espèce. Nous avons réalisé par la suite l'exploitation de ces nombres aux polynômes de Bernoulli généralisés.

Ce travail ouvre des perspectives de recherche nombreuses et intèressantes, parmi lesquelles nous privilègions les suivantes :

- Applications de nombres $r$-Stirling $s$-quasi-associés de premier espèce aux polynômes de Bernoulli.
- Application aux théories de graphe des polynômes $r$-Stirling $s$-quasi-associés de premier et second espèce.
- Applications de nombres $r$-Whitney aux autres polynômes .
- Le nombre chromatique et les nombres $r$-Whitney.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Adelberg, Arithemetic properties of the Nörlund polynomial $B_n^{(x)}$. Discrete Math. 284 (1999) 5–13.

[2] H. Belbachir, I. E. Bousbaa, Translated Whitney and $r$-Whitney numbers, A combinatorial approach, J. Integer Seq. 16 (2013) Article 13.8.6.

[3] E. T. Bell, Exponential polynomials. Ann. Math. 35 (1934) 258-277.

[4] M. Benoumhani, On Whitney numbers of Dowling lattices, Discrete Math. 159 (1996) 13–33.

[5] M. Benoumhani, On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices, Adv. Appl. Math. 19 (1997) 106–116.

[6] M. Benoumhani, Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices, Adv. Appl. Math. 22 (1999) 186–189.

[7] A. Z. Broder, The $r$-Stirling numbers, Discrete Math. 49 (1984) 241–259.

[8] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the rst and second kind-I, Fibonacci Quart. 18 (1980) 147–162.

[9] L. Carlitz, A note on Bernoulli and Euler polynomials of the second kind, Scripta Math. 25 (1961) 323–330.

[10] L. Comtet, *Advanced Combinatorics,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).

[11] C.A.Charalambides, *Enumerative Combinatorics,* Chapman et Hall/CRC, 2002.

[12] C.A.Charalambides, *Combinatorial Methods in Discrete distributions,* John Wi- ley et Sons, INC, 2005.

[13] G.-S. Cheon, J.-H. Jung, The r-Whitney numbers of Dowling lattices, Discrete Math. 312 (15)(2012) 2337-2348.

[14] T.A. Dowling, A class of gemometric lattices bases on finite groups, J. Combin. Theory Ser. B, 14 (1973) 61-86. Erratum J. Combin. Theory Ser. B, 15 (1973) 211.

[15] C. J. Feng and F. Z. Zhao. Some results for generalized harmonic numbers. INTEGERS, 9 (2009) 605619.

[16] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics,* A Foundation for Computer Science, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, (1994).

[17] S. Herrmann, Genocchi numbers and $f$-vectors of simplicial balls. European J. Combin. 29 (2008), 1087–1091.

[18] F. T. Howard, A theorem relating potential and bell polynomials, Discrete Math. 39 (1982) 129–143.

[19] B. Kurt, A further generalization of the Bernoulli polynomials and on the $2D$-Bernoulli polynomials $B_n^2(x, y)$ , Appl. Math. Sci. 4 (2010) 2315–2322.

[20] Y. L. Luke, The Special Functions and Their Approximations, vol. I. Academic Press, New York, London, (1969).

[21] M. Merca, A note on the $r$-Whitney numbers of Dowling lattices, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 351 (2013) 649–655.

[22] Z. A. Melzak, V. D. Gokhale, and W. V. Parker, Advanced Problems and Solutions : Solutions : 4458. Amer. Math. Monthly, 60 (1) 1953, 53–54.

[23] Z. A. Melzak, D. J. Newman, P. Erdös, G. Grossman, and M. R. Spiegel, Advanced Problems and Solutions : Problems for Solution, Amer. Math. Monthly, 58 (1951) 4458-4462.

[24] I. Mezõ, A new formula for the Bernoulli polynomials, Results Math, 58 (2010) 329-335.

[25] I. Mező, On the maximum of $r$-Stirling numbers. Adv. Applied Math, 41 (2008), 293–306.

[26] M. Mihoubi, H. Belbachir, Linear recurrences for $r$-Bell polynomials, Journal of Integer Sequences, Vol. 17 (2014), Article 14.10.6.

[27] M. Mihoubi, Bell polynomials and binomial type sequences. Discrete Math, 308 (2008) 2450–2459.

[28] M. Mihoubi and **M. Tiachachat**, The m-associated Stirling numbers of the second kind and its application, *DIMACOS'12. Liban, Novembre 2012*

[29] M. Mihoubi and **M. Tiachachat**, The m-associated Stirling numbers of the second kind, *RAMA'8. Algérie, Novembre 2012* .

[30] M. Mihoubi and **M. Tiachachat**, The values of the high order Bernoulli polynomials at integers and the $r$-Stirling numbers. arXiv :1401.5958v1 [math.NT] 23 Jan 2014.

[31] M. Mihoubi and **M. Tiachachat**, Some applications of the r-Whitney numbers, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I* .

[32] M. Mihoubi and **M. Tiachachat**, The r-Whitney numbers and its applications, *LICMA'15. Liban, May 2015* .

[33] M. Mihoubi and **M. Tiachachat**, A new classe of $r$-Stirling numbers and the values of the generalised Bernoulli polynomials at non negative integers, *JSl, RECITS, Avril 2014* .

[34] M. Mihoubi and **M. Tiachachat**, The values of the high order Bernoulli polynomials at integers and the $r$-Stirling numbers, *RAMA'9, Algérie, May 2014*.

[35] R. K. Muthumalai, A note on Bernoulli numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 19 (2013), 59–65.

[36] P. Natalini, A. Bernardini, A generalization of the Bernoulli polynomials. *J. Appl. Math.* 3 (2003) 155–163.

[37] G. Nemes, An asymptotic expansion for the Bernoulli numbers of the second kind, J. Integer Seq. 14 (2011), Article 11.4.8.

[38] T. R. Prabhakar, S. Gupta, Bernoulli polynomials of the second kind and general order. *Indian J. pure appl. Math,* 11 (1980), 1361–1368.

[39] M. Rahmani, Some results on Whitney numbers of Dowling lattices, Arab Journal of Mathematical Sciences, 20 (2014) 11–27.

[40] J. Riordan. An Introduction to combinatorial analysis. John Wiley and sons, (1958).

[41] S. Roman, *The Umbral Calculus.* Academic Press, INC, (1984).

[42] H. M. Srivastava, Á. Pintér, Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. Appl. Math. Lett, 17 (4) (2004) 375–380.

[43] H. M. Srivastava, An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials. J. Math. Anal. Appl, 130 (1988) 509–513.

[44] H. M. Srivastava, J. Choi, Series associated with the zeta and related functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2001).

[45] H. M. Srivastava, J. Choi, Zeta and $q$-zeta functions and associated series and integrals, First edition (2012).

[46] P. G. Todorov, On the theory of the Bernoulli polynomials and numbers. J. Math. Anal. Appl, 104 (1984) 309–350.

[47] R. Tremblay, S. Gaboury, B.-J. Fugère, A new class of generalized Apostol Bernoulli polynomials and some analogues of the Srivastava Pintér addition theorem, Appl. Math. Lett, 24 (2011) 1888–1893.

[48] J. Worpitzky, Studien uber die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen. J. Reine Angew. Math, 94 (1983) 203-232.

[49] Z. Zhang, H. Yang, Several identities for the generalized Apostol Bernoulli polynomials. Comput. Math. Appl, 56 (2008) 2993 2999.