N° d'ordre : 27/2013-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE MATHÈMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

en Mathématiques

Spécialité :Équations différentielles dans le champ complexe

par

DJIDEL Omar

THÈME :

Sur la sommabilité des séries formelles solutions d'équations différentielles

soutenu publiquement, le 30/06/2013 devant le jury composé de :

Mr : BETINA Kamel	Professeur à l'USTHB	Président.
Mr : REZAOUI Med-Salem	Maître de Conférences/A, à l'USTHB	Directeur de Mémoire.
Mr : BEHLOUL Djilali	Maître de Conférences/A, à l'USTHB	Examinateur.
M^{me} : LAOUDI Aini	Maître de Conférences/A, à l'USTHB	Examinatrice.

Remerciments

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Med Salem Rezaoui, Maître de Conférences à l' U.S.T.H.B, pour m'avoir proposé ce sujet, pour sa disponibilité et pour m'avoir suivi et guidé tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur K. Betina, professeur à l'U.S.T.H.B, pour l'honneur qu'il me fait de présidé le jury de ce Mémoire.

Je remercie également Monsieur Djillali Behloul et M^{me} Aini Laoudi Maîtres de Conférences à l'U.S.T.H.B, pour avoir voulu faire partie du jury.

Table des matières

Introduction

Dans la première partie de ce mémoire, on étudie la théorie de la k-sommabilité ($k > 0$) des séries entières formelles à une variable, qui a été développée par Ramis [21] pendant les années 70. Il a montré, par une méthode purement théorique, que toute solution formelle d'un système linéaire d'équations différentielles ordinaires méromorphes, à points singuliers irréguliers, dans le champ complexe, peut s'écrire en tant que produit fini de certaines fonctions connues et d'une série entière k-sommable pour un certain entier k. Notre définition de la k-sommabilité dans une direction d est donné dans la section 1, ressemblant à la définition dans le cas d'une variable. D'une manière générale, la question apparaît comme si la "double" somme d'une série sommable, dans le cas de deux variables, pouvait être obtenue en réitérant le procédé du cas d'une variable.

Dans la deuxième partie, on aborde l'étude des séries entières solutions d'équations différentielles. Différents concepts de développements asymptotiques dans le cas de plusieurs variables ont été considérés, comme ceux donnés par Gérard et Sibuya [9].

Dans la troisième partie, on étudie comment se comporte la solution d'un système d'équations différentielles linéaires dans le voisinage d'un point singulier. Cette méthode est applicable à l'étude d'un système d'équations différentielles non linéaires. La méthode qu' est la recherche d'une solution formelle et l'étude analytique, c'est-à-dire la recherche de la signification analytique de la solution formelle.

Le théorème de E. Maillet concerne les solutions des équations différentielles du type :

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

où

$$F(x, X_0, X_1, \cdots, X_n)$$

est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Il s'énonce de la façon suivante : *Toute solution série formelle d'une équation différentielle algébrique appartient à une certaine classe de Gevrey.*

L'objet de ce chapitre consiste à donner une démonstration du théorème de Maillet bassée sur la méthode des séries majorantes due à Cauchy.

Chapitre 1

Sommabilité des solutions formelles

Notation : $\mathbb{C}[[x]]$: L'anneau des séries formelles à une indéterminée à coefficients complexes.

$\mathbf{h}(V)$: l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{C}$ holomorphes sur secteur ouvert V.

$\mathbb{C}[[x]]_{1/k}$: L'anneau des séries Gevrey d'ordre s.

$\mathfrak{A} = \mathbb{K}\left[\frac{d}{dx}\right]$: le corps des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{K}$

$\widehat{\mathcal{M}}$: son ideal maximal.

$\mathbb{C}\{x\}$: L'anneau des séries convergentes centrées à l'origine de $\mathbb{C}$.

$\mathcal{M}$: son ideal maximal.

$\widehat{\mathcal{L}}_0$ (respectivement $\mathcal{L}_0$) : l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des opérateurs $\mathbb{C}$ linéaires envoyant $\mathbb{C}[[x]]$ (resp. $\mathbb{C}\{x\}$) dans $\widehat{\mathcal{M}}$ (resp. $\mathcal{M}$).

$\mathcal{A}_{\frac{1}{k}}$: $\mathbb{C}$-algèbre différentielles à l'origine (munu de $+, \cdot, x^2\frac{d}{dx}$).

$\widetilde{\mathbb{C}}_*$: Surface de Riemann du logarithme.

$\widehat{f}_1^{\pi+\xi}$: Fonction définit sur $Re \quad x < 0$.

$\widehat{f}_1^{-\pi+\xi}$: Fonction définit sur $Re \quad x > 0$.

$s_d(\widehat{f})$: la somme de $\widehat{f}$ dans la direction d.

$\mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k}}$: l'ensemble des séries k-sommables.

$\mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k},d}$ et $\mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k}}$: sont des $\mathbb{C}$-algèbres différentielles.

$\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$: Transformée de Borel formelle d'une série sans terme constant.

$\widehat{\mathcal{B}}_d(\widehat{f})$: Transformée de Borel formelle dans la direction d.

$\widehat{\mathcal{L}}_d(\widehat{f})$: Transformée de Laplace dans la direction d.

$f \sim S \sum_{|p|\geq 0} a_p x^p$: on dit qu'une série formelle f représonte asymptotiquement dans un secteur S

$R^i(x_1, x_2, y) = 0(y^2)$: est d'ordre supérieur ou égal à 2 en y

1.1 Séries divergentes solutions d'équations differentielles

Nous rappelons ici brièvement la théorie de la (multi)sommation des séries divergentes. Nous introduisons en particulier les notations et résultats dont nous nous servirons tout au long de ce mémoire. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple à [15] et [17] pour la sommabilité et à [18] pour la multisommabilité, ainsi qu'aux références qui y sont citées. On pourra également voir [12] et [23] pour leurs aspects historiques et heuristiques, ainsi que [1].

1.1.1 Séries formelles de type Gevrey

Soit s un nombre réel, on définie une fonction sur $\mathbb{C}[[x]]$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_s : \mathbb{C}[[x]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[x]] \\ \widehat{f}(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n & \longrightarrow & \varphi_s\left(\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n\right) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{(n!)^{s-1}} x^n \end{array}$$

Définition 1.1.1 *([22]) Une série formelle $\widehat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ est dite de type Gevrey d'ordre s*
$\exists C > 0, \forall A > 0$ *tels que* $\forall n \geq 0$,

$$|a_n| \leq CA^n (n!)^{s-1}$$

On note $\mathbb{C}[[x]]_s$ l'ensemble de ces séries.

Proposition 1.1.1 *Soit $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. La série $\widehat{f}$ est Gevrey d'ordre s, si $\varphi_s(\widehat{f})$ est dans $\mathbb{C}\{x\}$.*

$\mathbb{C}\{x\}$: l'anneau des séries convergentes.

Proposition 1.1.2 *1. $\mathbb{C}[[x]]_s$ est une $\mathbb{C}$-algèbre stable par dérivation.*

2. Pour $s > s' > 1$

$$\mathbb{C}[[x]]_{s'} \subset \mathbb{C}[[x]]_s$$

Preuve:

1. $\mathbb{C}[[x]]_s$ est une $\mathbb{C}$-algèbre, munie d'une opération ;

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[[x]]_s \times \mathbb{C}[[x]]_s & \longrightarrow & \mathbb{C}[[x]]_s \\ (\widehat{f}, \widehat{g}) & \longrightarrow & \widehat{f} \cdot \widehat{g} \text{ vérifiant :} \end{array}$$

   (a) Pour toutes $\widehat{f}, \widehat{g}$ et $\widehat{h}$ dans $\mathbb{C}[[x]]_s$:

$$\widehat{f} \cdot (\widehat{g} + \widehat{h}) = \widehat{f} \cdot \widehat{g} + \widehat{f} \cdot \widehat{h} \tag{1.1}$$

$$(\widehat{f} + \widehat{g}) \cdot \widehat{h} = \widehat{f} \cdot \widehat{h} + \widehat{g} \cdot \widehat{h} \tag{1.2}$$

   (b) Pour toutes $\widehat{f}, \widehat{g}$ dans $\mathbb{C}[[x]]_s$ et α dans $\mathbb{C}$

$$\alpha(\widehat{f} \cdot \widehat{g}) = (\alpha \widehat{f})\widehat{g} = \widehat{f}(\alpha \widehat{g}) \tag{1.3}$$

   Soit $\widehat{f}$ dans $\mathbb{C}[[x]]_s$, donc il existe deux nombres réels positifs C et A avec :

$$|a_n| < C(n!)^s A^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n; \;\; \widehat{f}'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

   on pose : $b_n = (n+1)a_{n+1}$

$$|b_n| = |n+1||a_{n+1}| < (n+1)C\left((n+1)!\right)^s A^{n+1}$$

   donc :

$$|b_n| < (n!)^s C' A'^n \text{ où } A' = A \text{ et } C' = e^s CA.$$

   D'où : $\widehat{f}'(x)$ est une série Gevrey d'ordre s.

2. Soit $\widehat{f}(x)$ dans $\mathbb{C}[[x]]_{s'}$; avec $\widehat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ donc il existe deux nombres réels positifs C et A avec :

$$|a_n| < C(n!)^{s'} A^n; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   comme $s' < s$ alors $(n!)^{s'} < (n!)^s$. Donc il existe deux nombres positifs C et A tels que :

$$|a_n| < C(n!)^s A^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   c'est à dire $\widehat{f}$ est dans $\mathbb{C}[[x]]_s$

d'oú

$$\mathbb{C}[[x]]_{s'} \subset \mathbb{C}[[x]]_s; \text{ pour tout } s > s' > 1.$$

▪

Exemple 1.1.1 *1. Pour $s = 1$; on a ;*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : \mathbb{C}[[x]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[x]] \\ \widehat{f}(x) & \longrightarrow & \varphi_1\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \end{array}$$

donc :

$$\mathbb{C}[[x]]_1 = \mathbb{C}\{x\}$$

2. *D'après la proposition 1.1.1 (2) on a :*
   $s' > s > 1$ donne :

$$\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]_{s'} \subset \mathbb{C}[[x]]_s$$

3. *Pour $s = +\infty$; on a :*

$$\mathbb{C}\{x\}_{+\infty} = \mathbb{C}[[x]] \quad \textit{(par conventions)}$$

4. *Et pour $s = -\infty$; on a :*

$$\mathbb{C}[[x]]_{-\infty} = \mathbb{C}[x].$$

   Ainsi :

$$\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]_{s'} \subset \mathbb{C}[[x]]_s \subset \mathbb{C}[[x]]; \quad \forall s > s' > 1.$$

Définition 1.1.2 *1. On appelle secteur pointé en 0 de direction d d'ouverture θ et de rayon r dans $\mathbb{C}$, et on note $S = S(d, \theta, r)$ l'ouvert :*

$$S = \left\{ x \in \mathbb{C} / -\left(\frac{\theta}{2}\right) < \arg(x) - d < \frac{\theta}{2} \quad \textit{et } |x| < r \right\}.$$

2. *Un tel secteur S est dit strict si son ouverture θ vérifie $\theta < 2\pi$.*
3. *Un secteur W sera dit sous-secteur de S et on notera $W \subset\subset S$ si :*

$$W \subset S \textit{ avec } S = S(d, \theta, r) \textit{ on } W = S(d, \theta', r').$$

$$\theta' < \theta, r' < r.$$

1.1.2 Développements asymptotiques Gevery de niveau k

Définition 1.1.3 *Soit V un secteur ouvert, on notera $\boldsymbol{h}(V)$ l'ensemble des fonctions $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes sur V.*

Définition 1.1.4 *([21]) Une fonction $f \in \boldsymbol{h}(V)$ est dite asymptotique au sens Gevrey (de niveau k) à une série Gevrey $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ si, sur tout sous-secteur fermé W de V, on a, pour tout N :*

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| \leq C^{te} A^N N! |x|^{N+1} (A > 0),$$

pour tout $x \in W - \{0\}$ et la constante dépendant de W mais pas de N.
Dans les conditions de la définition on note : $f(x) \in \mathcal{A}_{\frac{1}{k}}(V)$

Plus généralement on dit que $f \in \mathbf{h}(V)$ admet $\widehat{f} \in \widehat{\mathbb{K}}$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre s, s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tels que :
$x^m f \in \mathbb{C}[[x]]$ et $x^m f$ admette $x^m \widehat{f}$ comme développpment asymptotique Gevrey d'ordre s.
On utilisera la notion : $f \in \mathcal{A}_{\frac{1}{k}}(V)[x^{-1}]$.

Proposition 1.1.3 *Soit V un secteur ouvert de sommet l'origine dans $\mathbb{C}$.*

- *i) Les applications :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_{1/k}(V) & \xrightarrow{J} & \mathbb{C}[[x]]_{1/k} \\ \mathcal{A}_{1/k}(V)\left[\dfrac{1}{x}\right] & \xrightarrow{J} & \widehat{\mathbb{K}} \end{array}$$

  sont des homomorphismes de $\mathfrak{A}$-algèbre avec $\mathfrak{A} = \mathbb{K}\left[\frac{d}{dx}\right]$ (le corps des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{K}$)
- *ii) Si l'ouverture de V est $> \frac{\pi}{k}$, alors ces applications sont injectives.*

1.1.3 Séries k-sommables

Lemme 1.1.1 *([26]) Soient W un secteur ouvert de sommet 0 et d'ouverture $\frac{\pi}{k}$ et f une fonction plate de niveau k sur W. Alors, $f \equiv 0$ sur W.*

Ce résultat est une conséquence du théorème de Phragmène-Lindelöf. Il s'en suit que si f est asymptotique au sens Gevrey de niveau k à une série $\widehat{f}$ sur un secteur ouvert d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$, alors la fonction f est complètement caractérisée par la série $\widehat{f}$. On pose alors les définitions suivantes :

Définition 1.1.5 *([17], [21]) Une série $\widehat{f}$ est dite k-sommable dans la direction d si $\widehat{f}$ est de type Gevrey de niveau k et s'il existe une fonction analytique f asymptotique à $\widehat{f}$ au sens Gevrey de niveau k sur un secteur ouvert bissecté par d et d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$.*
On note alors $f = s_d(\widehat{f})$ la somme de $\widehat{f}$ dans la direction d.
On note $\mathbb{C}\{x\}_{1/k;d}$ l'ensemble de ces séries.

Définition 1.1.6 *Une série $\widehat{f}$ est dite k-sommable si elle est k-sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini de directions singulières.*

On notera : $\mathbb{C}\{x\}_{\frac{1}{k}}$ l'ensemble des séries k-sommables.

Plus généralement on posera : $\mathbb{K}_{1/k} = \mathbb{C}\{x\}_{1/k}[\frac{1}{x}]$.

Proposition 1.1.4
- *i) Si $\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{1/k}$ ($\widehat{f}$ est k-sommable) et si $s_d(\widehat{f}) = \emptyset$ alors : $\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ ($\widehat{f}$ est une série convergente).*
- *ii) On a les inclusions strictes de $\mathbb{C}$-algèbre stables par dérivations :*

$$\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{1/k} \subset \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$$

Théorème 1.1.1 *Soit $k > 0$ et soit d une direction issue de l'origine.*
Soient $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdots, \widehat{f_m} \in \widehat{\mathbb{K}}$ des séries k-sommables dans la direction d.
Soient $f_1, f_2, \cdots, f_m$ leurs sommes respectives dans cette directions d définies sur un même secteur ouvert V convenable, de bissectrice d et d'ouverture $> \frac{\pi}{k}$.
Soit $\mathbb{K}\langle\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdots, \widehat{f_m}\rangle$ le sous-corps de $\widehat{\mathbb{K}}$ engendré par $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdots, \widehat{f_m}$ et soit $\mathbb{K}\langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle$ le sous-corps de $\mathfrak{M}(V)$ engendré sur $\mathbb{K}$ par $f_1, f_2, \cdots, f_m$.
Alors l'application :

$$\mathbb{K}\langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdots, \widehat{f_m}\rangle$$

est isomorphisme de corps différentiel.

($\mathfrak{M}(V)$ est le corps différentiel des fonctions méromorphes sur V).

Preuve: $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdots, \widehat{f_m} \in \widehat{\mathbb{K}}$ sont des séries k-sommables c'est à dire que leurs sommes $f_1, f_2, \cdots, f_m \in \mathcal{A}_{1/k}(V)[\frac{1}{x}]$.
Donc $\mathbb{K}\langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle$ est un sous-corps de $\mathcal{A}_{1/k}(V)[\frac{1}{x}]$
et $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdots, \widehat{f_m}$ sont k-sommables alors $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdots, \widehat{f_m} \in \widehat{\mathbb{K}}_{1/k}$, c'est à dire que $\mathbb{K}\langle\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \cdot\cdot$

$\cdot, \widehat{f}_m\rangle$ est un sous-corps de $\mathbb{K}_{1/k}$.
D'après la proposition 1.2.1, l'application :

$$\mathcal{A}_{1/k}(V)[\frac{1}{x}] \longrightarrow \widehat{\mathbb{K}}_{1/k}$$

est un homomorphisme injectif de $\mathcal{A}$-algèbre, donc l'application :

$$\mathbb{K}\langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \cdots, \widehat{f}_m\rangle$$

est un homorphisme injectif de $\mathcal{A}$-algèbre et comme par construction cette application est surjective ($\widehat{f}_i$ est k-sommable) donc il existe $f_i \in \mathcal{A}_{1/k}(V)[\frac{1}{x}]$ tel que $\widehat{f}_i = s_d(f_i) \quad (i = 1, \cdots, m)$.
donc l'application

$$\mathbb{K}\langle f_1, f_2, \cdots, f_m\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle \widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \cdots, \widehat{f}_m\rangle$$

est un isomorphisme de corps différentiel. ▪
Rappelons quelques propriétés des fonctions entières.

Définition 1.1.7 *Soit $\widetilde{f}$ une fonction entière, soit $\rho > 0$ et $b > 0$.*
On dit que $\widetilde{f}$ est à ***croissance exponentielle*** *d'ordre au plus ρ et de type fini au plus b (pour ρ fixe), s'il existe $c > 0$ tel que :*

$$\left|\widetilde{f}(t)\right| < c\exp(b|t|^{\rho}); \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.1.8 *Soit $\widetilde{f}$ une fonction entière. Soit d une direction issue de l'origine. Soient $k > 0$ et $a_d > 0$, on dit que $\widetilde{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus k (pour k fixé) et de type fini au plus a_d le long de d s'il existe $c_d > 0$ tel que :*

$$\left|\widetilde{f}(t)\right| < c_d\exp(a_d|t|^{k}), \qquad \textit{pour tout } t = re^{id}, r \in \mathbb{R}^+.$$

Soient $\widehat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$, f la somme $\widehat{f}$ dans la direction d.
On a la formule suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to+\infty}\inf\left(\frac{-\log|b_n|}{n\log n}\right)$$

qui définit l'ordre ρ de f (ρ étant fixé) ou ρ décrit $]0^+, +\infty[\cup]-\infty, 0^-[$ et de type τ de f décrit $[-\infty, +\infty]$.

Proposition 1.1.5 *Soit $\widetilde{f}$ une fonction entière, supposons que :*

$$\frac{1}{\rho'} = \lim_{n\to+\infty} \inf \left(\frac{-\log|b_n|}{n \log n} \right) > 0 \ \textit{alors} \ :$$

pour tout $\rho > \rho'$, $\widetilde{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus ρ est de type fini.

1.2 Convergence des solutions formelles

1.2.1 Transformation de Borel formelle

La transformation de Borel formelle est l'opérateur linéaire $\widehat{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{C}[[x]]$ sur $\mathbb{C}[[\xi]]$ défini par

$$\widehat{\mathcal{B}} : \widehat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]] \longrightarrow \widetilde{f}(\xi) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} \in \mathbb{C}[[\xi]]$$

et appelé transformation de Borel formelle de $\widehat{f}$

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction holomorphe sur un secteur $S(d,\theta,r)$ d'ouverture $\theta > \pi$ et bornée à l'origine sur tout sous-secteur. On appelle transformée de Borel de f dans la direction d et on note $\mathcal{B}_d f$ la fonction complexe $g(\xi)$ définie sur la demi-droite de direction d par :*

$$g(\xi) = \mathcal{B}_d f(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\frac{\xi}{x}} f(x) \frac{dx}{x^2}$$

On définit donc la transformée de Borel d'ordre k par :

$$g(\xi) = \mathcal{B}_d^k f(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\left(\frac{\xi}{x}\right)^k} f(x) \frac{dx}{x^2}$$

où l'intégration se fait le long du contour (orienté) γ d'un sous-secteur $\gamma = S(d, \pi+\theta_1, r') \subset\subset S(d,\theta,r)$ de même direction et d'ouverture $> \pi$. On appelle $\widetilde{f}$ le mineur de $\widehat{f}$. Cette transformation consiste à appliquer formellement à chaque monôme x^n la transformation de Borel

$$\mathcal{B}_d(x^n)(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma x^n e^{\frac{\xi}{x}} \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} \text{ si } n \geq 1 \\ 0 \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

de x^n dans la direction d (en fait dans n'importe quelle direction d puisque le résultat est indépendant de la direction choisie), où γ est le lacet aboutissant en 0 dans des directions où le noyau $e^{\frac{\xi}{x}}\frac{dx}{x^2}$ décroît rapidement (voir figure 1.2). En particulier, si on remplace x^n par une fonction f holomorphe sur un secteur W de sommet 0, bissecté par d et d'ouverture strictement supérieure à π, $\mathcal{B}_d(f)$ a un sens dès que $|f(x)|$ ne croît pas trop vite quand $|x|$ tend vers 0 dans W.

Figure 1.2

- Si $\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, $\widetilde{f}$ est une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.
- Si $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$, $k > 1$, $\widetilde{f}$ est une fonction entière.
- Si $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_1$, $\widetilde{f}$ est un élément de $\mathbb{C}\{\xi\}$ et son rayon de convergence est en général fini.
- Si $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$, $k < 1$, $\widetilde{f}$ est un élément de $\mathbb{C}[[\xi]]$.

1.2.2 Transformation de Laplace

Définition 1.2.2 *une fonction analytique à l'origine $\widetilde{f}$ et supposons que $\widetilde{f}$ peut être prolongée analytiquement le long de la demi-droit $\theta_d = [0, \infty e^{id}[$ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini sur θ_d, i.e.,*

$$|\widetilde{f}(\xi)| \leq Ce^{a|\xi|} \text{ pour tout } \xi \in \theta_d \text{ tel que } |\xi| \gg 0$$

La transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_d(\widetilde{f})(x) = \int_{\theta_d} \widetilde{f}(\xi)e^{-\frac{\xi}{x}}d\xi$$

Alors $\widetilde{f}$ dans la direction d est une fonction analytique sur un disque d'axe θ_d dont le bord passe par l'origine. Si la croissance exponentielle de $\widetilde{f}$ reste valable sur un secteur illimité d'axe θ_d, alors $\mathcal{L}_d(\widetilde{f})$ peut être prolongée en une fonction analytique sur un secteur de sommet 0, bissecté par d et d'ouverture strictement supérieure à π.

Elle est définie holomorphe sur l'ouvert sectoriel de direction d et d'ouverture

$$\pi : U = S(d, \pi) = \{x \in \mathbb{C}/ \cos(\arg x - d) \succ \frac{M}{x}\}.$$

Et de même, si $\widetilde{f}$ est à croissance au plus exponentielle d'ordre k, on définit la transformée de Laplace d'ordre k par :

$$f(x) = \mathcal{L}_d^k \widetilde{f}(x) = \int_d e^{-\left(\frac{\xi}{x}\right)^k} \widetilde{f}(x) d\left(\frac{\xi}{x}\right)^k.$$

L'utilisation conjointe de la transformation de Borel et de transformation de Laplace permet de caractériser parmi les séries de type Gevrey de niveau 1 celles qui sont 1-

sommabeles :

Ce point de vue nous conduit à transposer la notion de 1-sommable en la notion de 2-sommabilité suivante : ([21] [17])

Définition 1.2.3 *Une série $\widehat{f}$ est dite* 2*-sommable dans la direction* d *si, de façon équivalente :*

- *i) on peut lui appliquer la méthode de sommation de Borel -Laplace de niveau* 2

$$f(x) = \rho_{1/2}\mathcal{L}\mathcal{B}\rho_2(\widehat{f})(x)$$

dans toutes les directions d'un voisinage de la direction d*.*

- *ii)* $\widehat{f}$ *est une série Gevrey de niveau* 2 *et la somme de la série* $\rho_{1/2}\mathcal{L}\mathcal{B}\rho_2(\widehat{f})(\xi)$ *se prolonge sur un petit voisinage sectoriel de* d *avec une croissance au plus exponentielle d'ordre* 2 *(elle est un* $O(e^{|a\xi^2|})$ *et par un* $O(e^{|a\xi|})$*)*

Définition 1.2.4 *On dira que* $\widehat{f}$ *est* 2*-sommable si elle est* 2*-sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini de directions singulières.*

La série $\widehat{f_2}$ est 2-sommable, ses directions singulières étant les deux demi-axes imaginaires c'est-à-dire les ligne de décroissance maximale de l'exponentielle e^{1/x^2}.

Théorème 1.2.2 *(**sommation de Borel-Laplace**, [17])*
Une série formelle

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]_1$$

est 1*-sommable dans la direction* d *si, et seulement si, son* $\widetilde{f}$ *peut être prolongé analytiquement que un secteur illimité d'axe* θ_d *avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini (voir figure 2.2).*
La somme $s_d(\widehat{f})$ *de* $\widehat{f}$ *dans la direction* d *est alors donnée par*

$$s_d(\widehat{f})(x) = a_0 + \int_{\theta_d} \widetilde{f}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

On a le diagramme suivant (sommation de Borel-Laplace de niveau 1*) :*

$$\widehat{f}(x) \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}} \widetilde{f}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_d} s_d(\widehat{f})(x)$$

Figure 2.2

Ce procédé de somamtion des séries formelles de type Gevrey de niveau 1 est une conséquence d'une méthode de sommation due à E. Borel([4], [5]). On peut également (voir par exemple [17]), moyennant l'introduction de *la transformation de Borel formelle* $\widehat{\mathcal{B}}_k = \varrho_{1/k} \circ \widehat{\mathcal{B}} \circ \varrho_k$ de niveau k, caractériser parmi les séries de type Gevrey de niveau k celles qui sont k-sommables dans une direction d fixée : une série formelle

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$$

est k-sommable dans la direction d si, et seulement si, la somme

$$\widetilde{f}_k(\xi) = \widehat{\mathcal{B}}_k(\widehat{f})(\xi) = \sum_{n \geq k} \frac{a_n}{\Gamma(\frac{n}{k})} \xi^{n-k} \in \mathbb{C}\{\xi\}$$

(cette série est nécessairement convergente par la formule de Stirling, puisque $\widehat{f}$ est de type Gevrey de niveau k) peut être prolongée analytiquement sur un secteur illimité d'axe θ_d avec une croissance exponentielle d'ordre au plus k à l'infini. Dans ces conditions, la somme $s_d(\widehat{f})$ de $\widehat{f}$ dans la direction d est donnée par

$$s_d(\widehat{f})(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{k-1} x^{k-1} + k \int_{\theta_d} \xi^{k-1} \widetilde{f}_k(\xi) e^{-\frac{\xi^k}{x^k}} d\xi$$

Noter que cette intégrale est en fait $\varrho_{1/k} \circ \mathcal{L}_d \circ \varrho_k(\widetilde{f}_k)(x)$, où $\mathcal{L}_d$ désigne la transformation de Laplace usuelle. On pose $\mathcal{L}_{k;d} = \varrho_{1/k} \circ \mathcal{L}_d \circ \varrho_k$ et on appelle cette transformation *la transformation de Laplace de niveau* k. On a alors le diagramme de sommation de Borel-Laplace de niveau k suivant :

$$\widehat{f}(x) \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}_k} \widetilde{f}_k(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_{k;d}} s_d(\widehat{f})(x)$$

Avant d'étudier plus en détail ces questions de prolongements analytiques, revenons un instant sur la transformation de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}$.
Par définition, $\widehat{\mathcal{B}}$ est un opérateur linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[[x]]_1$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}\{\xi\}$.
Si $\widehat{f}, \widehat{\psi} \in x\mathbb{C}[[x]]_1$, on vérifie que la transformée de Borel formelle du produit $\widehat{f}\widehat{\psi}$ est une série convergente à l'origine, i.e., $\widehat{f}\widehat{\psi} \in x\mathbb{C}[[x]]_1$. La somme de cette série coïncide alors

avec le produit de convolution

$$\widetilde{f} * \widetilde{\psi}(\xi) = \int_0^\xi \widetilde{f}(\xi - \eta)\widetilde{\psi}(\eta)d\eta$$

des $\widetilde{f}$ et $\widetilde{\psi}$. Ce produit de convolution admet pour élément unité la distribution de Dirac à l'origine δ.

On pose alors $\widehat{\mathcal{B}}(1) = \delta$ et on étend la transformation de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}$ à

$$\widehat{\mathcal{B}} : \widehat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]_1 \longmapsto \widetilde{f}(\xi) = a_0\delta + \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} \in \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\xi\}$$

$\widehat{\mathcal{B}}$ est un **isomorphisme** de l'algèbre multiplicative $(\mathbb{C}[[x]]_1, .)$ sur l'algèbre convolutive $(\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\xi\}, *)$; son inverse est la *transformation de Laplace formelle* $\widehat{\mathcal{L}}$ définie par

$$\widehat{\mathcal{L}}(\delta)(x) = 1 \text{ et } \widehat{\mathcal{L}}(\xi^n)(x) = n!x^{n+1} \text{ pour tout } n \geq 0$$

Noter que la transformation de Laplace formelle consiste à appliquer formellement la transformation de Laplace $\mathcal{L}_d$ dans n'importe quelle direction d aux différents monômes ξ^n de la série convergente $\sum_{n\geq 0} a_n\xi^n$.

Théorème 1.2.3 *Soit $1 < s < s_1$; alors :*

- *i)* $\mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}[[x]]_{1/k} = \mathbb{C}\{x\}$.
- *ii)* $\mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}\{x\}_{1/k} = \mathbb{C}\{x\}$.

• Avant d'aborder la preuve, rappelons d'abord les lemmes suivants.

Lemme 1.2.1 *Soient $k > 0$ et $\rho > 0$. Soit $\Sigma = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ un ensemble fini de directions issues de l'origine. Soit $\widetilde{f}$ une fonction entière satisfaisant les conditions suivantes :*

- *(i) $\widetilde{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus ρ et de type fini.*
- *(ii) Pour toute direction issue de l'origine $d \notin \Sigma$, $\widetilde{f}$ est à une croissance exponentielle d'ordre au plus k et de type fini le long de d.*

  Alors :

  il existe $b > 0$ tel que $\widetilde{f}$ soit à croissance exponentielle d'ordre au plus k et de type fini au plus b.

Preuve: On suppose que $\rho > k$. Soit $\widetilde{f}$ une fonction entière satisfaisant les conditions (i) et (ii). Soit S^1 le cercle des directions issues de l'origine, soit $d \in S^1$. On choisit θ_1 et θ_2 tel que $\theta_1 < d < \theta_2$.

$$\theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi}{\rho} < \frac{\pi}{k}; (\text{ pour } \rho > k).$$

et que :

$$[\theta_1, \theta_2] \cap \Sigma = \{d\}$$

Pour $a > 0$ et $\arg(t) \in [\theta_1, \theta_2]$; on définit $h_a(t)$:

$$h_a(t) = \exp\left(-a\left[\frac{\exp\frac{ik}{2}(\theta_1+\theta_2)}{\cos\frac{k}{2}(\theta_1-\theta_2)}t^k\right]\right).$$

Le module de $h_a(t)$:

$$|h_a(t)| = \exp\left(-aRe\left[\frac{\exp\frac{ik}{2}(\theta_1+\theta_2)}{\cos\frac{k}{2}(\theta_1-\theta_2)}t^k\right]\right).$$

$t = |t|\exp(i\arg t)$ donc : $t^k = |t|^k\exp(ik\arg t)$

$$|h_a(t)| = \exp\left(-a\frac{\cos k\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \arg t\right)}{\cos\frac{k}{2}(\theta_1-\theta_2)}|t|^k\right).$$

(a) Pour $\arg t \in [\theta_1, \theta_2]$ on a :

$$|h_a(t)| \leq \exp(-a|t|^k) \leq 1 \tag{1.4}$$

Et

$$\left|(h_a(t))^{-1}\right| \leq \exp(c|t|^k); \text{ avec } c = \frac{a}{\cos\frac{k}{2}(\theta_1-\theta_2)}$$

(b) Et pour $\arg(t) = \theta_1$ ou θ_2 on a :

$$h_a(t) = \exp(-a|t|^k) \tag{1.5}$$

D'après la condition (i) il existe $c_1 > 0$ et $b_1 > 0$ tels que :

$$\left|\widetilde{f}(t)\right| < c_1\exp(b_1|t|^p); \text{ pour tout } t \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Et d'après la condition (ii) il existe $c_2 > 0$ et $a > 0$ tels que :

$$\left|\widetilde{f}(t)\right| < c_2\exp(a|t|^k); \text{ pour tout } t \in \mathbb{C} \quad (\text{ avec } \arg(t) = \theta_1 \text{ ou } \theta_2). \tag{1.7}$$

On pose $f = h_a \widetilde{f}$ donc :

$$\widetilde{f}(t) = f(t)\left(h_a(t)\right)^{-1}. \tag{1.8}$$

de (1.4) et (1.6) on a :

$$|f(t)| \leq c_1 \exp(b_1 |t|^p); \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{C}. \tag{1.9}$$

de (1.5) et (1.7) on a :

$$|f(t)| \leq c_2; \qquad \text{pour } \arg(t) = \theta_1 \text{ ou } \theta_2. \tag{1.10}$$

De (1.8), (1.9) et(1.10) on a :

$$\left|\widetilde{f}(t)\right| \leq c_2 \exp(c|t|^k); \text{ pour tout } t \in \mathbb{C} \text{ avec } \arg(t) \in [\theta_1, \theta_2]. \tag{1.11}$$

c'est à dire $\widetilde{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus k. ▪

Lemme 1.2.2 *Soit $k > k_1 > 0$. Soient*

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \qquad et \qquad \widehat{\varphi} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{k_1}\right)} t^n$$

on suppose que $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$ $\left(s - 1 = \frac{1}{k}\right)$.
Soit $\rho > \frac{kk_1}{k-k_1}$; alors la somme φ de la série $\widehat{\varphi}$ est une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre au plus ρ et de type fini.

Preuve: On a $\widehat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$, donc il existe $c > 0$ et $A > 0$ tels que :

$$|a_n| < c(n!)^{\frac{1}{k}} A^n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Notons

$$b_n = \frac{a_n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{k_1}\right)}, \qquad \widehat{\varphi} = \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

Le comportement de la fonction Γ quand $x \longrightarrow +\infty$ est décrit par la formule de Stirling suivant :

$$\Gamma(1+x) \cong \left(\frac{x}{\exp}\right)^x \sqrt{2\pi x}. \qquad (x \longrightarrow +\infty)$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1+x)} &< \frac{1}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}\\ &< \frac{x^{-x}e^{x}}{\sqrt{2\pi x}}.\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1+\frac{n}{k_1})} &< \frac{\left(\frac{n}{k_1}\right)^{-\frac{n}{k_1}} e^{+\frac{n}{k_1}}}{\sqrt{\frac{2\pi n}{k_1}}}\\ |b_n| &< \frac{|a_n|\left(\frac{n}{k_1}\right)^{-\frac{n}{k_1}} e^{+\frac{n}{k_1}}}{\sqrt{\frac{2\pi n}{k_1}}}\\ |b_n| &< \frac{C(n!)^{\frac{1}{k}}A^n\left(\frac{n}{k_1}\right)^{-\frac{n}{k_1}} e^{+\frac{n}{k_1}}}{\sqrt{\frac{2\pi n}{k_1}}}\\ |b_n| &< \frac{C(n!)^{\frac{1}{k}}n^{-\frac{n}{k}}e^{+\frac{n}{k}}A^n k_1^{\frac{n}{k}}}{\sqrt{\frac{2\pi n}{k_1}}}\\ |b_n| &< \frac{C}{\sqrt{\frac{2\pi n}{k_1}}}\left[A\,(ek_1)^{\frac{1}{k_1}}\right]^n (n^n)^{\frac{1}{k}}(n^n)^{-\frac{1}{k_1}}; \qquad (n! < n^n)\end{aligned}$$

on pose :

$$c' = \frac{C}{\sqrt{\frac{2\pi n}{k_1}}}; \qquad A' = A(k_1 e)^{\frac{1}{k_1}}$$

donc :

$$|b_n| < c' A'^n n^{n(\frac{1}{k}-\frac{1}{k_1})}; \qquad \text{pour tout } k > k_1$$

soit :

$$\frac{1}{\rho'} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf\left(\frac{-\log|b_n|}{n\log n}\right) \tag{1.12}$$

on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|b_n|} &\geq \frac{1}{c'A'n^{n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k_1}\right)}}\\ \log\left(\frac{1}{|b_n|}\right) &\geq -\log c' - n\log A' - n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k_1}\right)\log n\\ \frac{\log\left(\frac{1}{|b_n|}\right)}{n\log n} &\geq \frac{-\log c'}{n\log n} - \frac{-\log A'}{\log n} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k_1}\end{aligned} \tag{1.13}$$

de (1.12) et (1.13) on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho'} &\geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} = \frac{k-k_1}{kk_1}; \qquad \text{c'est à dire :} \\ \rho' &\leq \frac{kk_1}{k-k_1}. \end{aligned}$$

D'après la proposition (1.1.4) la fonction entière φ est a croissance exponentielle d'ordre au plus ρ', pour $k_1 < k$. ▪

Preuve: (preuve du théorème 1.2.2)

– i) Soit

$$\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}[[x]]_{1/k}; \quad \widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

on lui assosie

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)} t^n$$

la série $\widetilde{f}(t)$ est convergente et sa somme est une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre $\rho(\rho > kk_1/(k-k_1))$ et de type fini d'après la condition $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k}$ et le lemme (1.2.2). D'après le lemme (1.2.1) et du fait que $\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{s_1}$, $\widetilde{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre $k_1 = \left(\frac{1}{s_1} - 1\right)$. Donc $\widetilde{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre $\leq k_1$ et de type fini dans tout les directions, c'est à dire $\widehat{f}$ est k-sommable deans tout les directions $\left(i.e. \;\; \Sigma(\widehat{f}) = \varnothing\right)$.
Et donc $\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ (d'après la proposition (1.1.3) i)), d'où :

$$\mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}[[x]]_{1/k} \subset \mathbb{C}\{x\}.$$

Et d'après la proposition (1.1.3) ii) on a :

$$\begin{cases} \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{k_1} \subset \mathbb{C}[[x]]_{k_1}. \\ \quad \text{et} \\ \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{1/k} \subset \mathbb{C}[[x]]_{1/k}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]_{s_1} \\ \quad \text{et} \\ \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{s}. \end{cases}$$

donc :

$$\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}[[x]]_{s}.$$

d'où :

$$\mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}[[x]]_s \qquad \forall s_1 > s > 1.$$

– ii) $\mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}\{x\}_s$?
Soit $\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}\{x\}_s$ alors ;

$$\begin{cases} \widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_s \\ \text{et} \\ \widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_s \\ \text{et} \\ \widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\widehat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}[[x]]_s \subset \mathbb{C}\{x\}.$$

donc :

$$\mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}\{x\}_s \subset \mathbb{C}\{x\}.$$

d'où :

$$\mathbb{C}\{x\}_{s_1} \cap \mathbb{C}\{x\}_s = \mathbb{C}\{x\}; \qquad \text{pour } 1 < s < s_1.$$

▪

1.2.3 Notes sur la multisommabilité

La k-sommabilité n'est pas suffisante pour sommer les solutions formelles des équations différentielles algébriques, même dans le cas linéaire. Le premier exemple construit en ce sens est dû à J.-P. Ramis et Y. Sibuya ([24]) : l'équation différentielle linéaire

$$x^5(2-x)y'' + x^2(4+5x^2-2x^3)y' + 2(2-x+x^2)y = 4x + 2x^2 + 10x^3 - 3x^4$$

admet une seule solution série formelle à l'origine $\widehat{f}(x) = \widehat{f}_1(x) + \widehat{f}_2(x)$, où

$$\widehat{f}_1(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n! x^{n+1}$$

est la série d'Euler et où

$$\widehat{f}_2(x) = \widehat{f}_1(x^2) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! x^{n+1}$$

Il est classique que la série formelle $\widehat{f}_1$ est 1-sommable et que la série formelle $\widehat{f}_2$ est 2-sommable. En revanche, leur somme $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ n'est ni 1-sommable ni 2-sommable (et même ni k-sommable pour n'importe quelle valeur de k). On est donc amené, pour contourner cette difféculté et "sommer" la série $\widehat{f}$, à introduire le concept plus général de multisommabilité.

Il existe plusieurs définitions pour la multisommabilité des séries formelles ([2], [16], [18]). Toutes ces définitions sont équivalentes, mais reposent sur des concepts différents : la méthode de W. Balser ([2]) utilise une méthode d'itération de transformations de Laplace de niveaux différents ; celles de J.-P. Ramis ([16]) utilisent essentiellement la cohomologie et la notion de correction exponentiellement petite ; et celle de J. Martinet et J.-P. Ramis ([18]) repose sur la théorie de l'accélération de J. Ecalle ([7]).

Cette derniére définition généralise l'approche par formule intégrale et prolongement analytique de la k-sommabilité (sommation de Borel-Laplace : cf. théorème 1.2.1.1 et conséquences). En outre, elle a l'avantage sur les méthodes géométriques (avec celle de W. Balser) d'être susceptible d'application numérique, puisqu'elle fournit un procédé explicite de sommation.

Rappelons brièvement en quoi consiste cette définition de la multisommabilité. Pour plus de détails, nous renvoyons à [18]. On commence par définir pour $a > 1$ le noyau d'accélération $\mathcal{C}_a$ de puissance a par

$$\mathcal{C}_a(\xi) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{-\pi}} e^{u-u^{1/a}\xi}du$$

où $\gamma_{-\pi}$ désigne un contour de Hankel "autour" de $\mathbb{R}^-$. Ces noyaux $\mathcal{C}_a$ sont des fonctions entières et on peut montrer que

$$\mathcal{C}_a(\xi) = \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 0}\sin\left(\frac{n\pi}{b}\right)\frac{\Gamma(1+\frac{n}{a})}{\Gamma(1+n)}\xi^n \text{ où } b \text{ vérifie } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

En particulier, si a est un nombre rationnel (c'est le seul cas que nous rencontrons), $\mathcal{C}_a$ est une fonction de Meijer. De plus, dans toute les directions vérifiant $|\arg(\xi)| < (1-\frac{1}{a})\frac{\pi}{2}$, les noyaux $\mathcal{C}_a$ ont une croissance exponentielle à l'infini du type

$$\xi^{\frac{b}{2}} e^{\frac{1}{b} a^{-\frac{b}{a}} \xi^{b}} \tag{1.14}$$

On définit alors les opérateurs d'accélération de niveaux $k < k'$ dans la direction d par

$$\varrho_{(k,k');d}(f)(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty e^{id}} \mathcal{C}_{k'/k} \left(\frac{\xi}{\tau^{k'/k}} \right) f(\xi) d\xi$$

Noter que la croissance exponentielle à l'infini du noyau $\mathcal{C}_{k'/k}$ (cf. (1.1)) montre que l'opérateur $\varrho_{(k,k');d}$ est applicable aux fonctions f à croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{k'}{k'-k} > 1$ à l'infini.

En fait, on préfère utiliser les opérateurs d'accélération "redressés" de niveaux $k < k'$ dans la direction d définis par

$$\mathbf{A}_{(k,k');d} = \varrho_{1/k'} \circ \varrho_{(k,k');kd} \circ \varrho_k$$

Ceux-ci sont applicables aux fonctions à croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{k'k}{k'-k}$ à l'infini. La justification du qualicatif "redressé" apparaîtra dans le diagramme de multisommation qui suit : les opérateurs $\mathbf{A}_{(k,k');d}$ correspondent à des flèches horizontales, alors que les opérateurs $\varrho_{(k,k');d}$ correspondent à des flèches obliques.

Ces différents opérateurs étant construits, on pose la définition suivante :

Définition 1.2.5 *([18]) Soient $0 < k_1 < k_2 < ... < k_s$ des nombres rationels et d une direction. Une série formelle $\widehat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ est dite $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommable dans la direction d si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *(0) La série $\widehat{f}$ est de type Gverey de niveau k_1 : $\widehat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]_{1/k_1}$.*
- *(1) La somme de la série convergente $\mathcal{B}_{k_1}(\widehat{f})$ peut être prolongée analytiquement sur un secteur illimité d'axe θ_d avec une croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1}$ à l'infini.*
- *(2) La fonction $\boldsymbol{A}_{(k_1,k_2);d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{k_1}(\widehat{f})$ peut être prolongée analytiquement le long de θ_d avec une croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{k_3 k_2}{k_3 - k_2}$ à l'infini.*
- *...*
- *(k) La fonction $\boldsymbol{A}_{(k_{r-1},k_r);d} \circ \boldsymbol{A}_{(k_{r-2},k_{r-1});d} \circ ... \circ \boldsymbol{A}_{(k_1,k_2);d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{k_1}(\widehat{f})$ peut être prolongée analytiquement le long de θ_d avec une croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{k_{r+1} k_r}{k_{r+1} - k_r}$ à l'infini.*
- *...*
- *(s) La fonction $\boldsymbol{A}_{(k_{s-1},k_s);d} \circ \boldsymbol{A}_{(k_{s-2},k_{s-1});d} \circ ... \circ \boldsymbol{A}_{(k_1,k_2);d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{k_1}(\widehat{f})$ peut être prolongée analytiquement le long de θ_d avec une croissance exponentielle d'ordre au plus k_s à*

l'infini.

Proposition

Si $\widehat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ est $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommable dans la direction d, alors

$$\mathcal{L}_{k_s;d} \circ \mathbf{A}_{(k_{s-1},k_s);d} \circ \mathbf{A}_{(k_{s-2},k_{s-1});d} \circ ... \circ \mathbf{A}_{(k_1,k_2);d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{k_1}(\widehat{f})$$

est définie et analytique sur un secteur bissecté par d.

Définition 1.2.6 *Si $\widehat{f}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ est $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommable dans la direction d, sa multisomme $s_d(\widehat{f})$ dans la direction d est définie par*

$$s_d(\widehat{f}) = \mathcal{L}_{k_s;d} \circ \boldsymbol{A}_{(k_{s-1},k_s);d} \circ \boldsymbol{A}_{(k_{s-2},k_{s-1});d} \circ ... \circ \boldsymbol{A}_{(k_1,k_2);d} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{k_1}(\widehat{f})$$

on a alors le diagramme de multisummation suivant :

$$\widehat{f} \longrightarrow \mathcal{B}_{k_1}\widetilde{\Phi}_1 \xrightarrow{\boldsymbol{A}_{(k_1,k_2);d}} \widetilde{\Phi}_2 \xrightarrow{\boldsymbol{A}_{(k_2,k_3);d}} ... \xrightarrow{\boldsymbol{A}_{(k_{s-1},k_s);d}} \widetilde{\Phi}_s \xrightarrow{\mathcal{L}_{k_s;d}} s_d(\widehat{f})$$

On note $\mathbb{C}\{x\}_{1/k_1,1/k_2,...,1/k_s;d}$ l'ensemble des séries formelles $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommables dans la direction d.

Définition 1.2.7 *Une série $\widehat{f}$ est dite* $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommable *si elle est $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini.*
On note $\mathbb{C}\{x\}_{1/k_1,1/k_2,...,1/k_s}$ l'ensemble des séries formelles $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommables.
$\mathbb{C}\{x\}_{1/k_1,1/k_2,...,1/k_s;d}$ et $\mathbb{C}\{x\}_{1/k_1,1/k_2,...,1/k_s}$ sont des $\mathbb{C}$-algèbres différentielles.

On étend aisément la définition 1.2.5 sur la multisommabilité des séries formelles aux séries méromorphes formelles de la façon suivante : une série

$$\widehat{f}(x) = \frac{a_{-p}}{x^p} + ... + \frac{a_{-1}}{x} + \widehat{\psi}(x) \text{ avec } \widehat{\psi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$$

est $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommable dans la direction d si $\widehat{f}(x)$ est $(k_1, k_2, ..., k_s)$-sommable dans la direction d. La somme $s_d(\widehat{f})$ de $\widehat{f}$ dans la direction d est alors définie par

$$s_d(\widehat{f})(x) = \frac{a_{-p}}{x^p} + ... + \frac{a_{-1}}{x} + s_d(\widehat{\psi})(x)$$

Chapitre 2

Systèmes différentiels linéaires de Gérard-Sibuya

On a ici étudier les systèmes de Pfaff complètement intégrables de la forme :

$$dy = \frac{f^1(x_1, x_2, y)}{x_1^{P_1+1}} dx_1 + \frac{f^2(x_1, x_2, y)}{x_2^{P_2+1}} dx_2 \qquad (I)$$

avec $P_1 > 0$ et $P_2 > 0$.
et où pour $i = 1, 2$, f^i est holomorphe dans $U^1 \times U^2 \times V$.

$$\begin{aligned} U^i &= \{x_i / 0 \leq |x_i| \leq r_i\} \qquad i = 1, 2; \\ V &= \{y \in \mathbb{C}^m / 0 \leq |y_i| < \rho_i\} \end{aligned}$$

2.1 Existance de solution formelle

Ce système peut également s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} x_1^{P_1+1} \frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, y) & P_1 > 0 \\ x_2^{P_2+1} \frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, y) & P_2 > 0 \end{cases} \qquad (I_2)$$

Ecrivons

$$f_i(x_1, x_2, y) = f_0^i(x_1, x_2) + A^i(x_1, x_2)y + R^i(x_1, x_2, y). \qquad (I^*)$$

La condition de complète intégrabilité du système I_1

$$dy = \frac{f^1(x_1, x_2, y)}{x_1^{P_1+1}} dx_1 + \frac{f^2(x_1, x_2, y)}{x_2^{P_2+1}} dx_2 \qquad P_1 > 0 \text{ et } P_2 > 0$$

est

$$x_1^{P_1+1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2^{P_2+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \tag{C.I}$$

c'est-à-dire $D_{12} = D_{21}$ où

$$\begin{aligned} D_{12}(x_1, x_2, y) &= x_2^{P_2+1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) \\ &= x_2^{P_2+1}\left(\frac{\partial f_0^1}{\partial x_2} + \frac{\partial A^1}{\partial x_2}y + \frac{\partial R^1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y}f_2 \end{aligned}$$

Lemme 2.1.1 *Nous avons* $[A^1(0,0), A^2(0,0)] = 0$ *En effet*

$$D_{12}(0,0,y) = \left[\frac{\partial}{\partial y}(A^1y + R^1)\right]_{x_1=0 \quad x_2=0} f_2(0,0,y)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial y}(A^1y + R^1) = A^1 + \frac{\partial R^1}{\partial y} \ \textit{et}\ f_2(0,0,y) = A^2(0,0)y + 0(y^2)$$

si $\widetilde{D}_{12}(0,0,y)$ *désigne le terme linéaire en* y *dans* $D_{12}(0,0,y)$ *nous voyons que*

$$\widetilde{D}_{12}(0,0,y) = A^1(0,0)A^2(0,0)$$

ce qui donne le lemme ci-dessus.

Corollaire 2.1.1 *Par une similitude* $T \in GL(p,\mathbb{C})$ *il est possible de mettre* $A^i(0,0)$, $(i = 1,2)$ *sous la forme*

$$\widetilde{A}^i = \begin{pmatrix} (A^i)_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & (A^i)_2 & & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ . & . & & . & . & . \\ 0 & . & & .. & 0 \ . & (A^i)_r \end{pmatrix}$$

avec pour tout $s = 1,2,...,r$

$$(A^i)_s = \lambda_s^i I_s (N^i)_s$$

où I_s *est la matrices identité de même ordre que* $(A^i)_s, (N^i)_s$ *une matrice nilpotente sous forme triangulaire supérieure. De plus on peut supposer que pour tout* $s = 1,2,...,r$ *il existe* $i \in \{1,2\}$ *tel que* $\lambda_s^i \neq \lambda_{s+1}^i$. *On a également*

$$\left[(A^1)_s, (A^2)_s\right] = \left[(N^1)_s, (N^1)_s\right] = 0$$

Considérons maintenant le système formelle (I^*) *associé au système* (2.1) *de la manière suivante :*

On remplace

$$f^i(x_1, x_2, y) = \sum_{|p|=0}^{+\infty} \widehat{f^i_P}(x_1, x_2) y^P$$

par la série formelle que nous noterons encore $f^i(x_1, x_2, y)$ *obtenue en remplaçant les coefficients* $\widehat{f^i_P}(x_1, x_2)$ *par leurs développements asymptotiques dans* S.

Lemme 2.1.2 *Si une matrices* $A^i(0,0)$ *est non singulière, le système formel* (I^*) *admet une solution formelle de la forme*

$$\varphi = \sum_{|r|=1}^{+\infty} \varphi_{r_1 r_2} x_1^{r_1} \quad x_2^{r_2}$$

Preuve: Supposons que $A^1(0,0)$ est non singulière et considérons la première équation du système (I^*)

$$x_1^{P_1+1} \frac{\partial y}{\partial x_1} = f^1_0(x_1, x_2) + A^1(x_1, x_2) y + R^1(x_1, x_2, y) \qquad (I_1^*)$$

où $R^1(x_1, x_2, y)$ est d'ordre supérieur au égale à 2 en y.

Par identification on trouve facilement que les coefficients de la série formelle φ sont donnés par

$$A^1(0,0)\varphi_{10} + (f^1_0)_{10} = 0$$

$$A^1(0,0)\varphi_{01} + (f^1_0)_{01} = 0$$

et plus généralement

$$(r_1, r_2) \qquad\qquad A^1(0,0)\varphi_{r_1,r_2} = \mathfrak{L}_{r_1,r_2}$$

si toutes ces équations sont ordonnées convenablement, on constate que $\mathfrak{L}_{r_1,r_2}$ est une quantité qui ne contient que des coefficients connus par les données ainsi que des solutions des équations qui la précèdent.

Donc ce système infini ast résoluble.

Montrons que la solution formelle φ_* de (I_1^*) est aussi solution de (1.2).

Nous avons

$$\begin{aligned} x_1^{P_1+1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) &= x_2^{P_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) \\ &= x_2^{P_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_1(x_1,x_2,\varphi)\right) \\ &= x_2^{P_2+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,\varphi) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1,x_2,\varphi)x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Le système (I) étant complètement intégrable, nous avons

$$x_2^{P_2+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,y)+\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1,x_2,y)f_2(x_1,x_2,y) = x_1^{P_1+1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2,y)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1,x_2,y)f_1(x_1,x_2,y)$$

Nous avons ceci identiquement en y. Et vu l'hypothèse sur la dérivabilité de nos développements asymptotiques, cette dernière condition est encore valable formellement, c'est-à-dire que le système formel (I_1^*) est complètement intégrable.
Nous avons donc :

$$x_2^{P_2+1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,\varphi)+\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1,x_2,\varphi)f_2(x_1,x_2,\varphi) = x_1^{P_1+1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2,\varphi)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1,x_2,\varphi)f_1(x_1,x_2,\varphi)$$

en tenant compte de cette égalité et du fait que

$$f_1(x_1,x_2,\varphi) = x_1^{P_1+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} x_1^{P_1+1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) = x_1^{P_1+1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2,\varphi) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_1,x_2,\varphi)x_1^{P_1+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1,x_2,\varphi)f_2(x_1,x_2,\varphi) + \frac{\partial f_1}{\partial y}x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{aligned}$$

c'est-à- dire

$$x_1^{P_1+1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - f_2(x_1,x_2,\varphi)\right) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_1,x_2,\varphi)\left(x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - f_2(x_1,x_2,\varphi)\right)$$

La série formelle $v = x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - f_2(x_1,x_2,\varphi)$ est donc solution du système linéaire

$$x_1^{P_1+1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)\right)u$$

où

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = A^1(x_1, x_2) = O\left(|\varphi|\right).$$

Mais vu l'hypothèse sur $A^1(0,0)$ la seule solution formelle de ce système est la solution zéro. Il en résulte que formellement

$$x_2^{P_2+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, \varphi).$$

Donc φ est également solution de la deuxième équation. ▪

Remarque 2.1.1 *La solution formelle donnée par le lemme 2.1.1 est unique*

Remarque 2.1.2 *Si aucune des matrices $A^i(0,0)$ est régulière, le système formel peut quand même avoir des solutions formelles.*

Théorème 2.1.4 *Si les fonctions $f^i(x_1, x_2, y)$ vérifient les conditions énoncées au début de ce paragraphe, et si de plus les deux matrices $A^i(0); i = 1, 2$ sont simultanément diagonalisables et toutes les deux régulières, alors si φ est une solution formelle du système de Pfaff*

$$dy = \frac{f_1(x_1, x_2, y)}{x_1^{P_1+1}}dx_1 + \frac{f_1(x_1, x_2, y)}{x_2^{P_2+1}}dx_2 \tag{1}$$

qui vérifie $\varphi(0,0) = 0$, il existe une solution ϕ de (1) holomorphe dans un secteur $S' \subset S$ telle que

$$\phi \overset{S'}{\sim} \varphi$$

Remarque 2.1.3 *Si le secteur S est assez grand, ce résultat rest valable si on suppose seulement que*

$$A^1(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_m^1 \end{pmatrix} \qquad A^2(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_2^1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m^2 \end{pmatrix}$$

avec $|\lambda_k^1| + |\lambda_2^k| \neq 0$ pour tout $k = 1, 2, ..., m$, car pour chaque composante de z on peut prendre une équation intégrale différente.

Remarque 2.1.4 *La méthode utilisée s'adabte très bien à d'autre systèmes de Pfaff. En particuliers, le resultat ci-dessus et le résultat plus général indiqué dans pour un système* *de Pfaff, complètement Intégrable de la forme*

$$dy = \left(x_1^{P_1+1}\right)^{-1} f^1(x_1,x_2,y)dx_1 + \left(x_2^{P_2+1}\right)^{-1} f^2(x_1,x_2,y)dx_2$$

où

$$\left(x_1^{P_1+1}\right) = \begin{pmatrix} x_1^{P_1^1+1} & . & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_1^{P_1^2+1} & . & \vdots & 0 \\ \vdots & . & \ddots & . & \vdots \\ 0 & . & . & \ddots & 0 \\ 0 & . & \cdots & 0 & x_1^{P_1^m+1} \end{pmatrix} ; \left(x_2^{P_2+1}\right) = \begin{pmatrix} x_2^{P_2^1+1} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2^{P_2^2+1} & . & . & 0 \\ . & . & \ddots & . & \vdots \\ 0 & . & . & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_2^{P_2^m+1} \end{pmatrix}$$

avec $P_i^j > 0$ pour tout $i = (1,2), j = 1,2,...,m$.

2.1.1 Cas des développements asymptotiques

Les fonctions f^1, f^2 admettent des développements asymptotiques en x_1 uniformes en (x_2, y). Soient $S = S_1 \times S_2$ un secteur de $\mathbb{C}^2$ et U un polydisque centré à l'origine de $\mathbb{C}^m$. On suppose dans ce paragraphe que

1. f^1 et f^2 sont holomorphes dans $S_1 \times S_2 \times U$.
2. pour $i = 1,2$

$$f^i(x_1,x_2,y) \underset{u\cdot S_2\times V}{\sim}^{S_1} \sum_{m\geq 0} f^i_{1,m}(x_2,y)x_1^m$$
$$f^i(x_1,x_2,y) \underset{u\cdot S_1\times V}{\sim}^{S_2} \sum_{m\geq 0} f^i_{2,m}(x_1,y)x_2^m$$

où pour tout m

$$f^i_{1,m}(x_2,y) \underset{u\cdot V}{\sim}^{S_2} \sum_{l\geq 0} f^i_{1,m,l}(y)x_2^l$$
$$f^i_{1,m}(x_1,y) \underset{u\cdot V}{\sim}^{S_2} \sum_{l\geq 0} f^i_{2,m,l}(y)x_1^l$$

Les coefficients étant holomorphe dans U, vu ces hypothèses, noun avons

$$f_i(x_1,x_2,y) = f_0^i(x_1,x_2) + A^i(x_1,x_2)y + R^i(x_1,x_2,y).$$

avec

$$A^i(x_1,x_2) \underset{u\cdot S_2}{\sim}{}^{S_1} \sum_{m\geq m} A^i_m(x_2)x_1^m \qquad \text{et}$$
$$A^i_m(x_2) \overset{S_2}{\sim} \sum_{m\geq m} A^i_{m;l}x_2^m$$

on suppose de plus

3. $f^1_{1,0}(0,x_0) = O(x_2)$
4. A_1^{00} inversible
5. si $\lambda_1^j(j=1,2,...,m)$ sont les valeurs propres de A^1_{00}

$$\left|\arg(-\lambda^1_j) - P_1 \arg x_1\right| \leq \frac{3\pi}{2} \text{ dans } S_1 \qquad j=1,2,...,m.$$

Théorème 2.1.5 *Si l'ouverture de S_1 est strictement supérieure à $\frac{\pi}{P_1}$, $\exists$ deux nombres strictement positifs R_1, R_2 et une solution φ de* (1) *holomorphe dans $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ où $\Sigma_i = S_i \cap \{|x_i| < R_i\}$ telle que*

$$\varphi(x_1,x_2) \underset{u\cdot S_2}{\sim}{}^{S_1} \sum_{m\geq 0} \varphi_m(x_2)x_1^m \qquad \textit{avec}$$
$$\varphi_m(x_2) \overset{S_2}{\sim} \sum_{l\geq 0} \varphi_{m,l}x_2^m$$

et

$$\varphi_0(x_2) = 0(x_2).$$

2.2 Analyticité des solutions formelles

Nous allons ici étudier les systèmes de Pfaff complètement intégrables de la forme $dy = \omega y$ avec

$$\omega = \frac{A_1(x_1,x_2)}{x_1^{P^1+1}} + \frac{A_2(x_1,x_2)}{x_2^{P^2+1}} \tag{2}$$

avec $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$. Les hypothèse sur les matrices A_1 et A_1 seront données dans les divers sous-paragraphes.

2.2.1 Le cas scalaire

On considère les systèmes complètement intégrables de la forme

$$dy = \left(\frac{a_1(x_1,x_2)}{x_1^{P_1+1}} dx_1 + \frac{a_2(x_1,x_2)}{x_2^{P_2+1}} dx_2 \right) y \tag{2.1}$$

où a_1 et a_2 sont des séries formelles ou des séries convergentes à l'origine.

La condition de complète intégrabilité est

$$x_2^{P_2+1} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = x_1^{P_1+1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \tag{C.I}$$

on peut supposer que $P_1 \leq P_2$.

Lemme 2.2.1 *La condition (C.I) entraîne que*

$$\begin{aligned} a_1(x_1,x_2) &= x_1^{P_1+1} \left[\int_{h_2}^{x_2} \varphi(x_1,t_2)dt_2 + h_1(x_1) \right] + x_1^{P_1} \alpha_1^{P_1} + ... + \alpha_1^0 \\ a_2(x_1,x_2) &= x_2^{P_2+1} \left[\int_{h_1}^{x_1} \varphi(t_1,x_2)dt_1 + h_2(x_2) \right] + x_2^{P_2} \alpha_2^{P_2} + ... + \alpha_2^0 \end{aligned}$$

φ est une série formelle (ou convergente) en x_1, x_2 arbitraire.

h_1(resp.h_2) une série formelle (ou convergente) en x_1 (resp. x_2) arbitraire.

$\alpha_1^0, \alpha_1^1, ..., \alpha_1^{p_1}, \alpha_2^0, \alpha_2^1, ..., \alpha_2^{p_2}$ sont des constantes arbitraires.

Preuve:

Posons

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x_2} &= x_1^{P_1+1} c_{12}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} &= x_2^{P_2+1} c_{21}(x_1,x_2) \end{aligned}$$

la condition (C.I) est alors $c_{12} = c_{21}$, et

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1^{P_1+1} \int_0^{x_2} c_{12}(x_1,t_2)dt_2 + \alpha_1(x_1) \\ a_2 &= x_2^{P_2+1} \int_0^{x_1} c_{12}(t_1,x_2)dt_1 + \alpha_2(x_2) \end{aligned}$$

où α_1 et α_2 sont des séries arbitraires. En posant

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_1) &= \alpha_1^0 + x_1\widehat{\alpha}_1(x_1)\\ \alpha_2(x_2) &= \alpha_2^0 + x_2\widehat{\alpha}_2(x_2)\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}a_1(x_1,x_2) &= x_1a_1^1(x_1,x_2) + \alpha_1^0\\ a_2(x_1,x_2) &= x_2a_2^1(x_1,x_2) + \alpha_2^0\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}a_1^1(x_1,x_2) &= x_1^{P_1}\int_0^{x_2} c_{12}(x_1,t_2)dt_2 + \widehat{\alpha}_1(x_1)\\ a_2^1(x_1,x_2) &= x_2^{P_2}\int_0^{x_1} c_{12}(t_1,x_2)dt_1 + \widehat{\alpha}_2(x_2).\end{aligned}$$

La condition (C.I) est alors

$$x_2^{P_2}\frac{\partial a_1^1}{\partial x_2} = x_1^{P_1}\frac{\partial a_2^1}{\partial x_1}.$$

En procédant alors avec a_1^1 et a_2^1 comme nous l'avons fait ci-dessus avec a_1 et a_2, nous obtenons par récurrence $(P_1 \leq P_2)$

$$\begin{aligned}a_1(x_1,x_2) &= x_1^{P_1+1}a_1^{P_1+1}(x_1,x_2) + x_1^{P_1}\alpha_1^{P_1} + ... + \alpha_1^0\\ a_2(x_1,x_2) &= x_2^{P_1+1}a_2^{P_1+1}(x_1,x_2) + x_2^{P_1}\alpha_2^{P_1} + ... + \alpha_2^0\end{aligned}$$

avec

$$x_2^{P_2-P_1}\frac{\partial a_1^{P_1+1}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2^{P_1+1}}{\partial x_1}.$$

Posons $\varphi(x_1,x_2) = \frac{\partial a_1^{P_1+1}}{\partial x_2}$ alors,

$$\frac{\partial a_2^{P_1+1}}{\partial x_1} = x_2^{P_2-P_1}\varphi(x_1,x_2).$$

Et

$$\begin{aligned} a_1^{P_1+1}(x_1,x_2) &= \int_{h_2}^{x_2} \varphi(x_1,t_2)dt_2 + h_1(x_1) \\ a_2^{P_1+1}(x_1,x_2) &= x_2^{P_2-P_1} \int_{h_1}^{x_1} \varphi(t_1,x_1)dt_1 + k(x_1) \end{aligned}$$

où h_1 et k sont des séries arbitraires, et

$$\begin{aligned} a_1(x_1,x_2) &= x_1^{P_1+1}\left[\int_{h_2}^{x_2} \varphi(x_1,t_2)dt_2 + h_1(x_1)\right] + x_1^{P_1}\alpha_1^{P_1} + ... + \alpha_1^0 \\ a_2(x_1,x_2) &= x_2^{P_2+1}\left[\int_{h_1}^{x_1} \varphi(t_1,x_2)dt_1 + h_2(x_2)\right] + x_2^{P_2}\alpha_2^{P_2} + ... + \alpha_2^0 \end{aligned}$$

ce qui preuve le lemme 2.1.3. ▪

Proposition 2.2.1 *Les solutions du système* (2.2) *sont de la forme*

$$CU(x_1,x_2)x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2} \exp P_1\left(\frac{1}{x_1}\right) \exp P_2\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

où

C, ρ_1, ρ_2 *sont des constantes* ,

U *une série formelle ou convergente suivant que*

a_1 *et* a_2 *sont formelle ou convergente* .

$P_i\left(\frac{1}{x_i}\right)$ *un polynôme de degré* P_i *en* $\frac{1}{x_i}$.

Preuve: Le système (2.2) a la forme suivante :

$$dy = (\omega_1 + \omega_2)y$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\int_{h_2}^{x_2} \varphi(x_1,t_2)dt_2 + h_1(x_1)\right)dx_1 + \left(\int_{h_1}^{x_1} \varphi(t_1,x_2)dt_1 + h_2(x_2)\right)dx_2 \\ \omega_2 &= \left(\frac{\alpha_1^{P_1}}{x_1} + ... + \frac{\alpha_1^O}{x_1^{P_1+1}}dx_1\right) + \left(\frac{\alpha_2^{P_2}}{x_2} + ... + \frac{\alpha_2^O}{x_2^{P_2+1}}dx_2\right) \end{aligned}$$

et les deux systèmes

$$dz = \omega_1 z \text{ et} \tag{2.2}$$

$$dz = \omega_2 z \tag{2.3}$$

sont séparément complément intégrables. Le système (2.4) admet une matrice fondamentale de la forme :

$$V(x_1,x_2)=\exp\left\{\int_{h_1}^{x_1}\left(\frac{\alpha_1^{p_1}}{t_1}+...+\frac{\alpha_1^0}{t_1^{P_1+1}}\right)dt_1\right\}\exp\left\{\int_{h_2}^{x_2}\left(\frac{\alpha_2^{P_2}}{t_2}+...+\frac{\alpha_2^0}{t_2^{P_2+1}}\right)dt_2\right\}$$

En posant $y=Vu$ dans (2.2) il vient

$$du=\omega_1 u$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \left(\int_{h_2}^{x_2}\varphi(x_1,t_2)dt_2+h_1(x_1)\right)u_1,\\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \left(\int_{h_1}^{x_1}\varphi(t_1,x_2)dt_1+h_2(x_2)\right)\end{aligned}$$

Par intégration, on obtient

$$u=k\exp\left\{\int_{h_1}^{x_1}h_1(t_1)dt_1\right\}\exp\left\{\int_{h_2}^{x_2}h_2(t_2)dt_2\right\}\exp\left\{\int_{h_1}^{x_1}\int_{h_2}^{x_2}\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2\right\}$$

où k est une constante.
Finalement

$$y=\widehat{k}\exp\left\{\int_{h_1}^{x_1}h_1(t_1)dt_1\right\}\exp\left\{\int_{h_2}^{x_2}h_2(t_2)dt_2\right\}\exp\left\{\int_{h_1}^{x_1}\int_{h_2}^{x_2}\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2\right\}$$

$$\times x_1^{\alpha_1^{P_1}}x_2^{\alpha_2^{P_2}}\times\exp\left(P_1(\frac{1}{x_1})\right)\exp\left(P_2(\frac{1}{x_2})\right)$$

où $\widehat{k}$ est une autre constante, qui est une forme un peu plus précise que celle qui est indiquée dans la proposition. Si les données sont des séries convergentes, alors les séries obtenues dans le résultat sont également convergentes. ▪

2.3 Des lemmes de réduction formelle.

On suppose maintenant que le système (2) est un système formel, c'est-à-dire que les éléments des matrices $A_i(x_1,x_2)$ sont des séries formelles. Pour ne pas avoir à écrire trop d'indices, nous noterons

$$\omega=\frac{A(x_1,x_2)}{x_1^{P_1+1}}dx_1+\frac{B(x_1,x_2)}{x_2^{P_2+1}}dx_2 \qquad P_1>0 \;\; et \;\; P_2>0.$$

Lemme 2.3.1 Lemme de réduction totale : *Si*

$$A(0,0)=\begin{pmatrix} A_{00}^{11} & 0 \\ O & A_{22}^{00} \end{pmatrix} \text{ et } B(0,0)=\begin{pmatrix} B_{00}^{11} & 0 \\ O & B_{22}^{00} \end{pmatrix}$$

Où l'un des couple $(A_{00}^{11}, A_{00}^{22}), (B_{00}^{11}, B_{00}^{22})$ *est sans valeurs propres communes, il existe une transformation formelle unique* T *de la forme*

$$T=\begin{pmatrix} I & T^{12} \\ T^{21} & I \end{pmatrix}$$

qui transforme le système (1) en

$$dz=\omega' z$$

avec

$$\omega'=\frac{\begin{pmatrix} a^{11} & 0 \\ 0 & a^{22} \end{pmatrix}}{x_1^{P_1+1}}dx_1+\frac{\begin{pmatrix} b^{11} & 0 \\ 0 & b^{22} \end{pmatrix}}{x_2^{P_2+1}}dx_2$$

et $a^{ii}(0,0)=A_{00}^{ii} \quad b^{ii}(0,0)=B_{00}^{ii}$

Preuve: Ecrivons

$$A=\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{pmatrix}$$

et cherchons une transformation

$$T=\begin{pmatrix} I & T^{12} \\ T^{21} & I \end{pmatrix} \quad I = \text{ identité}$$

qui mette le système sous la forme suivante :

$$a=\begin{pmatrix} a^{11} & 0 \\ 0 & a^{22} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}$$

Un calcul facile nous donne alors pour déterminer T^{12} et T^{21}

$$\begin{cases} x_1^{P_1+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial x_1} &= A^{12} + A^{11}T^{12} - T^{12}A^{22} - T^{12}A^{21}T^{12} \\ x_2^{P_2+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial x_2} &= B^{12} + B^{11}T^{12} - T^{12}B^{22} - T^{12}B^{21}T^{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{P_1+1}\frac{\partial T^{21}}{\partial x_1} &= A^{21} + A^{22}T^{21} - T^{21}A^{11} - T^{21}A^{12}T^{21} \\ x_2^{P_2+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial x_2} &= B^{21} + B^{22}T^{21} - T^{21}B^{11} - T^{21}B^{12}T^{21} \end{cases}$$

Considérons seulement le système en T^{21}, pour l'autre le raisonnement est identique. Si on range les èlèments de T^{12} en une seule colonne $\widetilde{T}^{12}$, par exemple en commençant par les éléments de la première ligne de T^{12}, on voit aisément que $\widetilde{T}^{12}$ est donné par un système de Pfaff non linéaire et complètement intégrable de la forme suivante :

$$x_1^{P_1+1}\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_0^1(x_1, x_2) + C_1(x_1, x_2)z + f_2^1(x_1, x_2, z)$$

$$x_2^{P_2+1}\frac{\partial z}{\partial x_2} = f_0^2(x_1, x_2) + C_2(x_1, x_2)z + f_2^2(x_1, x_2, z)$$

où C_1 et C_2 proviennent respectivement de

$$A^{11}T^{12} - T^{12}A^{22}, \quad B^{11}T^{12} - T^{12}B^{22},$$

comme un des couple $(A_{00}^{11}, A_{00}^{22}), (B_{00}^{11}, B_{00}^{22})$ est sans valeurs propres communes, il résulte que l'une des matrices $C_1(0,0), C_2(0,0)$ est non singulière et le lemme 2.1.2 affirme l'existance de la solution $\widetilde{T}_{12}$ cherchée. On obtient ainsi T^{12} et de la même manière T^{21}. ∎

Lemme 2.3.2 Lemme de réduction partielle : *Si*

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} A_{00}^{11} & 0 \\ 0 & A_{00}^{22} \end{pmatrix} \; et \; B(0,0) = \begin{pmatrix} B_{00}^{11} & 0 \\ 0 & B_{00}^{22} \end{pmatrix}$$

Où l'un des couples $(A_{00}^{11}, A_{00}^{22})$, $(B_{00}^{11}, B_{00}^{22})$ *est sans valeurs propres communes, il existe une transformation formelle unique* T *de la forme*

$$T = \begin{pmatrix} I & T^{12} \\ T^{21} & I \end{pmatrix}$$

qui transforme le système (2) *en*

$$dz = \omega_l^1 z$$

avec

$$\omega_l^1 = \frac{\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix}}{x_1^{P_1+1}} dx_1 + \frac{\begin{pmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{pmatrix}}{x_2^{P_2+1}} dx_2$$

et $a^{12}_{P_1,P_2} = a^{21}_{P_1,P_2} = b^{12}_{P_1,P_2} = b^{21}_{P_1,P_2} = 0$ *pour tout* (P_1, P_2) *vérifiant* $P_1 + P_2 \leq l$

De plus $a^{ii}(0,0) = A^{ii}_{00}, b^{ii}(0,0) = B^{1ii}_{00}$ *pour* $i = 1, 2$.

Preuve: Supposons que

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{pmatrix}$$

avec $A^{12}_{P_1,P_2} = A^{21}_{P_1,P_2} = B^{12}_{P_1,P_2} = B^{21}_{P_1,P_2} = 0$ pour tout couple (P_1, P_2) vérifiant $P_1 + P_2 < m < l$ et montre qu'il existe une transformation unique de la forme

$$T_m = \begin{pmatrix} I & T^{12} \\ T^{21} & I \end{pmatrix}$$

avec

$$T^{12} = \sum_{p+q=m} T^{12}_{p,q} x_1^p x_2^q, \quad T^{21} = \sum_{p+q=m} T^{21}_{p,q} x_1^p x_2^q$$

qui transforme (2) en un système

$$dz = \left(\frac{adx_1}{x_1^{P_1+1}} + \frac{bdx_2}{x_2^{P_2+1}} z \right)$$

où

$$a^{12}_{p,q} = a^{21}_{p,q} = b^{12}_{p,q} = b^{21}_{p,q} = 0$$

pour tout couple (p, q) vérifiant $p + q \leq m$.

On a pour déterminer T_m

$$A^{11} + A^{12}T^{21} - a^{11} - T^{12}a^{21} = 0 \tag{2.4}$$

$$B^{11} + B^{12}T^{21} - b^{11} - T^{12}b^{21} = 0 \tag{2.5}$$

$$A^{22} + A^{21}T^{12} - a^{22} - T^{21}a^{12} = 0 \tag{2.6}$$

$$B^{22} + B^{21}T^{12} - b^{22} - T^{21}b^{12} = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} x_1^{P_1+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial x_1} &= A^{11}T^{12} + A^{12} - T^{12}a^{22} - a^{12} \\ x_2^{P_2+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial x_2} &= B^{11}T^{12} + B^{12} - T^{12}b^{22} - b^{12} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} x_1^{P_1+1}\frac{\partial T^{21}}{\partial x_1} &= A^{22}T^{21} + A^{21} - T^{21}a^{11} - a^{21} \\ x_2^{P_2+1}\frac{\partial T^{12}}{\partial x_2} &= B^{22}T^{21} + B^{21} - T^{21}b^{11} - b^{21} \end{cases} \tag{2.9}$$

Avec les équations (2.5),(2.6),(2.7), et (2.8) on obtient :

$$\begin{aligned} a^{11}_{r,s} &= A^{11}_{r,s} \qquad a^{22}_{r,s} = A^{22}_{r,s} \\ b^{11}_{r,s} &= B^{11}_{r,s} \qquad b^{11}_{r,s} = B^{22}_{r,s} \end{aligned}$$

pour tous couple (r, s) vérifiant $r + s = m$.

Pour déterminer les $T^{12}_{r,s}$ pour $r + s = m$, nous avons le système

$$(s) \qquad \begin{cases} A^{22}_{00}T^{12}_{r,s} - T^{12}_{r,s}A^{22}_{00} = -A^{12}_{r,s} \\ B^{11}_{00}T^{12}_{r,s} - T^{12}_{r,s}B^{22}_{00} = -B^{12}_{r,s} \end{cases}$$

Proposition 2.3.1 *Soient A, B, A', B' quatre matrices carrées qui vérifient*

$$[A, A'] = 0, \quad [B, B'] = 0.$$

Alors si un des couples (A, B) où (A', B') est sens valeur propre commune le système

$$Ax - xB = C \quad A'x - xB' = C'$$

admet une solution et une seule si et seulement si $A'C - CB' = A'C - C'B$.

Applique ce résultat au système (s), ce système admet une solution unique si et seulement si

$$B^{12}_{r,s}A^{22}_{00} - A^{11}_{00}B^{12}_{r,s} = A^{12}_{r,s}B^{22}_{00} - B^{11}_{00}A^{12}_{r,s}$$

Or, cette condition est :

$$H_{r,s} = 0$$

comme $r + s \leq l$ et que le système est complètement intégrable jusqu'à l'ordre l, elle est satisfaite.

Un raisonnement par récurrence nous donne alors le résultat annoncé dans le lemme, la transformation cherchée étant

$$T = T_l \circ .... \circ T_2 \circ T_1$$

qui est d'ailleurs polynômiale et vérifier $T(0) = id$.

2.4 Le cas Convergent :

Le système (2) est $(C.I)$. On suppose maintenant que les matrices A et B sont holomorphe à l'origine, elles sont donc représentables par des séries convergentes :

$$A = \sum_{p+q\geq 0} A_{pq} x_1^p x_2^q \qquad\qquad B = \sum_{p+q\geq 0} B_{pq} x_1^p x_2^p$$

Lemme 2.4.1 *(***Lemme de réduction totale :***) Si*

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} A_{00}^{11} & 0 \\ 0 & A_{00}^{22} \end{pmatrix} \; et \; B(0,0) = \begin{pmatrix} B_{00}^{11} & 0 \\ 0 & B_{00}^{22} \end{pmatrix}$$

où les deux couples $(A_{00}^{11}, A_{00}^{22})$, $\quad (B_{00}^{11}, B_{00}^{22})$ *sont sans valeurs propres commes, il existe une transformation convergente unique* T *de la forme*

$$T = \begin{pmatrix} I & T^{12} \\ T^{21} & I \end{pmatrix}$$

qui transforme le système (2) *en*

$$dz = \omega' z$$

avec

$$\omega' = \frac{\begin{pmatrix} a^{11} & 0 \\ 0 & a^{22} \end{pmatrix}}{x_1^{P_1+1}} dx_1 + \frac{\begin{pmatrix} b^{11} & 0 \\ 0 & b^{22} \end{pmatrix}}{x_2^{P_2+1}} dx_2$$

et $a^{ii}(0,0) = A_{00}^{ii}, \quad b^{ii}(0,0) = B_{00}^{ii}$

Preuve: En reprenant la démonstration du lemme de réduction totale dans le cas formel, l'hypothèse supplémentaire faite ci-dessus entraîne que $c_1(0,0)$ et $c_2(0,0)$ sont non singulière et le théorème 2.1.4 implique que la transformation formelle donnée par le lemme de réduction formelle est convergente.

Remarque 2.4.1 *: Le lemme de réduction partielle nous montre que la réduction est possible à tout ordre par une transformation polynômiale.*

De ce lemme, on déduit :

Théorème 2.4.6 *Si les deux matrices $A(0,0)$ et $B(0,0)$ ont des valeurs propres distinctes, le systèmes de Pfaff*

$$dy = \left(\frac{A(x_1,x_2)}{x_1^{P_1+1}} dx_1 + \frac{B(x_1,x_2)}{x_2^{P_2+1}} dx_2 \right) y$$

supposé complètement intégrable, admet une matrice fondamental de la forme :

$$U(x_1,x_2) x_1^{\Lambda_1} x_2^{\Lambda_2} \exp P_1(\frac{1}{x_2}) \exp P_2(\frac{1}{x_2})$$

où :$U(x_1,x_2)$ est une matrice holomorphe à l'origine Λ_1 et Λ_2 des matrices diagonales constantes $P_i(\frac{1}{x_i})$ des polygômes en $\frac{1}{x_i}$ à confficients matriciels.

En effet, ce résultat est une cinséquence du lemme de réduction totale qui entraîne la diagonalisation de notre système de Pfaff et des résultats du 2.1.1 sur le cas scalaire. ∎

2.5 Le cas asymptotique :

Soient $S = S_1 \times S_2$ un secteur de $\mathbb{C}^2$ et supposons que

$$A(x_1,x_2) \overset{S}{\sim} \sum_{|r|=0}^{+\infty} A_{r_1,r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2}$$

$$B(x_1,x_2) \overset{S}{\sim} \sum_{|r|=0}^{+\infty} B_{r_1,r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} \overset{S}{\sim} \sum_{|r|=0}^{+\infty} r_1 A_{r_1,r_2} x_1^{r_1-1} x_2^{r_2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} \overset{S}{\sim} \sum_{|r|=0}^{+\infty} r_2 A_{r_1,r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2-1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} \overset{S}{\sim} \sum_{|r|=0}^{+\infty} r_1 B_{r_1,r_2} x_1^{r_1-1} x_2^{r_2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} \overset{S}{\sim} \sum_{|r|=0}^{+\infty} r_2 B_{r_1,r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2-1}$$

Ìet désigne par (2.2) le système de Pfaff formelle obtenu en remplaçant dans (2.1) A et B par leurs développements asymptotiques dans S.
En particulier, on a sous des hypothèses faciles à expliciter le résultat du théorème 2.4.6 sous forme asymptotique.

Chapitre 3

Systèmes diffèrentiels non linéaires et systèmes de Maillet

Notation et définition

Un opérateur $D : \mathbb{C}[[x]] \longrightarrow \widehat{\mathfrak{M}}$ (respectivement $\mathbb{C}\{x\} \longrightarrow \mathfrak{M}$) sera dit $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ (resp. $\mathfrak{L}_0$) analytique si :

1. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $F(x, X_0, \cdots, X_n)$ holomorphe dans un polydisque centré à l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant $F(0, 0, \cdots, 0) = 0$
2. Une suite finie $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ d'éléments de $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ (resp. $\mathfrak{L}_0$) telle que pour tout $u \in \widehat{\mathfrak{M}}$ (resp. $\mathfrak{M}$)
$$Du = F(x, u, \theta_1 u, \cdots, \theta_n u).$$

Dans la suite, $D(\mathfrak{L})(\mathfrak{L} = \widehat{\mathfrak{L}}_0,$ resp. $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0)$ sera l'ensemble des opérateurs $\mathfrak{L}$-analytique. Tout opérateur $\mathfrak{L}$-analytique peut s'écrire :

$$Du = \sum_{r+|s|\geq 1} a_{r,s} x^r u^{s_0} (\theta_1 u)^{s_1} \cdots (\theta_n u)^{s_n}.$$

$$\text{où} \quad s_i \in \mathbb{N} \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad |s| = s_0 + s_1 + \cdots + s_n \quad a_{r,s} \in \mathbb{C}.$$

3.1 Les bons operateurs

Considérons le sous espace vectoriel P de $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ des opérateurs

$$\varphi : \widehat{\mathfrak{M}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \quad \text{de la forme :}$$
$$\left(\sum_{m\geq 1} u_m x^m\right) \longrightarrow \varphi\left(\sum_{m\geq 1} u_m x^m\right) = \sum_{m\geq 1}\left(\sum_{0\leq k\leq m} \varphi_k(m-k)u_{m-k}\right)x^m$$

Exemple 3.1.1 *1. L'identité :* $Id : \sum_{m\geq 1} u_m x^m \longrightarrow \sum_{m\geq 1} u_m x^m$

$$(Id)_k = 0 \quad \forall k \neq 0 \quad (Id)_0 = 1$$

2. $*\varphi = x\frac{d}{dx} \quad \varphi\left(\sum_{m\geq 1} u_m x^m\right) = \sum_{m\geq 1} m u_m x^m$

$$\varphi_k = 0 \quad pour \quad k \neq 0; \varphi_0 = m.$$

$$*\varphi^{-1}\left(\sum_{m\geq 1} u_m x^m\right) = \sum_{m\geq 1} \frac{u_m}{m} x^m$$

$$\left(\varphi^{-1}\right)_k = 0 \ pour \ k \neq 0 \quad \left(\varphi^{-1}\right)_0 = \frac{1}{m}.$$

3. $a \in \mathbb{C}[[x]]$,

$$a = \sum_{m\geq 1} a_m x^m$$

$$\begin{aligned} \varphi : \widehat{\mathfrak{M}} &\longrightarrow \widehat{\mathfrak{M}} \\ u &\longmapsto a.u \\ \varphi(u) = a * u &= \sum_{m\geq 1}\left(\sum_{0\leq k\leq m} a_k u_{m-k}\right)x^m \end{aligned}$$

et donc :

$$\varphi_k(m-k) = a_k, \qquad 0 \leq k \leq m.$$

Et si $a \in \mathbb{C}\{x\}$ $\qquad \varphi : \mathbb{C}\{x\} \longrightarrow \mathbb{C}\{x\}.$

Remarque 3.1.1 *Si* $\varphi_k = 0$ *; pour* $k \neq 0$ φ *est dit opérateurr diagonal.*

Définition 3.1.1 *Un opérateur* $\varphi \in P$ *est dit bon opérateur si* $\forall m \in \mathbb{N}$ *et* $\forall k, 0 \leq k \leq m$ *:*

$$|\varphi_k(m-k)| \leq c_k |\varphi_0(m)| \ \text{où} \ \{c_k\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^+$$

et :

$$\exists \rho > 0 \text{ vérifiant } c(\rho) = \sum_{k\geq 0} c_k \rho^k < +\infty$$

Exemple 3.1.2 *1. Tout opérateur $\varphi \in P$ tel que $\varphi_k = 0$ est un bon opérateur : on prend $c_k = 0 \;\; \forall k \neq 0, c_0 = 1$ et $\;\; c(\rho) = c_0 = 1$.*

2. $\varphi = au \quad a \in \mathbb{C}[[x]]$

$$|\varphi_k(m-k)| = |a_k| \leq c_k|a_0|, (\text{ il suffit de prendre } c_k = \left|\frac{a_k}{a_0}\right| \quad a_0 \neq 0).$$

Définition 3.1.2 *Soient $\varphi,\ \psi$ deux opérateurs de P,*

$$\varphi \text{ domine } \psi \Longleftrightarrow \left(|\psi_k(m-k)| \leq d_k|\varphi_0(m)| \text{ et } \exists \rho > 0/ \sum_{m\geq 0} d_k\rho^k < +\infty\right)$$

Remarque 3.1.2 *Un bon opérateur est un opérateur qui se domine.*

Définition 3.1.3 *Soit φ un bon opérateur, on dit que φ domine $\psi_1, \cdots, \psi_n$ si $\forall m \geq 1$ et $\forall 0 \leq k \leq m, \;\; \exists c_{j,k} \in \mathbb{C}^+$ que $\forall j = 1, \cdots, n$:*

$$|\psi_{j,k}(m_k)| \leq c_{j,k}\,|\varphi_0(m)|\,\{c_{j,k}\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^+$$

et

$$\exists \rho > 0 \text{ tel que } : \sum_{k\geq 0} c_{j,k}\rho^k < +\infty$$

Définition 3.1.4 *Un opérateur $\varphi \in P$ domine strictement un opérateur $\psi \in P$ si :*

1. φ domine ψ.

2. $\lim_{m\to+\infty} \frac{\psi_0(m)}{\varphi_0(m)} = 0$.

Exemple 3.1.3

$$\theta = x\frac{d}{dx}; \quad \theta_0(m) = m \quad \text{et} \quad \theta_k(m-k) = 0 \quad k \neq 0.$$

$$\theta^p u = \sum_{m\geq 1} m^p u_m x^m \quad p \geq 2$$

$$(\theta_0^p)\,(m) = m^p, \quad (\theta_k^p)\,(m-k) = 0 \text{ pour } k \neq 0.$$

θ^p domine strictement $\theta \quad \forall p \geq 2$ en effet :

1. $\theta_0(m) = m \leq d_0 m^p \qquad\qquad (d_0$ choisit/ $d_0 > 1)$
2. $\lim_{m\to+\infty} \frac{\theta_0(m)}{\theta_0^p(m)} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m}{m^p} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m^{p-1}} = 0 \quad (p-1 \geq 1)$

3.2 Théorème fondamental

Dans cette partie nous allons avoir une généralisation du théorème 2 de [8].

Soient :

1.
$$F(x, X_0, X_1, \ldots, X_M) = \sum_{1 \leq r+|s|=q \leq R} a_{r,s} x^r X^s$$

où, $s = (s_0, s_1, \ldots, s_M)$, $|s| = s_0 + s_1 + \ldots + s_M$,

$$X^s = (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} \cdots (X_M)^{s_M};$$

un polynôme sans terme constant.

2. une suite d'opérateurs diagonaux :

$\theta_0 = Id$ (identité), $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_M$; agissant sur l'idéal maximal de l'anneau des séries formelles de la manière suivante,

$$\theta_j \left(\sum_{m \geq 1} u_m x^m \right) = \sum_{m \geq 1} \theta_{j,0}(m) u_m x^m.$$

c'est à dire on a : les θ_j sont dans le sous espace vectoriel P de $\widehat{\mathfrak{L}}_0$ tel que :

$$(\theta_j)_k(m-k) = 0 \qquad k \neq 0,\ 0 \leq j \leq M(\text{ car il sont tous diagonaux })$$

$$(\theta_j)_0(m) = \theta_{j,0}(m) \qquad 0 \leq j \leq M$$

d'où θ_j $0 \leq j \leq M$ sont de bons opérateurs (cf. exemples 3.1.2 (1))

Considérons l'équation opérateur,

$$Dy = F(x, y, \theta_1 y, \theta_2 y, \cdot \cdot \cdot, \theta_M y) = 0 \tag{1}$$

On voit bien que si $y \in \mathbb{C}[[x]]$ alors :

$D : \widehat{\mathfrak{M}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{M}}$ opérateur P-analytique.

Nous avons : θ_n domine strictement tous les opérateurs θ_i $0 \leq j \leq n$ donc d'après la difinition 3.4.3 et la définition 3.4.3

$$|\theta_{j,0}| \leq c_{j,0} \, |\theta_{n,0}(m)|$$

et $\forall j,\ 0 \leq j \leq n$

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\theta_{j,0}(m)}{\theta_{n,0}(m)} = 0$$

On ne parle que de $\theta_{j,0}(m)$ car $\theta_{j,k}(m-k) = 0 \quad \forall k \neq 0$. On a :

$$F(x, X_0, \cdots, X_n) = \sum_{1 \leq r+|s| \leq R} a_{r,s} x^r X^s.$$

d'où

$$F(x, X_0, \cdots, X_n) = \sum_{1 \leq p \leq R} F_p(x, X_0, \cdots, X_n)$$

où

$$F_p(x, X_0, \cdots, X_n) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} x^r X^s.$$

L'équation (1) peut se mettre alors sous la forme

$$F_p(x, y, \theta_1 y, \theta_2 y, \cdots, \theta_n y) = R_{p+1}(x, y, \theta_1 y, \theta_2 y, \cdots, \theta_N y)$$

où

$$F_p(x, X_0, X_1, \cdots, X_n) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} x^r (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} \cdots (X_n)^{s_n},$$

$$R_{p+1}(x, X_0, X_1, \cdots, X_N) = \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} x^r (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} \cdots (X_N)^{s_N}$$

Le cas où θ_n, dominant strictement les opérateurs θ_1 pour $0 \leq j < n$, domine également les opérateurs θ_j pour $n \leq j \leq N$ a été étudié dans [14].

Remarque 3.2.1 *Nous avons supposer ci-dessus que le polynôme ;*

$$F(x, X_0, X_1, \cdots, X_M) = \sum_{1 \leq r+|s|=q \leq R} a_{r,s} x^r X^s$$

était sans terme constant. Si ce n'est pas le cas et si l'équation (1) admet une solution formelle on peut toujours par translation se ramener à une équation polynômiale sans terme constant, de ce fait nous pourrons avoir : $D : \widehat{\mathfrak{M}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{M}}$. *opérateur* $\mathfrak{L}$*- analytique.*

Remarque 3.2.2 *Le théorème que nous allons démontrer dans la suite est encore vrai* *lorsque*

$$F(x, X_0, X_1, \cdots, X_M) = \sum_{1 \leq |s| \leq R} a_{r,s}(x) X^s$$

où les coéfficients $a_{r,s}(x)$ *sont holomorphes dans un disque centré en* $0 \in \mathbb{C}$.

En plus des hypothèses faites ci-dessus sur les opérateurs θ_j, supposons réalisée la condition (H) suivante :

pour tout $m \geq 1$, pour tout $q(p < q \leq R)$, tout $(r, s_0, s_1, \cdots, s_N)$ avec $r + |s| = q$, toute suite $m_0^1, m_0^2, \cdots, m_0^{s_0}; m_1^1, m_1^2, \cdots, m_1^{s_1}; \cdots; m_N^1, m_N^2, ..., m_N^{s_N}$

telle que, $r + m_0 + m_1 + \cdots + m_N = m + p - 1$

où :

$$\begin{aligned} m_0^1 + m_0^2 + \ldots + m_0^{s_0} &= m_0; \\ m_1^1 + m_1^2 + \ldots + m_1^{s_1} &= m_1; \\ &\vdots \\ &\vdots \\ m_N^1 + m_N^2 + \ldots + m_N^{s_N} &= m_N; \end{aligned}$$

On suppose :

$$\begin{aligned} G_n(m) = \frac{1}{|\theta_{n,0}(m)|} \quad \times \quad & \left\{ \prod_{1 \leq k \leq s_0} |\theta_{0,0}(m_0^k)| \times \prod_{1 \leq k \leq s_1} |\theta_{1,0}(m_1^k)| \times \ldots \right. \\ \times \quad & \prod_{1 \leq k \leq s_N} |\theta_{N,0}(m_N^k)| \quad \leq \quad h \qquad \text{(constante)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Quitte à normaliser θ_n on peut supposer $h = 1$, car : θ_n domine strictement les autres θ_j $0 \leq j \leq n$ en particulier $\theta_n = Id$ i.e.

$$1 \leq c_{0,0} |\theta_{n,0}(m)| \qquad c_{0,0} \neq 0 \quad (\theta_{0,0} = 1 \text{ cf. exemple I.1 })$$

et on peut prendre $c_{0,0} = 1$.

Par convention : Si $m_j^k = 0, \theta_{j,0}(m_j^k)$ ne figure pas dans la formule.

Théorème 3.2.7 *Sous les hypothèses indiquées ci-dessus, toute racine y_1 du polynôme,*

$$C(D)(X) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} \left(\theta_{0,0}(1)\right)^{s_0} \left(\theta_{1,0}(1)\right)^{s_1} \cdots \left(\theta_{n,0}(1)\right)^{s_n} X^{|s|}$$

vérifiant,

$$C_n(D)(y_1) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} s_n (\theta_{n,0}(1))^{s_n-1} \prod_{l\neq n} (\theta_{l,0}(1))^{s_1} |y_1|^{|s|-1} \neq 0$$

et $F_{p,m}(y_1) \neq 0$ où

$$F_{p,m}(y_1) = \sum_{r+|s|=p, |s|\neq 0} a_{r,s} \sum_{0\leq j\leq n} s_j \theta_{j,0}(m) (\theta_{i,0}(1))^{s_j-1} \prod_{l\neq j} (\theta_{l,0}(1))^{s_l} y_1^{|s|-1}$$

nous donne une solution holomorphe $\sum_{m\geq 1} y_m x^m$ de l'équation (1). De plus si notre équation admet une solution formelle $\sum_{m\geq 1} y_m x^m$ même si $F_{p,m}(y_1) = 0$, celle-ci converge.

Preuve: La preuve de se théorème se fait en deux étapes, elle est basées sur la méthode des séries majorantes due à Cauchy.

3.3 Existence des solutions formelles

Introduisons dans l'équation (1) une série formelle $y = \sum_{m\geq 1} y_m x^m$.

Pour déterminer le coefficient y_1 nous obtenons par identification des termes en x^p l'équation

$$C(D)(y_1) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} (\theta_{0,0}(1))^{s_0} (\theta_{1,0}(1))^{s_1} \cdots (\theta_{n,0}(1))^{s_n} y_1^{|s|} = 0.$$

Pour obtenir le coefficient y_m, on identifie les termes en x^{m+p-1} ce qui donne :

$$\left[\sum_{r+|s|=p, |s|\neq 0} a_{r,s} \sum_{0\leq j\leq n} s_j \theta_{j,0}(m) (\theta_{j,0}(1))^{s_j-1} \prod_{1\neq j} (\theta_{1,0}(1))^{s_1} y_1^{|s|-1} \right] y_m$$

$$= \left\{ \sum_{r+|s|=p} \sum_{r+m_0+\cdots m_N = m+p-1} a_{r,s} \prod_{1\leq k\leq s_0, m_0^k \neq m} \theta_{0,0}(m_0^k) y_{m_0^k} \right.$$

$$\left. \times \prod_{1\leq k\leq s_1, m_1^k\neq m} \theta_{1,0}(m_1^k) y_{m_1^k} \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_n, m_n^k\neq m} \theta_{n,0}(m_n^k) y_{m_n^k} \right\}$$

$$+\left\{\sum_{p<q\leq R}\sum_{r+|s|=q}\sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} a_{r,s}\prod_{1\leq k\leq s_0}\theta_{0,0}(m_0^k)y_{m_0^k}\right.$$

$$\left.\times\prod_{1\leq k\leq s_1}\theta_{1,0}(m_1^k)y_{m_1^k}\times\cdots\times\prod_{1\leq k\leq s_N}\theta_{N,0}(m_N^k)y_{m_N^k}\right\}$$

où,

$$m_0^1+m_0^2+\cdots+m_0^{s_0}=m_0;\quad m_1^1+m_1^2+\cdots+m_1^{s_1}=m_1;\cdots;$$

$$m_N^1+m_N^2+\cdots+m_N^{s_N}=m_N;\qquad \text{avec la condition que } y_0=0.$$

Remarque 3.3.1 *On doit avoir $\forall i=0,1,2,\cdots,N;\quad m_i\geq s_i$. Et si $m_j^k=0,\quad \theta_{j,0}(m_j^k)$ n'apparait pas dans les produits. Notons,*

$$F_{p,m}(y_1)=\sum_{r+|s|=p,\quad |s|\neq 0} a_{r,s}\sum_{0\leq j\leq n} s_j\theta_{j,0}(m)(\theta_{j,0}(1))^{s_j-1}\prod_{l\neq j}(\theta_{l,0}(1))^{s_l}y_1^{|s|-1}.$$

Et comme par hypothèse $F_{p,m}(y_1)\neq 0$ alors on peut tirer l'expression exacte de y_m.

D'où pour tout y_1 racine de $C(D)(X)=0$ vérifiant $F_{p,m}(y_1)\neq 0$ l'équation (1) admet une solution formelle : $y=\sum_{m\geq 1}y_m x^m$.

Remarque 3.3.2 *Si $F_{p,m}(y_1)=0$ n'exclut pas l'existence d'une telle série formelle.*

3.4 Convergence des solutions formelles

Comme l'opérateur θ_n domine strictement les opérateurs θ_j pour tout $0\leq j\leq n$, alors d'après la définition 3.4.4on a :

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\theta_{j,0}(m)}{\theta_{n,0}(m)}=0$$

nous avons alors :

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{F_{p,m}(y_1)}{\theta_{n,0}(m)}=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\theta_{n,0}(m)}\sum_{r+|s|=p,|s|\neq 0} a_{r,s}\sum_{j=0}^{n} s_j\theta_{j,0}(m)\left(\theta_{j,0}(1)\right)^{s_j-1}\prod_{l\neq j}\left(\theta_{l,0}(1)\right)^{s_l}|y_1|^{|s|-1}$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\sum_{r+|s|=p,|s|\neq 0} a_{r,s}\left(\sum_{j=0}^{n} s_j\frac{\theta_{j,0}(m)}{\theta_{n,0}(m)}\left(\theta_{j,0}(1)\right)^{s_j-1}\prod_{l\neq j}\left(\theta_{l,0}(1)\right)^{s_l}|y_1|^{|s|-1}\right)$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \sum_{r+|s|=p,|s|\neq 0} a_{r,s} \left[\sum_{j=0}^{n-1} s_j \frac{\theta_{j,0}(m)}{\theta_{n,0}(m)} (\theta_{j,0}(1))^{s_j-1} \prod_{l\neq j} (\theta_{l,0}(1))^{s_l} |y_1|^{|s|-1} \right.$$

$$\left. + s_n(\theta_{n,0}(1))^{s_n-1} \prod_{l\neq n} (\theta_{l,0}(1))^{s_l} |y_1|^{|s|-1} \right]$$

$$= \sum_{r+|s|=p,|s|\neq 0} a_{r,s} s_n (\theta_{n,0}(1))^{s_n-1} \prod_{l\neq n} (\theta_{1,0}(1))^{s_l} |y_1|^{|s|-1}$$

$$= C_n(D)(y_1) \neq 0$$

C'est à dire qu'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$|F_{p,m}(y_1)| \geq \sigma |\theta_{n,0}(m)|.$$

et de plus comme θ domine l'identité, $\theta_n = Id$ alors :

$$1 \leq c_{0,0} |\theta_{n,0}(m)| \qquad\qquad c_{0,0} \neq 0$$

On peut prendre $c_{0,0} = 1$.

D'où θ_n est inversible et pour tout $m \geq 1$, $\theta_{n,0}(m) \neq 0$ et donc :

$$|F_{p,m}(y_1)| \geq \sigma\, |\theta_{n,0}(m)| \Longleftrightarrow \frac{1}{|F_{p,m}(y_1)|} \leq \frac{1}{\sigma |\theta_{n,0}(m)|}.$$

D'autre part grâce aux relations :

$$\theta_{n,0}(m) \neq 0$$

$$\frac{1}{|F_{p,m}(y_1)|} \leq \frac{1}{\sigma\, |\theta_{n,0}(m)|}$$

La condition (H) entraine donc l'inégalité,

$$|y_m| \leq \frac{1}{\sigma} \left\{ \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| \sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} |a_{r,s}| \sum_{1\leq k\leq s_0,\ \ m_0^k\neq m} |y_{m_0^k}| \prod_{1\leq k\leq s_1,\ \ m_1^k\neq m} |y_{m_1^k}| \times \cdots \right.$$

$$\left. \times \prod_{1\leq k\leq s_N,\ \ m_N^k\neq m} |y_{m_N^k}| \right\} + \left\{ \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+|s|=q} \sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} |a_{r,s}| \prod_{1\leq k\leq s_0} |y_{m_0^k}| \right.$$

$$\times \prod_{1\leq k\leq s_1} |y_{m_1^k}| \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_N} |y_{m_N^k}| \Bigg\}.$$

Considèrons maintenant l'équation algébrique,

$$\sigma_1 x^{p-1} Y = \mu x^p + \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| x^r Y^{|s|} + \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+s=q} |a_{r,s}| x^r Y^{|s|} \tag{2}$$

où σ_1 et μ sont des constantes positives que nous aurons à choisir convenablement.

Cherchons pour cette équation une solution formelle de la forme $Y = \sum_{m\geq 1} Y_m x^m$ que l'on introduit dans l'équation (2).

$$\sigma_1 x^{p-1}\left(\sum_{m\geq 1} Y_m x^m\right) = \mu x^p + \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| x^r \left(\sum_{m\geq 1} Y_m x^m\right)^{|s|}$$
$$+ \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+|s|=q} |a_{r,s}| x^r \left(\sum_{m\geq 1} Y_m x^m\right)^{|s|}$$

1) Pour déterminer Y_1 nous identifions l'équations de x^p, nous obtenons :

$$\sigma_1 Y_1 = \mu + \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| Y_1^{|s|}$$

2) Pour Y_m, nous identifions l'équations de x^{m+p-1}, nous obtient :

$$Y_m \left[\sigma_1 - \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}||s| Y_1^{|s|-1}\right]$$
$$= \Bigg\{ \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| \sum_{r+m_0+\cdots m_N = m+p-1} |a_{r,s}| \prod_{1\leq k\leq s_0,\ m_0^k\neq m} Y_{m_0^k}$$
$$\times \prod_{1\leq k\leq s_1,\ \ m_1^k\neq m} Y_{m_1^k} \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_N,\ \ m_N^k\neq m} Y_{m_N^k} \Bigg\}$$
$$+ \Bigg\{ \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+|s|=q} \sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} |a_{r,s}| \prod_{1\leq k\leq s_0} Y_{m_0^k}$$
$$\times \prod_{1\leq k\leq s_1} Y_{m_1^k} \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_N} Y_{m_N^k} \Bigg\}.$$

En posant $Y = xZ$ on voit immédiatement par le théorème des fonctions implicites que l'équation (2)

$$\begin{aligned}
\sigma_1 x^p Z &= \mu x^p + \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| x^{r+|s|} Z^{|s|} + \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+|s|=q} |a_{r,s}| x^{r+|s|} Z^{|s|} \\
&= \mu x^p + x^p \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| Z^{|s|} + \sum_{p<q\leq R} x^q \sum_{r+|s|=q} |a_{r,s}| Z^{|s|} \\
&= \mu x^p + x^p \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| Z^{|s|} + x^{p+1} \sum_{r+|s|=p+1} |a_{r,s}| Z^{|s|} \\
&+ x^{p+2} \sum_{r+|s|=p+2} |a_{r,s}| Z^{|s|} + \cdots + x^R \sum_{r+|s|=R} |a_{r,s}| Z^{|s|} \\
&= x^p \left(\mu + \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| Z^{|s|} + x \sum_{r+|s|=p+1} |a_{r,s}| Z^{|s|} + \cdots + x^{R-p} \sum_{r+|s|=R} |a_{r,s}| Z^{|s|} \right)
\end{aligned}$$

D'où

$$x^p \sigma_1 Z = x^p \left(\mu + \sum_{p<q\leq R} x^{q-p} \sum_{r+|s|=q} |a_{r,s}| Z^{|s|} \right)$$

Comme x^p est un polynôme non nul on a alors :

$$\sigma_1 Z = \mu + \sum_{p<q\leq R} x^{q-p} \sum_{r+|s|=q} |a_{r,s}| Z^{|s|}.$$

On pose :

$$A(x,Z) = \sigma_1 Z - \mu - \sum_{p<q\leq R} x^{q-p} \sum_{r+|s|=q} |a_{r,s}| Z^{|s|}$$

$$A(0,Z) = \sigma_1 Z - \mu$$

d'où

$$\frac{\partial A}{\partial Z}(0,0) = \sigma_1$$

d'où

$$A(x,Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial A}{\partial Z}(0,0) \neq 0.$$

Et d'après le théorème des fonctions implicites, on peut exprimer Z en fonction de x.

$$Z = \sum_{m\geq 0} z_m x^m$$

$$Y = xZ \Longrightarrow Y = \sum_{m\geq 1} Y_m x^m$$

Donc L'équation (2) admet une solution holomorphe unique ce qui veut dire que la solution formelle de cette équation $Y = \sum_{m\geq 1} Y_m x^m$ est convergente dans un disque centré à l'origine de $\mathbb{C}$ et de plus $Y_m \geq 0$ pour tout $m \geq 1$ (ceci découle de l'équation (2) car tous les coefficients sont positifs).

Notre dut à présent est de montrer que :

$$|y_m| \leq Y_m \qquad \forall m \geq 1.$$

Choisissons Y_1 tel que $|y_1| \leq Y_1$ et σ_1 vérifiant,

$$0 < \left[\sigma_1 - \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}||s|Y_1^{|s|}\right] < \sigma$$

et enfin μ donné par :

$$\mu = \sigma_1 Y_1 - \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}|Y_1^{|s|}$$

(i.e. μ est obtenu d'après l'écriture de Y_1 et σ_1 étant préalablement choisie).

Démontrons par récurrence que :

$$|y_m| \leq Y_m \qquad \forall m \geq 1.$$

Supposons que pour tout $i, 1 \leq i \leq m-1,\ \ |y_i| \leq Y_i$ ceci est le cas pour $i = 1$ par hypothése. Alors, comme,

$$|y_m| \leq (1/\sigma)\left\{\sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| \sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} |a_{r,s}| \prod_{1\leq k\leq s_0,\ \ m_0^k\neq m} |y_{m_0^k}|\right.$$

$$\left.\times \prod_{1\leq k\leq s_1,\ \ m_1^k\neq m} |y_{m_1^k}| \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_n,\ \ m_n^k\neq m} |y_{m_n^k}|\right\}$$

$$+\left\{\sum_{p<q\leq R}\sum_{r+|s|=q}\sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} |a_{r,s}| \prod_{1\leq k\leq s_0} |y_{m_0^k}|\right.$$

$$\left.\times \prod_{1\leq k\leq s_1} |y_{m_1^k}| \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_N} |y_{m_N^k}|\right\}$$

on a :

$$|y_m| \leq (1/\sigma)\left\{\sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}| \sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} |a_{r,s}| \prod_{1\leq k\leq s_0,\ \ m_0^k\neq m} Y_{m_0^k}\right.$$

$$\times \prod_{1\leq k\leq s_1,\quad m_1^k\neq m} Y_{m_1^k} \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_n,\quad m_n^k\neq m} Y_{m_n^k} \Bigg\}$$

$$+\Bigg\{ \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+|s|=q} \sum_{r+m_0+\cdots m_N=m+p-1} |a_{r,s}| \prod_{1\leq k\leq s_0} |Y_{m_0^k}|$$

$$\times \prod_{1\leq k\leq s_1} |Y_{m_1^k}| \times \cdots \times \prod_{1\leq k\leq s_N} |Y_{m_N^k}| \Bigg\}$$

et grâce au choix de σ_1 nous avons :

$$\frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\sigma_1 - \sum_{r+|s|=p} |a_{r,s}||s|Y_1^{|s|}}$$

d'où

$$|y_m| \leq Y_m.$$

ce qui implique la convergence de la solution formelle $y = \sum_{m\geq 1} y_m x^m$ associée à y_1 et démontre le théorème 3.4.2. ∎

3.4.1 Application : le Théorème De Maillet [14]

Soit $G(x, X) = \sum_{1\leq r+|s|=q\leq R} b_{r,s} x^r X^r$ un polynôme de degré R en les indéterminées $x, X_0, \cdots, X_M$. Considérons l'équation différentielle algébrique

(1) $$G(x, y, y', \cdots, y^{(M)}) = 0,$$

par multiplication par une puissance de x convenable cette équation s'écrit :

(1′) $$F(x, y, \theta y, \theta^2 y, \cdots, \theta^M y) = \sum_{1\leq r+|s|=q\leq R} a_{r,s} x^r y^{s_0} (\theta y)^{s_1} \cdots (\theta^M y)^{s_M} = 0$$

où, $\theta = x\frac{d}{dx}$. Ce que l'on peut écrire,

$$F_p(x, y, \theta y, \theta^2 y, \cdots, \theta^n y) = \mathfrak{R}_{p+1}(x, y, \theta y, \theta^2 y, \cdots, \theta^N y)$$

où

$$\begin{cases} F_p(x, X_0, X_1, \cdots, X_n) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} x^r (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} \cdots (X_n)^{s_n} \\ \mathfrak{R}_{p+1}(x, X_0, X_1, \cdots, X_N) = \sum_{p<q\leq R} \sum_{r+|s|=q} a_{r,s} x^r (X_0)^{s_0} (X_1)^{s_1} \cdots (X_N)^{s_N} \end{cases}$$

le cas $n \geq N$ a été étudié dans [8]. Nous allons ici considérer le cas $n < N$.

D'après les exemples III : l'opérateur θ^n domine strictement tous les opérateurs

$\theta^j \quad 0 < j \leq n.$

Nous supposerons que les deux polynômes :

$$F_p(1, X, X, \cdots, X) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial X_n}(F_p)(1, X, X, \cdots, X)$$

n'ont pas de racines communes (c'est une hypothèse supplémentaire lorsque $p > 1$).

Cette condition est aussi vraie pour $p = 1$, en effet :

$$F_1(x, X_0, X_1, \cdots, X_n) = \sum_{r+|s|=1} a_{r,s} x^r X_0^{s_0} X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n}$$

$$= a_{1,0}x + a_{0,s^0}X_0 + a_{0,s^1}X_1 + \cdots + a_{0,s^n}X_n$$

où $s^i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ $(1 =$ i^{me} place $)$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_n}(x, X_0, X_1, \cdots, X_n) = a_{0,s^n}$$

prenons $X_0 = X_1 = \cdots = X_n = X \quad$ et $\quad x = 1.$

On obtient :

1)$F_1(1, X, X, \cdots, X) = a_{1,0}x + (a_{0,s^0} + a_{0,s^1} + \cdots + a_{0,s^n})\, X.$

2)$\frac{\partial F_1}{\partial X_n}(1, X, X, \cdots, X) = a_{0,s^n}$

et donc les deux polynômes $F_1(1, X, X, \cdots, X)$ et $\frac{\partial F_1}{\partial X_n}(1, X, X, \cdots, X)$ n'ont pas de racines commune.

Et pour $p > 1$:

$$F_p(1, X, X, \cdots, X) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} X^{|s|}$$

et

$$\frac{\partial F_p}{\partial X_n}(1, X_0, X_1, \cdots, X_n) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} s_n x^r X_0^{s_0} \cdots X_{n-1}^{s_{n-1}} X_n^{s_n - 1}$$

d'où

$$\frac{\partial F_p}{\partial X_n}(1, X, X, \cdots, X) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} s_n X^{s_n - 1}$$

donc nous avons supposé que $\sum_{r+|s|=p} a_{r,s} X^{|s|}$ et $\sum_{r+|s|=p} a_{r,s} s_n X_n^{|s|-1}$ n'ont pas de racine commune.

Exemple 3.4.1 *L'équation d'Euler :* $x^2 y' - y = -x$ *qui s'écrit :*

$$x\theta y - y = -x \qquad (\text{ i.e. } x\ \theta y - y + x = 0)$$

donc

$$F_1(x, X) = -X_0 + x \quad \textit{et} \quad \mathfrak{R}_2(x, X) = xX_1$$

Donc $p = 1, \quad R = 2, \; n = 0, \quad \textit{et} \quad N = 1.$

3.4.2 Théorème De Maillet [14].

Toute solution formelle de (1) est dans une certaine classe de Gevrey.

Ce théorème veut dire que si $\sum_{m\geq 1} y_m x^m$ est une solution formelle de (1), il existe, deux constantes c et y telle que :

$$|y_m| \leq c(m!)^{\gamma}.$$

Remarque 3.4.1 *L'existence d'une solution formelle pour l'équation (1) entraîne l'existence d'une solution formelle pour (1').*

Preuve du Théorème de Maillet.

Soit φ un opérateur diagonal i.e. :

$$\varphi\left(\sum_{m\geq 1} u_m x^m\right) = \sum_{m\geq 0} \varphi_0 u_m x^m \qquad (\varphi_k = 0, \; \forall k \neq 0).$$

et posons $y = \varphi(u)$ dans l'équation (1') on obtient :

$$F(x, y, \theta y, \cdots, \theta^N y) = \sum_{1\leq r+|s|=q\leq R} a_{r,s} x^r \left(\theta^0 \circ \varphi(u)\right)^{s_0} \cdots \left(\theta^N \circ \varphi(u)\right)^{s_N}.$$

Notons $\theta_j = \theta^j \circ \varphi$.

nous obtenons ainsi l'équation :

$$F_p(x, \theta_0(u), \theta_1(u), \cdots, \theta_n(u)) = R_{p+1}(x, \theta_0(u), \theta_1(u), \cdots, \theta_N(u))$$

cette équation admet une solution formelle $u = \sum_{m\geq 1} u_m x^m$ car l'équation (1) est différentielle algébrique et $y = \varphi(u); \quad u = \sum_{m\geq 1} u_m x^m$.

c'est à dire :

$$y = \sum_{m\geq 1} \varphi_0(m) u_m x^m.$$

Nous avons pour tout k, $O \leq k \leq N$;

$$\theta_{k,0}(p) = p^k \varphi_0(p) \qquad\qquad \forall P \geq 1.$$

En effet :

$$\theta_{k,0}(p) = (\theta^k \circ \varphi)_0(p) \quad \text{or} \quad \varphi(u) = \sum_{m \geq 1} \varphi_0(m) u_m x^m$$

et

$$\theta^k \circ \varphi(u) = \theta^k(\varphi(u)) = \sum \theta_0^k(m)\varphi_0(m)u_m x^m \Longrightarrow (\theta^k \circ \varphi)_0(p) = \theta_0^k(p)\varphi_0(p).$$

Or selon exemple III : $\theta_0^k(p) = p^k$

d'où $(\theta^k \circ \varphi)_0(p) = p^k(p)\varphi_0(p)$.

Conclusion :

$$\theta_{k,0}(p) = p^k \varphi_0(p).$$

Nous allons montrer que l'on peut appliquer le théorème 3.4.2 lorsque l'on choisit φ opérateur diagonal définit par

$$\varphi_0(p) = ((p-l)!)^\alpha$$

où α est à choisir convenablement dans la suite.

Pour cela il faut d'abord satisfaire à condition (H) (la condition θ_n domine strictement les opérateurs θ_j pout tout $j(0 \geq j < n)$ est vérifiée)

Rappelons la condition (H) :

pour tout $m \geq 1$, pour tout $q(p < q \leq R)$, tout $(r, s_0, s_1, \cdots, s_N)$ avec $r + |s| = q$, toute suite d'entiers, $m_0^1, m_0^2, \cdots, m_0^{s_0}; m_1^1, m_1^2, \cdots, m_1^{s_1}; \cdots m_N^1, m_N^2, \cdots, m_N^{s_N}$

telle que,

$$r + m_0 + m_1 + \cdots + m_N = m + p - 1$$

où :

$$\begin{aligned} m_0^1 + m_0^2 + \cdots + m_0^{s_0} &= m_0 \\ m_1^1 + m_1^2 + \cdots + m_1^{s_1} &= m_1 \\ &\vdots \\ m_N^1 + m_N^2 + \cdots + m_N^{s_N} &= m_N. \end{aligned}$$

$$G_n(m) = \frac{1}{|\theta_{n,0}(m)|}\left\{ \prod_{1\leq k\leq s_0} |\theta_{0,0}(m_0^k)| \times \prod_{1\leq k\leq s_1} |\theta_{1,0}(m_1^k)| \times \cdots \right.$$

$$\left. \times \prod_{1\leq k\leq s_N} |\theta_{N,0}(m_N^k)| \right\} \leq h \quad (constante).$$

Par covention : si $m_j^k = 0$ alors $\theta_{j,0}(m_j^k)$ ne figure dans aucune des formules précédentes ou qui vont suivre.

Nous savons que pour toute suite d'entiers $p_1, p_2, \cdots p_l$; on a :

$$[(p_1!)(p_2!)\cdots(p_l!) \leq (p_1 + p_2 + \cdots + p_l)!] \qquad (\star)$$

Or :

$$\prod_{1\leq k\leq s_j} |\theta_{j,0}(m_j^k)| = \prod_{1\leq k\leq s_j} ((m_j^k - 1)!)^\alpha (m_j^k)^j.$$

Ceci grâce à la relation $\theta_{k,0}(p) = p^k \varphi_0(p)$ et au choix de φ.

On a également :

$$\theta_{n,0}(m) = ((m-1)!)^\alpha m^n;$$

d'après la relation $(\star)$ on aura :

$$\begin{aligned}
\prod_{1\leq k\leq s_j} ((m_j^k - 1)!)^\alpha (m_j^k)^j &\leq \left[\sum_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k - 1)\right]! \prod_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k)^j \\
&\leq \left[m_j^1 + m_j^2 + \cdots + m_j^{s_j} - s_j\right]! \prod_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k)^j \\
&\leq (m_j - s_j)! \prod_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k)^j
\end{aligned}$$

d'où :

$$G_n(m) \leq \frac{1}{((m-1)!)^\alpha m^n} \times ((m_0 - s_0)!)^\alpha \prod_{1\leq k\leq s_0} (m_0^k)^0 \times \cdots \times ((m_N - s_N)!)^\alpha \prod_{1\leq k\leq s_N} (m_N^k)^N$$

i.e.

$$\begin{aligned}
G_n(m) &\leq \frac{1}{((m-1)!)^\alpha m^n} \prod_{0\leq j\leq N} \left(((m_j - s_i)!)^\alpha \prod_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k)^j \right) \\
&\leq \frac{1}{((m-1)!)^\alpha m^n} \times \left[\left(\sum_{0\leq j\leq N} (m_j - s_j)\right)!\right]^\alpha \prod_{0\leq j\leq N} \prod_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k)^j
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{0\leq j\leq N} m_j = m+p-1-r,$$

$$\sum_{0\leq j\leq N} s_j = q-r$$

d'où

$$\sum_{0\leq j\leq N} (m_j - s_j) = m+p-1-q$$

$$\Longrightarrow G_n(m) \leq \frac{1}{((m-1)!)^{\alpha} m^n} \times [(m+p-1-q)!]^{\alpha} \prod_{0\leq j\leq N} \prod_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k)^j$$

or

$$\prod_{1\leq k\leq s_j} (m_j^k)^j \leq (m_j)^{js_j}$$

$$\Longrightarrow G_n(m) \leq \frac{1}{((m-1)!)^{\alpha} m^n} [(m+p-1-q)!]^{\alpha} \prod_{0\leq j\leq N} (m_j)^{js_j}$$

$$\leq \frac{1}{((m-1)!)^{\alpha} m^n} \times [(m+p-1-q)!]^{\alpha} (m+p-1)^{\sum_{0\leq j\leq N} js_j}$$

or :

$$\left(\frac{(m+p-1-q)!}{(m-1)!}\right)^{\alpha} = \frac{1}{[(m+p-q)\times(m+p-q+1)\times\cdots\times(m-1)]^{\alpha}}$$

d'où :

$$G_n(m) \leq \frac{(m+p-1)^{\sum js_j}}{m^n\,[(m+p-q)\times(m+p-q+1)\times\cdots\times(m-1)]^{\alpha}}.$$

Lorsque m tend vers $+\infty$ le second membre de cette expression est équivalent à :

$$(m)^{(\sum_{0\leq j\leq N} js_j)-n-(q-p)\alpha}$$

prenons,

$$\alpha \geq \sup_{p\leq q\leq R}\left(\sup_{r+|s|=q}\left[\frac{\left(\sum_{0\leq j\leq N} js_j\right)-n}{q-p}\right]\right).$$

Avec ce choix de α nous aurons :

$$G_n(m) \leq 1 \qquad\qquad \forall m \geq 1.$$

À présent regardons si les hypothèses du théorème 1.4.2 sont bien vérifiées.

1.
$$C(D)(u_1) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} \left(\varphi_0(1)\right)^{s_0} \left(\varphi_1(1)\right)^{s_1} \cdots \left(\varphi_0(1)\right)^{s_n} u_1^{|s|}$$

car $\theta_{j,0}(1) = \varphi_0(1) \quad \forall j \;\; 0 \leq j \leq N. \Longrightarrow C(D)(u_1) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} \left(\varphi_0(1)\right)^{|s|} u_1^{|s|}$ et on a : $\varphi_0(1)$ (d'après le choix de φ), d'où :

$$C(D)(u_1) = \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} u_1^{|s|} = F_p(1, u_1, \cdots, u_1)$$

on choisit donc u_1 racine du polynôme

$$F_p(1, X, \cdots, X) = C(D)(u_1)$$

2. u_1 doit vérifier que :
$$C(D)(u_1) \neq 0$$

en effet :
$$\begin{aligned} C(D)(u_1) &= \sum_{r+|s|=p} a_{r,s} s_n |u_1|^{|s|-1} \\ &= \frac{\partial F_p}{\partial X_n}(1, u_1, \cdots, u_1) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Car les polynômes $F_p(1, X, \cdots, X)$ et $\frac{\partial F_p}{\partial X_n}(1, X, \cdots, X)$ n'ont pas de racines communes.

Comme notre équation (2) admet une solution formelle même si $F_{p,m}(u_1) = 0$, celle-ci converge donc on n'a pas à vérifier la condition $F_{p,m}(u_1) \neq 0$.

Donc d'après le théorème 3.4.2 l'équation opérateur (1) admet une solution formelle $u = \sum_{m \geq 1} u_m x^m$ convergente ; or :

$$y = \varphi(u) = \sum_{m \geq 1} (m) u_m x^m$$

i.e.
$$y_m = \varphi_0(m) u_m = ((m-1)!)^{\alpha} u_m$$

d'où
$$u_m = \frac{y_m}{((m-1)!)^{\alpha}}$$

donc

$$u = \sum_{m\geq 1} \frac{y_m}{((m-1)!)^\alpha} x^m$$

est convergente.

D'où la série $y = \sum_{m\geq 1} y_m x^m$ est dans une certaine classe de Gevrey.

Exemple 3.4.2 *Revenons à l'équation d'Euler : $x\theta y - y = -x$ et déterminons le nombre α qui détermine la classe de Gevrey de la solution formelle, On a :*

$$F_1(x, X) = -X_0 + x$$

et

$$\Re_2(x, X) = xX_1,$$

donc $p = 1, R = 2, n = 0$ et $N = 1$. Il est facile de voir que

$$\sup_{1\leq q\leq 2}\left(\sup_{r+|s|=q=2}\left(\frac{s_1 - 0}{q-p}\right)\right) = \sup_{r+s_0+s_1=2}(s_1).$$

On a trois possibilités pour :

$$r + s_0 + s_1 = 2$$
$$0 + 1 + 1 = 2$$
$$1 + 0 + 1 = 2$$
$$1 + 1 + 0 = 2$$

et donc

$$\sup_{r+s_0+s_1=2}(s_1) = 1$$

et donc :

$$\sup_{1\leq q\leq 2}\left(\sup_{r+|s|=q=2}\frac{s_1}{q-p}\right) = 1$$

donc on peut prendre $\alpha = 1$.

Remarque 3.4.2 *Ce théorme reste encore vrai si l'on suppose que l'équation différentielle est un polynôme en $y, y', \cdots, y(n)$ dont les coéfficients sont des fonctions analytiques dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$.*

Bibliographie

[1] W. Balser, Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations, Springer-Verlag, New York, 2000

[2] W. Balser, Summation of formal power series through iterated Laplace integrals, Math. Scandinavica, 70, 161-171, 1992

[3] W. Balser, B.L.J. Braaksma, J.P. Ramis, and Y. Sibuya, Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, preprint Institute for Mathematics and its applications, University of Minnesota, Minneapolis, IMA 717 (1990), to appear in Asymptotic Analysis (1991)

[4] E. Borel, Mémoire sur les Séries Divergentes, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., Paris (3), 16 (1899)

[5] E. Borel, Leçons sur les Séries Divergentes. Deuxième édition (1928), Gauthier-Villars, Paris

[6] B.L.J. Braaksma, Multisummability of formal power series solutions of nonlinear meromorphic differential equations, *Ann. Fourier* (University og Groningen) 42 (1992), 517-540

[7] J. Ecalle, Résurgence et accélération, Cours de 3^{me} cycle, Orsay, 1987

[8] R. Gérard, Une classe d'équations différentielles non linéaires à singularité régulière, Funkcialaj Ekvacioj, 29 (1986) 55-76

[9] R. Gérard and Y. Sibuya Étude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, in : *Lecture Notes in Math.*, vol. 712, Springer, Berlin, 1979, pp. 131-288

[10] P. Gonsales, Sur le théorème de Maillet, à paraître dans Notas de Matematicas de la Sociedad de Matematica de Chile

[11] W. Jurkat, Summability of asymptotic series, preprint Universität Ulm, (1990)

[12] M. Loday-Richaud, Introduction à la multisommabilité, Gazette des Mathématiciens, Soc. Math. de France (Avril 1990)

[13] K. Mahler, On formal power series of algebraic differential equations, Lincei, 36 (1971), 76-89

[14] E. Maillet, Sur les séries divergentes et les équations différentielles, Ann. Ecole Norm. (3), 20, 487-518

[15] B. Malgrange, Sommation des séries divergentes, Expositiones Mathematicae, 13, 163-222, 1995

[16] B. Malgrange, J.P. Ramis, Fonctions Multisommables, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 42, 1 (1992)

[17] J. Martinet, J.P. Ramis, Théorie de Galois Différentielle et Resommation, Computer Algebra and Differential equations (E. Tournier ed.), Academic Press (1989), p. 117-214

[18] J. Martinet, J.P. Ramis, Elementary acceleration and multisummability, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 54, n°4, 331-401, 1991

[19] J.P Ramis, Dévissage Gevrey, Astérisque 59-60 (1978), p. 173-204.

[20] J.P Ramis, Les séries k-sommables et leurs applications. Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceedings "Les Houches 1979, Springer Lecture Notes in Physics 126 (1980), p. 178-199.

[21] J.P Ramis, Les séries k-sommables et leurs applications, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 126, 1980

[22] J.P Ramis, Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Memoirs of the American Mathematical Society, 48, n°296, 1984

[23] J.P Ramis, Séries divergentes et théories asymptotiques, Société Mathématique de France, Panoramas et Synthèses, 121, 1993

[24] J.P. Ramis, Y. Sibuya, Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type. Asymptotics 2(1989), p. 39-94

[25] G.N. Watson, Asymptotic of ordinary differential equations, Interscience, New-York, 1965. Wiley, New-york, 1976

[26] G.N. Watson, A theory of Asymptotic Series, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. CCXI (1911), p. 279-313.