

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
(U.S.T.H.B / ALGER)

FACULTE DE PHYSIQUE

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de :

MAGISTER EN PHYSIQUE

Spécialité : Electronique Quantique

Par :

TATAH Mohamed

SUJET

Laser à CO₂ :
Influence de la diffraction sur le champ d'un laser à CO₂

Soutenu publiquement le 25 Octobre 2003 devant le jury composé de :

M ^r Abdelouahab. TALEB	Professeur (U.S.T.H.B)	Président
M ^r Abdelhamid. KELLOU	Maître de conférences (U.S.T.H.B)	Directeur de Thèse
M ^r Djamel. BRADAI	Maître de conférences (U.S.T.H.B)	Examineur
M ^r Djelloul. LOUHIBI	Maître de recherche (C.D.T.A)	Examineur
M ^{me} Akila. AMROUN-FRAHI	Maître de conférences (U.S.T.H.B)	Examineur

Remerciements

Je salut avec respect la mémoire de feu le professeur H. Ladjouze, que dieu l'accueille en son vaste paradis, pour m'avoir ouvert la porte du laboratoire d'Electronique Quantique de la Faculté de Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, et avec qui j'ai initié et entamé ce travail.

J'adresse mes remerciements au Docteur A. KELLOU, Maître de Conférence de la Faculté de Physique de l'USTHB, pour avoir accepté aimablement d'être l'encadreur de cette thèse et pour le soutien qu'il m'a fourni tout au long de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je remercie Monsieur A. TALEB, Professeur à l'USTHB et Président du Conseil Scientifique de la Faculté de Physique de l'USTHB, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Madame A. AMROUN-FRAHI, Maître de Conférences de la Faculté de Physique de l'USTHB, pour l'entretien fructueux qu'elle m'a accordé et pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Que Monsieur Dj. LOUHIBI, Maître de Recherche au CDTA, trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour ses discussions et remarques intéressantes relatives à la partie expérimentale de ce travail et pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur Dj. BRADAI, Maître de Conférences de la Faculté de Physique de l'USTHB, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et pour avoir accepté aimablement de l'examiner.

Je remercie, enfin, toutes les personnes qui n'ont pas été cités et qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

Table des matières

<u>Introduction générale</u>	1
------------------------------------	---

Chapitre 1

Modes propres d'une cavité vide

Introduction	5
A. Faisceaux gaussiens en propagation libre	6
1. Equation d'onde dans l'approximation paraxiale	6
2. Solution : Les Faisceaux Gaussiens	7
2.1. Mode Fondamental	7
2.2. Modes D'Hermite-Gauss	9
2.3. Modes De Laguerre-Gauss	11
B. Les cavités résonnantes	13
1. Modes propres de la cavité	13
1.1. Caractéristiques des modes propres de la cavité	14
1.2. Condition de résonance	15
1.3. Application à l'étude d'une cavité plano-concave	16
1.3.1. Modes de résonance	16
1.3.2. Largeur effective des modes	17
1.3.3. Divergence en champ lointain	19
1.3.4. Volume effectif des modes	19
2. Pertes dans une cavité	21
2.1. Pertes par absorption, diffusion et transmission	21
2.2. Pertes par diffraction	21

Chapitre 2

Modes propres d'une cavité diaphragmée

Introduction	24
1. Opérateur aller-retour de la cavité diaphragmée	25
A. Diaphragme contre le miroir concave	26
B. Diaphragme contre le miroir plan	29
2. Résolution Numérique	31
3. Courbes théoriques et discussions	34
3.1. Choix du nombre maximum de polynômes de Laguerre	34
3.2. Pertes de Diffraction et Facteur de Discrimination	35
3.3. Distribution spatiale de l'intensité	39

Chapitre 3
Partie expérimentale

Introduction	48
1. Principe du laser moléculaire à CO ₂	49
2. Description du dispositif expérimental	54
2.1. Le laser à gaz	54
2.2. La détection	57
3. Caractérisation du laser	58
3.1. Variation de la puissance laser	58
3.2. Spectre d'émission du laser	61
3.2.1. Aspect multiraie de l'émission	61
3.2.2. Emission monoraie	61
3.3. Sélection d'un mode longitudinal	63
4. Mesure du profil transverse de l'intensité	63
4.1. Courbes et analyse des résultats	64
4.2. Confrontation avec la théorie et conclusion	65

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale	71
Perspectives	72

Annexes

<u>Annexe A</u> : Description du Mode Fondamental Gaussien	74
<u>Annexe B</u> : Introduction aux Modes d'Hermite-Gauss	78
<u>Annexe C</u> : Introduction aux Modes de Laguerre-Gauss	83
<u>Annexe D</u> : Généralités sur le laser moléculaire à CO ₂	88
<u>Annexe E</u> : Etude du Mode Fondamental d'une cavité à miroir de sortie troué	95
<u>Bibliographie</u>	110

INTRODUCTION GENERALE

Le résonateur laser est caractérisé par une série de modes propres à structure géométrique bien définie : les Modes de Laguerre-Gauss (pour une géométrie cylindrique) ou d'Hermite-Gauss (pour une géométrie cartésienne). Ces modes sont les solutions des équations de Maxwell pour l'espace libre et les conditions aux limites sur les miroirs de la cavité déterminent les paramètres de base. Les modes de Laguerre-Gauss ou d'Hermite-Gauss sont hiérarchisés en fonction de leurs pertes et possèdent une étendue transverse de plus en plus importante. Dans la pratique, il est préférable, pour un certains nombres de raisons, de limiter l'oscillation du laser au seule mode fondamental Gaussien « mode d'ordre le plus bas ». Un diaphragme est alors fréquemment inséré à l'intérieur du résonateur, ce qui conduit à augmenter les pertes et à supprimer les modes supérieurs indésirables « modes d'ordre élevés ». Ce procédé de sélection résulte des faibles dimensions transverses associées à ce mode. Il introduit cependant, de la diffraction résonante. Les pertes d'énergie qui en résultent, perturbent aussi le mode fondamental et modifient ses paramètres : distribution spatiale, fréquence de résonance, divergence en champ lointain, volume du mode...

L'objet de ce travail, est précisément l'étude de l'influence de cette diffraction sur la distribution du champ du mode fondamental Gaussien d'un laser à CO₂.

Le problème de l'influence de la diffraction résonnante sur les caractéristiques des modes transverses d'un laser n'est pas nouveau. Son étude a débuté avec les travaux de Fox et Li [Fox 61] : la formation des modes propres d'un résonateur ouvert est analysée par l'étude des variations que subissent l'amplitude et la phase d'une onde, initialement plane, après plusieurs passages successifs dans la cavité. Cette méthode d'analyse est basée sur la résolution numérique d'une équation intégrale qui établit un lien entre les champs régnants sur les miroirs d'extrémité sur la base du principe d'Huygens, exprimé sous la forme de Fresnel-kirchhoff. Dans cette étude, la diffraction provient des dimensions finies des miroirs. Ces travaux ont permis d'établir, de manière définitive, la nature transverse des ondes électromagnétiques correspondant aux modes propres de propagation dans les cavités laser.

D'autres travaux [Li 63, 65], [Kor 81], [Sag 81], [Pic 83], liés à l'étude des modes transverses dans des résonateurs lasers diaphragmés, ont ensuite confirmé et étendu ces premiers résultats. Pour ces résonateurs, la méthode des équations intégrales s'est avérée fort efficace pour le calcul des pertes par diffraction, du déphasage et de la distribution radiale du champ sur les miroirs pour les modes de plus faibles pertes. Toutefois, il en résulte un temps de calcul très long.

Il existe aujourd'hui des méthodes matricielles très efficaces pour l'étude des modes transverses d'un résonateur diaphragmé : celle proposée par Stéphan et Trümper [Ste 83] en 1983, est applicable au laser à gaz à faible gain. Son avantage réside dans la facilité de reproduire les formes du champ et de sa phase en tout point intérieur ou extérieur à la cavité. Cette nouvelle approche fait appel à un opérateur, lequel traduit toutes les influences et modifications imposées aux modes dans la cavité. L'opérateur est représenté par une matrice, développée sur la base des fonctions de Laguerre-Gauss, dont les vecteurs propres représentent les nouveaux modes résonnants de la cavité diaphragmée. Cette méthode a permis de prévoir d'abord, dans une étude des propriétés du mode émergent de la cavité, l'aspect quasi-gaussien du champ observé expérimentalement [Kel 87] lorsqu'un diaphragme est positionné du côté opposé au miroir de sortie ; elle a ensuite expliqué [Wan 91b], les formes légèrement dissymétriques de l'intensité du champ radial, observées dans l'étude précédente.

Le laboratoire d'Electronique Quantique de la Faculté de physique de l'USTHB s'est intéressé à l'étude de ces effets de diffraction, dans une cavité plano-concave à un diaphragme [Bou 86], [Ait 88, 93a, 93b, 93c] et à deux diaphragmes [Ait 92], [Der 95], depuis une dizaine d'année. L'un des résultats nouveaux [Ait 92], a été de montrer que la divergence de l'émission peut être, dans le cas où le diaphragme est placé contre le miroir concave, réduite à une valeur inférieure à celle du faisceau gaussien non perturbé. D'autres résultats ont aussi largement contribué à la connaissance de l'influence de la diffraction résonnante sur les caractéristiques telles que la distribution spatiale du mode, sa fréquence de résonance et le volume occupé par ce dernier dans la cavité. Cependant, peu d'efforts ont été consentis à l'étude expérimentale de ce phénomène.

Le travail rapporté dans la présente thèse a été effectué dans le même laboratoire et constitue un prolongement des travaux cités ci-dessus. Il comporte deux parties :

- Une première partie théorique qui traite de la structure du champ diffracté résonnant dans une cavité plano-concave diaphragmée. Sur ce plan, nous avons choisi d'utiliser la méthode développée par Stephan, pour la facilité qu'elle offre dans la détermination du champ en n'importe quel point du laser.
- Une deuxième partie expérimentale qui concerne la mise en évidence des effets de diffraction associés à la propagation du mode fondamental gaussien dans une cavité plano-concave et leurs influences sur la distribution radiale du champ d'un laser CO₂, réalisé à cet effet. Les résultats obtenus permettent de juger de l'accord théorie-expérience.

Pour mener à bien ces deux études, nous avons adopté le plan de travail suivant :

Dans le premier chapitre, on s'intéresse aux modes propres d'une cavité stable du type plano-concave. Nous supposons que la dimension transverse des miroirs est

infinie et qu'ainsi, il n'y a pas de pertes par diffraction. Nous rappelons alors, pour le cas de la symétrie cylindrique les solutions de l'équation d'onde paraxiale de Kogelnik. Les modes de Laguerre-Gauss sont, à cet effet, introduits et les paramètres tels que la largeur, la divergence et le volume du mode fondamental gaussien sont définis et comparés à ceux des modes transverses d'ordres supérieurs. Pour ce dernier point, nous utilisons le concept de largeur effective des modes transverses, défini [Tan 85], comme étant le rayon d'un cercle à travers lequel circule la même énergie que dans un cercle de rayon w sur lequel serait incident un faisceau gaussien de même largeur w .

Le deuxième chapitre tient compte de la diffraction. Nous rappelons, dans une première étape, la méthode utilisée [Ste 83] pour l'étude du champ du mode fondamental diffracté par une ouverture circulaire et nous donnons et analysons, dans une seconde étape, les résultats numériques obtenus dans le cas particulier de la raie du CO₂ à 10,6 μm . Dans ce chapitre, la troncature occasionnée aux modes par le diaphragme implique l'introduction d'un paramètre y caractérisant l'ampleur des effets de diffraction. Ce paramètre permet d'établir une comparaison, à la même position, de la dimension du diaphragme à celle du mode fondamental gaussien non perturbé.

Dans le troisième et dernier chapitre, les principes de fonctionnement du laser moléculaire à CO₂ sont d'abord brièvement rappelés. Le dispositif expérimental réalisé pour l'étude des effets de diffraction sur la distribution radiale du champ dans un laser CO₂ de faible longueur de décharge est ensuite décrit de façon détaillée. Les résultats obtenus permettent enfin de juger de l'accord théorie-expérience et d'entrevoir quelques unes des perspectives à ce travail.

CHAPITRE 1 :
MODES PROPRES D'UNE CAVITE VIDE

INTRODUCTION :

La propagation libre des ondes électromagnétiques est souvent décrite de manière très simplifiée par les ondes planes. Ces ondes non limitées transversalement, sont caractérisées par une amplitude constante et des fronts d'onde plans. Ce sont les solutions les plus simples des équations de Maxwell. Contrairement aux ondes planes, les lasers délivrent des faisceaux dont le profil transverse en intensité est de forme gaussienne. La description de tels faisceaux en termes d'ondes planes est donc mal adaptée.

Historiquement, la première méthode d'étude des cavités lasers est due à Fox et Li [Fox 61]. Cette méthode d'analyse est basée sur la résolution d'une équation intégrale obtenue à partir du principe d'Huygens exprimé sous la forme intégrale de Fresnel-Kirchhoff. Les solutions obtenues, généralement numériques, permettent de connaître les modes propres de la cavité mais aussi leurs pertes par diffraction. L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle donne uniquement la distribution du champ sur les miroirs.

Dans notre cas, nous avons besoin de déterminer le champ en tout point de la cavité. Aussi est-il nécessaire d'utiliser une méthode beaucoup plus générale. La plus simple est celle qui utilise les solutions en faisceaux gaussiens des équations de Maxwell qui représentent des modes compatibles avec le résonateur. Ainsi, on part de la solution des équations de Maxwell, pour un milieu homogène, développées dans le cadre de l'approximation paraxiale (faisceaux faiblement inclinés), puis on insère en deux points, deux miroirs sphériques dont les rayons de courbure correspondent aux rayons de courbure des fronts d'onde des solutions en ces points. On est sûr ainsi, si la différence de phase entre les miroirs est un multiple de π d'avoir une onde stable qui se reproduit automatiquement entre les deux miroirs.

Dans ce chapitre, on s'intéressera à une cavité linéaire et stable formée de deux miroirs en regard. Nous supposerons que la dimension transverse des miroirs est infinie et qu'ainsi, il n'y a pas de pertes par diffraction. Cette cavité est conforme au modèle expérimental utilisé. Nous supposerons qu'elle renferme un milieu amplificateur à gaz du type faible gain pour lequel, les modes propres de la cavité active sont peu différents de ceux de la cavité vide [Fox 66], [Sta 65]. Il s'agit de trouver, dans ces conditions, les distributions du champ qui se reproduisent suite aux allers-retours des ondes présentes dans la cavité. Ces modes sont solutions de l'équation d'onde d'Helmholtz.

A. FAISCEAUX GAUSSIENS EN PROPAGATION LIBRE
1. EQUATION D'ONDE DANS L'APPROXIMATION PARAXIALE :

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

Le champ électrique, harmonique de pulsation ω , obéit à l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-2)$$

On cherchera comme solution à cette équation, une onde se propageant, essentiellement, suivant une direction z donnée. Dans la suite, nous appellerons plan transverse le plan (x, y) perpendiculaire à la direction de propagation z , et nous supposerons que le champ est polarisé dans une direction arbitraire du plan transverse :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \cdot \vec{n} \quad (1-3)$$

$E(x, y, z)$ est le champ scalaire associé à \vec{E} . L'équation d'onde (1-2) peut alors se mettre sous la forme d'une équation scalaire :

$$\begin{cases} \Delta E + k^2 E = 0 \\ k = \frac{\omega}{c}, \text{ est le nombre d'onde} \end{cases} \quad (1-4)$$

La solution la plus simple de (1-4) est le champ :

$$E(x, y, z) = \xi e^{ikz}, \quad (1-5)$$

correspondant à une onde plane d'amplitude constante ξ se propageant dans la direction z . Cette solution ne constitue pas une description réaliste des caractéristiques d'un faisceau laser. Aussi, nous nous proposons d'établir, en suivant la méthode usuelle [Kog 66], à quelle condition une généralisation de (1-5) sous la forme ci-dessous est aussi solution de (1-4) :

$$E(x, y, z) = \zeta(x, y, z) e^{ikz} \quad (1-6)$$

De manière à tenir compte de la structure confinée, caractéristique des faisceaux laser, la fonction ξ dépend maintenant, à la différence de l'onde plane, des coordonnées transverses (x, y) et de la coordonnée longitudinale z .

L'approximation paraxiale [Bor 59], suppose que la variation de l'enveloppe $\xi(x, y, z)$ en fonction de z est beaucoup plus faible devant sa variation transversale. Cette hypothèse se traduit par les inégalités :

$$\left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right| \quad (1-7)$$

Reportant (1-6) dans (1-4) et tenant compte de (1-7), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (1-8)$$

Cette équation, appelée communément équation d'onde paraxiale de Kogelnik, est à la base de la théorie des faisceaux gaussiens.

2. SOLUTION : LES FAISCEAUX GAUSSIENS

L'équation d'onde paraxiale admet comme solution des ondes dont le profil d'intensité est de forme gaussienne ou encore modes gaussiens. Dans un premier temps, nous allons donner la solution la plus simple présentant la symétrie cylindrique. Ce type de solution, notée simplement TEM_{00} , est connu sous le nom de mode fondamental. Les autres solutions de (1-8) sont appelées modes d'ordre supérieur TEM_{mn} et sont développées dans les deux sections suivantes.

2.1. Mode fondamental :

Notant par $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ la coordonnée radiale dans le plan transverse, l'équation d'onde paraxiale s'écrit pour un champ à symétrie cylindrique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + 2ik \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (1-9)$$

De manière à modéliser correctement la structure d'un faisceau laser, considérons la fonction d'essai suivante :

$$\xi(r, z) = A(z) \exp \left[i \frac{kr^2}{2Q(z)} \right] \quad (1-10)$$

de structure transverse gaussienne. $A(z)$ et $Q(z)$ sont deux fonctions complexes. $Q(z)$ est appelée par analogie avec les ondes sphériques, rayon de courbure complexe

du faisceau, et $A(z)$ décrit l'amplitude et la phase du champ suivant z . Le calcul des fonctions $A(z)$ et $Q(z)$ est explicité dans l'annexe A. Nous aboutissons alors, à l'expression suivante du champ électrique :

$$E(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w(z)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \cdot \exp[i\Phi(r, z)] \quad (1-11)$$

Où, $\Phi(r, z)$ est la phase totale du champ :

$$\Phi(r, z) = kz - \phi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (1-12)$$

Le caractère gaussien du profil est exprimé par le terme $\exp(-r^2/w^2(z))$. Pour z fixé, l'amplitude du champ diminue d'un facteur $1/e$ à une distance $r = w(z)$ de l'axe. Le rayon $w(z)$ est une mesure de l'extension radiale du faisceau, et $R(z)$ est le rayon de courbure du front d'onde qui coupe l'axe en z . Le faisceau s'élargit en se propageant. Il possède donc une largeur minimum, notée w_0 , en un endroit appelé "beam-waist" ou "point focal", où le front d'onde est plan. Si l'origine z , est confondue avec la position du point focal, alors les lois d'évolution du faisceau gaussien sont simples :

$$w(z) = w_0 \cdot \sqrt{1 + (z/z_R)^2} = w_0 \cdot \sqrt{1 + (\lambda z/\pi w_0^2)^2} \quad (1-13)$$

$$R(z) = z \cdot (1 + (z_R/z)^2) = z \cdot (1 + (\pi w_0^2/\lambda z)^2) \quad (1-14)$$

Où, $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ est une distance caractéristique du faisceau gaussien appelée longueur de Rayleigh.

Par rapport à l'onde plane, la phase donnée par l'expression (1-12) comporte deux contributions supplémentaires : l'une radiale donne au front d'onde sa forme sphérique, l'autre longitudinale est la phase de Gouy [Sie 86] et s'écrit :

$$\phi(z) = \arctan(z/z_R) \quad (1-15)$$

Cet angle est rarement pris en compte quand on étudie la propagation ; cependant, il devient très important dans le cas des cavités résonnantes puisque il va être à l'origine de la différence de fréquence entre les modes transverses.

Le facteur d'amplitude $1/w(z)$ joue un rôle fondamental : c'est lui qui assure la conservation de l'énergie du faisceau lors de la propagation. En effet, au fur et à mesure de son expansion latérale, le faisceau voit son intensité sur l'axe diminuer. Par ailleurs, cette expansion peut être décrite à l'aide du paramètre θ_{div} , ou divergence du faisceau qui s'écrit :

$$\theta_{div} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (1-16)$$

2.2. Modes d'Hermite-Gauss :

L'équation (1-8) admet d'autres solutions que le mode fondamental décrit ci-dessus. Sans entrer dans des développements mathématiques lourds, nous pouvons voir dans l'Annexe B, que la fonction d'essai (1-10) peut être généralisée par :

$$\xi(x, y, z) = C \cdot A_x(z) \cdot A_y(z) \cdot g\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \cdot h\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \cdot \exp\left[i\frac{kr^2}{2Q(z)}\right] \quad (1-17)$$

Les fonctions g et h dépendent des coordonnées transverses x et y normalisées par rapport au rayon w(z). En reportant cette expression dans (1-8), on montre que la fonction g obéit à une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2g}{dx^2} - 2x \cdot \frac{dg}{dx} + 2mg = 0 \quad (1-18)$$

Où, m est un entier positif quelconque. Le même type d'équation est obtenu pour h. Les solutions de (1-18) sont les polynômes d'Hermite H_m . Le champ (1-17) normalisé s'écrira (voir Annexe B) :

$$E_{mn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi 2^{(m+n)} m! n!}} \cdot \frac{1}{w(z)} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp(i\Phi_{mn}(r, z)) \quad (1-19)$$

Où, $\Phi_{mn}(r, z)$ est la phase totale du champ :

$$\Phi_{mn}(r, z) = kz - (m + n + 1) \cdot \phi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (1-20)$$

Ici m et n sont les indices des polynômes d'Hermite relatifs aux directions transverses respectives x et y. les solutions (1-19) s'expriment comme le produit d'une gaussienne par des polynômes d'Hermite, d'où leur nom de modes d'Hermite-Gauss. On les appelle modes TEM_{mn} (mode « Transverse Electro Magnétique »). Notons que les fonctions w(z), R(z) et $\phi(z)$ sont les mêmes que celles du mode fondamental et sont donc des caractéristiques générales des modes gaussiens. On remarquera aussi que la courbure du front d'onde est indépendante de l'ordre, c'est-à-dire des indices du mode. La phase (1-20), généralisant l'expression (1-12), dépend quant à elle des indices m et n du mode.

La forme explicite des polynômes d'Hermite d'ordre le plus bas est :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \end{aligned} \quad (1-21a)$$

Les autres polynômes se déduisent aisément grâce à la récurrence :

$$H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x) \quad (1-21b)$$

Le mode d'ordre le plus bas E_{00} (ou TEM_{00}) correspond au mode fondamental étudié précédemment. La figure (1-1) montre quelques structures transverses plus complexes qui correspondent à des profils de modes d'ordre plus élevé.

Le polynôme d'Hermite d'ordre n possède n zéros. L'intensité du mode $I_{mn} = |E_{mn}|^2$ présente, dans le plan transverse, une structure formée respectivement de $(m+1)$ et $(n+1)$ maxima dans les directions x et y .

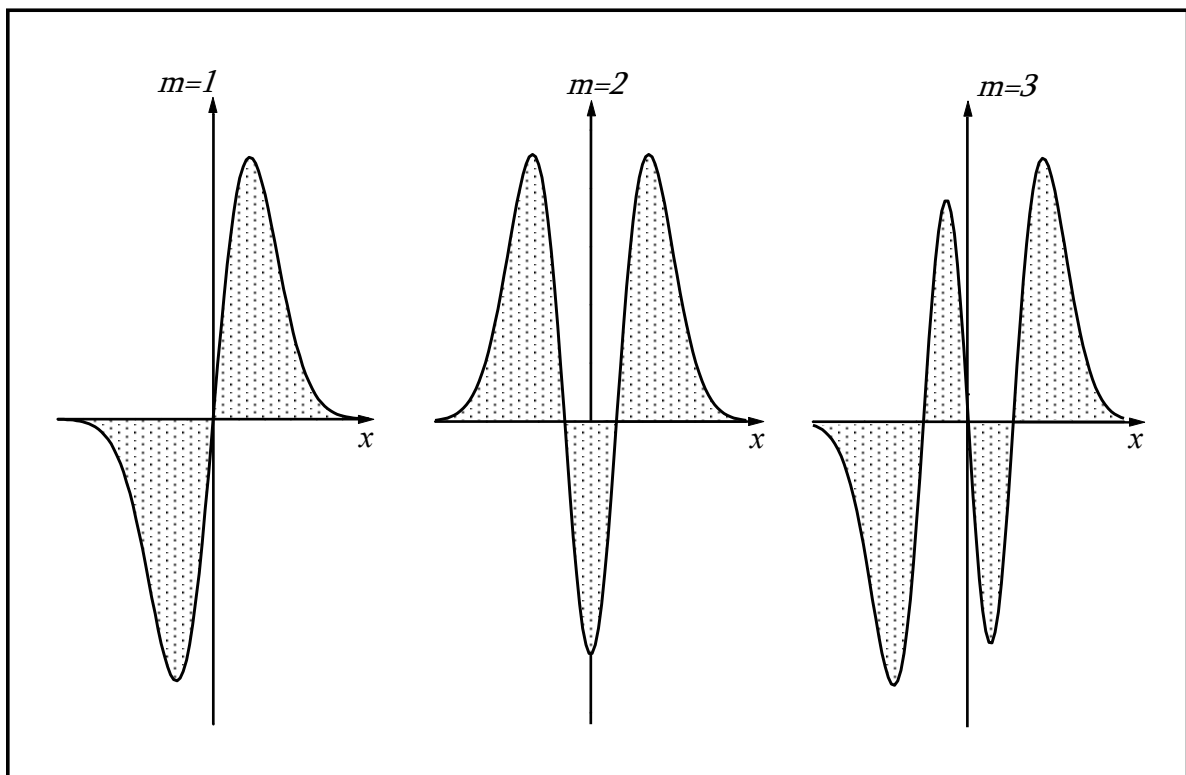


Figure. (1-1) : *Représentation du Profil des modes d'Hermite*

$$E_{m,n=0}(x, y=0, z=0) \text{ pour } m=1, 2, 3.$$

2.3. Modes de Laguerre-Gauss :

Dans la plupart des conditions expérimentales, l'utilisation des coordonnées cylindriques s'avère plus pratique. L'équation d'onde paraxiale de Kogelnik transcrite dans le système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + 2ik \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (1-22)$$

Cette équation est analogue à l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques. Elle admet comme solution générale [Ang 82], une combinaison linéaire de solutions particulières affectées de coefficients bien déterminés :

$$\xi(r, \varphi, z) = \sum_{\ell} C_{\ell} \cdot G_{\ell}(r, z) \cdot e^{i\ell\varphi} \quad (1-23)$$

Les C_{ℓ} sont des constantes et les fonctions G_{ℓ} satisfont à l'équation différentielle :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell^2}{r^2} + 2ik \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right] G_{\ell} = 0 \quad (1-24)$$

Les solutions de cette équation sont dénombrées à l'aide de l'entier $\ell = 0, 1, 2, \dots$

La résolution d'une telle équation n'est pas chose facile. Cependant, si l'on impose aux fonctions G_{ℓ} , orthonormées, la forme suivante (voir [Annexe C](#)) :

$$G_{\ell p}(r, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+\ell)!}} \cdot \frac{1}{w(z)} \cdot (x)^{\frac{\ell}{2}} \cdot L_p(x) \cdot \exp(-x/2) \times \exp \left\{ i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p + \ell + 1)\phi(z) \right] \right\} \quad (1-25)$$

où, x est une variable réduite dépendant de z :

$$x = \frac{2r^2}{w^2(z)},$$

alors la résolution de l'équation (1-24) se ramène à la résolution de l'équation bien connue [Arf 73], de Laguerre associée (voir [Annexe C](#)) :

$$x \frac{\partial^2 L_p^{\ell}(x)}{\partial x^2} + (\ell + 1 - x) \frac{\partial L_p^{\ell}}{\partial x} + p L_p^{\ell}(x) = 0, \quad (1-26)$$

dont les solutions, dénombrées par les entiers p et ℓ , sont les polynômes de Laguerre généralisés :

$$L_p^\ell(x) = \frac{x^{-\ell}}{p!} \cdot \exp(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^p} [(x)^{p+\ell} \cdot \exp(-x)] \quad (1-27)$$

Les premiers polynômes ont pour expression :

$$L_0^\ell(x) = 1$$

$$L_1^\ell(x) = \ell + 1 - x$$

$$L_2^\ell(x) = \frac{1}{2}(\ell + 1)(\ell + 2) - (\ell + 2)x - \frac{1}{2}x^2$$

Ici p ($p=0, 1, \dots$) est l'indice radial et ℓ ($\ell = 0, 1, \dots$) l'indice angulaire. Les grandeurs w_0 , z_R , $w(z)$ et $R(z)$ caractérisant les solutions sont strictement identiques à celles du mode fondamental gaussien.

Le champ $E_{\ell p}$ associé à un mode (ℓ, p) résonnant dans la cavité laser s'écrit :

$$E_{\ell p}(r, \varphi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+\ell)!}} \cdot \frac{1}{w(z)} \cdot (x)^{\frac{\ell}{2}} \cdot L_p^\ell(x) \cdot \exp(i\ell\varphi) \times \exp\left\{-\frac{r^2}{w^2(z)} + i\Phi_{\ell p}(r, z)\right\} \quad (1-28)$$

La phase du champ $\Phi_{\ell p}(r, z)$ est alors donnée par :

$$\Phi_{\ell p}(r, z) = kz - (2p + \ell + 1)\phi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (1-29)$$

Pour $\ell=0$, les solutions E_{0p} ont la symétrie cylindrique et l'intensité $|E_{0p}|^2$ possède une structure transverse formée de p anneaux entourant une tache centrale. Lorsque $\ell \neq 0$, la section transverse est formée de $(p+\ell)$ anneaux (sans tache centrale) sur chacun desquels sont distribués 2ℓ maxima en intensité.

L'ensemble des modes de Laguerre-Gauss forme, comme celui des modes d'Hermite-Gauss, une base complète et permet de développer n'importe quel champ électrique en propagation libre. Cependant, le choix de la base est souvent suggéré par les symétries du champ considéré. Pour un champ à symétrie cylindrique, on choisit plus naturellement la base de Laguerre-Gauss. Dans une cavité laser présentant un léger astigmatisme ou un léger désalignement, la symétrie cylindrique est brisée et le champ a une structure plus proche de celle des modes d'Hermite-Gauss. La base des modes rectangulaires est alors la mieux adaptée.

B. LES CAVITES RESONNANTES

1. MODES PROPRES DE LA CAVITE :

Dans les lasers, on utilise souvent des miroirs sphériques pour réaliser le résonateur. Les raisons sont essentiellement les suivantes :

- Si le nombre total de modes dans une cavité fermée peut être très élevé aux fréquences optiques, l'utilisation de résonateurs sphériques limitera le nombre de modes confinés dans le résonateur, encore plus qu'un résonateur plan du type Fabry-Pérot.
- Puisque les modes possibles ont leur énergie localisée près de l'axe du résonateur, les pertes par diffraction seront limitées, donnant lieu à des émissions plus cohérentes.

Les faisceaux gaussiens, étudiés au début du chapitre, sont d'un intérêt essentiel pour la description du champ électromagnétique dans une cavité laser. Nous avons vu notamment que ces faisceaux ont des fronts d'onde de forme sphérique quand ils se propagent. A la réflexion sur un miroir sphérique, un faisceau gaussien se réfléchit exactement sur lui-même à partir du moment où les rayons de courbure du miroir et du front d'onde sont confondus au niveau de chacun des deux miroirs. Si ces deux conditions sont vérifiées, on obtient une structure de champ invariante. On peut alors définir ce qu'on appelle les modes propres du champ dans une cavité. Cette propriété d'auto-reproduction est illustrée par la figure (1-2). D'autre part, toute onde dont le front d'onde n'a pas cette propriété de s'adapter aux deux miroirs sphériques subira, inévitablement, après un certain nombre d'aller-retour, un grandissement et se retrouvera à l'extérieur du résonateur.

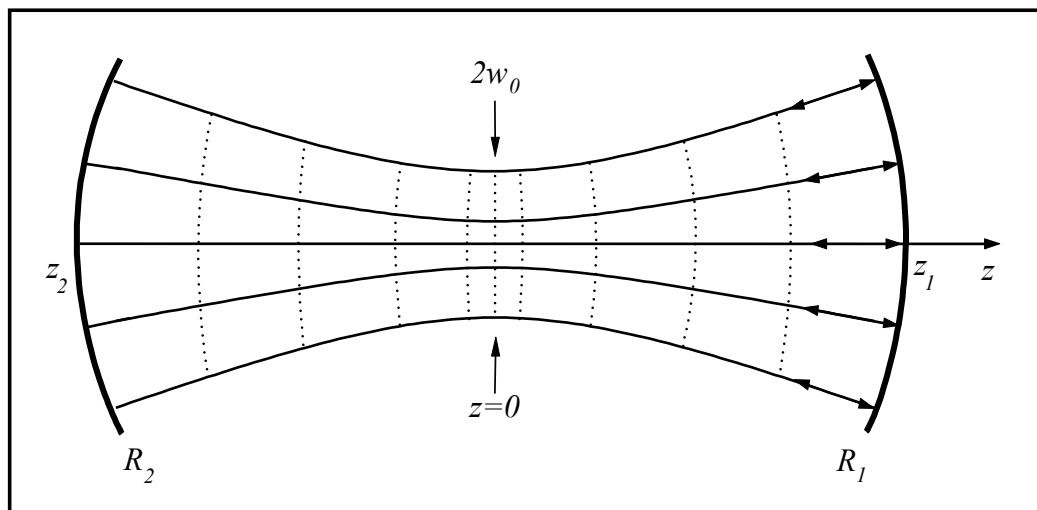


Figure. (1-2) : Illustration de l'auto-reproduction du faisceau lors de la réflexion sur les miroirs de la cavité. Chaque « rayon » (représenté par la double flèche) est en incidence normale sur les miroirs et est réfléchi sur lui-même.

Le rayon de courbure $R(z)$ du front d'onde d'un faisceau de rayon w_0 est donné par l'expression (1-14). Il prend la valeur R_1 sur le miroir situé en z_1 :

$$R(z_1) = \frac{(z_1^2 + z_R^2)}{z_1} = R_1 \quad (1-30)$$

De la même manière, sur l'autre miroir de rayon de courbure R_2 situé en z_2 on a :

$$R(z_2) = \frac{(z_2^2 + z_R^2)}{z_2} = R_2 \quad (1-31)$$

1.1. Caractéristiques des modes propres de la cavité :

Les expressions (1-30) et (1-31) sont des conditions aux limites qui imposent des contraintes à la structure du faisceau. Nous savons que les faisceaux gaussiens sont définis en fonction du paramètre w_0 et par rapport à une origine $z=0$ fixée dans le plan focal du faisceau. Compte tenu des contraintes imposées par la cavité, quelle est alors la largeur minimale w_0 du faisceau et quelle est la position du plan focal par rapport aux miroirs ?

La réponse à ces questions est contenue dans les expressions (1-30) et (1-31) :

$$z_1 R_1 = z_1^2 + z_R^2 \quad (1-32a)$$

$$z_2 R_2 = z_2^2 + z_R^2 \quad (1-32b)$$

Où z_1 et z_2 sont les positions des miroirs sur l'axe z vérifiant :

$$d = z_1 - z_2 \quad (1-33)$$

Par soustraction membre à membre des équations (1-32), on arrive à :

$$z_1 = \frac{d(d + R_2)}{2d + R_2 - R_1} \quad (1-34a)$$

$$z_2 = \frac{d(R_1 - d)}{2d + R_2 - R_1} \quad (1-34b)$$

$$z_R = \sqrt{\frac{d(R_2 + d)(R_1 - d)(d + R_2 - R_1)}{(2d + R_2 - R_1)^2}} \quad (1-35)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \left[\frac{d(R_2 + d)(R_1 - d)(d + R_2 - R_1)}{(2d + R_2 - R_1)^2} \right]^{1/4} \quad (1-36)$$

Le rayon du faisceau sur les miroirs est obtenu à partir de l'expression (1-13) :

$$w(z = z_{1,2}) = w_0 \cdot \left(\frac{z_{1,2}^2 + z_R^2}{z_R^2} \right)^{1/2} \quad (1-37)$$

Ainsi, tous les paramètres géométriques du faisceau gaussien dépendent des grandeurs d , R_1 et R_2 de la cavité. Les définitions de la position du plan focal par rapport aux miroirs ainsi que du rayon w_0 permettent de caractériser, de manière unique, les modes propres de la cavité. Ceux-ci sont donnés par les modes d'Hermite-Gauss ou de Laguerre-Gauss.

1.2. Condition de résonance :

La cavité optique sélectionne un ensemble de longueurs d'onde ou de fréquences appelées fréquences propres de résonance. Ces fréquences sont obtenues à partir de la condition d'autoreproduction des modes. En effet, ces derniers subissent un déphasage multiple de π après traversée du résonateur : les ondes aller et retour interfèrent de manière constructive dans la cavité et présentent alors une amplitude maximale.

Dans une cavité stable, le faisceau est donné par les modes de Laguerre-Gauss $E_{\ell p}(r, \varphi, z)$ (ou d'Hermite-Gauss $E_{mn}(x, y, z)$). La condition de résonance prise sur l'axe z ($r=0$) se traduit par :

$$\Phi_{\ell p}(r=0, z_1) - \Phi_{\ell p}(r=0, z_2) = q\pi \quad (1-38)$$

Où q est un entier quelconque et z_1 et z_2 les positions des miroirs. En reportant (1-29) dans (1-38), on constate que le vecteur d'onde $k=\omega/c$ prend les valeurs quantifiées vérifiant l'équation :

$$kd = (2p + \ell + 1) \cdot \left(\arctg \frac{z_1}{z_R} - \arctg \frac{z_2}{z_R} \right) + q\pi \quad (1-39)$$

k dépend des entiers q , p et ℓ :

$$k_{\ell pq} = \frac{2\pi \nu_{\ell pq}}{c}$$

L'expression (1-39), combinée avec les expressions (1-34) et (1-35), peut se mettre, en introduisant les paramètres géométriques g_1 et g_2 de la cavité définis par :

$$g_1 = 1 - d/R_1$$

$$g_2 = 1 - d/R_2$$

sous la forme :

$$v_{\ell pq} = q \Delta v_L + (2p + \ell + 1) \cdot \Delta v_T \quad (1-40)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta v_L = \frac{c}{2d} & (1-41a) \\ \Delta v_T = \frac{1}{\pi} \cdot \Delta v_L \cdot \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}) & (1-41b) \end{cases}$$

Où le signe (+) dans l'argument de la fonction « arccos » correspond à $g_1, g_2 > 0$ et le signe (-) au cas $g_1, g_2 < 0$. Les paramètres Δv_L et Δv_T représentent respectivement l'intervalle spectral libre et l'intervalle transverse en fréquence séparant deux modes transverses successifs.

1.3. Application à l'étude d'une cavité plano-concave :

1.3.1. Modes de résonance :

Nous considérons la cavité plan-concave représentée sur la figure (1-3). La position du miroir plan définit l'origine de l'axe z . Le miroir concave, de rayon de courbure R , est placé en $z = d$. Les paramètres r et z sont les coordonnées transversale et longitudinale respectivement.

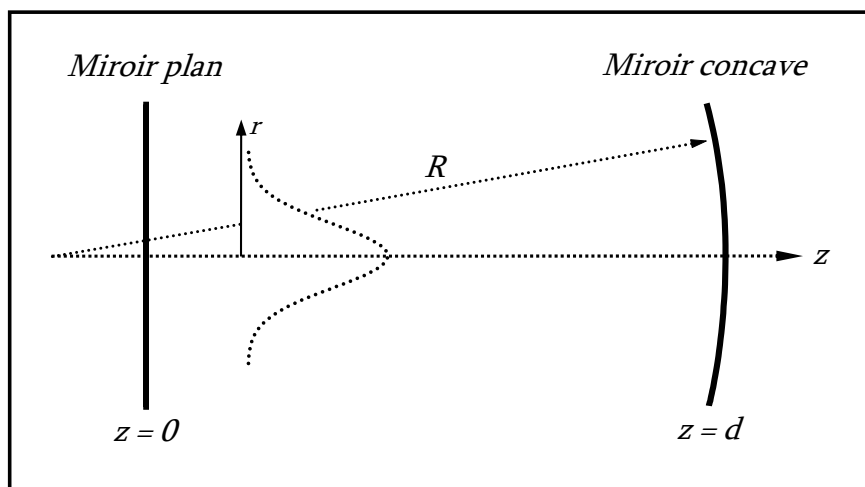


Figure. (1-3) : Cavité plano-concave stable

Les conditions expérimentales généralement rencontrées, rendent compte d'un faisceau à symétrie axiale, ce qui revient à poser $\ell=0$ dans les solutions (1-28) : précédemment établies :

$$E_p(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w(z)} \cdot L_p(x) \cdot \exp(-x/2) \times \exp \left\{ i \left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - (2p+1)\phi(z) \right] \right\} \quad (1-42)$$

w_0 et z_R peuvent être exprimés dans la cavité en fonction des paramètres R et d :

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{d(R-d)} \quad (1-43a)$$

$$z_R = \sqrt{d(R-d)} \quad (1-43b)$$

Les modes de Laguerre-Gauss forment un ensemble orthogonal et complet et par conséquent, ils peuvent servir de base de développement pour un faisceau :

$$f(r, z) = \sum_p C_p(z) \cdot G_p(r, z) \quad (1-44)$$

L'inversion de cette relation permet d'obtenir les coefficients $C_p(z)$ du développement. Compte tenu de l'orthogonalité des fonctions G , on obtient :

$$C_p(z) = 2\pi \int_0^\infty f(r, z) \cdot G_p^*(r, z) \cdot r \, dr \quad (1-45)$$

On montre [Ste 83], que dans le cas où la fonction d'onde $f(r, z)$ satisfait à l'équation d'onde paraxiale, alors les coefficients C_p sont indépendants de la coordonnée z . C'est le cas pour le champ résonnant dans une cavité laser. Par conséquent, l'utilisation de cette base pour reproduire les formes du champ en tout point intérieur où extérieur à la cavité se révèle très intéressante.

1.3.2. Largeur effective des modes :

La figure (1-4) montre quelques distributions transverses de l'intensité des modes $G_p(r, z)$ dans un même plan z : les modes transverses ($p \geq 1$) sont plus étalés transversalement que le faisceau gaussien. Il est donc nécessaire de les caractériser par des largeurs différentes.

Pour déterminer ces largeurs, nous utilisons une définition [Tan 85], différente de celle habituellement utilisée [Fre 69] pour le faisceau gaussien. Cette définition peut s'appliquer à une distribution quelconque vu qu'elle aborde le même problème non pas en terme d'intensité, mais en terme d'énergie contenue dans le faisceau.

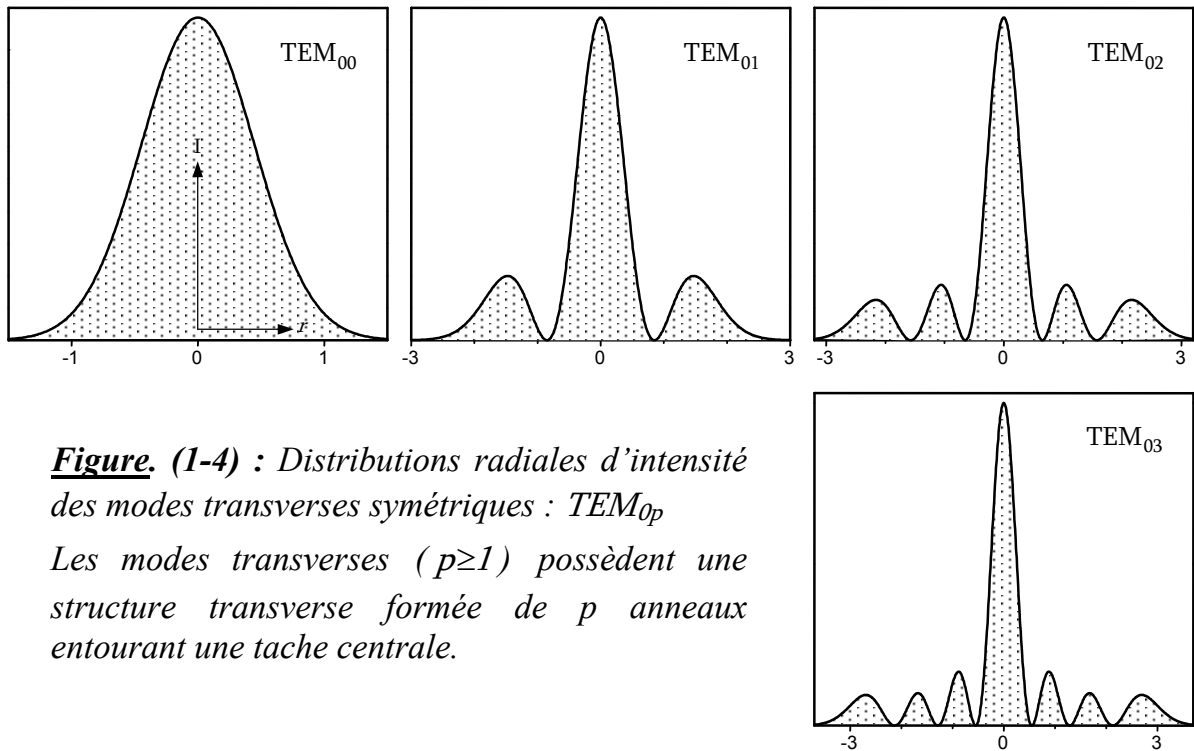


Figure. (1-4) : Distributions radiales d'intensité des modes transverses symétriques : TEM_{0p}
 Les modes transverses ($p \geq 1$) possèdent une structure transverse formée de p anneaux entourant une tache centrale.

Définition [Tan 85] :

La largeur d'un faisceau quelconque peut être définie comme le rayon d'un cercle à travers lequel circule la même énergie que dans un cercle de rayon w , sur lequel serait incident un faisceau gaussien de largeur w .

Le rapport k entre l'énergie traversant un cercle de rayon r et l'énergie totale contenue dans un faisceau gaussien de rayon w s'exprime par :

$$k = 1 - \exp(-r^2/w^2) \quad (1-46)$$

Pour un cercle de rayon w , ce rapport vaut $k = 0,632$. Ainsi nous disons que le champ étendu sur le diamètre effectif possède 63,2 % de l'énergie totale :

$$\int_0^w |E(r,z)| \cdot r dr = 0,632 \cdot \int_0^\infty |E(r,z)| \cdot r dr \quad (1-47)$$

Les courbes que nous présentons sur la figure (1-5a) décrivent les variations de la largeur effective des modes en fonction de la distance normalisée dans la cavité. Elles ont été obtenues par application de la méthode précédente aux 6 premiers modes transverses à symétrie cylindrique d'une cavité plano-concave stable ($\lambda = 10,6 \mu\text{m}$). Sur la même figure, est également représentée l'expansion du mode fondamental afin de faciliter la comparaison. On voit que :

- Les modes transverses TEM_{0p} ($p \geq 1$) ont une extension radiale qui va en augmentant avec l'indice p .

- Les modes transverses ($p \geq 1$) correspondent à des faisceaux de divergence plus grande que le mode fondamental.
- L'expansion des modes TEM_{0p} , est régie par la même loi hyperbolique que celle du mode fondamental TEM_{00} .
- Le rapport entre la largeur d'un mode supérieur quelconque TEM_{0p} , et celle du mode fondamental TEM_{00} demeure constant en tout plan de propagation.

Par conséquent, la largeur associée à un mode transverse supérieur TEM_{0p} , peut être liée à celle du mode TEM_{00} par la relation :

$$w_{0p}(z) = C_{0p} \cdot w_{00}(z) \quad (1-48)$$

Où, C_{0p} est un coefficient, indépendant de z , propre au mode d'ordre p . Sa variation avec l'indice p est représentée sur la figure (1-5b). Le polynôme suivant permet ensuite de déduire les valeurs numériques de C_{0p} :

$$C_{0p} = \sqrt{(1 + 1,8p)} \quad (1-49)$$

Ce résultat est quelque peu différent de celui qu'on trouve dans la littérature [Car 80], [Phi 83], qui associe à la largeur d'un mode symétrique d'ordre p , la valeur : $\sqrt{(1+2p)} w_{00}(z)$.

1.3.3. Divergence en champ lointain :

La relation (1-48) nous permet maintenant de déterminer la divergence associée à un mode transverse à symétrie cylindrique quelconque :

$$\theta_{0p} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_{0p}(z)}{z} = C_{0p} \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w_{00}(z)}{z} = C_{00} \cdot \theta_{00} \quad (1-50)$$

Où, θ_{00} représente la divergence du mode TEM_{00} .

1.3.4. Volume effectif des modes :

La puissance d'émission d'un laser est liée au volume qu'occupe le mode résonnant dans la cavité. Si le faisceau gaussien offre la plus faible divergence, il réduit cependant la puissance de sortie (figure (1-6)) :

$$V_{0p} = \pi \int_0^d w_{0p}^2(z) \cdot dz = C_{0p}^2 \cdot \left[\pi \int_0^d w_{00}^2(z) \cdot dz \right] = C_{0p}^2 \cdot V_{00} \quad (1-51)$$

Où, V_{00} représente le volume associé au mode TEM_{00} .

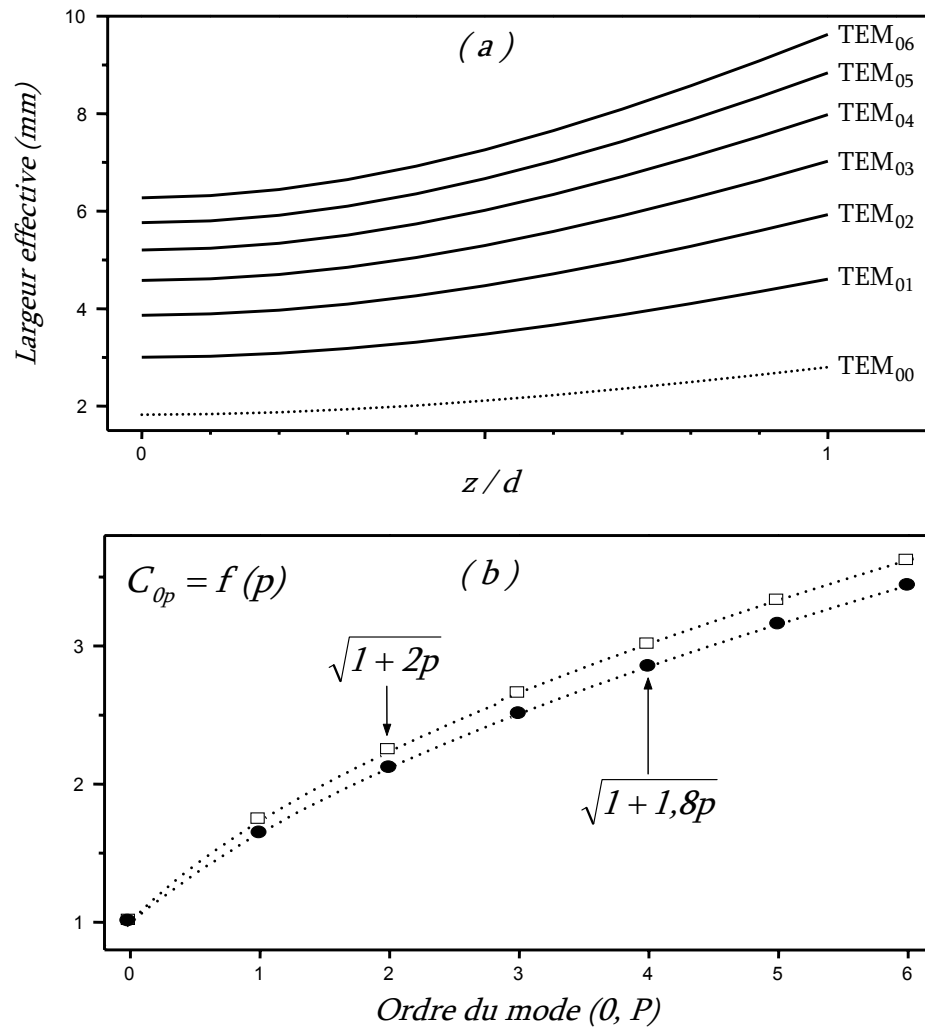


Figure. (1-5) : (a) évolution des largeurs effectives des modes
(b) variation de C_{0p} en fonction de l'indice p du mode

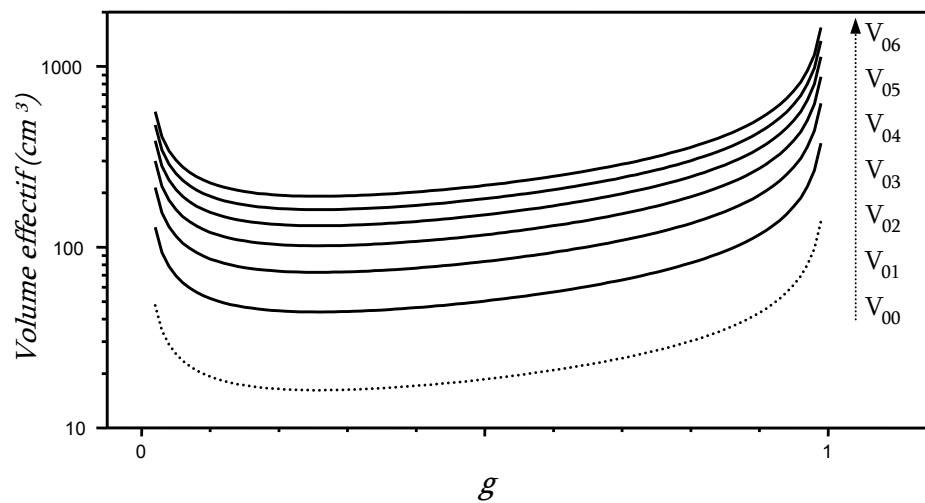


Figure. (1-6) : Volume effectif des modes

2. PERTES DANS UNE CAVITE :

2.1. Pertes par absorption, diffusion et transmission :

Les miroirs de la cavité engendrent des pertes soit par transmission, soit par absorption ou encore par diffusion. Des coefficients de réflexion R et de transmission T , tels que $R+T=0,999$, sont couramment réalisés pour des miroirs à couches diélectriques. Les pertes par absorption sur les miroirs sont généralement négligeables. La diffusion est engendrée par des défauts de planéité des miroirs de la cavité laser. Ceux-ci ont des planéités de l'ordre de $\lambda/10$ où $\lambda/20$. Pour les meilleurs interféromètres, on peut aller jusqu'à $\lambda/200$.

Les éléments optiques ainsi que le milieu actif placés dans une cavité laser sont également générateurs de pertes. On peut citer comme exemple les pertes par diffusion liées aux variations d'indice des fenêtres d'étanchéité des lasers à gaz. Des pertes par absorption dans le milieu actif sont également présentes mais généralement négligeables.

Les pertes dues à la transparence d'un des miroirs sont, par opposition aux autres types de perte, qualifiées de pertes utiles. Elles permettent en effet de faire sortir une partie du rayonnement vers l'extérieur de la cavité et qui constitue le signal laser.

2.2. Pertes par diffraction :

Le rayonnement laser est un faisceau dont la structure, non limitée transversalement, présente un profil gaussien. Les miroirs de la cavité sont d'ouverture finie et ne peuvent pas réfléchir en totalité le rayonnement laser (voir figure (1-7)). Les pertes d'énergie qui en résultent sont appelées pertes par diffraction. On peut aussi noter que des éléments d'ouverture finie tels qu'un diaphragme ou une lentille placés à l'intérieur de la cavité engendrent des pertes du même type.

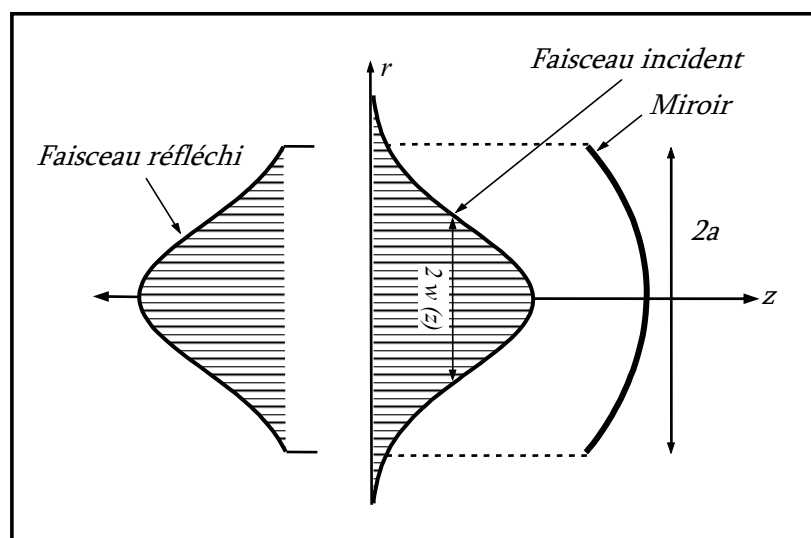


Figure. (1-7) : Troncature du faisceau lors de la réflexion sur un miroir

Les pertes par diffraction sont d'autant plus élevées que la dimension transverse du faisceau est grande. Notons par w le rayon du faisceau sur un des miroirs et par a le rayon d'ouverture du miroir. On peut voir que pour le mode fondamental TEM_{00} la fraction d'énergie

$$\frac{\Delta I}{I} = \exp(-2a^2/w^2) \quad (1-52)$$

est perdue après chaque réflexion. Les modes transverses $TEM_{\ell p}$ d'ordre plus élevé ont une extension spatiale qui va en augmentant avec les indices p et ℓ . Les pertes par diffraction seront plus importantes pour les modes d'ordre élevé.

Un diaphragme intra-cavité, de rayon a , va également donner lieu à des pertes du type (1-52).

On peut caractériser la diffraction par le paramètre

$$y = \frac{a}{w}, \quad (1-53)$$

appelé paramètre de troncature. C'est une comparaison de la dimension du miroir (ou du diaphragme) à celle du mode. Pour y grand, les pertes par diffraction sont faibles et tous les modes géométriques peuvent être présents. Une cavité caractérisée par une forte troncature sera sélective puisque les modes d'ordre élevé subiront d'importantes pertes par diffraction.

Conclusion :

Ce chapitre nous a permis de rappeler les solutions de l'équation de propagation du champ dans une cavité vide non diaphragmée. Les modes d'Hermite-Gauss et de Laguerre-Gauss ont été introduits et les paramètres du faisceau gaussien ont été déterminés. Le résonateur laser est un dispositif multimodes. Ses modes supérieurs ont une dimension transverse de plus en plus importante. Afin de diminuer le nombre de modes, on limite cette dimension en insérant à l'intérieur du résonateur, un diaphragme qui entraîne des pertes pour les modes d'indice élevé. Cela empêche ainsi ces derniers d'atteindre le seuil d'oscillation du laser. Cependant, le diaphragme perturbe aussi le mode fondamental gaussien et c'est pour cette raison que nous poursuivrons l'analyse des cavités au chapitre suivant, en tenant compte de la diffraction.

CHAPITRE 2 :
MODES PROPRES D'UNE CAVITE DIAPHRAGME

INTRODUCTION :

La cavité optique d'un oscillateur laser est caractérisée par une série de modes transverses associés à des fréquences de résonance bien définies. La sélection du mode fondamental est nécessaire pour assurer un fonctionnement monofréquence du laser. D'autres raisons justifient la recherche de l'oscillation laser sur le mode TEM_{00} :

- Dans des applications où l'on envisage de matérialiser une direction dans l'espace, aligner des éléments ou transmettre de l'énergie à distance, on désire, en général, un faisceau le moins divergent possible. Dans ce cas, seul le faisceau gaussien conduit à la plus petite divergence.
- C'est le mode qui conduit après focalisation à la plus petite tâche focale. Cette propriété est essentielle dans les applications telles que le découpage et l'usinage où une grande densité de puissance est recherchée.

Dans les résonateurs stables, les pertes par diffraction sont faibles et ne peuvent servir de base pour séparer les modes. En pratique, un diaphragme d'ouverture convenablement choisie placé contre l'un des miroirs est utilisé comme filtre de modes pour limiter l'oscillation du laser à celle du mode fondamental exclusivement. L'utilisation d'un diaphragme favorise la sélection du mode fondamental mais donne lieu à une diffraction dans le faisceau. Les pertes d'énergie qui en résultent, perturbent aussi le mode fondamental et modifient ses paramètres : distribution spatiale, fréquence de résonance, divergence en champ lointain, volume du mode...

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la distribution spatiale du mode fondamental dans une cavité diaphragmée. Dans la première partie, nous rappelons la méthode utilisée pour le calcul du champ résonnant dans une cavité laser diaphragmée [Ste 83]. Cette méthode de calcul est applicable aux lasers à gaz à faible gain et repose sur le fait que le milieu amplificateur perturbe faiblement les modes d'une cavité passive. Les modes résonnants perturbés par la diffraction seront développés sur la base des modes propres de la cavité non diaphragmée. Cette approche, diffère de la méthode traditionnelle de Fox et Li et de toutes celles qui en découlent, en ce sens que l'intégrale de Fresnel-Kirchhoff est remplacée par une matrice, associée à un opérateur, développée sur la base des fonctions de Laguerre-Gauss. Toute influence ou modification imposée aux modes dans la cavité, se ramène à l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres associés, de l'opérateur en question. L'opérateur est représenté par une matrice symétrique dont les vecteurs propres représentent les nouveaux modes propres de la cavité diaphragmée. Dans la seconde partie, l'algorithme de la puissance itérée, fort adapté au calcul de la plus grande valeur propre associée à l'opérateur précédent, sera présenté et utilisé pour déterminer le champ propre et la valeur propre correspondant au mode fondamental TEM_{00} . Nous donnons, dans une dernière partie, les résultats numériques obtenus dans le cas particulier de la raie du CO_2 à $10,6 \mu m$ et analyserons les résultats.

1. OPERATEUR ALLER-RETOUR DE LA CAVITE DIAPHRAGMEE :

Le modèle de cavité que nous étudions est représenté sur la figure (2-1). La position du miroir plan, de facteur de réflexion r_1 , définit l'origine de l'axe longitudinal z . Le miroir concave, de facteur de réflexion r_2 et de rayon de courbure R est placé en $z = d$. Un diaphragme circulaire centré de rayon b est placé à l'intérieur de la cavité en $z = z_d$. Dans la suite, z_d prendra les valeurs 0 ou d selon que la troncature provient du miroir plan ou du miroir concave respectivement.

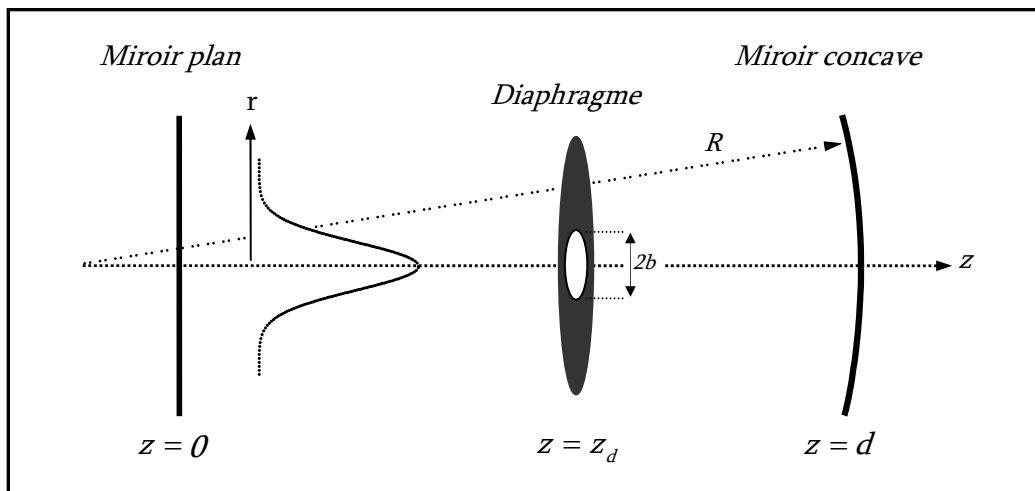


Figure. (2-1): Cavité plano-concave de longueur $d = 1150$ mm. Le diaphragme circulaire de rayon b est positionné en $z = z_d$. La longueur d'onde de résonance correspond à l'une des raies du CO_2 , soit $\lambda = 10,6$ μm .

Le champ résonnant dans la cavité résulte de la superposition de deux ondes progressives :

- ✓ une onde aller, affectée de l'indice f , se propageant dans la direction $z > 0$.
- ✓ une onde retour, affectée de l'indice b , se propageant dans la direction $z < 0$.

Nous rappelons au préalable, dans la condition de symétrie axiale $\ell = 0$, la base complète et orthonormée des modes propres, G_{fp} pour l'onde aller et G_{bp} pour l'onde retour, de la cavité non diaphragmée :

$$G_{fp}(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} L_p(x) e^{-x/2} \exp \left\{ +i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p + 1)\phi(z) \right] \right\} \quad (2-1a)$$

$$G_{bp}(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} L_p(x) e^{-x/2} \exp \left\{ -i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p + 1)\phi(z) \right] \right\} \quad (2-1b)$$

Les champs perturbés, aller $E_f(r, z)$ et retour $E_b(r, z)$, exprimés dans cette base s'écrivent :

$$E_f(r, z) = e^{+i(kz - \omega t)} \cdot \sum_p f_p \cdot G_{fp}(r, z) \quad (2-2)$$

$$E_b(r, z) = e^{-i(kz - \omega t)} \cdot \sum_p b_p \cdot G_{bp}(r, z) \quad (2-3)$$

Les f_p et b_p sont les coefficients indépendants de z , de cette décomposition. Ils prennent une expression différente selon que la troncature du faisceau provient du miroir plan ou du miroir concave. Le but du développement suivant est d'établir, en tenant compte des conditions aux limites imposées par les miroirs et le diaphragme, la relation liant ces deux coefficients. Le principe fondamental de résonance, qui impose au champ de se retrouver identique à lui-même, après un aller retour dans la cavité, à un facteur d'amplitude et de phase près, nous permettra alors d'introduire l'opérateur aller retour de la cavité diaphragmée.

A. DIAPHRAGME CONTRE LE MIROIR CONCAVE :

1- Relation liant les coefficients f_p et b_p sur le miroir concave

Considérons le champ E_f incident sur le miroir concave de sortie en $z = d$:

$$E_f(r, d) = e^{ikd} \cdot \sum_p f_p G_{fp}(r, d) \quad (2-4)$$

La condition imposée par le diaphragme de rayon b placé en $z_d = d$, s'exprime pour le champ retour par :

$$E_b(r, d) = \begin{cases} r_2 E_f(r, d) & \text{si } r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases} \quad (2-5)$$

On décompose ensuite $E_b(r, d)$ sur la base des fonctions G_{bp} :

$$E_b(r, d) = e^{-ikd} \cdot \sum_p b_p G_{bp}(r, d) \quad (2-6)$$

A partir de l'inversion de (2-6), nous obtenons :

$$b_p = e^{ikd} \cdot \iint_S E_b(r, d) \cdot G_{bp}^*(r, d) \cdot r dr \cdot d\varphi \quad (2-7)$$

Où r et φ représentent respectivement les coordonnées radiale et angulaire dans le système de coordonnées cylindriques et G_{bp}^* le complexe conjugué de G_{bp} .

L'intégrale précédente porte sur tout le plan $z = d$ et avec la condition (2-5) devient :

$$b_p = r_2 \cdot e^{ikd} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^b E_f(r, d) \cdot G_{bp}^*(r, d) \cdot r dr \quad (2-8)$$

En remplaçant E_f par son expression en $z = d$, il vient :

$$b_p = 2\pi r_2 \cdot e^{ikd} \cdot \sum_q f_q \cdot \int_0^b G_{fq}(r, d) \cdot G_{bp}^*(r, d) \cdot r dr \quad (2-9)$$

Sachant que le miroir concave constitue une surface à phase constante, le terme de phase $\exp[\pm ik(d + (r^2/2R))]$ qui apparaît dans les expressions des champs aller et retour en $z = d$, est constant sur toute la surface du miroir concave et vaut donc en $z = 0$: $\exp(\pm ikd)$. On obtient finalement :

$$b_p = r_2 \cdot e^{2i(kd - \phi(d))} \cdot \sum_q f_q \cdot e^{-2i(p+q)\phi(d)} \cdot C_{pq} \quad (2-10)$$

Où l'élément de matrice C_{pq} est défini par l'intégrale

$$C_{pq} = \int_0^{x_b} \exp(-x) \cdot L_p(x) \cdot L_q(x) \cdot dx \quad (2-11)$$

$$x = 2r^2 / w^2(d), \quad x_b = 2b^2 / w^2(d)$$

2- Relation liant les coefficients f_p et b_p sur le miroir plan

Sur le miroir plan en $z = 0$, les deux champs opposés peuvent être relié par :

$$E_f(r, 0) = r_1 \cdot E_b(r, 0) \quad (2-12)$$

$$\sum_p f_p G_{fp}(r, 0) = r_1 \cdot \sum_p b_p G_{bp}(r, 0)$$

$$f_q = r_1 \sum_p b_p \iint_{S_\infty} G_{bp}(r, 0) \cdot G_{fq}^*(r, 0) \cdot dS = r_1 \sum_p b_p \iint_{S_\infty} G_{bp}(r, 0) \cdot G_{bq}(r, 0) \cdot dS$$

Ce qui donne, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions G , simplement :

$$f_q = r_1 \cdot b_q \quad (2-13)$$

3- Relation liant les coefficients après un aller retour dans la cavité

Les expressions (2-10) et (2-13) montrent qu'après un aller retour dans la cavité, les coefficients de décomposition du champ initial, coefficients f_p , se transforment en des f'_p :

$$f'_p = r_1 r_2 \cdot e^{2i(kd - \phi(d))} \cdot \sum_q e^{-2i(p+q)\phi(d)} \cdot C_{pq} \cdot f_q \quad (2-14)$$

Ainsi au champ initial

$$E_f(r, 0) = \sum_p f_p \cdot G_{fp}(r, 0),$$

correspond, après un aller retour dans la cavité, le champ final

$$E'_f(r, 0) = \sum_p f'_p \cdot G_{fp}(r, 0).$$

La condition de résonance, qui impose au champ de se retrouver identique à lui même après un aller retour dans la cavité, nous permet maintenant d'introduire l'opérateur M, représenté par une matrice dont l'élément général M_{pq} est donné par :

$$M_{pq} = r_1 r_2 \cdot e^{2i(kd - \phi(d))} \cdot e^{-2i(p+q)\phi(d)} \cdot C_{pq} \quad (2-15)$$

La transformation des coefficients après un aller retour, s'exprime maintenant à l'aide de cet opérateur, soit :

$$f'_p = \sum_q M_{pq} \cdot f_q \quad \text{ou bien} \quad \vec{f}' = M \vec{f} \quad (2-16)$$

Ici la matrice M_{pq} est complexe et symétrique puisque C_{pq} est symétrique. Les vecteurs propres de l'opérateur sont complexes, de même que les valeurs propres associées. Le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de l'opérateur, peut être déterminé par la méthode itérative de Caulfield et Al [Cau 81].

Remarque : Si l'ouverture du diaphragme devient infiniment grande, l'opérateur M correspondant à la cavité non diaphragmée se réduit à une constante.

$$C_{pq} = \int_0^x e^{-x} L_p(x) \cdot L_q(x) \cdot dx \longrightarrow \delta_{pq} \text{ si } x \longrightarrow \infty$$

et

$$M_{pp} = r_1 r_2 \cdot \exp [2i(kd - \phi(d))] \cdot \exp [-4ip\phi(d)]$$

Les modes de Laguerre-Gauss sont donc, des modes propres de l'opérateur aller retour de la cavité non diaphragmée, car ils se retrouvent multipliés par une constante lors d'un aller retour.

B. DIAPHRAGME CONTRE LE MIROIR PLAN :

La détermination de l'opérateur aller retour de la cavité diaphragmée du coté du miroir plan s'effectue d'une manière similaire au cas précédent.

1- Relation liant les coefficients f_p et b_p sur le miroir concave

Les champs aller et retour exprimés dans la base des fonctions de Laguerre-Gauss s'écrivent :

$$E_f(r, z) = e^{ikz} \cdot \sum_p f_p \cdot G_{fp}(r, z) \quad (2-17)$$

$$E_b(r, z) = e^{-ikz} \cdot \sum_p b_p \cdot G_{bp}(r, z) \quad (2-18)$$

La condition de continuité des champs sur le miroir concave en $z = d$ s'écrit :

$$E_b(r, d) = r_2 \cdot E_f(r, d) \quad (2-19)$$

A partir de l'inversion de (2-18) en $z = d$, nous obtenons :

$$b_p = \exp(ikd) \cdot \iint_S E_b(r, d) \cdot G_{bp}^*(r, d) \cdot r dr \cdot d\varphi$$

L'intégrale précédente porte sur tout le plan $z = d$ et avec la condition (2-19) devient :

$$b_p = 2\pi r_2 \cdot \exp(ikd) \cdot \int_{\infty} E_f(r, d) \cdot G_{bp}^*(r, d) \cdot r dr$$

En remplaçant E_f par son expression en $z = d$, il vient :

$$b_p = r_2 \cdot \exp[2i(kd - \phi(d))] \cdot \exp[-4ip\phi(d)] \cdot f_p \quad (2-20)$$

2- Relation liant les coefficients f_p et b_p sur le miroir plan

La condition imposée par le diaphragme de rayon b placé en $z_d = 0$, s'exprime pour le champ aller par :

$$E_f(r, 0) = \begin{cases} r_1 E_b(r, 0) & \text{si } r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases} \quad (2-21)$$

L'expression (2-17), après inversion donne en $z = 0$:

$$\begin{aligned} f_p &= 2\pi \cdot \int_0^{\infty} E_f(r,0) \cdot G_{fp}^*(r,0) \cdot r dr \\ &= 2\pi r_1 \cdot \sum_q b_q \cdot \int_0^b G_{bq}(r,0) \cdot G_{fp}^*(r,0) \cdot r dr \end{aligned}$$

En introduisant l'élément de matrice C_{pq} défini par l'intégrale

$$C_{pq} = \int_0^{x_b} \exp(-x) \cdot L_p(x) \cdot L_q(x) \cdot dx$$

Où l'on a posé : $x = 2r^2 / w^2(0)$, $x_b = 2b^2 / w^2(0)$

La relation entre les f_p et b_p devient :

$$f_p = r_1 \sum_q b_q \cdot C_{pq} \quad (2-22)$$

3- Relation liant les coefficients après un aller retour dans la cavité

A partir des relations (2-20) et (2-22) on obtient la relation liant les coefficients après un aller retour :

$$f'_p = r_1 r_2 \cdot \exp[2i(kd - \phi(d))] \cdot \sum_q \exp[-4iq\phi(d)] \cdot C_{pq} \cdot f_q \quad (2-23)$$

La relation (2-23) permet de définir l'opérateur aller retour représenté par la matrice \mathbf{M} dont l'élément général est donné par :

$$M_{pq} = r_1 r_2 \cdot \exp[2i(kd - \phi(d))] \cdot \exp[-4ip\phi(d)] \cdot C_{pq} \quad (2-24)$$

La transformation des coefficients après un aller retour, s'exprime maintenant à l'aide de cet opérateur, soit :

$$f'_p = \sum_q M_{pq} \cdot f_q \quad \text{ou bien} \quad \vec{f}' = \mathbf{M} \vec{f} \quad (2-25)$$

2. RESOLUTION NUMERIQUE :

Méthode de Gauss-Legendre

Nous l'avons utilisée pour approximer les intégrales du type :

$$C_{pq} = \int_0^{x_b} e^{-x} \cdot L_p(x) \cdot L_q(x) \cdot dx,$$

car elle est fort adaptée :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u) \cdot du &= \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{+1} f\left[\frac{(b-a)}{2}x + \frac{(b+a)}{2}\right] \cdot dx \\ &\approx \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f\left(\frac{(b-a)}{2}x_i + \frac{(b+a)}{2}\right) \end{aligned}$$

Les valeurs numériques des coefficients α_i et des abscisses x_i ont été tirées de la référence [Abr 72].

Méthode de Caulfield

C'est une méthode itérative appliquée à l'optique par Caulfield et al [Cau 81], qui utilise l'algorithme de la puissance itérée. L'algorithme est facile à maîtriser et bien adapté au calcul de la plus grande valeur propre et vecteur propre associés à l'opérateur défini par les expressions (2-15) et (2-24).

Soit \mathbf{M} une matrice symétrique dont les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont distinctes. Puisque leurs vecteurs propres $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ associés sont orthogonaux, tout vecteur \vec{V}_0 peut être exprimé dans la base des vecteurs propres de \mathbf{M} par :

$$\vec{V}_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{x}_i$$

Considérons maintenant la suite des puissances itérées :

$$\mathbf{M} \vec{V}_0, \mathbf{M}^2 \vec{V}_0, \dots, \mathbf{M}^k \vec{V}_0, \dots$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= M \vec{V}_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i M \vec{x}_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_i \vec{x}_i, \\ \vec{V}_2 &= M^2 \vec{V}_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_i M \vec{x}_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_i^2 \vec{x}_i, \\ &\vdots \\ \vec{V}_k &= M^k \vec{V}_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_i^{k-1} M \vec{x}_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_i^k \vec{x}_i, \\ &\vdots\end{aligned}$$

En écrivant

$$\vec{V}_k = M^k \vec{V}_0 = \lambda_0^k \left\{ \alpha_0 \vec{x}_0 + \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^k \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_0} \right)^k \vec{x}_n \right\},$$

et en supposant que $|\lambda_0| > |\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$, on obtient :

$$\begin{aligned}M^k \vec{V}_0 &= \lambda_0 \lim_{k \rightarrow \infty} M^{k-1} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_k &\approx \lambda_0 \vec{V}_{k-1}\end{aligned}$$

On estime que la valeur propre recherchée est atteinte si l'égalité vectorielle précédente est vérifiée pour toutes les composantes, dans les limites d'une certaine précision que l'on s'impose avant le calcul.

Le vecteur propre \vec{x}_0 recherché s'exprime alors par :

$$\vec{x}_0 = \vec{V}_{k-1} = M^{k-1} \vec{V}_0$$

Le procédé que l'on vient de développer est appelé "algorithme de la puissance itérée". En normant les vecteurs $\vec{V}_k = M^k \vec{V}_0$ à chaque étape, on arrive à éviter que leurs composantes ne deviennent des nombres trop grands. Pour initialiser le processus et accélérer la vitesse de convergence de la méthode, nous utilisons comme vecteur de départ le mode fondamental de la cavité non diaphragmée exprimé dans la base des modes de Laguerre-Gauss, soit :

$$\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les composantes, dans la base des fonctions G_p du vecteur propre \vec{x}_0 correspondent en fait aux coefficients f_p du champ aller d'après les relations (2-16) et (2-25). On déduit les coefficients b_p du champ retour, en utilisant les relations entre les coefficients précédemment établies.

Après avoir déterminé λ_0 et \vec{x}_0 , nous pouvons déterminer λ_1 et son vecteur propre normé associé \vec{x}_1 en appliquant de nouveau l'algorithme de la puissance itérée à une matrice \mathbf{M}^* possédant les valeurs propres $0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et donnée par :

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} - \lambda_0 \vec{x}_0 (\vec{x}_0)^T$$

Où \vec{x}_0 est le vecteur propre normé de \mathbf{M} associé à λ_0 . On procède de façon analogue pour calculer les autres valeurs propres et vecteurs propres associés.

La vitesse de convergence de la méthode est déterminée par la valeur que peut prendre le rapport des deux plus grandes valeurs propres de l'opérateur. Ce dernier, comme on peut le voir sur la figure (2-2a), est directement lié au paramètre de troncature y . Sur la figure (2-2-b), nous avons représenté le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la valeur propre recherchée (λ_{00}). Pour $y \leq 1,6$, nous notons que la convergence de la méthode est rapide (inférieure à 100 itérations). Elle devient très lente (supérieure à 1000 itérations) pour des ouvertures du diaphragme de $y > 2$.

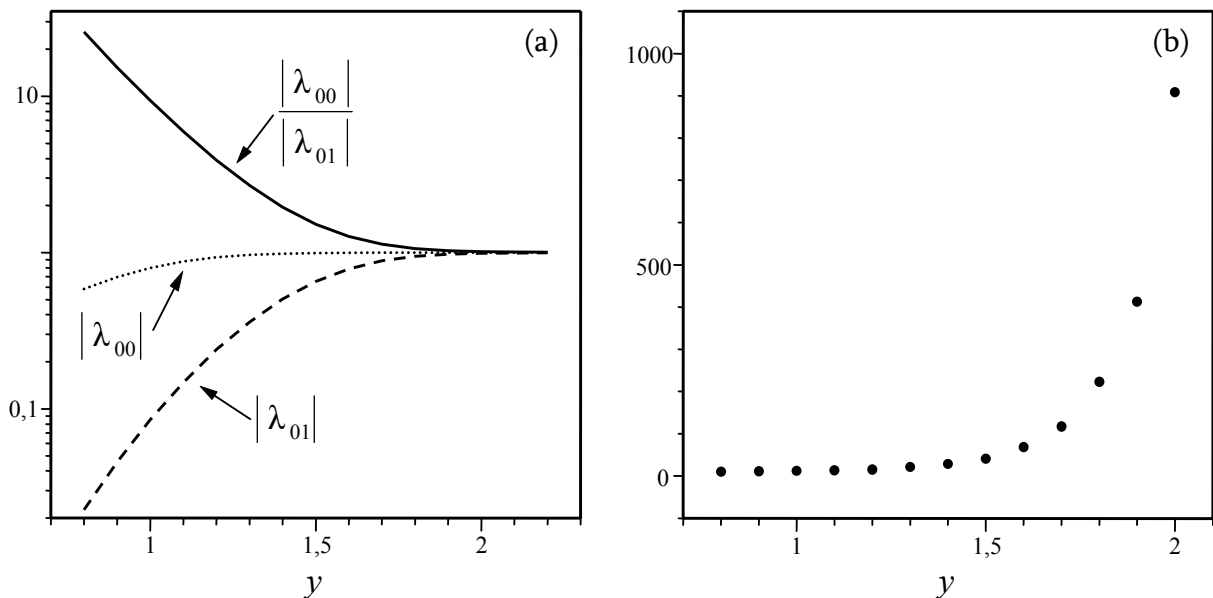


Figure. (2-2) : Convergence de la methode de Caulfield

(a) : rapport des modules des deux plus grandes valeurs propres en fonction de y .

(b) : nombre d'iteration nécessaire pour atteindre la convergence en fonction de y .

3. COURBES THEORIQUES ET DISCUSSIONS :

Les courbes que nous allons donner concernent la cavité plano-concave schématisée sur la figure (2-1). Celle-ci est caractérisée par les paramètres suivants : longueur de la cavité 1,15 m ; rayon de courbure du miroir concave $R = 2\text{m}$; pouvoirs réflecteurs en amplitude supérieurs à 99 % pour les deux miroirs ; longueur d'onde résonnante $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$.

Notre travail portera précisément sur l'étude de l'influence de la diffraction sur la distribution du champ résonant à l'intérieur de la cavité diaphragmée. Ce dernier est une combinaison des polynômes de Laguerre-Gauss pour lesquels il est nécessaire de fixer le nombre.

3.1. Choix du nombre maximum de polynômes de Laguerre :

L'ordre maximum, P_{max} , du polynôme de Laguerre doit correspondre au nombre au delà duquel aucune variation importante sur les caractéristiques du mode résonnant n'est introduite. Les pertes et le déphasage par aller-retour sont dans ce cas des grandeurs fondamentales puisqu'elles contribuent à fixer le seuil d'oscillation et la fréquence de résonance du laser. Ces grandeurs sont déduites de la valeur propre λ :

$$\text{Pertes} = 1 - |\lambda|^2$$

$$\text{déphasage} = \arg(\lambda)$$

▪ Influence de P_{max} sur l'amplitude et la phase de la valeur propre λ :

Les variations de l'amplitude et de la phase de la valeur propre du mode fondamental en fonction de P_{max} sont représentées sur la figure (2-3), pour une troncature $\gamma = 1$. On voit que ces grandeurs se stabilisent pour P_{max} supérieur à 50.

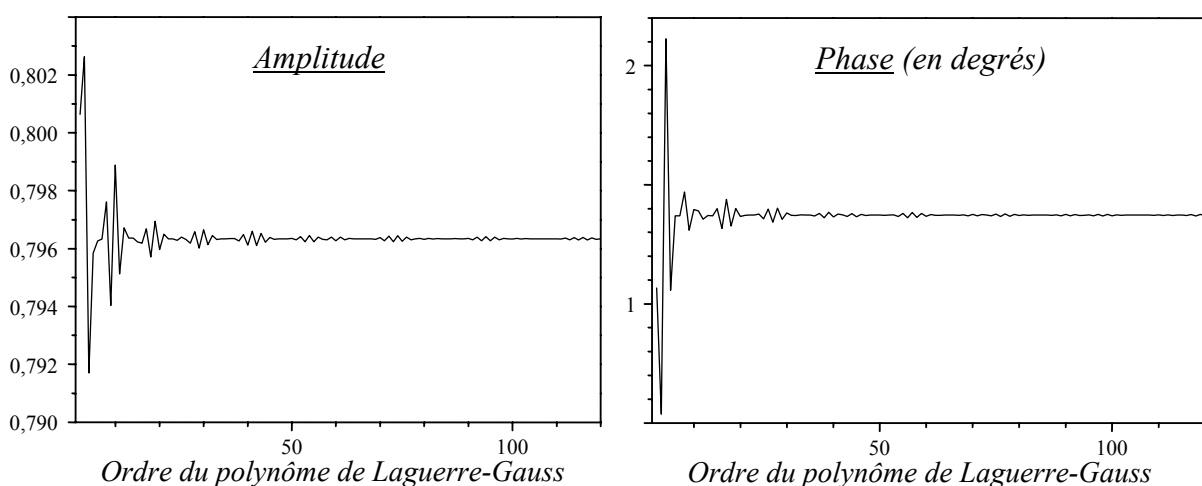


Figure. (2-3): Amplitude et phase de la valeur propre λ en fonction de l'ordre maximum du polynôme de Laguerre-Gauss pour le mode fondamental TEM_{00} .

▪ **Influence de Pmax sur les distributions du champ :**

Afin de voir l'influence de la dimension de la base des polynômes de Laguerre-Gauss sur les distributions des champs aller et retour du mode fondamental dans une cavité diaphragmée, nous avons représenté sur la figure (2-4) l'intensité axiale à l'intérieure de la cavité pour différents Pmax. On voit que l'augmentation de la base n'influe pas sur la position des maximums d'intensité des champs aller et retour. Cependant, elle conduit d'une part, à l'apparition en champ proche du diaphragme de nouveaux maxima et minima d'intensité sur la distribution de l'onde qui subit la diffraction (l'onde aller pour $z_d = 0$, et l'onde retour pour $z_d = d$) et d'autre part, à l'augmentation en champ lointain du diaphragme, après le dernier maximum, des oscillations sur le tracé au dépend d'une diminution de leurs amplitudes, ce qui conduit à des courbes qui se lissent de plus en plus pour donner une forme décroissante quasi régulière à partir de $P_{max} = 120$.

A partir de $P_{max} = 120$, l'augmentation de la dimension de la base n'introduit pas de variations importantes sur la forme générale des distributions ; aussi, choisissons nous, dans ce qui suit, de décomposer le champ résonnant sur la base des 120 premiers polynômes de Laguerre-Gauss.

3.2. Pertes de diffraction et facteur de discrimination :

Dans le résonateur laser, les modes sont hiérarchisés en fonction de leurs pertes. La perte de diffraction par aller retour est une grandeur importante puisqu'elle contribue à déterminer le seuil d'oscillation du laser. Si la condition d'oscillation « gain = pertes » est vérifiée pour le mode TEM_{00} , et si les modes d'ordre plus élevés, en particulier le second mode transverse TEM_{01} , n'atteignent pas ce seuil, alors l'oscillation du laser se fera exclusivement sur le mode fondamental. Par conséquent, nous pouvons caractériser le pouvoir de discrimination d'un résonateur diaphragmé à l'aide d'un paramètre appelé facteur de discrimination. Ces deux paramètres sont déduits de la valeur propre λ :

$$\text{Pertes du mode } TEM_{00} = 1 - |\lambda_{00}|^2$$

$$\text{Facteur de discrimination} = \frac{\text{Pertes du mode } TEM_{01}}{\text{Pertes du mode } TEM_{00}}$$

Afin d'optimiser les caractéristiques du résonateur à diaphragme pour une oscillation exclusive sur le mode fondamental, il est important de voir l'évolution de ces deux paramètres avec :

- ✓ la troncature, introduite sur le faisceau, engendrée par le diaphragme (paramètre y).
- ✓ le paramètre géométrique de la cavité donné par : $g = 1 - d/R$

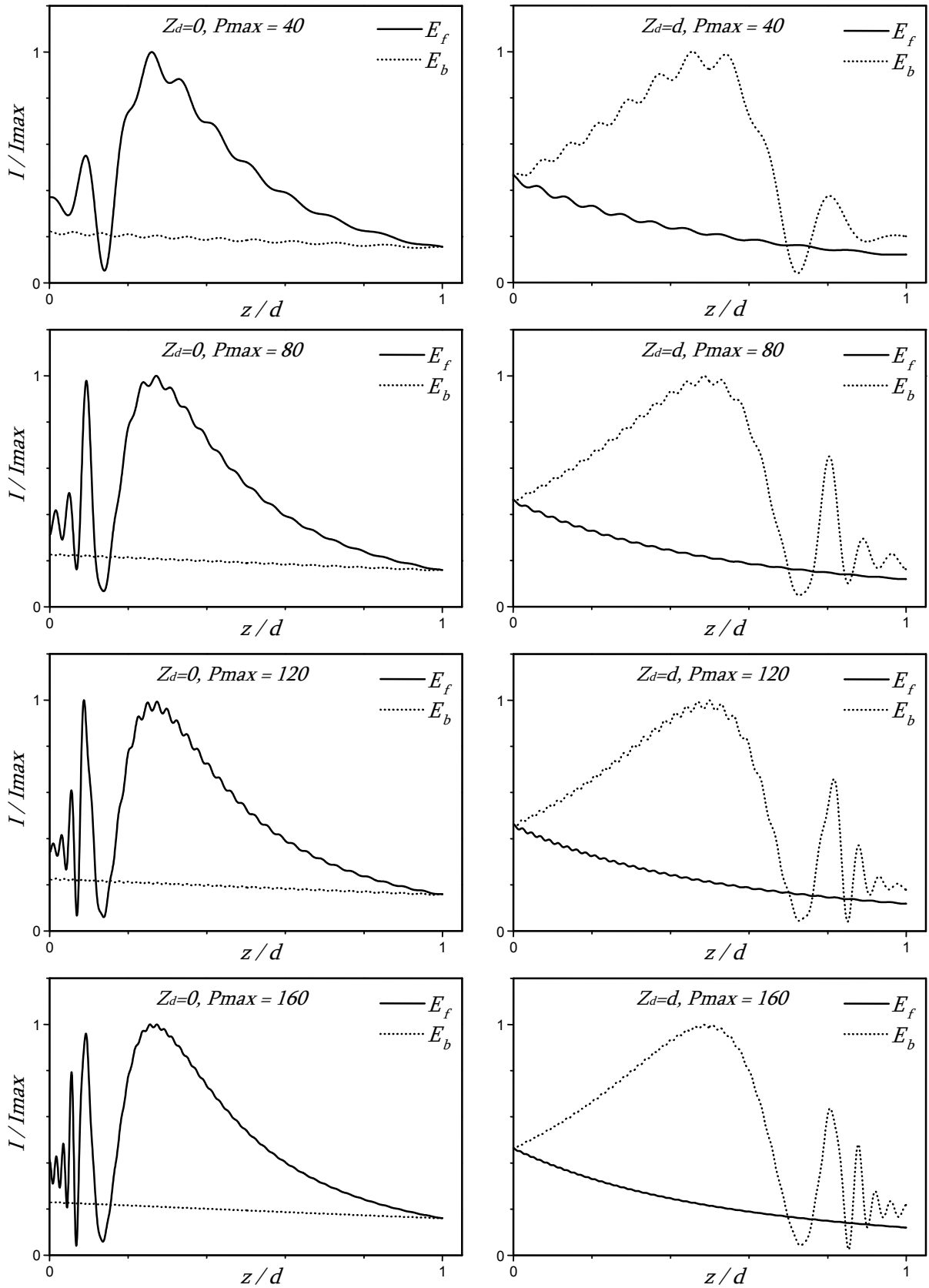


Figure. (2-4) : Intensité axiale du mode TEM_{00} pour une troncature $y = 1$, et pour différents P_{max} .

① Pertes de diffraction :

La figure (2-5) décrit les pertes des modes TEM_{00} et TEM_{01} en fonction du paramètre de troncature y (courbe a), et du paramètre g de la cavité (courbes b et c).

Les résultats obtenus montrent :

- Plus grand est l'indice du mode, plus importantes sont les pertes.
- Ces pertes sont d'autant plus importantes que l'ouverture du diaphragme est réduite.
- Une forte dépendance des pertes vis-à-vis de la configuration du résonateur.
- Une symétrie autour de la valeur $g = 0,5$ correspondant à une configuration semi confocale du résonateur.
- Une réduction des pertes de diffraction lorsque g tend vers 0 et 1. Ce qui correspond à une cavité, respectivement, confocale et à deux miroirs plan.

② Facteur de discrimination :

La figure (2-6) décrit les variations du facteur de discrimination en fonction de la troncature y (courbe a), et du paramètre géométrique g de la cavité (courbes b). Les résultats montrent d'une part, que la meilleure ouverture du diaphragme qui optimise la discrimination des modes transverses correspond à une valeur de $y \approx 1,65$. Au-delà de cette valeur, le diaphragme perd progressivement son influence sur les modes jusqu'à ne plus pouvoir assurer une bonne sélectivité du résonateur sur le mode fondamental exclusivement. D'autre part, si l'on fixe le paramètre de troncature y alors les résultats de la figure (2-6b) montrent que cette discrimination est optimisée si le choix de la configuration de la cavité se porte sur une configuration semi confocale ($g = 0,5$).

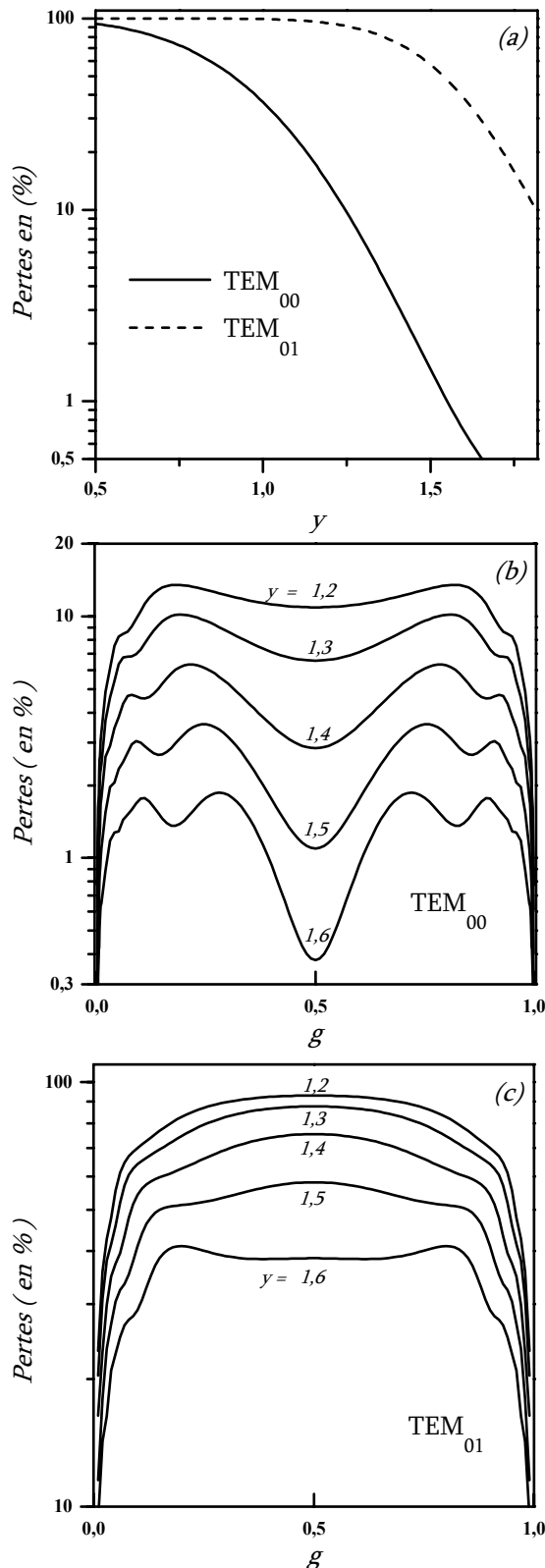


Figure. (2-5) : Pertes des modes TEM_{00} et TEM_{01} en fonction : du paramètre y de troncature (courbe a) et du paramètre géométrique g de la cavité (courbe b et c).

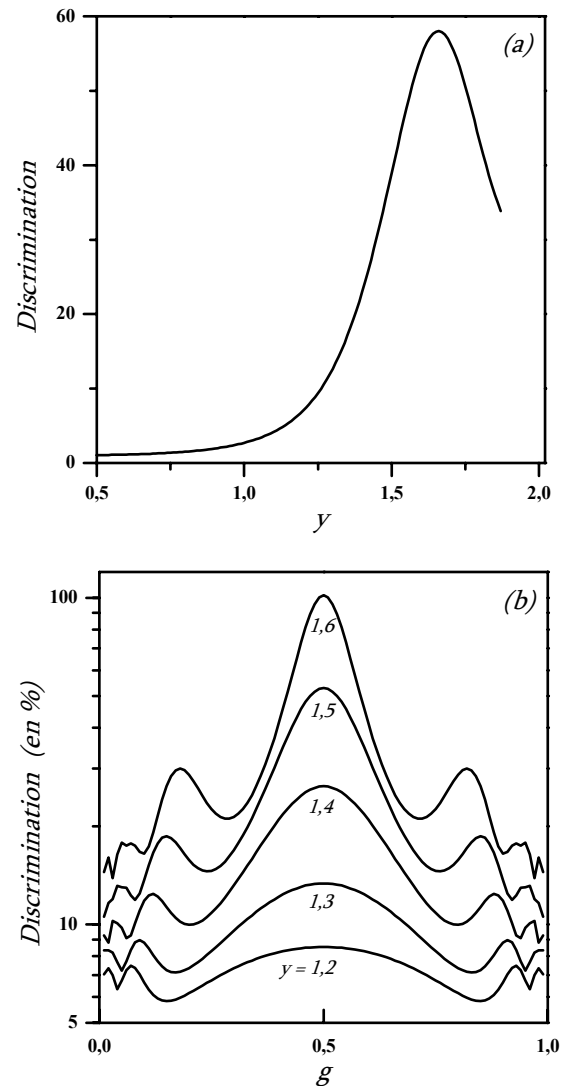


Figure. (2-6) : Variation du facteur de discrimination en fonction : du paramètre y de troncature (courbe a) et du paramètre géométrique g de la cavité (courbe b).

3.3. Distribution spatiale de l'intensité :

■ Distribution axiale de l'intensité :

Les distributions des figures (2-7) et (2-8) montrent les intensités sur l'axe des ondes aller et retour dans le cas d'un diaphragme d'ouverture variable situé soit contre le miroir plan (figure (2-7)), soit contre le miroir concave (figure (2-8)). On voit immédiatement que la présence du diaphragme, quelque soit sa position dans la cavité, rend différentes les distributions axiales des ondes aller et retour. Si le faisceau est suffisamment tronqué, alors :

- Le champ résonnant devant le diaphragme (champ aller pour $z_d=0$, et champ retour pour $z_d=d$) est caractérisé par une zone de champ proche fortement perturbée caractérisée par des oscillations de l'intensité, et un champ lointain, localisé après le dernier maximum, constamment décroissant et régulier. Nous notons aussi, que plus faible est l'ouverture du diaphragme, plus courte est la région du champ proche et plus grande est l'amplitude des oscillations. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus [Cam 69], [Tan 72], [Oti 79], dans le cadre de la diffraction d'un faisceau gaussien en propagation libre par une ouverture circulaire.
- Le maximum d'intensité des champs n'a plus lieu sur le miroir plan comme dans le cas d'un faisceau purement gaussien, mais dans le faisceau soit aller pour $z_d = 0$, soit retour pour $z_d = d$. Ce déplacement du point focal est à associer à l'action focalisatrice du diaphragme [Lit 69].

A mesure que l'ouverture du diaphragme augmente, les effets de diffraction s'estompent ; le diaphragme perd alors toute influence sur le mode à partir d'une troncature qui correspond à $y = 2,5$.

■ Distribution radiale de l'intensité :

La répartition transversale de l'intensité des ondes dans une cavité diaphragmée est elle aussi sujette à des variations avec z . En effet, on peut voir sur les figures (2-9), (2-10) et (2-11) les différentes formes que prennent les ondes aller et retour pour les deux positions extrêmes d'un diaphragme unique, d'ouverture variable, dans la cavité :

- Les ondes aller et retour ne présentent pas la même distribution de champ : l'onde qui est réfléchiée par le miroir non diaphragmé garde une forme quasi gaussienne, alors que celle qui provient du miroir diaphragmé montre une figure de diffraction habituelle caractérisée par un champ proche fortement perturbé et une répartition quasi gaussienne soit en champ lointain, soit pour de grandes ouvertures du diaphragme.
- Une forte troncature du faisceau (y faible) dans la cavité conduit à un effet de rétrécissement et d'élargissement des ondes : le diaphragme placé contre le miroir plan (concave) a tendance à rendre l'onde aller moins (plus) large que l'onde retour.
- Au fur et à mesure que y augmente, les intensités radiales des deux ondes tendent vers la distribution radiale du faisceau gaussien non perturbé.

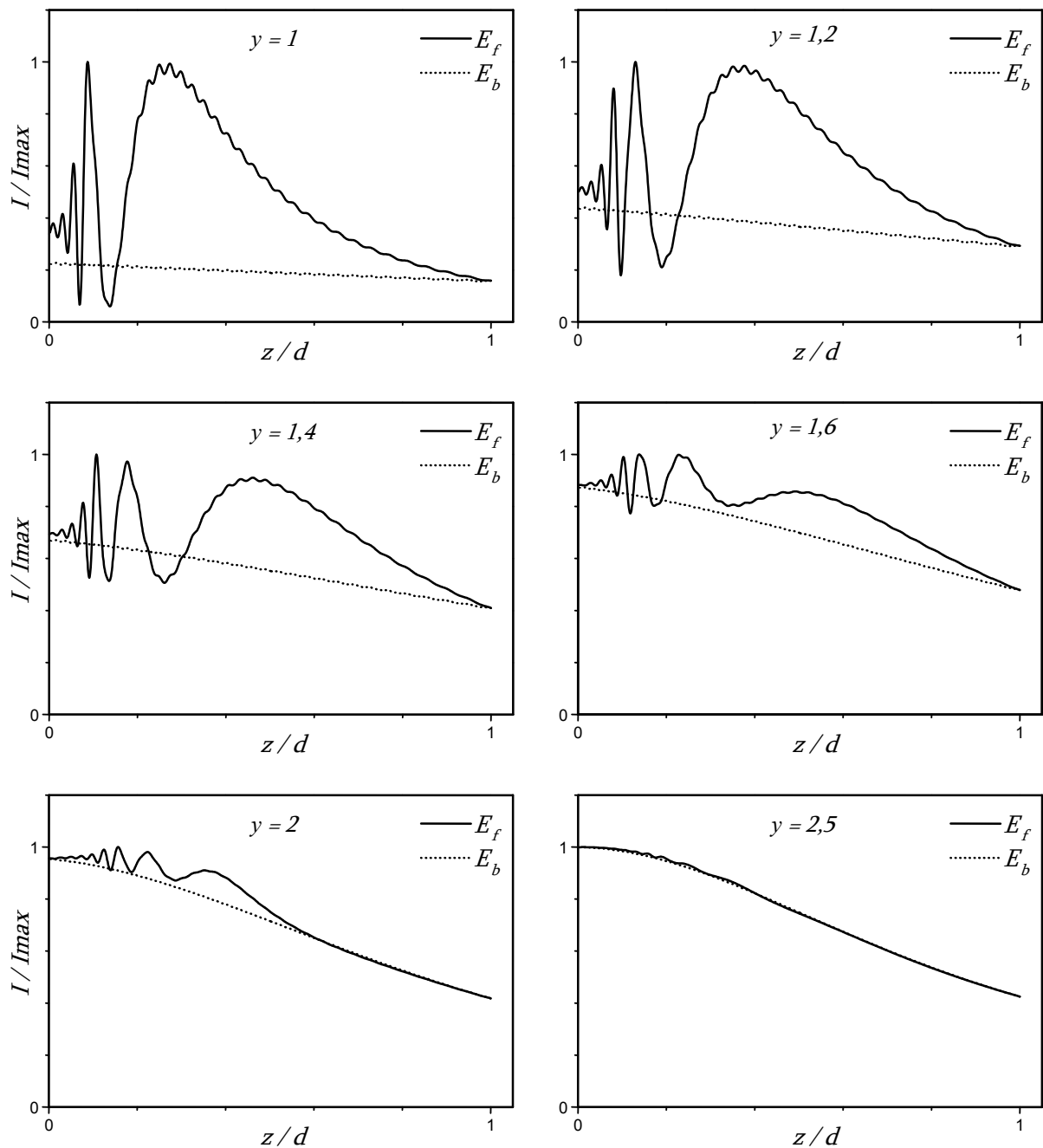


Figure. (2-7) : Miroir Plan diaphragmé

Intensité axiale du mode fondamental pour différentes valeurs du paramètre de troncature y ($y = 1, 1,2, 1,4, 1,6, 2, 2,5$). Ici, l'intensité du champ retour est représentée en trait plein, et celle du champ aller en pointillé.

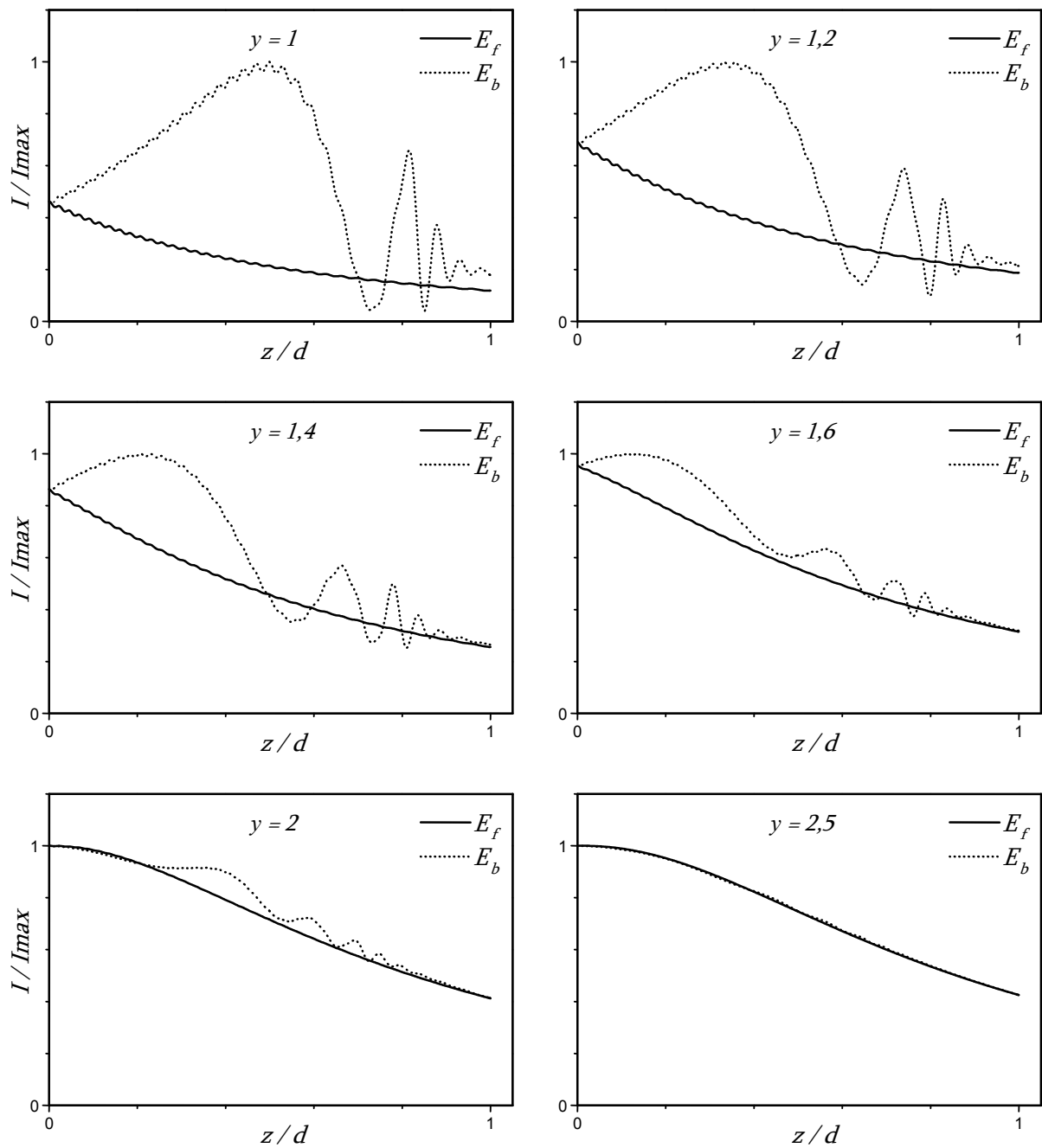


Figure. (2-8) : *Miroir Concave diaphragmé*

Intensité axiale du mode fondamental pour différentes valeurs du paramètre de troncature y ($y = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 2, 2.5$). Ici, l'intensité du champ aller est représentée en trait plein, et celle du champ retour en pointillé.

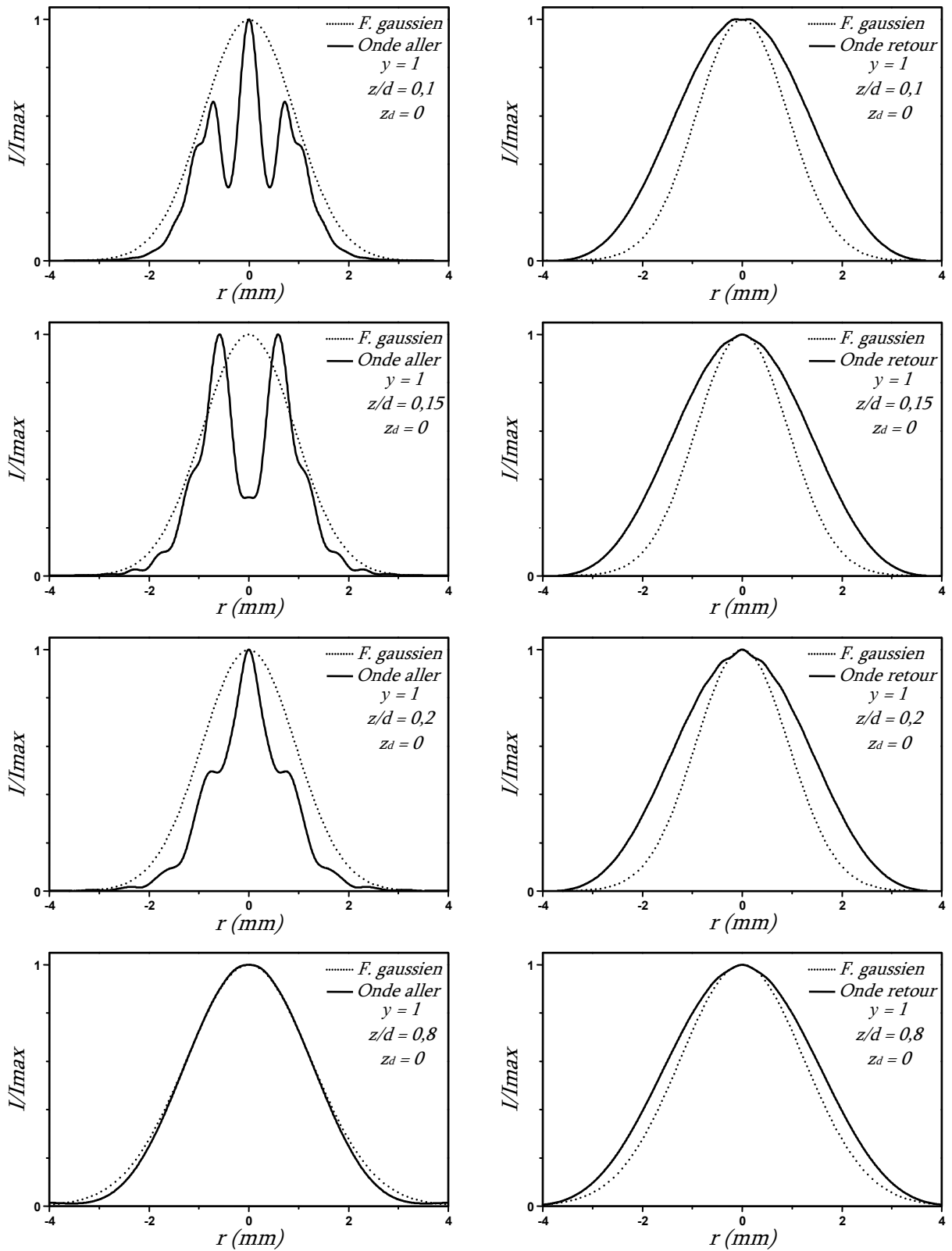


Figure. (2-9a) : *Miroir Plan diaphragmé*

Intensités transverses des ondes aller et retour à l'intérieure de la cavité pour $y = 1$. Les courbes en traits pointillés correspondent au faisceau gaussien non perturbé.

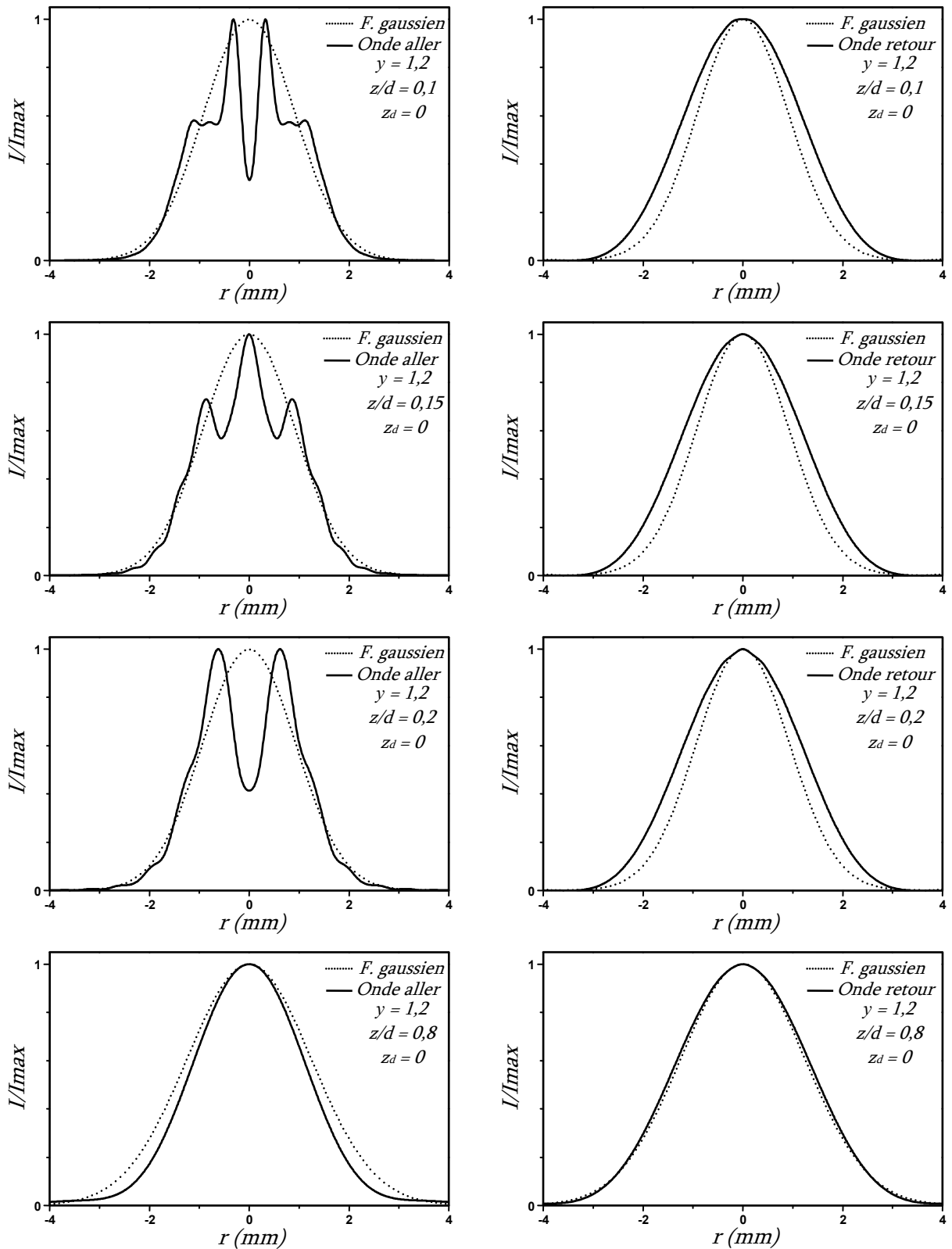


Figure. (2-9b) : *Miroir Plan diaphragmé*

Intensités transverses des ondes aller et retour à l'intérieure de la cavité pour $y = 1,2$. Les courbes en traits pointillés correspondent au faisceau gaussien non perturbé.

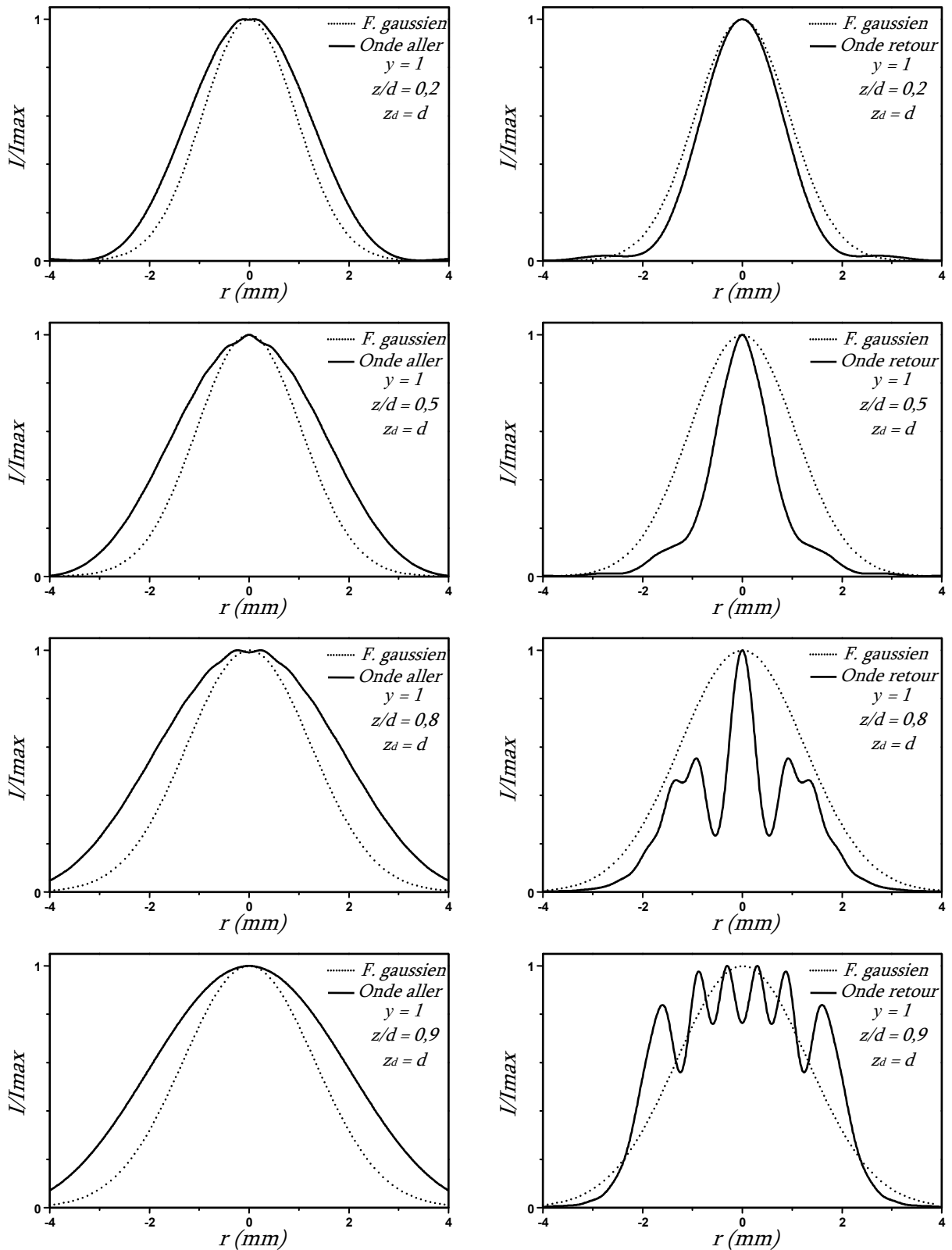


Figure. (2-10a) : Miroir Concave diaphragmé

Intensités transverses des ondes aller et retour à l'intérieur de la cavité pour $y = 1$. Les courbes en traits pointillés correspondent au faisceau gaussien non perturbé.

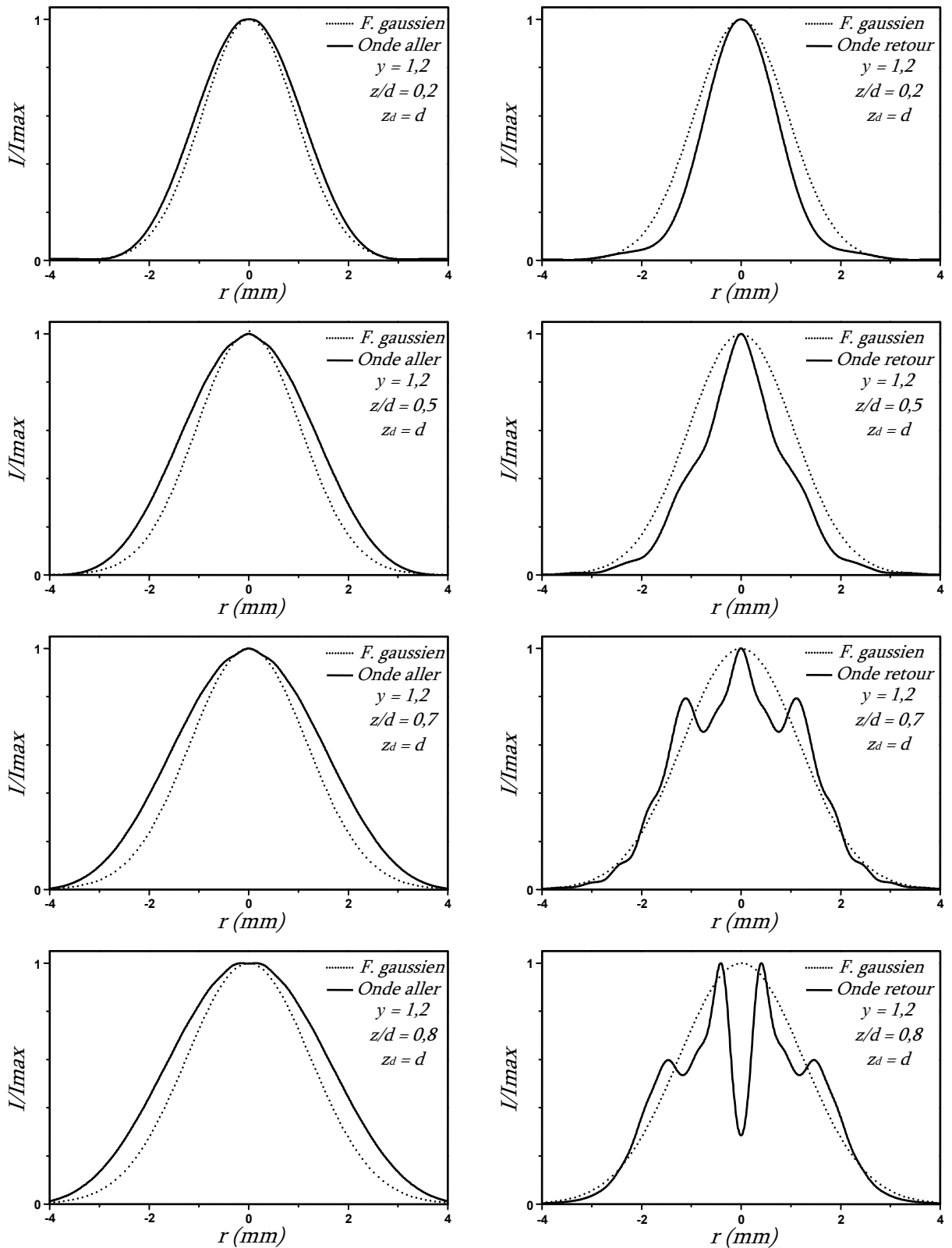


Figure. (2-10b) : Miroir Concave diaphragmé

Intensités transverses des ondes aller et retour à l'intérieur de la cavité pour $y = 1,2$.
 Les courbes en traits pointillés correspondent au faisceau gaussien non perturbé.

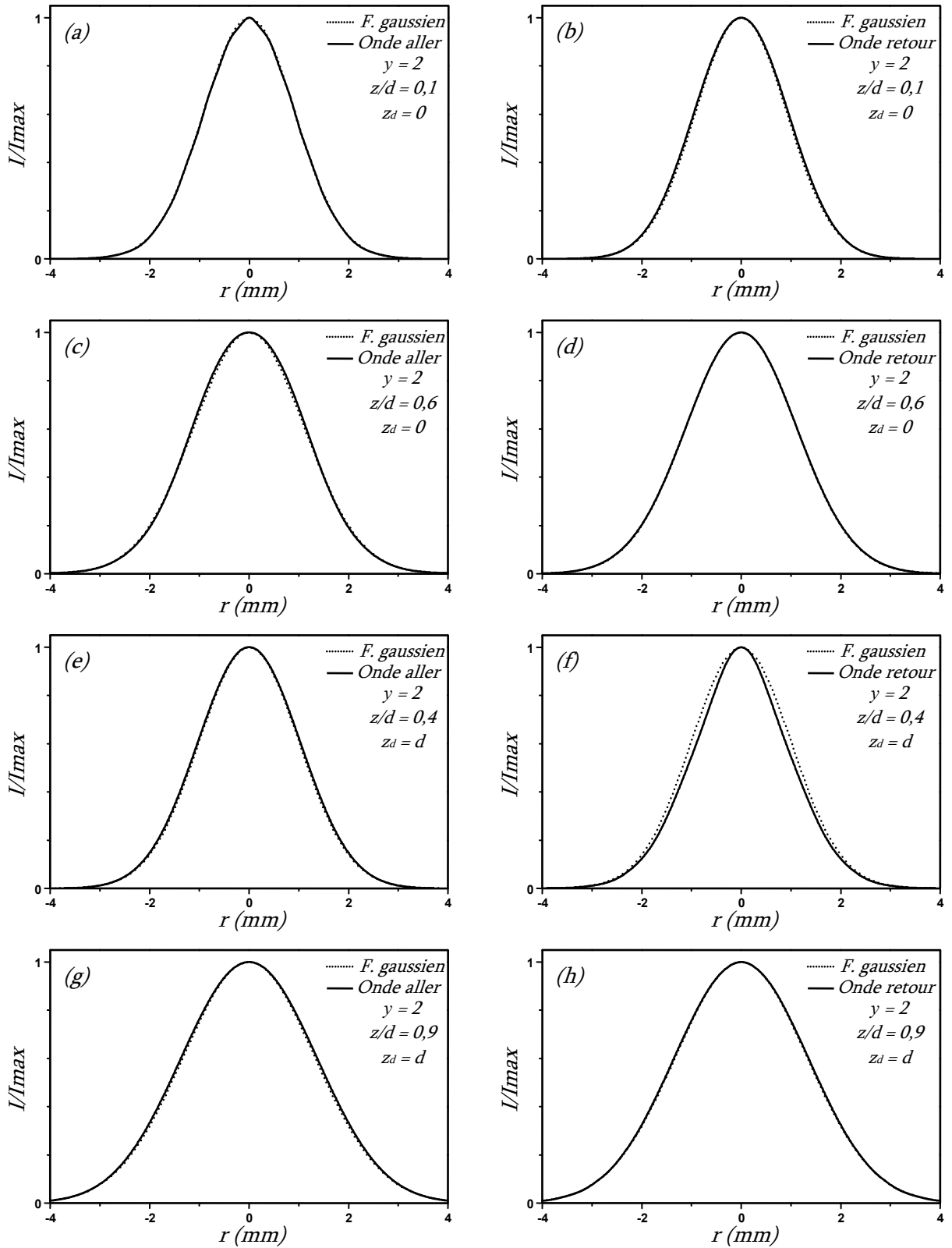


Figure. (2-11) : Intensités transverses des ondes aller et retour dans une cavité à un diaphragme se situant à : (a-b-c-d) $z_d = 0$ et (e-f-g-h) $z_d = d$ pour $y = b/w(z_d) = 2$. Les courbes en traits pointillés correspondent au faisceau gaussien non perturbé.

CHAPITRE 3 :
PARTIE EXPERIMENTALE

INTRODUCTION :

L'étude expérimentale a été effectuée avec un laser à CO₂ monomode fonctionnant à la longueur d'onde de 10,6 μm. Le but de cette expérience consiste à mettre en évidence les effets de diffraction associés à la propagation d'un faisceau gaussien dans un résonateur stable diaphragmé. Cette étude s'inscrit dans le prolongement des travaux expérimentaux [Kel 85], [Wan 91a], portant sur la modification des caractéristiques du mode fondamental d'un laser, à faible gain, par la diffraction résonante. Dans ces travaux, l'attention était particulièrement concentrée sur les propriétés du champ émergent de la cavité. Notre contribution expérimentale consiste à étendre cette investigation à l'intérieur de la cavité, en mesurant, pour différentes positions sur l'axe, le profil transverse du champ des ondes progressives aller et retour en fonction de l'ouverture du diaphragme et de sa position dans la cavité.

Expérimentalement, il est possible d'avoir accès aux ondes aller et retour en insérant une simple lame, transparente au rayonnement, à l'intérieur de la cavité. Le déplacement transverse d'un détecteur de faible surface, placé sur le trajet des faisceaux aller et retour issus de la lame, permettra ainsi de reconstituer les profils transverses de l'intensité du champ des deux ondes à étudier.

Après avoir fait un bref rappel du principe de fonctionnement du laser moléculaire à CO₂ et aux moyens d'obtention d'une oscillation monoraie et monomode longitudinal du laser, nous décrivons le dispositif expérimental réalisé pour l'étude des effets de diffraction sur la distribution radiale du champ dans un laser à CO₂ de faible longueur de décharge. La caractérisation du laser nous permettra ensuite, de fixer les conditions opératoires les mieux adaptées à un fonctionnement monoraie et monomode longitudinal que l'on doit s'imposer. Le relevé expérimental des distributions transverses de l'intensité du champ nous permettra alors, de juger de l'accord théorie expérience.

1. PRINCIPE DU LASER MOLECULAIRE A CO₂ :

Les lasers à gaz qui oscillent sur des transitions entre les niveaux d'énergie du spectre de molécules sont dits lasers à transitions moléculaires. Les spectres moléculaires sont plus compliqués que les spectres atomiques. Cela tient à ce que dans les molécules, le mouvement est plus compliqué que dans les atomes. Aux trois types de mouvements qu'on discerne dans les molécules, à savoir électronique, vibratoire et rotatoire, correspondent (voir Annexe D) trois types d'états quantifiés et donc trois groupes de niveaux d'énergie. Les niveaux d'énergie de vibration-rotation sont à la base du fonctionnement du laser moléculaire à CO₂.

Les premières expériences se rapportant à l'oscillation laser dans le CO₂ pur, ont été effectuées par Patel dès 1964 [Pat 64]. Depuis, l'addition d'autres gaz au CO₂ a permis d'améliorer la puissance et l'énergie jusqu'alors obtenues [Leg 64], [Pat 65]. Le milieu actif d'un laser CO₂ est généralement constitué d'un mélange de dioxyde de carbone CO₂, d'azote N₂ et d'hélium Hé. Le dioxyde de carbone assure l'émission, l'azote le pompage du niveau supérieur de la transition de vibration-rotation et l'hélium l'évacuation de son niveau inférieur.

Le diagramme simplifié des niveaux d'énergie du système moléculaire CO₂-N₂ est représenté sur la figure (3-1) ci dessous.

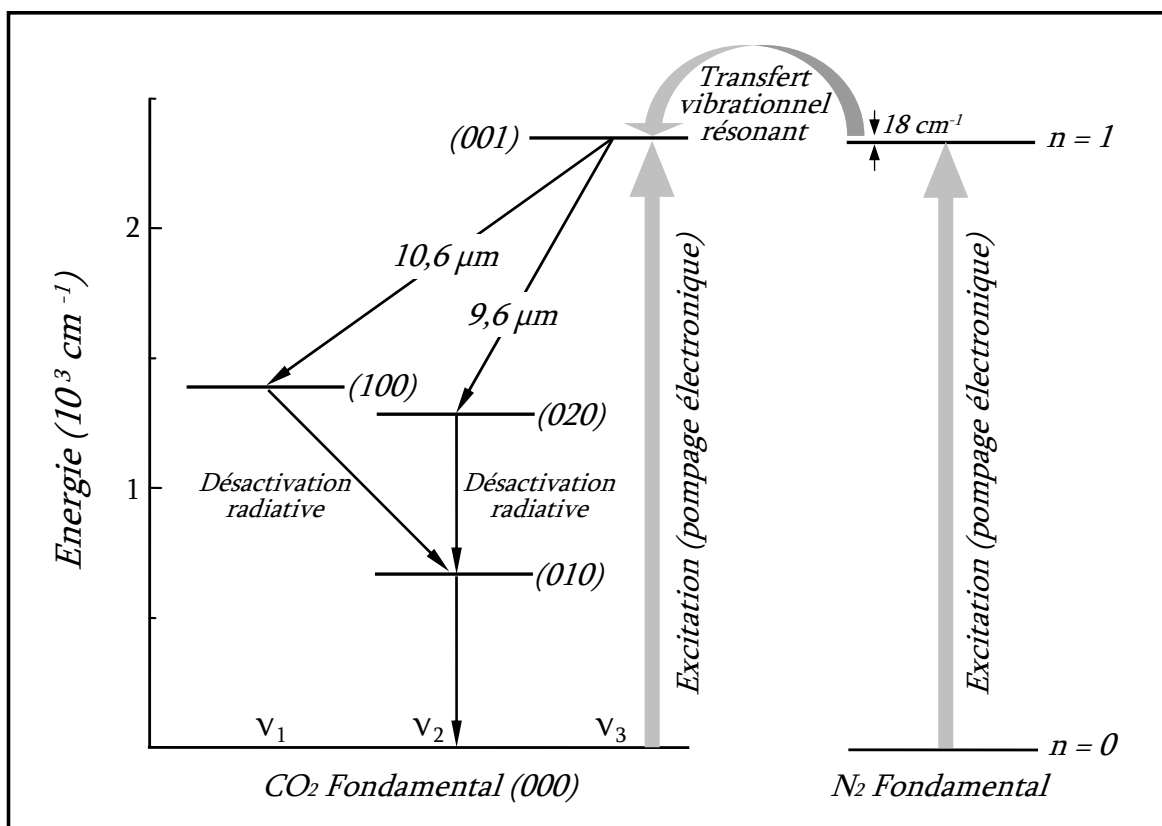


Figure. (3-1) : Diagramme des états d'énergie du système moléculaire CO₂-N₂.

① Vibrations des molécules :

La molécule linéaire de CO_2 possède trois modes de vibration [Pat 68] :

- un mode symétrique noté ν_1 ,
- un mode de déformation doublement dégénérée noté ν_2 ,
- un mode asymétrique noté ν_3 .

Ces trois modes sont quantifiés et leurs premiers niveaux excités sont situés respectivement à 1337 cm^{-1} , 667 cm^{-1} et 2349 cm^{-1} par rapport au niveau fondamental. Chacun de ces niveaux est lui-même subdivisé en sous-niveaux correspondant à la quantification de l'énergie de rotation de la molécule. Par souci de clarté de la figure, ces derniers ne sont pas représentés sur le diagramme des états d'énergie.

La molécule d'azote N_2 ne possède qu'un mode de vibration. L'énergie de la première vibration de la molécule ($n=1$) coïncide avec le premier niveau, noté 00^01 , du mode ν_3 de la molécule de CO_2 . Il va jouer un rôle important dans l'établissement et le maintien d'une inversion de population dans le milieu.

② Inversion de population :

Tous les lasers à gaz ont en commun la propriété d'être excités par des décharges électriques. Sur le plan de leur structure, les lasers à CO_2 réalisés dans les laboratoires utilisent un tube en verre, des miroirs, des électrodes et un mélange de CO_2 - N_2 -He scellé. Une décharge électrique dans le mélange gazeux libère des électrons qui, par collisions avec les molécules CO_2 et N_2 , excitent leurs niveaux de vibration. Les molécules de CO_2 sont excitées préférentiellement dans le niveau 00^01 du mode asymétrique ν_3 , tandis que les molécules d'azote sont portées, avec une plus forte probabilité, dans leur premier état de vibration, l'état métastable ($n = 1$). Du fait de la faible différence d'énergie (18 cm^{-1}) entre ces niveaux, les collisions résonnantes d'échange entre les molécules d'azote ($n = 1$) et les molécules de CO_2 dans leur état fondamental, canalisent continûment avec efficacité les molécules de CO_2 vers le niveau 00^01 . Or les molécules de CO_2 portées par les électrons de la décharge sur les modes ν_1 et ν_2 se dés excitent par collision beaucoup plus rapidement que le mode ν_3 et que celui de l'azote N_2 . Il s'en suit une inversion de population entre le niveau 00^01 de la vibration ν_3 et les niveaux 10^00 ou 02^00 des vibrations ν_1 et ν_2 .

La puissance de ce type de laser est largement augmentée si l'on ajoute de l'hélium au mélange. L'hélium a un double rôle : il dés excite par collision moléculaire les niveaux d'arrivée 10^00 et 02^00 des transitions laser et favorise, grâce à sa grande conductibilité thermique, l'évacuation de la chaleur vers les parois du tube.

En fait, l'interaction des électrons énergétiques de la décharge avec les molécules de CO_2 produit une décomposition du gaz moléculaire qui se dissocie progressivement en créant du monoxyde de carbone CO . Pour effectuer la catalyse inverse qui régénère le CO_2 , plusieurs solutions ont été proposées, parmi lesquelles l'addition de traces d'hydrogène ou de vapeur d'eau au mélange [Smi 69], l'emploi de cathodes [Smi 83] dont le revêtement chauffé à une température appropriée devient un catalyseur, l'augmentation de la pression [Bus 70] qui entraîne un déplacement de la distribution énergétique des électrons responsable de la dissociation vers les basses énergies et enfin l'écoulement du gaz [Smi 68], dont une très faible partie seulement est évacuée dans l'atmosphère et régulièrement remplacée.

③ Emission laser :

Lorsque l'inversion de population est établie, l'oscillation laser s'effectue suivant les bandes de vibration suivantes :

- Oscillation sur la bande $00^0_1 \rightarrow 02^0_0$ centrée à $9,6\mu\text{m}$:

Le niveau supérieur est le niveau 00^0_1 en résonance avec l'état métastable ($n = 1$) de l'azote et le niveau terminal est le niveau 02^0_0 du mode de déformation.

- Oscillation sur la bande $00^0_1 \rightarrow 10^0_0$ centrée à $10,6\mu\text{m}$:

La transition utilise le même niveau supérieur que dans le cas précédant, mais elle possède un gain plus élevé, reflétant la très faible durée de vie du niveau 10^0_0 du CO_2 , ainsi que la proportionnalité du gain au carré de la longueur d'onde. En pratique le système $\text{CO}_2\text{-N}_2\text{-He}$, oscille préférentiellement sur cette transition.

La désexcitation des niveaux inférieurs des transitions se fait par cascade du niveau 02^0_0 suivi du niveau 01^0_0 vers le fondamental.

La riche structure rotationnelle des niveaux entraîne l'existence de nombreuses raies d'émissions dans chacune des bandes à $9,6\mu\text{m}$ et $10,6\mu\text{m}$. Les raies émises sont alors désignées par $P(j)$ et $R(j)$, avec j le numéro du niveau rotationnel associé au niveau inférieur de la transition laser.

Dans la branche P , les transitions permises ont lieu de l'état de plus petit j à un état de plus grand j avec $\Delta j = +1$. Celles de la branche R correspondent à des transitions $j \rightarrow j - 1$ (ie. $\Delta j = -1$). Les transitions de la branche R possèdent un gain faible par rapport à celles de la branche P ; en pratique, elles ne sont observables que dans le cas d'une cavité sélective en longueur d'onde [Mey 68].

④ Oscillation monoraie :

Le nombre de raies de vibration-rotation qui sont susceptibles de donner lieu à une émission laser, est suffisamment grand pour qu'une concordance approximative puisse exister entre plusieurs de ces raies et des modes de résonance de la cavité. Ainsi si l'on ne prend pas de précautions particulières, l'émission sera multi-raies et multi-modes.

Plusieurs techniques sont utilisées pour limiter l'oscillation du laser sur une raie. Très souvent, elles consistent à employer des cavités sélectives en longueur d'onde. Les montages ordinairement utilisés sont :

- L'emploi de miroirs traités de façon à présenter une grande réflectivité à la longueur d'onde voulue avec simultanément un grand coefficient de transmission pour les autres longueurs d'ondes. On arrive ainsi à élever considérablement le seuil de ces oscillations au-dessus de celui de l'émission choisie.
- L'adaptation de cavités auxiliaires : un troisième miroir de faible réflexion peut être monté de manière à former soit une cavité Fabry-Perot avec le miroir de couplage [Wit 70], soit un interféromètre de Michelson avec ce dernier [Smi 72]. Un déplacement fin de ce miroir permet le choix de la raie d'oscillation.
- L'insertion d'un élément dispersif dans la cavité tels qu'un prisme défléchissant les émissions indésirables de l'axe de la cavité ou un réseau de diffraction.

Une autre manière, conduisant tout aussi au même résultat, consiste à introduire des pertes supplémentaires dans la cavité ; en pratique, l'insertion d'une ouverture circulaire, de dimension convenable, devant l'un des miroirs ou une oscillation du laser au seuil d'accrochage, conduit à un fonctionnement monoraie du laser.

⑤ Oscillation monomode axial :

Toutes les méthodes de sélection des modes tendent à accroître les pertes d'énergie pour les modes indésirables, tout en maintenant une grande reproductibilité pour le mode sélectionné.

La sélection des modes transverses est basée sur les différences qu'ils présentent dans la structure transversale du champ. Ceci a pour effet l'apparition d'une différence entre les pertes par diffraction des modes. Les modes axiaux présentent la même structure transversale du champ mais se distinguent les uns des autres par le nombre de demi-longueur d'onde contenu dans l'espace compris entre les miroirs du résonateur.

Un procédé simple de sélection des modes axiaux consiste à agir sur la longueur de la cavité de manière à ce que l'inter-mode longitudinal soit supérieur à l'élargissement de la raie sélectionnée (voir figure (3-2)). Pour une cavité Fabry-Pérot de longueur d donnée, deux modes axiaux adjacents sont séparés par un intervalle spectral $\Delta\nu_L$ qui s'écrit : $\Delta\nu_L = c/2d$. Si la distance entre les modes est plus grande que

la largeur de la raie d'amplification et si les fréquences centrales d'un mode quelconque sont proches de celles de la raie, l'émission laser sera monomode et donc monofréquence. La fréquence d'émission dépend dans ce cas de l'accord de la fréquence du mode à celle de la raie.

Ce procédé de sélection des modes axiaux convient bien aux lasers à CO₂ à basse pression. Dans ces conditions, la raie d'émission du gaz présente un élargissement de 60 Mhz dû principalement à l'effet Doppler. Ici, l'existence d'une limite supérieure de la longueur du résonateur à ne pas dépasser, conditionne le fonctionnement monomode du laser.

Chaque fois que la pression augmente de 1 torr, le taux d'accroissement de la largeur de la raie, résultant de l'accroissement du nombre de collision avec l'augmentation de la pression, est de l'ordre de 5 Mhz/torr [Kar 88], [Sif 83]. Si la pression devient trop importante, on peut tout simplement élever le niveau de pertes de sorte que l'amplification ne soit positive que pour un seul mode longitudinal.

Dans la majorité des cas, les raies d'amplification des substances actives sont beaucoup plus larges et la mise en oeuvre de ces procédés exigerait l'utilisation de cavités beaucoup trop courtes. Il va sans dire que le rétrécissement de la cavité comporte ses côtés négatifs : réduction de l'amplification par traversée, réduction de la puissance de sortie et augmentation (voir chapitre I) de la divergence du mode.

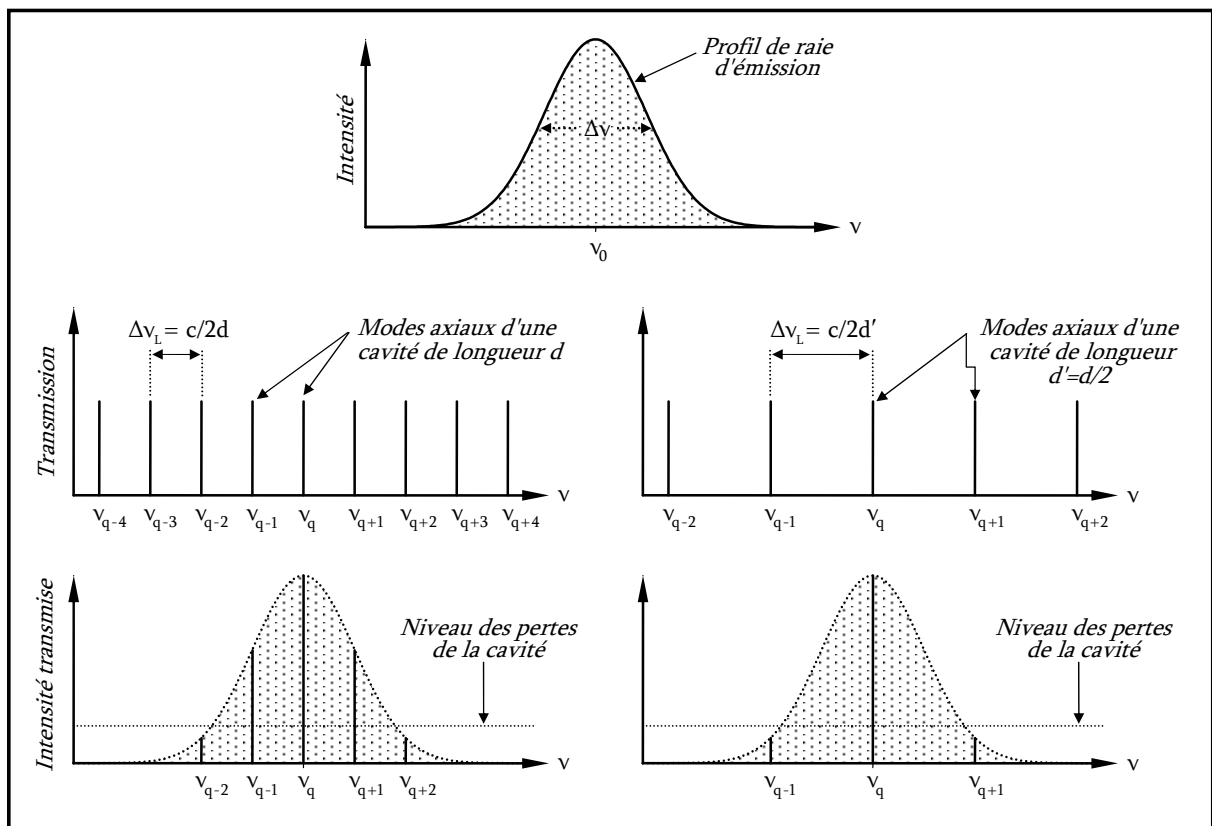


Figure. (3-2) : Sélection d'un mode longitudinal par réduction de la longueur de la cavité.

2. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL :

Le dispositif expérimental, que nous avons eu à réaliser au laboratoire, est présenté sur la figure (3-3). Il se compose d'un laser à gaz conventionnel et d'un ensemble d'éléments destinés à la détection et à l'analyse de l'émission laser.

- Le laser à gaz : Il est constitué d'une part par un tube à décharge (T) renfermant le mélange gazeux CO₂-N₂-He et d'autre part d'une cavité plano-concave. A l'intérieur de cette cavité, sont également présents une séparatrice (S) et un diaphragme (D) alignés sur l'axe de révolution du résonateur.
- Le banc de détection : Il comprend un chopper, deux détecteurs, un Monochromateur, une détection synchrone et un enregistreur.

L'ensemble repose sur une table en granit, elle même fixée à un bâti métallique monté sur un dispositif qui amortit les vibrations.

2.1. Le laser à gaz :

■ Le tube à décharge :

Il est en verre Pyrex scellé sur des électrodes d'extrémités. Nous l'avons choisi assez court (650 mm de longueur totale dont 400 mm sont utiles à la décharge) pour que le gain du milieu amplificateur ne soit pas très important, et de diamètre intérieur suffisamment grand ($\Phi = 9$ mm) afin d'éviter de diaphragmer le faisceau.

Pour minimiser les pertes par réflexion et assurer au rayonnement émis une polarisation linéaire fixe, nous avons utilisé des lames en NaCl inclinées à l'angle de Brewster. Ces fenêtres sont collées sur des terminaisons en duralium emmanchées aux extrémités du tube. Deux joints toriques permettent les dilatations différentielles entre les divers matériaux et assurent une étanchéité parfaite au système.

Dans ce tube, après avoir obtenu un vide dynamique de 2.10^{-6} torrs, nous avons introduit le mélange gazeux CO₂-N₂-He à une pression totale donnée et avec un rapport entre les pressions partielles respectivement de 1:1:4. Ces dernières nous ont été dictées par des réalisations antérieures au laboratoire [Akr 89], [Bat 94] de lasers de longueurs et de diamètres avoisinants le notre.

L'excitation du tube se fait par une haute tension continue d'environ 6kv à travers un réseau de résistances ballasts de 270 k Ω . L'association d'une résistance ballast en série avec le mélange, qui constitue un plasma d'impédance négative, est indispensable pour ramener l'ensemble à une impédance globalement positive. Le courant de décharge qui en résulte est d'une dizaine de milliampère et dépend, pour une tension d'alimentation donnée, de la pression totale du gaz qui compose le mélange, et de leurs pressions partielles.

L'interaction des électrons énergétiques de la décharge avec les molécules de CO₂ produit une décomposition du gaz moléculaire qui se dissocie progressivement en créant du monoxyde de Carbone, CO. Pour effectuer la catalyse inverse qui régénère le CO₂, nous avons utilisé une cathode dont le revêtement est en Nickel.

Le refroidissement du tube, nécessaire au maintien de l'inversion de population, est assuré par une circulation d'eau en circuit fermé à l'intérieure d'une jaquette cylindrique en verre Pyrex coaxiale à ce dernier.

■ La cavité plano-concave :

Les pertes importantes d'énergie liées aux faibles ouvertures du diaphragme, à l'absorption des lames et aux pertes par diffraction supplémentaires qui peuvent survenir à la suite d'un défaut d'alignement des miroirs [Fox 63], [Sti 63], [Ogu 65], ou du diaphragme [Wan 91a], nous ont amené à adopter le cas d'une cavité totalement fermée. La position du miroir plan de facteur de réflexion 1, définit l'origine de l'axe longitudinal z ; le miroir concave, de facteur de réflexion supérieur à 99 % et de rayon de courbure $R=2m$, est placé en $z = d$. Ces miroirs sont fixés sur des montures réglables par un système de vis micrométriques, dans deux directions transverses, afin d'assurer un alignement optimum de la cavité avec le tube à décharge.

Le miroir plan et le miroir concave sont maintenus à la distance $d=1,15m$ par trois barres en Invar dont le coefficient de dilatation linéaire est $\alpha=9.10^{-7}/\text{degré}$. Sachant qu'une variation de la température ambiante s'accompagne d'une variation de la fréquence d'oscillation du laser, nous avons fixé le miroir plan, en vu de compenser les dérives thermiques du mode oscillant, sur un rondin en Duralumin ($\alpha=23,2.10^{-6}/\text{degré}$) de longueur 44,5 mm. De plus, nous avons prévu dans notre montage une céramique piézo-électrique qui est un transducteur tension déplacement. Celle-ci est collée sur le miroir plan et permet grâce à l'ajustement de la tension appliquée, d'allonger ou de raccourcir la longueur de la cavité ; cela permet de déplacer le mode oscillant le long de la courbe de gain de la raie de transition, et de fixer ainsi la fréquence d'émission du laser. La céramique est de type cylindrique et sa sensibilité est de 0,48 nm/V.

■ La séparatrice :

La lame utilisée est en NaCl. Son épaisseur est de 10 mm et sa position dans la cavité, entre le tube et l'un de miroirs, est variable. Nous l'avons posée sur une tourelle microcontrôle graduée en degrés et minutes, avant de l'incliner à 45° par rapport à l'axe du résonateur. Son épaisseur et son inclinaison ont été choisies de façon à minimiser la recombinaison des faisceaux, issus des réflexions internes et externes de la lame, sur la surface sensible du détecteur

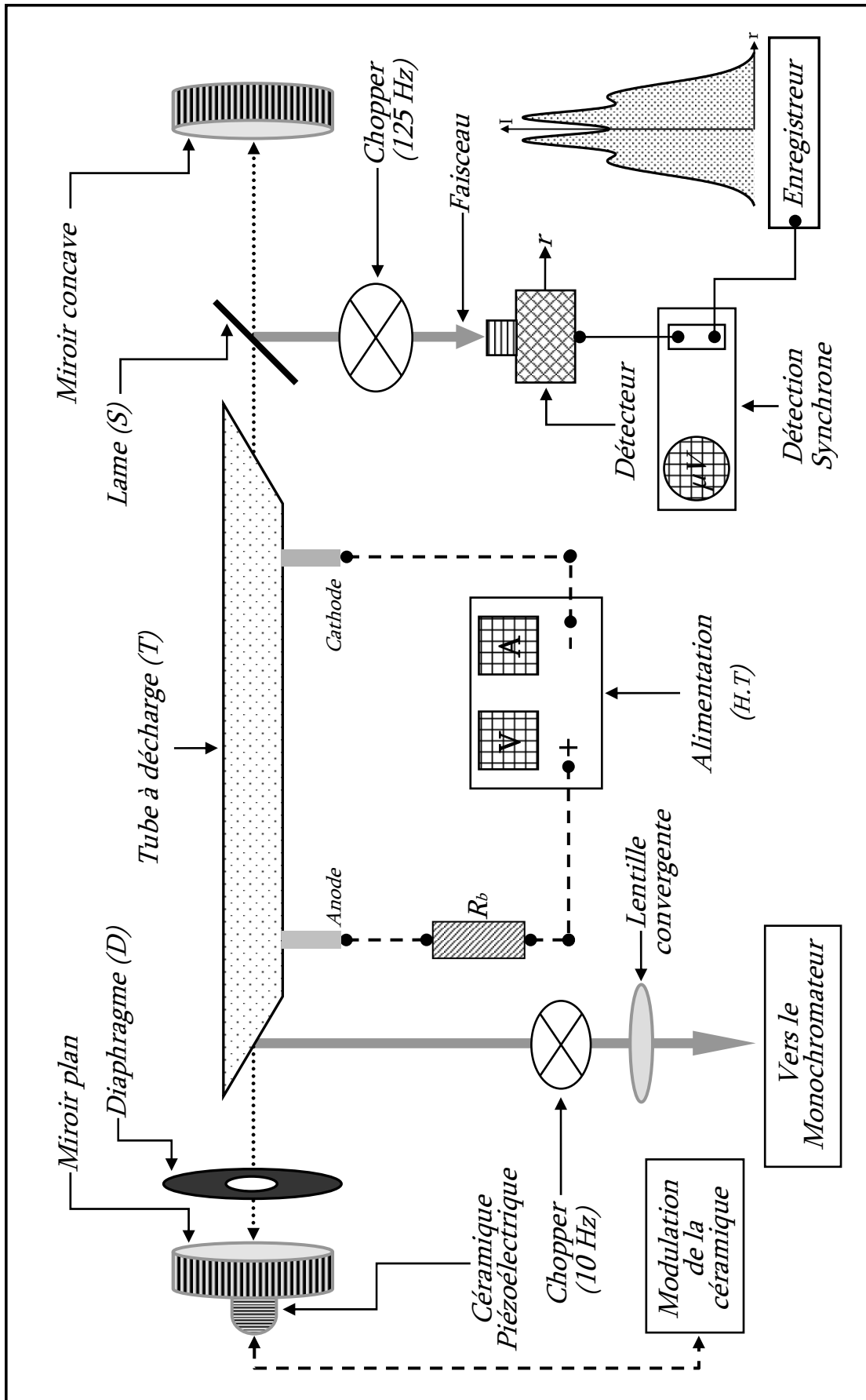


Figure. (3-3) : Dispositif

- **Le diaphragme :**

Un diaphragme à iris placé au plus près des miroirs, permet de localiser les pertes par diffraction à cet endroit. Sa position peut être ajustée, pour un alignement optimum avec la cavité et le tube à décharge, au moyen d'un mouvement micrométrique dont les déplacements se font dans un plan perpendiculaire à l'axe du faisceau infrarouge. Son réglage reste cependant, très long et très difficile. Nous supposons qu'il est correct pour un maximum d'intensité.

2.2. La détection :

Dans la partie détection du signal, nous avons utilisé un thermocouple de large surface pour suivre les variations de la puissance du laser et une cellule photovoltaïque HgCdTe, quasi ponctuelle, pour mesurer le profil radial de l'intensité du mode. L'enregistrement du spectre d'émission du laser a été effectué à l'aide d'un Monochromateur M25.

- **Le thermocouple :**

Le faisceau laser, issu d'une des lames de Brewster, est recueilli par un thermocouple placé au foyer d'un miroir concave. Ce détecteur est caractérisé par un temps de réponse de l'ordre de la milliseconde ; sa sensibilité est de $20 \mu\text{V}/\mu\text{W}$ pour une fréquence de modulation de 10 Hz et sa surface active est de $0,6 \text{ mm}^2$.

Pour suivre les variations de la puissance laser, nous utilisons un amplificateur à détection de phase (P.A.R). Des impulsions de fréquence 10 Hz sont dans ce cas utilisées comme signal de référence.

- **La cellule photovoltaïque :**

C'est un détecteur quantique composé d'une double jonction (HgTe-CdTe) dont la surface sensible, de $300 \mu\text{m}$ de diamètre, est suffisamment faible pour considérer, en première approximation, que la cellule mesure l'intensité du signal. Sa réponse spectrale est optimale à $10 \mu\text{m}$ et sa détectivité est maximale à la température de l'azote liquide.

Le déplacement transverse du détecteur, placé sur le trajet des faisceaux aller et retour issus de la lame intra-cavité, est assuré par des microcontrôleurs avec une précision de l'ordre du $1/50 \text{ mm}$.

Le faisceau laser intercepté par la cellule est modulé mécaniquement à 125 cycles au moyen d'un chopper 125 Hz commandé par un modulateur. Cette modulation sert à superposer au signal laser un signal de référence carré à 125 Hz à l'entrée de la détection synchrone. Ceci dans le but d'éliminer le bruit de fond et de donner un signal en sortie, vers l'enregistreur Sefram, proportionnel à l'intensité du courant délivrée par le détecteur.

■ Le Monochromateur :

Une partie du rayonnement émis par le laser, lorsque celui-ci fonctionne en mode multi-raies, est recueillie et focalisée par une lentille de sel sur la fente d'entrée d'un monochromateur M25 équipé d'un réseau. Ceci permet d'enregistrer le spectre d'émission à l'aide du thermocouple que nous disposons directement derrière la fente de sortie du monochromateur (figure 3-4). Le réseau est blazé à $7,5 \mu\text{m}$; son nombre de traits au mm est de 122 ; nous l'utilisons dans le domaine de fréquences $9,33 \rightarrow 12,87 \mu\text{m}$.

3. CARACTERISATION DU LASER :

Le spectre des fréquences d'émission d'un laser dépend des conditions de fonctionnement du tube à décharge (intensité du courant, pression du mélange amplificateur) et des pertes d'énergie des vibrations associées (pertes de couplage, pertes de diffraction résultant de la taille et de la forme géométrique des miroirs, ...) vis-à-vis du gain du mélange.

Nos premières manipulations sont destinées à fixer d'une part, ces paramètres pour une oscillation monofréquence longitudinale du laser. D'autre part, nous savons, d'après l'étude faite au chapitre 2, que l'introduction d'un diaphragme d'ouverture convenable permet la sélection du mode fondamental TEM_{00} . Il conduit cependant, à augmenter les pertes de la cavité, de ce fait, l'obtention d'une puissance optimum présente un intérêt particulier pour nous.

3.1. Variation de la puissance laser :

Nous avons effectué la mesure de la puissance du rayonnement émis et observé ses variations avec la pression et le courant de décharge au moyen du thermocouple.

■ Influence de la pression :

La figure (3-5a) représente les variations de la puissance du laser en fonction de la pression totale du mélange amplificateur. La puissance émise augmente avec la pression avant d'atteindre une valeur maximale à une pression de 24 torrs. La pression partielle de CO_2 est alors de 4 torrs. Cette valeur optimise le gain du mélange, en application de la relation empirique $P(\text{CO}_2) \cdot \phi = 4 \text{torrs} \cdot \text{cm}$, où ϕ représente le diamètre intérieur du tube à décharge [Che 67]. A des pressions supérieures à 24 torrs, nous observons une chute du signal. Ceci est lié en partie, au déplacement du maximum de la distribution énergétique des électrons libres vers des énergies plus basses [Sob 67], ce qui a pour conséquence de réduire le nombre d'électrons efficaces susceptibles d'exciter les molécules N_2 partenaires des molécules de CO_2 .

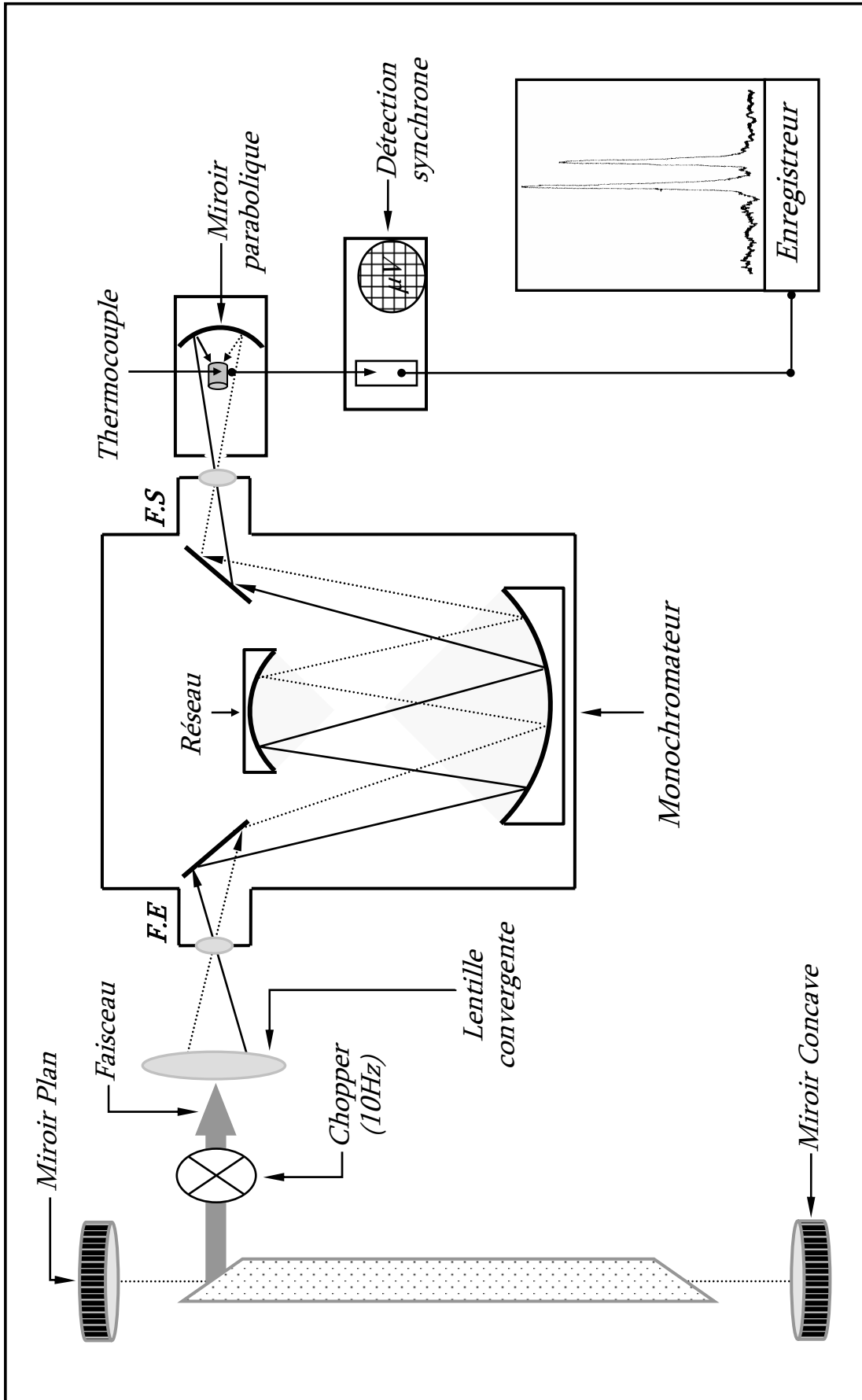


Figure (3-4) : Dispositif expérimental pour la mesure du spectre d'émission du laser.

■ Influence du courant de décharge :

Pour un mélange à une pression totale donnée, il existe une valeur optimale du courant de décharge pour laquelle la puissance de sortie est maximale. La courbe que l'on a schématisée sur la figure (3-5b) correspond, pour le même mélange, à une pression totale de 24 torrs. La décroissance de la puissance, à partir de sa valeur maximale, est liée à une élévation de la température du mélange qui est préjudiciable au maintien de l'inversion de population par excitation (désexcitation) du niveau inférieur (supérieur) de la transition laser. A ceci s'ajoute l'effet de la dissociation de la molécule CO_2 dont le taux augmente avec l'intensité du courant de décharge [Smi 74].

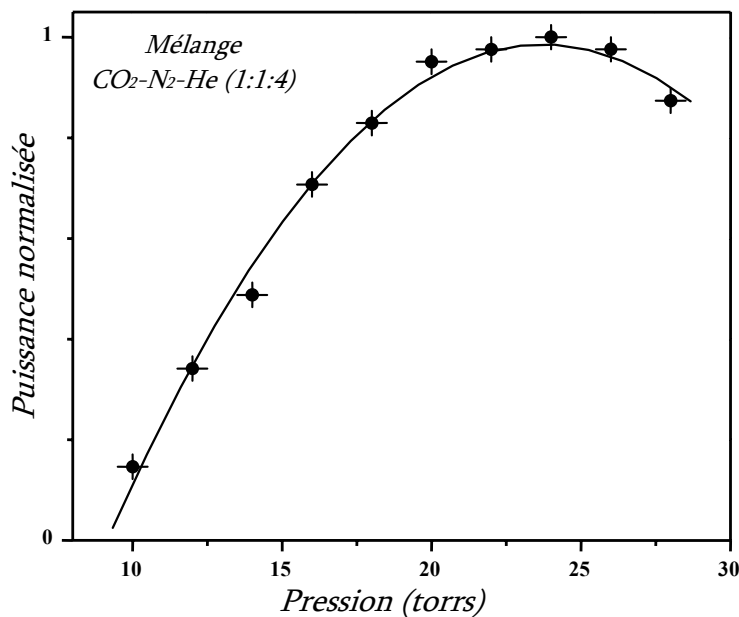


Figure. (3-5a) :
Puissance normalisée du signal en fonction de la pression

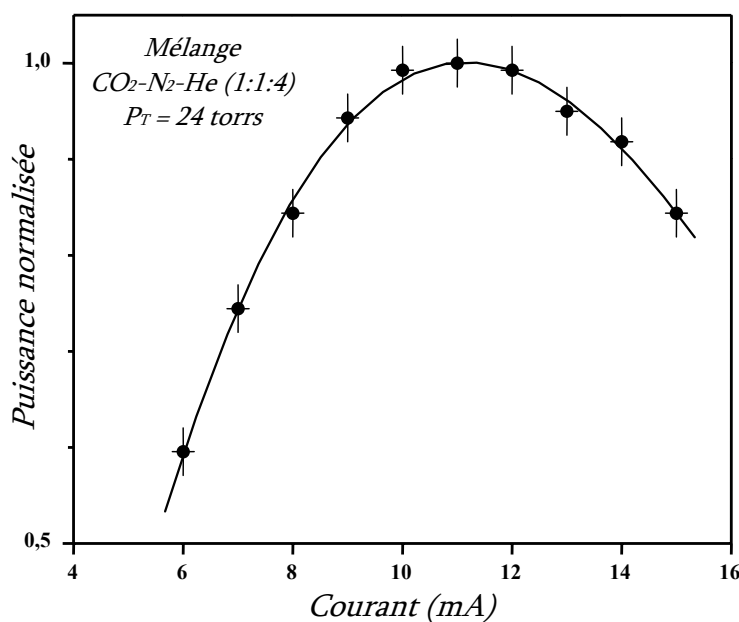


Figure. (3-5b):
Puissance normalisée du signal en fonction du courant de décharge.

3.2. Spectre d'émission du laser :

3.2.1. Aspect multiraie de l'émission :

L'enregistrement que l'on a reproduit sur la figure (3-6a) a été obtenu avec des largeurs de fente d'entrée et de sortie du Monochromateur de 0,1 mm et une pression totale du mélange de 20 torrs. Le courant dans le tube à décharge a été maintenu à sa valeur optimale (11mA). Le spectre de la figure (3-6a) nous montre que, bien que le nombre de raies de vibration-rotation du CO₂ soit élevé, l'émission favorise les raies de plus fort gain au détriment des autres. Dans notre cas, seules deux raies de vibration-rotation ont été observées.

3.2.2. Emission monoraie :

Si deux ou plusieurs modes axiaux de la cavité se trouvent dans le profil de plusieurs raies différentes, ils engendreront une compétition entre ces raies. Ceci constitue une source d'instabilité en fréquence du laser.

Dans le but de ne permettre l'oscillation du laser que sur une seule raie de vibration-rotation, nous avons, à défaut d'éléments dispersifs, suivi l'influence du gain du mélange et des pertes, volontairement introduites, sur l'aspect multi-raies de l'émission.

■ Influence du courant de décharge :

La diminution progressive du courant de décharge à partir de sa valeur optimale se traduit d'une part, par une réduction notable des intensités des raies. D'autre part, nous avons noté qu'une oscillation du laser au voisinage du seuil d'accrochage (≈ 7 mA), conduit au résultat de la figure (3-6b) où seule une raie de vibration-rotation est en mesure d'apparaître sur le spectre.

■ Influence de l'augmentation des pertes de la cavité :

L'élévation du niveau de pertes dans le résonateur réduit le spectre d'émission de l'interféromètre. En effet, ne peuvent osciller que les modes dont le gain est supérieur aux pertes de la cavité.

Le spectre monoraie de la figure (3-6c), enregistré dans les mêmes conditions d'intensité et de pression que celui de la figure (3-6a), a été obtenu en insérant un diaphragme circulaire, de diamètre $\phi = 7$ mm, contre le miroir concave. Les rayonnements correspondants aux fréquences de la raie de moindre intensité n'apparaissent plus, sur cet enregistrement, du fait des pertes élevées qu'elles subissent sur le diaphragme.

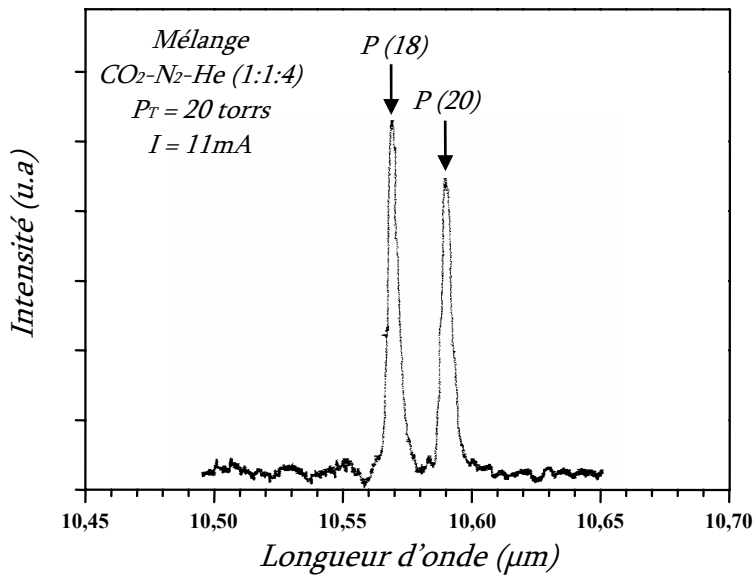


Figure. (3-6a) :
Spectre multiraie de
 l'émission.

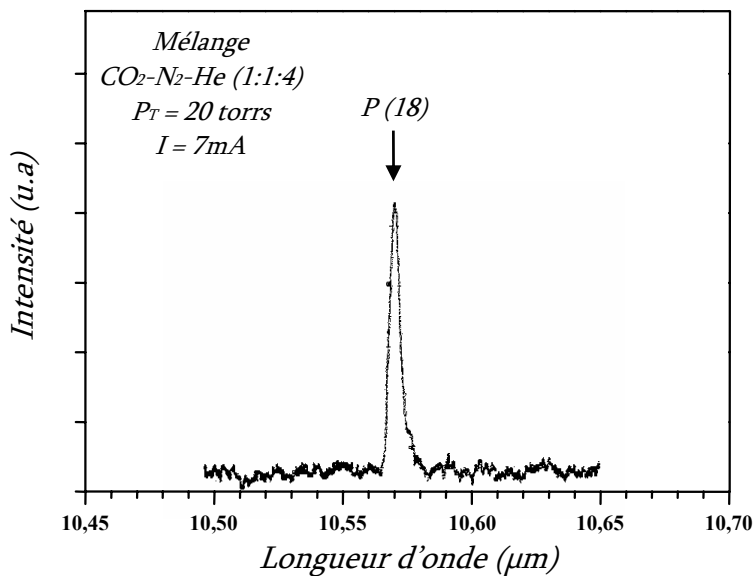


Figure. (3-6b) :
Spectre monoraie :
 Influence du courant de
 décharge.

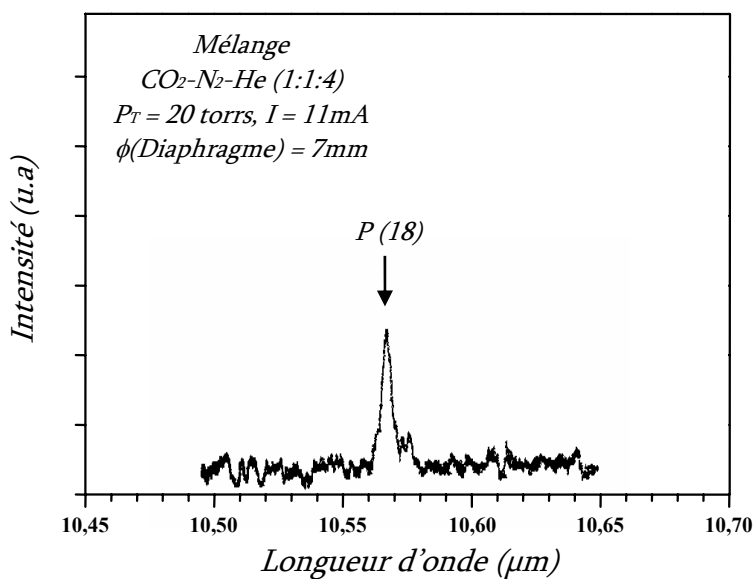


Figure. (3-6c) :
Spectre monoraie :
 Influence d'un diaphragme
 Intra-cavité

3.3. Sélection d'un mode longitudinal :

Les manipulations précédentes nous ont permis de sélectionner une seule raie d'oscillation. Toutefois, cela ne conduit pas forcément à un fonctionnement monofréquence longitudinal du laser.

Le spectre de fréquences (modes longitudinaux) de la cavité vide consiste en plusieurs composantes discrètes aux fréquences :

$$\nu_q = q \frac{c}{2d}$$

Où, q est un entier quelconque, d la longueur de la cavité et c la vitesse de la lumière dans le vide. Deux modes adjacents sont séparés par un intervalle $\Delta\nu_L$ qui s'écrit :

$$\Delta\nu_L = \frac{c}{2d}.$$

Pour notre cavité de 1150 mm de long, l'espace entre modes axiaux correspond ainsi à un intervalle de 130 MHz. L'élargissement de la raie par effet Doppler ($\Delta\nu = \Delta\nu_D = 60$ MHz) d'une part, et son taux d'accroissement, résultant de l'accroissement du nombre de collision avec l'augmentation de la pression qui est de l'ordre de 5 MHz/torr pour un mélange de CO₂-N₂-He [Kar 88], [Sif 83], d'autre part, peut ne pas conduire à un fonctionnement monofréquence longitudinal du laser. La pression et la température du mélange qui sont, dans nos conditions expérimentales, respectivement de l'ordre de 20 torrs et 400°k, confèrent à la raie de transition sélectionnée une largeur globale de l'ordre de l'inter-mode longitudinal. Pour écarter toutes possibilités d'un basculement du champ oscillant du mode longitudinal TEM_{00(q)} au mode suivant TEM_{00(q+1)} lors du relevé du profil transverse du champ, l'oscillation du laser est rendue monofréquence longitudinale grâce à la céramique piézo-électrique. Sur cette céramique, nous appliquons une tension continue, réglable manuellement, pour déplacer le mode oscillant au centre de la raie de transition sélectionnée.

4. MESURE DU PROFIL TRANSVERSE DE L'INTENSITE:

Dans cette partie, nos résultats expérimentaux sont présentés. Ils correspondent aux profils transverses d'intensité du mode fondamental d'un laser CO₂ monofréquence longitudinal et diaphragmé.

Afin de distinguer entre les différentes distributions, nous rappelons que nous repérons sur chaque courbe :

- la position du diaphragme par le paramètre z_d : $z_d = 0$ indique un diaphragme placé contre le miroir plan, et $z_d = d$ sur le miroir concave de sortie.

▸ l'ampleur des effets de diffraction par le paramètre $y = b / w(z_d)$, où b est le rayon du diaphragme et $w(z_d)$ la largeur du faisceau gaussien non perturbé à la position z_d du diaphragme.

▸ la position longitudinale, où sont effectués les relevés, par le paramètre normalisé z/d . En fait, trois positions intra-cavité sont successivement utilisées : deux positions axiales nous permettent de sonder le champ au voisinage immédiat du diaphragme (champ proche du diaphragme), alors que la dernière nous renseigne sur le comportement du champ loin du diaphragme.

4.1. Courbes et analyse des résultats :

Les distributions des figures (3-7) à (3-10) montrent les différentes formes que prend la répartition transversale de l'intensité du mode fondamental au centre de la raie dans le cas d'une cavité plano-concave diaphragmée soit du côté du miroir plan (figures (3-7) et (3-8)), soit du côté du miroir concave (figures (3-9) et (3-10)). Afin de juger de l'accord théorie-expérience, nous avons également représenté, à gauche de chaque distribution expérimentale, l'intensité du champ correspondant calculé par la méthode de Stéphan [Sté 83]. Pour la majorité de ces résultats, le détecteur est positionné soit sur le trajet de l'onde aller (E_f) quand la cavité plano-concave est diaphragmée du côté du miroir plan, soit sur celui de l'onde retour (E_b) dans le cas contraire. L'étude théorique du chapitre 2 révèle que ce sont précisément ces ondes là qui subissent l'effet de la diffraction. Nous donnons cependant, sur la figure (3-7), quelques profils transverses des ondes aller et retour dans un même plan d'observation et pour différentes ouvertures du diaphragme.

Les courbes de la figure (3-7) permettent de voir, dans un même plan d'observation, les différences qui caractérisent les deux ondes progressives d'une cavité fortement diaphragmée ($y = 1,05$ et $1,23$). Nous notons que le profil radial de l'onde aller est caractérisé par des pics et des creux synonymes d'une forte diffraction, alors qu'il est régulier quasi gaussien pour l'onde retour.

Selon que le diaphragme se trouve sur l'un ou l'autre des miroirs de la cavité, on peut noter que l'effet d'une forte troncature du mode fondamental se manifeste principalement en champ proche du diaphragme, qui n'est plus gaussien, observé soit sur le champ aller (figures (3-7) et (3-8) pour $y = 1,05 ; 1,23$ et $z_d = 0$), soit sur le champ retour (figure (3-9) pour $y = 1,05 ; 1,23$ et $z_d = d$). Cette influence diminue cependant, soit en champ lointain (figure (3-10) pour $y = 1,05 ; 1,23$ et $z/d = 0,4$), soit pour une grande ouverture du diaphragme, où l'on peut caractériser le champ par un profil gaussien (figures (3-7) à (3-10) pour $y = 2$).

4.2. Confrontation avec la théorie et conclusion :

Compte tenu de la répétitivité des courbes expérimentales, nous constatons que dans l'ensemble, les conclusions auxquelles nous avons abouti reflètent bien celles prévues par la théorie. Par rapport aux courbes théoriques, nous remarquons cependant, sur l'aspect qualitatif de nos résultats, une atténuation des pics et des creux sur les distributions, de même qu'une structure, généralement, dissymétrique de l'intensité du champ. Parmi les origines possibles à ces écarts à la théorie on peut citer celles qui peuvent être liées à un alignement non parfait des miroirs (notamment le miroir plan) ou à un léger écartement du diaphragme par rapport à l'axe de révolution du résonateur qui peuvent en effet conduire à augmenter les pertes par diffraction et à introduire une structure dissymétrique, significative, du mode [Fox 63], [Ogu 65], [Sti 65], [Wan 91b]. Si ces effets peuvent être minimisés dans le cas d'une lumière visible, ils restent cependant, difficilement éliminables pour un rayonnement infrarouge ou tout autre rayonnement invisible. A cela, il faudra ajouter les effets dus à l'épaisseur de la lame intra-cavité et à la dimension de la surface sensible du détecteur. Les réflexions multiples que subit le faisceau sur la lame donnent, en fait, lieu à plusieurs faisceaux de sortie. Ceci conduit, à la suite d'interférences entre le faisceau central et les faisceaux secondaires, à élargir le faisceau et à atténuer les pics et les creux sur les courbes. De même, nous avons supposé que la cellule mesurait l'intensité sur l'axe ; en fait son diamètre de 0.3 mm comparé à celui du faisceau qui s'étend de 3.65 mm sur le miroir plan à 5.6 mm sur l'autre extrémité de la cavité, montre qu'elle intègre entre 12 % et 19 % du signal. Ceci constitue une raison supplémentaire qui fait que, sur nos résultats, les pics et les creux ne soient pas assez prononcés.

Conclusion :

Compte tenu des conditions expérimentales, l'accord théorie-expérience est qualitativement acceptable.

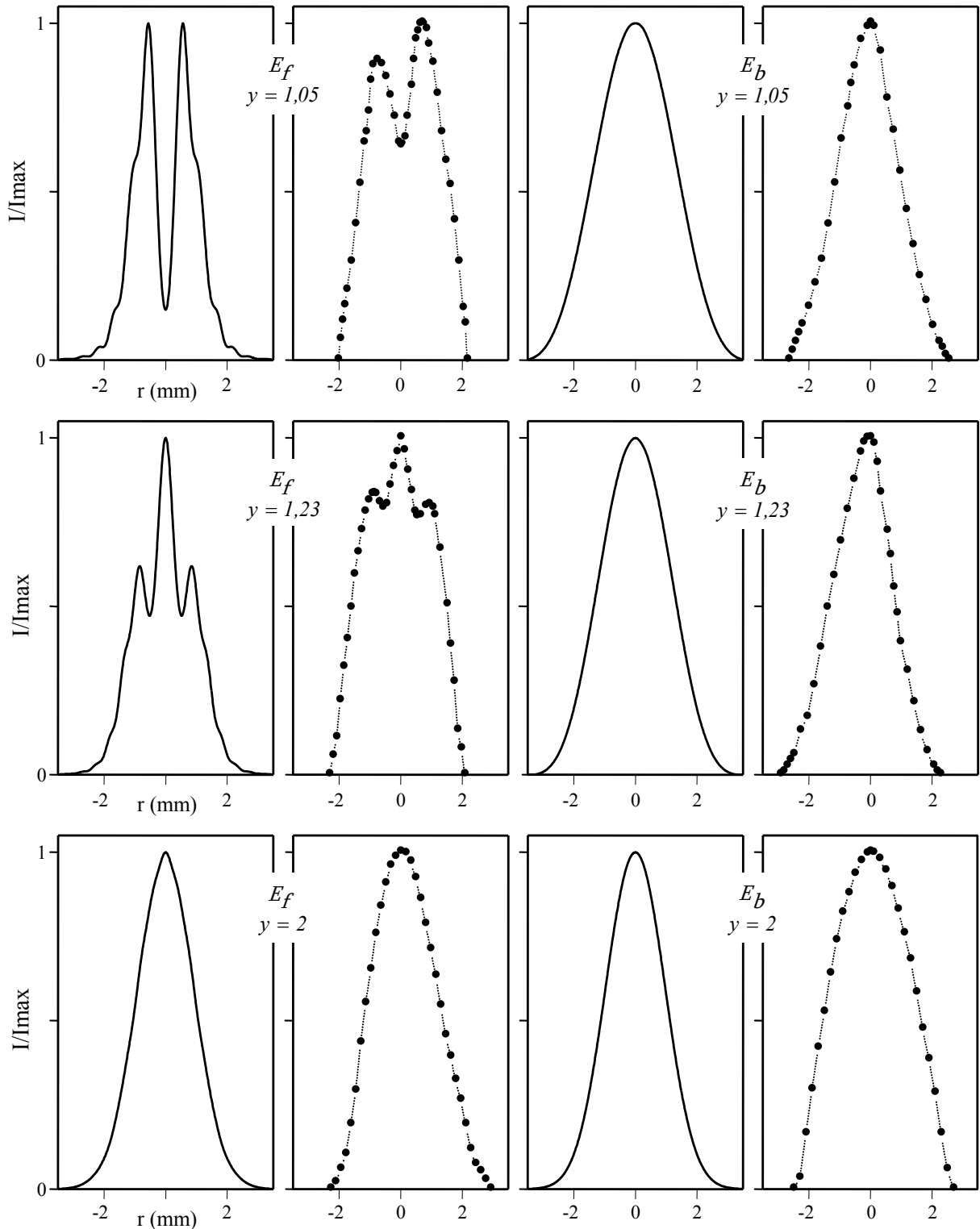


Figure. (3-7) : *Miroir plan diaphragmé*

Distributions transverses d'intensité pour les ondes aller (E_f) et retour (E_b) en champ proche du diaphragme ($z/d = 0,15$). Le paramètre caractérisant la troncature du faisceau vaut : $y = b/w(0) = 1,05 ; 1,23$ et 2 . Ici, à gauche de chaque courbe expérimentale est tracé, en trait plein, la courbe théorique qui lui correspond.

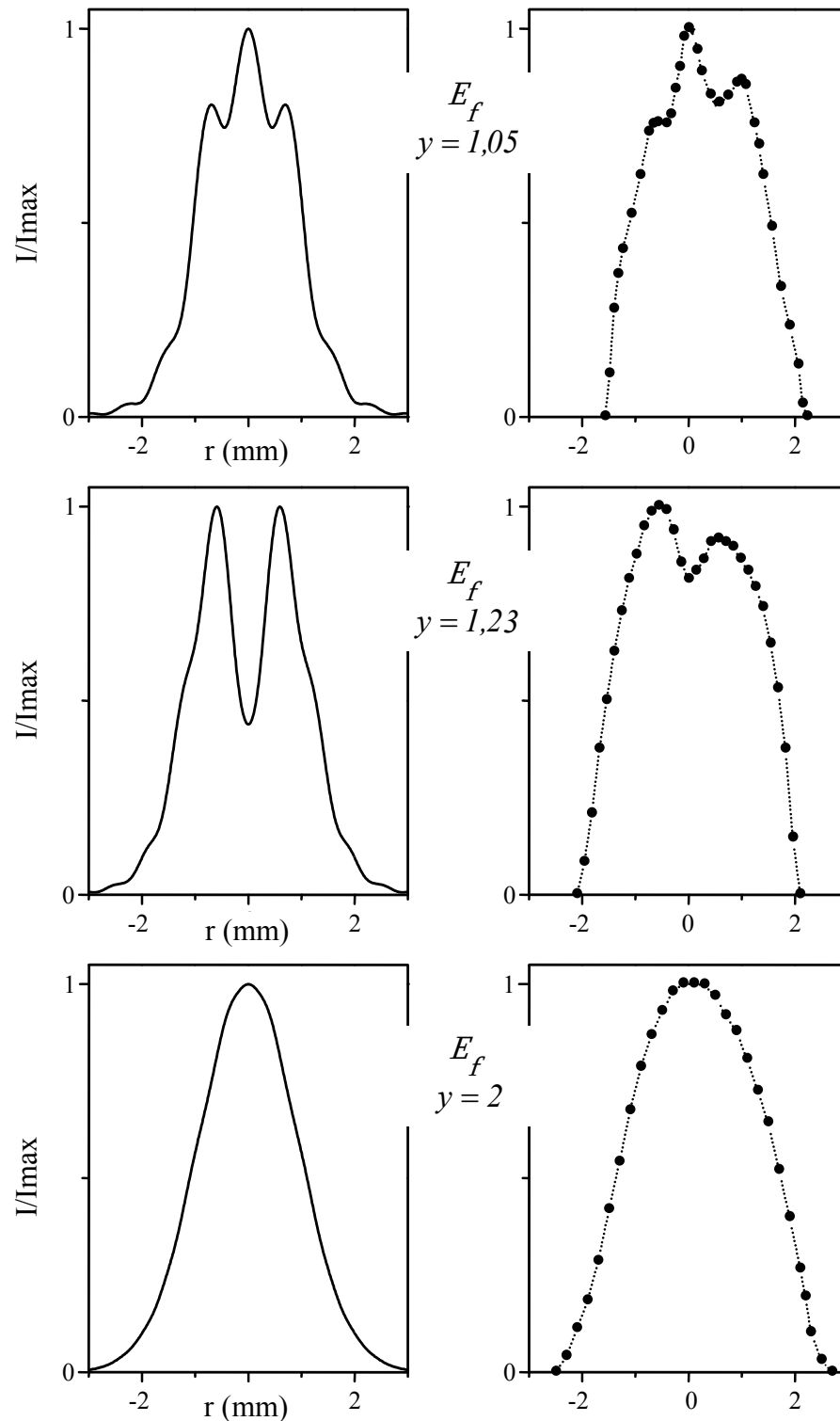


Figure. (3-8) : *Miroir plan diaphragmé*

Distributions transverses d'intensité pour l'onde aller (E_f) en champ proche du diaphragme ($z/d = 0,2$). Le paramètre caractérisant la troncature du faisceau vaut : $y = b/w(0) = 1,05$; $1,23$ et 2 . Ici, à gauche de chaque courbe expérimentale est tracé, en trait plein, la courbe théorique qui lui correspond.

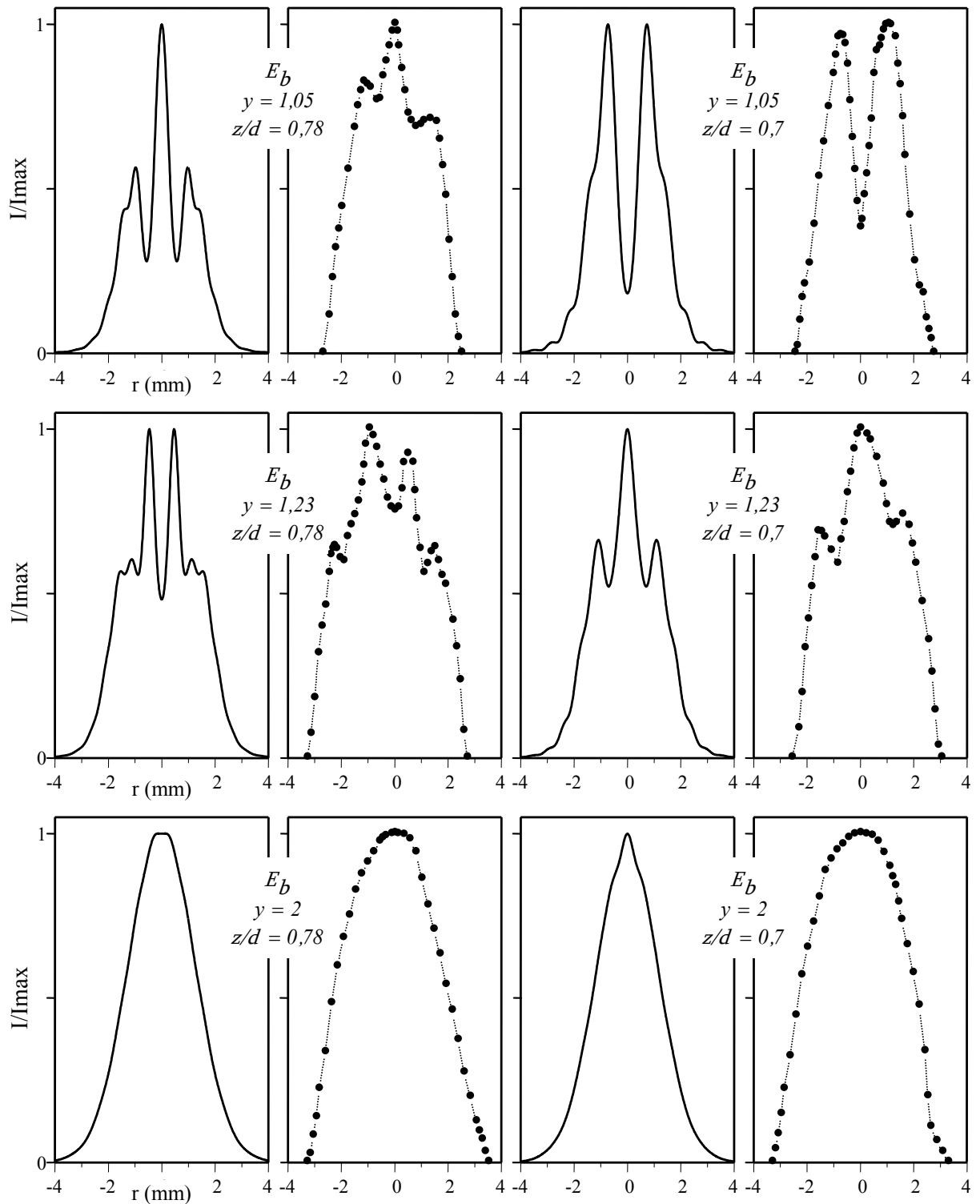


Figure. (3-9) : Miroir concave diaphragmé

Distributions transverses d'intensité pour l'onde retour (E_b) en champ proche du diaphragme ($z/d = 0,78$ et $0,7$). Le paramètre caractérisant la troncature du faisceau vaut : $y = b/w(d) = 1,05$; $1,23$ et 2 . Ici, à gauche de chaque courbe expérimentale est tracé, en trait plein, la courbe théorique qui lui correspond.

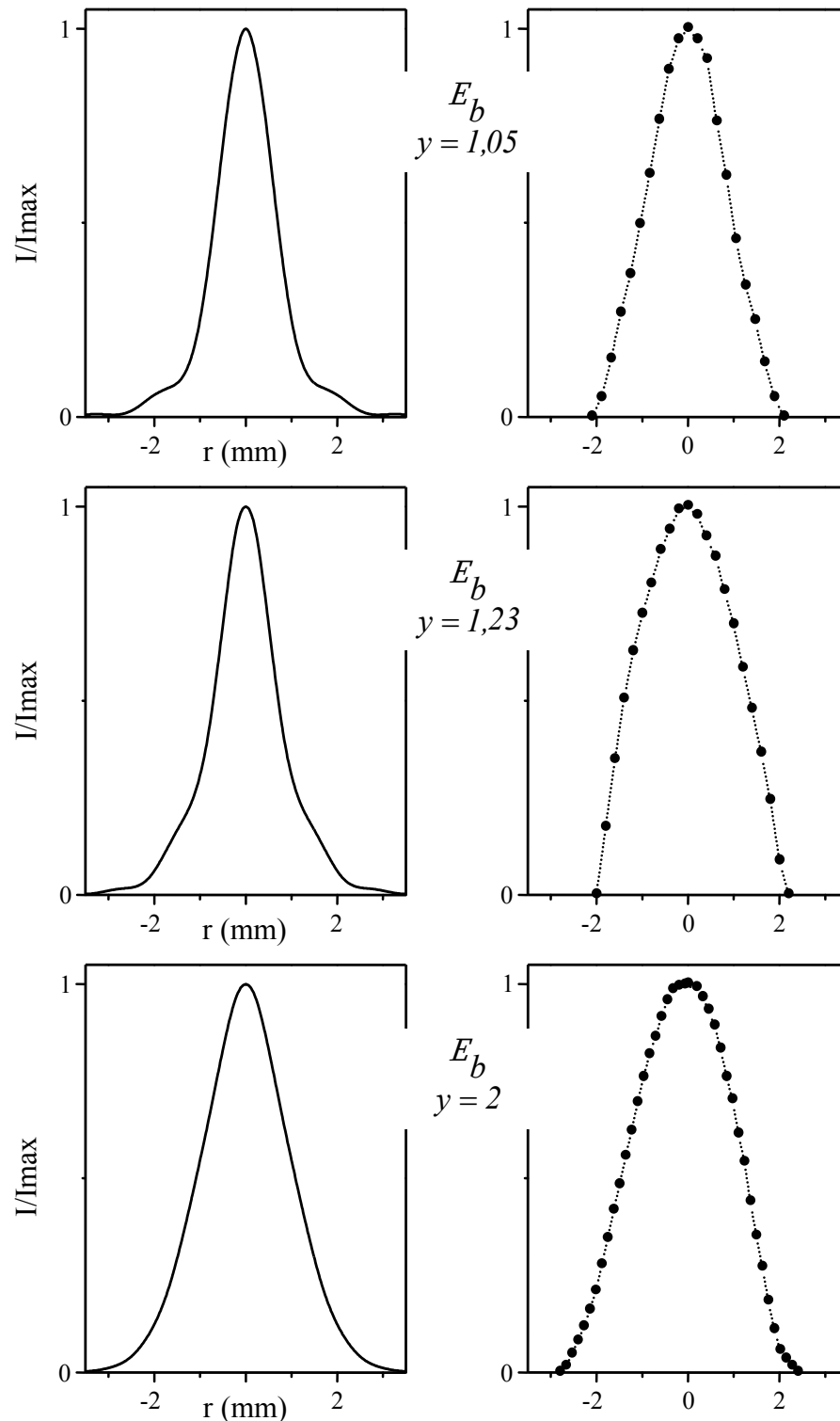


Figure. (3-10) : Miroir concave diaphragmé

Distributions transverses d'intensité pour l'onde retour (E_b) en champ lointain du diaphragme ($z/d = 0,4$). Le paramètre caractérisant la troncature du faisceau vaut : $y = b/w(d) = 1,05$; $1,23$ et 2 . Ici, à gauche de chaque courbe expérimentale est tracé, en trait plein, la courbe théorique qui lui correspond.

CONCLUSION GENERALE
ET
PERSPECTIVES

Conclusion générale

L'objectif de notre travail était d'étudier la distribution du champ correspondant au mode fondamental à l'intérieur d'une cavité laser diaphragmée. Nous nous sommes intéressés en particulier à la cavité dissymétrique plano-concave, d'usage courant dans la conception des résonateurs lasers, pour laquelle beaucoup de résultats théoriques concernant l'influence de la diffraction résonante sur les caractéristiques telles que la distribution spatiale du mode fondamental, sa fréquence de résonance, la divergence de l'émission sur ce mode et le volume occupé par ce dernier dans la cavité existent maintenant. Cependant, peu d'efforts ont été consentis à l'étude expérimentale de ces différents paramètres. Sur ce plan, notre contribution a concerné la mise en évidence expérimentale, des effets de diffraction associés à la propagation du mode fondamental gaussien à l'intérieur de la cavité en relevant pour différentes positions sur l'axe, le profil transverse du champ des ondes progressives aller et retour en fonction de l'ouverture du diaphragme et de sa position dans la cavité.

Pour mener à bien l'étude théorique, nous avons choisi d'utiliser la méthode développée par Stephan, pour l'avantage qu'elle offre dans la détermination du champ en n'importe quel point du laser. Nous avons alors, décomposé le champ sur la base des fonctions de Laguerre-Gauss. Le choix de ces fonctions nous a été suggéré par la symétrie axiale de nos systèmes.

Les résultats numériques obtenus dans le cas de la raie du CO_2 à $10.6 \mu\text{m}$ nous ont permis de voir qu'un diaphragme de faible ouverture, situé contre l'un ou l'autre des miroirs de la cavité, rendait différentes les distributions spatiales de l'intensité des ondes aller et retour. Nous avons vu en particulier, sur les intensités axiales, qu'un nouveau pincement est introduit par le diaphragme. La position de ce nouveau point focale, sépare la zone de champ proche de la zone de champ lointain. Quant à la répartition transversal de l'intensité, elle montre que l'onde qui est réfléchiée par le miroir non diaphragmé garde un profil quasi-gaussien, alors que celle qui provient du miroir diaphragmé est caractérisée par un champ proche fortement perturbé par la diffraction et une répartition quasi-gaussienne en champ lointain du diaphragme.

Pour confirmer ces prévisions théoriques, nous avons réalisé un laser monomode en fréquence fonctionnant sur la raie $10,6 \mu\text{m}$ du CO_2 et relevé expérimentalement les distributions transverses de l'intensité diffractée au centre de la raie de transition. Nous avons vu que l'accord théorie expérience était satisfaisant dans la limite de la précision de notre matériel.

Perspectives

Les nombreux résultats obtenus par la méthode de Stephan et leurs vérifications expérimentales correspondantes, montrent que cette méthode peut s'appliquer à chaque fois qu'il est question de cavités diaphragmées. Nous avons tout de suite pensé à l'étendre à l'étude de la perturbation du mode fondamental dans une cavité diaphragmée possédant une faible ouverture au centre du miroir diaphragmé. Il faut dire que le recours aux cavités à miroir de sortie totalement réfléchissant et troué au centre est apparu aux longueurs d'ondes submillimétriques du fait de la difficulté de trouver, à ces longueurs d'onde, des revêtements multicouches à pertes suffisamment faibles pouvant servir dans la conception des miroirs du résonateur. Dans cette cavité, Le diaphragme sert à favoriser l'oscillation du laser sur le mode fondamental TEM_{00} et le trou à extraire une partie du rayonnement. Ce qui constitue le signal de sortie.

Les résultats numériques correspondants seulement à de faibles ouvertures du trou et caractérisant les variations de la distribution du champ du mode fondamental, de ses pertes de diffraction et du facteur de discrimination entre les modes sont exposés en détail dans l'[annexe E](#). Nous comptons poursuivre cette étude préliminaire pour dériver les propriétés d'un laser de puissance non diaphragmé ayant une grande ouverture de couplage. En raison d'une plus grande déperdition de l'énergie à travers le trou, l'oscillation du laser sur le mode fondamental n'est plus possible dans ce cas, et il faudra tenir compte, dans le développement des champs sur la base des modes de Laguerre-Gauss, de tous les modes géométriques en particulier, ceux à indice angulaire $\ell \neq 0$. En fait, ce sont précisément ces modes qui peuvent réellement osciller dans une telle cavité du fait de leur intensité, à l'origine, nulle au centre.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

- [Abr 72] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, 1972.
- [Ait 88] K. Ait-Ameur and H. Ladjouze, *Fundamental mode distribution in a diaphragmed cavity*, J. Phys. D : Appl. Phys., vol 21, 1566-1571, 1988.
- [Ait 92] K. Ait-Ameur, H. Ladjouze and G. Stephan, *Diffraction effects in a resonant cavity with two nonequivalent apertures*, Appl. Opt., vol 31, 397- 405, 1992.
- [Ait 93a] K. Ait-Ameur and G. Stephan, *Effective beam truncation of the fundamental mode in an apertured cavity*, Opt. Lett., vol 18, 938-940, 1993.
- [Ait 93b] K. Ait-Ameur, *Influence of the longitudinal position of an aperture inside a cavity on the transverse mode discrimination*, Appl. Opt., vol 32, 7366-7372, 1993.
- [Ait 93c] K. Ait-Ameur, *Transverse mode selection in resonator with a super-Gaussian aperture*, Journal of Modern Optics., vol 40, 1833-1838, 1993.
- [Akr 89] A. Akrib, *Etude de l'effet Optogalvanique dans un milieu amplificateur à gaz carbonique*, Thèse de Magister, USTHB, 1989.
- [Ang 82] A. Angot, *Compléments de mathématiques*, Masson, 1982.
- [Arf 73] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, 2nd edition, Academic Press, New York, 1973.
- [Bat 94] K. Battou, *Etude de la dissociation de la molécule de CO₂ dans un laser à gaz carbonique continu*, Thèse de Magister, USTHB, 1994.
- [Bor 59] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics*, 6^{ème} edition, Pergamon Press, 1959.
- [Bou 86] A. Bourzami, *Etude et réalisation d'un laser CO₂ monomode fonctionnant en écoulement à basse pression*, Thèse de Magister, USTHB, 1986.
- [Bus 70] R. G. Buser and J. J. Sullivan, J. Appl. Phys., vol 41, N° 2, 1970.
- [Cam 69] J. P. Campbell and L. G. Deshazer, *Near fields of truncated-Gaussian apertures*, J.O.S.A., vol 59, 1427-1429, 1969.
- [Car 80] W. H. Carter, *Spot size and divergence for Hermite-Gaussian beams of any order*, Appl. Opt., vol 19, 1027-1029, 1980.
- [Cas 31] H. B. G. Casimir, *Rot of a rigid body in quantum. Mech*, J. B. Walters, the Hague, 1931.
- [Cau 81] H.J. Caulfield, D. Dvore, J.W. Goodman and W. Rhodes, *Eigenvector determination by noncoherent optical methods*, Appl. Opt., vol 20, 2263-2265, 1981.
- [Che 67] P. K. Cheo and H. G. Cooper, IEEE J. Quant. Elect., vol QE-3, 1967.
- [Cou 57] C. P. Courtoy, Canadian Journal of Phys., vol 35, 1957.
- [Der 95] Z. D. Kaddour, H. Ladjouze and A. Kellou, *Field distribution in He-Ne waveguide lasers*, J. Phys. D : Appl. Phys., vol 28, 2245-2251, 1995.

- [Fox 61] A. G. Fox and T. Li, *Resonant modes in a maser interferometer*, Bell. Syst. Tech. J., vol 40, 453-488, 1961.
- [Fox 63] A. G. Fox and T. Li, *Modes in a maser interferometer with curved and tilted mirrors*, Proc. IEEE., vol 51, 80-89, 1963.
- [Fox 66] A. G. Fox and T. Li, *Effect of gain saturation on the oscillating modes of optical masers*, IEEE. J. Quantum. Electron., vol QE-2, 774, 1966.
- [Fre 69] R. J. Freiberg and A. S. Halsted, Appl. Opt., vol 8, 355, 1969.
- [Her 63] G. H. Herzberg, *Spectra of diatomic molecules*, Van Nostrand, Princeton, 1963.
- [Hug 71] J. Hughes, Research Lab. Intern. Research. Report N° 452, 1971.
- [Kar 88] N. Karlov, *Leçons d'électronique quantique*, Traduction française, Mir, 1988.
- [Kel 85] A. Kellou, *Etude du champ résonnant d'un laser diaphragmé*, Thèse de Doctorat 3^{ème} cycle, I.N.S.A. de Renne, 1985.
- [Kel 87] A. Kellou and G. Stephan, *Etude du champ proche d'un laser diaphragmé*, Appl. Opt., vol 26, 76-90, 1987.
- [Kem 37] E. C. Kemble, *Fundamental principles of quantum mechanics*, Mc Graw-Hill, New York, 1937.
- [Kog 66] H. Kogelnik and T. Li, *Laser beams and resonator*, Appl. Opt., vol 5, 1550-1567, 1966.
- [Kor 81] P. H. Kortz and H. Weber, *Diffraction losses and mode structure of equivalent TEM₀₀ optical resonator*, Appl. Opt., vol 20, 1936-1940, 1981.
- [Leg 64] C. R. Legay, Acad. Sci., vol 259, 99-102, 1964.
- [Let 65] V. S. Letokhov, Zh. Tekh. Fiz., vol 35, 809, 1965.
- [Li 63] T. Li, *Mode selection in an aperture-limited concentric maser interferometer*, Bell. Syst. Tech. J., vol 42, 2609-2620, 1963.
- [Li 65] T. Li, *Diffraction loss and selection of modes in maser resonators with circular mirrors*, Bell. Syst. Tech. J., vol 44, 917-932, 1965.
- [Li 67] T. Li and H. Zucker, *Modes of a Fabry-Perot resonator with output coupling apertures*, J.O.S.A., vol 57, 984-986, 1967.
- [Lit 69] J. W. Y. Lit and R. Tremblay, *Boundary diffraction wave theory of cascaded apertures diffraction*, J.O.S.A., vol 59, 559-567, 1969.
- [McC 65] D. E. McCumber, *Eigenmodes of a symmetric cylindrical confocal laser resonator and their perturbation by output-coupling apertures*, B.S.T.J., vol 44, 333-363, 1965.

- [McC 69] D. E. McCumber, *Eigenmodes of an asymmetric cylindrical confocal laser resonator with a single output-coupling aperture*, B.S.T.J., vol 48, 1919-1936, 1969.
- [McN 69] G. T. McNice and V. E. Derr, *Analysis of the cylindrical confocal laser resonator having a single circular coupling aperture*, IEEE. J. Quantum. Electronics., vol QE-5, 569-575, 1969.
- [Mey 68] C. Meyer, P. Pinson, C. Rossetti and P. Barchewitz, *Stabilisation en puissance d'un laser à gaz carbonique monochromatique et monomode*, Can. J. Phys., vol 47, 2565, 1968.
- [Mol 73] C. B. Moler and G. W. Stewart, *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*, SIAM. J. Numer. Anal., vol 10, 241-256, 1973.
- [Ogu 65] H. Ogura, Y. Yoshida and J. I. Ikenoue, *Theory of deformed Fabry-Perot resonator*, J. Phys. Soc. Japan., vol 20, 598-609, 1965.
- [Oti 79] G. Otis, J. L. Lachambre and P. Lavigne, *Focusing of laser beams by a sequence of irises*, Appl. Opt., vol 18, N°6, 875-883, 1979.
- [Pat 64] C. K. N. Patel, *Continuous-wave laser action on vibrational-rotational transitions in CO₂*, Phys. Rev. Lett., vol 136, 1187-1193, 1964.
- [Pat 65] C. K. N. Patel, *CW High power N₂-CO₂ laser*, Appl. Phys. Lett., vol 7, 290-292, 1965.
- [Pat 68] C. K. N. Patel, *High-power CO₂ lasers*, Sci. Am., vol 219, 22, 1968.
- [Phi 83] R.L. Philips and L.C. Andrews, *Spot size and divergence for Laguerre-Gaussian beams of any orders*, Appl. Opt., vol 22, 643-644, 1983.
- [Pic 83] M. Piche, P. Lavigne, F. Martin and P.A. Belanger, *Modes of resonators with internal apertures*, Appl. Opt., vol 22, N°3, 1999-2006, 1983.
- [Sag 81] N. Sage, K. Tanaka and O. Fukumitsu, *Diffraction of a Gaussian beam through a finite aperture lens and the resulting heterodyne efficiency*, Appl. Opt., vol 20, 2827-2831, 1981.
- [Sch 67] R. G. Schell and G. Tyras, J.O.S.A., vol 59, 1427, 1969.
- [She 70] G. Shennagel, *Eigenmodes of a laser resonator with concave mirrors and a hole for beam extraction*, Soviet Physics – Technical Physics., vol 14, 1553-1559, 1970.
- [Sie 86] A. E. Siegman, *Lasers*, University Science books, Mill Valley, California, 1986.
- [Sif 83] R. Si-Fodil, *Etude et réalisation d'un laser CO₂, basse pression*, Thèse de Magister, USTHB, 1983.
- [Smi 68] A. L. S. Smith, Phys. Lett., vol 27A, N°7, 1968.
- [Smi 69] A. L. S. Smith, J. Phys. D : Appl. Phys., vol 2, N°2, 1969.

- [Smi 72] P. W. Smith, *Mode selection in lasers*, Proc. IEEE., vol 60, 422-440, 1972.
- [Smi 74] A. L. S. Smith and J. M. Austin, J. Phys. D : Appl. Phys., vol 7, 1974.
- [Smi 83] A. L. S. Smith, H. Shields and A.E. Webb, IEEE. J.Q.Elec., vol QE-19, 1983.
- [Sob 67] N. N. Sobolev and V. V. Sokovikov; Sov. Phys. Usp., vol 10, 153, 1967.
- [Sta 65] H. Statz and C. L. Tang, *Problem of mode determination in optical masers*, J. Appl. Phys., vol 36, 1816-1819, 1965.
- [Ste 83] G. Stephan and M. Trümper, *Inhomogeneity effects in a gaz laser*, Phys. Rev. A., vol 28, 2344-2362, 1983.
- [Sti 63] C. M. Stickley, *Optical quality and radiation patterns of ruby laser*, Appl. Opt., vol 2, 855-860, 1963.
- [Tan 72] K. Tanaka, M. Shibukawa and O. Fukumitsu, *Diffraction of a wave beam by an aperture*, IEEE. Trans Microwave Theory Tech., vol 20, 749-755, 1972.
- [Tan 85] K. Tanaka, N. Saga and H. Mizokami, *Field spread of a diffracted Gaussian beam through a circular aperture*, Appl. Opt., vol 24, 1102-1105, 1985.
- [Tra 01] M. Traïche, *Distribution du rayonnement à l'intérieur d'une cavité laser, cas d'une cavité à miroir de sortie troué*, Thèse de Magister, USTHB, 2001.
- [Tra 02] M. Traïche and A. Kellou, *Calculation of the resonant eigenfield in the basis of Laguerre-Gaussian modes for rotationally symmetric plano-concave stable resonators*, accepté pour publication dans Applied Optics.
- [Vai 63] L. A. Vainshtein, *Open resonator for lasers*, JETP (USSR)., vol 44, 1050-1067, 1963; English translation : Soviet Phys. JETP., vol 17, 709-719, 1963.
- [Wan 91a] L. Y. Wang, *Etude de distributions de champs dans les lasers diaphragmés*, Thèse de Doctorat, Université de Renne I, 1991.
- [Wan 91b] L. Y. Wang and G. Stephan, *Asymmetric mode of an off-axis diaphragmed laser*, J. of Mod. Opt., vol 38, 1947-1956, 1991.
- [Wit 70] W. J. Witteman and R. J. Carbone, J. Quantum. Elect., vol QE-6, N°7, 1970.

ANNEXES

Annexe A : Description du mode Fondamental Gaussien.

Annexe B : Introduction aux modes d'Hermite-Gauss.

Annexe C : Introduction aux modes de Laguerre-Gauss.

Annexe D : Généralités sur le laser moléculaire à CO₂.

Annexe E : Etude du mode fondamental dans une cavité à miroir de sortie troué.

ANNEXE A

DESCRIPTION DU MODE FONDAMENTAL GAUSSIEN

L'équation d'onde paraxiale de Kogelnik admet comme solution des ondes dont le profil d'intensité est de forme gaussienne ou encore modes gaussiens. Dans cette annexe, nous allons rechercher la solution la plus simple présentant la symétrie cylindrique. Ce type de solution, notée simplement TEM_{00} , est connu sous le nom de mode fondamental.

Notant par $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ la coordonnée radiale dans le plan transverse. L'équation (1-8) du chapitre 1 remplacée par son homologue en coordonnées cylindriques (r, φ, z) , devient pour un champ à symétrie cylindrique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + 2ik \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-1})$$

De manière à modéliser correctement la structure d'un faisceau laser, considérons la fonction d'essai suivante :

$$\xi(r, z) = A(z) \cdot \exp\left(i \frac{k r^2}{2R(z)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \quad (\text{A-2})$$

de structure transverse gaussienne. $A(z)$ est une fonction complexe décrivant l'amplitude et la phase du champ suivant z . les variations de $\xi(r, z)$ suivant la coordonnée radiale r sont contenues dans les termes de phase et d'amplitude.

Remarques :

① Le caractère gaussien du profil est exprimé par le terme $\exp(-r^2/w^2(z))$. Pour z fixé, l'amplitude du champ diminue d'un facteur $1/e$ à une distance $r = w(z)$ de l'axe. Le rayon $w(z)$ est une mesure de l'extension radiale du faisceau.

② Dans l'approximation paraxiale $r = \sqrt{x^2 + y^2} \ll z$, on peut remarquer que l'onde sphérique $\exp\left[ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right] \approx \exp\left[ikz(1 + (x^2 + y^2)/2z^2)\right]$ comporte un terme de phase $\exp(ikr^2/2z)$ décrivant des surfaces équiphases sphériques de rayon z . Par analogie avec l'onde sphérique paraxiale, le faisceau gaussien est ici caractérisé par des fronts d'onde de rayon $R(z)$. $R(z)$ est appelé rayon de courbure du faisceau.

On peut réécrire (A-2), d'une façon plus générale, en introduisant la notation :

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{2i}{k w^2(z)} \quad (\text{A-3})$$

La fonction complexe $Q(z)$ est appelée par analogie avec les ondes sphériques, rayon de courbure complexe. $\zeta(r, z)$ prend alors la forme :

$$\zeta(r, z) = A(z) \cdot \exp \left[i \frac{kr^2}{2Q(z)} \right] \quad (\text{A-4})$$

Pour obtenir les fonctions $Q(z)$ et $A(z)$, reportons (A-4) dans (A-1). Nous aboutissons aux deux équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$\frac{dQ(z)}{dz} = 1 \quad (\text{A-5a})$$

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\frac{A(z)}{Q(z)} \quad (\text{A-5b})$$

Examinons successivement les solutions de (A-5a) et (A-5b).

① Rayon de courbure complexe $Q(z)$

L'intégration de (A-5a) permet d'obtenir $Q(z)$:

$$Q(z) = z - C$$

C est une constante d'intégration complexe. Posons, en toute généralité, $C = z_0 + iz_R$ (z_R et z_0 sont des réels quelconques). Dans ce cas, en $z = z_0$, $Q(z_0) = -iz_R$. Comme l'indique (A-3), le rayon de courbure est alors infini : le faisceau est caractérisé par un front d'onde plan. Fixons à présent l'origine de l'axe z en $z_0 = 0$. Ainsi, l'origine, jusqu'à présent arbitraire, est maintenant caractérisée par $R(z = 0) \rightarrow \infty$. On obtient finalement :

$$Q(z) = z - iz_R \quad (\text{A-6})$$

où z_R est une constante réelle d'intégration appelée longueur de Rayleigh ; sa signification physique apparaîtra un peu plus loin.

En reportant (A-6) dans (A-3), nous obtenons en $z = 0$:

$$w(z = 0) \equiv w_0 = (2z_R/k)^{1/2} = (z_R \lambda / \pi)^{1/2} \quad (\text{A-7})$$

et dans un plan z quelconque :

$$w(z) = w_0 \cdot [1 + (z/z_R)^2]^{1/2} = w_0 \cdot [1 + (\lambda z / \pi w_0^2)^2]^{1/2} \quad (\text{A-8})$$

$$R(z) = z \cdot [1 + (z_R/z)^2] = z \cdot [1 + (\pi w_0^2 / \lambda z)^2] \quad (\text{A-9})$$

$$z_R = \pi w_0^2 / \lambda \quad (\text{A-10})$$

Le paramètre w_0 , valeur minimale du rayon $w(z)$, est appelé rayon de ceinture ou d'étranglement du faisceau. C'est une grandeur clé du faisceau : en effet pour une longueur d'onde donnée, toutes ses grandeurs caractéristiques $R(z)$, $w(z)$ ainsi que sa longueur de Rayleigh z_R sont complètement déterminées par w_0 .

Phase

L'intégration de (A-5b) est immédiate et donne $A(z)$:

$$A(z) = \frac{C}{[1 + (z/z_R^2)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp[-i\phi(z)] = C \frac{w_0}{w(z)} \cdot \exp[-i\phi(z)] \quad (\text{A-11})$$

où C est une constante d'intégration. Le terme de phase $\phi(z)$, caractéristique de l'onde gaussienne, est appelé déphasage de Gouy [Sie 86] :

$$\phi(z) = \arctan(z/z_R) \quad (\text{A-12})$$

L'ensemble des résultats (A-2), (A-11) et (A-12) permet d'obtenir l'expression complète du champ électrique :

$$E(x, y, z) = C \frac{w_0}{w(z)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \cdot \exp[i\Phi(r, z)]. \quad (\text{A-13})$$

Où $\Phi(r, z)$ est la phase totale du champ :

$$\Phi(r, z) = kz - \phi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (\text{A-14})$$

Remarques :

① Par rapport à l'onde plane, la phase comporte deux contributions supplémentaires : l'une longitudinale est la phase de Gouy $\phi(z)$, l'autre radiale donne au front d'onde sa forme sphérique.

② Le facteur d'amplitude $1/w(z)$ joue un rôle fondamental : c'est lui qui assure la conservation de l'énergie du faisceau lors de la propagation. En effet le flux du vecteur de Poynting à travers une surface transversale infinie doit rester constant lors de la propagation. Ce flux est proportionnel à :

$$\Theta = \iint E \cdot E^* ds = C^2 (\pi w_0^2 / 2) = \text{Constante}$$

Dans la suite, on choisit la norme du mode fondamental et on pose $C = (\sqrt{2/\pi})/w_0$. On écrit alors l'expression du champ normalisé :

$$E(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \cdot \exp[i\Phi(r, z)] \quad (\text{A-15})$$

③ L'onde gaussienne est d'amplitude symétrique par rapport à $z = 0$. Sa forme est celle donnée par la figure (A-1).

④ Les hyperboles de la figure (A-1) représentent l'intersection d'un plan contenant l'axe de propagation z et des hyperboloïdes $(x^2 + y^2) = A \cdot w^2(z)$, où A est une constante. Les surfaces sphériques ont pour rayon $R(z)$, donné par la relation (A-9), tandis que pour z grand ($z \gg z_R$), les hyperboles ont pour asymptotes :

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = w(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0} \cdot z$$

On peut définir un angle de divergence par :

$$\theta_{div} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (\text{A-16})$$

⑤ Le terme $\exp[i(kz - \phi(z))]$ est le terme de phase longitudinale. Le faisceau gaussien ajoute donc un terme de phase variant de $0 \rightarrow 90^\circ$ au terme de phase conventionnel kz . En fait cet angle est rarement pris en compte quand on étudie la propagation. Cependant, il devient très important dans le cas des cavités résonnantes puisque il va être à l'origine de la différence de fréquence entre les modes transverses.

$$\text{L'intensité du faisceau } I = |E|^2 \text{ s'écrit : } I(r, z) = \frac{2}{\pi w^2(z)} \cdot \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right]$$

correspondant, dans le plan transverse, au profil donné par la figure (A-1).

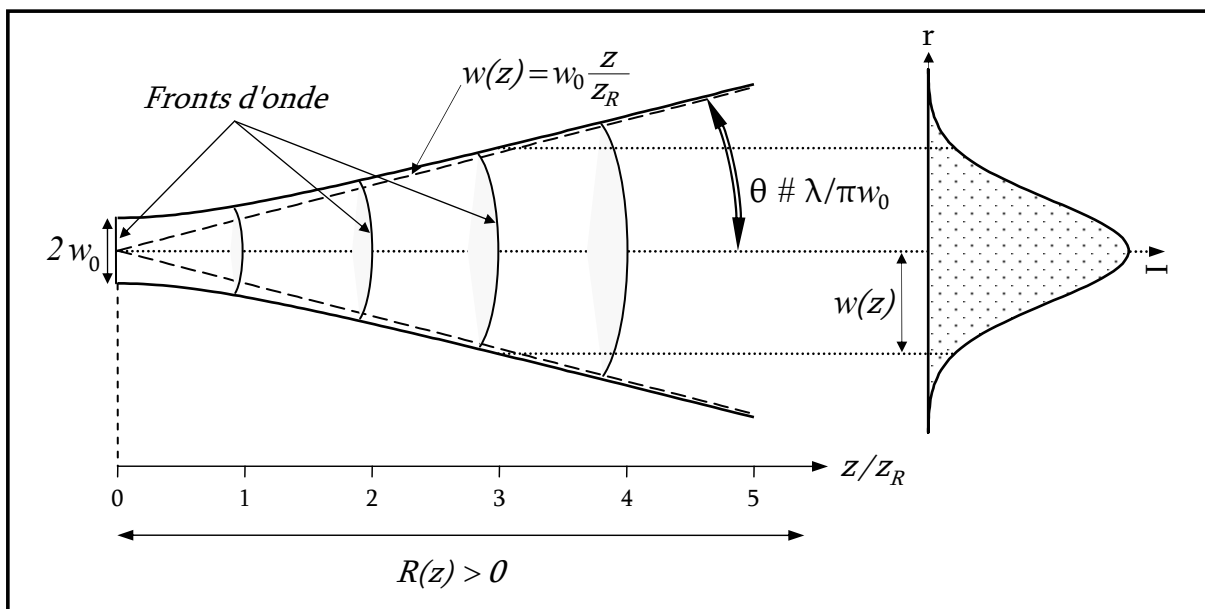


Figure. (A-1) : Rayon de courbure du front d'onde $R(z)$ et rayon $w(z)$ d'un faisceau gaussien. La figure de droite représente le Profil de l'intensité transverse du faisceau. L'angle θ caractérise la divergence du faisceau.

ANNEXE B

INTRODUCTION AUX MODES D'HERMITE-GAUSS

Dans cette annexe, nous allons déterminer dans l'équation :

$$\xi(x, y, z) = C \cdot A_x(z) \cdot A_y(z) \cdot g\left(\frac{x}{w}\right) \cdot h\left(\frac{y}{w}\right) \cdot \exp\left[ik \frac{(x^2 + y^2)}{2q(z)}\right] \quad (\text{B-1})$$

les fonctions g et h , les paramètres longitudinaux dans les deux plans normaux A_x et A_y , ainsi que la constante de normalisation C de telle manière à ce que (B-1) satisfasse à l'équation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (\text{B-2})$$

En définissant :

$$u = x/w \quad ; \quad v = y/w,$$

les dérivées partielles de ξ par rapport à x s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= C \cdot A_x(z) \cdot A_y(z) \cdot \left[\frac{1}{w} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \cdot h + ik \frac{x}{q} \cdot gh \right] \cdot \exp\left[\frac{ik}{2q} (x^2 + y^2) \right] \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= C \cdot A_x(z) \cdot A_y(z) \cdot \left[\frac{1}{w^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot h + 2ik \frac{x}{qw} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \cdot h + \left(\frac{ik}{q} - \frac{k^2 x^2}{q^2} \right) \cdot gh \right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik}{2q} (x^2 + y^2) \right] \quad (\text{B-3a}) \end{aligned}$$

De la même façon, nous calculons les dérivées partielles de ξ par rapport à y et z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= C \cdot A_x(z) \cdot A_y(z) \cdot \left[\frac{1}{w^2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \cdot g + 2ik \frac{y}{qw} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} \cdot g + \left(\frac{ik}{q} - \frac{k^2 y^2}{q^2} \right) \cdot gh \right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik}{2q} (x^2 + y^2) \right] \quad (\text{B-3b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial z} &= C \left\{ \left[A_y \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial A_y}{\partial z} - i \frac{k A_x \cdot A_y}{2q^2} (x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \right] \cdot gh \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{x}{w^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot h + \frac{y}{w^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot g \right] \cdot A_x \cdot A_y \right\} \cdot \exp\left[\frac{ik}{2q} (x^2 + y^2) \right] \end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation (A-8) de l'annexe A, nous avons :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{4z}{k^2 w w_0^2}$$

D'où :

$$2ik \frac{\partial \xi}{\partial z} = C \left\{ \left[2ik \cdot A_y \frac{\partial A_x}{\partial z} + 2ik \cdot A_x \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{k^2 A_x \cdot A_y}{q^2} (x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \right] \cdot gh - \left[\frac{\delta ixz}{kw^3 w_0^2} \frac{\partial g}{\partial u} \cdot h + \frac{\delta iyz}{kw^3 w_0^2} \frac{\partial h}{\partial v} \cdot g \right] \cdot A_x \cdot A_y \right\} \exp \left[\frac{ik}{2q} (x^2 + y^2) \right] \quad (\text{B-3c})$$

Amenons (B-3) dans (B-2), nous avons :

$$\left[\frac{h}{w^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{g}{w^2} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{2i}{w} \cdot \left(\frac{k}{q} - \frac{4z}{kw^2 w_0^2} \right) \cdot \left(xh \frac{\partial g}{\partial u} + yg \frac{\partial h}{\partial v} \right) \right] \cdot A_x A_y + \left[2ik \left(A_y \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{k^2}{q^2} A_x \cdot A_y \cdot (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial q}{\partial z} - 1 \right) + \frac{2ik}{q} \cdot A_x \cdot A_y \right] gh = 0$$

Divisons cette équation par $A_x A_y \cdot g \cdot h$, puis effectuons une séparation des variables :

$$\frac{1}{w^2} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{2ix}{w} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} \left(\frac{k}{q} - \frac{4z}{kw^2 w_0^2} \right) + \frac{k^2 x^2}{q^2} \left(\frac{\partial q}{\partial z} - 1 \right) + ik \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{A_x} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{B-4a})$$

$$\frac{1}{w^2} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{2iy}{w} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \left(\frac{k}{q} - \frac{4z}{kw^2 w_0^2} \right) + \frac{k^2 y^2}{q^2} \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial z} - 1 \right) + ik \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{A_y} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{B-4b})$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \frac{k}{q} = \frac{k}{z - iz_R} = \frac{k}{z - i\pi w_0^2 / \lambda} = \frac{2i}{w^2} + \frac{4z}{k w_0^2 w^2} \\ \frac{\partial q}{\partial z} = 1 \quad (\text{équations (A-5) et (A-6) de l'annexe A}) \end{cases}$$

(B-4) devient alors :

$$\frac{1}{w^2} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{4x}{w^3} \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} + ik \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{A_x} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{B-5a})$$

$$\frac{1}{w^2} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} - \frac{4y}{w^3} \cdot \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} + ik \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{A_y} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{B-5b})$$

Calcul des fonctions g et h :

Si l'on pose :

$$ik \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{A_x} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \frac{4m}{w^2} \quad (\text{B-6})$$

Nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 4u \frac{\partial g}{\partial u} + 4mg = 0$$

En définissant $u_1 = \sqrt{2} u = \sqrt{2} x / w$, on arrive à réécrire cette équation comme :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} - 2u_1 \frac{\partial g}{\partial u_1} + 2mg = 0 \quad (\text{B-7})$$

Comparons avec l'équation bien connue d'Hermite-Gauss :

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2m H_m = 0 \quad (\text{B-8})$$

on voit finalement que :

$$g(\sqrt{2} \frac{x}{w}) \equiv H_m(\sqrt{2} \frac{x}{w}) \quad (\text{B-9a})$$

La détermination de la fonction h se fait de la même manière en partant de (B-5b) :

$$h(\sqrt{2} \frac{y}{w}) \equiv H_n(\sqrt{2} \frac{y}{w}) \quad (\text{B-9b})$$

où m et n correspondent aux ordres des modes transverses.

Calcul des paramètres longitudinaux A_x et A_y :

D'après (B-6) nous avons :

$$\frac{dA_x}{A_x} = - \left\{ \frac{1}{2q} + i \frac{2m}{k w^2} \right\} \cdot dz = - \left\{ \frac{1}{2(z - iz_R)} + i \frac{(m/z_R)}{(1 + (z/z_R)^2)} \right\} \cdot dz$$

$$\frac{dA_x}{A_x} = - \left\{ \frac{1}{2z_R} \left[\frac{(z/z_R) + i}{1 + (z/z_R)^2} \right] + im \cdot \frac{1/z_R}{1 + (z/z_R)^2} \right\} \cdot dz$$

$$\frac{dA_x}{A_x} = - \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{(2z/z_R^2)}{1 + (z/z_R)^2} \right] + i(m + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1/z_R}{1 + (z/z_R)^2} \right\} \cdot dz$$

$$\int \frac{dA_x}{A_x} = -\frac{1}{4} \int \frac{(2z/z_R^2)}{1+(z/z_R)^2} \cdot dz - i(m + \frac{1}{2}) \int \frac{1/z_R}{1+(z/z_R)^2} \cdot dz$$

$$\ln(A_x) = -\frac{1}{4} \ln [1+(z/z_R)^2] - i(m + \frac{1}{2}) \cdot \arctg(z/z_R)$$

$$A_x = \frac{1}{\sqrt[4]{1+(z/z_R)^2}} \cdot \exp \left[-i(m + \frac{1}{2}) \cdot \arctg(z/z_R) \right]$$

Compte tenu des relations (A-8) et (A-12) établies dans l'Annexe A, on trouve :

$$A_x = \sqrt{\frac{w_0}{w}} \cdot \exp[-i(m + (1/2)) \cdot \phi(z)] \quad (\text{B-10a})$$

De la même façon, on trouve une expression similaire pour A_y :

$$A_y = \sqrt{\frac{w_0}{w}} \cdot \exp[-i(n + (1/2)) \cdot \phi(z)] \quad (\text{B-10b})$$

L'expression (B-1) devient finalement :

$$\xi(x, y, z) = C \cdot \frac{w_0}{w} \cdot H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \cdot H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right)$$

$$\times \exp[-i(m + n + 1) \cdot \phi(z)] \cdot \exp \left[ik \frac{(x^2 + y^2)}{2q(z)} \right] \quad (\text{B-11})$$

Le champ (I-6) du chapitre 1 s'écrit maintenant :

$$E_{mn}(x, y, z) = C \frac{w_0}{w} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) \exp(-r^2/w^2) \cdot \exp(i\Phi_{mn}(r, z)) \quad (\text{B-12})$$

$$\text{avec } \Phi_{mn}(r, z) = kz - (m + n + 1) \cdot \phi(z) + kr^2 / 2R(z)$$

Calcul de la constante de normalisation :

Sur le plan (x, y) , la condition d'orthonormalisation s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{mn} \cdot E_{jk}^* \cdot dx \cdot dy = \delta_{mj} \cdot \delta_{nk} \quad (\text{B-13})$$

avec :

$$E_{mn}(x, y, z) = C \frac{w_0}{w} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \exp\right) \cdot \exp(-x^2 / w^2) \\ \times \exp(-y^2 / w^2) \cdot \exp[-i(m+n+1) \cdot \phi(z)]$$

$$E_{jk}^*(x, y, z) = C \frac{w_0}{w} H_j\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_k\left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \exp\right) \cdot \exp(-x^2 / w^2) \\ \times \exp(-y^2 / w^2) \cdot \exp(i(j+k+1) \cdot \phi(z))$$

(B-13) devient :

$$C^2 \frac{w_0^2}{w^2} \left[\frac{w^2}{2} \right] \cdot \exp[i(j-m)] \cdot \exp[i(k-n)] \\ \times \int \exp(-u^2) H_m(u) \cdot H_j(u) \cdot du \cdot \int \exp(-v^2) H_n(v) \cdot H_k(v) \cdot dv = \delta_{mj} \cdot \delta_{nk}$$

Nous arrivons à déterminer la constante C en considérant l'orthogonalité des polynômes d'Hermite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \cdot H_m(u) \cdot H_j(u) \cdot du = \sqrt{\pi} \cdot 2^m \cdot m! \cdot \delta_{mj} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-v^2) \cdot H_n(v) \cdot H_k(v) \cdot dv = \sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n! \cdot \delta_{nk} \end{array} \right. \quad (B-14)$$

On obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{mn} \cdot E_{jk}^* \cdot dx \cdot dy = C^2 \cdot w_0^2 \cdot \pi \cdot 2^{(m+n-1)} \cdot m! \cdot n! = 1$$

La constante de normalisation s'écrit alors :

$$C = \frac{1}{w_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot 2^{(m+n)} m! \cdot n!}} \quad (B-15)$$

Le champ qui décrit les modes de propagation s'écrit finalement :

$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{1}{w(z)} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot 2^{(m+n)} m! \cdot n!}} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \\ \times \exp(-r^2 / w^2) \cdot \exp(i\Phi_{mn}(z)) \quad (B-16)$$

ANNEXE C

INTRODUCTION AUX MODES DE LAGUERRE-GAUSS

Dans la plupart des conditions expérimentales, l'utilisation des coordonnées cylindriques s'avère plus pratique. L'équation d'onde paraxiale (1-8) du chapitre 1 transcrite dans le système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + 2ik \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (\text{C-1})$$

Cette équation étant analogue à l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques, elle admet comme solution générale [Ang 82] une combinaison linéaire de solutions particulières affectées de coefficients bien déterminés :

$$\xi(r, \varphi, z) = \sum_{\ell} C_{\ell} \cdot G_{\ell}(r, z) \cdot e^{i\ell\varphi} \quad (\text{C-2})$$

Les C_{ℓ} sont des constantes et les fonctions G_{ℓ} satisfont à l'équation différentielle :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell^2}{r^2} + 2ik \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right] G_{\ell} = 0 \quad (\text{C-3})$$

D'une manière quelque peu arbitraire, écrivons les solutions G_{ℓ} sous la forme :

$$G_{\ell}(r, z) = C \cdot A(z) \cdot g\left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right) \cdot f\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \cdot \exp\left[ik \frac{r^2}{2q(z)}\right] \quad (\text{C-4})$$

Les grandeurs $w(z)$ et $q(z)$ caractérisant les solutions, sont strictement identiques à celles du mode fondamental gaussien. Il s'agit de déterminer dans l'équation précédente, les fonctions g et f , le paramètre longitudinal A , ainsi que la constante de normalisation C de façon à ce que (C-4) satisfasse à (C-3).

Les dérivées partielles de G par rapport à r et z s'écrivent :

$$\frac{\partial G}{\partial r} = C \cdot A \cdot \left\{ \frac{4r}{w^2} g \cdot f' + \left[\frac{\sqrt{2}}{w} g' + ik \frac{r}{q} g \right] \cdot f \right\} \cdot \exp(ikr^2/2q) \quad (\text{C-5a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = C \cdot A \cdot & \left\{ \left(\frac{4r}{w^2} \right)^2 g \cdot f'' + \left[\frac{8\sqrt{2}r}{w^3} g' + \left(\frac{4}{w^2} + \frac{8ikr^2}{qw^2} \right) g \right] \cdot f' \right. \\ & \left. + \left[\frac{2}{w^2} g'' + \frac{2i\sqrt{2}kr}{qw} g' + \left(\frac{ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} \right) g \right] \cdot f \right\} \cdot \exp(ikr^2/2q) \quad (\text{C-5b}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = C \cdot A \cdot \left\{ \left[-\frac{4r^2}{w^3} \frac{\partial w}{\partial z} g \right] \cdot f' - \left[\frac{\sqrt{2}r}{w^2} \frac{\partial w}{\partial z} g' - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} - i \frac{kr^2}{2q^2} \frac{\partial q}{\partial z} \right) g \right] \cdot f \right\} \cdot \exp(ikr^2/2q) \quad (\text{C-5c})$$

En reportant (C-5) dans (C-3), nous aboutissons à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4r}{w^2} \right)^2 g \cdot f'' + \left\{ \frac{8\sqrt{2}r}{w^3} g' + \left(\frac{8}{w^2} + \frac{8ikr^2}{qw^2} - \frac{8ikr^2}{w^3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) g \right\} \cdot f' + \\ & + \left\{ \left(\frac{2}{w^2} \right) g'' + \left(\frac{2i\sqrt{2}kr}{qw} + \frac{\sqrt{2}}{wr} - \frac{2i\sqrt{2}kr}{w^2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) g' + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2r^2}{q^2} - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{2ik}{A} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{k^2r^2}{q^2} \frac{\partial q}{\partial z} \right) g \right\} \cdot f = 0 \quad (\text{C-6a}) \end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation (A-8) de l'annexe A, nous avons : $(\partial w / \partial z) = (4z / k^2 w w_0^2)$
D'où (C-6a) devient :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{4r}{w^2} \right)^2 \cdot g \right\} \cdot f'' + \frac{8}{w^2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}r}{w} \cdot g' + \left[1 + ir^2 \left(\frac{k}{q} - \frac{4z}{kw^2 w_0^2} \right) \right] \cdot g \right\} \cdot f' + \\ & + \left\{ \left(\frac{2}{w^2} \right) \cdot g'' + \left[\frac{2i\sqrt{2}r}{w} \left(\frac{k}{q} - \frac{4z}{kw^2 w_0^2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{wr} \right] \cdot g' + \right. \\ & \left. + \left[\frac{2ik}{q} - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{2ik}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{k^2r^2}{q^2} \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial z} - 1 \right) \right] \cdot g \right\} \cdot f = 0 \quad (\text{C-6b}) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \frac{k}{q} = \frac{k}{z - iz_R} = \frac{k}{z - i\pi w_0^2 / \lambda} = \frac{2i}{w^2} + \frac{4z}{k w_0^2 w^2} \\ \frac{\partial q}{\partial z} = 1 \quad (\text{équations (A-5) et (A-6) de l'annexe A}) \end{cases}$$

(C-6b) devient :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{4r}{w^2} \right)^2 \cdot g \right\} \cdot f'' + \frac{8}{w^2} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}r}{w} \cdot g' + \left[1 - \frac{2r^2}{w^2} \right] \cdot g \right\} \cdot f' \\ & + \left\{ \left(\frac{2}{w^2} \right) \cdot g'' + \left[\frac{\sqrt{2}}{wr} - \frac{4\sqrt{2}r}{w^3} \right] \cdot g' + \left[\frac{2ik}{q} - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{2ik}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right] \cdot g \right\} \cdot f = 0 \quad (\text{C-6c}) \end{aligned}$$

En divisant l'équation précédente par la quantité $(8g/w^2)$, il vient finalement :

$$\left[\frac{2r^2}{w^2} \right] \cdot f'' + \left\{ 1 - \frac{2r^2}{w^2} + \frac{\sqrt{2}r}{w} \cdot \frac{g'}{g} \right\} \cdot f' + \left\{ \frac{1}{4} \frac{g''}{g} + \left[\frac{\sqrt{2}w}{8r} - \frac{\sqrt{2}r}{2w} \right] \cdot \frac{g'}{g} + \left[\frac{ikw^2}{4q} - \frac{\ell^2 w^2}{8r^2} + \frac{ikw^2}{4} \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right] \right\} \cdot f = 0 \quad (C-7)$$

Résolution :

La résolution de l'équation (C-7) n'est pas chose facile, cependant si l'on pose :

$$x = \frac{2r^2}{w^2} \quad (C-8)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2}r}{w} \cdot \frac{g'}{g} \quad (C-9)$$

$$p = \frac{1}{4} \frac{g''}{g} + \left[\frac{\sqrt{2}w}{8r} - \frac{\sqrt{2}r}{2w} \right] \cdot \frac{g'}{g} + \left[\frac{ikw^2}{4q} - \frac{\ell^2 w^2}{8r^2} + \frac{ikw^2}{4} \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right] \quad (C-10)$$

alors, la résolution de l'équation (C-7) se ramène à la résolution de l'équation bien connue de Laguerre associée [Arf 73] :

$$x \cdot \frac{\partial^2 L_p^\ell(x)}{\partial x^2} + (1 - x + \ell) \cdot \frac{\partial L_p^\ell(x)}{\partial x} + p \cdot L_p^\ell(x) = 0, \quad (C-11)$$

dont les solutions, dénombrées par les entiers p et ℓ , sont les polynômes de Laguerre généralisés :

$$L_p^\ell(x) = \frac{x^{-\ell}}{p!} \cdot \exp(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^p} [x^{p+\ell} \cdot \exp(-x)] \quad (C-12)$$

Détermination des fonctions f et g :

A partir de (C-11), on voit que : $f(2r^2/w^2) \equiv L_p^\ell(x)$ (C-13)

L'intégration de (C-9), en posant $Y = \sqrt{2}r/w$, est immédiate et donne :

$$\frac{g'(Y)}{g(Y)} = \frac{\ell}{Y} \rightarrow d(\ln g) = \ell \cdot \frac{dY}{Y}$$

$$\rightarrow g(Y) = Y^\ell = \left(\frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^\ell \quad (C-14)$$

De là, nous tirons les expressions :

$$\frac{g'}{g} = \frac{\ell}{Y} \quad (\text{C-15a})$$

$$\frac{g''}{g} = \frac{\ell(\ell+1)}{Y^2} \quad (\text{C-15b})$$

Calcul du paramètre longitudinal A :

En introduisant (C-15) dans (C-10), et en remplaçant q par $(z - iz_R)$ (équation (A-6) de l'annexe A), il vient :

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{1}{q} + \frac{2i}{kw^2} (2p + \ell) \right\} \cdot dz = - \left\{ \frac{1}{(z - iz_R)} + i(2p + \ell) \cdot \frac{(1/z_R)}{(1 + (z/z_R)^2)} \right\} \cdot dz$$

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{1}{z_R} \left[\frac{(z/z_R) + i}{1 + (z/z_R)^2} \right] + i(2p + \ell) \cdot \frac{1/z_R}{1 + (z/z_R)^2} \right\} \cdot dz$$

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(2z/z_R^2)}{1 + (z/z_R)^2} \right] + i(2p + \ell + 1) \cdot \frac{1/z_R}{1 + (z/z_R)^2} \right\} \cdot dz$$

$$\int \frac{dA}{A} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2z/z_R^2)}{1 + (z/z_R)^2} \cdot dz - i(2p + \ell + 1) \int \frac{1/z_R}{1 + (z/z_R)^2} \cdot dz$$

$$\ln(A) = -\frac{1}{2} \ln[1 + (z/z_R)^2] - i(2p + \ell + 1) \cdot \arctg(z/z_R)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} \cdot \exp[-i(2p + \ell + 1) \cdot \arctg(z/z_R)]$$

Compte tenu des relations (A-8) et (A-12) établies dans l'annexe A, on trouve alors :

$$A(z) = \frac{w_0}{w} \cdot \exp[-i(2p + \ell + 1) \cdot \phi(z)] \quad (\text{C-16})$$

L'expression (C-4) devient finalement :

$$G(r, z) \equiv G_{\ell p}(r, z) = C \cdot \frac{w_0}{w} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^\ell \cdot L_p^\ell \left(\frac{2r^2}{w^2} \right) \cdot \exp[-i(2p + \ell + 1) \cdot \phi(z)] \cdot \exp \left[ik \frac{r^2}{2q(z)} \right] \quad (\text{C-17})$$

Calcul de la constante de normalisation :

Dans le plan (r, φ) , la condition d'orthonormalisation des fonctions G , s'écrit :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} G_{\ell p}(r, \varphi) \cdot G_{\ell q}^*(r, \varphi) \cdot r dr \cdot d\varphi = \delta_{pq} \quad (\text{C-18})$$

avec :

$$G_{\ell p}(r, z) = C \frac{w_0}{w(z)} \cdot x^{(\ell/2)} \cdot L_p^\ell(x) \cdot \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \\ \times \exp\left\{i\left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p + \ell + 1)\phi(z)\right]\right\}$$

$$G_{\ell q}^*(r, z) = C \frac{w_0}{w(z)} \cdot x^{(\ell/2)} \cdot L_q^\ell(x) \cdot \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \\ \times \exp\left\{-i\left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2q + \ell + 1)\phi(z)\right]\right\}$$

(C-18) devient :

$$C^2 \frac{\pi w_0^2}{2} \cdot \exp[-2i(p - q) \cdot \phi(z)] \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-x) \cdot (x)^{(\ell/2)} \cdot L_p^\ell(x) \cdot L_q^\ell(x) \cdot dx = \delta_{pq}$$

Nous arrivons à déterminer C en considérant l'orthogonalité des polynômes de Laguerre :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x) \cdot (x)^\ell \cdot L_p^\ell(x) \cdot L_q^\ell(x) \cdot dx = \frac{(p + \ell)!}{p!} \cdot \delta_{pq} \quad (\text{C-19})$$

On obtient alors :

$$C = \frac{1}{w_0} \cdot \left[\frac{2p!}{\pi(p + \ell)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C-20})$$

La fonction qui décrit les modes de propagation s'écrit finalement :

$$G_{\ell p}(r, z) = \left[\frac{2p!}{\pi(p + \ell)!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{w(z)} \cdot (x)^{\frac{\ell}{2}} \cdot L_p^\ell(x) \cdot \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \\ \times \exp\left\{i\left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p + \ell + 1)\phi(z)\right]\right\} \quad (\text{C-21})$$

ANNEXE D

GENERALITES SUR LE LASER MOLECULAIRE A CO₂

Les lasers à gaz qui oscillent sur des transitions entre les niveaux d'énergie du spectre de molécules sont dits lasers à transitions moléculaires. Les spectres moléculaires sont plus compliqués que les spectres atomiques. Cela tient à ce que dans les molécules le mouvement est plus compliqué que dans les atomes. Outre le mouvement des électrons autour des noyaux des atomes constituant la molécule, on observe des mouvements vibratoires des noyaux par rapport à leurs positions d'équilibre et un mouvement rotatoire d'ensemble de la molécule. Par conséquent, à ces différents mouvements sont associés trois types d'états quantifiés et donc trois groupes de niveaux d'énergie. L'énergie totale de la molécule possède une valeur déterminée correspondant à un état donné englobant les trois types d'états quantifiés. Si l'on fait abstraction de son énergie cinétique de translation, on peut considérer cette énergie comme la somme des valeurs quantifiées des énergies des mouvements électronique, vibratoire et rotatoire :

$$E = E_{el} + E_{vib} + E_{rot}$$

Typiquement, les variations d'énergies mises en jeu [Kar 88], sont de l'ordre de 10⁻³ eV pour la rotation, de 10⁻¹ eV pour la vibration et de 10 eV pour le mode électronique.

Les transitions entre les différents niveaux correspondent à une variation de l'énergie totale de la molécule et donnent lieu à différents types de spectres de raies :

- spectre de rotation dans l'infrarouge lointain, quand l'énergie des photons inducteurs est du même ordre de grandeur que les variations permises de l'énergie de rotation. Dans ce cas, la variation d'énergie moléculaire se limite au terme : $\Delta E = \Delta E_{rot}$
- spectre de vibration rotation dans l'infrarouge proche, si l'énergie des radiations est suffisante pour changer à la fois les états de vibration et de rotation. Les variations d'énergie moléculaire s'écrivent alors : $\Delta E = \Delta E_{vib} + \Delta E_{rot}$
- spectre électronique dans l'ultraviolet, le visible et quelques fois le proche infrarouge, dans le cas où l'énergie des photons est suffisante pour faire varier simultanément les trois énergies : $\Delta E = \Delta E_{el} + \Delta E_{vib} + \Delta E_{rot}$

Les niveaux d'énergie de vibration-rotation sont à la base du fonctionnement du laser à CO₂.

POPULATION D'UN NIVEAU DE VIBRATION-ROTATION :

Lorsque l'énergie rotationnelle est en équilibre avec l'énergie de translation, la distribution des populations sur les niveaux de rotation, pour un niveau de vibration v , est représentée par une distribution de Boltzmann :

$$N_{v,j} = N_v \frac{g_j}{\sum_j g_j \exp(-E_j/KT)} \exp(-E_j/KT)$$

g_j , représente la dégénérescence des niveaux de rotation : il indique le nombre de façons indépendants que possède la molécule d'avoir la même énergie.

$$g_j = 2j + 1$$

N_v , représente la population du niveau de vibration v .

E_j , est l'énergie rotationnelle du niveau associé au nombre quantique de rotation j ; elle vaut [Her 63] :

$$E_j = hc [B_v j(j+1) - D_v j^2(j+1)^2]$$

B_v est une constante de rotation

D_v , qui est très inférieure à B_v , provient de la non rigidité de la molécule et représente l'action de la force centrifuge qui a tendance à accroître légèrement les distances inter-noyaux.

Les constantes B_v et D_v dépendent de la vibration considérée ; leurs valeurs pour certains niveaux de vibration-rotation de la molécule de CO_2 sont données, à titre d'exemple, dans le tableau ci-dessous [Cou 57].

Niveaux	$B_v (\text{cm}^{-1})$	$D_v (10^{-6} \text{cm}^{-1})$
000	0,3902	0,135
010	0,3909	0,135
100	0,3901	0,114
020	0,3904	0,156
001	0,3871	0,132

En pratique T est grand devant B_v , et l'on peut écrire alors :

$$N_{v,j} \approx \frac{hc}{KT} B_v N_v (2j + 1) \exp \left[-\frac{hc B_v}{KT} j(j+1) \right]$$

AMPLIFICATION :**1. Lois de Bouguer-Lambert :**

Une onde monochromatique de fréquence ν correspondant à la fréquence d'une transition entre deux niveaux quantiques inférieur (i) et supérieur (s) d'un gaz, subit en traversant ce gaz une absorption ou une amplification.

Le processus d'absorption est décrit par la loi de Bouguer-Lambert : la variation de l'intensité $I(\nu)$ du rayonnement traversant une épaisseur de gaz $d\ell$ est donnée par :

$$dI(\nu) = -k(\nu) I(\nu) d\ell.$$

$k(\nu)$ est défini comme étant le coefficient d'absorption à la fréquence ν ; il est positif quand le milieu est absorbant et négatif lorsque celui-ci est amplificateur.

Si ν_{is} correspond à la fréquence centrale de la transition entre les niveaux (i) et (s) de sorte que $h\nu_{is} = E_s - E_i = \Delta E$, alors La probabilité pour qu'une molécule sur le niveau d'énergie (s) effectue une transition vers le niveau d'énergie (i) est liée à la densité d'énergie du rayonnement $\rho(\nu)$, par la relation :

$$P_r(s \rightarrow i) = \rho(\nu) B_{s \rightarrow i} g(\nu - \nu_{is}).$$

$B_{s \rightarrow i}$ est le coefficient d'Einstein d'émission induite et $g(\nu - \nu_{is})$ la fonction de distribution des fréquences autour de la fréquence centrale ν_{is} .

Le nombre de transitions qui s'effectuent par unité de temps dans le volume de section unité et de longueur $d\ell$, du niveau (s) au niveau (i) s'écrit :

$$N_{s \rightarrow i} = \rho(\nu) g(\nu - \nu_{is}) [N_s B_{s \rightarrow i} - N_i B_{i \rightarrow s}] d\ell.$$

$B_{i \rightarrow s}$ est le coefficient d'absorption d'Einstein, et N_s , N_i les nombres de molécules par unité de volume sur les niveaux (s) et (i) respectivement.

La variation de l'intensité du rayonnement lors de son passage dans l'épaisseur de gaz $d\ell$ est alors :

$$dI(\nu) = h\nu \rho(\nu) g(\nu - \nu_{is}) [N_s B_{s \rightarrow i} - N_i B_{i \rightarrow s}] d\ell.$$

En tenant compte du fait que $I(\nu) = c \rho(\nu)$, récrivons l'expression précédente en :

$$dI(\nu) = \frac{h\nu}{c} g(\nu - \nu_{is}) I(\nu) [N_s B_{s \rightarrow i} - N_i B_{i \rightarrow s}] d\ell.$$

On peut définir alors, le coefficient d'amplification par la relation :

$$\alpha(\nu) = -k(\nu) = \frac{h\nu}{c} g(\nu - \nu_{is}) [N_s B_{s \rightarrow i} - N_i B_{i \rightarrow s}].$$

2. Coefficients d'Einstein :

Les coefficients d'Einstein dépendent du moment dipolaire électrique $\mu(\vec{r})$ de la transition considérée [Kem 37] :

$$B_{s \rightarrow i} = \frac{8\pi^3}{3h^2} |R_{s \rightarrow i}|^2$$

$$\text{avec } R_{s \rightarrow i} = \langle \Psi_s | \mu(\vec{r}) | \Psi_i \rangle$$

Ψ_s et Ψ_i sont les fonctions d'ondes associées aux niveaux de vibrations-rotations supérieur (s) et inférieur (i).

On peut établir entre les coefficients d'absorption et d'émission stimulée une relation simple qui exprime l'égalité des probabilités de transition par absorption et par émission stimulée :

$$g_s B_{s \rightarrow i} = g_i B_{i \rightarrow s}.$$

Les poids statistiques g_s et g_i représentent la dégénérescence des états considérés.

Si l'on caractérise les niveaux supérieur et inférieur de la transition de vibration-rotation par respectivement les nombres quantiques (v', j') et (v, j) , et si l'on ne tient pas compte de l'interaction entre la vibration et la rotation de la molécule, alors le carré de l'élément de matrice de la transition s'écrit :

$$\left| \langle \Psi_{v'}^{j'} | \mu(\vec{r}) | \Psi_v^j \rangle \right|^2 = |R_{v' \rightarrow v}|^2 \cdot S(j).$$

$|R_{v' \rightarrow v}|^2$, est l'élément de matrice associé à la transition vibrationnelle.

$S(j)$ est à associer à l'élément de matrice de rotation. Il n'est différent de zéro, dans le cas des transitions lasers dans le CO₂, que pour $\Delta j = \pm 1$ (règle de sélection pour la rotation) et sa valeur est donnée par [Cas 31] :

$$S(j) = |m|,$$

où m vaut $(-j)$ ou $(j+1)$ selon que l'on considère une raie de la branche P ($\Delta j = +1$) ou une raie de la branche R ($\Delta j = -1$).

Finalement, on peut écrire :

$$B_{s \rightarrow i} = \begin{cases} \frac{8\pi^3}{3h^2} j |R_{v' \rightarrow v}|^2 \rightarrow \text{transitions de la branche } P \\ \frac{8\pi^3}{3h^2} (j+1) |R_{v' \rightarrow v}|^2 \rightarrow \text{transitions de la branche } R \end{cases}$$

3. Inversion de population :

Le démarrage des oscillations prend place lorsque une inversion de population est réalisée entre deux états de vibration rotation de la molécule ; ceci correspond à un coefficient d'amplification positif.

Pour une transition vibrationnelle ($\nu' \rightarrow \nu$), le coefficient α au centre de la raie ($\nu = \nu_{is}$) s'écrit :

$$\alpha_P(\nu) = \frac{8\pi^3}{3h} \frac{\nu}{c} g(0) j \left| R_{\nu' \rightarrow \nu} \right|^2 \left[N_{\nu', j-1} - \frac{(2j-1)}{(2j+1)} N_{\nu, j} \right]$$

$$\alpha_R(\nu) = \frac{8\pi^3}{3h} \frac{\nu}{c} g(0) (j+1) \left| R_{\nu' \rightarrow \nu} \right|^2 \left[N_{\nu', j+1} - \frac{(2j+3)}{(2j+1)} N_{\nu, j} \right]$$

La première expression de α est obtenue pour une raie de la branche P (transition $\nu', j-1 \rightarrow \nu, j$), la seconde correspond à une raie de la branche R (transition $\nu', j+1 \rightarrow \nu, j$). On peut voir que $\alpha > 0$ si :

$$\frac{N_{\nu', j-1}}{N_{\nu, j}} > \frac{(2j-1)}{(2j+1)} \quad (\text{branche } P)$$

$$\frac{N_{\nu', j+1}}{N_{\nu, j}} > \frac{(2j+3)}{(2j+1)} \quad (\text{branche } R)$$

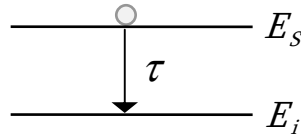
En conclusion, le milieu devient amplificateur pour les raies de la branche P , pour un rapport des populations inférieur à 1 ; alors qu'un rapport supérieur à 1 est nécessaire pour les raies de la branche R .

4. Forme de raie d'émission :

Dans les spectres discrets d'absorption ou d'émission, les raies ne sont jamais strictement monochromatiques. La raie utilisée dans un laser possède une certaine largeur spectrale $\Delta\nu$, déterminée par différents mécanismes atomiques d'élargissement, et mesurant la distribution en fréquence autour de la fréquence centrale. Pour une transition entre deux niveaux d'énergie, la fonction de distribution des fréquences $g(\nu)$ dépend de l'importance relative des différents processus d'élargissement. Elle peut avoir en général, une forme Lorentzienne ou Gaussienne.

▪ Forme de Lorentz :

Considérons le processus dans lequel une particule excitée effectue une transition entre deux états de largeurs finies. Soit τ , le temps au cours duquel, pour une raison quelconque, le système excité perd son excédent d'énergie.



La relation d'incertitude "énergie-temps" d'Heisenberg $\Delta E \cdot \tau \geq \hbar$, indique que l'incertitude sur la valeur de l'énergie ne peut être inférieure à \hbar / τ . L'incertitude sur l'énergie de l'état entraîne une incertitude sur la fréquence de la radiation émise par la transition correspondante : $\Delta \nu \geq 1 / 2\pi \tau$.

Dans un gaz à faible pression et en l'absence de toute influence extérieure, la durée de vie d'une particule sur un état dépend de l'émission spontanée. Par conséquent, la largeur minimale ou simplement naturelle $\Delta \nu_N$ d'une raie est déterminée par la probabilité A_{si} de la transition spontanée entre les niveaux (s) et (i) :

$$\Delta \nu_N = \frac{A_{si}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \tau}$$

En règle générale, la largeur naturelle ne présente de l'intérêt qu'aux très hautes fréquences ($A_{si} \propto \nu^3$). Généralement, on peut négliger l'influence qu'exerce l'émission spontanée sur la largeur de la raie puisque dans les conditions réelles les transitions de relaxation réduisent la durée de vie beaucoup plus fortement. En effet, lorsque la pression du gaz augmente, le temps moyen τ' entre deux collisions successives devient plus court que la durée de vie radiative des niveaux et il faut remplacer dans la relation précédente τ par τ' . Le profil de la raie d'émission collisionnelle présente la forme dite de Lorentz avec une largeur :

$$\Delta \nu_L = \frac{1}{2\pi \tau'}$$

La forme de Lorentz de la raie élargie par collisions est déterminée par la fonction :

$$g_L(\nu - \nu_{is}) = \frac{2}{\pi \Delta \nu_L} \cdot \frac{1}{1 + (\nu - \nu_{is} / \Delta \nu_L)^2}$$

Dans le cas du mélange ternaire CO₂-N₂-He, la largeur collisionnelle est donnée, avec une bonne approximation, par la relation empirique [Hug 71] :

$$\Delta \nu_L = 7,58 (X_{CO_2} + 0,73 X_{N_2} + 0,6 X_{He}) P. (300 / T)^{\frac{1}{2}},$$

où T est la température du mélange en degré Kelvin, P la pression totale en torrs et X_i la fraction du gaz i.

Pour des concentrations de 15% de CO₂ et N₂ et 70% d'Hé, l'accroissement de la largeur de la raie, résultant de l'accroissement du nombre de collisions avec l'augmentation de la pression, est de l'ordre de 5Mhz/torr.

▪ Forme de Gauss :

L'effet Doppler est une autre cause d'élargissement des raies : les molécules, dans les gaz, sont soumises à l'agitation thermique, elles possèdent des vitesses réparties suivant une distribution statistique de Maxwell et absorbent ou émettent à des fréquences différentes suivant leur vitesse. Il en résulte que, pour les transitions donnant lieu à une émission laser, la distribution des fréquences autour de la fréquence centrale présente un profil gaussien donné par la fonction :

$$g_D(\nu - \nu_{is}) = \frac{c}{\nu_{is}} \cdot \left(\frac{M}{2\pi KT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[-\frac{Mc^2}{2KT} \cdot \left(\frac{\nu - \nu_{is}}{\nu_{is}} \right)^2 \right],$$

où ν_{is} est la fréquence au centre de la raie, K la constante de Boltzmann, M la masse en gramme de la molécule, T la température absolue du gaz et c la vitesse de la lumière.

Autour de la fréquence centrale de la raie, la fonction g_D est étalée sur une largeur $\Delta\nu_D$ qui s'écrit :

$$\Delta\nu_D = \frac{2\nu_{is}}{c} \cdot \sqrt{\frac{2KT \cdot \ln 2}{M}}.$$

Lorsque les différents processus d'élargissement se combinent, nous devons considérer un profil de Voigt : produit de convolution des fonctions de distribution des fréquences de Lorentz et de Gauss :

$$g_V(\nu - \nu_{is}) = \frac{c}{\nu_{is}} \cdot \left(\frac{M}{2\pi KT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (\beta - y)^2} dy,$$

où,
$$a = \frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_D} \cdot \sqrt{\ln 2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2}{\Delta\nu_D} \cdot \sqrt{\ln 2} (\nu - \nu_{is}).$$

ANNEXE E

ETUDE DU MODE FONDAMENTAL DANS UNE CAVITE À MIROIR DE SORTIE TROUE

L'utilisation de miroirs multicouches diélectriques, pour l'extraction d'une fraction de l'énergie, est couramment employée dans les lasers à gaz qui émettent dans la partie visible et proche infrarouge du spectre électromagnétique. Aux longueurs d'ondes submillimétriques (infrarouge lointain), des revêtements diélectriques à pertes suffisamment faibles ne sont pas toujours disponibles. Le recours dès l'année 1964 [Pat 64] au couplage de l'énergie, dans cette partie du spectre, par un trou pratiqué au centre d'un miroir totalement réfléchissant est devenu une alternative plus pratique qui présente des avantages (économique, facilité de fabrication, dégradation moins rapide des miroirs, ...), mais aussi des inconvénients puisque dans ce cas, le faisceau est tronqué au centre et les pertes par diffraction qui en résultent peuvent modifier les caractéristiques des modes d'oscillations du laser. L'étude de la perturbation des modes de résonance par l'ouverture de couplage est donc nécessaire. Jusqu'à présent, nous avons noté qu'elle a été limitée à certains cas particuliers :

- McCumber a analysé de nombreux modes d'un résonateur confocal pour de petits nombres de Fresnel, ainsi que les perturbations dues à un ou deux miroirs de couplages [McC 65], [McC 69]. Sa méthode consiste à résoudre l'équation aux valeurs propres d'une matrice obtenue en discrétisant l'équation intégrale de Fresnel-Kirchhoff.
- McNice et Derr [McN 69], qui s'intéressèrent également au résonateur confocal, adoptèrent la méthode itérative développée par Fox et li.
- Le résonateur Fabry-Pérot, examiné initialement par Letokhov [Let 65], pour des ouvertures rectangulaires, a été réinvesti par Li et Zucker [Li 67], dans le cas d'ouvertures circulaires. Ils ont utilisé pour cela, la méthode itérative de Fox et Li et celle de Vainstein [Vai 63]. Les résultats obtenus pour ces deux types d'ouvertures semblent coïncider pour de grands nombres de Fresnel des miroirs [She 70].
- Récemment, notre laboratoire s'est intéressé à ce type de cavité [Tra 01], en étudiant la distribution du champ correspondant au mode dominant à l'intérieure d'une cavité stable pour un grand nombre de Fresnel et une grande ouverture du trou de couplage ($\approx 34\%$ de la largeur w du mode TEM_{00} sur le miroir troué). Le fait qu'aucune restriction sur l'extension radiale des modes transverses n'est imposée dans la cavité, fait qu'il devient possible que les modes transverses, particulièrement ceux à indice angulaire $\ell \neq 0$, subissent les plus faibles pertes lorsque l'ouverture du trou augmente. Pour cela, l'auteur fait une extension de la technique de calcul de Stéphan [Ste 83] par la prise en compte, dans le développement du champ, des modes de Laguerre-Gauss associés ($\ell \neq 0$).

Hormis cette dernière étude, toutes les autres ont été restreintes aux résonateurs situés à la limite du domaine de stabilité, et les résultats obtenus ne fournissent pas nécessairement de renseignements pour une configuration stable. Quant aux méthodes

utilisées, elles nécessitent un long temps de calcul pour obtenir une structure stationnaire correspondant à un mode. Cela limite leurs applications dans l'étude du champ à une position quelconque dans la cavité.

Notre contribution sur ce sujet, à la différence de l'étude faite dernièrement au laboratoire [Tra 01], concernera exclusivement le mode fondamental TEM₀₀ d'un laser à gaz à faible gain dont le miroir de sortie, de dimension finie, est constitué par un miroir concave totalement réfléchissant présentant une faible ouverture circulaire au centre. Cette étude théorique concerne les variations de la distribution du champ, des pertes par diffraction et du facteur de discrimination entre modes. Elle a été menée sur une cavité stable ne présentant aucune déformation relative à la symétrie cylindrique. Pour cela, la méthode de Stéphan [Ste 83], précédemment appliquée, avec succès, aux cavités diaphragmées a été développée pour tenir compte du trou.

OPERATEUR ALLER-RETOUR DE LA CAVITE :

Un grand nombre de lasers à ondes submillimétriques utilisent une cavité plano-concave. Moins sensible à l'alignement, le miroir concave est généralement désigné [Pat 64], pour contenir l'ouverture circulaire. Aussi, tous nos calculs et discussions sont limités à la cavité stable schématisée sur la figure (E-1). La double troncature occasionnée aux modes par l'ouverture pratiquée au centre du miroir concave et par la dimension finie de ce dernier implique l'introduction, dans cette étude, de deux paramètres caractérisant cette troncature :

$$y_0 = \frac{a_0}{w(d)} \quad \text{et} \quad y_m = \frac{a_m}{w(d)}$$

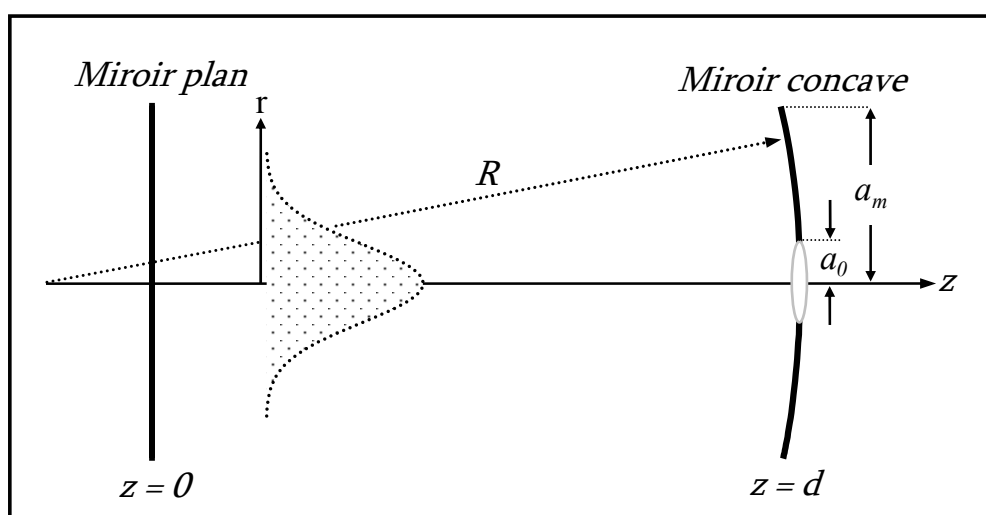


Figure. (E-1) : Section axiale d'une cavité plano-concave de longueur d . La surface réfléchissante du miroir concave est enfermée dans une région annulaire entre deux rayons (a_0, a_m). La longueur d'onde résonnante est $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$.

Dans le cadre de la symétrie cylindrique l'équation de propagation de l'onde, issue des équations de Maxwell, admet comme solutions les fonctions G_p de Laguerre-Gauss. Ces fonctions sont les fonctions propres du champ dans une cavité non limitée transversalement. Par conséquent, il est normal de les utiliser comme base de décomposition dans notre cas. Le champ à l'intérieur de la cavité résulte de la superposition de deux ondes progressives : champ aller E_f et le champ retour E_b . Une partie du champ aller est transmise à l'extérieure de la cavité, E'_f , après avoir été diffractée par l'ouverture de couplage. Ces trois champs sont caractérisés par trois coefficients f_p , b_p et f'_p , et ils s'expriment par :

$$E_f(r, z) = \exp[i(kz - \omega t)] \cdot \sum_p f_p G_{fp}(r, z) \quad (\text{E-1a})$$

$$E_b(r, z) = \exp[-i(kz - \omega t)] \cdot \sum_p b_p G_{bp}(r, z) \quad (\text{E-1b})$$

$$E'_f(r, z) = \exp[i(kz - \omega t)] \cdot \sum_p f'_p G_{fp}(r, z) \quad (\text{E-1c})$$

Les fonctions orthonormalisées de Laguerre-Gauss sont données par les formules (2-1) du chapitre 2. Il s'agit d'établir, en tenant compte des conditions aux limites imposées par les miroirs et l'ouverture de couplage, l'expression de l'opérateur aller-retour de la nouvelle cavité.

La condition à la frontière du miroir de couplage (miroir concave) indique que le champ réfléchi vaut :

$$E_b(r, d) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a_0 \\ E_f(r, d) & \text{si } a_0 < r < a_m \\ 0 & \text{si } r > a_m \end{cases} \quad (\text{E-2})$$

et que le champ émergent est :

$$E'_f(r, d) = \begin{cases} E_f(r, d) & \text{si } 0 < r < a_0 \\ 0 & \text{si } r > a_0 \end{cases} \quad (\text{E-3})$$

La relation (2-10) établie au chapitre 2, liant les coefficients f_p et b_p sur le miroir concave reste valable tandis que, l'intégration qui apparaît dans l'équation (2-8) du même chapitre, s'effectue maintenant entre les rayons (a_0, a_m) :

$$b_p = r_2 \cdot \exp[2i(kd - \phi(d))] \cdot \sum_q f_q \cdot \exp[-2i(p + q) \cdot \phi(d)] \cdot C_{pq} \quad (\text{E-4})$$

L'élément de matrice C_{pq} est défini par l'intégrale

$$C_{pq} = \int_{x_0}^{x_m} \exp(-x) \cdot L_p(x) \cdot L_q(x) \cdot dx \quad (\text{E-5})$$

$$x_0 = 2y_0^2 = 2a_0^2/w^2(d), \quad x_m = 2y_m^2 = 2a_m^2/w^2(d)$$

Par ailleurs, la condition de continuité sur le miroir plan s'écrit simplement : $f_q = b_q$

On obtient finalement la relation entre coefficients après un aller retour :

$$\gamma \cdot f_p = \exp[2i(kd - \phi(d))] \cdot \sum_q \exp[-2i(p+q)\phi(d)] \cdot C_{pq} \cdot f_q \quad (\text{E-6})$$

Cette relation nous montre que les coefficients f_p sont les composants d'un vecteur propre associé à la valeur propre complexe γ , d'un opérateur représenté par une matrice symétrique, dont les éléments complexes M_{pq} sont donnés par :

$$M_{pq} = \exp[2i(kd - \phi(d))] \cdot \exp[-2i(p+q)\phi(d)] \cdot C_{pq} \quad (\text{E-7})$$

La détermination du vecteur propre, de l'opérateur aller-retour, associé au mode fondamental nous permet maintenant, à partir des relations (E-1a et 5-1b), de déterminer les champs aller et retour en tout point de la cavité. Le calcul du champ à l'extérieur de la cavité nécessite de trouver la relation liant les coefficients du champ émergent (coefficients f'_p) en fonction de ceux du champ aller (coefficients f_p).

A partir de l'inversion de (E-1c) en $z = d$, on a :

$$f'_p = e^{-ikd} \iint_S E'_f(r, d) \cdot G_{fp}^*(r, d) \cdot r dr \cdot d\phi \quad (\text{E-8})$$

L'intégrale précédente porte sur tout le plan $z = d$ et avec la condition (E-3) devient :

$$f'_p = e^{-ikd} \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{a_0} E'_f(r, d) \cdot G_{fp}^*(r, d) \cdot r dr \quad (\text{E-9})$$

On obtient finalement :

$$f'_p = \sum_q f_q \cdot e^{2i(p-q)\phi(d)} \cdot C'_{pq} \quad (\text{E-10})$$

où

$$C'_{pq} = \int_0^{x_0} \exp(-x) \cdot L_p(x) \cdot L_q(x) \cdot dx \quad (\text{E-11})$$

RESULTATS ET DISCUSSIONS :

Nous présentons ici, les résultats numériques caractérisant le mode fondamental d'une cavité plano-concave de longueur $d=1,15\text{m}$. Le miroir plan totalement réfléchissant définit l'origine de l'axe z . Le miroir concave est placé en $z=d$. Il possède un rayon de courbure $R=2\text{m}$ et une surface réfléchissante comprise entre les rayons (a_0, a_m) . Dans le but de minimiser les pertes d'énergie du mode fondamental à des pertes physiquement acceptables (pertes inférieures à 20 %), nous limitons les variations des paramètres y_0 et y_m aux intervalles suivants :

$$0 < y_0 < 0,24 \quad \text{et} \quad 1,2 < y_m < 1,8$$

Les valeurs et vecteurs propres associés à la matrice définie par la relation (E-7), sont déterminés numériquement en utilisant la méthode de l'algorithme QZ [Mol 73]. Cette méthode a l'avantage de donner toutes les valeurs et vecteurs propres d'une matrice dont les éléments sont complexes. Nous ordonnons, par la suite, ces valeurs propres par ordre décroissant (plus faibles pertes aux plus grandes pertes) et nous identifions la valeur propre correspondant au mode fondamental en relevant, à chaque fois que la matrice change, la distribution transverse loin du plan de troncature. La précision des résultats sera limitée, essentiellement, par la troncature de la base des modes de Laguerre-Gauss. Dans le but de minimiser les effets dus à cette troncature, tous nos calculs seront effectués en ne retenant dans la base de décomposition des champs, que les 120 premiers modes de Laguerre-Gauss. Ce choix est, par ailleurs, en bon accord avec la formulation mathématique de M. Traiche et A. Kellou [Tra 02] qui fixe le nombre minimal de modes entrant dans la décomposition des champs.

DISTRIBUTIONS AXIALE ET TRANSVERSE DES CHAMPS :

① Distributions à l'intérieure de la cavité :

Les distributions de la figure (E-2) montrent l'intensité sur l'axe du champ du mode fondamental diffracté à l'intérieure d'une cavité à miroir de sortie troué pour différents diamètres du trou ($y_0 = 0.01, 0.1, 0.15$ et 0.24) et pour deux valeurs du paramètre y_m ($y_m = 1.2$ et 1.8). En comparant ces résultats à ceux obtenus dans une cavité diaphragmée, on voit qu'il n'apparaît pas de changements considérables dans l'aspect général des distributions : le champ est toujours constitué par une figure de diffraction caractérisée par des oscillations de l'intensité en zone de champ proche et un champ lointain décroissant et régulier. Cependant, on peut noter que :

- Pour une ouverture donnée du trou, l'amplitude des oscillations n'est pas la même quand le diamètre du miroir de sortie change : une plus grande différence entre les deux champs est observée quand l'ouverture du miroir est réduite (figure (E-2) pour $y_m = 1,2$).

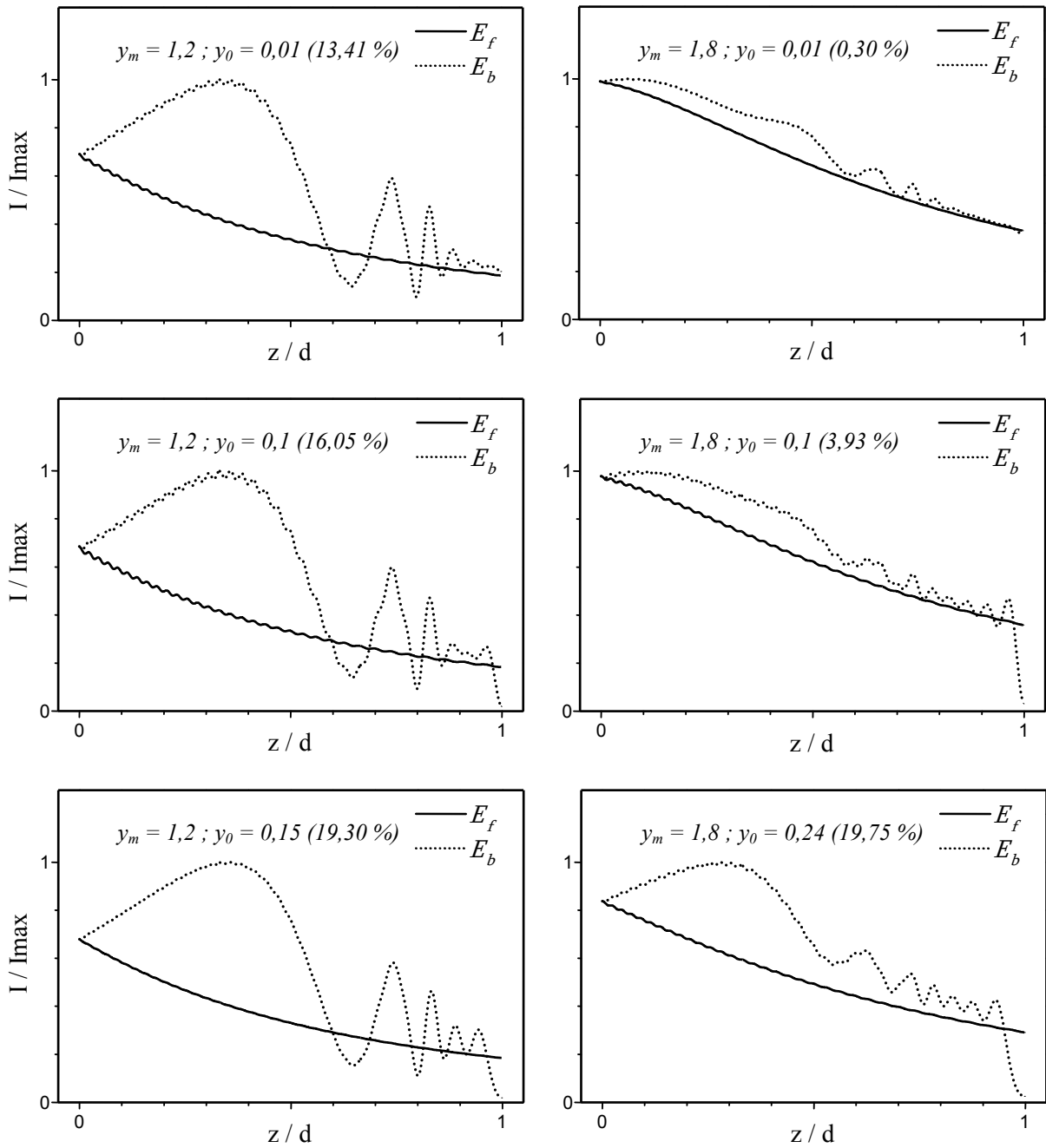


Figure. (E-2) : Intensités axiales des champs aller (en trait plein) et retour (en pointillé) du mode fondamental à l'intérieure d'une cavité à miroir de sortie troué. Les valeurs des paramètres caractérisant la troncature du faisceau suite à la dimension finie du miroir (y_m), et à celle du trou (y_0), sont indiquées sur les courbes. Le pourcentage mentionné sur chaque distribution, représente, dans chaque cas, les pertes du mode fondamental.

- Un nouveau pincement est introduit par l'ouverture circulaire (figure (E-2) pour $y_m = 1,8$).
- La distribution du champ sur la surface du miroir troué est fortement affectée par l'ouverture et n'a pas son maximum d'intensité au centre. On peut voir sur les courbes de la figure (E-3) donnant les intensités radiales des champs sur la surface du miroir troué, que le maximum d'intensité de l'onde qui est réfléchi se décale hors de l'axe à mesure que la taille du trou augmente.

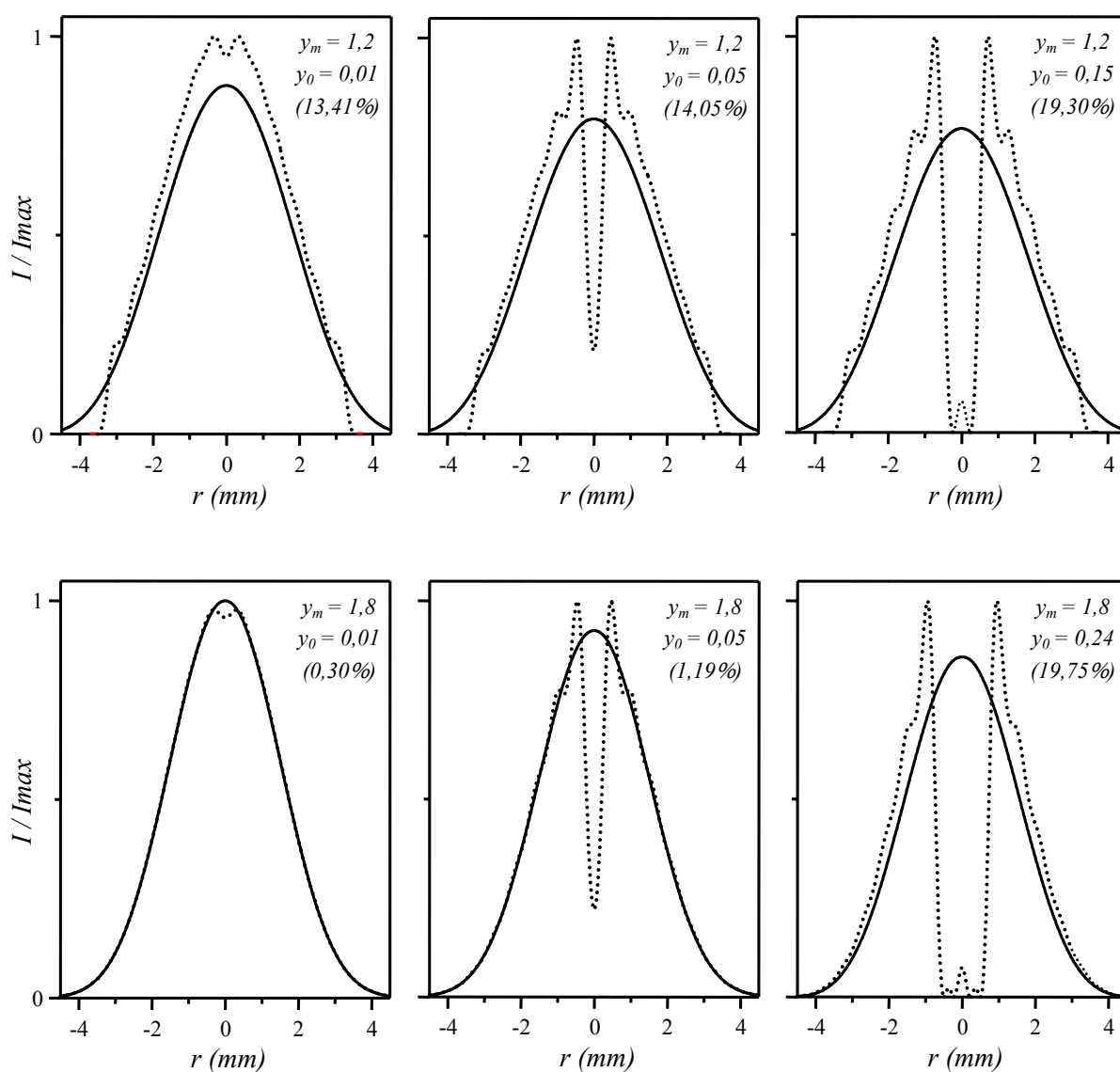


Figure. (E-3) : Intensités transverses des champs aller (en trait plein) et retour (en pointillé) du mode fondamental sur la surface du miroir troué pour différentes valeurs des paramètres y_m et y_0 .

② Distributions à l'extérieure de la cavité :

Les courbes de la figure (E-4) illustrent pour trois valeurs du paramètre de troncature y_0 ($y_0 = 0.1, 0.15$ et 0.24), les intensités sur l'axe que l'on obtiendrait, par l'application de l'intégrale de diffraction de Fresnel [Sch 69], si un faisceau gaussien en propagation libre était diffracté par une ouverture circulaire :

$$I_t(0, z) = \frac{2}{\pi w^2(z)} \left\{ 1 + \exp(-2y_0^2) - 2 \exp(-y_0^2) \cdot \cos \frac{\pi b^2}{\lambda} \left[\frac{1}{(z-d)} + \frac{1}{R(d)} \right] \right\}$$

Ces résultats montrent d'une part, qu'en champ proche la distribution axiale de l'intensité présente une succession de pics et de creux correspondant à un profil radial irrégulier. D'autre part, Le champ lointain est caractérisé par une distribution axiale régulièrement décroissante correspondant à un profil radial quasi-Gaussien.

Dans le but d'étudier les propriétés du champ résonnant émergeant d'une cavité à miroir de couplage troué, Les intensités axiale et transverse du champ sont aussi calculées pour différents diamètres du trou de couplage ($y_0 = 0.1, 0.15$ et 0.24), et les résultats sont montrés pour deux valeurs du paramètre y_m ($y_m = 1.2$ et 1.8) sur les figures (E-5) et (E-6). On note immédiatement :

- L'impossibilité d'obtenir un rendement significatif en sortie.
- Une disparition des oscillations en champ proche du trou : les oscillations juste après l'ouverture se limitent à un seul pic d'intensité.
- un champ lointain , après le pic d'intensité, caractérisé par une distribution axiale décroissante et irrégulière correspondant à un profil radial non gaussien comme on peut le voir sur les distributions radiales de la figure (E-6).

PERTES DE DIFFRACTION ET FACTEUR DE DISCRIMINATION :

① Pertes de diffraction :

La perte de diffraction par aller retour est une grandeur fondamentale puisqu'elle détermine le seuil d'oscillation du laser. Cette grandeur est déduite de la valeur propre λ : $\text{Pertes} = 1 - |\lambda|^2$

Afin d'optimiser les caractéristiques du résonateur à miroir de sortie troué pour une oscillation exclusive sur le mode fondamental, il est important de voir l'évolution de ces pertes avec :

- ✓ la double troncature, introduite sur le faisceau, engendrée respectivement par la dimension finie du miroir concave (paramètre y_m) et par l'ouverture circulaire pratiquée au centre de ce dernier (paramètre y_0).
- ✓ le paramètre géométrique de la cavité donné par : $g = 1 - d/R$.

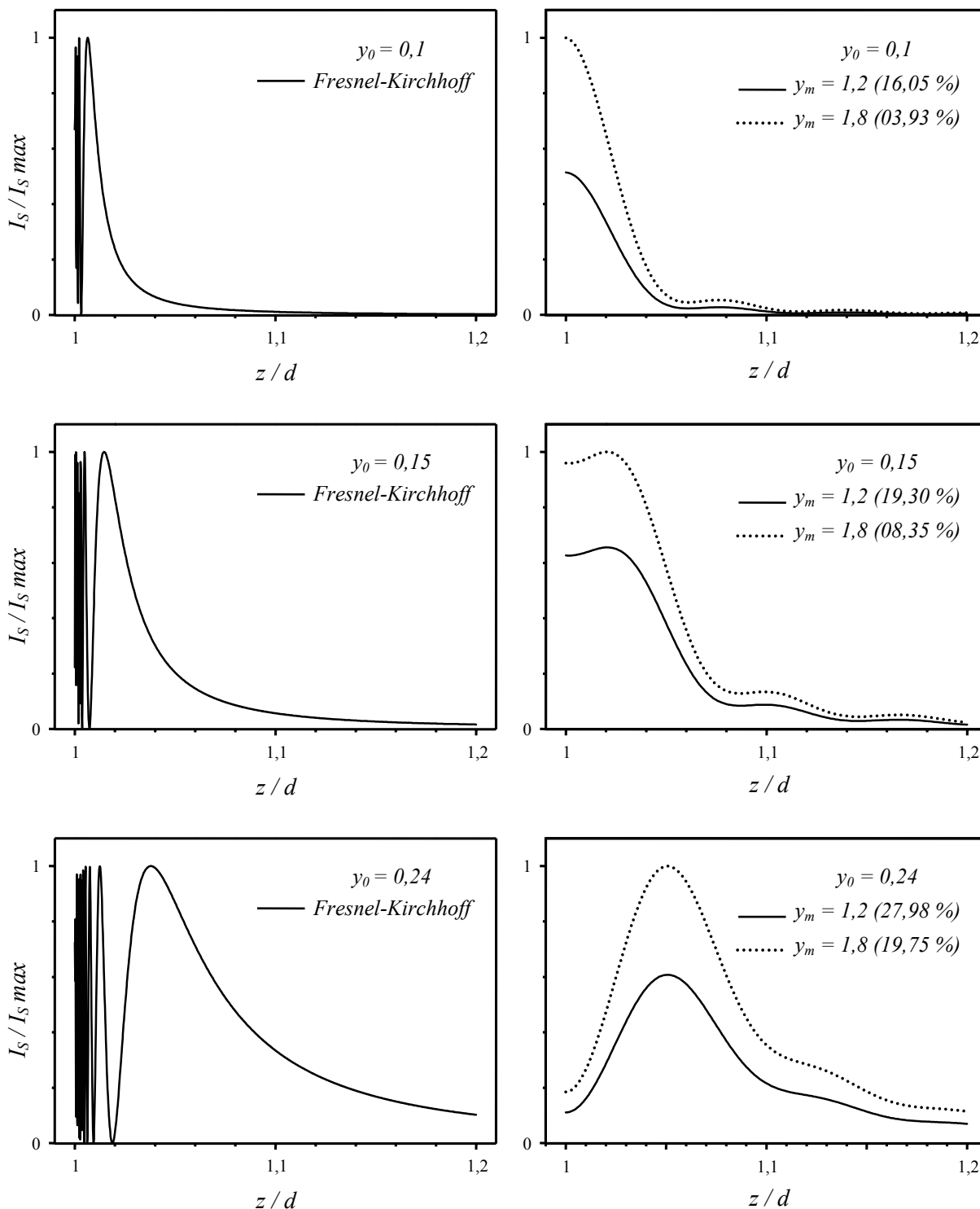


Figure. (E-4) : Distribution sur l'axe de l'intensité du faisceau gaussien en propagation libre diffracté par une ouverture circulaire pour différentes valeurs du paramètres y_0 .

Figure. (E-5) : Intensités axiales du mode fondamental à l'extérieur d'une cavité résonnante à miroir de sortie troué pour différentes valeurs des paramètres y_m et y_0 .

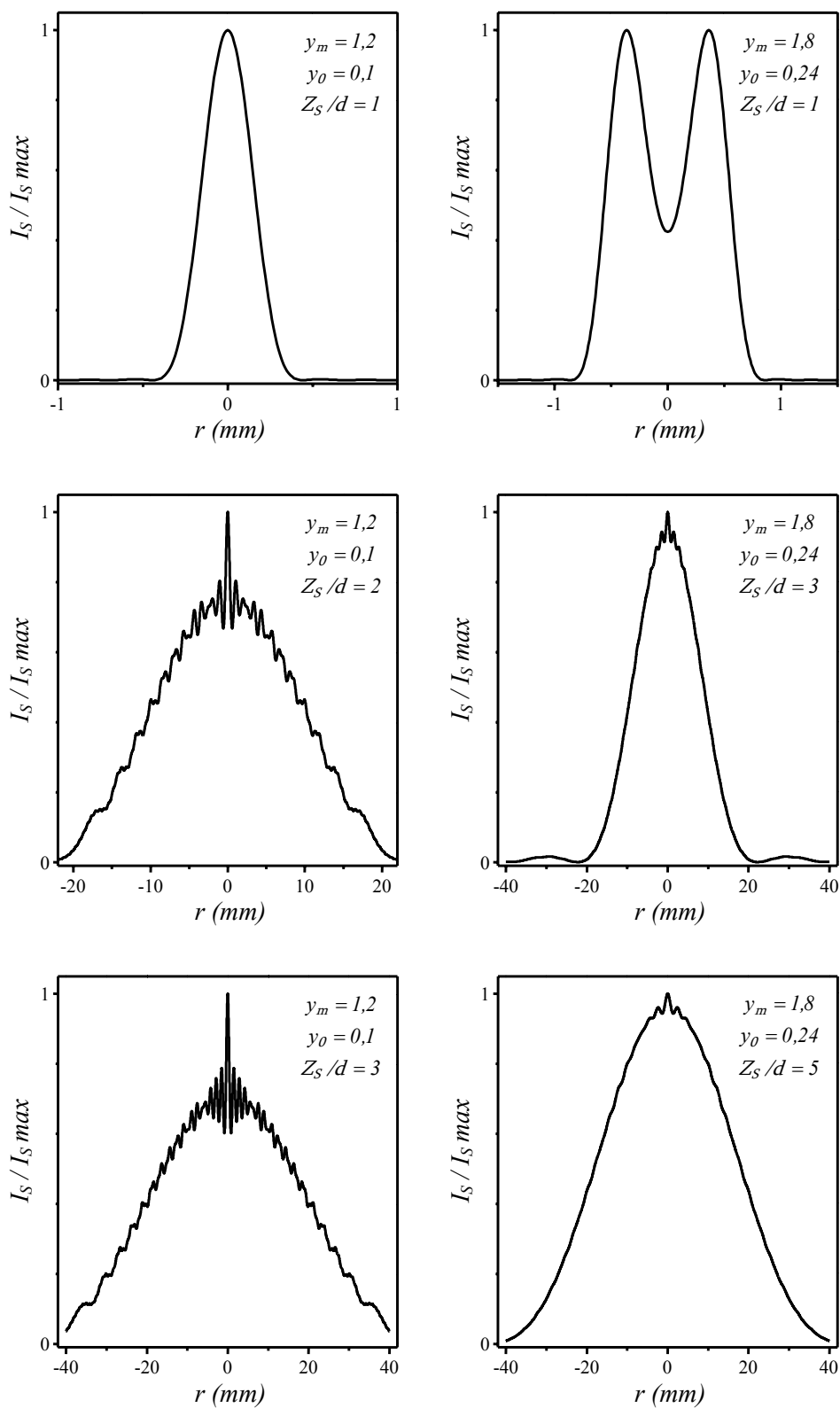


Figure. (E-6) : Distributions transverses d'intensité du champ émergent de la cavité à miroir de couplage trouée pour différentes valeurs des paramètres y_m et y_0 . Les positions où sont calculées ces distributions, sont indiquées par le paramètre z_s/d .

Nous montrons à la figure (E-7a) les variations des pertes du mode fondamental en fonction de la troncature introduite par le diamètre fini du miroir de sortie (paramètre y_m), pour différentes tailles de l'ouverture de couplage (paramètre y_o). On note de ces résultats que :

- Les pertes du mode augmentent lorsque le rayon d'ouverture du miroir est réduit.
- La présence du trou conduit, évidemment, à augmenter les pertes du mode.
- l'ampleur des effets de diffraction résultants de la taille finie du miroir détermine, d'une manière claire, la source principale des pertes d'énergie du mode dans le résonateur : si le paramètre de troncature associé au miroir est assez faible ($y_m < 1$) alors, la diffraction de l'onde sur les bords du miroir constitue la cause dominante des pertes d'énergie, même si une ouverture circulaire est présente au centre du miroir. Dans le cas contraire (y_m de l'ordre 1,8 et plus), la diffraction de l'onde sur les bords du miroir possède une faible contribution sur les pertes d'énergie, et toutes les pertes du résonateur peuvent être représentées principalement par la déperdition de l'énergie par l'ouverture de couplage.

Les variations des pertes du mode fondamental sont représentées en fonction de la taille de l'ouverture de couplage (paramètre y_o), pour plusieurs valeurs du diamètre du miroir concave (paramètre y_m), à la figure (E-7b). On constate dans cette figure, que les pertes du mode sont insensibles à l'introduction d'ouvertures de faibles dimensions ($y_o < 0,01$ pour $y_m = 1,8$), et tout se passe comme si que le mode ignorait le trou. L'ouverture maximale du trou de couplage pour laquelle ces pertes sont pratiquement constantes dépend, bien entendu, de la troncature résultant de la taille finie du miroir (paramètre y_m): plus faible est le paramètre y_m , plus importante est l'ouverture maximale conduisant à l'invariance des pertes du mode.

La figure (E-8) décrit l'évolution des pertes de diffraction en fonction du paramètre géométrique, g , de la cavité avec ou sans trou de couplage.

Les résultats obtenus dans le cas d'une cavité sans trou de couplage, courbe (a), sont conformes à ceux calculés pour une cavité diaphragmée [Kor 81], [Ait 93]; ils montrent :

- Une forte dépendance des pertes vis-à-vis de la configuration du résonateur.
- Une symétrie autour de la valeur $g = 0.5$, correspondant à une configuration semi confocal du résonateur.
- Une diminution des pertes de diffraction lorsque g tend vers 0 et 1, ce qui correspond à une cavité, respectivement, confocale et à deux miroirs plan.

Les pertes d'énergie du mode fondamental obtenues dans une cavité à miroir troué, courbes (b)-(c)-(d), montrent que les remarques précédentes restent valables, excepté une plus grande perte du mode à mesure que la dimension du trou augmente.

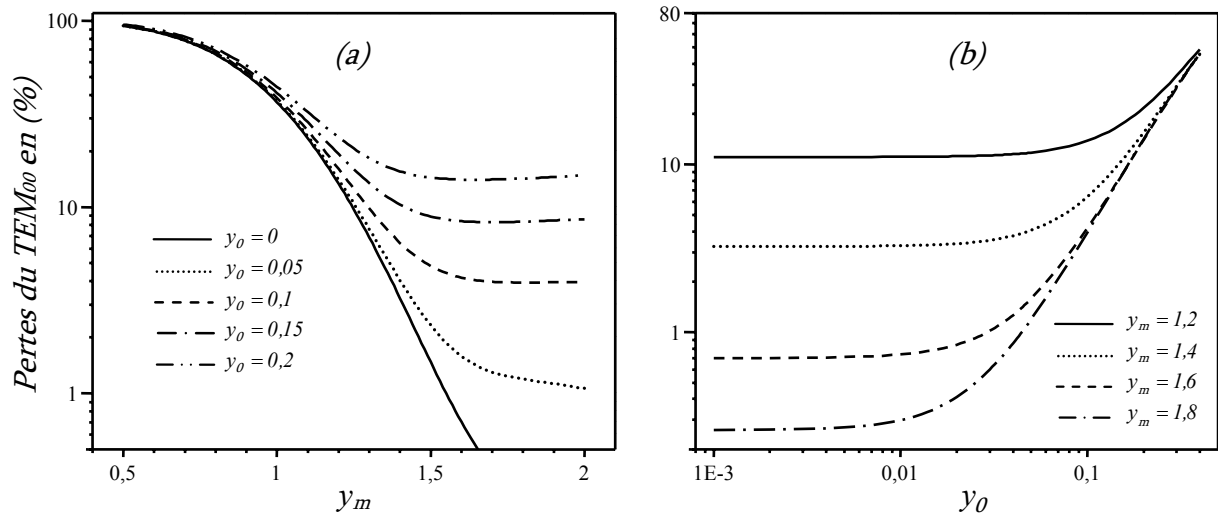


Figure. (E-7) : Variations des pertes du mode TEM_{00} en fonction :
(a) de l'ouverture du miroir y_m , (b) de la troncature y_0

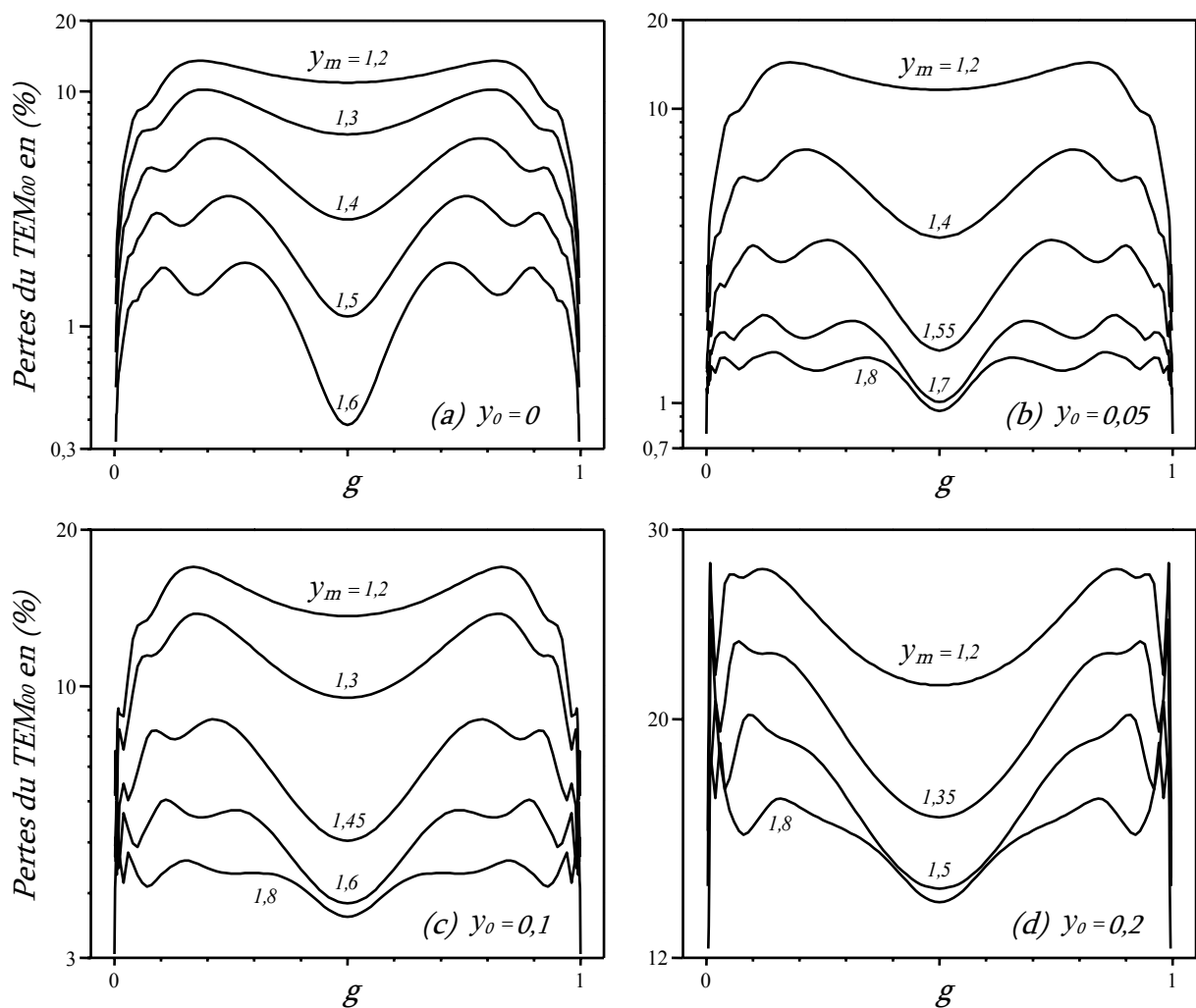


Figure. (E-8) : Variations des pertes du mode TEM_{00} en fonction du paramètre g .

② Facteur de discrimination :

Dans un résonateur les modes sont hiérarchisés en fonction de leurs pertes. Si la condition d'oscillation «gain = pertes» est vérifiée pour le mode TEM_{00} , et si les modes d'ordre plus élevés, en particulier le second mode transverse TEM_{01} , n'atteignent pas ce seuil, alors l'oscillation du laser se fera exclusivement sur le mode fondamental. Par conséquent, nous pouvons caractériser le pouvoir de discrimination d'un résonateur à l'aide du facteur de discrimination défini par :

$$\text{Facteur de discrimination} = \frac{\text{Pertes du mode } TEM_{01}}{\text{Pertes du mode } TEM_{00}}$$

Dans une cavité à miroir de sortie troué, le facteur de discrimination dépend, comme pour les pertes, des paramètres y_m , y_0 et g .

Nous montrons à la figure (E-9) pour différentes valeurs du paramètre y_0 , les variations du facteur de discrimination en fonction du paramètre y_m . On note de ces résultats que :

- Pour une ouverture donnée du trou de couplage, il existe une valeur optimale du rayon d'ouverture du miroir pour laquelle la discrimination est maximale. Au-delà de cette valeur, la discrimination décroît rapidement et devient médiocre.
- L'augmentation de l'ouverture du trou, entraîne une réduction du facteur de discrimination.

Par conséquent, pour maintenir une discrimination suffisante il faut réduire le rayon d'ouverture du miroir. Ceci est visible sur la figure (E-10), où l'on a représenté pour un rayon d'ouverture croissant du trou de couplage, la meilleure ouverture du miroir qui optimise cette discrimination.

Les courbes représentées sur la figure (E-11) montrent les variations du facteur de discrimination en fonction du paramètre g , dans une cavité ne possédant pas d'ouverture de couplage sur le miroir de sortie. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la troncature y_m . Elles nous montrent, simplement, que la discrimination est optimale pour la configuration semi-confocale, soit $g = 0,5$.

Dans le cas où une ouverture de couplage est présente au centre du miroir concave, les courbes de la figure (E-12) montrent que pour un rayon d'ouverture donné du trou, il existe une limite supérieure du rayon d'ouverture du miroir qui fait que la configuration semi-confocale optimise toujours le facteur de discrimination. Au-delà de cette valeur, la troncature du faisceau due au miroir perd progressivement son influence sur le facteur de discrimination au profit de celle due à l'ouverture de couplage ce qui conduit à une diminution rapide du facteur de discrimination dans le résonateur semi-confocale.

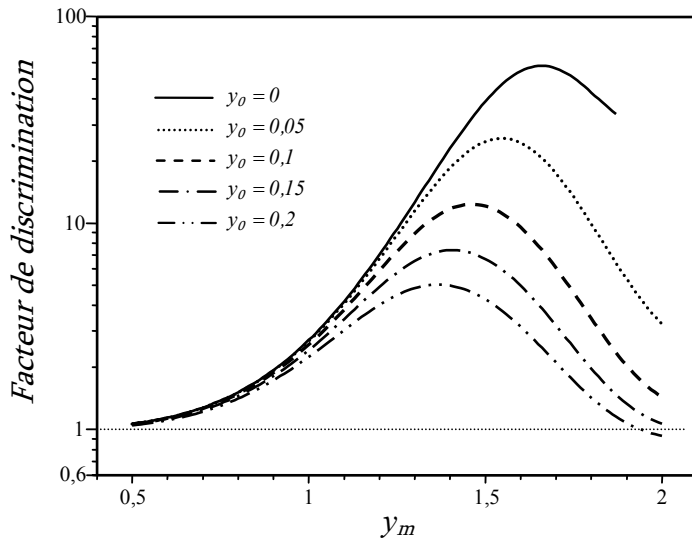


Figure. (E-9) : Variations du facteur de discrimination en fonction du paramètre de troncature y_m .

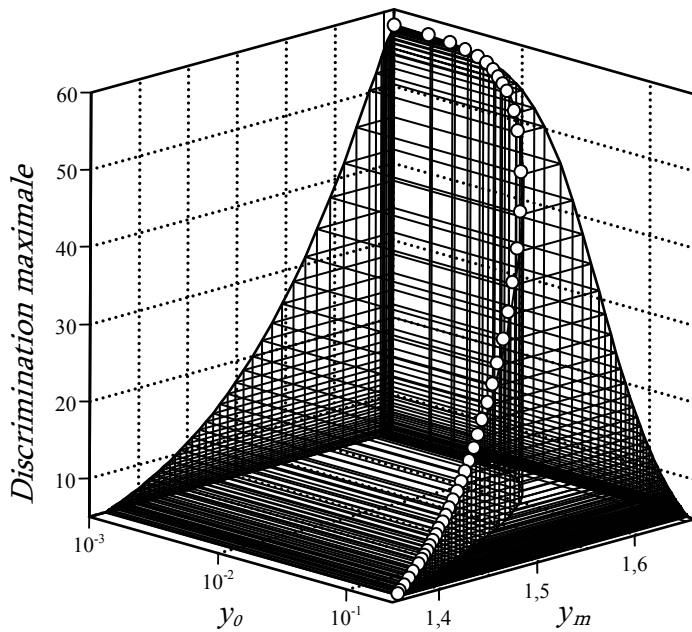


Figure. (E-10) : Variations du facteur de discrimination maximum en fonction des paramètres de troncatures y_m et y_0

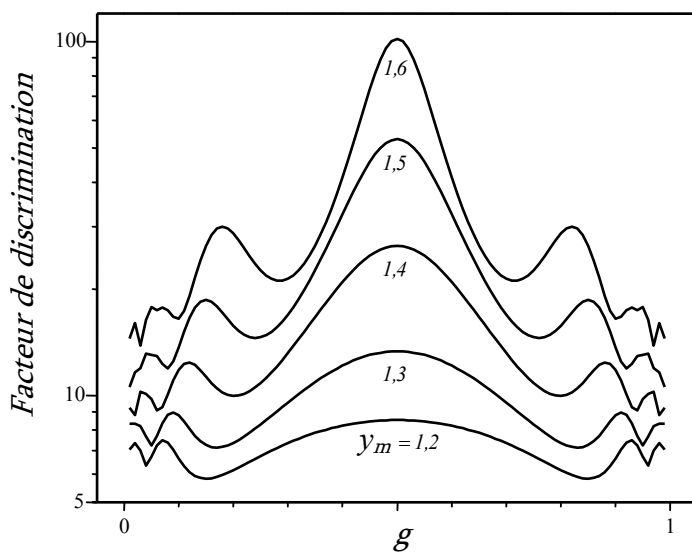


Figure. (E-11) : Variations du facteur de discrimination en fonction du paramètres géométrique g dans une cavité ne possédant pas d'ouverture de couplage.

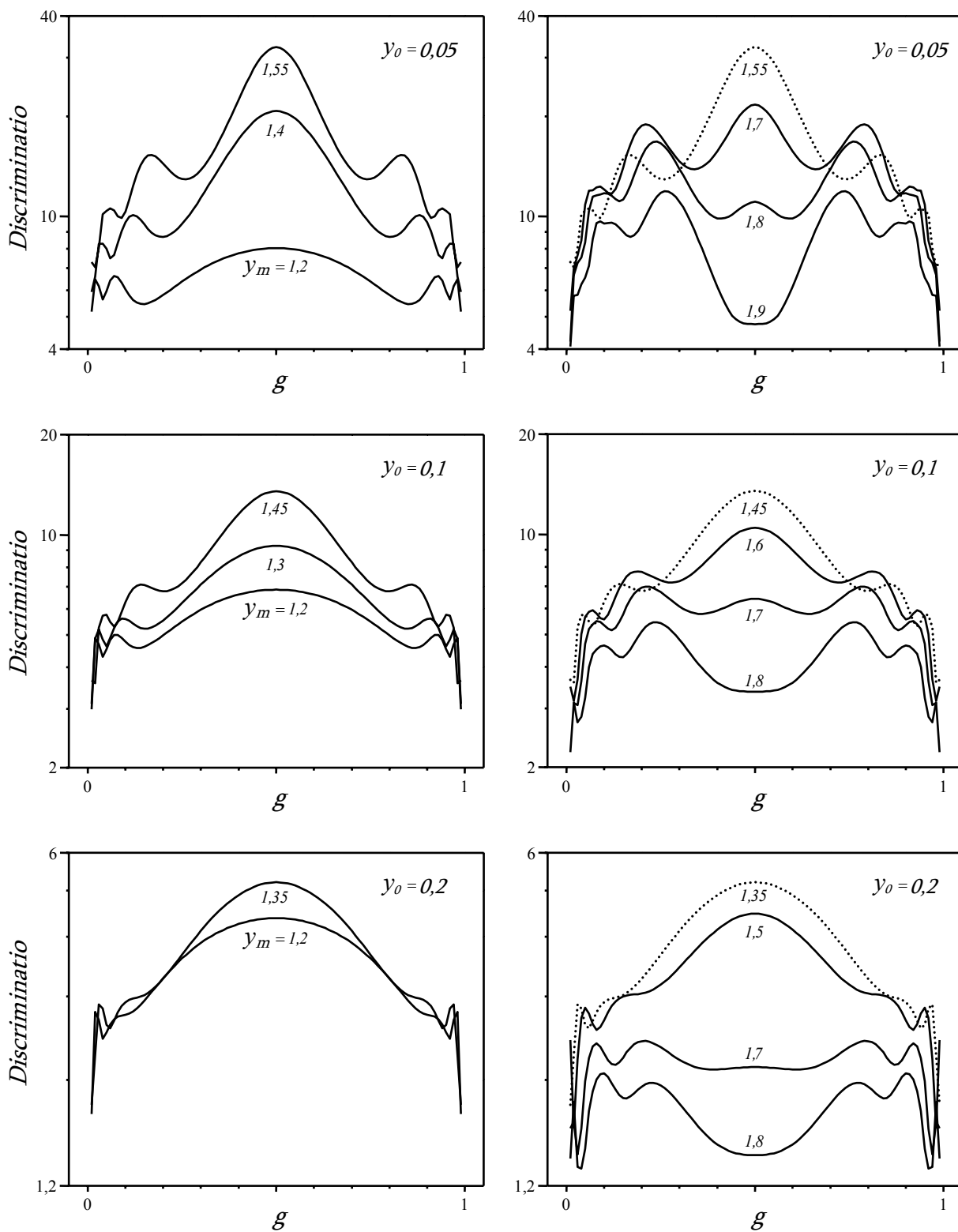


Figure. (E-12) : Variations du facteur de discrimination en fonction du paramètre géométrique g de la cavité pour différentes ouvertures du trou et du miroir concave.