

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene



Faculté de Mathématiques

MEMOIRE

**Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister
en MATHEMATIQUE**

Spécialité: PROBABILITE ET STATISTIQUES

Par: BOUDALI KHALIDA

Thème

**Aspects Numériques et Simulation dans les
Equations Différentielles Stochastiques**

Soutenu le 03-03-2005, devant le jury suivant:

Mr- M.DJEDOUR, Professeur, USTHB
Mr- K.BOUKHETALA, Professeur, USTHB
Mr- D.AISSANI, Professeur, U.BEJAIA
Mr- A.NECIR, Maître de conférence, U.BISKRA.
Mr- T.LARDJANE, Chargé de Cours, USTHB.

Président
Dteur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur

Dédicaces

Je dédie, avec tous mes sentiments d'affectueuse reconnaissance, cet humble travail à mes très chers parents pour leur sacrifice et à ma sœur Samia, ainsi qu'à mes sœurs Fatma, Zohra, Louiza et Ouahiba, à mes frères Rachid, Abdelkader, Youcef et Noureddine, et à mes belles sœurs Nora, Pamela et Assia. Sans oublier mes neveux et nièces : Samir, Abdeslam, Leila, SeifEddine, Manel, Racha, Imen, Samah, Anes, Lina, Amina, Aymen, Meyssa, Abdelhadi, Yasmine et Mohamed Amine.

A mes amies Amel, Anissa, Assia, Badia, Djamila, Farida, Fatiha, Houa, Karima, Malika, Meriem, Nassima, Nabila, Nawel, Nora, Radia Zahia et Zineb pour leur soutien moral, je dédie ce travail .

Mes dédicaces sont destinées aussi à tous mes collègues de l'Office National des Statistiques, en particulier la direction des Statistiques Sociales et de Revenu.

Remerciement

Je tiens à remercier avec tous mes sentiments de respectueuse gratitude, mon promoteur M^r K.Boukhetala Professeur à l'USTHB pour sa proposition du sujet ainsi que son orientation indispensable à la finalisation de cette thèse.

J'exprime aussi ma profonde gratitude aux membres du Jury pour avoir accepté d'examiner ce travail, qui sont M^{rs} M.DJEDOUR, D.AISSANI, A.NECIR et T.LARDJANE.

Un spécial remerciement à mon frère AbdElKader sans qui ce travail n'aurais jamais vu le jour.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à M^r R.Khiari enseignant à l'Institut National de Planification et de Statistique, à M^{elle} R.Hank et M^r KH.Kitouni enseignants au centre de formation 'INFORMAL' ainsi qu'au directeur du centre.

Enfin, Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé, en particulier R.Labtahi, M.Ouadah et S.Habel.

Sommaire

Introduction générale	1-5
Chapitre 1 : Théorie classique des équations différentielles stochastiques	6-25
1.1. Principaux aspects et définitions des processus stochastiques	6-8
1. Processus stochastique	6
2. La σ -algèbre et la filtration	7
3. Processus adapté	7
4. Processus stochastique particuliers	7
a. Processus stationnaire	7
b. Processus à accroissement indépendants	7
c. Processus à accroissement stationnaires	8
1.2. Mouvement Brownien	8-12
1. Origine du mouvement brownien	8
2. Passage à une description en temps continu	9
3. Définition d'un mouvement Brownien	9
4. Processus de Wiener et bruit blanc	10
5. Propriétés d'un mouvement brownien	10
6. Abandon de l'intégrale de Riemann	11
7. Simulation d'une trajectoire du processus de Wiener	12
1.3. Introduction aux équations différentielles stochastiques	13-17
1. Introduction à l'intégration stochastique	14
2. Intégrale stochastique de fonctions en escaliers	15
3. Propriétés d'une intégrale stochastique	16
4. Intégrale stochastique de fonctions appartenant à L^2	17
5. Différentielle stochastique	17
1.4. Calcul d'Itô	18-20
1. Formule d'Itô dans le cas unidimensionnel	18
2. Formule de Itô dans le cas multidimensionnel	19
3. Produit de deux processus stochastiques	20
1.5. Processus de Markov et processus de diffusion	21-25
1. Processus de Markov	21
2. Processus de diffusion	23
a. Processus de diffusion unidimensionnel	23
b. Processus de diffusion vectoriel	24
c. Continuité d'un processus de diffusion	25
Chapitre 2 : Equations différentielles stochastiques	28-52
2.1. Equations différentielles de type linéaire	28-35
1. Résolution des EDS de type linéaire	28
2. Solutions générales de quelques EDS de type linéaire	31
3. Exemples d'applications d'une EDS linéaire	32
a. Processus de capitalisation	32
b. Equation de Langevin	33
4. Espérance et moment d'ordre deux d'un processus de diffusion	33
5. Equations différentielles stochastiques vectorielles	35

2.2. Equations différentielles stochastiques réductibles	36-43
1. Résolution des équations différentielles stochastiques réductibles d'Itô ...	36
2. Résolution d'EDS réductibles de Stratonovich	40
3. Solutions générales de quelques EDS de type réductible	41
4. Exemple d'application d'une EDS réductible : Croissance de population	43
2.3. Existence et Unicité des solutions des équations différentielles stochastiques	45-52
1. Solutions fortes d'une équation différentielle stochastique	45
2. Solution forte et processus de diffusion	50
3. Solution faible et processus de diffusion	52
Chapitre 3 : Développement de Taylor stochastique	55-65
3.1. Formule d'Itô-Taylor stochastique	55-56
1. Formule de Taylor déterministe	55
2. Formule d'Itô-Taylor stochastique unidimensionnelle	56
3. Formule d'Itô-Taylor stochastique multidimensionnelle	57
a. Notion de l'indice multiple	57
b. Notion de temps d'arrêt	58
c. Intégrale d'Itô multiple	58
d. Fonction coefficient d'Ito	59
e. Ensemble hiérarchique et ensemble reste	60
4. Développement d'Itô-Taylor Stochastique	60
3.2. Formule de Stratonovich-Taylor stochastique	61-65
1. Développement de Stratonovich-Taylor	61
2. Approximation des intégrales multiples de Stratonovich	62
3. Relations entre des intégrales multiples de Stratonovich	65
Chapitre 4 : Introduction à l'approximation par discrétisation du temps	67-86
4.1. Méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires..	67-70
1. Approximation d'Euler déterministe	67
2. Méthodes d'approximation implicites	69
3. Méthodes d'approximation d'ordre très élevé	70
4. Erreur d'arrondie	70
4.2. Simulation stochastique en temps discret	71-75
1. Approximation d'Euler stochastique	71
2. Interpolation des approximations par discrétisation du temps	73
3. Exemple d'application de l'approximation d'Euler	73
a. Cas d'une EDS de type linéaire (modèle de Black et Scholes)	73
b. Cas d'une EDS de type non linéaire	75
4.3. Approximation des trajectoires et convergence forte	76-80
1. Approximation des trajectoires et critère de convergence forte	76
2. Ordre de convergence forte et consistance	80
4.4. Approximation des moments et critère de convergence faible	80-86
1. Approximation des moments et critère de convergence faible	80
2. Erreur statistique et systématique	82
3. Ordre de convergence faible et consistance	83
4.5. Stabilité numérique	84

Sommaire	III
1. Stabilité numérique dans un cas déterministe	84
2. Equations différentielles stochastiques renforcées (Stiff SDE)	86
3. Stabilité numérique asymptotique	86
Chapitre 5 : Approximations fortes	91-120
5.1. Approximations fortes de Taylor	91-106
1. Schème d'Euler stochastique	91
2. Schème de Milstein	94
3. Schème fort de Taylor d'ordre 1.5	101
4. Schème fort de Taylor d'ordre 2.0	103
5. Comparaison des schèmes forts de Taylor	106
5.2. Approximations fortes explicites	108-110
1. Schème fort explicite d'ordre 1.0	108
2. Schème fort à deux pas d'ordre 1.5	110
5.3. Approximations fortes implicites	113-120
1. Schème d'Euler implicite	113
2. Schème de Milstein implicite	116
3. Schème fort de Taylor implicite d'ordre 1.5	118
4. Schème fort de Runge Kutta implicite	120
Chapitre 6 : Approximations faibles	124-141
6.1. Schèmes faibles de Taylor	124-129
1. Schème faible d'Euler	124
2. Schème faible de Taylor d'ordre 2.0	127
3. Schème faible de Taylor d'ordre 3.0	129
6.2. Schèmes faibles explicites	131-134
1. Schèmes faibles explicites d'ordre 2.0	132
2. Approximation par la méthode d'extrapolation	134
6.3. Approximations faibles implicites	136-141
1. Schème faible implicite d'Euler	136
2. Schème faible implicite d'ordre 2.0	139
3. Approximation par la méthode prédicteur-correcteur.....	141
Chapitre 7 : Présentation du logiciel.....	145-158
Conclusion	159
Bibliographie.....	160

Introduction Générale

La présente étude traite les différents concepts et techniques utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles stochastiques (EDS) ([1], [2], [3], [5],[6],[7], [14],[15], [17]) qui régissent la dynamique de plusieurs systèmes mécaniques, physiques, météorologiques, économiques et financiers, écologiques, démographiques et sociaux etc (voir, [16], [19], [20], [21],[22],[23],[24]). Ces systèmes interagissent avec un environnement complexe et imprévisible. En général, on ne connaît pas les solutions analytiques de ces EDS, alors nous avons recours à des techniques d'approximation. Notons qu'on ne peut pas utiliser directement les méthodes numériques classiques pour résoudre les EDS car leur nature diffère de celle des équations différentielles ordinaires (EDO).

Le développement de l'outil informatique a rendu l'implémentation des algorithmes d'approximations de la solution d'une EDS facilement réalisable car le traitement numérique nécessite généralement des moyens de calcul puissant.

La méthode numérique qu'on va utiliser est celle qui fait usage aux nombres aléatoires qui n'est autre que la simulation stochastique, appelée aussi « simulation Monte Carlo ». L'aspect stochastique de la méthode Monte Carlo peut être uniquement une astuce pour traiter un problème purement déterministe ou bien provenir vraiment d'une modélisation stochastique d'un problème sur lequel on dispose d'une information lacunaire.

Notons que la simulation numérique du comportement d'un système complexe n'a pris d'essor considérable qu'après l'amélioration des performances des ordinateurs bien que cette méthode numérique a été inventée bien avant.

Dans cette étude, nous allons commencer par présenter au premier chapitre les principaux aspects et définitions des processus stochastiques, plus particulièrement le mouvement Brownien. Ce dernier constitue la base de la théorie classique des EDS et comme sa trajectoire est non différentiable alors il était indispensable de se tourner vers une nouvelle description mathématique qui est l'intégration stochastique. Ce dernier point sera traité à la section 3 où l'on présentera les propriétés élémentaires de l'intégrale stochastique après l'avoir défini. Notons que cette intégrale n'obéit pas aux règles de calcul différentiel classique étant donné que le processus de Wiener est à variation non bornée. Ceci explique le passage vers un nouveau calcul, dit « calcul d'Itô », basée sur la formule d'Itô qui permet de différentier une fonction deux fois continûment différentiable. Cette formule sera établie dans un cas unidimensionnel et multidimensionnel.

Nous terminons ce chapitre par donner un petit aperçu sur le processus de diffusion qui est solution d'une EDS et sur sa continuité et on montrera que le processus de Wiener n'est qu'un cas particulier du processus de diffusion.

Dans le deuxième chapitre, nous parlerons de la méthode de résolution des équations différentielles stochastiques basée essentiellement sur le calcul d'Itô. Les équations de type linéaire seront traitées en premier lieu en donnant les solutions exactes de divers EDS; Suivies par deux exemples d'applications. Le premier exemple consiste à étudier l'évolution d'un capital au cours du temps et le deuxième décrit le comportement dynamique d'une particule dans un fluide soumis à une agitation thermique.

Par ailleurs, nous allons voir comment peut-on passer d'une EDS s'écrivant en fonction du processus de diffusion à une EDS décrite en fonction de l'espérance et de la variance de ce processus si l'objectif principal est d'évaluer ces deux paramètres. Nous prenons comme exemple, le comportement de la particule considéré plus haut. La même démarche sera suivie pour l'étude d'une EDS de type vectoriel.

Nous passerons dans le même chapitre aux méthodes de résolutions des EDS de type non linéaire (réductible). Ces méthodes consistent à transformer l'EDS en question, en se basant sur la formule d'Itô, en équation explicitement intégrable.

Dans certaines applications, plus particulièrement en physique, il est plus commode de mettre l'équation différentielle stochastique ordinaire (EDS d'Itô) sous la forme d'intégrale de Stratonovich. Cette nouvelle forme de l'EDS fait l'objet de la deuxième section et qui sera complété par des exemples analytiques de solutions générales de quelques équations de type réductible. L'exemple pratique que nous allons considérer décrit le phénomène de croissance de population.

A la troisième section, nous étudierons l'existence d'une solution forte et faible d'une EDS ainsi que leur relation avec le processus de diffusion.

Dans le troisième chapitre, nous parlerons du développement de Taylor stochastique qui constitue la base des méthodes d'approximations dans les EDS. À la première section, nous donnerons la formule d'Itô-Taylor stochastique dans un cas unidimensionnel et multidimensionnel. Seulement, avant de présenter ce dernier cas, nous allons introduire brièvement la notion d'indice multiple, de temps d'arrêt, les fonctions coefficients d'Itô ainsi que la notion d'ensemble hiérarchique et l'ensemble reste. Nous aurons besoin aussi du développement de Stratonovich-Taylor que nous exposerons à la section 2.

Cette section sera terminée par l'approximation des intégrales multiples de Stratonovich en établissant un ensemble de relations qui existent entre elles ainsi qu'avec les intégrales multiples d'Itô.

Le chapitre 4 sera une introduction à l'approximation par discrétisation du temps sur laquelle se base l'approche numérique de résolution des EDS. A la section 1, nous étudierons les principales méthodes numériques de résolution des EDO, à savoir la méthode d'Euler déterministe d'ordre 1 en évaluant l'erreur locale et globale qui résulte de cette approximation, les méthodes d'ordre supérieur (Trapèze, Heun, méthode à pas multiples et la méthode d'extrapolation) et les méthodes d'ordre très élevée (méthode d'Euler d'ordre 2 et 3,). Avant de passer au cas stochastique, on estimera l'erreur d'arrondi dû au nombre de décimales signifiant à garder suite à des opérations arithmétiques.

La section 2 sera consacrée à la simulation stochastique en temps discret tel que pour le schème d'Euler stochastique, nous supposons que les pas de discrétisation sont équidistants. Etant donné que ce type d'approximation fournira des valeurs approchées du processus d'Itô aux instants de discrétisation seulement, alors nous proposons une méthode d'interpolation permettant d'avoir une approximation aux instants intermédiaires.

Nous appliquerons ensuite sur une EDS de type linéaire et non linéaire l'approximation d'Euler stochastique en introduisant la méthode d'interpolation. Nous joindrons ces deux exemples par des algorithmes d'approximations.

Dans la section 3 et 4, nous parlerons de deux critères de convergence fort et faible, respectivement, qui dépendent de l'objectif tracé pour l'approximation dans les EDS. Pour le premier critère, nous allons estimer l'erreur absolue dû à l'approximation de la trajectoire du processus d'Itô (solution exacte de l'EDS) et donner l'intervalle de confiance correspondant.

Ensuite, nous définirons cette erreur pour une approximation par discrétisation du temps généralisé (les pas de temps ne sont pas équidistants) en faisant un petit survol sur l'ordre de convergence et de consistance forte de cette approximation.

Pour le critère de convergence faible, nous suivrons la même procédure en remplaçant l'erreur absolue par l'erreur moyenne qui résulte de l'approximation du moment du processus d'Itô et non pas sa trajectoire.

À la section 5, nous aborderons le problème de stabilité numérique des approximations qui ne seront jugés efficaces que si la condition de stabilité soit vérifiée. Nous présenterons d'abord ce problème dans un cas déterministe et ensuite nous passerons au cas stochastique en considérant les concepts des EDS renforcées (Stiff SDE).

Au chapitre 5 et 6, nous parlerons de différentes approximations fortes et faibles qui approchent, respectivement, une trajectoire et une fonction du processus d'Itô. Ces deux chapitres seront divisés en trois sections qui s'articuleront sur les approximations de Taylor, les approximations explicites et les approximations implicites. Toutes les méthodes d'approximations présentées seront complétées par des algorithmes de simulation avec résultats obtenus via le logiciel que nous avons conçu à ces fins.

Concernant les approximations fortes de Taylor, nous traiterons le schème d'Euler stochastique, le schème de Milstein et le schème fort de Taylor d'ordre 1.5 et 2.0. Quant aux approximations fortes explicites, nous définirons les schèmes forts explicites d'ordre 1.0 ainsi que le schème fort à deux pas d'ordre 1.5.

Les approximations fortes implicites engloberont les schèmes forts implicites d'Euler et de Milstein, le schème fort implicite de Taylor d'ordre 1.5, le schème fort implicite de Runge Kutta et enfin le schème fort implicite à deux pas.

Dans les approximations faibles de Taylor, nous décrirons le schème faible d'Euler ainsi que le schème de Taylor d'ordre 2.0 et 3.0. Les schèmes faibles explicites d'ordre 2.0 ainsi que l'approximation par la méthode d'extrapolation feront partie des approximations faibles explicites que nous suivrons par les approximations faibles implicites. Ces dernières incluront le schème faible implicite d'Euler et le schème faible implicite d'ordre 2.0 ainsi que le schème prédicteur-correcteur.

Nous finirons ce travail par présenter notre application qui nous a permis de mettre en œuvre l'ensemble des schèmes d'approximations suscités.

CHAPITRE 1

THEORIE CLASSIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

THEORIE CLASSIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Les équations différentielles stochastiques (EDS) est un outil qui permet de modéliser beaucoup de phénomènes dans un environnement complexe et imprévisible. Par exemple, une plate-forme pétrolière subit les effets de la houle et du vent, le prix d'un actif financier subit les effets des taux d'intérêts et de l'activité globale de l'économie, etc.

La connaissance de tous les résultats antérieurs d'un phénomène réel ne permet pas de décrire avec fiabilité l'évolution future de ses résultats (précision insuffisante) car l'univers dans lequel il évolue peut changer à tout moment. On suppose donc que sur un espace filtré adéquat, il est défini un processus stochastique (en général vectoriel), décrivant l'environnement.

1.1. Principaux aspects et définitions des processus stochastiques

Dans cette partie, nous commençons par présenter des notions élémentaires des processus stochastiques afin de les introduire aux processus de diffusion et aux processus d'Itô. Ces processus servent à modéliser plusieurs phénomènes réels notamment les modèles d'actifs financiers.

1. Processus stochastique

Tout processus décrivant l'évolution chronologique d'un phénomène aléatoire est dit processus stochastique ou processus aléatoire, noté $X(t, \omega)$ ou X_t . $X(t, \omega)$ est défini comme suit:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} X: \mathbb{R}^+ \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\rightarrow X(t, \omega) \end{aligned}$$

Cette application est mesurable lorsque l'on munit $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{A}$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ est la tribu des Boréliens.

Pour t fixé $X(t) = X(t, \cdot)$ est une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour ω fixé, $X(\cdot, \omega)$ est une réalisation ou une trajectoire du processus stochastique.

Par ailleurs, on peut définir les processus aléatoires en faisant appel à la notion dite 'Filtration'.

2. La σ -algèbre et la filtration

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

La σ -algèbre représente la famille d'événements auxquels il est possible d'associer des probabilités.

La filtration est une famille croissante de sous σ -algèbre de $\mathcal{A}$, noté généralement $(F_t, t \geq 0)$. La tribu F_t n'est qu'une description mathématique de la somme de l'information dont on dispose à l'instant t . Cette information nous permet d'attribuer des probabilités cohérentes aux événements pouvant intervenir.

3. Processus adapté

Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable. Mathématiquement cela est traduit comme suit :

Un processus $X(t, \omega)$ est dit adapté à la filtration $(F_t, t \geq 0)$ si la variable aléatoire $X(t, \omega)$, t fixé, est mesurable pour la σ -algèbre F_t .

4. Processus stochastique particuliers

Soit, $X(t, \omega)$ un processus stochastique et $t_1, t_2, \dots, t_k$ ($k \in \mathbb{N}$) une succession de valeurs du temps.

a. Processus stationnaire

On considère les instants $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_k + \tau$, $\forall \tau > 0$.

Le processus $X(t)$ est dit stationnaire lorsque les variables aléatoires $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)]$ et $[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_k + \tau)]$ ont la même distribution de probabilité. Cela signifie qu'à priori, quel que soit l'horizon considéré on met la même distribution de probabilité sur l'état du système (même moyenne et même variabilité.).

b. Processus à accroissement indépendants

Un processus $X(t, \omega)$ est à accroissement indépendant si $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ $k \in \mathbb{N}$, les variables $X(t_k) - X(t_{k-1}), \dots, X(t_2) - X(t_1), X(t_1) - X(0)$ sont indépendantes.

Cela s'interprète par le fait que les états décrits par ce type de processus évoluent dans un univers où les variations passées n'influencent pas les variations futures.

c. Processus à accroissement stationnaires

Considérons à présent deux instants θ_1 et θ_2 , supposons $\theta_1 \leq \theta_2$ et notons F la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Le processus $X(t)$ est à accroissement stationnaire si la distribution associée à l'accroissement de la variable sur l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ ne dépend que de la durée écoulée $(\theta_2 - \theta_1)$. En terme d'équation on écrit :

$$(1.3) \quad F(\varepsilon, \theta_1, \theta_2) = P\{X(\theta_2) - X(\theta_1) < \varepsilon\} = F^*(\varepsilon, \theta_2 - \theta_1)$$

Pour avoir plus de détail sur les processus stochastiques, voir [6]

Nous prenons comme exemple de processus stochastique à accroissement indépendant et stationnaire le processus Brownien qui est un outil mathématique important de la théorie des probabilités. Dans le paragraphe ci-après, nous donnons une concise présentation sur ce processus.

1.2. Mouvement Brownien

1. Origine du mouvement brownien

En 1827, le botaniste R. Brown a découvert au microscope le mouvement irrégulier de petites particules de pollen en suspension dans l'eau. Il a également observé que de petites particules minérales peuvent être soumises à des mouvements erratiques de ce type, comme si elles étaient des objets vivants, ce qui exclut d'attribuer à une "force vitale" ce mouvement incessant et désordonné. C'est A. Einstein qui, en 1905, a donné la première explication physique claire de ce phénomène. Des vérifications expérimentales directes ont été effectuées en 1908 par J. Perrin.

Les phénomènes de fluctuations tels que ceux mis en évidence dans le mouvement brownien sont universellement répandus. Par exemple, le mouvement thermique des électrons dans les conducteurs donne lieu à des fluctuations des courants électriques, fluctuations qui constituent le bruit thermique, étudié en 1928 par J.B. Johnson et H. Nyquist.

De manière générale, toutes les quantités observées expérimentalement ou variables macroscopiques, sont accompagnées de fluctuations dues au mouvement thermique des degrés de liberté microscopiques de la matière. Dans la plupart des cas, les fluctuations des variables macroscopiques sont extrêmement petites par rapport à leurs valeurs moyennes et peuvent être négligées. Cependant, puisqu'elles reflètent les mouvements à l'échelle microscopique dans le système considéré, leur analyse est importante pour l'étude de celui-ci.

En finance, les grandeurs comme le prix d'une action cotée en bourse fluctuent de façon analogue au mouvement brownien, sous l'effet cumulé des achats et ventes réalisées sur le marché par de nombreux opérateurs.

2. Passage à une description en temps continu

Le mouvement brownien a joué un grand rôle historique en mathématiques : c'est en effet pour représenter la position d'une particule brownienne qu'un processus stochastique a été construit, pour la première fois. Clairement, pour pouvoir associer à un phénomène physique un processus aléatoire, il est nécessaire de passer de la description en temps discret imposée par l'expérience à une description en temps continu. Supposons par exemple que l'on observe au microscope une particule brownienne pendant un intervalle de temps $0 \leq t \leq T$, et que l'on enregistre en fonction du temps la projection de sa position sur un axe x . Répétant N fois les observations au cours du temps, on obtient N valeurs de la coordonnée de la particule, $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$.

La valeur $x(t)$ de la coordonnée de la particule brownienne au temps t est une réalisation d'une variable aléatoire et chacune des séries observées $x(t_j)$ est un échantillon d'un ensemble statistique. Si l'on pouvait effectuer une observation continue, on obtiendrait une fonction aléatoire du temps ou processus stochastique $X(t)$ avec t comme paramètre continu. En pratique, on effectue les observations à des temps discrets $t_1 < t_2 < \dots < t_N$, obtenant ainsi un ensemble de N nombres, $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$. La description mathématique par un processus en temps continu se fait en prenant N très grand et des intervalles entre les temps d'observation de plus en plus petits.

3. Définition d'un mouvement Brownien

Le processus $X(t)$, $t \in [0, T]$ est dit un mouvement Brownien si $X(t)$ satisfait aux conditions :

- i. $X(0) = 0$. Cette condition exprime que l'on impose à la perturbation de ne pas agir aléatoirement à l'origine des temps.
- ii. $\forall t \in [0, T]$, la distribution de $X(t)$ est normale. (le choix de normalité est une conséquence du théorème central limite).
- iii. l'espérance de $X(t)$ est nulle $\forall t \in [0, T]$ (en moyenne l'erreur par rapport au modèle déterministe est nulle).
- iv. le processus $X(t)$ est à accroissement indépendant et stationnaire.

Si le processus $X(t)$ est de variance égale au temps alors le processus $X(t)$ est appelé processus de Wiener ou mouvement Brownien standard (MBS), noté $W(t)$ ou $B(t)$, qui satisfait :

$$(2.1) \quad E(W(t)) = 0 \quad \text{et} \quad E(W^2(t)) = t \quad . \quad [4]$$

4. Processus de Wiener et bruit blanc

En pratique et en particulier en économie, la brusque hausse ou baisse d'un paramètre quelconque décrivant ainsi des perturbations inattendues est modélisé au moyen d'un bruit blanc qui est en relation avec le processus de Wiener. En effet, on ne peut jamais calculer la valeur $U_t(\omega)$ d'un bruit blanc $U(t)$ mais par contre, il est possible de le rencontrer comme intégrant sous la forme : $\int_s^t A(\alpha)U_\alpha d\alpha$.

$U_\alpha d\alpha$ est remplacé formellement par la différentielle stochastique d'un processus à accroissement indépendants et stationnaire dW_α dont la mesure positive associée est la mesure de Lebesgue et l'intégrale devient "une intégrale stochastique de Wiener" [13], que nous

présenterons dans la section 3: (2.2) $\int_s^t A(\alpha)U_\alpha d\alpha = \int_s^t A(\alpha)dW_\alpha$

5. Propriétés d'un mouvement brownien

Le processus Brownien possède des propriétés très importantes qu'on peut trouver dans beaucoup de phénomènes réels.

- a. Nous supposons dans la suite que les processus de Wiener sont continus car si nous considérons les processus prévisibles (la connaissance du passé permet la description du présent) qui sont des processus continus à gauche ou contrairement, les processus optionnels qui sont continus à droite, le support mathématique sera infiniment complexe.
- b. La variance d'un processus de Wiener croît proportionnellement au temps. En effet, le processus $X(t)$ étant à accroissement indépendant (la covariance est nulle) et à accroissement stationnaire, on a alors :

$$\begin{aligned} Var[X(t+s)] &= Var[X(t) + (X(t+s) - X(t))] \\ &= Var[X(t)] + Var[X(t+s) - X(t)] = Var[X(t)] + Var[X(s)] \end{aligned}$$

- c. Un processus de Wiener possède des trajectoires presque sûrement à variation non bornée. Presque toutes les trajectoires sont partout non différentiables. En effet, une description correspondante à certaines exigences indispensables ne pouvait se faire au moyen de l'intégrale ordinaire de fonctions classiques, généralement à variations bornées.

Pour cela, nous allons mettre en exergue les motivations mathématiques qui ont conduit à la création d'une nouvelle intégrale (intégrale stochastique) et donc l'abandon de l'intégral de Riemann.

6. Abandon de l'intégrale de Riemann

Considérons un modèle mathématique devant décrire l'état $X(t)$ d'un système au cours du temps. Supposons qu'à tout instant, les altérations soient fonction d'influences prévisibles et d'autres aléatoires. Mathématiquement, cette hypothèse conduit à l'équation différentielle :

$$(2.3) \quad dX(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dt$$

où $a(x,t)$ décrit les fluctuations prévisibles et $b(x,t)$ les fluctuations aléatoires.

On suppose l'état du système connu à l'instant initial $t = 0$. On pose $X(0) = x_0$.

Proposition

Si les perturbations aléatoires non prévisibles sont décrites au moyen des équations différentielles ordinaires qui respectent des conditions réalistes alors elles sont de variance nulle et donc déterministes.

Preuve

Soit, le processus à variation cumulé : $u(x,t) = \int_0^t b(x,s)ds$, où le processus $b(x,t)$ satisfait aux équations suivantes :

- i. $b(x,t)$ indépendante de $b(x,s)$ pour tout $t \neq s$
- ii. $b(x,t)$ est de carré intégrable.
- iii. $E[b(x,t)] = 0$.
- iv. $E[b^2(x,t)] \leq k$

Le processus u existe toujours car il vérifie ii et de la condition iii et de la propriété de linéarité de l'intégrale, on montre que $E[u(x,t)] = \int_0^t E[b(x,s)]ds = 0$

Pour le calcul de la variance, il faut passer par la définition de l'intégrale de Riemann. On a :

$$Var[u(x,t)] = E[u^2(x,t)] = E\left[\int_0^t b(x,s)ds\right]^2 = \lim_{v \rightarrow 0} E\left[\sum_{i=1}^n b(x,t_i^*) \cdot (t_{i+1} - t_i)\right]^2$$

Où v est la norme de subdivision ($v = \max(t_{i+1} - t_i)$)
 t_i^* est un point intermédiaire de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

En développant le carré, on obtient :

$$Var[u(x,t)] = \lim_{v \rightarrow 0} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b(x,t_i^*) b(x,t_j^*) \cdot (t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)\right]$$

De l'hypothèse i. $E[b(x,t_i^*) \cdot b(x,t_j^*)] = 0 \quad \forall i \neq j$ et la variance devient donc:

$$Var[u(x,t)] = \lim_{v \rightarrow 0} E\left[\sum_{i=1}^n b^2(x,t_i^*) \cdot (t_{i+1} - t_i)^2\right] = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n E[b^2(x,t_i^*)] \cdot (t_{i+1} - t_i)^2\right]$$

Comme $E[b^2(x,t_i^*, \omega)]$ est bornée (Hypothèse iv), on a

$Var[u(t)] \leq k \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i)^2 \right]$, où k est un majorant pour les variances de b .

En choisissant une subdivision en n des intervalles de longueurs égales à (t/n) , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n (t/n)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} [n \cdot t^2 / n^2] = 0$$

Ce qui montre que l'intégrale de Riemann se révèle inutilisable.

Il est donc indispensable de se tourner vers une nouvelle description mathématique qui rendra possible la description d'un univers aléatoire.

7. Simulation d'une trajectoire du processus de Wiener

On peut approcher un processus de Wiener standard W_t sur un intervalle de temps fini à une chaîne de Markov, en l'occurrence une marche aléatoire [13]. Considérons une succession de n pas de longueur Δt , fonction de la finesse du graphisme désiré, effectuée aléatoirement et indépendamment tantôt vers la gauche et tantôt vers la droite.

La variable position après n pas qu'on veut étudier peut être vue comme la somme de n

variables aléatoires indépendantes : $W_{n\Delta t} = \sum_{k=1}^n (W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t}) = \sum_{k=1}^n U_k$, $U_k \approx N(0, \Delta t)$

On déduit que $W_{n\Delta t}$ est une promenade aléatoire : $S_n = U_1 + \dots + U_n$

$$\Rightarrow S_n = S_{n-1} + U_n \quad (\text{Formule récurrente})$$

Donc pour simuler la trajectoire du processus Brownien sur l'intervalle $[T_0, T]$, il suffit de

simuler une variable normale de moyenne nulle et de variance $\Delta t = \frac{T - T_0}{n}$ et les points de la

trajectoire de la chaîne sont ensuite reliés par des droites affines.

Algorithme 1.2.1 :

1. Paramètres : T_0, T

2. Simulation:

Etape1: Simulation d'une paire de variables aléatoires gaussiennes centrées et réduites $(G1, G2)$ en utilisant la méthode polaire de Marsaglia.

Procédure GaussMarsaq :

- a. **Répéter** $V1 \leftarrow 2 * \text{Random}-1$; $V2 \leftarrow 2 * \text{Random}-1$; $W \leftarrow (V1)^2 + (V2)^2$
 $\{ \text{Random} : \text{est un nombre aléatoire uniforme sur } [0, 1] \text{ généré par le programme Delphi} \}$
Jusqu'au $((W \leq 1) \text{ et } (W > 0))$; $\{ \text{Ln}(0) \text{ n'existe pas.} \}$
- b. $G1 \leftarrow V1 * \text{Sqrt}(-2 * \text{Ln}(W)/W)$; $G2 \leftarrow V2 * \text{Sqrt}(-2 * \text{Ln}(W)/W)$;

Etape2: Calcul de la taille de pas de temps minimum pour une meilleure résolution sur écran
 $\Delta t \leftarrow (T - T_0) / \text{Nbpt}$

Etape3 : Génération des données

- a. $G2 \leftarrow 0$; $Wt \leftarrow 0$; $Tk \leftarrow T_0 - \Delta t$; $k \leftarrow -1$

b. Répéter

- $k \leftarrow k+1$; $Tk \leftarrow Tk + \Delta$ {temps}; $X[k] \leftarrow TK$; {Valeurs de l'abscisse des X }
- Si $k \bmod 2 = 1$ alors $GaussMarsag(G1, G2)$
 $\{k \bmod 2 \text{ est le reste de la division de } k \text{ sur } 2\}$
- Sinon $G1 \leftarrow G2$
- $Wt \leftarrow Wt + G1 * \sqrt{\Delta}$; { valeur de la trajectoire du processus de Wiener }
- $Y[k] \leftarrow Wt$; {Valeurs de l'abscisse des Y }

Jusqu'au $k \leftarrow nbpt$

(npt dépend des caractéristiques de la carte graphique de l'ordinateur, il est supposé égal à 512).

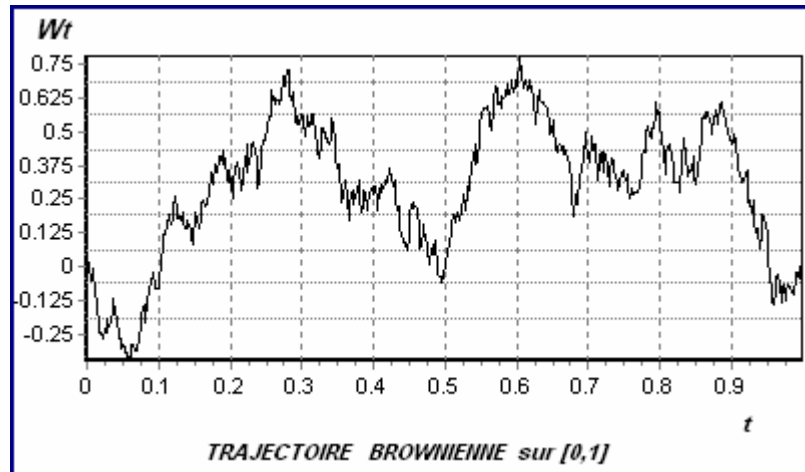
3. Résultat de simulation :

Figure 1.2 : Simulation d'une trajectoire Brownienne sur [0,1]

En conclusion, le mouvement brownien permet de modéliser d'une manière assez convaincante des phénomènes qui n'ont pas une description déterministe et ce en conservant une attitude réaliste. Cette modélisation est traduite par l'utilisation d'un outil puissant comme les équations différentielles stochastiques que nous allons présenter dans la section qui suit.

1.3. Introduction aux Equations différentielles stochastiques [1], [2], [5], [7], [8]

Les équations différentielles stochastiques (EDS) est un outil mathématique conçu dans le but de modéliser de nombreux phénomènes pratiques dans différents domaines. L'inclusion des effets aléatoires dans ces équations conduit à deux catégories distinctes d'équations dont la solution est un processus aléatoire possédant une trajectoire différentiable ou non différentiable, respectivement, ce qui nécessite différentes méthodes d'analyse. La première classe d'équations survient quand l'équation différentielle ordinaire possède des coefficients aléatoires, une valeur initiale aléatoire ou imposée par un processus stochastique assez régulier. Les équations de ce type sont appelées « Equations différentielles aléatoires » et se résolvent trajectoire par trajectoire comme dans les équations différentielles ordinaires (cas déterministe). Les chemins aléatoires des solutions et qui sont des processus sont donc des fonctions différentiables.

Quant à la deuxième classe, les perturbations introduites dans les équations différentielles stochastiques sont des processus aléatoires irréguliers qui représentent un bruit blanc gaussien et sont appelées EDS de type Itô et c'est ce type d'équations que seront considérées dans cette étude. Dans le but de donner un sens à ces équations il est nécessaire de faire un rappel sur la notion d'intégrale stochastique. Le calcul stochastique de ITÔ a permis d'étendre la notion de différentiation aux processus stochastiques.

1. Introduction à l'intégration stochastique

Lorsque nous avons présenté les propriétés élémentaires du processus de Wiener; la construction intuitive que nous avons exposée était fondée sur les marches aléatoires particulières dont les accroissements prenaient deux valeurs seulement avec une espérance nulle et une variance proportionnelle à la durée séparant deux dates. Toutefois, les paramètres d'espérance et de variance par unité de temps sont constants dans le cas du mouvement brownien. Ceci constitue une restriction importante lorsque l'on cherche par exemple à modéliser la dynamique des taux d'intérêt dans laquelle il semble raisonnable, au vu des constatations empiriques, d'introduire une force de rappel induisant une espérance de variation négative quand les taux sont élevés et une espérance de variation positive quand ils sont faibles. De la même façon, pour ce qui concerne la variance par unité de temps, il est difficile de la supposer indépendante du niveau des taux. En particulier, lorsque les taux sont très faibles, on s'attend à observer une variance plus faible que quand ces taux sont très élevés. La définition d'un processus d'Itô suppose l'existence de fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ qui dépendent à la fois du niveau atteint par le processus considéré et de la date considérée. Il s'agit donc de bons candidats pour modéliser les dynamiques des variables financières comme les prix, les rentabilités, les taux d'intérêt et les taux de change. Il est toutefois important de noter que le mouvement brownien général est un cas particulier de processus d'Itô.

Dans cette section, nous présentons comment est construit l'intégrale stochastique et le lemme d'Itô, encore appelé théorème fondamental du calcul stochastique.

Pour cela, nous considérons un phénomène pour lequel nous pouvons décrire son évolution au moyen des équations de type :

$$(3.1) \quad dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t).\varepsilon_t dt$$

où dX_t est la variation du phénomène X sur $[t, t + \Delta t]$ et $a(X, t)dt$ est une différentielle classique et $b(t, X_t).\varepsilon_t dt$ est un terme perturbateur à définir (terme de diffusion).

Les ε_t sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites (ε_t est un bruit blanc).

L'équation différentielle (3.1) peut être exprimée en forme intégrale:

$$(3.2) \quad X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) \varepsilon_s ds$$

Lorsque $a=0$ et $b=1$, ε_t n'est autre qu'une dérivation formelle du processus de Wiener $W(t)$ qu'on notera W_t . En effet, dans ce cas particulier on retrouve un processus aléatoire de loi gaussienne, de moyenne nulle et de variance $|t-t_0|$ (car ε_t suit la loi normale centrée et réduite) qui est une particularité du processus de Wiener. Par conséquent (3.2) s'écrit :

$$(3.3) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s$$

Le problème dans cette équation est qu'il n'est pas possible de définir une différentielle trajectoire par trajectoire de $W(t)$ au sens classique de l'analyse car le mouvement Brownien n'admet pas de dérivée. En effet, un processus est dérivable en moyenne quadratique lorsque

l'on peut trouver $W'(t)$ tel que : $E \left[\frac{W(t+h) - W(t)}{h} - W'(t) \right]^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Or $E[W(t+h) - W(t)]^2 = E[W(h) - W(0)]^2 = E[W(h)]^2 = h$

$$E \left[\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right]^2 = \frac{1}{h^2} \cdot h = \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty$$

D'où la non dérivabilité en moyenne quadratique du processus $W(t)$ et donc il est impossible d'interpréter l'expression (3.3) sans introduire la notion d'intégrale stochastique.

2. Intégrale stochastique de fonctions en escaliers

Considérons l'intégrale d'une fonction aléatoire f sur un intervalle de temps $[0,1]$ que nous noterons $I(f)$ où $I(f) = \int_0^1 f(s) dW_s$. [8]

Nous limitons la construction de l'intégrale aux fonctions en escaliers et pour lesquelles les définitions ci-dessous ont un sens.

Définition

Soit f est une fonction de $[\alpha, \beta] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$. $f(t) \in L^2[\alpha, \beta]$ si et seulement si :

- f est adapté à la filtration $\{F_t\}$.

- $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(t) dt < 1$ avec une probabilité 1.

Cette définition signifie que nous limitons l'univers à celui des fonctions ayant un sens probabiliste et pour lesquelles le calcul des paramètres probabilistes usuels est possible.

Définition

La fonction f étant une fonction en escaliers. On peut définir f sur $[\alpha, \beta]$ en découpant cette intervalle de la façon classique: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ tel que $f(t) = f_i$, $t \in [t_i, t_{i+1}[$

Nous signalons que les f_i sont des variables aléatoires (deux réalisations successives du processus donneront des valeurs différentes). Par contre, les instants t_i sont déterministes.

Définition

On appelle intégrale stochastique d'une fonction en escaliers l'expression

$$(3.4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) [W(t_{k+1}) - W(t_k)] \quad \text{où } f \text{ est mesurable}$$

Remarque

Lorsque $f(t) = W(t) = W_t$, l'intégrale d'ITÔ aura la particularité suivante

$$\int_0^t W_s dW(s) = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t \quad \text{avec une probabilité 1}$$

3. Propriétés d'une intégrale stochastique

a. La moyenne d'une intégrale stochastique est toujours nulle :

$$(3.5) \quad E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) \right] = 0.$$

b. La variance d'une intégrale stochastique se calcule au moyen d'une intégrale ordinaire

$$(3.6) \quad E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) \right]^2 = E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f^2(t) dt \right]$$

Nous démontrons par la suite cette dernière propriété puisque la première est immédiate, étant donné la définition d'une intégrale stochastique à partir de laquelle nous obtenons :

$$E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) \right]^2 \right] = E \left[\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) [W(t_{k+1}) - W(t_k)] \right]^2$$

Le processus $W(t)$ étant à accroissement indépendant, les doubles produits sont d'espérance

$$\text{nulle. On obtient : } E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) \right]^2 \right] = E \left[\sum_{k=1}^{n-1} f^2(t_k) \cdot [W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 \right]$$

Lorsque $f(t)$ est indépendante du mouvement Brownien standard W_t , l'espérance du produit est égale au produit des espérances, et par conséquent

$$\begin{aligned} E \left[\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) \right]^2 \right] &= \sum_{k=1}^{n-1} E[f^2(t_k)] E[W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} E[f^2(t_k)] \cdot [t_{k+1} - t_k] = E \left[\int_{\alpha}^{\beta} f^2(t) dt \right] \quad (\text{Intégrale de Riemann}) \end{aligned}$$

4. Intégrale stochastique de fonctions appartenant à L^2

Si la fonction $f(t, \omega)$ est non en escaliers, on peut trouver pour toute fonction appartenant à L^2 une suite de fonctions en escaliers $f^n(t, \omega)$ qui converge dans L^2 vers $f(t, \omega)$:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} [f^n(t) - f(t)]^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right)$$

Définition

On définit l'intégrale stochastique de $f \in L^2$ par :

$$(3.7) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f^n(t) dW(t)$$

Le calcul de la moyenne et de la variance de cette intégrale est similaire à celui d'une intégrale stochastique dans le cas d'une fonction en escaliers.

Remarque

On peut montrer que pour toute fonction continûment différentiable $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$(3.8) \quad \int_0^T f(t) dW(t) = f(T)W(T) - \int_0^T f'(t) \cdot W(t) dt$$

Considérons les fonctions en escaliers définies pour tout $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$ pour $j=0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dW(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f^n(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^{n-1} f^n(t_j^n) \cdot [W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)] \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f^n(T)W(T) - f^n(0)W(0) - \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n) \cdot [f^n(t_{j+1}^n) - f^n(t_j^n)] \right] \\ &= f(T)W(T) - \int_0^T W(t) df(t) \text{ (convergence en moyenne quadratique)} \end{aligned}$$

Ce résultat reste toujours valide si la fonction f est aléatoire à condition qu'elle soit continûment différentiable, F_t -mesurable et ayant des incréments indépendants.

5. Différentielle stochastique

Parallèlement à l'intégrale stochastique, on peut introduire un processus stochastique qui permet la définition formelle de la différentielle stochastique avec laquelle on peut modéliser les

variations instantanées aléatoires, soit :

$$Y(t) = \int_{\alpha}^t f(s) dW(s)$$

Définition

On définit la différentielle stochastique $dF(t) = f(t)dW(t)$, lorsque l'on peut écrire :

$$(3.9) \quad \int_0^t f(s) dW(s) = F(t)$$

Etant donné la nature du processus de Wiener qui est un processus à variation non bornée, l'intégrale stochastique n'obéit pas aux règles de calcul différentiel classique et donc il est nécessaire d'introduire le calcul d'Itô.

1.4. Calcul d'Itô

Le calcul d'Itô est basé sur une formule dit « Formule d'Itô ». Cette formule sera présentée dans le cas unidimensionnel et multidimensionnel. Elle permet de différencier une fonction deux fois continûment différentiables comme on va le voir par la suite.

1. Formule d'ITÔ dans le cas unidimensionnel

Considérons un processus $X(t)$ (X est un processus stochastique et non une variable déterministe) vérifiant :

$$(4.1) \quad dX(t) = e(t)dt + f(t)dW(t) ; X_0 = x_0$$

Par définition de la différentielle stochastique, $X(t)$ peut s'écrire :

$$(4.2) \quad X(t) = X(0) + \int_0^t e(s)ds + \int_0^t f(s)dW(s)$$

La différentielle stochastique permet aussi la différentiation de fonctions de processus, soit $U(t, X_t) = Y_t$ grâce à la formule d'ITÔ.

Théorème

Soit $Y_t = U(t, X_t)$ un processus stochastique où $U : [0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ est une fonction deux fois continûment dérivable et soient U'_x, U'_t, U''_{xx} ses dérivées partielles.

Le processus X_t satisfait l'équation :

$$(4.3) \quad X_t - X_s = \int_s^t e(u)du + \int_s^t f(u)dW_u(u) . \text{ Alors}$$

$$(4.4) \quad Y_t - Y_s = \int_s^t \left(U'_t(u, X_u) + e(u).U'_x(u, X_u) + \frac{1}{2}f^2(u).U''_{xx}(u, X_u) \right) du + \int_s^t f(u).U'_x(u, X_u)dW_u(u)$$

Avec une probabilité 1 pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

L'équation (4.4) peut être mise sous la forme différentielle :

$$dY(t, X(t)) = \left[U'_t(t, X_t) + e(t).U'_x(t, X_t) + \frac{1}{2}f_t^2.U''_{xx}(t, X_t) \right] dt + f_t.U'_x(t, X_t)dW_t(t)$$

Pour la démonstration de cette formule, voir [10].

Remarque

Dans la théorie classique, la différentielle totale de la fonction $Y_t = U(t, X_t)$ est :

$$\begin{aligned} dY(t) &= U'_x(t, X_t)dx + U'_t(t, X_t)dt \quad \text{or} \quad dX_t = e_t dt + f_t dW_t \\ \Rightarrow dY(t) &= (U'_t(t, X_t) + e_t \cdot U'_x(t, X_t))dt + f_t \cdot U'_x(t, X_t) dW_t. \end{aligned}$$

En comparant cette dernière expression à celle d'Itô, on déduit qu'il y'a un terme supplémentaire dit « terme correcteur » égal à $\frac{1}{2}U''_{xx} \cdot f^2 \cdot dt$. Ce terme permet de calculer l'écart type du mouvement brownien qui est de l'ordre de la racine carré du temps. Pour obtenir une variation de l'ordre du temps, il faut passer aux termes du 2^{ème} ordre.

2. Formule de ITÔ dans le cas multidimensionnel

Considérons le processus de Wiener de dimension m , $W = \{W_t, t \geq 0\}$, à accroissement indépendant et mesurable pour la σ -algèbre $\{F_t, t \geq 0\}$. Autrement dit, $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m)$ où les $W^j (j = 1, \dots, m)$, sont des processus de Wiener réels mutuellement indépendants et F_t -mesurable. Cependant, chaque composante W_t^j pour $0 \leq s \leq t$ et $j = 1, \dots, m$ est F_t -mesurable avec :

- $E(W_t^j / F_0) = 0, E(W_t^j - W_s^j / F_s) = 0$ p.s,
- $E((W_t^i - W_s^i) \cdot (W_t^j - W_s^j) / F_s) = (t-s)\delta_{ij}$ p.s où δ_{ij} est le symbole delta de Kronecker.

Soit e le vecteur de fonctions de dimension d , $e: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ où chaque composante e^k vérifie $\sqrt{|e^k|} \in L_T^2$ pour $k = 1, \dots, d$ et soit F (de dimension $d \times m$), la matrice de fonctions $F: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ avec $F^{ij} \in L_T^2$ pour $i = 1, \dots, d$ et $j = 1, \dots, m$

Notons par e_t et F_t le vecteur et la matrice des variables aléatoires prise par e et F , respectivement, à l'instant t . Le vecteur X_t , de dimension d , admet la différentielle stochastique :

$$(4.5) \quad dX_t = e_t dt + F_t dW_t$$

Ceci implique l'expression de l'intégrale stochastique :

$$(4.6) \quad X_t - X_s = \int_s^t e_u du + \int_s^t F_u dW_u \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$$

Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ on a :

$$(4.7) \quad X_t^k - X_s^k = \int_s^t e_u^k du + \sum_{j=1}^m \left(\int_s^t F_u^{k,j} dW_u^j \right) \text{ p.s,}$$

Soit $U : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^d$ et

soient $\frac{dU}{dt}, \frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}$ pour $i, k = 1, \dots, d$, ses dérivées partielles.

On définit le processus stochastique $\{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$: $Y_t = U(t, X_t) = U(t, X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d)$ où X_t satisfait l'équation différentielle (4.6).

La différentielle stochastique de Y_t est donnée par la formule d'ITÔ:

$$(4.8) \quad dY_t = \left\{ \frac{dU}{dt} + e_t^T \nabla U + \frac{1}{2} \text{tr} \left(F_t F_t^T \nabla [\nabla U] \right) \right\} dt + \nabla U^T F_t dW_t$$

où ∇ est l'opérateur gradient, T l'opérateur transposé, tr la trace de la matrice, ∇U le vecteur des dérivées partielles du premier ordre de U et $\nabla[\nabla U]$ la matrice des dérivées partielles du deuxième ordre de U (matrice Hessienne). Le développement de chacun des termes de (4.8) donne :

$$e_t^T \nabla U = \sum_{k=1}^d e_t^k \frac{\partial U}{\partial x_k} ; \quad \text{tr} \left(F_t F_t^T \nabla [\nabla U] \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^d F_t^{i,j} F_t^{k,j} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} ; \quad \nabla U^T F_t dW_t = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d F_t^{i,j} \frac{\partial U}{\partial x_i} dW_t^j$$

Remarque

Lorsque la transformation U est définie sur $\mathbb{R}^k$, $U : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$, on applique la formule d'ITÔ (4.4) pour chacune des composantes $Y_t^l, l = 1, \dots, k$ du vecteur $Y_t = U(t, X_t)$

3. Produit de deux processus stochastiques

Soient X_t^1 et X_t^2 deux processus qui admettent les différentielles stochastiques :

$$(4.9) \quad dX_t^i = e_t^i dt + f_t^i dW_t^i \text{ pour } i = 1, 2$$

Soit $U(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$. La différentielle stochastique du produit $Y_t = X_t^1 X_t^2$ se repose sur l'indépendance et la dépendance des deux processus de Wiener W_t^1 et W_t^2 . Dans le premier cas la différentielle (4.9) peut être mise sous la forme vectorielle :

$$d \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_t^1 \\ e_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{bmatrix} f_t^1 & 0 \\ 0 & f_t^2 \end{bmatrix} d \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \end{pmatrix}$$

et grâce à la formule d'ITÔ la différentielle du produit sera :

$$dY_t = (e_t^1 X_t^2 + e_t^2 X_t^1) dt + f_t^1 X_t^2 dW_t^1 + f_t^2 X_t^1 dW_t^2 \text{ ou plus explicitement}$$

$$(4.10) \quad dY_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1$$

Lorsque $W_t^1 = W_t^2 = W_t$, la différentielle du vecteur $X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix}$ est : $d \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_t^1 \\ e_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} f_t^1 \\ f_t^2 \end{pmatrix} dW_t$.

Par conséquent, la formule d'ITÔ donne :

$$dY_t = (e_t^1 X_t^2 + e_t^2 X_t^1 + f_t^1 f_t^2) dt + (f_t^1 X_t^2 + f_t^2 X_t^1) dW_t \Rightarrow (4.11) dY_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + f_t^1 f_t^2 dt \\ = X_t^1 (e_t^2 dt + f_t^2 dW_t) + X_t^2 (e_t^1 dt + f_t^1 dW_t) + f_t^1 f_t^2 dt$$

Le terme $f_t^1 f_t^2 dt$ est le terme correcteur qui fait la différence par rapport au calcul différentiel ordinaire.

Cas particulier

Lorsque $X_t^1 = W_t^1$ et $X_t^2 = W_t^2$ ($e_t^i = 0$ et $f_t^i = 1$ ($i = 1, 2$)) où W_t^1 et W_t^2 sont deux processus de Wiener indépendants, la différentielle stochastique du produit sera

$$dW_t^1 W_t^2 = W_t^1 dW_t^2 + W_t^2 dW_t^1.$$

Ce résultat est obtenu par application directe de (4.10).

Alors que si $W_t^1 = W_t^2 = W_t$, (4.11) implique : $d(W_t^2) = 1dt + 2W_t dW_t$

La formule d'ITÔ ne suffit pas pour résoudre tous les problèmes réels. Elle permet parfois de les mettre en équation, rarement d'en trouver la solution explicite. La résolution des équations différentielles stochastiques est bien souvent impossible. Cependant, on est amené à utiliser des méthodes numériques afin de déterminer des solutions approchées. Pour cela, il faut à priori savoir si l'EDS possède une solution (propriété d'existence de la solution) et vérifiant de préférence la propriété d'unicité, sachant bien sûr sa valeur initiale.

Il y'a lieu de noter que sous certaines hypothèses que nous exposerons dans l'étude sur l'existence et l'unicité des solutions des EDS, que la solution d'une équation différentielle stochastique est un processus de diffusion auquel nous donnerons un petit aperçu dans la prochaine section.

1.5. Processus de Markov et processus de diffusion

1. Processus de Markov

Un processus de Markov est un processus aléatoire où son évolution future ne dépend pas de son passé, mais uniquement de l'état présent. Lorsque le processus est discret, on parle des chaînes de Markov. Autrement dit, soit une séquence quelconque d'instants $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t_{n+1}$ auxquels un processus prend les valeurs arbitraires $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}$. Ce processus est Markovien si la probabilité conditionnelle au temps t_{n+1} vérifie :

$$(5.1) \quad P[X(t_{n+1}) \in B / X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n] = P[X(t_{n+1}) \in B / X(t_n) = x_n]$$

Où B est un sous ensemble de $\beta_{\mathfrak{R}}$ ($\beta_{\mathfrak{R}}$ est une σ -algèbre).

Par extension, on parle de processus de Markov du $n^{\text{ième}}$ ordre lorsque l'état futur du processus dépend des n états précédents. On déduit rapidement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} - E[X_{n+1}/X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] &= E[X_{n+1}/X_n = x_n] \\ - p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}] &= p(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n) \cdot \dots \cdot p(X_2 = x_2/X_1 = x_1) \cdot p(X_1 = x_1) \end{aligned}$$

Cette dernière relation montre que la statistique du processus est déterminée par les probabilités de transition et la densité de probabilité initiale.

Généralement, les probabilités de transition sont données par :

$$(5.2) \quad P(s, x; t, B) = P(X(t) \in B / X(s) = x) \quad \text{où } s < t \quad B \in \beta_{\mathfrak{R}}$$

Pour des valeurs fixes (s, x) et une valeur non fixe t , $P(s, x; t, \cdot)$ est une fonction de probabilité (mesure) dans la σ -algèbre. Sous ces conditions $p(s, x; t, \cdot)$ est dit densité de transition avec

$$P(s, x; t, B) = \int_B p(s, x; t, y) dy$$

On dit que le processus de Markov à temps continu est homogène si la densité de transition $p(s, x; t, y)$ dépend seulement de la différence $(t-s)$ et non pas des instants s et t . Par simplification, on peut écrire : $p(s, x; t, y) = p(0, x; t-s, y) = p(x; t-s, y)$

$$P(s, x; t, B) = P(0, x; t-s, B) = P(x; t-s, B), \quad B \in \beta_{\mathfrak{R}}$$

Cependant, les densités de transition ne sont toutefois pas arbitraires. Elles doivent satisfaire l'équation de Chapman Kolmogorov [3], défini comme suit :

$$(5.3) \quad p(s, x; t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x; \tau, z) \cdot p(\tau, z; t, y) dz \quad \text{pour tout } s \leq \tau \leq t \text{ et } x, y \in \mathfrak{R}$$

Pour les probabilités de transition, ces équations prennent la forme

$$(5.4) \quad P(s, x; t, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau, z; t, B) \cdot P(s, x; \tau, dz), \quad B \in \beta_{\mathfrak{R}}$$

L'intégrale ci-dessus est une intégrale de Riemann Stieltjes.

Cas particulier (processus de Wiener)

Le processus de Wiener standard est un cas particulier des processus de Markov homogène où la densité de transition est donné par :

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (t-s)} \cdot \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right)$$

Nous rappelons que le processus de Wiener est un processus gaussien à accroissements indépendants vérifiant :

- $W(0)=0$ avec probabilité 1.
- $E(W(t))=0$
- $Var(W(t)-W(s))=t-s$ pour tout $0 \leq s \leq t$

La densité de transition du processus de Wiener standard satisfait l'équation de Chapman Kolmogorov (5.3). Dès lors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x; \tau, z) \cdot p(\tau, z; t, y) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{(\tau-s) \cdot (t-\tau)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(z-x)^2}{(\tau-s)} + \frac{(y-z)^2}{(t-\tau)} \right)\right) dz$$

En posant $\mu = \left(z - \frac{x(t-\tau) + y(\tau-s)}{t-s} \right) \cdot \sqrt{\frac{t-s}{(\tau-s) \cdot (t-\tau)}}$, On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x; \tau, z) \cdot p(\tau, z; t, y) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (t-s)} \cdot \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \mu^2\right) d\mu = p(s, x; t, y) \cdot 1$$

La densité de transition du processus de Wiener standard est évidemment une fonction de lissage (Smooth Function) pour $t > s$ et par conséquent les dérivées partielles de cette densité satisferont les équations différentielles partielles :

$$(5.5) \quad \frac{dp}{dt} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 p}{dy^2} = 0 \quad (s, x) \text{ fixé} \quad (\text{Avancé})$$

$$(5.6) \quad \frac{dp}{ds} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \quad (t, y) \text{ fixé} \quad (\text{Retardé})$$

2. Processus de diffusion

a. Processus de diffusion unidimensionnel

Un processus de Markov est dit un processus de diffusion si pour des fonctions bien définies a et b les trois limites ci-dessous existent pour tout $\varepsilon \geq 0, s \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$(5.7) \quad \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \varepsilon} p(s, x; t, y) dy = 0$$

$$(5.8) \quad \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) \cdot p(s, x; t, y) dy = a(s, x)$$

$$(5.9) \quad \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x)^2 \cdot p(s, x; t, y) dy = b^2(s, x)$$

La condition (5.7) empêche le processus de diffusion d'avoir des sauts instantanés.

La quantité $a(s, x)$ est appelée coefficient de changement ou de tendance (drift) du processus de diffusion et $b(s, x)$ son coefficient de diffusion à l'instant s et à l'état x .

L'expression (5.8) implique que $a(s, x)$ peut s'écrire :

$$(5.10) \quad a(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot E[X(t) - X(s) | X(s) = x]$$

$a(s, x)$ est le taux de changement instantané dans la moyenne du processus sachant $X(s) = x$

On définit le taux de changement instantané des variations du processus sachant $X(s) = x$ par :

$$(5.11) \quad b^2(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot E[(X(t) - X(s))^2 | X(s) = x]$$

Remarque

Etant donnée que les densités de transition ne doivent pas nécessairement exister, les expressions (5.7), (5.8) et (5.9) seront exprimés en terme de probabilités de transition $P(s, x; t, y)$.

b. Processus de diffusion vectoriel

Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ le vecteur des processus stochastiques définis sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ où X_t est σ^d -mesurable pour tout $t \geq 0$ (σ^d est la σ -algèbre des sous ensembles de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$).

Les probabilités de transition du processus X sont définies par

$$P(s, x; t, A) = P(X_t \in A / X_s = x) \quad \forall 0 \leq s < t, x \in \mathbb{R}^d \text{ et } A \in \sigma^d.$$

Le processus aléatoire X est un processus de diffusion si pour tout $\varepsilon > 0, s \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, les conditions ci-dessous sont remplies :

$$(5.12) \quad \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \varepsilon} P(s, x; t, y) dy = 0$$

$$(5.13) \quad \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) \cdot P(s, x; t, y) dy = a(s, x)$$

$$(5.14) \quad \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) \cdot (y-x)^T P(s, x; t, y) dy = B(s, x) B^T(s, x)$$

Où a est le vecteur dérive de dimension d et $D = B^T B$ la matrice des coefficients de diffusion ($d \times d$) qui est symétrique et définie positive. Le terme général de la matrice de diffusion D est

défini par :

$$d^{i,j}(s, x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot E \left[(X_t^i - X_s^i) (X_t^j - X_s^j) / X_s = x \right] \quad \forall i \neq j$$

En outre, si le vecteur dérive a et la matrice de diffusion D sont des fonctions régulières alors les probabilités de transition $P(s, x; t, A)$ ont des fonctions de densités $p(s, x; t, y)$ qui satisfont l'équation de Kolmogorov avancée :

$$(5.15) \quad \frac{dp}{dt} + \sum_{i=1}^d \frac{d}{dy_i} \{a^i(t, y) \cdot p(s, x; t, y)\} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d \frac{d^2}{dy_i dy_j} \{d^{i,j}(t, y) \cdot p(s, x; t, y)\} = 0 \quad (s, x) \text{ fixé}$$

Avec la condition initiale $\lim_{t \rightarrow s} p(s, x; t, y) = p(0, x; t-s, y) = \delta(x-y)$ où δ est la fonction Delta -

Dirac définie sur $\mathbb{R}^d$ par : $\delta(s) = 0 \quad \forall s \neq 0$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \delta(s) ds = f(0)$ pour toute fonction continue f à l'instant $s=0$. La densité p est donc une solution fondamentale de l'équation différentielle parabolique (5.15).

On définit l'opérateur elliptique L par: $L\mu(s,x) = \sum_{i=1}^d a^i(s,x) \frac{d\mu}{dx_i}(s,x) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^d d^{i,j}(s,x) \frac{d^2}{dx_i dx_j} \mu(s,x)$

L'équation de Kolmogorov retardé exprimée en fonction de cet opérateur est donnée par :

$$\frac{d\mu}{ds} + L\mu = 0, \text{ vérifiant } \mu(s,x) = p(s,x;t,y) \text{ pour } t \text{ et } y \text{ fixés.}$$

Cette équation admet aussi la solution : $\mu(s,x) = E(f(X_t) | X_s = x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot p(s,x;t,y) dy,$

appelée formule de Kolmogorov, ce qui correspond à la condition $\lim_{t \rightarrow s} \mu(s,x) = f(x)$ pour toute fonction continue $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $x \in \wp \subset \mathbb{R}^d$, où $\wp$ est un domaine borné, l'équation: $\frac{d\mu}{ds} + L\mu = -1$ avec $\mu(s,x) = 0 \forall x \in \wp$,

satisfait l'équation : $\mu(s,x) = E(\tau_{s,x}) - s$

où $\tau_{s,x} = \inf\{t \geq s: X_t(\omega) \notin \wp \text{ avec } X_s(\omega) = x\}$ est l'instant du premier passage du processus au domaine $\wp$ sachant l'état initial (s,x) .

Cas particulier (processus de Wiener)

Le processus de Wiener standard est un processus de diffusion avec $a(s,x) = 0$ et $b(s,x) = 1$.

$$a(s,x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot E[W_t - W_s | W_s = x] = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot E[W_t - W_s] = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot 0 = 0$$

$$b(s,x) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot E[(W_t - W_s)^2 | W_s = x] = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot E[(W_t - W_s)^2] = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \cdot (t-s) = 1$$

Lorsque a et b sont des fonctions lissées (Smooth functions), la densité de transition $p(s,x;t,y)$ d'un processus Brownien standard satisfait les équations différentielles partielles déjà établis en (5.5) et (5.6.). Il s'agit des équations dit « Kolmogorov Forward Equation » qui caractérisent l'évolution future du processus sachant l'état final (t,y) et celles qui expriment son évolution passé, sachant l'état initial (s,x) , sont appelées « Kolmogorov Backward Equation ». Ces équations sont données par :

$$(5.16) \quad \frac{dp}{dt} + \frac{d}{dy} [a(t,y) \cdot p] - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dy^2} [b^2(t,y) \cdot p] = 0 \quad (s,x) \text{ fixé}$$

$$(5.17) \quad \frac{dp}{ds} + a(s,x) \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2} \cdot b^2(s,x) \frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \quad (t,y) \text{ fixé}$$

Les deux équations (5.16) et (5.17) sont connues par Fokker –Planck Equation.

c. Continuité d'un processus de diffusion

La relation (5.7) permet au chemin aléatoire du processus de diffusion d'avoir un bon comportement. Effectivement, il y'a des fonctions continues du temps bien qu'elles ne soient pas nécessairement différentiables comme on va le montrer par la suite dans le cas d'un processus de Wiener.

On va définir la continuité du processus stochastique $X(t)$ à t de différentes manières :

I. Continuité avec probabilité 1 (Continuité presque sûre)

$$(5.18) \quad \lim_{s \rightarrow t} P(\{\omega \in \Omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)| = 0\}) = 1$$

II. Continuité en moyenne quadratique

$$(5.19) \quad E(X(t)^2) < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow t} E(|X(s) - X(t)|^2) = 0$$

III. Continuité en probabilité (Continuité stochastique)

$$(5.20) \quad \lim_{s \rightarrow t} P(\{\omega \in \Omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

IV. Continuité en distribution

$$(5.21) \quad \lim_{s \rightarrow t} F_s(x) = F_t(x)$$

Il existe une relation entre ces continuités, on a **I** et **II** $\Rightarrow$ **III** $\Rightarrow$ **IV** et en plus **III** peut être mis

sous la forme d'une métrique : (5.22) $\lim_{s \rightarrow t} E\left(\frac{|X(s) - X(t)|}{1 + |X(s) - X(t)|}\right) = 0$.

Cette dernière limite provient du fait que

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)| \geq \varepsilon\}) = P(\{\omega \in \Omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)|^2 \geq \varepsilon^2\})$$

or d'après l'inégalité de Chebyshev : $P(\{\omega : |X(\omega)|^2 \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \cdot E(X^2)$ $\forall a > 0$, on trouve

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)|^2 \geq \varepsilon^2\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot E(|X(s) - X(t)|^2)$$

Le concept de continuité d'un processus de diffusion entraîne la continuité du chemin aléatoire.

Il existe un critère découvert par Kolmogorov impliquant la continuité de la trajectoire du processus stochastique à temps continus $X = \{X(t), t \in T\}$, pour des constantes positives

$$\alpha, \beta, c \text{ et } h \text{ tel que : } (5.23) \quad E(|X(t) - X(s)|^\alpha) \leq c |t - s|^{1+\beta}$$

pour tout $s, t \in T$ et $|t - s| \leq h$. On peut montrer que le processus de Wiener standard vérifie cette égalité avec $\alpha=4, \beta=1$ et $c=3$

Soit le processus de Wiener standard $W = \{W(t), t \geq 0\}$. L'accroissement du processus de Wiener standard $W_t - W_s \approx N(0, |t - s|)$. On admet le résultat suivant : pour $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ et $n=0, 1, 2, \dots$,

$$E((X - \mu)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k + 1 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1) \sigma^{2k} & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Dans notre cas $\sigma^2 = |t - s|$ et $k = 2 \Rightarrow E(|W_t - W_s|^4) = 1 \cdot 3 \cdot \sigma^4 = 3|t - s|^2$ et par conséquent, le processus de Wiener standard est presque sûrement à trajectoires continues.

Lorsque le processus de Wiener est de dimension d , $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^d)$, alors

$$E(|W_t - W_s|^4) = (d^2 + 2d) \cdot |t - s|^2.$$

CHAPITRE 2.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ITÔ ET DE STRATONOVICH ET LEUR RELATION

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES DE TYPE ITÔ ET DE STRATONOVICH ET LEUR RELATION

2.1. Equations différentielles de type linéaire

1. Résolution des EDS de type linéaire

La méthode de résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS) nécessite l'introduction de la solution correspondante à l'équation différentielle homogène. Nous considérons ici les équations de type scalaire ayant la forme générale

$$(1.1) \quad dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t$$

Où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des fonctions de temps, mesurables au sens de Lebesgue et bornées sur $[0, T]$.

On définit le processus X_t pour tout $t_0 \leq t < T$, où X_{t_0} est F_{t_0} mesurable, ainsi que le processus de Wiener W_t (W_t est F_t mesurable).

Lorsque $a_2(t) \equiv 0$ et $b_2(t) \equiv 0$, l'expression (1.1) se réduit à l'équation différentielle stochastique homogène et linéaire :

$$(1.2) \quad dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dW_t$$

Quand $b_1(t) \equiv 0$, le bruit apparaît comme un terme additif et l'équation (1.1) devient :

$$(1.3) \quad dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + b_2(t)dW_t$$

Dans ce cas là l'EDS est dit linéaire dans un sens limité (Linear in the narrow sense) et l'équation homogène obtenue à partir de (1.3) est une équation différentielle ordinaire

$$(1.4) \quad \frac{dX_t}{dt} = a_1(t)X_t \quad \text{où la solution fondamentale est donnée par : } \phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s)ds\right).$$

En appliquant la formule de Itô (I.4.4) à la transformation $U(t, x) = \phi_{t,t_0}^{-1}x$ on obtient :

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1}X_t) = \left[\frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt}X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))\phi_{t,t_0}^{-1} \right]dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}dW_t.$$

$$\text{Or } \frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} = -\phi_{t,t_0}^{-1} \cdot a_1(t) \Rightarrow d\phi_{t,t_0}^{-1}X_t = (a_2(t) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1})dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}dW_t$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme intégrale :

$$\phi_{t,t_0}^{-1}X_t = \phi_{t_0,t_0}^{-1}X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) \cdot \phi_{s,t_0}^{-1})ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1}dW_s$$

Sous la condition $\phi_{t_0, t_0} = 1$, la solution de (1.3) est

$$(1.5) \quad X_t = \phi_{t, t_0} \cdot \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(a_2(s) \cdot \phi_{s, t_0}^{-1} \right) ds + \int_{t_0}^t b_2(s) \phi_{s, t_0}^{-1} dW_s \right) \text{ où}$$

$$(1.6) \quad \phi_{t, t_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t a_1(s) ds \right)$$

Le processus X_t (1.5) est une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes car

$\int_{t_0}^t f(s) dW_s$ est gaussienne pour toute fonction déterministe f ; en plus, X_{t_0} est supposé

déterministe (constante) ou une variable gaussienne. Dès lors, X_t est un processus gaussien où la moyenne et le moment d'ordre deux satisfont les équations différentielles ordinaires. Toute fois, dans le cas général la solution de (1.1) n'est pas toujours gaussienne.

Proposition

La solution fondamentale de (1.2) est donné par :

$$(1.7) \quad \phi_{t, t_0} = \phi_{t_0, t_0} \cdot \exp \left[\int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \right]$$

où ϕ_{t_0, t_0} est généralement égale 1.

Preuve

La solution fondamentale (1.6) d'une équation linéaire au sens limité satisfait l'équation différentielle ordinaire $d \ln \phi_{t, t_0} = a_1(t) dt$. En utilisant cette définition, la formule d'Itô (I.4.4)

appliqué à la transformée de la solution fondamentale $\ln \phi_{t, t_0}$ de (1.2) sera:

$$\begin{aligned} d(\ln \phi_{t, t_0}) &= \left(a_1(t) \phi_{t, t_0} \phi_{t, t_0}^{-1} - \frac{1}{2} b_1^2(t) \phi_{t, t_0}^2 \phi_{t, t_0}^{-2} \right) dt + b_1(t) \phi_{t, t_0} \phi_{t, t_0}^{-1} dW_t \\ &= \left(a_1(t) - \frac{1}{2} b_1^2(t) \right) dt + b_1(t) dW_t \Rightarrow \ln \phi_{t, t_0} = \int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \end{aligned}$$

Lorsque $b_1(t) \equiv 0$, (1.7) se réduit à (1.6.).

Proposition

Le processus $\phi_{t, t_0}^{-1} X_t$ qui est fonction de la solution X_t de l'équation générale (1.1) possède une forme explicite de l'intégrale stochastique de la forme :

$$\phi_{t, t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s, t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s, t_0}^{-1}] dW_s$$

Similairement, on applique la formule d'Itô à ϕ_{t,t_0}^{-1} et on obtient :

$$(1.8) \quad d\phi_{t,t_0}^{-1} = \left(-a_1(t) + b_1^2(t)\right) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t) \phi_{t,t_0}^{-1} dW_t$$

Ce qui implique que la solution de l'équation générale (1.1) est donné par :

$$(1.9) \quad X_t = \phi_{t,t_0} \cdot \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1}] dW_s \right]$$

où ϕ_{t,t_0} est donné par l'expression (1.8).

Preuve

Les deux termes ϕ_{t,t_0}^{-1} et X_t possèdent des différentielles stochastiques incluant le même processus de Wiener W_t , ce qui implique que la différentielle de leur produit (Voir I.4.11) :

$$\begin{aligned} U(X_t^1, X_t^2) &= X_t^1 \cdot X_t^2 \quad \text{avec} \quad X_t^1 = \phi_{t,t_0}^{-1} \text{ et } X_t^2 = X_t \quad \text{donne} \quad : \\ d\phi_{t,t_0}^{-1} X_t &= \phi_{t,t_0}^{-1} \left([a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t \right) + X_t \left(\left(-a_1(t) + b_1^2(t)\right) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t) \phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \right) \\ &\quad - b_1(t) \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} \cdot [b_1(t)X_t + b_2(t)]dt = [a_2(t) - b_1(t) \cdot b_2(t)] \cdot \phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t) \phi_{t,t_0}^{-1} dW_t \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle de temps $[t_0, t]$ et en supposant que $\phi_{t_0,t_0} = 1$, on obtient :

$$\phi_{t,t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1}] dW_s.$$

Corollaire

Dans le cas d'une équation différentielle stochastique de type $dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$ on applique l'équation (1.9) avec $a_1(t) \equiv a$, $b_1(t) \equiv b$ et $a_2(t) \equiv b_2(t) \equiv 0$ et la solution est donné dans ce cas

$$\text{par:} \quad X_t = X_0 \cdot \exp \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b W_t \right]$$

Ce corollaire est important dans la partie simulation lorsqu'on compare cette solution exacte du processus de diffusion à celle approchée grâce aux méthodes numériques conçues pour la résolution des EDS.

2. Solutions générales de quelques EDS de type linéaire

Nous exposons dans cette partie la solution générale de diverses équations différentielles stochastiques linéaires que le bruit, présenté par le mouvement brownien, soit additif ou multiplicatif.

Nous rappelons que la solution générale d'une équation linéaire de la forme :

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t$$

$$\text{est donné par l'expression } X_t = \phi_{t,t_0} \cdot \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t [a_2(s) - b_1(s) \cdot b_2(s)] \cdot \phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t [b_2(s) \phi_{s,t_0}^{-1}] dW_s \right]$$

$$\text{où la solution fondamentale est } \phi_{t,t_0} = \exp \left[\int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \right]$$

$$1- a_1(t) \equiv -\alpha, b_2(t) \equiv \sigma, a_2(t) \equiv b_1(t) \equiv 0.$$

$$(1.10) \quad X_t = e^{-\alpha t} \left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right)$$

$$2- a_1(t) \equiv a, a_2(t) \equiv b, b_1(t) \equiv 0, b_2(t) \equiv c.$$

$$(1.11) \quad X_t = e^{at} \left(X_0 + \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + c \int_0^t e^{-as} dW_s \right)$$

$$3- a_1(t) \equiv a(t), a_2(t) \equiv b(t), b_1(t) \equiv c(t), b_2(t) \equiv 0$$

$$(1.12) \quad X_t = \phi_{t,t_0} \cdot \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t \phi_{s,t_0}^{-1} b(s) ds + \int_{t_0}^t c(s) \phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right] \quad \text{où } \phi_{t,t_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right)$$

$$4- a_1(t) \equiv a, b_1(t) \equiv b, a_2(t) \equiv b_2(t) \equiv 0$$

$$(1.13) \quad X_t = X_0 \exp \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \cdot t + b W_t \right]$$

$$5- a_1(t) \equiv a, a_2(t) \equiv c, b_1(t) \equiv b, b_2(t) \equiv d$$

$$(1.14) \quad X_t = \phi_t \left[X_0 + (c - bd) \int_0^t \phi_s^{-1} ds + d \int_0^t \phi_s^{-1} dW_s \right] \quad \text{où } \phi_t = \exp \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b W_t \right]$$

$$6- a_1(t) \equiv a(t), b_1(t) \equiv b(t), a_2(t) \equiv b_2(t) \equiv 0$$

$$(1.15) \quad X_t = X_0 \exp \left[\int_0^t \left(a(s) - \frac{1}{2} b^2(s) \right) ds + \int_0^t b(s) dW_s \right]$$

3. Exemples d'applications d'une EDS linéaire

a. Processus de capitalisation

Nous présentons dans cet exemple un problème rencontré dans le domaine des finances. Il s'agit de l'évolution d'un capital au cours du temps où son accroissement est supposé proportionnel au capital lui-même ainsi qu'au temps écoulé. Cela signifie que plus le capital est important ou a un emplacement plus long, plus il est rémunéré davantage. Cette description peut être mise en équation comme suit :

$$(*) \quad \Delta C = r(t) \times C(t) \times \Delta t$$

$C(t)$: Le capital à l'instant t

$r(t)$: Le taux d'intérêt.

$C(0)$: La valeur du capital à l'instant 0 (valeur actuelle)

ΔC : L'accroissement du capital entre t et $t + \Delta t$

La modélisation de cette évolution à court terme nous permet d'écrire

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = r(t) \times C(t) = \frac{d}{dt} C(t) \Rightarrow \frac{dC}{C} = r(t) dt$$

La solution de cette équation différentielle est donné par: $C(t) = C(0) \cdot \exp\left\{\int_0^t r(s) ds\right\}$.

Généralement, si on n'a pas d'informations sur les fluctuations possibles dans le futur, alors le taux de proportionnalité est constant ($r(t) = i$) et la valeur du capital à l'instant t sera :

$$C(t) = C(0) \cdot e^{it}$$

où i traduit le taux d'accroissement du capital par unité de temps.

Considérons à présent la fonction flux d'intérêt cumulé $I(t) = i \cdot t$, l'équation d'évolution du capital sera donc $dC(t) = C(t) dI(t)$ (cas déterministe).

Supposons que $I(t)$ subit des perturbations aléatoires ayant la forme d'un mouvement Brownien :

$$dI(t) = i \cdot dt + \sigma \cdot dW(t) .$$

Dés lors, l'évolution d'un capital régit suivant l'équation différentielle stochastique

$$dC(t) = C(t) \cdot i \cdot dt + C(t) \cdot \sigma \cdot dW(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

A noter que cette équation est utilisée dans la formule de Black et Scholes [12] pour le calcul des options et dont la solution est donnée par l'expression (1.13), avec $a = i$ et $b = \sigma$.

La solution représente le processus de capitalisation qui est donné par :

$$C(t) = C(0) \cdot \exp\left\{\left(i - \frac{1}{2} \sigma^2\right) \cdot t + \sigma W_t\right\}$$

b. Equation de Langevin

Suite aux indications d'Einstein sur le mouvement brownien durant la première décennie de ce siècle, des tentatives ont été faites par Langevin et autres pour décrire le comportement dynamique d'une particule dans un fluide soumis à l'agitation thermique via les équations différentielles. Langevin a établi pour l'accélération de la particule l'équation différentielle :

$$\frac{dX_t}{dt} = -aX_t + b\varepsilon_t, \quad a \text{ et } b > 0.$$

Cette expression n'est autre que la somme de la force frictionné retardé qui dépend de la vitesse de la particule et de la force de la molécule exprimée par le bruit blanc ε_t ainsi que de l'intensité b qui est indépendante de la vitesse.

L'équation de Langevin décrite plus haut peut se mettre sous la forme stochastique $dX_t = -aX_t dt + b dW_t$. Cette dernière est un cas particulier de (1.10) avec $a_1(t) \equiv -a, b_2(t) \equiv b$ et $a_2(t) \equiv b_1(t) \equiv 0$ et donc la solution générale représentant le

processus d'Einstein Uhlenbeck [13] est donnée par :
$$X_t = e^{-at} . X_0 + b e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

En appliquant l'expression (I.3.8) avec $f(t) = e^{at}$, l'intégrale stochastique d'Itô sera de la forme :

$$\int_0^t e^{as} dW_s = e^{at} W_t - a \int_0^t e^{as} W_s ds$$

a et b sont des paramètres inconnus à estimer.

Il existe diverses méthodes d'estimation des fonctions ou des paramètres inconnus qui interviennent dans une EDS, comme les méthodes paramétriques et non paramétriques. Notons que les méthodes paramétriques sont plus précises par rapport à la méthode des moments car elles se basent sur la méthode du maximum de vraisemblance (voir [14], [15] et [19]).

Le calcul du moment d'ordre un et deux du processus de diffusion X_t , que nous allons présenter dans la prochaine section, est un résultat utilisé pour l'estimation des paramètres inconnus.

4. Espérance et moment d'ordre deux d'un processus de diffusion

Dans certains cas on ne peut trouver la forme explicite du processus de diffusion X_t ou bien l'objectif de l'étude des EDS n'est pas de simuler la trajectoire du processus mais seulement sa loi, alors on est amené à chercher l'espérance et la variance du processus de diffusion au moyen des EDS.

Proposition

L'espérance et le moment d'ordre deux du processus X_t , ayant la forme différentielle stochastique (1.1) satisfont les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$(1.16) \quad \frac{dm(t)}{dt} = a_1(t)m(t) + a_2(t) \quad \text{où} \quad m(t) = E(X_t)$$

$$(1.17) \quad \frac{dP(t)}{dt} = (2a_1(t) + b_1^2(t))P(t) + 2m(t)(a_2(t) + b_1(t)b_2(t)) + b_2^2(t) \quad \text{où} \quad P(t) = E(X_t^2)$$

Preuve

L'équation (1.16) est obtenue en introduisant l'espérance à la forme intégrale de (1.1) et en utilisant la propriété (I.3.5) d'une intégrale stochastique (la moyenne d'une intégrale stochastique est nulle).

L'équation (1.17) résulte de l'application de la formule d'Itô (I.4.4) afin d'obtenir une équation différentielle stochastique du processus X_t^2 .

$$\begin{aligned} d(X_t^2) &= \left[(a_1 X_t + a_2) \times 2X_t + \frac{1}{2} (b_1 X_t + b_2)^2 \cdot 2 \right] dt + (b_1 X_t + b_2) \cdot 2X_t dW_t \\ &= (2a_1 X_t^2 + 2a_2 X_t + b_1^2 X_t^2 + 2b_1 b_2 X_t + b_2^2) dt + (2b_1 X_t^2 + 2b_2 X_t) dW_t \end{aligned}$$

En passant à l'intégrale, puis en introduisant l'espérance à l'expression ci-dessus, le dernier terme s'annule car l'espérance d'une intégrale stochastique est nulle (propriété).

Comme $P'(t)dt = \frac{dP(t)}{dt}dt = \frac{dE(X_t^2)}{dt}dt = E(dX_t^2)$, alors

$$\begin{aligned} E(dX_t^2) &= [2a_1 E(X_t^2) + 2a_2 E(X_t) + b_1^2 E(X_t^2) + 2b_1 b_2 E(X_t) + b_2^2] dt + 0 \\ \Rightarrow P'(t) &= (2a_1(t) + b_1^2(t))P(t) + 2(a_2(t) + b_1(t)b_2(t))m(t) + b_2^2(t) \quad \text{où} \quad m(t) = E(X_t) \end{aligned}$$

Lorsque l'équation différentielle stochastique est linéaire au sens limité (1.3), l'équation (1.16) reste la même, par contre l'équation (1.17) devient

$$\frac{dp(t)}{dt} = 2a_1(t)P(t) + 2a_2(t)m(t) + b_2^2(t)$$

Exemple

Dans l'exemple pratique de Langevin, on peut estimer les paramètres a et b en calculant la moyenne et le moment d'ordre deux de X_t , donnés par :

$$m(t) = m(0)e^{-at} \quad \text{et} \quad P(t) = P(0)e^{-2at} + \frac{b^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Les deux expressions de $m(t)$ et $P(t)$ sont obtenues en résolvant les équations (1.16) et (1.17) dans ce cas particulier. En effet, $m'(t) = -am(t)$ et $P'(t) = -2aP(t) + b^2$ sont des équations différentielles ordinaires de premier ordre.

On rappelle que la solution générale d'une équation de la forme: $\frac{dx(t)}{dt} = \alpha \cdot x(t) + \beta(t)$ est donné par

$$x(t) = e^{\alpha t} \left(x_0 + \int_0^t e^{-\alpha s} \cdot \beta(s) ds \right) \text{ où } x_0 = x(0) \text{ et } \beta \text{ est une fonction continue en } t.$$

Lorsque $\beta(t) \equiv \beta$ (Indépendante de t), la solution est $x(t) = x_0 e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{\alpha t})$

5. Equations différentielles stochastiques vectorielles

Beaucoup d'applications sont modélisées par un système dynamique d'EDS. Considérons le processus de Wiener de dimension m , $W = \{W_t, t \geq 0\}$ où les composantes $W_t^1, W_t^1, \dots, W_t^m$ sont des processus de Wiener scalaires indépendants. Soit le vecteur drift de dimension d , $a: [t_0, T] \times \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}^d$ et la matrice de diffusion de dimension $d \times m$, $b: [t_0, T] \times \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}^{d \times m}$.

La forme générale d'une EDS linéaire de dimension d est

$$(1.18) \quad dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sum_{l=1}^m (B^l(t)X_t + b^l(t))dW_t^l$$

Pour tout $t \in [t_0, T] \rightarrow \mathcal{R}^d$, $A(t), B^1(t), B^2(t), \dots, B^m(t)$ sont des matrices de fonctions de dimension $d \times d$ et $a(t), b^1(t), b^2(t), \dots, b^m(t)$ sont des vecteurs de fonctions de dimension d . La solution de (1.18) a la forme :

$$(1.19) \quad X_t = \phi_{t, t_0} \cdot \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \phi_{s, t_0}^{-1} \left(a(s) - \sum_{l=1}^m B^l(s) \cdot b^l(s) \right) ds + \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^t \phi_{s, t_0}^{-1} b^l(s) dW_s^l \right)$$

ϕ_{t, t_0} est la solution fondamentale de dimension $d \times d$ qui satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$(1.20) \quad d\phi_{t, t_0} = A(t)\phi_{t, t_0} dt + \sum_{l=1}^m B^l(t) \cdot \phi_{t, t_0} dW_t^l, \quad \phi_{t_0, t_0} = I, \text{ I est la matrice identité.}$$

Malheureusement, on ne peut pas toujours trouver la solution explicite de l'équation (1.20). Cependant, si les matrices $A, B^1, B^2, \dots, B^m$ sont constantes (indépendantes de t) et commutatives, tel que $AB^l = B^l A$ et $B^l B^k = B^k B^l, \forall k, l = 1, 2, \dots, m$, on obtient alors l'expression explicite de la matrice de la solution fondamentale :

$$(1.21) \quad \phi_{t, t_0} = \exp \left\{ \left[A - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (B^l)^2 \right] \cdot (t - t_0) + \sum_{l=1}^m B^l (W_t^l - W_{t_0}^l) \right\}$$

Remarque

Dans un cas particulier où l'équation différentielle stochastique est de la forme :

$$(1.22) \quad dX_t = aX_t dt + b^1 X_t dW_t^1 + b^2 X_t dW_t^2, \text{ alors la solution générale est donnée par}$$

$$(1.23) \quad X_t = X_0 \exp \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \left((b^1)^2 + (b^2)^2 \right) \right) t + b^1 W_t^1 + b^2 W_t^2 \right\}$$

Il est possible de dériver les équations différentielles ordinaires vectorielles et matricielles pour obtenir le vecteur de dimension d , $m(t) = E(X_t)$ ainsi que la matrice des moments d'ordre deux, de dimension $d \times d$, $P(t) = E(X_t X_t^T)$. Comme $X_t X_t^T$ est une matrice symétrique, alors on a

$$(1.24) \quad \frac{dm}{dt} = A(t)m + a(t) \quad \text{et}$$

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & A(t)P + PA(t)^T + \sum_{l=1}^m B^l(t) \cdot P B^l(t)^T + a(t)m(t)^T + m(t)a(t)^T \\ & + \sum_{l=1}^m \left(B^l(t) \cdot m(t) b^l(t)^T + b^l(t)m(t)^T B^l(t) + b^l(t)b^l(t)^T \right) \end{aligned}$$

Avec les conditions initiales $m(t_0) = E(X_{t_0})$ et $P(t_0) = E(X_{t_0} X_{t_0}^T)$, respectivement.

Pour plus de détails sur la résolution des EDS linéaires et non linéaires, voir [2], [5] et [7].

2.2. Equations différentielles stochastiques réductibles

1. Résolution des équations différentielles stochastiques réductibles d'Itô

Certaines équations différentielles non linéaires de type

$$(2.1) \quad dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t$$

peuvent s'écrire sous la forme linéaire

$$(2.2) \quad dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t \quad \text{avec} \quad X_t = U(t, Y_t).$$

Si $\frac{dU}{dy}(t, y) \neq 0$, alors $y = V(t, x)$ est dit l'inverse local de $x = U(t, y)$ (Théorème d'inversion des fonctions) où $x = U(t, V(t, x))$ et $y = V(t, U(t, y))$.

Considérons le cas où $a_1(t) = b_1(t) = 0$, $a_2(t) = \alpha(t)$, $b_2(t) = \beta(t)$. La proposition ci après est une condition suffisante permettant la transformation de l'équation réductible (2.1) dans ce cas particulier.

Proposition

Soit la fonction $\gamma(t, y)$, définit par

$$(2.3) \quad \gamma(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \cdot \frac{db}{dt}(t, y) - b(t, y) \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} - \frac{1}{2} \frac{db}{dy}(t, y) \right)$$

Si $\frac{d\gamma}{dy}(t, y) = 0$ alors l'équation différentielle stochastique non linéaire (2.1) peut être transformée en équation différentielle stochastique explicitement intégrable de la forme :

$$(2.4) \quad dX_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t$$

et cela en effectuant la transformation $x = U(t, y)$ avec :

$$(2.5) \quad U(t, y) = c \cdot \exp \left(\int_0^t \gamma(s, y) ds \right) \cdot \left(\int_0^y \frac{1}{b(t, z)} dz \right) \quad \text{où } c \text{ est une constante arbitraire.}$$

Preuve

La solution Y_t de (2.1) est de la forme $Y_t = V(t, X_t)$ où X_t est donnée en (2.2). Il en résulte de la formule d'ITO (I.4.4) que la différentielle de la transformée U est

$$dU(t, y) = \left[\frac{dU}{dt}(t, y) + a(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{d^2U}{dy^2}(t, y) \right] dt + \left[b(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) \right] dW_t$$

Comme $U(t, Y_t) = X_t$, alors par identification à l'équation différentielle linéaire (2.4), on arrive aux égalités suivantes:

$$(2.6) \quad \frac{dU}{dt}(t, y) + a(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{d^2U}{dy^2}(t, y) = \alpha(t)$$

$$(2.7) \quad b(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) = \beta(t)$$

En dérivant par rapport à y , les deux égalités ci-dessus deviennent:

$$\frac{d^2U}{dt dy}(t, y) = -\frac{d}{dy} \left(a(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{d^2U}{dy^2}(t, y) \right) \text{ et } \frac{d}{dy} \left(b(t, y) \frac{dU}{dy}(t, y) \right) = 0.$$

En plus, lorsqu'on dérive (2.7) par rapport à t , on obtient :

$$b(t, y) \frac{d^2U}{dt dy}(t, y) + \frac{db}{dt}(t, y) \cdot \frac{dU}{dy}(t, y) = \beta'(t)$$

En supposant que $b(t, y) \neq 0$ et en remplaçant $\frac{d^2U}{dt dy}(t, y)$ dans l'expression de $\beta'(t)$, à savoir

que $\frac{dU}{dy}(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \cdot \beta(t)$, on obtient l'expression ci-dessous:

$$\beta'(t) = \beta(t) \cdot b(t, y) \left[\left(\frac{1}{b^2(t, y)} \right) \cdot \frac{db}{dt}(t, y) - \frac{d}{dy} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2b}{dy^2}(t, y) \right] = \beta(t) \cdot \gamma(t, y)$$

Proposition

L'équation différentielle stochastique non linéaire homogène :

$$(2.8) \quad dY_t = a(Y_t)dt + b(Y_t)dW_t$$

peut être transformé en équation linéaire ayant la forme

$$(2.9) \quad dX_t = (a_1 X_t + a_2)dt + (b_1 X_t + b_2)dW_t.$$

Ce changement de la forme de l'équation initiale (2.8) se fait en effectuant la transformation $X_t = U(Y_t)$, définit par

$$(2.10) \quad U(Y_t) = \begin{cases} C \exp\left(b_1 \int_{y_0}^{y_t} \frac{1}{b(z)} dz\right) & \text{Si } b_1 \neq 0 \\ b_2 \int_{y_0}^{y_t} \frac{1}{b(z)} dz + C & \text{Si } b_1 = 0 \end{cases}$$

Preuve

Comme U est une fonction indépendante du temps, alors $\frac{dU(y)}{dt} = 0$ et dans ce cas les deux

égalités (2.6) et (2.7) auront la forme : (2.11) $a(y) \frac{dU}{dy}(y) + \frac{1}{2} b^2(y) \frac{d^2 U}{dy^2}(y) = a_1 U(y) + a_2$

$$(2.12) \quad b(y) \frac{dU}{dy}(y) = b_1 U(y) + b_2$$

En supposant que $b(y) \neq 0$ et $b_1 \neq 0$, il s'ensuit de (2.12) que

$$(2.13) \quad U(y) = C \exp\left(b_1 \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz\right) - \frac{b_2}{b_1} \quad \text{où } C \text{ est une constante arbitraire.}$$

Maintenant, posons $B(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz$, on a $\frac{dU}{dy}(y) = b_1 \frac{dB}{dy}(y) \cdot C \exp(b_1 B(y))$

$$\text{où } \frac{dB}{dy}(y) = \frac{d}{dy} \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz = \frac{1}{b(y)}$$

On a : $\frac{d^2 U}{dy^2}(y) = b_1 \frac{d^2 B}{dy^2}(y) \cdot C \exp(b_1 B(y)) + b_1^2 \left(\frac{dB}{dy}(y)\right)^2 \cdot C \exp(b_1 B(y))$ où $\frac{d^2 B}{dy^2}(y) = -\frac{db(y)}{dy} / b^2(y)$

$$\Rightarrow a(y) \frac{dU}{dy}(y) = b_1 \frac{a(y)}{b(y)} V(y) \quad \text{et} \quad b^2(y) \frac{d^2 U}{dy^2}(y) = -b_1 \left(\frac{db(y)}{dy} - b_1\right) \cdot V(y)$$

$$\text{où } V(y) = C \exp(b_1 B(y))$$

L'expression (2.11) implique que $V(y) \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] = a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1}$

$$\text{Où } A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2} \frac{db(y)}{dy}$$

En dérivant à présent l'expression ci-dessus, on aura $\frac{d}{dy} \left(V(y) \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] \right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} V(y) \cdot \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] + b_1 \frac{d}{dy} A(y) \cdot V(y) = 0 \quad \text{où} \quad \frac{d}{dy} V(y) = \frac{b_1}{b(y)} \cdot C \exp(b_1 B(y))$$

$$\Rightarrow \frac{b_1}{b(y)} \cdot \exp(b_1 B(y)) \cdot \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2} b_1^2 - a_1 \right] + b_1 \frac{d}{dy} A(y) \cdot \exp(b_1 B(y)) = 0 \quad .$$

En multipliant cette dernière expression par $\frac{b(y)}{b_1} \cdot \exp(-b_1 B(y))$ et en dérivant encore une fois on

$$\text{obtient le résultat suivant :} \quad (2.14) \quad b_1 \frac{d}{dy} A(y) + \frac{d}{dy} \left(b(y) \frac{d}{dy} A(y) \right) = 0$$

Cette expression est vérifiée si $\frac{d}{dy} A(y) = 0$ ou $b_1 = - \frac{d}{dy} \left(b(y) \frac{d}{dy} A(y) \right) / \frac{d}{dy} A(y)$

Si $b_1 \neq 0$ la transformation adéquate U est donné par $U(y) = C \exp \left(b_1 \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz \right)$

$$\text{Sinon} \quad U(y) = b_2 \int_{y_0}^y \frac{1}{b(z)} dz + C$$

Exemple :

Soit l'EDS non linéaire : $dY_t = -\frac{1}{2} \exp(-2Y_t) dt + \exp(-Y_t) dW_t$

La solution générale de cette équation est donnée par : $Y_t = \ln(\exp(Y_0) + W_t)$ pour $t \in [0, T[$

où $T = T(Y_0(\omega)) = \text{Min}\{t \geq 0 : W_t(\omega) = -\exp(Y_0(\omega))\}$ est le temps d'arrêt de la trajectoire.

Dans ce cas particulier $a(y) = -\frac{1}{2} \exp(-2y)$ et $b(y) = -\frac{1}{2} \exp(y)$

En effet, comme l'expression (2.14) est vérifiée pour toute valeur de b_1 car $A(y) = 0$, alors on

peut choisir $b_1 = 0$ et $b_2 = 1$ et donc l'expression (2.12) implique : $b(y) \frac{dU}{dy}(y) = 1$

En remplaçant l'expression de $U(y)$ dans (2.11), a_1 et a_2 seront nuls ($a_1 = a_2 = 0$).

Dés lors, l'EDS non linéaire plus haut se réduit en EDS linéaire :

$$dX_t = dW_t \quad \text{avec} \quad X_t = U(Y_t) = \exp(Y_t)$$

Cette équation linéaire possède la solution $X_t = X_0 + W_t$ (voir 1.10) $\Rightarrow \exp(Y_t) = \exp(Y_0) + W_t$

et donc la solution de l'EDS non linéaire sera: $Y_t = \ln(\exp(Y_0) + W_t)$ pour $t \in [0, T[$

2. Résolution d'EDS réductibles de Stratonovich [1],[8]

Nous présentons dans cette partie un ensemble d'EDS bien particuliers que nous pouvons résoudre non pas au moyen de l'intégrale d'Itô mais par celui de Stratonovich. Ce choix n'est pas arbitraire mais il est préférable dans certaines applications, plus particulièrement en physique, de mettre l'équation différentielle stochastique ordinaire (EDS d'Itô) sous la forme différentielle :

$$(2.15) \quad dX_t = \underline{a}(t, X_t)dt + b(t, X_t) \circ dW_t.$$

Cette équation est appelée EDS de Stratonovich [1] qu'on peut écrire sous la forme intégrale

$$(2.16) \quad X_t = X_0 + \int_{t_0}^t \underline{a}(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) \circ dW_s \quad \text{avec}$$

$$(2.17) \quad \int_{t_0}^t b(s, X_s) \circ dW_s = \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b(s, X_s) \frac{db(s, X_s)}{dx} ds$$

L'intégrale stochastique (2.17) est dite de Stratonovich. Cette intégrale satisfait les règles de transformation usuelles du calcul classique des intégrales où son intégrand est évalué au centre de chaque partition de l'intervalle $[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$, comme on va le voir dans la définition ci-après.

Définition

Pour une fonction continue $h: [t_0, T] \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, de classe C^1 , on définit l'intégrale de Stratonovich pour $t_0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} |t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| = 0$ par :

$$(2.18) \quad \int_{t_0}^t h(s, X_s) \circ dW_s = \lim_{\delta^{(n)} \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N h\left(t_j^{(n)}, \frac{1}{2}(X_{t_j^{(n)}} + X_{t_{j+1}^{(n)}})\right) \cdot \{W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j+1}^{(n)}}\}$$

Si le processus de Wiener $W = \{W_t, t \geq 0\}$ est F_t -mesurable

La solution de l'équation différentielle stochastique de Stratonovich satisfait celle de Itô avec le même coefficient de diffusion $b(t, X_t)$, par contre le coefficient de changement (drift) $a(t, X_t)$ est

modifié par $\underline{a}(t, X_t)$ tel que : $(2.19) \quad a(t, x) = \underline{a}(t, x) + \frac{1}{2} b(t, x) \cdot b'(t, x)$

Par exemple l'EDS d'Itô : $dX_t = 2X_t dt + 2X_t dW_t$ est équivalente à l'EDS de Stratonovich :

$$dX_t = 2X_t \circ dW_t.$$

Ces deux équations possèdent la même solution donnée par :

$$X_t = X_{t_0} \exp(2(W_t - W_{t_0}))$$

Dans un cas particulier où le bruit est additif, les deux équations différentielles stochastiques (Itô et Stratonovich) possèdent le même coefficient de changement ($\underline{a} \equiv a$).

Lorsque l'EDS est de dimension d , elle peut être interprétée mathématiquement comme un vecteur d'équations intégrales stochastiques d'Itô.

Pour une valeur initiale $X_{t_0} \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$(2.20) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j, \quad \forall t \in [t_0, T], a \text{ et } b \in \mathbb{R}^d$$

L'EDS de stratonovich correspondante est donnée par :

$$(2.21) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \underline{a}(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) \circ dW_s^j, \quad \forall t \in [t_0, T], a \text{ et } b \in \mathbb{R}^d$$

Les processus qui satisfont les deux équations stochastiques (2.20) et (2.21) sont équivalents si le coefficient drift corrigé $\underline{a}(t, X_t)$ est de la forme :

$$(2.22) \quad \underline{a}(t, x) = a(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^m b^{j,k}(t, x) \cdot \frac{db^k}{dx_j}(t, x)$$

Donc, on peut convertir l'équation stochastique d'Itô en équation stochastique de Stratonovich et vice versa. Pour une transformation suffisamment continue, $U: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ de la solution de (2.21), le processus de dimension k , $Y_t = U(t, X_t)$ a une différentielle stochastique de stratonovich plus simple que celle d'Itô, donné par :

$$(2.23) \quad dY_t^p = \left(\frac{dU^p}{dt}(t, X_t) - \sum_{i=1}^d \underline{a}^i(t, X_t) \frac{dU^p}{dx_i}(t, X_t) \right) dt + \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^d b^{i,l}(t, X_t) \frac{dU^p}{dx_i}(t, X_t) \circ dW_t^l \quad \forall p=1, 2, \dots, k$$

Pour une EDS de Stratonovich de forme différentielle : $dX_t = \underline{a}(t, X_t) dt + b(t, X_t) \circ dW_t$, l'expression

$$(2.23) \text{ se réduit à : } dY_t = \frac{dU}{dt}(t, X_t) dt + \underline{a} \cdot \frac{dU}{dx}(t, X_t) \circ dX_t$$

3. Solutions générales de quelques EDS de type réductible

$$1. \quad (2.24) \quad dX_t = \frac{1}{2} b(X_t) \cdot b'(X_t) dt + b(X_t) dW_t$$

Cette EDS peut se mettre sous la forme d'une équation de Stratonovich: $dX_t = b(X_t) \circ dW_t$

Comme l'équation différentielle ordinaire $dh = \frac{dx}{db} = dw$ admet la solution $h(x) = w + c$ où

c est une valeur constante arbitraire, alors $h(X_t) = W_t + h(X_0)$ est la solution de l'EDS de

Stratonovich. C'est à dire que la solution générale de (2.24) est

$$(2.25) \quad X_t = h^{-1}\left(W_t + h(X_0)\right) \quad \text{où } h(x) = \int \frac{1}{b(s)} ds$$

Nous prenons comme exemple l'EDS $dX_t = 1 \cdot dt + 2\sqrt{X_t} dW_t$.

Cette équation est équivalente à $dX_t = 2\sqrt{X_t} \circ dW_t$ (EDS de stratonovich) avec

$h(x) = \sqrt{x}$ et donc sa fonction inverse est $h^{-1}(x) = x^2$. En remplaçant dans (2.25) on aura la solution générale : $X_t = (W_t + \sqrt{X_0})^2$.

$$2. \quad (2.26) \quad dX_t = \left(\alpha \cdot b(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) \cdot b'(X_t) \right) dt + b(X_t) dW_t$$

Dans ce cas là le coefficient « drift » modifié est $\underline{a}(x) = \alpha \cdot b(x)$ et l'EDS de Stratonovich est de la forme :

$$(2.27) \quad dX_t = \alpha \cdot b(X_t) dt + b(X_t) \circ dW_t.$$

Cette dernière équation est réductible en équation différentielle

$$(2.28) \quad dY_t = \alpha \cdot dt + dW_t \quad \text{où} \quad Y_t = h(X_t) \text{ et } h(x) = \int \frac{1}{b(s)} ds.$$

La solution générale est donné par : (2.29) $X_t = h^{-1}(\alpha t + W_t + h(X_0))$

En effet l'application de la formule d'Itô (I.4.4) au processus $h^{-1}(\alpha t + W_t + h(X_0))$ nous

donne: $dX_t = \left\{ \alpha \cdot (h^{-1})'(\alpha t + W_t + h(X_0)) + \frac{1}{2} (h^{-1})''(\alpha t + W_t + h(X_0)) \right\} dt + (h^{-1})'(\alpha t + W_t + h(X_0)) dW_t$.

Or $(h^{-1})'(w) = \frac{1}{h'(h^{-1}(w))} = \frac{1}{b(h^{-1}(w))} = \frac{1}{b(x)}$ et $(h^{-1})''(w) = -\frac{b'(h^{-1}(w))}{b^2(h^{-1}(w))} = -\frac{b'(x)}{b^2(x)}$ $\Rightarrow dX_t = \left\{ \alpha \cdot b(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) \cdot b'(X_t) \right\} dt + b(X_t) dW_t$

$$2. \quad (2.30) \quad dX_t = \left(\alpha \cdot b(X_t) \cdot h(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) \cdot b'(X_t) \right) dt + b(X_t) dW_t \quad \text{Où} \quad h(x) = \int \frac{1}{b(s)} ds$$

Cette EDS est réductible en équation $dX_t = -\alpha dt + dW_t$ qui est un cas particulier de l'équation de Langevin avec $b \equiv 1$ et cela en faisant le changement de variable $Y_t = h(X_t)$. La

solution générale est donc donnée par : (2.31) $X_t = h^{-1} \left(e^{\alpha t} h(X_0) + e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} dW_s \right)$

$$3. \quad (2.32) \quad dX_t = (aX_t^n + bX_t) dt + cX_t \cdot dW_t$$

Cette équation sera transformée en équation différentielle stochastique linéaire où le bruit est multiplicatif et cela en effectuant le changement $y = h(x) = x^{1-n}$. L'équation (2.32) admet la solution générale :

$$(2.33) \quad X_t = A_t \cdot \left(X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t A_s^{n-1} ds \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad \text{où} \quad A_s = \exp \left\{ \left(b - \frac{1}{2} c^2 \right) t + c W_t \right\}$$

$$4. \quad (2.34) \quad dX_t = (a \exp(cX_t) + b) dt + \sigma \cdot dW_t$$

En faisant le changement de variable $y = h(x) = \exp(-cx)$, la solution générale de (2.34)

sera : (2.35) $X_t = X_0 + bt + \sigma \cdot W_t - \frac{1}{c} \ln \left(1 - ac \int_0^t \exp(cX_0 + bcs + \sigma \cdot cW_s) ds \right)$

4. Exemple d'application d'une EDS réductible : Croissance de population

Le modèle déterministe le plus simple qui modélise la croissance d'une population est d'une forme exponentielle de type $x' = ax$ où a est le taux de croissance Malthusien.

Ce taux est une constante habituellement positive qui peut varier en signe et en grandeur en fonction du temps t permettant le traitement des variations saisonnières. La taille d'une population est exprimée principalement par sa densité. A noter que son taux de croissance dépend de cette variable (boucle de rétroaction, 'feedback') car la croissance de cette densité entraîne la non constance de a .

Les troubles de l'environnement des naissances et de morts des individus peuvent être modélisés en permettant au coefficient a de varier aléatoirement comme : $a + \sigma \cdot \varepsilon_t$ avec $E(\varepsilon_t) = 0$.

Si ε_t est un processus bruit blanc gaussien alors on obtient une équation différentielle stochastique linéaire d'Itô.

Les deux modèles déterministe et stochastique admettent un accroissement exponentielle non bornée et cela est inadmissible dans un environnement de ressources finis. En de telles circonstances, On introduit un nouveau paramètre dans l'équation de la dynamique de la population, notée K , représentant le nombre maximum d'individus que l'environnement peut supporter. Ce paramètre est appelé « Capacité de support K ».

La croissance de la population ralentit à mesure que la densité augmente et s'approche de K .

On obtient une courbe sigmoïde (courbe en forme de "S" incliné) de type logistique tel que :

Si x est petit par rapport à K : le taux de croissance > 0 ; la population augmente

Si $x = K$, taux de croissance = 0

Si $x > K$, taux de croissance < 0

Comme le paramètre K dépend des ressources disponibles dans l'environnement alors il peut varier avec le temps. On peut introduire cette représentation facilement dans un modèle déterministe en remplaçant le taux de croissance a par un facteur linéaire $a(K-x)$. On obtient ainsi l'équation linéaire du second degrés, appelée « Equation de Verhulst » qui est donnée par :

$$(2.36) \quad x' = \lambda x - x^2 \text{ avec } \lambda = aK$$

Le paramètre λ est randomisé en rajoutant le terme $\sigma \cdot \varepsilon_t$ et on obtient ainsi l'EDS :

$$(2.37) \quad dX_t = (\lambda X_t - X_t^2) dt + \sigma X_t dW_t$$

Cette EDS est un cas particulier de l'EDS réductible (2.32) avec $n=2$, $a=-1$, $b=\lambda$ et $c=\sigma$. donc

sa solution explicite est donnée par : (2.38) $X_t = \frac{X_0 \cdot A_t}{1 + X_0 \cdot \int_0^t A_s ds}$ avec $A_t = \exp \left\{ \left(\lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$

Dans la nature beaucoup d'espèces coexistent les uns avec les autres et sont donc affectés par leur présence ensemble d'une manière ou d'une autre. On distingue pour les associations biologiques entre des espèces trois types fondamentaux : compétition (concurrence), prédation et symbiose.

Ces exemples peuvent être incorporé dans des modèles dynamiques de population avec des termes qui se relient ensemble indépendamment des modèles d'espèces rares.

Les systèmes déterministes fréquemment étudiés pour modéliser les interactions des espèces multiples est le système de Volterra-Lotka , donné par

$$(2.39) \quad x'_i = x_i \left(a_i + \sum_{j=1}^d b_i^j \cdot x_j \right) \text{ pour } i=1, \dots, d. \quad d : \text{représente les différentes espèces.}$$

La randomisation du paramètre de croissance a_i en $a_i + \sigma^i \xi_t^i$ implique le système des EDS d'Itô où les processus de Wiener sont indépendants :

$$(2.40) \quad dX_t^i = X_t^i \cdot \left(a_i + \sum_{j=1}^d b_i^j \cdot X_t^j \right) \cdot dt + \sigma^i X_t^i dW_t^i \text{ pour } i=1, \dots, d$$

Généralement, on doit obtenir les processus bruit blanc de la forme :

$$\sum_{j=1}^d \sigma^{i,j} (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d) dW_t^j \text{ pour } i=1, 2, \dots, d \quad \text{si par exemple les paramètres d'accouplement sont}$$

aussi aléatoires. Les solutions explicites ne sont pas connues pour l'équation (2.40), alors elles doivent être résolues numériquement.

Dans un travail récemment publié (2003), le mathématicien HISAO **[18]** a démontré l'existence, l'unicité ainsi que la positivité de la solution d'une équation différentielle stochastique de Lotka-Volterra. Cette équation modélise l'évolution des populations de deux espèces liées par la relation proie-prédateur avec leur diffusion dans un territoire de Hilbert $(\mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3)$ et avec une perturbation stochastique. Cette perturbation qui est donnée moyennant un mouvement Brownien représente les variations aléatoires de conditions environnementales.

Dans beaucoup d'exemples pratiques, la solution exacte n'est pas explicitement déterminée et donc on développe des schèmes numériques par rapport à des critères de convergence approprié et on effectue des simulations. Après validation des résultats, on passe à la comparaison entre les différentes méthodes numériques afin de déterminer les difficultés rencontrées.

La construction des algorithmes d'approximation pour la résolution numérique des EDS se fait selon des critères de convergence, faible et fort. Dans le premier, il s'agit d'approcher la trajectoire associée au processus de diffusion qu'on appelle aussi convergence en trajectoire, tandis que pour la deuxième, on procède à une approximation de la distribution du processus en question (convergence en loi.). Le choix du critère de convergence dépend du problème traité et des objectifs fixés a priori. Mais avant cela, il faut s'assurer que la solution de l'EDS existe et quelles sont ses propriétés.

2.3. Existence et Unicité des solutions des équations différentielles stochastiques

Nous étudions dans cette section l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques (EDS). Lorsque la solution de l'EDS ne change pas pour une autre valeur du processus de Wiener, alors on parle de solution forte. Dans le cas contraire, c'est-à-dire que si on trouve une solution correspondante à un processus de Wiener bien particulier, alors elle est dite solution faible. Certaines équations différentielles stochastiques admettent des solutions faibles et non fortes.

1. Solutions fortes d'une équation différentielle stochastique

Considérons l'EDS (3.1) $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ s'écrivant sous la forme d'une

équation intégrale stochastique : (3.2) $X_t = X_0 + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s$.

La première intégrale est de Riemann ou de Lebesgue, quant à la deuxième, elle est d'Itô. La solution $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ de (3.2) devrait assurer la signification de ces intégrales où plus précisément leurs existences. Cela est vérifié si pour tout a et b définis par $a(t, w) = b(t, w) = 0$ ($0 \leq t < t_0$), les fonctions $\sqrt{|a|}$ et b sont mesurables pour $t_0 \leq t \leq T$.

Pour un t_0 fixe, $t_0 \in [0, T]$, choisi arbitrairement et pour des coefficients a, b définis sur $[t_0, T] \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ auxquels on impose les hypothèses ci-dessous :

Hypothèse1 (condition de mesurabilité) :

$$a = a(t, x) \text{ et } b = b(t, x) \text{ sont } L^2 \text{ mesurables pour } (t, x) \in [t_0, T] \times \mathfrak{R}$$

Hypothèse2 (condition de Lipchitz) :

$$\exists K > 0 / |a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y| \text{ et } |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y| \text{ pour tout } t \in [t_0, T] \text{ et } x, y \in \mathfrak{R}$$

Hypothèse3 (Borne à accroissement linéaire) :

$$\exists K > 0 / |a(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \text{ et } |b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \text{ pour tout } t \in [t_0, T] \text{ et } x, y \in \mathfrak{R}$$

Hypothèse4 (Condition sur la valeur initiale) :

$$X_{t_0} \text{ est } \mathcal{A}_{t_0} \text{ mesurable avec } E(|X_{t_0}|^2) < \infty$$

A signaler que l'hypothèse de mesurabilité et la condition de Lipchitz sont un moyen de prouver l'unicité et l'existence de la solution par la méthode des approximations successives. On a en effet le lemme suivant.

Lemme1

Si H_1 et H_2 sont vérifiés alors les solutions de (3.2) correspondant à la même valeur initiale et au même processus de Wiener possèdent une trajectoire unique (unicité de la solution).

Théorème 3.1

Sous les quatre hypothèses déjà décrites, l'équation (3.1) possède une solution forte à chemin unique, X_t sur $[t_0, T]$ avec $\text{Sup}E(|X_t|^2) < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$. [7]

Preuve

Le lemme précédent nous permet seulement d'établir l'existence d'une solution continue X_t sur $[t_0, T]$ sachant le processus de Wiener $W = \{W_t, t \geq 0\}$.

Pour cette démonstration nous utiliserons la méthode des approximations successives et pour cela nous définissons d'abord $X_t^{(0)} \equiv X_{t_0}$ et soit l'approximation :

$$(3.3) \quad X_t^{(n+1)} = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s \quad \text{pour } n=0,1,2,\dots$$

Si pour un n fixé $n \geq 0$, l'approximation $X_t^{(n)}$ est F_t - mesurable et continu sur $[t_0, T]$, alors il s'ensuit des trois premières hypothèses que les intégrales dans (3.3) sont bien définis et que le processus $X_t^{(n+1)}$ est F_t - mesurable et continu sur $[t_0, T]$.

De l'hypothèse 4 et de la définition de $X_t^{(0)}$ on a $\text{Sup}E(|X_t^{(0)}|^2) < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$.

En appliquant l'inégalité $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ et ensuite l'inégalité de Cauchy Swartz $\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)$ avec $f(x) = a(s, X_s^{(n)})$ et $g(x) = 1$, on aura

$$\begin{aligned} E(|X_t^{(n+1)}|^2) &\leq 3E(|X_{t_0}|^2) + 3E\left(\left|\int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds\right|^2\right) + 3E\left(\left|\int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s\right|^2\right) \\ &\leq 3E(|X_{t_0}|^2) + 3(T - t_0) \cdot E\left(\int_{t_0}^t |a(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right) + 3E\left(\left|\int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s\right|^2\right). \end{aligned}$$

De la propriété d'une intégrale stochastique $E\left(\left|\int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s\right|^2\right) = E\left(\int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}))^2 ds\right)$ et de

$$\begin{aligned} \text{l'hypothèse 3 on obtient : } E(|X_t^{(n+1)}|^2) &\leq 3E(|X_{t_0}|^2) + 3(T - t_0)E\left(\int_{t_0}^t |a(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right) + 3E\left(\int_{t_0}^t |b(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right) \\ &\leq 3E(|X_{t_0}|^2) + 3(T - t_0)K^2E\left(\int_{t_0}^t (1 + |X_s^{(n)}|^2) ds\right) + 3K^2E\left(\int_{t_0}^t (1 + |X_s^{(n)}|^2) ds\right) \\ &\leq 3E(|X_{t_0}|^2) + 3(T - t_0 + 1)K^2E\left(\int_{t_0}^t (1 + |X_s^{(n)}|^2) ds\right) \quad \text{pour tout } n=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

Par induction on aura : $SupE\left(\left|X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq C_0 < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$ et $n=1,2,3,\dots$.

Nous montrons à présent, grâce à la proposition ci-après que :

$$(3.4) \quad E\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq 2K^2(T-t_0+1) \times \int_{t_0}^t E\left(\left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|^2\right) ds$$

Proposition

Soient X_t et $\tilde{X}_t$ deux solutions de (3.2) sur $[t_0, T]$ où les trajectoires correspondantes sont continues presque sûrement. Soit le processus Z_t défini par $Z_t = X_t - \tilde{X}_t \Rightarrow$

$$Z_t = \int_{t_0}^t (a(s, X_s) - a(s, \tilde{X}_s)) ds + \int_{t_0}^t (b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)) dW_s$$

Comme $SupE\left(\left|X_t\right|^2\right) < \infty$ et $SupE\left(\left|\tilde{X}_t\right|^2\right) < \infty$ pour $t_0 \leq t \leq T$ alors les moments d'ordre deux existent pour chacun des deux intégrales et donc Z_t admet un moment d'ordre deux.

On procède de la même manière que précédemment mais cette fois-ci on utilise l'inégalité $(f+g)^2 \leq 2(f^2 + g^2)$ où dans l'expression de Z_t f représente la première intégrale et g la deuxième. Puis, en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz ainsi que la propriété d'une intégrale stochastique, on obtient:

$$E\left(\left|Z_t\right|^2\right) \leq 2(T-t_0) \int_{t_0}^t E\left(\left|a(s, X_s) - a(s, \tilde{X}_s)\right|^2\right) ds + 2 \int_{t_0}^t E\left(\left|b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)\right|^2\right) ds$$

Or de la condition de Lipchitz (hypothèse 2), on a

$$(3.5) \quad \max\left\{\left|a(s, X_s) - a(s, \tilde{X}_s)\right|, \left|b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)\right|\right\} \leq K\left|X_s - \tilde{X}_s\right| \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} E\left(\left|Z_t\right|^2\right) &\leq 2(T-t_0) \int_{t_0}^t K^2 E\left(\left|X_s - \tilde{X}_s\right|^2\right) ds + 2 \int_{t_0}^t K^2 E\left(\left|X_s - \tilde{X}_s\right|^2\right) ds \leq 2(T-t_0+1) \cdot K^2 \int_{t_0}^t E\left(\left|X_s - \tilde{X}_s\right|^2\right) ds \\ \Rightarrow E\left(\left|Z_t\right|^2\right) &\leq 2(T-t_0+1) \cdot K^2 \int_{t_0}^t E\left(\left|Z_s\right|^2\right) ds \text{ pour tout } t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Cauchy $\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t f(s) ds dt_1 \dots dt_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} f(s) ds$ et en répétant

(3.4) en un nombre de $(n-1)$ fois itérations, on obtient :

$$(3.6) \quad E\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq \frac{L^n}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} E\left(\left|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}\right|^2\right) ds \text{ pour tout } t \in [t_0, T]$$

Où $L = 2K^2(T-t_0+1)$ et $n=1, 2, 3, \dots$.

Lemme

De l'hypothèse 3 (Borne à accroissement linéaire), on a pour tout $t \in [t_0, T]$

$$E\left(\left|X_s^{(1)} - X_s^{(0)}\right|^2\right) \leq L \int_{t_0}^t \left(1 + E\left(\left|X_s^{(0)}\right|^2\right)\right) ds \leq C_1 \text{ où } C_1 = L(T-t_0) \left(1 + E\left(\left|X_s^{(0)}\right|^2\right)\right)$$

Ce lemme implique que $E\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq \frac{L^n \cdot (t-t_0)^n C_1}{n!}$ pour tout $t \in [t_0, T]$ et $n = 0, 1, 2, \dots$.

D'où (3.7) $Sup_{t_0 \leq t \leq T} E\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq \frac{L^n \cdot (T-t_0)^n C_1}{n!}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Cette inégalité implique la convergence en moyenne quadratique des approximations successives uniformément sur $[t_0, T]$.

Pour montrer la convergence presque sûr de leurs trajectoires sur $[t_0, T]$, on définit le processus

$$Z_n = Sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right| \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Or de (3.5) on a : $Z_n \leq \int_{t_0}^t \left| a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s^{(n-1)}) \right| ds + Sup_{t_0 \leq s \leq T} \left| \int_{t_0}^s (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) dW_s \right|$

Par l'application de l'inégalité de Doob : $\left(\forall p > 1, E\left(Sup_{0 \leq s \leq t} |X_t|^p \right) \leq \left(\frac{p}{1-p} \right)^p \cdot E\left(|X_t|^p \right) \right)$, l'inégalité

de Cauchy Swartz et la condition Lipchitzienne, on retrouve le résultat suivant :

$$\begin{aligned} E\left(\left|Z_n\right|^2\right) &\leq 2(T-t_0) \cdot K^2 \int_{t_0}^t E\left(\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right) ds + 8K^2 \int_{t_0}^t E\left(\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right) ds \\ &\Rightarrow E\left(\left|Z_n\right|^2\right) \leq 2(T-t_0+4) \cdot K^2 \int_{t_0}^t E\left(\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right) ds. \end{aligned}$$

En combinant avec (3.7), on conclut que

$$E\left(\left|Z_n\right|^2\right) \leq \frac{C_2 \cdot L^{n-1} (T-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \text{ pour } n = 1, 2, \dots \text{ où } C_2 = 2C_1 K^2 (T-t_0+4) \cdot (T-t_0).$$

Pour la suite de cette démonstration on a besoin d'appliquer l'inégalité de Markov sur chacun des termes de l'inégalité précédente. Cette inégalité est définie par :

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a^p} E(|X(\omega)|^p) \text{ pour tout } a, p > 0 \text{ où } |X(\omega)|^p \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

Puis, en sommant sur n , on retrouve le résultat suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_n > \frac{1}{n^2}\right) \leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n-1)!} \cdot L^{n-1} (T-t_0)^{n-1}$$

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n-1)!} \cdot L^{n-1} (T-t_0)^{n-1}$ est une série convergente alors il est de même pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_n > \frac{1}{n^2}\right).$$

Or lorsqu'on a une séquence d'événements indépendants $B_1, B_2, \dots, B_n$ de même probabilité

strictement positive tel que : $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty$ alors $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_n\right) = 0$ (Lemme de Borel-Cantelli)

On conclut donc que Z_n converge vers 0 presque sûrement et par conséquent les approximations successives $X_t^{(n)}$ convergent presque sûrement et uniformément sur $[t_0, T]$ vers une limite $\tilde{X}_t$ définie par : $\tilde{X}_t = X_{t_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \{X_t^{n+1} - X_t^n\}$

En prenant la limite de (3.3) quand $n \rightarrow \infty$, on remarque que $\tilde{X}_t$ est une solution de (3.2). Le terme à gauche de (3.3) converge uniformément sur $[t_0, T]$ vers $\tilde{X}_t$.

En outre, en comparant celui de la droite et en appliquant la condition de Lipchitz, le terme dans (3.3) converge vers celui dans (3.2) comme le montre les étapes ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds - \int_{t_0}^t a(s, \tilde{X}_s) ds \right| \leq K \int_{t_0}^t |X_s - \tilde{X}_s| ds \xrightarrow{\text{ps}} 0 \\ & \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, \tilde{X}_s))^2 dW_s \right| \leq K^2 \int_{t_0}^t |X_s - \tilde{X}_s|^2 ds \xrightarrow{\text{ps}} 0 \\ \Rightarrow & \int_{t_0}^t a(s, X_s^{(n)}) ds \xrightarrow{\text{ps}} \int_{t_0}^t a(s, \tilde{X}_s) ds \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) dW_s \xrightarrow{\text{ps}} \int_{t_0}^t b(s, \tilde{X}_s) dW_s \quad \forall t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Par conséquent le processus $\tilde{X}$ satisfait l'équation (3.2). On a donc prouvé l'existence et l'unicité de la solution forte d'une équation différentielle stochastique pour toute valeur initiale X_{t_0} avec $E(|X_{t_0}|^2) < \infty$.

Afin d'avoir des résultats plus forts que ceux établis par le théorème 3.1, on peut renforcer les hypothèses d'existence et d'unicité des solutions en supposant que les moments d'ordre k (k pair) de la valeur initiale sont finis.

Théorème 3.2

Supposons que les hypothèses H_1 - H_4 sont vérifiées et que $E(|X_{t_0}|^{2n}) < \infty$ pour $n \geq 1$,

Alors la solution X_t de l'équation (3.1) satisfait les deux expressions suivantes:

$$(3.8) \quad E(|X_t|^{2n}) \leq \left(1 + E(|X_{t_0}|^{2n})\right) \exp\{c(t-t_0)\}$$

$$(3.9) \quad E(|X_t - X_{t_0}|^{2n}) \leq D \cdot \left(1 + E(|X_{t_0}|^{2n})\right) \cdot (t-t_0)^n \exp\{c(t-t_0)\} \quad \text{pour } t \in [t_0, T] \text{ où } T < \infty$$

avec $c = 2n(2n+1)k^2$ et $D = f(n, k, T - t_0)$ (D est une constante positive). [7]

2. Solution forte et processus de diffusion

La propriété la plus importante des solutions des équations différentielles stochastiques est qu'elles soient généralement des processus de Markov et dans la majorité des cas des processus de diffusion. De ce fait, on peut appliquer des outils analytiques puissants, développés pour les processus de Markov et de diffusion sur les solutions des EDS.

Sous les quatre hypothèses déjà décrites dans la section précédente, la solution X de (3.1) est un processus de Markov sur l'intervalle $[t_0, T]$ où $X(t_0, x_0)$ est la solution pour une valeur initiale fixe $X_{t_0} = x_0$, ayant les probabilités de transitions pour tout $t_0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathfrak{R}$

$$P(s, x; t, B) = P(X_t \in B / X_s = x) \quad \text{où } B \text{ est un sous ensemble de } \mathfrak{R}$$

Les solutions X de l'EDS : $(3.10) \quad dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$

sont des processus de Markov homogènes où leurs probabilités de transitions $P(s, x; t, B)$ dépendent seulement de la période écoulée $(t-s)$ ($s \leq t$). Dans ce cas on écrit : $P(s, x; t, B) = P(0, x; t-s, B) = P(x; t-s, B)$.

La solution de l'EDS (3.10) est un processus de Markov ayant une distribution stationnaire s'il existe une mesure de probabilité π tel que :

$$(3.11) \quad \pi(B) = \int_{\mathfrak{R}} P(x; t, B) \pi(dx) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathfrak{R}$$

Pour assurer l'existence de la fonction de densité π , des conditions sont à imposer sur les coefficients a et b . Généralement, les solutions de l'EDS de la forme :

$$(3.12) \quad dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

sont des processus de diffusion où les probabilités de transitions vérifient les trois limites (I.5.7), (I.5.8) et (I.5.9). Ceci peut être démontré en supposant que H_2 , H_3 et H_4 sont vérifiées et qu'en plus, les coefficients $a(t, X_t)$ et $b(t, X_t)$ sont continus.

Théorème 3.3

En supposant que a et b sont continus et que les hypothèses H_2 - H_4 sont vérifiées, alors la solution X_t de (3.12), pour une valeur initiale quelconque X_{t_0} (fixe), est un processus de diffusion sur $[t_0, T]$ avec un taux de changement instantané (Drift) $a(t, x)$ et un coefficient de diffusion $b(t, x)$. [7]

Démonstration

On commence par démontrer la première limite $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s, x; t, y) dy = 0$

On a $\forall \varepsilon > 0, \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s, x; t, dy) \leq \varepsilon^{-4} \int_{\mathbb{R}} |y-x|^4 P(s, x; t, dy)$ or de (5.9) et pour $n=2$, on a

$E(|X_t(s, x) - x|^4) \leq c|t-s|^2$ pour $t_0 \leq s \leq t \leq T$ où c est une constante qui dépend de t_0, T et x .

D'où $\int_{|y-x|>\varepsilon} P(s, x; t, dy) \leq c\varepsilon^{-4}|t-s|^2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s, x; t, y) dy = 0$

Quant à la deuxième limite, il suffit de montrer que $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E(X_t(s, x) - x) = a(s, x)$, on introduit tout d'abord l'opérateur espérance dans l'équation intégrale de (3.12) et soit $E(X_t(s, x) - x) = \int_s^t E(a(\mu, X_\mu(s, x))) d\mu$. En faisant le changement de variable $v = \frac{\mu-s}{t-s}$,

cette expression sera $E(X_t(s, x) - x) = (t-s) \int_0^1 E(a(s+v(t-s), X_{s+v(t-s)}(s, x))) dv$, mais comme la trajectoire de $X_t(s, x)$ est continu presque sûrement et a est une fonction continue, alors :

$$\lim_{t \rightarrow s} a(s+v(t-s), X_{s+v(t-s)}(s, x; w)) = a(s, w)$$

et il en résulte de l'hypothèse 3 : $|a(t, x)|^2 \leq k^2(1+|x|^2)$ que

$$|a(s+v(t-s), X_{s+v(t-s)}(s, x))|^2 \leq k^2(1+|X_{s+v(t-s)}(s, x)|^2).$$

Du fait que le moment d'ordre 2 de la solution est fini, on a

$$E \int_0^1 |a(s+v(t-s), X_{s+v(t-s)}(s, x))|^2 dv < \infty.$$

Par inter changement entre les deux opérateurs, intégrale et limite, on aura

$$\lim_{t \rightarrow s} \int_0^1 E(a(s+v(t-s), X_{s+v(t-s)}(s, x))) dv \rightarrow a(s, x) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E(X_t(s, x) - x) = a(s, x).$$

Finalement, il reste à démontrer la dernière limite. Après application de la formule d'Itô sur le processus $(X_t(s, x) - x)^2$, nous remarquons que lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow s$

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E(X_t(s, x) - x)^2 = \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}} (y-x)^2 \cdot P(s, x; t, y) dy = b^2(s, x)$$

Cas particuliers

- Lorsque les coefficients $a(t, X_t)$ et $b(t, X_t)$ sont des constantes, on peut vérifier aisément que la solution de l'équation différentielle stochastique (3.12) est un processus de diffusion. En effet, dans ce cas particulier l'EDS sera $dX_t = adt + b dW_t$ et sa solution générale est donnée par (1.9), soit $X_t = X_s + a(t-s) + b(W_t - W_s)$.

Comme $E(W_t - W_s) = 0$ et $E(W_t - W_s)^2 = t - s$ alors $E(X_t - X_s / X_s = x) = a(t - s)$ et $E((X_t - X_s)^2 / X_s = x) = b^2(t - s) + a^2(t - s)^2$. Par conséquent, les probabilités de transition $P(s, x; t, \cdot)$ sont gaussiennes de moyenne $x + a(t - s)$ et de variance $b^2(t - s)$. Si la valeur initiale X_{t_0} est gaussienne, alors la solution X_t est dite processus de Markov gaussien.

- b. On peut aussi montrer que la solution de l'équation différentielle stochastique de Langevin : $dX_t = -X_t dt + dW_t$, donné par $X_t = X_s \cdot e^{-(t-s)} + e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau$ est un processus de diffusion pour une valeur initiale X_0 déterministe. On a
- $$E(X_t - X_s / X_s = x) = (e^{-(t-s)} - 1)x + \frac{1}{t-s} E \left[e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau \right] = (e^{-(t-s)} - 1)x + 0 \Rightarrow$$
- $$\lim_{t \rightarrow s} E(X_t - X_s / X_s = x) = -x = a(s, x).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} E(|X_t - x|^2) &= (e^{-(t-s)} - 1)^2 x^2 + 2x(e^{-(t-s)} - 1) E \left[e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau \right] + E \left[\left| e^{-(t-s)} \int_s^t e^{-(\tau-s)} dW_\tau \right|^2 \right] \\ &= (e^{-(t-s)} - 1)^2 x^2 + 0 + e^{-2(t-s)} E \left(\int_s^t e^{-2(\tau-s)} d\tau \right) \text{ car } \left(\int_{t_0}^t f(s) dW_s \right)^2 = \int_{t_0}^t f^2(s) ds \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} E(|X_t - x|^2) = 0 + 0 + 1 = b^2(s, x) \end{aligned}$$

3. Solution faible et processus de diffusion

A l'inverse du problème posé auparavant, on se pose à présent la question : est-ce qu'un processus de diffusion ayant des probabilités de transition qui vérifient les équations de Fokker Planck (I.5.16) et (I.5.17) est un processus solution d'une équation différentielle stochastique ? Cela revient à se demander sur l'existence d'une solution faible de l'EDS où l'on trouvera la réponse grâce au théorème qui suit.

Théorème 3.4

Soit Y un processus de diffusion sur $[0, T]$ avec un coefficient drift $a(t, y)$ et un coefficient de diffusion $b(t, y) > 0$. Si ces deux coefficients satisfont l'ensemble des conditions ci-dessous pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$:

1. $a(t, y)$ est une fonction continue tel que $|a(t, y)| \leq k(1 + |y|)$ où $k > 0$.

2. $b(t, y)$ est une fonction continue, $b^{-1}(t, y)$ est bornée et les dérivées partielles $\frac{db}{dt}$ et $\frac{db}{dy}$

sont continues et bornées.

3. Il existe une fonction $\Psi(y) > 1 + |y|$ tel que

- i. $\sup_{0 \leq t \leq T} E(\Psi(Y_t)) < \infty$.
- ii. $E[Y_t - Y_s | Y_s = y] + E[|Y_t - Y_s|^2 | Y_s = y] \leq (t - s)\Psi(y)$
- iii. $E[Y_t | Y_s = y] + E[|Y_t|^2 | Y_s = y] \leq \Psi(y)$

Alors Y_t est une solution de l'équation différentielle $dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)d\tilde{W}_t$ avec $\tilde{W}_t$ un processus de Wiener vérifiant $dZ_t = \bar{a}(t, Z_t)dt + 1d\tilde{W}_t$ où $Z_t = g(t, Y_t)$ est un processus de diffusion ayant les deux coefficients $\bar{a}(t, Z_t)$ et $b(t, Z_t) = 1$.

L'expression de $\bar{a}(t, Z_t)$ est donnée par $\bar{a}(t, Z_t) = \left(\frac{dg}{dt} + a \frac{dg}{dy} + \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{d^2 g}{dy^2} \right) (t, g^{-1}(t, z))$ où

$$g^{-1}(t, z) \text{ est la fonction inverse de } z = g(t, y) = \int_0^y \frac{dx}{b^2(t, x)}$$

Il y'a lieu de signaler que les conditions établies dans le théorème 3.1 sont suffisantes mais non nécessaires pour qu'ils existent des solutions faibles.

Nos principales références pour cette section sont [2], [7], [9] et [13]

Cas particulier

Soit l'EDS $dX_t = \text{Sgn}(X_t)dt + dW_t$ où $\text{Sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Cette équation différentielle

stochastique possède seulement des solutions faibles et pour une valeur initiale $X_0 = 0$, la solution forte n'existe pas. Cela est dû au fait que si X_t est une solution faible pour un processus de Wiener W_t , alors $-X_t$ est également une solution faible mais pour le processus $-W_t$. D'où, les deux solutions possèdent la même loi de probabilité mais pas les mêmes trajectoires.

CHAPITRE 3

DEVELOPPEMENT DE TAYLOR STOCHASTIQUE

CHAPITRE 3 DEVELOPPEMENT DE TAYLOR STOCHASTIQUE

La résolution des équations différentielles stochastiques (EDS) d'une manière explicite est rare dans la pratique. Cependant, il existe de nombreuses méthodes numériques pour surmonter ce problème en élaborant des schèmes d'approximations. Le développement de tels algorithmes est basé sur la formule de Taylor stochastique, qui est une généralisation de la formule de Taylor déterministe et de la formule d'Itô.

3.1. Formule d'Itô-Taylor stochastique

Afin d'éclaircir la présentation du développement de Taylor stochastique, nous exposons d'une manière assez simple et rapide le développement de Taylor déterministe.

1. Formule de Taylor déterministe

Considérons la solution X_t d'une équation différentielle ordinaire à une dimension

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X_t = a(X_t), \forall t \in [t_0, T] \\ X_{t_0} = x_0, \forall t_0 \in [0, T] \end{cases} \Rightarrow (1.2) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) \cdot ds$$

La fonction a est supposée continue et vérifie la condition de la borne à accroissement linéaire (linear growth born) :

$$\exists k > 0: |a(t, x)|^2 \leq k^2 (1 + |x|^2)$$

Soit : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continûment différentiable $f \in C^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, on a :

$$\frac{d}{dt} f(X_t) = \frac{d}{dt} X_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(X_t). \text{ Or de l'expression (1.1) on a : } \frac{d}{dt} X_t = a(X_t)$$

$$\Rightarrow (1.3) \quad \frac{d}{dt} f(X_t) = a(X_t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(X_t)$$

$$\text{Soit } L \text{ l'opérateur définit par : } (1.4) \quad L(.) = a \cdot \frac{\partial}{\partial x} ().$$

L'expression (1.3) devient alors $\frac{d}{dt} f(X_t) = L(.) \cdot f(X_t)$, impliquant ainsi la forme intégrale :

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf(X_s) \cdot ds$$

La formule de Taylor est défini par :

$$(1.5) \quad f(X_t) = f(X_{t_0}) + \sum_{l=1}^k \frac{(t-t_0)^l}{l!} \cdot L^l \cdot f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} L^{k+1} f(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{k+1} \quad \forall t \in [t_0, T] \text{ et } k=1, 2, \dots$$

Si l'on pose $f(x) = x$ on obtient : $Lf = a$ et $L^2 f = La$ et l'expression (1.5) sera :

$$(1.6) \quad X_t = X_{t_0} + \sum_{l=1}^k \frac{(t-t_0)^l}{l!} \cdot L^{l-1} \cdot a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_{k+1}} L^k a(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{k+1}, \quad \forall t \in [t_0, T] \text{ et } k = 1, 2, \dots$$

La formule de Taylor est utile aussi bien en théorie qu'en pratique, en particulier en analyse numérique tel que pour un ordre de précision désiré, elle permet d'approcher des fonctions lissées au voisinage d'un point donné.

Par ailleurs, dans la construction des méthodes numériques pour la résolution des EDS, on utilise également cette formule mais dans un cas stochastique. La formule de Taylor stochastique est basée sur une application itérative de la formule d'Itô et est appelée « Formule d'Itô-Taylor stochastique » que nous présenterons dans un cas unidimensionnel en premier lieu dans ce qui suit.

2. Formule d'Itô-Taylor stochastique unidimensionnelle

Considérons l'EDS de type Itô, de dimension 1 et ayant la forme intégrale suivante :

$$(1.7) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) \cdot ds + \int_{t_0}^t b(X_s) \cdot dW_s, \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Où a et b sont des fonctions réelles lissées qui satisfont la condition de la borne à accroissement linéaire.

Soit f une fonction réelle de classe C^2 , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la formule d'Itô (I.4.4) pour tout $t \in [t_0, T]$

$$\text{donne : } f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left[a(X_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) + \frac{1}{2} b^2(X_s) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s) \right] ds + \int_{t_0}^t b(X_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dW_s$$

$$\text{Dés lors : } (1.8) \quad f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(X_s) dW_s \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$$\text{Les opérateurs } L^0 \text{ et } L^1 \text{ sont définis par : } (1.9) \quad \begin{cases} L^0 = a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ L^1 = b \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

Si $f(x) = x$ l'expression (1.8) se réduit à (1.7) car dans ce cas particulier $L^0 f = a$ et $L^1 f = b$.

En appliquant la formule d'ITO (1.8) pour les fonctions $f = a$ et $f = b$ dans l'expression (1.7),

on obtient le développement d'Itô-Taylor le plus simple ci-dessous:

$$\begin{aligned} X_t = X_{t_0} + & \int_{t_0}^t \left(a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z \right) ds \\ & + \int_{t_0}^t \left(b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z \right) dW_s \end{aligned}$$

D'où le résultat du développement suivant :

$$(1.10) \quad X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R$$

où R est le reste du développement exprimé par :

$$R = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z dW_s$$

On peut pousser ce développement en appliquant la formule (1.8) en prenant $f = L^1 b$. On obtient ainsi le développement de Taylor stochastique suivant :

$$(1.11) \quad X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + L^1 b(X_{t_0}) \iint_{t_0 t_0}^{t s} dW_z dW_s + R_1 \quad \text{Où}$$

$$R_1 = \iint_{t_0 t_0}^{t s} L^0 a(X_z) dz ds + \iint_{t_0 t_0}^{t s} L^1 a(X_z) dW_z ds + \iint_{t_0 t_0}^{t s} L^0 b(X_z) dz dW_s +$$

$$+ \iint_{t_0 t_0}^{t s} \iint_{t_0 t_0}^{s z} L^0 L^1 b(X_\mu) d\mu dW_z dW_s + \iint_{t_0 t_0}^{t s} \iint_{t_0 t_0}^{s z} L^1 L^1 b(X_\mu) dW_\mu dW_z dW_s$$

L'expression ci-dessus contient des intégrales d'Itô multiples avec des intégrands non constants de

la forme : $\int_{t_0}^t ds$, $\int_{t_0}^t dW_s$ et $\iint_{t_0 t_0}^{t s} dW_z dW_s$.

Le résultat obtenu en (1.11) est une généralisation de la formule d'Itô et du développement de Taylor déterministe dans un cas unidimensionnel qu'on pourra étendre au cas multidimensionnel comme on va le voir dans le paragraphe ci-après.

3. Formule d'Itô-Taylor stochastique multidimensionnelle

Dans cette partie, nous considérons un processus de diffusion, de dimension d , solution d'une EDS de type Itô. Pour présenter explicitement la formule Itô-Taylor stochastique dans le cas multidimensionnel nous avons besoin d'introduire la notion d'indice multiple, de temps d'arrêt, les fonctions coefficients d'Itô ainsi que la notion d'ensemble hiérarchique et l'ensemble reste.

a. Notion de l'indice multiple

On appelle l'indice multiple de longueur $l = l(\alpha) \in \{1, 2, \dots\}$, le vecteur ligne $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l)$

avec $j_i \in (0, 1, 2, \dots, m) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots\}$ et $m = \{1, 2, 3, \dots\}$

La valeur m désigne la dimension du processus de Wiener considéré dans l'EDS.

Notons par :

- ν , l'indice multiple de longueur 0, $l(\nu) = 0$
- $n(\alpha)$, le nombre de composants de l'indice multiple α qui sont égaux à 0.
- M , l'ensemble de tous les indices multiples,

$$M = \{(j_1, j_2, \dots, j_l), j_i \in [0, 1, \dots, m], i \in \{1, \dots, l\}, \forall l = 1, 2, \dots\} \cup \{\nu\}$$
- $-\alpha(\text{resp. } \alpha-)$, l'indice multiple de M , obtenu par suppression de la première composante (resp. la dernière composante), avec $\alpha \in M$ et $l(\alpha) \geq 1$.
- $\alpha * \bar{\alpha}$, la concaténation de deux indices multiples α et $\bar{\alpha}$ avec $\alpha * \bar{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha})$

b. Notion de temps d'arrêt

Soit $\{F_t, t \geq 0\}$, une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration F_t si l'événement $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq t\} \in F_t \quad \forall t \geq 0$. Cela signifie qu'en observant une trajectoire $X_s(\omega_0)$ sur un intervalle $0 \leq s \leq t$ pour un processus stochastique adapté à la filtration $\{F_t, t \geq 0\}$, on peut toujours déterminer si $\tau(\omega_0) \leq t$ ou $\tau(\omega_0) > t$.

Ainsi pour un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ à trajectoire continue et pour un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}$, la variable $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0, X_t(\omega) \in F\}$ définit un temps d'arrêt quant à la famille des σ -algèbres où le processus est adapté et pouvant prendre des valeurs infinies.

c. Intégrale multiple d'Itô

Soit, ρ et τ deux temps d'arrêts, avec presque sûrement (p.s), $0 \leq \rho(\omega) \leq \tau(\omega) \leq T$. Pour $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in M$, on définit récursivement l'intégrale multiple d'Itô par :

$$(1.12) \quad I_\alpha[f(\cdot)]_{\rho, \tau} = \begin{cases} f(\tau) & \text{Si } l = 0 \\ \int_{\rho}^{\tau} (I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho, s}) ds & \text{Si } l \geq 1 \text{ et } j_l = 0 \\ \int_{\rho}^{\tau} (I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho, s}) dW_s^{j_l} & \text{Si } l \geq 1 \text{ et } j_l \geq 1 \end{cases}$$

La fonction $f(\cdot)$ est un processus aléatoire adapté, continu à droite avec limite à gauche telle que $f \in H_\alpha = \{H_\nu, H_{(0)}, H_{(j)}\}$ pour $j \geq 1$

Les ensembles suscités sont définis par :

$$\begin{aligned} H_\nu &= \{f(\cdot) / |f(t, \omega)| < \infty\} \quad ps \quad \forall t \geq 0 \\ H_{(0)} &= \left\{ f(\cdot) / \int_0^t |f(s, \omega)| ds < \infty \right\} \quad ps \quad \forall t \geq 0 \\ H_{(j)} &= \left\{ f(\cdot) / \int_0^t |f(s, \omega)|^2 ds < \infty \right\} \quad ps \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in M$, avec $l \geq 2$, le processus intégral $\{I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho, t}, t \geq 0\}$ est considéré comme une fonction de t , satisfaisant : $I_{\alpha-}[f(\cdot)]_{\rho, \cdot} \in H_{(j_l)}$ où $\alpha- = (j_1, \dots, j_{l-1})$

Dans le but d'illustrer ce qui est établi dans cette partie, voici quelques exemples où nous rappelons que si $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ alors $\alpha- = (j_1, \dots, j_{l-1})$:

1. $I_\nu[f(\cdot)]_{0, t} = f(t)$ car $l(\nu) = 0$.

2. $I_{(0)}[f(\cdot)]_{\tau_i, \tau_{i+1}} = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} I_v[f(\cdot)]_{\tau_i, \tau_{i+1}} ds = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(s) ds$ car $j_l=0$ et $l \geq 1$.
3. $I_{(1)}[f(\cdot)]_{\rho, \tau} = \int_{\rho}^{\tau} I_v[f(\cdot)]_{\rho, s} dW_s^1 = \int_{\rho}^{\tau} f(s) dW_s^1$ car $l \geq 1$ et $j_l \geq 1$.
4. $I_{(0,1)}[f(\cdot)]_{0, t} = \int_0^t I_{(0)}[f(\cdot)]_{0, s_2} dW_{s_2}^1 = \int_0^t \int_0^{s_2} f(s_1) ds_1 dW_{s_2}^1$ car $(0,1)^- = (0)$.
5. $I_{(1,2)}[f(\cdot)]_{0, T} = \int_0^T I_{(1)}[f(\cdot)]_{0, s_2} dW_{s_2}^2 = \int_0^T \int_0^{s_2} f(s_1) dW_{s_1}^1 dW_{s_2}^2$.
6. $I_{(2,0,1)}[f(\cdot)]_{0, T} = \int_0^T I_{(2,0)}[f(\cdot)]_{0, s_3} dW_{s_3}^1 = \int_0^T \int_0^{s_3} I_{(2)}[f(\cdot)]_{0, s_2} ds_2 dW_{s_3}^1 = \int_0^T \int_0^{s_3} \int_0^{s_2} f(s_1) dW_{s_1}^2 ds_2 dW_{s_3}^1$.

d. Fonction coefficient d'Ito

Les fonctions coefficients de Itô sont définies récursivement pour tout indice multiple $\alpha \in (j_1, j_2, \dots, j_l)$ et pour toute fonction de classe $C^h(\mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^d, \mathfrak{R})$ avec $h=l(\alpha)+n(\alpha)$, par :

$$(1.13) \quad f_{\alpha} = \begin{cases} f & \text{si } l=0 \\ L^{j_1} f_{-\alpha} & \text{si } l \geq 1 \end{cases}$$

Où $-\alpha = (j_2, \dots, j_l)$ pour $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l)$

L^j est l'opérateur de diffusion de l'EDS d'Itô défini par :

$$(1.14) \quad L^j = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m b^{k,j} \cdot b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} & \text{si } j=0 \\ \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k} & \text{si } 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Dans le cas unidimensionnel $m=d=1$, on a

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad L^j = b \frac{\partial}{\partial x}$$

Ce qui implique que les fonctions coefficients seront données par :

- $f_{(0)} = L^0 f_v = L^0 x = a$ car v est l'indice multiple tel que $l(v)=0$
- $f_{(1)} = L^1 f_{(v)} = b \frac{\partial}{\partial x} x = b$
- $f_{(1,1)} = L^1 f_{(1)} = b \frac{\partial}{\partial x} b(x) = bb'$ car $f_{-(1,1)} = f_{(1)}$
- $f_{(0,1)} = L^0 f_{(0,1)} = L^0 f_{(1)} = L^0(b(x)) = a \frac{\partial}{\partial x} (b(x)) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x))$, $f_{(0,1)} = ab' + \frac{1}{2} b^2 b''$
- $f_{(1,0)} = L^1 f_{-(1,0)} = L^1 f_{(0)} = L^1(a(x)) = ba'$
- $f_{(1,1,1)} = L^1 f_{-(1,1,1)} = b \frac{\partial}{\partial x} (bb') = b[b'^2 + b''b]$

e. Ensemble hiérarchique et ensemble reste

Les intégrales stochastiques multiples que contient la formule de Taylor stochastique avec des intégrands non constants ne peuvent pas être choisies arbitrairement. Cependant, l'ensemble des indices multiples correspondants doit former un ensemble dit ensemble hiérarchique.

Soit les sous-ensembles $A \subset M$. A est dit un ensemble hiérarchique si :

- $A \neq \emptyset$
- $\sup_{\alpha \in A} l(\alpha) < \infty$
- $-\alpha \in A, \forall \alpha \in A \setminus \{\nu\}$ avec $l(\nu) = 0$

Nous avons constaté dans la formulation du développement de Itô-Taylor stochastique que le reste dans l'expression (1.11) ne contient que des intégrales stochastiques multiples. Si en plus, ce développement a été établi pour un ensemble hiérarchique, alors les indices multiples correspondants aux intégrales vont appartenir à un ensemble, dit ensemble reste. Cet ensemble est défini comme suit : $B(A) = \{\alpha \in M/A : -\alpha \in A\}$. Pour plus de clarté, nous proposons quelques exemples sur ces deux types d'ensembles.

Exemples

- 1- Soit l'ensemble des indices multiples $M = \{\emptyset, \{(0)\}, \{\nu, (1)\}, \{\nu, (0), (0, 1)\}, \{\nu, (0), (1), (0, 1)\}\}$ où l'on a seulement deux ensembles qui sont hiérarchiques, soit $A_1 = \{\nu, (1)\}$ et $A_2 = \{\nu, (0), (1), (0, 1)\}$ et les ensembles « reste » correspondants sont :

$$B(A_1) = \{(0), (0, 1), (1, 1)\} \quad B(A_2) = \{(1, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}.$$

- 2- Les ensembles $A_1 = [\alpha \in M / l(\alpha) \leq r]$ et $A_2 = [\alpha \in M / l(\alpha) + n(\alpha) \leq r]$ $r = 1, 2, 3, \dots$ sont des ensembles hiérarchiques où les ensembles « reste » correspondants sont :

$$A_1 = \{\alpha \in M / l(\alpha) = r + 1\} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et} \quad A_2 = \{\alpha \in M / l(\alpha + n(\alpha)) = r + 1\} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

4. Développement d'Itô-Taylor Stochastique

Nous considérons à présent, le développement de Taylor pour un processus d'Itô de dimension d ;

$$\text{défini par : (1.15) } X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \left(\int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j \right) \quad t \in [t_0, T]$$

Théorème 4.1

Soit ρ et τ deux temps d'arrêts avec p.s $t_0 \leq \rho(\omega) \leq \tau(\omega) \leq T$; soit $A \subset M$: l'ensemble hiérarchique et $B(A)$ l'ensemble « reste » correspondant. Pour une fonction, $f: R^+ \times R^d \rightarrow R$, on a le développement de Itô-Taylor stochastique suivant : (1.16) $f(\tau, X_\tau) = \sum_{\alpha \in A} I_\alpha [f_\alpha(\rho, X_\rho)]_{\rho, \tau} + \sum_{\alpha \in B(A)} I_\alpha [f_\alpha(., X)]_{\rho, \tau}$

telles que toutes les dérivées de f , a et b et toutes les intégrales de Itô multiples existent.

Dans l'expression (1.16), les f_α sont des fonctions coefficients d'Itô.

Si on applique la formule (1.16) dans le cas d'une EDS de type Itô unidimensionnelle et homogène, en prenant $f(t,x)=x$, $\rho=t_0$, $\tau=t$ et en fixant un ensemble hiérarchique $A=[\alpha \in M/l(\alpha) \leq 3]$, alors on obtient un développement de Taylor de l'ordre 3.

Commençons d'abord par établir les fonctions coefficients d'Itô en utilisant la formule (1.13) dans ce cas particulier, sachant que l'ensemble hiérarchique est $A=\{\nu, (0), (1), (0,0), (0,1), (1,1), (1,0), (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,0,0), (1,1,1)\}$ et que l'ensemble reste est $B(A)=\{\alpha \in M/l(\alpha)=4\}$. Pour des fonctions a et b , de classe C^h , $h \geq 4$ on a :

$$\begin{aligned} f_{(0)} &= a, f_{(1)} = b, f_{(0,0)} = aa' + \frac{1}{2}b^2 a'', f_{(0,1)} = ab' + \frac{1}{2}b^2 b'', f_{(1,0)} = ba', f_{(1,1)} = bb', \\ f_{(0,0,0)} &= a[aa'' + a'^2 + bb'a'' + \frac{1}{2}b^2 a'''] + \frac{1}{2}b^2[aa''' + 3a'a'' + (b'^2 + bb'')a'' + 2bb'a'''] + \frac{1}{2}b^2 a^{(4)} \\ f_{(0,0,1)} &= a[a'b' + ab'' + bb'b'' + \frac{1}{2}b^2 b'''] + \frac{1}{2}b^2[a''b' + 2a'b'' + ab''' + (b'^2 + bb'')b'' + 2bb'b'''] + \frac{1}{2}b^2 a^{(4)} \\ f_{(0,1,0)} &= a \cdot (a'b' + a''b) + \frac{1}{2}b^2(a'b'' + 2a''b' + a'''b), f_{(0,1,1)} = a \cdot (b'^2 + bb'') + \frac{1}{2}b^2(b''b' + 2b'b'' + bb''') \\ f_{(1,0,0)} &= b \cdot (a'^2 + aa'' + bb'a'' + \frac{1}{2}b^2 a'''), f_{(1,0,1)} = b \cdot (a'b' + ab'' + bb'b'' + \frac{1}{2}b^2 b''') \\ f_{(1,1,0)} &= b \cdot (a'b' + a''b), f_{(1,1,1)} = b \cdot (b'^2 + bb'') \end{aligned}$$

La formule d'Itô-Taylor est donc donnée par :

$$\begin{aligned} (1.17) \quad X_t &= X_{t_0} I_{(0)} + f_{(1)} I_{(1)} + f_{(0,0)} I_{(0,0)} + f_{(0,1)} I_{(0,1)} + f_{(1,1)} I_{(1,1)} + f_{(0,0,0)} I_{(0,0,0)} + f_{(0,0,1)} I_{(0,0,1)} + \\ &+ f_{(0,1,0)} I_{(0,1,0)} + f_{(0,1,1)} I_{(0,1,1)} + f_{(1,0,0)} I_{(1,0,0)} + f_{(1,0,1)} I_{(1,0,1)} + f_{(1,1,1)} I_{(1,1,1)} + R \end{aligned}$$

Pour la présentation de cette section, notre principale référence est [10] et [15]

Outre que la formule d'Itô-Taylor stochastique, il existe une autre formule décrite en fonction de l'intégrale de Stratonovich qui est utile pour la construction des schèmes numériques en utilisant une formule appelée formule de Stratonovich-Taylor stochastique que nous allons présenter dans la prochaine section.

3.2. Formule de Stratonovich-Taylor stochastique

Pour établir cette formule, on a besoin comme pour la formule d'Itô-Taylor d'introduire le développement de Stratonovich-Taylor. [7]

1. Développement de Stratonovich-Taylor

Considérons l'équation intégrale unidimensionnelle de Stratonovich suivante:

$$(2.1) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \underline{a}(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) \circ dW_s \quad \forall t \in [t_0, T]$$

La deuxième intégrale dans (2.1) est l'intégrale stochastique de Stratonovich et les coefficients $\underline{a}$ et b sont des fonctions continues à valeurs réelles qui satisfont la condition de la borne à accroissement linéaire.

Pour une fonction deux fois continûment différentiable $f:\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}$ on a

$$(2.2) \quad f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \underline{L}^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t \underline{L}^1 f(X_s) \circ dW_s \quad \forall t \in [t_0, T] \text{ avec } \underline{L}^0 f = a \frac{df}{dx} \text{ et } \underline{L}^1 f = b \frac{df}{dx}$$

Pour $f(x)=x$, on a $\underline{L}^0 f = a$ et $\underline{L}^1 f = b$, on retombe sur l'équation originale (2.2).

Maintenant, on applique l'expression (2.2) aux fonctions des intégrants $f=a$ et $f=b$ on obtient :

$$(2.3) \quad X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \circ dW_s + R \quad \forall t \in [t_0, T] \quad \text{où } \forall t \in [t_0, T] \text{ le reste } R \text{ est donné par :}$$

$$R = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \underline{L}^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \underline{L}^1 a(X_z) \circ dW_z ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \underline{L}^0 b(X_z) dz \circ dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \underline{L}^1 b(X_z) \circ dW_z \circ dW_s$$

Ceci est le développement de Stratonovich-Taylor le plus simple du processus X_t . On peut continuer la même procédure en appliquant (2.2) à l'intégrant $f=\underline{L}^1 b$ et on aura alors :

$$(2.4) \quad X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \circ dW_s + \underline{L}^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \circ dW_z \circ dW_s + \bar{R} \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \underline{L}^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \underline{L}^1 a(X_z) \circ dW_z ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \underline{L}^0 b(X_z) dz \circ dW_s \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z \underline{L}^0 \underline{L}^1 b(X_u) du \circ dW_z \circ dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z \underline{L}^1 \underline{L}^1 b(X_u) dW_u \circ dW_z \circ dW_s \end{aligned}$$

A partir du développement de Stratonovich-Taylor stochastique déjà établis, on voit que les intégrales stochastiques multiples sont des blocks construits pour représenter les solutions des EDS et leurs fonctions. Ceci est largement utilisé pour la conception des schèmes numériques efficaces d'ordre supérieur afin d'approcher les solutions de l'équation stochastique. Par conséquent, on a besoin de générer ou au moins approcher ce type d'intégrales, comme on va le voir par la suite.

2. Approximation des intégrales multiples de Stratonovich

Les intégrales stochastiques multiples de multiplicité supérieure ne peuvent pas toujours être exprimées en terme d'intégrale stochastique simple, surtout lorsque le processus de Wiener est multidimensionnel. Néanmoins, il est possible de les représenter d'une manière efficace en utilisant une méthode basée sur le développement en séries de Fourier aléatoires. Ce dernier appelé aussi développement de Karhunen-Loève est appliqué au processus Brownien de pont

(Brownien bridge process), définit par : $\left\{ W_t - \frac{t}{\Delta} W_\Delta, 0 \leq t \leq \Delta \right\}$ où $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m)$ est un

processus de Wiener multidimensionnelle.

Le développement de Fourier de ce processus est donné par :

$$(2.5) \quad W_t^j - \frac{t}{\Delta} W_\Delta^j = \frac{1}{2} a_{j,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{j,r} \cos\left(\frac{2r\pi \cdot t}{\Delta}\right) + b_{j,r} \sin\left(\frac{2r\pi \cdot t}{\Delta}\right) \right) \quad \forall j=1, \dots, m \text{ et } r=0, 1, 2, \dots$$

Ces coefficients aléatoires qui sont des variables aléatoires gaussiennes sont donnés par:

$$(2.6) \quad a_{j,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left(W_s^j - \frac{s}{\Delta} W_\Delta^j \right) \cos\left(\frac{2r\pi \cdot s}{\Delta}\right) ds \quad \text{et} \quad (2.7) \quad b_{j,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left(W_s^j - \frac{s}{\Delta} W_\Delta^j \right) \sin\left(\frac{2r\pi \cdot s}{\Delta}\right) ds$$

Les séries en (2.5) convergent en moyenne quadratique et on peut les tronquer pour obtenir une approximation du processus brownien de pont.

Pour chaque $p=1,2,\dots$, on obtient

$$(2.8) \quad W_t^{j,p} = \frac{t}{\Delta} W_\Delta^j + \frac{1}{2} a_{j,0} + \sum_{r=1}^p \left(a_{j,r} \cos\left(\frac{2r\pi \cdot t}{\Delta}\right) + b_{j,r} \sin\left(\frac{2r\pi \cdot t}{\Delta}\right) \right) \quad \forall j=1,\dots,m \text{ et } r=0,1,2,\dots$$

Puisque les intégrales de Riemann-Stieltjes qui considèrent ce type de processus convergent vers les intégrales stochastiques de Stratonovich, on peut utiliser de telles intégrales afin d'approcher les intégrales multiples de Stratonovich. On notera ce type d'intégrales par :

$$(2.9) \quad J_{(j_1, j_2, \dots, j_l), t} = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{l-1}} dW_{s_1}^{j_1} \circ \dots \circ dW_{s_{l-1}}^{j_{l-1}} \circ dW_{s_l}^{j_l}$$

pour un indice multiple $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \{0, 1, \dots, m\}^l$ et un processus de Wiener de dimension m , où $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m)$ et $t \in [0, \Delta]$ en posant $W_t^0 = t$

En plus, les intégrales de Riemann-Stieltjes correspondantes aux fonctions continues qui approchent les intégrales de Stratonovich $J_{(j_1, j_2, \dots, j_l), t}$ sont données par :

$$(2.10) \quad J_{(j_1, j_2, \dots, j_l), t}^p = \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{l-1}} dW_{s_1}^{j_1, p} dW_{s_2}^{j_2, p} \dots dW_{s_l}^{j_l, p}$$

Pour chaque $j=1,\dots,m$ et $r=1,\dots,p$ avec $p=1,2,\dots$, on définit les variables aléatoires indépendantes de distribution gaussienne standard $\varepsilon_j, \xi_{j,r}, \eta_{j,p}, \mu_{j,p}$ et $\phi_{j,p}$, comme suit :

$$(2.11) \quad \varepsilon_j = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} W_\Delta^j, \quad \xi_{j,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi a_{j,r}, \quad \eta_{j,p} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi b_{j,p}, \quad \mu_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{\Delta \rho_p}} \sum_{r=p+1}^\infty a_{j,r}, \quad \phi_{j,p} = \frac{1}{\sqrt{\Delta \alpha_p}} \sum_{r=p+1}^\infty \frac{1}{r} b_{j,r}$$

$$\text{avec} \quad \rho_p = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^2}, \quad \alpha_p = \frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^4}$$

Pour la suite, on peut omettre Δ de la notation $J_{\alpha, \Delta}^p$. Pour $j_1, j_2, \dots, j_l \in \{1, \dots, m\}$, On a :

$$(2.12) \quad J_{(0)}^p = \Delta, \quad J_{(j)}^p = \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_j, \quad J_{(0,0)}^p = \frac{1}{2} \Delta^2, \quad J_{(j,0)}^p = \frac{1}{2} \Delta (\sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_j + a_{j,0}), \quad J_{(0,j)}^p = \frac{1}{2} \Delta (\sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_j - a_{j,0})$$

$$\text{avec} \quad a_{j,0} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{2\Delta} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} \xi_{j,r} - 2\sqrt{\Delta \rho_p} \cdot \mu_{j,p};$$

$$(2.13) \quad J_{(j_1, j_2)}^p = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta} (a_{j_2,0} \cdot \varepsilon_{j_1} - a_{j_1,0} \cdot \varepsilon_{j_2}) + \Delta A_{j_1, j_2}^p \quad \text{avec} \quad A_{j_1, j_2}^p = -\frac{1}{2\pi} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} (\xi_{j_1, r} \cdot \eta_{j_2, r} - \eta_{j_1, r} \cdot \xi_{j_2, r});$$

$$(2.14) \quad J_{(0,0,0)}^p = \frac{1}{3!} \Delta^3, J_{(0,j,0)}^p = \frac{1}{3!} \Delta^{5/2} \cdot \varepsilon_j - \frac{1}{\pi} \Delta^2 \cdot b_j \quad J_{(j,0,0)}^p = \frac{1}{3!} \Delta^{5/2} \cdot \varepsilon_j + \frac{1}{4} \Delta^2 \cdot a_{j,0} + \frac{1}{2\pi} \Delta^2 \cdot b_j$$

$$J_{(0,0,j)}^p = \frac{1}{3!} \Delta^{5/2} \cdot \varepsilon_j - \frac{1}{4} \Delta^2 \cdot a_{j,0} + \frac{1}{2\pi} \Delta^2 \cdot b_j \quad \text{avec } b_j = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^2} \eta_{j_1,r} + \sqrt{\Delta \alpha_p} \phi_{j,p};$$

$$(2.15) \quad J_{(j_1,0,j_2)}^p = \frac{1}{3!} \Delta^2 \cdot \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} + \frac{1}{2} a_{j_1,0} J_{(0,j_2)}^p + \frac{1}{2\pi} \Delta^{3/2} \cdot \varepsilon_{j_2} b_{j_1} - \Delta^2 B_{j_1,j_2}^p - \frac{1}{4} \Delta^{3/2} \cdot a_{j_2,0} \varepsilon_{j_1} + \frac{1}{2\pi} \Delta^{3/2} \cdot \varepsilon_{j_1} b_{j_2}$$

$$J_{(0,j_1,j_2)}^p = \frac{1}{3!} \Delta^2 \cdot \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} - \frac{1}{\pi} \Delta^{3/2} \cdot \varepsilon_{j_2} b_{j_1} + \Delta^2 B_{j_1,j_2}^p - \frac{1}{4} \Delta^{3/2} \cdot a_{j_2,0} \varepsilon_{j_1} + \frac{1}{2\pi} \Delta^{3/2} \cdot \varepsilon_{j_1} b_{j_2} + \Delta^2 C_{j_1,j_2}^p + \frac{1}{2} \Delta^2 A_{j_1,j_2}^p$$

$$\text{avec } B_{j_1,j_2}^p = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^2} \xi_{j_1,r} \xi_{j_2,r} + \eta_{j_1,r} \cdot \eta_{j_2,r} \text{ et } C_{j_1,j_2}^p = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{r \neq l=1}^p \frac{r}{r^2 - l^2} \left(\frac{1}{l} \xi_{j_1,r} \xi_{j_2,l} - \frac{l}{r} \eta_{j_1,r} \eta_{j_2,l} \right);$$

$$(2.16) \quad J_{(j_1,j_2,0)}^p = \frac{1}{2} \Delta^2 \cdot \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} - \frac{1}{2} \Delta^{3/2} (a_{j_2,0} \varepsilon_{j_1} - a_{j_1,0} \varepsilon_{j_2}) + \Delta^2 A_{j_1,j_2}^p - J_{(j_1,0,j_2)}^p - J_{(0,j_1,j_2)}^p;$$

$$(2.17) \quad J_{(j_1,j_2,j_3)}^p = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \varepsilon_{j_1} J_{(0,j_2,j_3)}^p + \frac{1}{2} a_{j_1,0} J_{(j_2,j_3)}^p + \frac{1}{2\pi} \Delta \cdot \varepsilon_{j_2} \varepsilon_{j_3}$$

$$- \Delta^{3/2} \cdot \varepsilon_{j_2} B_{j_1,j_3}^p + \Delta^{3/2} \cdot \varepsilon_{j_3} \left(\frac{1}{2} A_{j_1,j_2}^p - C_{j_1,j_2}^p \right) + \Delta^{3/2} D_{j_1,j_2,j_3}^p$$

$$\begin{aligned} \text{avec } D_{j_1,j_2,j_3}^p = & -\frac{1}{\pi^2 2^{5/2}} \sum_{r,l=1}^p \frac{1}{l(l+r)} [\xi_{j_2,l} (\xi_{j_3,l+r} \eta_{j_1,r} - \xi_{j_1,r} \eta_{j_3,l+r}) + \eta_{j_2,l} (\xi_{j_1,r} \xi_{j_3,l+r} + \eta_{j_1,r} \eta_{j_3,l+r})] \\ & + \frac{1}{\pi^2 2^{5/2}} \sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^{l-1} \frac{1}{r(l-r)} [\xi_{j_2,l} (\xi_{j_1,r} \eta_{j_3,l-r} + \xi_{j_3,l-r} \eta_{j_1,r}) - \eta_{j_2,l} (\xi_{j_1,r} \xi_{j_3,l-r} - \eta_{j_1,r} \eta_{j_3,l-r})] \\ & + \frac{1}{\pi^2 2^{5/2}} \sum_{l=1}^p \sum_{r=1}^{l-1} \frac{1}{r(l-r)} [\xi_{j_2,l} (\xi_{j_1,r} \eta_{j_3,l-r} + \xi_{j_3,l-r} \eta_{j_1,r}) - \eta_{j_2,l} (\xi_{j_1,r} \xi_{j_3,l-r} - \eta_{j_1,r} \eta_{j_3,l-r})] \\ & + \frac{1}{\pi^2 2^{5/2}} \sum_{l=1}^p \sum_{r=l+1}^{2p} \frac{1}{r(r-l)} [\xi_{j_2,l} (\xi_{j_3,r-l} \eta_{j_1,r} + \xi_{j_1,r} \eta_{j_3,r-l}) + \eta_{j_2,l} (\xi_{j_1,r} \xi_{j_3,r-l} + \eta_{j_1,r} \eta_{j_3,r-l})] \end{aligned}$$

où pour $r > p$ on pose $\xi_{j,r} = 0$ et $\eta_{j,r} = 0 \quad \forall j=1, \dots, m$.

L'approximation la plus délicate est $J_{(j_1,j_2),\Delta}^p$ car les autres $J_{\alpha,\Delta}^p$ sont identiques à $J_{\alpha,\Delta}$ où leur erreur moyenne quadratique peut être estimée par des temps constants $\Delta^r \quad \forall r \geq 3$. On peut montrer que :

$$(2.18) \quad E\left(\left|J_{(j_1,j_2),\Delta}^p - J_{(j_1,j_2),\Delta}\right|^2\right) = \frac{\Delta^2}{2\pi^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \Delta^2 \rho_p,$$

$$(2.19) \quad \rho_p = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=p+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_p^{\infty} \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2\pi^2 p} \Rightarrow$$

$$(2.20) \quad E\left(\left|J_{\alpha,\Delta}^p - J_{\alpha,\Delta}\right|^2\right) \leq \Delta^2 \rho_p \quad \forall \alpha \text{ tel que } l(\alpha) \geq 3$$

3. Relations entre des intégrales multiples de Stratonovich

La génération des intégrales multiples est utile dans la mise en œuvre des schèmes numériques. Nous commençons d'abord par le cas le plus simple qui nécessite un seul processus de Wiener où nous n'avons pas à générer chaque intégrale directement puisque quelques-uns résultent des autres. Par exemple, on a :

$$(2.21) \quad J_{(0,1)\Delta} + J_{(1,0)\Delta} = \Delta J_{(1)\Delta}, \quad J_{(1,1,0)\Delta} + J_{(1,0,1)\Delta} + J_{(0,1,1)\Delta} = \Delta J_{(1,1)\Delta},$$

$$J_{(1,1)\Delta} = \frac{1}{2} (J_{(1)\Delta})^2 \quad \text{et} \quad J_{(1,1,1)\Delta} = \frac{1}{6} (J_{(1)\Delta})^3.$$

Il existe des relations simples entre les intégrales d'Itô et de Stratonovich qui permettent le calcul de l'un des deux à partir de l'autre. Pour tout $j_1, j_2, j_3 \in \{0, 1, \dots, m\}$, on a :

$$(2.22) \quad I_{(j_1)\Delta} = J_{(j_1)\Delta},$$

$$(2.23) \quad I_{(j_1, j_2)\Delta} = J_{(j_1, j_2)\Delta} - \frac{1}{2} I_{(j_1=j_2 \neq 0)},$$

$$(2.24) \quad I_{(j_1, j_2, j_3)\Delta} = J_{(j_1, j_2, j_3)\Delta} - \frac{1}{2} I_{(j_1=j_2 \neq 0)} \cdot J_{(0, j_3)\Delta} - \frac{1}{2} I_{(j_2=j_3 \neq 0)} \cdot J_{(j_1, 0)\Delta}$$

$$\text{ou } I_A = \begin{cases} 1 & \text{si A est vraie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En plus, on note que

$$(2.25) \quad I_{(j,j)\Delta} = \frac{1}{2} \left((\Delta W^j)^2 - \Delta \right) \quad (2.26) \quad I_{(j,j,j)\Delta} = \frac{1}{3!} \left((\Delta W^j)^3 - 3\Delta \Delta W^j \right) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Finalement, nous remarquons qu'il y'a aussi les relations suivantes entre les intégrales multiples d'Itô tel que $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, on a :

$$(2.27) \quad \Delta W^j \Delta = I_{(j,0)\Delta} + I_{(0,j)\Delta}, \quad (2.28) \quad I_{(j,j)\Delta} \cdot \Delta = I_{(j,j,0)\Delta} + I_{(j,0,j)\Delta} + I_{(0,j,j)\Delta},$$

$$(2.29) \quad I_{(0,j)\Delta} \cdot \Delta W^j = 2I_{(0,j,j)\Delta} + I_{(j,0,j)\Delta} + \frac{1}{2} \Delta^2, \quad (2.30) \quad I_{(j,0)\Delta} \cdot \Delta W^j = I_{(j,0,j)\Delta} + 2I_{(j,j,0)\Delta} + \frac{1}{2} \Delta^2$$

CHAPITRE 4

INTRODUCTION A L'APPROXIMATION PAR DISCRETISATION DU TEMPS

INTRODUCTION A L'APPROXIMATION PAR DISCRETISATION DU TEMPS

Il existe de nombreuses méthodes numériques conçues pour la résolution des EDS, étant donné que la solution recherchée ne peut être toujours formulée analytiquement. Ces méthodes utilisent un outil mathématique performant et très utile pour approcher les différentes trajectoires du processus solution (processus d'Itô) et qui n'est autre que la technique de simulation. L'approche numérique que nous considérons pour la résolution des EDS est basée essentiellement sur la discrétisation du temps.

Par ailleurs, il existe une approche numérique qui consiste à discrétiser simultanément le temps et l'espace des variables où les processus approchés qui en résultent de cette discrétisation sont des chaînes de Markov à espace d'état fini. Malheureusement, avec de telle approche, on ne peut aboutir à la solution recherchée qu'après un nombre très important d'itérations. De ce fait, on peut dire que ce type d'approche n'est applicable que dans des domaines restreints.

Dans cette partie, nous présentons les méthodes de bases des approximations des solutions des équations différentielles stochastiques par discrétisation du temps. Nous commençons par étudier les principales propriétés des méthodes numériques pour les EDO. Puis nous examinerons le schème d'Euler stochastique en détail en introduisant les concepts de la convergence faible et forte pour les approximations en temps discret.

4.1. Méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires

Nous résumons dans la partie ci-après les principaux aspects des méthodes numériques adoptées pour résoudre les équations différentielles ordinaires.

1. Approximation d'Euler déterministe

Dans la pratique, de nombreux problèmes peuvent être modélisés comme suit :

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = a(t, x) \text{ avec } x(t_0) = x_0$$

Où la solution correspondante $x(t; t_0, x_0)$ ne peut avoir une forme explicite.

Ce qui nécessite le développement des méthodes d'approximation de la solution exacte en faisant des calculs numériques.

L'approche numérique la plus pratique et la plus utilisée est l'approximation par discrétisation du temps où l'équation différentielle à temps continue est remplacée par une équation à temps discret. Ceci se fait en calculant des valeurs $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ qui sont des valeurs approchées de $x(t_1; t_0, x_0), x(t_2; t_0, x_0), \dots, x(t_n; t_0, x_0), \dots$. Ces approximations sont exactes si les incréments du temps $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$ pour $n=0, 1, 2, \dots$ sont suffisamment petites et convenablement choisies.

La méthode d'Euler est la plus simple parmi l'ensemble des méthodes d'approximation par discrétisation du temps. Elle consiste à calculer d'une manière récursive les approximations :

$$(1.2) \quad y_{n+1} = y_n + a(t_n, y_n) \Delta_n$$

tel que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ représente le temps discret avec un accroissement $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$ pour $n=0, 1, 2, \dots$ et $y_0 = x_0$

En choisissant la discrétisation du temps comme méthode numérique de résolution des équations différentielles ordinaire, on peut relever deux types d'erreurs. La première est donnée par :

$$(1.3) \quad l_{n+1} = x(t_{n+1}; t_n, y_n) - y_{n+1}$$

et est appelée erreur de discrétisation locale de pas n . Quant à la deuxième, appelée erreur de discrétisation globale de pas n , elle a la forme :

$$(1.4) \quad e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, y_0) - y_{n+1}$$

L'estimation de la taille des erreurs de discrétisation se fait au moyen de la formule de Taylor, appliquée à une fonction de classe C^2 , $x = x(t)$. Cette formule donnée par :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{d}{dt} x(t_n) \cdot \Delta_n + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dt^2} x(\theta_n) \cdot \Delta_n^2 \quad \text{pour } t_n < \theta_n < t_{n+1}$$

nous permet d'avoir une nouvelle forme de l'erreur de discrétisation quelle que soit sa typologie. On obtient ainsi les expressions suivantes :

$$o \quad l_{n+1} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dt^2} x(\theta_n) \cdot \Delta_n^2 \quad \text{pour } t_n < \theta_n < t_{n+1}$$

$$\text{Si } \left| \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right| < M \quad \forall t \in [t_0, T] \text{ alors } |l_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot M \cdot \Delta_n^2 \quad \forall \Delta_n \text{ avec } t_0 < t_n < t_{n+1} < T$$

Si de plus la solution $x(t)$ appartient à un ensemble fermé et borné C et que les dérivées premières de la fonction $a(t, x)$ sont continues alors le maximum M prend la forme :

$$M = \max \left| \frac{da}{dt}(t, x) \right| + \max \left| \frac{da}{dx}(t, x) \cdot a(t, x) \right|.$$

$$o \quad e_{n+1} = e_n + \{a(t_n, x(t_n)) - a(t_n, y_n)\} \cdot \Delta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} x(\theta_n) \cdot \Delta^2 \quad \text{où } \Delta = \Delta_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Si $a(t, x)$ vérifie la condition de Lipchitz : $|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|$ et que le temps de discrétisation est équidistant : $t_n = t_0 + n\Delta$ avec $n=0, 1, 2, \dots$ alors $|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2} (e^{K(T-t_0)} - 1) \frac{M}{K} \Delta$

2. Méthodes d'approximation implicites

On dit qu'une méthode converge avec un ordre γ si :

$$\exists k < \infty \text{ tel que } |e_{n+1}| \leq k\Delta^\gamma \quad \forall \Delta \in (0, \delta_0) \text{ pour } \delta_0 > 0.$$

Si pour chaque valeur initiale du problème traité correspond une taille minimale du pas $\Delta_{\min}$ alors l'erreur d'arrondie ne peut être négligé et la précision des approximations calculées au moyen de la méthode choisi tel que la méthode d'Euler, qui est d'ordre de convergence $\gamma=1$, ne pourra être améliorée. En conséquence, l'obtention d'une approximation meilleure nécessite l'utilisation d'une autre méthode avec une erreur de discrétisation d'ordre plus élevé comme la méthode de Trapèze « Trapezoïdal method » :

$$(1.5) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{a(t_n, y_n) + a(t_{n+1}, y_{n+1})\} \cdot \Delta \quad \text{où } \Delta \text{ est la taille du pas équidistante.}$$

Dans cette dernière méthode, nous remarquons que y_{n+1} apparaît dans les deux cotés de l'égalité, d'où son appellation schème implicite et généralement elle ne peut pas être résolue algébriquement. Pour tourner cette difficulté, on utilise la méthode de trapèze modifiée :

$$(1.6) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{a(t_n, y_n) + a(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\} \cdot \Delta \quad \text{avec } \bar{y}_{n+1} = y_n + a(t_n, y_n) \Delta$$

Cette méthode est connue par la méthode d'Euler amélioré ou méthode de Heun et c'est un exemple simple de la méthode dite « predictor –corrector method » où le terme prédicteur $\bar{y}_{n+1}$ est inséré dans l'équation du correcteur pour avoir la prochaine itération y_{n+1} . Les deux méthodes de trapèze et de trapèze modifiée possèdent des erreurs de discrétisations locales d'ordre 3 en Δ .

Lorsqu'on utilise une information sur des intervalles de discrétisation passés alors la précision des approximations sera meilleure et donc on retrouve de nouvelles méthodes, appelées méthodes à pas multiples comme la méthode de Bashford Adams, de pas égal à 3, donnée par :

$$(1.7) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12} \{23a(t_n, y_n) - 16a(t_{n-1}, y_{n-1}) + a(t_{n-2}, y_{n-2})\} \cdot \Delta$$

On peut obtenir une précision d'ordre supérieur à partir d'un schème de pas égal à 1.0 par l'utilisation d'une méthode d'extrapolation. Par exemple, une approximation d'ordre 2 peut être fournit par la formule extrapolée de Richardson :

$$(1.8) \quad Z_N(\Delta) = 2y_{2N}\left(\frac{1}{2}\Delta\right) - y_N(\Delta)$$

où $y_N(\Delta)$ (respt. $y_{2N}(1/2\Delta)$) est la valeur du schème d'Euler (1.2) à N (respt. $2N$) pas équidistants $\Delta = T/N$ (respt. $1/2\Delta$) dans l'intervalle de temps $[0, T]$.

Notons qu'il est possible de généraliser à des extrapolations d'ordre supérieur.

3. Méthodes d'approximation d'ordre très élevé

Ces méthodes sont établies en tronquant le développement de Taylor avec un ordre élevé. Si l'ordre est égal à 1 alors on obtient la méthode d'Euler (1.2). La méthode de Taylor tronquée d'ordre 2 est donnée par :

$$(1.9) \quad y_{n+1} = y_n + a\Delta + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d}{dt}a + a \frac{d}{dx}a \right\} \Delta^2 \quad \text{où } a = a(t_n, y_n)$$

La même méthode mais avec un ordre 3, donne :

$$(1.10) \quad y_{n+1} = y_n + a\Delta + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d}{dt}a + a \frac{d}{dx}a \right\} \Delta^2 + \frac{1}{3!} \left\{ \frac{d^2}{dt^2}a + 2a \frac{d^2}{dtdx}a + a^2 \frac{d^2}{dx^2}a + \left(\frac{d}{dt}a \right) \frac{d}{dx}a + a \left(\frac{d}{dx}a \right)^2 \right\} \Delta^3$$

Nous remarquons que plus l'ordre du développement est élevé plus la méthode devient encore plus compliquée à cause notamment des dérivées. Ces derniers ne vont plus apparaître si on utilise la méthode explicite classique de Runge Kutta d'ordre 4, donnée par :

$$(1.11) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \{ k_n^{(1)} + 2k_n^{(2)} + 2k_n^{(3)} + k_n^{(4)} \} \Delta$$

$$\text{Avec } k_n^{(1)} = a(t_n, y_n); \quad k_n^{(2)} = a\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta, y_n + \frac{1}{2}k_n^{(1)} \cdot \Delta\right);$$

$$k_n^{(3)} = a\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta, y_n + \frac{1}{2}k_n^{(2)} \cdot \Delta\right); \quad k_n^{(4)} = a(t_{n+1}, y_n + k_n^{(3)} \cdot \Delta)$$

Pour les méthodes à pas multiples souvent on n'a pas besoin d'évaluer pour chaque pas de temps la fonction a comme pour les méthodes à un pas. Or ceci peut entraîner un problème d'instabilité numérique comme pour la méthode « Midpoint method » qui est une méthode à deux pas donnée par :

$$(1.12) \quad y_{n+1} = y_{n-1} + 2a(t_n, y_n) \Delta$$

Certains compilateurs arrondissent les résultats des opérations arithmétiques d'une manière aléatoire mais d'autres le font selon une règle d'arrondissement déterministe. Dans les deux cas, on ne peut éviter l'erreur dû au nombre de décimales significatives à garder, appelée erreur d'arrondie.

4. Erreur d'arrondie

L'erreur d'arrondie accumulée peut être estimée à travers une analyse statistique en supposant que les erreurs locales arrondies sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle :

$$(1.13) \quad \left[-5 \times 10^{-(s+1)}, +5 \times 10^{-(s+1)} \right] \quad \text{où } s \text{ est le nombre de décimales significatives utilisées.}$$

Pour vérifier la concordance de cette distribution, on reprend les calculs avec $s=4$ et on le compare avec le résultat obtenu sous la précision habituelle de l'ordinateur.

Dans certains problèmes de type linéaire, après $N \approx 10^s$ calculs, l'erreur d'arrondi cumulée ayant la forme $R_N = \sum_{k=1}^N r_k$ peut causer une perte de précision de toutes les décimales. Cela signifie qu'on peut seulement assurer que R_N se trouve dans l'intervalle :

$$(1.14) \quad \left[-5N \times 10^{-(s+1)} ; +5N \times 10^{-(s+1)} \right]$$

La variable r_k est supposée distribuée uniformément sur l'intervalle (1.13), de moyenne $E(r_k) = \mu = 0$ et de variance $Var(r_k) = \sigma^2 = \frac{1}{12} \cdot 10^{-2s}$. Si en plus les r_k sont indépendantes alors l'erreur d'arrondi accumulée R_N est de moyenne nulle et de variance $N\sigma^2$.

Si N est grand, les variables aléatoires (v.a) définies par $Z_N = \frac{R_N}{\sigma\sqrt{N}}$ sont approximativement des v.a gaussiennes centrés et réduites (théorème central limite). On conclut que R_N appartient à l'intervalle :

$$(1.15) \quad \left[-1,96 \times 10^{-s} \cdot \sqrt{N/12}, +1,96 \times 10^{-s} \cdot \sqrt{N/12} \right] \quad \text{quand } N \text{ est grand, avec } \alpha = 5\% .$$

Nous observons que la longueur de l'intervalle en (1.14) décroît proportionnellement à N en comparaison avec $\sqrt{N}$ dans (1.15); ce qui implique que les intervalles pour les erreurs d'arrondies sont plus petits et plus réalistes dans le deuxième cas.

4.2. Simulation stochastique en temps discret

Tout ce qu'on a vu à présent dans cette partie n'est qu'une introduction à la méthode d'approximation par discrétisation des processus d'Itô et le schéma d'Euler stochastique en fait partie. On considère un exemple simple de simulation où cette approximation est utilisée pour générer une trajectoire proche de la solution de l'équation différentielle stochastique.

1. Approximation d'Euler stochastique

Le traitement de la solution d'une équation différentielle stochastique par simulation est effectué en élaborant des algorithmes numériques en temps discret. La simulation des trajectoires par la discrétisation du temps est l'approche la plus efficace pour résoudre les EDS.

Néanmoins, ce n'est pas toutes les approximations par discrétisation du temps qui convergent vers la solution exacte quand la taille maximale du pas Δt temps vers zéro. Ce problème a été déjà rencontré, en particulier dans la méthode de Runge-Kutta qui est une méthode numérique déterministe pour l'approximation des équations différentielles ordinaires (EDO.).

Par conséquent les méthodes numériques doivent être examinées soigneusement pour déterminer laquelle des approximations nous permettra de résoudre avec fiabilité l'EDS considéré et dans quel sens la solution trouvée est proche de la solution exacte.

Il y'a lieu de signaler que les schèmes numériques sont basés sur la formule d'Itô-Taylor stochastique et que le plus simple parmi ces méthodes, on trouve l'approximation d'Euler. [7]

Considérons le processus d'Itô $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ ayant la forme différentielle stochastique

$$(2.1) \quad \begin{cases} dX_t = a(t, X_t) \cdot dt + b(t, X_t) dW_t & \forall t \in [t_0, T] \\ X_{t_0} = X_0 \end{cases}$$

L'approximation d'Euler consiste à discrétiser l'intervalle de temps $[t_0, T]$ en N pas $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$, en générant itérativement des valeurs approchées aux trajectoires qui sont des valeurs exactes du processus d'Itô. Cette méthode appliquée à l'équation différentielle (2.1) implique l'approximation d'Euler qui est un processus stochastique à temps

$$\text{continu définit par :} \quad (2.2) \quad \begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n) \Delta_n + b(\tau_n, Y_n) \Delta W_n, n=0,1,2,\dots,N-1 \\ Y_0 = X_0 \end{cases}$$

$Y_n = Y(\tau_n)$ est la valeur de l'approximation à l'instant de discrétisation τ_n .

$\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ est l'incrément du processus de Wiener d'ordre n .

$\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ est l'incrément du temps d'ordre n .

Si les pas sont équidistants $\Delta_n = \Delta = \frac{T-t_0}{N}$ alors : $\tau_n = t_0 + n\Delta$ et tel que pour N grand $\Delta \in (0,1)$.

Pour obtenir la suite $\{Y_n\}_{n=0,1,\dots,N}$ aux instants $\{\tau_n, n=0,1,\dots,N\}$, on a besoin de générer les incréments aléatoires $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ pour $n=0,1,\dots,N-1$, du processus de Wiener $W = \{W_t, t \geq 0\}$.

Ces variables aléatoires sont gaussiennes de moyenne nulle et de variance Δ_n : $\Delta W_n \rightarrow N(0, \Delta_n)$.

Remarque

Dans certaines applications, le temps de discrétisation n'est pas équidistant comme on a supposé précédemment, mais une variable aléatoire où l'on doit spécifier la taille maximale du pas $\delta = \text{Max} \Delta_n$.

Soit le temps de discrétisation $(\tau)_\delta = \{\tau_n, n=0,1,\dots\}$, qui est une variable aléatoire vérifiant $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots \leq \infty$ avec $\sup_{n_i} (\tau_{n+1} - \tau_n) \leq \delta$ et $n_i < \infty$, ps $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

où τ_{n+1} est A_{τ_n} mesurable $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

L'ensemble $\{A_t, t \geq 0\}$ est la famille croissante des σ -algèbre, associé généralement au processus d'Itô ou de Wiener. Si $(\tau)_\delta \in [t_0, T]$ alors on choisit $\tau_0 = t_0$ et $\tau_n = T$.

Dans ce cas particulier, l'approximation correspondante est dite approximation par discrétisation du temps généralisé qu'on va considérer lorsqu'on étudiera l'ordre de convergence faible et forte dans les prochaines sections.

2. Interpolation des approximations par discrétisation du temps

Souvent on s'intéresse à ce que l'approximation par discrétisation du temps soit un processus stochastique défini sur tout l'intervalle $[t_0, T]$, bien que principalement on obtienne des valeurs en temps discret. L'algorithme récursif d'Euler nous permet de déterminer les valeurs du processus approché au temps discret seulement. Si on a besoin de ses valeurs à des instants intermédiaires, on utilise alors une méthode d'interpolation linéaire, donnée par :

$$(2.3) \quad Y(t) = Y_{n_t} + \frac{t - \tau_{n_t}}{\tau_{n_t+1} - \tau_{n_t}} \cdot (Y_{n_t+1} - Y_{n_t}) \quad / Y_0 = X_0$$

où $Y(t) = Y_{n_t}, \forall t \in \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et linéaire avec $n_t = \max\{n=0,1,\dots,N : \tau_n \leq t\}$.

Généralement les trajectoires du processus d'Itô sont irrégulières du fait que le processus de Wiener n'est pas différentiable. Ce qui fait que la génération de ces trajectoires par ordinateur est impossible, sauf si l'on s'intéresse aux valeurs de l'approximation en temps discret en considérant seulement les instants de discrétisation.

3. Exemple d'application de l'approximation d'Euler

a. Cas d'une EDS de type linéaire (modèle de Black et Scholes [12])

Pour mieux comprendre la simulation des approximations par discrétisation du temps d'un processus d'Itô, nous allons considérer le cas le plus simple où ce processus satisfait l'EDS de type linéaire suivante :

$$(2.4) \quad dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t \quad \forall t \in [t_0, T] \quad \text{avec } X_0 \in \mathbb{R}$$

La solution explicite de cette équation est obtenue en appliquant l'expression (II.1.9) avec $a(t,x) = \alpha x$ et $b(t,x) = \beta x$. La solution est donc

$$(2.5) \quad X_t = \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \cdot t + \beta W_t \right\} \quad \forall t \in [t_0, T] \quad \text{et } \forall W = \{W_t, t \geq 0\}$$

La simulation de la trajectoire de l'approximation d'Euler sachant le temps de discrétisation se fait récursivement de la manière suivante :

$$(2.6) \quad \begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \alpha Y_n \Delta_n + \beta Y_n \cdot \Delta W_n & \forall n=0,1,2,\dots \\ Y_0 = X_0, \Delta W_n \approx N(0, \Delta_n) & \text{avec } \Delta_n = \Delta = \tau_{n+1} - \tau_n \end{cases}$$

La trajectoire de la solution exacte est obtenue en évaluant le processus d'Itô aux instants de

$$\text{discretisation :} \quad (2.7) \quad X_{\tau_n} = X_0 \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \cdot \tau_n + \beta \sum_{i=1}^n \Delta W_{i-1} \right\}$$

L'algorithme de simulation de la trajectoire de l'approximation d'Euler Y_t et de la solution exacte X_t de l'EDS (2.4) est :

Algorithme 4.2.1 :

1. **Paramètres** : $T0, T, X0, Alpha, Beta$

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions

a. Génération des fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B(TI, XI)$:

$$A \leftarrow ALPHA * XI; \quad B \leftarrow BETA * XI;$$

b. Génération de la fonction de la solution explicite SOLEXPL (TI, WT) :

$$SOLEXPL(TI, WT) \leftarrow X0 * \exp((ALPHA - 0.5 * (BETA)^2) * (TI - T0) + BETA * WT);$$

Etape2: Calcul des tailles de pas de temps pour tracer les trajectoires de Y_t et X_t avec leur ratio:

a. Taille de pas pour l'approximation d'Euler : $DELTA \leftarrow (T - T0) / 16;$

b. Taille de pas pour la solution exacte :

$$DELTA_X \leftarrow (T - T0) / Nbpt; \quad SQDELTA_X \leftarrow SQRT(DELTA_X)$$

c. Ratio des tailles de pas :

$$RATIO_PAS \leftarrow \text{Trunc}(DELTA / DELTA_X); \{ \text{Trunc}(\cdot) = [\cdot] : \text{Partie entière} \}$$

Etape3: Evaluation de la solution exacte et génération des incréments $DWT[I]$:

a. Initialisation des données : $ABSCISSE[0] \leftarrow T0; \quad XT[0] \leftarrow X0; \quad WT \leftarrow 0.0; \quad WTI[0] \leftarrow WT; \quad TI \leftarrow T0;$

b. Simulation d'une paire de variables aléatoires gaussiennes centrées et réduites $(G1, G2)$ en appliquant la procédure GaussMarsag (voir algorithme 1.1.2)

c. Génération des données

De $I=1, \dots, nbpt$ faire:

- $TI \leftarrow TI + DELTA_X; \{ \text{temps} \}$
- Si $I \bmod 2 = 1$ Alors GaussMarsag $(G1, G2)$ Sinon $G1 \leftarrow G2;$
- $G1I[I-1] \leftarrow G1; \quad G2I[I-1] \leftarrow G2;$
- $DWT[I-1] \leftarrow G1 * SQDELTA_X; \{ \text{incrémentations du processus de Wiener } W(t_{i+1}) - W(t_i) \}$
- $WT \leftarrow WT + DWT[I-1]; \quad \{ \text{valeur du processus de Wiener } W(t) \text{ à } t = TI \}$
- $WTI[I] \leftarrow WT;$
- $XT[I] \leftarrow SOLEXPL(TI, WT); \{ \text{valeur de la solution exacte} \}$
- $ABSCISSE[I] \leftarrow TI; \quad \{ \text{valeur de l'abscisse des } x \}$

Etape4: Génération de l'approximation d'Euler :

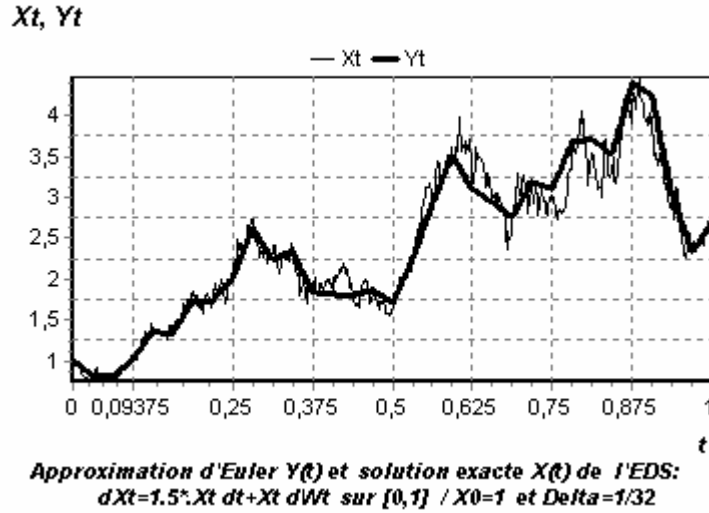
a. Initialisation des données: $I \leftarrow 0; \quad YT[0] \leftarrow X0; \quad TI \leftarrow T0; \quad \{ \text{temps initial} \}$

b. Génération des données :

Tant que $TI < T$ faire

- $I \leftarrow I + 1; \quad \{ \text{Indice de pas de temps} \}$
- $TI \leftarrow TI + DELTA; \quad \{ \text{temps courant} \}$
- $YTANC \leftarrow YT[(I-1) * RATIO_PAS]; \quad \{ \text{ancienne valeur de } Y_n \}$
- $DWTI = 0.0; \quad \{ \text{calcul des incréments du processus de Wiener} \}$
- De $J=1, \dots, RATIO_PAS$ faire $DWTI \leftarrow DWTI + DWT[(I-1) * RATIO_PAS + J - 1];$
- $YT[I * RATIO_PAS] \leftarrow YTANC + A(TI - DELTA, YTANC) * DELTA + B(TI - DELTA, YTANC) * DWTI;$
 $\{ \text{Valeur du schéma d'Euler:} \}$
- Si $RATIO_PAS > 1$ Alors De $J=1, \dots, RATIO_PAS - 1$ faire
 $YT[(I-1) * RATIO_PAS + J] \leftarrow YTANC + J * (YT[I * RATIO_PAS] - YTANC) / RATIO_PAS;$
 $\{ \text{Autres valeurs interpolées du schéma} \}$

3. Résultat de simulation



b. Cas d'une EDS de type non linéaire

Soit l'EDS non linéaire :

$$(2.8) \quad dX_t = dt + 2\sqrt{X_t} dW_t \quad \forall t \in [t_0, T] \quad \text{avec } X_0 \in \mathbb{R}$$

En appliquant l'expression (II.2.25) avec $h(x) = \sqrt{x}$, la solution explicite de cette équation est de la

$$\text{forme: } (2.9) \quad X_t = (W_t + \sqrt{X_0})^2 \quad \forall t \in [t_0, T] \text{ et } \forall W = \{W_t, t \geq 0\}$$

L'approximation d'Euler est donc donnée par :

$$(2.10) \quad \begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \Delta + 2\sqrt{Y_n} \cdot \Delta W_n & \forall n = 0, 1, 2, \dots \\ Y_0 = X_0, \Delta W_n \approx N(0, \Delta) & \text{avec } \Delta = \tau_{n+1} - \tau_n \end{cases}$$

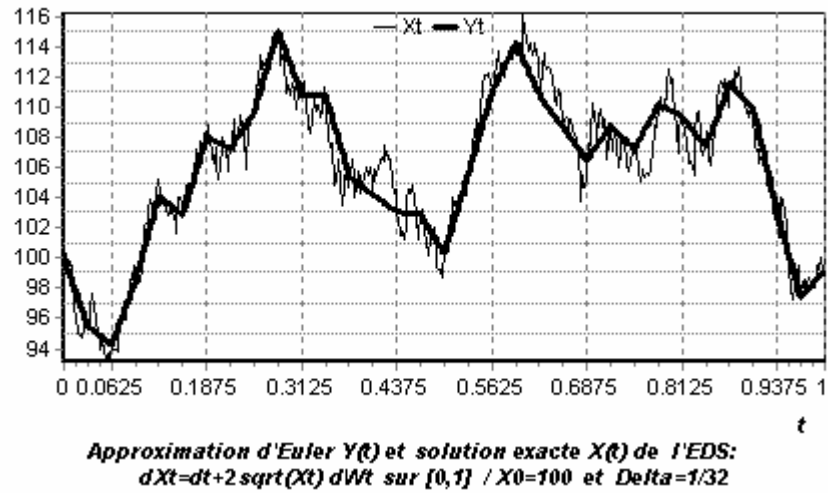
La trajectoire de la solution exacte aux instants de discrétisation est :

$$(2.11) \quad X_{\tau_n} = \left(\sum_{i=1}^n \Delta W_{i-1} + \sqrt{X_0} \right)^2$$

Pour tracer la trajectoire de l'approximation d'Euler Y_t et de la solution exacte X_t de l'EDS (2.8), il suffit de suivre les mêmes étapes que l'algorithme 4.2.1. Seulement des modifications seront portés sur :

- Les fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B(TI, XI)$:
 $A \leftarrow 1, B \leftarrow 2\sqrt{XI}.$
- La solution explicite $SOLEXPL(TI, WT)$:
 $SOLEXPL(TI, WT) \leftarrow (WT + \sqrt{X_0})^2$

3. Résultat de simulation :



Le choix du meilleur algorithme conçu pour approcher la solution d'une équation différentielle stochastique est basé sur des critères de convergence et de consistance. En effet, il est important que les trajectoires observées des approximations soient proches de celles du processus d'Itô (solution exacte de l'EDS). Ce constat est vrai aussi bien dans la simulation directe des trajectoires que dans l'approximation des espérances des fonctions du processus d'Itô.

4.3. Approximation des trajectoires et convergence forte

Suivant le but assigné à une approximation, on peut s'intéresser à la simulation avec une bonne précision des trajectoires comme pour les problèmes d'estimation, des tests statistiques ou autres et dans ce cas on parle de critère de convergence au sens fort. En outre, si c'est la précision des moments, des probabilités ou d'autres fonctions du processus d'Itô qui nous préoccupe, alors on utilise le critère de convergence au sens faible. Dans ce qui suit, nous allons introduire le critère de l'erreur absolue qui est approprié à une situation où l'approximation d'une trajectoire est nécessaire.

1. Approximation des trajectoires et critère de convergence forte

On peut calculer l'erreur due à l'approximation des trajectoires en utilisant le critère de l'erreur absolue donné par

$$(3.1) \quad \varepsilon = E(|X_T - Y_T|)$$

Où X_T est le processus d'Itô à l'instant T et Y_T l'approximation d'Euler.

Cette erreur est estimée en simulant N trajectoires du processus d'Itô $X_{T,k}$, ainsi que son approximation d'Euler $Y_{T,k}$ correspondant au même chemin aléatoire que le processus de Wiener ;

elle est donnée par :

$$(3.2) \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X_{T,k} - Y_{T,k}|.$$

Il y'a lieu de noter que plus la taille du pas de l'approximation est faible plus est faible cet estimateur. Pour N grand, l'erreur estimée $\hat{\varepsilon}$ est une variable aléatoire gaussienne qui converge asymptotiquement en distribution vers ε (Théorème central limite.); or en pratique, il est impossible de générer un nombre infini de trajectoires mais on peut construire un intervalle de confiance pour ε où l'on a besoin d'estimer la variance σ_{ε}^2 de $\hat{\varepsilon}$. Pour cela, on disposera de M séries où dans chacune d'elles on procède à N simulations. Les erreurs empiriques des M séries sont données par : (3.3)
$$\hat{\varepsilon}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X_{T,k,j} - Y_{T,k,j}| \quad \forall j = 1, \dots, M$$

Où $Y_{T,k,j}$ est la valeur de la $k^{\text{ième}}$ trajectoire d'Euler générée dans la $j^{\text{ième}}$ série à l'instant T et $X_{T,k,j}$ la valeur correspondante du processus d'Itô. Dés lors, l'intervalle de confiance est de la

forme : (3.4)
$$\left[\hat{\varepsilon} \pm t_{M-1}^{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{M}} \right] \text{ où (3.5.) } \hat{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\varepsilon}_j, \text{ (3.6) } \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon})^2 \text{ et}$$

$t_{M-1}^{1-\alpha}$ est la valeur de Student correspondante à $(M-1)$ degré de liberté à un niveau de confiance $(1 - \alpha)$.

L'expression (3.4) montre que la longueur de l'intervalle de confiance de l'erreur absolue décroît au fur et à mesure que le nombre de séries M augmente. Nous présentons par la suite un algorithme d'estimation de l'intervalle de confiance des erreurs absolues résultantes de l'approximation d'Euler pour différentes séries en considérant l'EDS (2.4) :
$$dX_t = \alpha \cdot X_t dt + \beta \cdot X_t dW_t \quad \forall t \in [T_0, T] \quad \text{avec } X_0 \in \mathbb{R}$$

Algorithme 4.3.1 : Estimation de l'Idc pour différentes séries

1. **Paramètres** : $T_0, T, X_0, \text{Alpha}, \text{Beta}$.

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions drift ,de diffusion et de la solution explicite :

- $A(TI, XI) \leftarrow \text{ALPHA} \cdot XI$; $B(TI, XI) \leftarrow \text{BETA} \cdot XI$;
- $\text{SOLEXPL}(TI, WT) \leftarrow X_0 \cdot \text{Exp}((\text{ALPHA} - 0.5 \cdot (\text{BETA})^2) \cdot (TI - T_0) + \text{BETA} \cdot WT)$;

Etape 2 : Génération de l'erreur absolue : $\text{ABSERR} \leftarrow \text{ABS}(XT - YT)$;

Etape 3 : Calcul des paramètres d'un échantillon donné X de taille N :

Procédure CalMoyVar($N, X, \text{SMOYENNE}, \text{SVARIANCE}$)

- Initialisation** : $\text{Moyenne} \leftarrow 0.0$; $\text{Variance} \leftarrow 0.0$; $\text{SQ} \leftarrow 0.0$; {variable intermédiaire}
- De $J=1, \dots, N$ faire** :
 - $\text{Moyenne} \leftarrow \text{Moyenne} + X[J]$;
 - $\text{SQ} \leftarrow \text{SQ} + X[J] \cdot X[J]$
- Calcul des paramètres** :
 - $\text{Variance} \leftarrow (\text{SQ} - \text{Moyenne} \cdot \text{Moyenne} / N) / (N - 1)$;
 - $\text{Moyenne} \leftarrow \text{Moyenne} / N$;

Etape 4 : Estimation de l'intervalle de confiance (Idc) des erreurs absolues pour différentes séries M :

- Initialisation des erreurs**: De $J \leftarrow 1$ à 7 faire $\text{EPS}[j] \leftarrow 0.0$;
- Calcul de Delta** : $\text{DELTA} = (T - T_0) / 4$; $\text{SQDELTA} \leftarrow \text{SQRT}(\text{DELTA})$;
- Calcul des erreurs** :
 $J \leftarrow 0$;

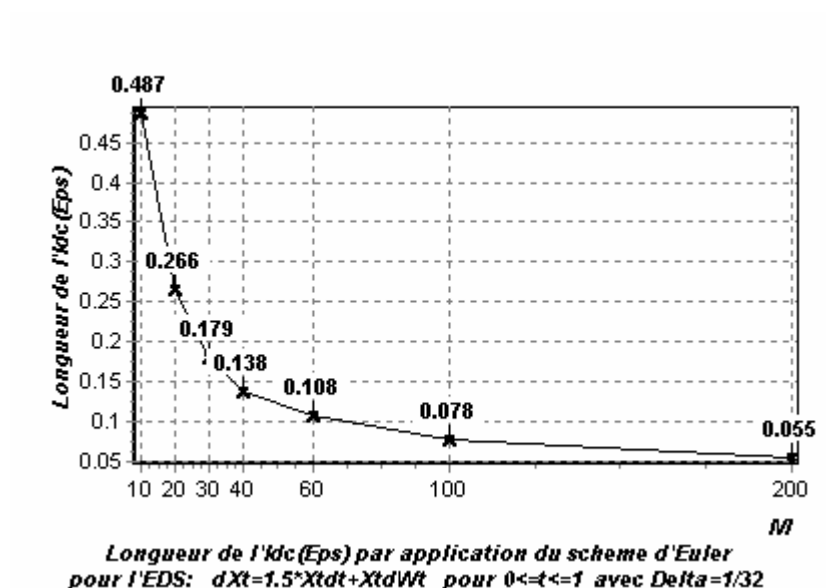
Répéter pour différentes séries ($J = \max M$ fois, $\max M$ est le nombre maximum de séries:

- $J \leftarrow J + 1$; { indice d'une série }
- $\text{EPSYON}[J] \leftarrow 0.0$; { initialiser la somme des erreurs à l'intérieur de la $J^{\text{ième}}$ série }
- **Generation de différentes trajectoires** :
 - $K \leftarrow 0$;

- Répéter pour différents échantillons (N fois, N est la taille de chacune des séries) :
 - o $K \leftarrow K+1$; {indice de la trajectoire à l'intérieur de la $J^{\text{ème}}$ série }
 - o $WT \leftarrow 0.0$; {valeur du processus de Wiener à $t = T0$ }
 - o Génération de l'approximation d'Euler et de son erreur absolue
 - ❖ $I \leftarrow 0$;
 - ❖ $TI \leftarrow T0$; {temps initial }
 - ❖ $YT \leftarrow X0$; {valeur initiale de l'approximation}
 - ❖ Tant que $TI < T$ faire
 - $I \leftarrow I+1$; {indice de pas de temps }
 - $TI \leftarrow TI + \text{DELTA}$; {temps courant }
 - IF $I \text{ MOD } 2 = 1$ THEN GaussMarsag($G1, G2$)
 - ELSE $G1 \leftarrow G2$;
 - $DWTI \leftarrow G1 * \text{SQDELTA}$; { $W(t(i+1)) - W(t_i)$ }
 - $WT \leftarrow WT + DWTI$; {valeur du processus de Wiener $W(t)$ à $t = TI$ }
 - $YT \leftarrow YT + A(TI - \text{DELTA}, YT) * \text{DELTA} + B(TI - \text{DELTA}, YT) * DWTI$; {Schème d'Euler}
 - ❖ Sommation des erreurs absolues :
 - $XT \leftarrow \text{SOLEXPL}(TI, WT)$; {valeur exacte de la solution }
 - $\text{EPSYLON}[J] \leftarrow \text{EPSYLON}[J] + \text{ABSERR}(XT, YT)$;
- Estimation de l'erreur absolue de la série : $\text{EPSYLON}[J] \leftarrow \text{EPSYLON}[J]/N$;
- d. Calcul de l'intervalle de confiance pour un niveau de confiance de 90% : De $J=1, \dots, 7$ faire:
 - Initialisation de nombre de séries et des quantiles (valeurs de Student)
 - Si $M[J] = 10$ alors $\text{QUANTILE} \leftarrow 1.83$;
 - Si $M[J] = 20$ alors $\text{QUANTILE} \leftarrow 1.73$;
 - Si $M[J] = 30$ alors $\text{QUANTILE} \leftarrow 1.70$;
 - Si $M[J] = 40$ alors $\text{QUANTILE} \leftarrow 1.68$;
 - Si $M[J] = 60$ alors $\text{QUANTILE} \leftarrow 1.67$;
 - Si $M[J] = 100$ alors $\text{QUANTILE} \leftarrow 1.66$;
 - Si $M[J] = 200$ alors $\text{QUANTILE} \leftarrow 1.65$;
 - Appeler la procédure CalMoyVar (TRUNC($M[J]$), EPSYLON, moyenne, Variance);
 - $\text{EPS}[J] \leftarrow \text{Moyenne}$; {Erreur }
 - $\text{DIFFER}[J] \leftarrow \text{QUANTILE} * \text{SQRT}(\text{VARIANCE}/M[J])$; { moitié de la longueur de l'Idc }
 - Calcul des deux limites de l'Idc ainsi que sa longueur:
 - $\text{Idc_G}[j] \leftarrow \text{EPS}[J] - \text{DIFFER}[J]$; $\text{Idc_D}[j] \leftarrow \text{EPS}[J] + \text{DIFFER}[J]$;
 - $\text{Long_Idc} \leftarrow 2 * \text{DIFFER}[J]$;

Résultat de simulation :

Nous considérons l'EDS $dX_t = 1.5 \cdot X_t dt + X_t dW_t \quad \forall t \in [0, 1]$



Ce graphe montre que la longueur de l'intervalle de confiance de l'erreur absolue est liée au nombre de séries tel que plus ce nombre est grand, plus la longueur de l'Idc sera réduite. Cette

présentation nous permet de déterminer le nombre de simulations nécessaire pour obtenir un intervalle de confiance pour l'erreur absolue en spécifiant seulement sa longueur.

Par ailleurs, il existe une relation entre l'erreur absolue et la taille de pas Δ , comme nous allons le constater à partir de la figure ci-après qui résulte de l'application de l'algorithme d'estimation de l' $\text{Idc}(\varepsilon)$ pour différentes valeurs de Δ .

Algorithme 4.3.2 : Estimation de l' Idc pour différentes tailles de pas

1. **Paramètres** : T_0 , T , X_0 , Alpha , Beta , Delta , M , N (taille de chacune des séries), Num (Nombre de tailles de pas)

2. **Simulation**:

Etape1, Etape 2, Etape 3 : même procédure que l'algorithme 4.3.1

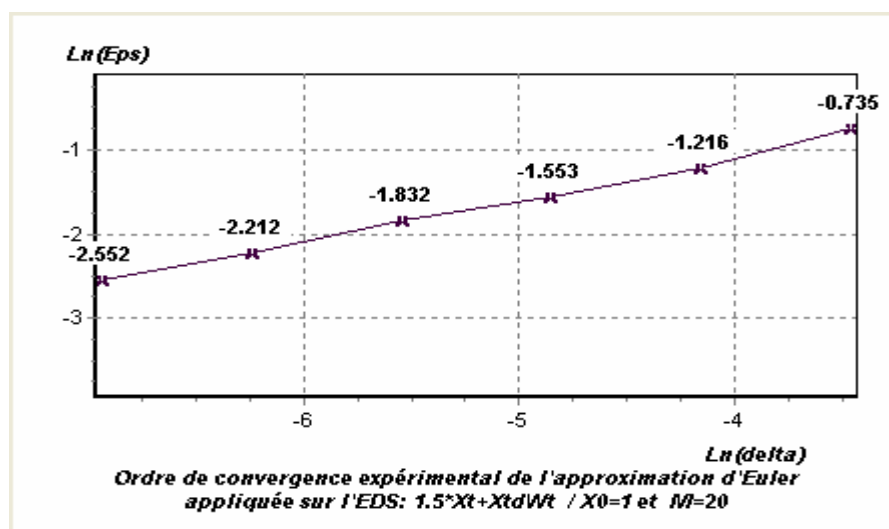
Etape 4 : Estimation de l'intervalle de confiance des erreurs absolues pour différentes tailles de pas :

- Calcul des tailles de pas : $\text{DELTA} \leftarrow (T - T_0)/4$; $\text{DELTA_Y} \leftarrow 2 \cdot \text{DELTA}$;
- Calcul de l'intervalle de confiance pour un niveau de confiance $1 - \alpha$:
 - $G \leftarrow 0$;
 - Répéter pour différentes tailles de pas ($G = \text{Num}$ fois)
 - $G \leftarrow G + 1$; {indice de la taille de pas considéré}
 - $\text{DELTA_Y} \leftarrow \text{DELTA_Y}/2$; {taille de pas de temps courant}
 - $\text{SQDELTA_Y} \leftarrow \text{SQRT}(\text{DELTA_Y})$; {racine carré de DELTA_Y }
 - Calcul des erreurs : Appliquer l'étape 4.c de l'algorithme 4.3.1, seulement il faut remplacer MaxM par M et Delta par Delta_Y
 - $\text{DEL}[G] \leftarrow \text{DELTA_Y}$; {taille de pas de temps courant}
 - $\text{CalMoyVar}(M, \text{EPSYLN}, \text{Moyenne}, \text{Variance})$;
 - $\text{EPS}[G] \leftarrow \text{Moyenne}$; {erreur absolue}
 - $\text{DIFFER}[G] \leftarrow \text{QUANTILE} \cdot \text{SQRT}(\text{Variance} / M)$; {moitié de la longueur de l'intervalle}
 - Calcul des deux limites de l' Idc :
 $\text{Idc_G}[j] \leftarrow \text{EPS}[J] - \text{DIFFER}[J]$; $\text{Idc_D}[j] \leftarrow \text{EPS}[J] + \text{DIFFER}[J]$;

Résultat de simulation :

Nous considérons l'EDS $dX_t = 1.5 \cdot X_t dt + X_t dW_t$ $\forall t \in [0, 1]$ et $X_0 = 1$.

Le nombre de séries est supposé égal à $M = 20$ et $N = 100$ échantillons.



D'après le graphe ci-dessus, nous constatons une relation linéaire entre l'erreur absolue et la taille de pas de temps avec une pente positive. Cette pente représente l'ordre de convergence forte du schème appliquée à l'EDS considérée qui est égal dans notre cas à 0.515.

2. Ordre de convergence forte et consistance

On définit l'erreur absolue pour une approximation par discrétisation du temps généralisée Y^δ , avec un pas maximal δ , par :

$$(3.7) \quad \varepsilon(\delta) = E(|X_T - Y_T^\delta|)$$

On dit que Y_T^δ converge fortement vers X_T si

$$(3.8) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon(\delta) = 0$$

Dans une analyse numérique qu'elle soit déterministe ou stochastique, on opte pour le schème ayant un ordre de convergence le plus élevé. Dans ce type de convergence, on dit que l'approximation généralisée Y_T^δ converge dans un sens fort avec un ordre $\gamma > 0$ à l'instant T s'il existe une constante positive, indépendante de δ , noté c , et $\delta_0 > 0$ tel que :

$$(3.9) \quad \varepsilon(\delta) \leq c\delta^\gamma \quad \forall \delta \in (0, \delta_0)$$

où δ_0 est la taille maximale des pas. Il y'a lieu de noter que ce critère est une généralisation du critère de convergence déterministe.

L'approximation par discrétisation du temps Y^δ correspondante au temps de discrétisation $(\tau)_\delta = \{\tau_n, n = 0, 1, \dots\}$ avec un maximum de pas δ est fortement consistant s'il existe une fonction non négative $c = c(\delta)$ avec $\lim_{\delta \rightarrow 0} c(\delta) = 0$, tel que :

$$(3.10) \quad E \left(\left| E \left(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n} / A_{\tau_n} \right) - a(\tau_n, Y_n^\delta) \right|^2 \right) \leq c(\delta) \text{ et}$$

$$(3.11) \quad E \left(\frac{1}{\Delta_n} \left| Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta / A_{\tau_n}) - b(\tau_n, Y_n^\delta) \cdot \Delta W_n \right|^2 \right) \leq c(\delta) \quad \forall Y_n^\delta = y \text{ et } \forall n = 0, 1, \dots$$

La première inégalité signifie que la moyenne de l'incrément de l'approximation doit converger vers celle du processus d'Itô. Quant à la deuxième, elle donne la convergence vers 0 de la variance de la différence entre la partie aléatoire de l'approximation et celle du processus d'Itô.

4.4.Approximation des moments et critère de convergence faible

Pour la présente approximation on s'intéresse à la convergence faible où la précision de l'approximation est relative non pas aux trajectoires comme dans la convergence forte mais plutôt aux moments du processus d'Itô.

1. Approximation des moments et critère de convergence faible

On définit l'erreur moyenne par :

$$(4.1) \quad \mu = E(Y_T) - E(X_T)$$

où Y_T est la valeur de l'approximation à l'instant T et X_T le processus d'Itô correspondant.

Notons que l'erreur μ peut avoir des valeurs positives ou négatives. La particularité de ce type d'approximation est que pour obtenir une erreur moyenne faible, on peut ne pas utiliser la même trajectoire du processus de Wiener lorsqu'on génère X et Y .

Néanmoins, il faut que les distributions de probabilité de X_T et Y_T soient proches.

On définit l'estimateur de l'erreur moyenne de la $j^{\text{ème}}$ série, sa moyenne ainsi que l'estimateur de sa variance par :

$$(4.2) \quad \hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\mu}_j \quad \text{avec} \quad \hat{\mu}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_{T,k,j} - E(X_T) \quad \forall j = 1, \dots, M \quad \text{et}$$

$$(4.3) \quad \hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\mu}_j - \hat{\mu})^2$$

$$\text{L'intervalle de confiance est donc :} \quad (4.4) \quad \left[\hat{\mu} \pm t_{M-1}^{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\mu^2}{M}} \right]$$

L'algorithme ci-dessous nous permet d'estimer l'Idc des erreurs $E(g(Y(T)) - g(X(T)))$ pour différentes séries en considérant la fonction $g(\cdot)$. La méthode d'approximation qui sera utilisée est le schème d'Euler en considérant l'EDS (2.4).

Algorithme 4.4.1 : Estimation de l'Idc de l'erreur moyenne pour différentes séries

1. Paramètres : $T_0, T, X_0, \text{Alpha}, \text{Beta}, \text{Delta}, \text{MaxM}$ (nombre maximum de séries), N (taille de chacune des séries)

2. Simulation:

Etape1: Génération des fonctions drift et de diffusion : $A(TI, XI) \leftarrow \text{ALPHA} * XI$; $B(TI, XI) \leftarrow \text{BETA} * XI$;

Etape 2 : Génération de la valeur moyenne de la fonction g : $E(g(\cdot))$:

$$\text{MOYGXT}(TI) \leftarrow X_0 * \text{EXP}(\text{ALPHA} * (TI - T_0));$$

Etape 3: Génération de la fonction $g(\cdot)$: $GXT(X) := X$;

Etape 4: Calcul des paramètres d'un échantillon donné X de taille N (Procédure CalMoyVar)
(voir étape 3 de l'algorithme 4.3.1)

Etape 5 : Estimation de l'intervalle de confiance (Idc) des erreurs moyennes pour différentes séries M :

Refaire les mêmes procédures que l'étape 4 de l'algorithme 4.3.1, seulement :

1. On remplace l'erreur et la somme des erreurs EPS et EPSYLON, respectivement par MU et MUYLON.
2. Les instructions qui permettent de faire la sommation des erreurs absolues (étape4.c) seront remplacées par une instruction qui fait la sommation des valeurs de la fonction $g(Y(T))$:

$$\text{MUYLON}[JJ] := \text{MUYLON}[JJ] + GXT(YT);$$

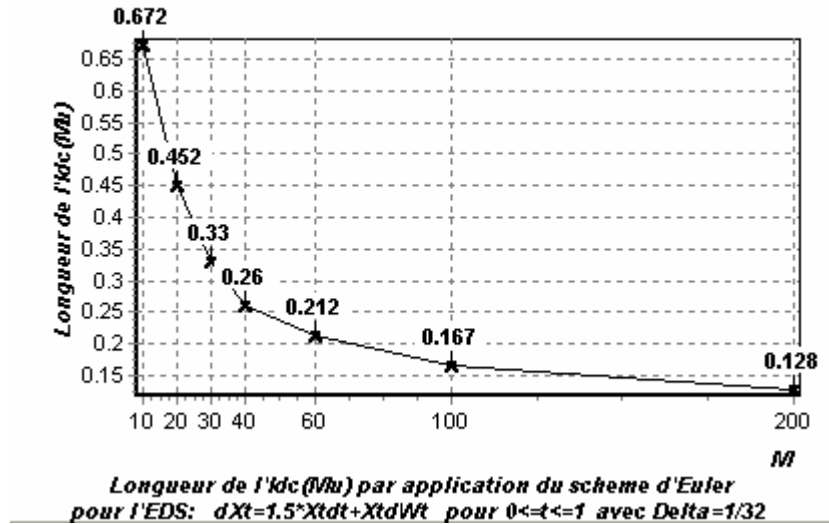
3. L'estimation de l'erreur moyenne de la série (étape4.c) sera donnée par :

$$\text{MUYLON}[JJ] := \text{MUYLON}[JJ] / N - \text{EGXT}$$

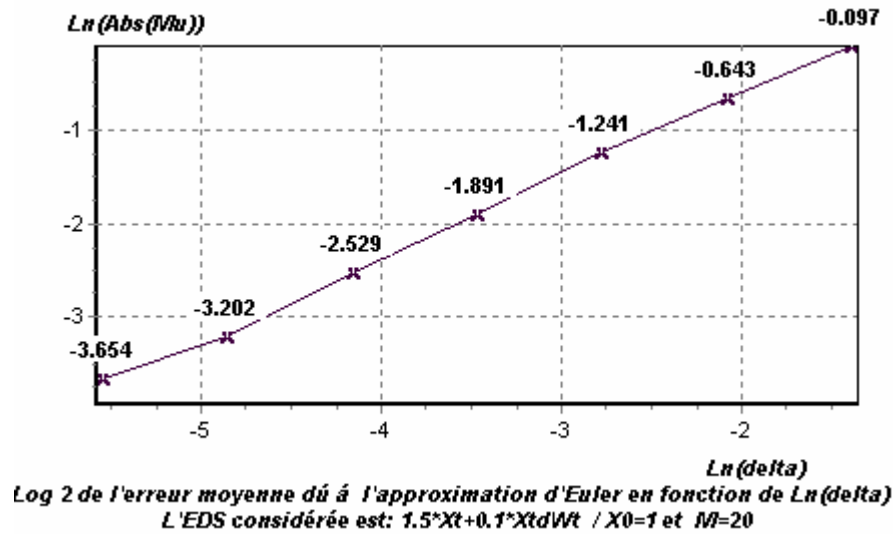
Résultat de simulation :

Nous considérons l'EDS $dX_t = 1.5 \cdot X_t dt + X_t dW_t \quad \forall t \in [0, 1]$

La taille de pas Δ pour le schème d'Euler est supposée égale à 2^{-5} . Pour chacune des séries, la taille de l'échantillon est $N=100$.



Pour l'estimation de l'intervalle de confiance de l'erreur moyenne pour différentes valeurs de taille de pas de temps Δ , nous appliquerons l'algorithme 4.3.2 avec les mêmes modifications présentés dans l'algorithme précédent (algorithme 4.4.1).



2. Erreur statistique et systématique

On peut décomposer l'estimateur de l'erreur moyenne $\hat{\mu}$ en erreur systématique μ_{Sys} et une erreur statistique μ_{Stat} , comme suit :

$$(4.5) \quad \hat{\mu} = \mu_{Stat} + \mu_{Sys} \quad \text{où} \quad \mu_{Sys} = E(\hat{\mu})$$

On peut montrer que l'erreur systématique n'est autre que l'erreur moyenne :

$$(4.6) \quad \mu_{Sys} = E\left(\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{T,k,j}\right) - E(X_T) = E(Y(T)) - E(X_T) = \mu$$

Pour un nombre de simulations indépendantes MN assez grand, l'erreur statistique devient asymptotiquement une variable aléatoire gaussienne (Théorème central limite) de moyenne nulle et de variance $Var(\mu_{Stat}) = Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{MN} Var(Y(T))$.

Nous précisons que cela dépend du nombre total de simulations MN et non pas du nombre de séries M ou du nombre de simulations N séparément.

3. Ordre de convergence faible et consistance

Dans ce paragraphe, on va généraliser l'approximation des moments d'ordre 1 à une approximation d'ordre supérieur $E(|X_T|^q)$ ou d'une fonction $E(g(X_T))$. Dans cette approximation on n'a pas besoin d'approcher les trajectoires du processus d'Itô comme pour la convergence forte mais plutôt la distribution de probabilité de X_T .

Soit l'approximation par discrétisation du temps généralisée Y^δ , correspondante au temps de discrétisation $(\tau)_\delta$ et soit $g : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction continûment différentiable. On dit que Y_T^δ converge au sens faible vers X_T si

$$(4.7) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} |E(g(X_T)) - E(g(Y_T^\delta))| = 0$$

Afin de comparer les différentes approximations, on a besoin d'introduire la notion de taux de convergence faible. On dit que l'approximation Y_T^δ converge faiblement avec un ordre de convergence $\beta > 0$ vers X_T , quand $\delta \rightarrow 0$ si

$\forall g \in C_p^l(\mathfrak{R}^d, \mathfrak{R})$ avec $l = 2 \cdot (\beta + 1)$, $\exists c > 0$ (c indépendante de δ) et $\delta_0 > 0$, tel que :

$$(4.8) \quad |E(g(X_T)) - E(g(Y_T^\delta))| \leq c\delta^\beta \quad \forall \delta \in (0, \delta_0)$$

où $C_p^l(\mathfrak{R}^d, \mathfrak{R})$ est l'espace des fonctions $g : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}$, l fois continûment différentiables.

On dit que l'approximation Y^δ avec un maximum de pas δ est faiblement consistante si $\exists$ une fonction $C = C(\delta)$ (non négative) vérifiant $\lim_{\delta \rightarrow 0} C(\delta) = 0$ tel que

$$(4.9) \quad E \left(\left| E \left(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n} / A_{\tau_n} \right) - a(\tau_n, Y_n^\delta) \right|^2 \right) \leq c(\delta).$$

$$(4.10) \quad E \left(\left| E \left(\frac{1}{\Delta_n} (Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta) (Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta) / A_{\tau_n} \right) - b(\tau_n, Y_n^\delta) b(\tau_n, Y_n^\delta) \right|^2 \right) \leq c(\delta) \mathbb{d}, \quad \forall Y_n^\delta = y \text{ et } \forall n = 0, 1, \dots$$

4.5. Stabilité numérique

En simulation, la convergence d'un schème numérique ne garantit pas son efficacité car il peut être instable et c'est ce type de situation qu'on va traiter dans cette section. Nous présentons d'abord le problème de stabilité des schèmes numériques dans un cas déterministe et ensuite nous passerons au cas stochastique en considérant les concepts des EDS renforcées (Stiff SDE), des A-Stabilités stochastiques ainsi que les schèmes implicites.

1. Stabilité numérique dans un cas déterministe

Pour montrer les difficultés rencontrées dans une analyse numérique déterministe lorsqu'on essaye d'implémenter une méthode sensée à être convergente, nous considérons l'équation différentielle :

$$(5.1) \quad \frac{dx}{dt} = -16x$$

Cette équation possède les solutions exactes $x(t) = x_0 e^{-16t}$ qui convergent très rapidement vers 0 $\forall$ la valeur de x_0 positive.

La méthode d'Euler appliquée à (5.1) avec une taille de pas de temps constante, Δ , donnée par $y_{n+1} = y_n - 16y_n \Delta$ possède des itérations exactes : $y_{n+1} = (1 - 16\Delta)^n y_0$

Si on choisit $\Delta > 2^{-3}$, ces itérations varient avec une amplitude croissante au lieu de converger vers 0 comme la solution exacte de (5.1.). Cette instabilité numérique peut être soulevée en prenant un pas de temps $\Delta < 2^{-3}$. Pour d'autres cas multidimensionnels, les instabilités numériques peuvent continuer même si Δ prend de petites valeurs.

On dit qu'une méthode à un pas est numériquement stable si pour chaque intervalle $[t_0, T]$ et une équation différentielle avec un coefficient drift satisfaisant la condition de Lipchitz, il existe des constantes positives Δ_0 et M tel que : (5.2) $|y_n - \tilde{y}_n| \leq M |y_0 - \tilde{y}_0| \quad \forall n=0, 1, \dots, n_T$

où y_n et $\tilde{y}_n$ sont deux solutions issues de la méthode à un pas avec des valeurs initiales y_0 et $\tilde{y}_0$, respectivement, pour chaque temps de discrétisation Δ_n avec $\text{Max } \Delta_n < \Delta_0$.

Les constantes Δ_0 et M peuvent aussi dépendre de l'intervalle de temps $[t_0, T]$, en plus des hypothèses imposées sur l'équation différentielle.

Généralement, les méthodes à 1 pas sont numériquement stables pour Δ assez petit. Cependant, la constante M dans (5.2) peut être assez grande. Par exemple, si on remplace le signe moins dans l'équation différentielle (5.1) par un signe plus, on obtient pour la méthode d'Euler :

$$y_n - \tilde{y}_n = (1 + 16\Delta)^n \cdot (y_0 - \tilde{y}_0)$$

Les erreurs issus de la méthode d'Euler de l'équation (5.1) ne vont pas augmenter si $\Delta < 2^{-3} \Leftrightarrow M \leq 1$ dans (5.2).

La situation va s'améliorer si on utilise la méthode de trapèze implicite (1.5) et elle est donnée dans le cas de notre exemple par:

$$(5.3) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \{-16 \cdot y_n - 16 \cdot y_{n+1}\} \Delta$$

$$\Rightarrow (5.4) \quad y_{n+1} = \frac{1-8\Delta}{1+8\Delta} \cdot y_n \quad \text{où} \quad \left| \frac{1-8\Delta}{1+8\Delta} \right| < 1 \quad \forall \Delta > 0$$

Pour un choix convenable pour Δ , il est utile de considérer une classe d'équations test qui sont des équations différentielles de type linéaire à valeurs complexes:

$$(5.5) \quad \frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \text{avec} \quad \lambda = \lambda_r + i\lambda_i \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1}$$

Ces équations possèdent des solutions distinctes quand $\lambda_i \neq 0$. L'équation (5.5) est équivalente à l'équation différentielle à deux dimensions $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r & -\lambda_i \\ \lambda_i & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ où $x = x^1 + ix^2$

Les valeurs ajustées de taille du pas $\Delta > 0$ sont exprimées en terme de région de stabilité numérique de la méthode utilisée. Pour la méthode d'Euler, on doit avoir $|1 + \lambda\Delta| \leq 1$ et la région de stabilité absolue est donc le cercle unité dans un plan complexe centré en $Z = -1 + 0i$

Une autre classe d'équations intéressante est l'équation différentielle à deux dimensions :

$$(5.6) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice des coefficients sont négatives et très différentes, c'est à dire que $-\alpha_2 \ll -\alpha_1 \leq 0$. Les composantes de (5.6) sont non corrélées alors elles peuvent être résolues séparément, ce qui donne pour une valeur initiale $(x_0^1, x_0^2) = (1, 1)$, les solutions

$$(5.7) \quad x_t^1 = e^{-\alpha_1 t} \quad \text{et} \quad x_t^2 = e^{-\alpha_2 t}$$

Puisque $-\alpha_1$ est très grand par rapport à $-\alpha_2$ alors les deux composantes possèdent des échelles de temps très différentes. Dans la littérature, de tel système d'équations est appelé système renforcé (stiff system) qui sera présenté dans la section qui suit.

Dans le cas général d - dimensionnel, on dit que le système linéaire est Stiff si les petites et grandes valeurs réelles des valeurs propres de la matrice des coefficients diffèrent considérablement.

Maintenant, si on applique la méthode d'Euler à (5.6) pour la deuxième composante à rester dans la région de stabilité absolue, on a besoin d'une taille de pas $\Delta \leq \frac{2}{\alpha_2}$.

Un résultat beaucoup meilleur est obtenu en appliquant la méthode d'Euler implicite à (5.6), ce qui donne :

$$(5.8) \quad y_{n+1} = y_n + a(t_{n+1}, y_{n+1}) \Delta$$

On obtient ainsi $y_n^i = (1 + \alpha_i \Delta)^{-n} \cdot y_0^i \quad \forall i=1,2$

D'où, $\forall \Delta > 0$ et $\forall y_n, \tilde{y}_n$ solutions de (5.8), on a $|y_n - \tilde{y}_n| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| \quad \forall n=0,1,\dots$

Par conséquent, la méthode d'Euler implicite (5.8) appliquée au système renforcé (stiff) se comporte toujours d'une manière stable dans sa première composante même si $\Delta > \frac{2}{\alpha_1}$.

2. Equations différentielles stochastiques renforcées (Stiff SDE)

Pour caractériser les EDS de type Stiff, nous considérons l'équation linéaire de Stratonovich de

$$\text{dimension } d : \quad (5.9) \quad dZ_t = AZ_t dt + \sum_{k=1}^m B^k Z_t \circ dW_t^k \quad \forall t \geq 0, Z_0 \in \mathbb{R}^d$$

On utilise d composantes de Lyapunov $\lambda_d \leq \lambda_{d-1} \leq \dots \leq \lambda_1$ qui sont des nombres réels non aléatoires représentant les limites supérieurs, données par :

$$(5.10) \quad \lambda(t_0, z_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \cdot \ln |Z_t^{t_0, z_0}| \quad \text{avec } Z_{t_0} = z_0$$

z_0 parcourt les sous-ensembles aléatoires $E_d(\omega), E_{d-1}(\omega), \dots, E_1(\omega)$ de $\mathbb{R}^d$

L'équation (5.9) est appelée Stiff EDS si ces plus grandes et plus petites composantes de Lyapunov diffèrent considérablement, c'est à dire $\lambda_1 \gg \lambda_d$

Notons qu'une équation différentielle ordinaire Stiff de type linéaire est aussi Stiff au sens stochastique.

Nous considérons par exemple l'équation $dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t$ où W_t est un processus de Wiener de dimension 1. Les composantes de Lyapunov de cette EDS sont les parties réelles des valeurs propres de la matrice $A - \frac{1}{2}B^2$.

3. Stabilité numérique asymptotique

Soit Y une approximation en temps discret avec une taille de pas de temps maximale $\delta > 0$ et une valeur initiale Y_{t_0} . $\bar{Y}$ est la valeur de Y correspondante à une valeur initiale $\bar{Y}_{t_0}$.

On dit que l'approximation par discrétisation de temps Y d'une équation différentielle stochastique donnée est asymptotiquement numériquement stable s'il existe une constante

positive Δ_α tel que $\forall \varepsilon > 0$ et $\delta \in (0, \Delta_\alpha)$, on a $\lim_{|Y_{t_0} - \bar{Y}_{t_0}| \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |Y_{n_t} - \bar{Y}_{n_t}| \geq \varepsilon \right) = 0$

La stabilité asymptotiquement numérique d'un schème stochastique sachant une classe restreinte et appropriée d'EDS généralise le concept connu par A-Stabilité des équations différentielles déterministes.

On choisira alors la classe d'équations test linéaire à valeurs complexes suivante:

$$(5.13) \quad dX_t = \lambda X_t dt + dW_t$$

Le paramètre λ est un nombre complexe tel que $\text{Re}(\lambda) < 0$ et W est un processus de Wiener standard à valeurs réels.

Supposons qu'on peut écrire un schème donné avec une taille de pas équidistante $\Delta=\delta$, appliquée aux équations tests (5.13) avec $\text{Re}(\lambda)<0$, sous la forme récursive :

$$(5.14) \quad Y_{n+1}=Y_n \cdot G(\lambda\Delta)+Z_n \quad \forall n=0,1,\dots$$

G est une fonction du plan complexe et $Z_0, Z_1, \dots$ sont des variables aléatoires qui ne dépendent pas de λ ou de $Y_0, Y_1, \dots$.

La région de stabilité absolue du schème est donc l'ensemble des nombres complexes $\lambda\Delta$ tel que :

$$(5.15) \quad \text{Re}(\lambda)<0 \text{ et } |G(\lambda\Delta)|<1$$

Evidemment, le schème est asymptotiquement numériquement stable pour l'équation test (5.13) si $\lambda\Delta$ appartient à la région de stabilité absolue. Le schème d'Euler avec une taille de pas équidistante $\Delta>0$ pour l'équation (5.13) est

$$Y_{n+1}=Y_n(1+\lambda\Delta)+\Delta W_n \Rightarrow |Y_n - \bar{Y}_n| \leq |1+\lambda\Delta|^n |Y_0 - \bar{Y}_0| \text{ où } \bar{Y}_n \text{ est la solution de valeur initiale } \bar{Y}_0.$$

Etant donné que les termes du bruit blanc additifs se simplifient alors on obtient la même région de stabilité absolue que dans le cas déterministe. Cette région est le cercle unité centré en $z=-1+0i$.

Le schème d'Euler implicite est :
$$(5.16) \quad Y_{n+1}=Y_n+a(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\Delta+b(\tau_n, Y_n)\Delta W_n$$

et pour l'équation test (5.13), il prend la forme suivante : $Y_{n+1}=Y_n+\lambda Y_{n+1}\Delta+\Delta W_n$ à partir de

laquelle on obtient :
$$|Y_n - \bar{Y}_n| \leq |1-\lambda\Delta|^{-n} |Y_0 - \bar{Y}_0|$$

Par conséquent, la taille du pas $\Delta>0$ peut être choisie assez large pour chaque valeur λ tel que $\text{Re}(\lambda)<0$. On dit que le schème stochastique est A-Stable si sa région de stabilité absolue est toute la partie gauche du plan complexe. Notons qu'un schème stochastique A-stable est aussi A-Stable au sens déterministe.

On peut utiliser le schème d'Euler implicite (5.16) avec des tailles de pas δ et Δ pour approcher la solution exacte de l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \alpha X_t dt + \beta dW_t \\ X_0 = 1 \end{cases} \text{ pour } t \in [0,1] \text{ et } \alpha = -15$$

Pour comparer cette approximation avec la solution exacte, on trace leurs trajectoires (X en fonction de t). Notons que la solution exacte donnée par : $X_t = e^{\alpha t} \left(X_0 + \int_0^t e^{-\alpha s} \cdot \beta dW_s \right)$ peut être simulé en utilisant les variables aléatoires gaussiennes corrélés :

$$\Delta E_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (e^{-\alpha(s-\tau_n)} - 1) dW_s \text{ et } \Delta W_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} dW_s \quad \text{tels que}$$

$$E(\Delta E_n) = 0, E(\Delta W_n) = 0, \text{Var}(\Delta W_n) = \Delta$$

$$\text{Var}(\Delta E_n) = \frac{3}{2\alpha} + e^{2\alpha\Delta} \left(\frac{1}{2\alpha} - \Delta \right) + 2e^{\alpha\Delta} \left(\Delta - \frac{1}{\alpha} \right), E(\Delta E_n \Delta W_n) \cong \Delta (e^{\alpha\Delta} - 1).$$

Algorithme 4.5.1 :**1. Paramètres :** $T_0, T, X_0, Alpha, Beta$.**2. Simulation:****Etape1:** Génération des fonctions**a.** Génération des fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B(TI, XI)$:

$$A \leftarrow ALPHA * XI; \quad B \leftarrow BETA;$$

b. Simulation d'une paire de variables aléatoires gaussiennes centrées et réduites ($G1, G2$) en appliquant la procédure GaussMarsag (voir algorithme 1.2.1)**c.** Génération de la fonction de la solution explicite SOLEXPL ($G1, G2, XTANC$) en utilisant les variables intermédiaires de type réels EQ, Q et $S22$

- Calcul de la variance $Var(\Delta E_n)$:

- o $Q \leftarrow ALPHA * DELTA_X; \quad EQ \leftarrow EXP(Q);$

- o $S22 \leftarrow EQ * EQ * (0.5 / ALPHA - DELTA_X) + 2. * EQ * (DELTA_X - 1 / ALPHA) + 1.5 / ALPHA;$

- Calcul de X_t :

- o $S22 \leftarrow SQRT(ABS(S22));$

- o $EXPSOL \leftarrow EQ * XTANC + BETA * (EQ * SQDELTA_X * G1 + S22 * G2); \{ \text{valeur approchée de } X_t \}$

Etape2: Calcul des tailles de pas de temps pour tracer les trajectoires de Y_t et X_t avec leur ratio:**d.** Taille de pas pour l'approximation d'Euler : $DELTA \leftarrow (T - T_0) / 8;$ **e.** Taille de pas pour la solution exacte :

$$DELTA_X \leftarrow (T - T_0) / Nbpt; \quad SQDELTA_X \leftarrow SQRT(DELTA_X)$$

f. Ratio des tailles de pas :

$$RATIO_PAS \leftarrow Trunc(DELTA / DELTA_X); \{ Trunc(.) = [] : \text{Partie entière} \}$$

Etape3: Evaluation de la solution exacte et génération des incréments $DWT[I]$:**a.** Initialisation des données : $ABSCISSE[0] \leftarrow T_0; \quad XT[0] \leftarrow X_0; \quad WT \leftarrow 0.0; \quad WTI[0] \leftarrow WT;$ **b.** Génération des donnéesDe $I=1, \dots, nbpt$ faire:

- $TI \leftarrow TI + DELTA_X; \{ \text{temps} \}$

- Si $I \bmod 2 = 1$ Alors GaussMarsag ($G1, G2$) Sinon $G1 \leftarrow G2;$

- $G1[I-1] \leftarrow G1; \quad G2[I-1] \leftarrow G2;$

- $DWT[I-1] \leftarrow G1 * SQDELTA_X; \{ \text{incrémentations du processus de Wiener } W(t_{i+1}) - W(t_i) \}$

- $WT \leftarrow WT + DWT[I-1]; \{ \text{valeur du processus de Wiener } W(t) \text{ à } t = TI \}$

- $WTI[I] \leftarrow WT;$

- $XT[I] \leftarrow SOLEXPL(TI, WT); \{ \text{valeur de la solution exacte} \}$

- $ABSCISSE[I] \leftarrow TI; \{ \text{valeur de l'abscisse des } x \}$

Etape4: Génération de l'approximation d'Euler explicite et implicite :**a.** Initialisation des données: $I \leftarrow 0; \quad YTI[0] \leftarrow X_0; \quad YT2[0] \leftarrow X_0; \quad TI \leftarrow T_0; \{ \text{temps initial} \}$ **b.** Génération des données : Tant que $TI < T$ faire

- $I \leftarrow I + 1; \{ \text{Indice de pas de temps} \}$

- $TI \leftarrow TI + DELTA; \{ \text{temps courant} \}$

- Sauvegarder les anciennes valeurs du schème :

$$YTIANC \leftarrow YTI[(I-1) * RATIO_PAS];$$

$$YT2ANC \leftarrow YT2[(I-1) * RATIO_PAS];$$

- Calcul des incréments du processus de Wiener :

- o $DWTI \leftarrow 0.0;$

- o De $J=1, \dots, RATIO_PAS$ faire $DWTI \leftarrow DWTI + DWT[(I-1) * RATIO_PAS + J - 1];$

- Valeur du schème d'Euler explicite :

$$YTI[I * RATIO_PAS] \leftarrow YTIANC + A(TI - DELTA, YTIANC) * DELTA + B(TI - DELTA, YTIANC) * DWTI;$$

- Valeur du schème d'Euler implicite :

$$YT2[I * RATIO_PAS] \leftarrow (YT2ANC + BETA * DWTI) / (1.0 - ALPHA * DELTA);$$

▪ *Autres valeurs interpolées du schème*

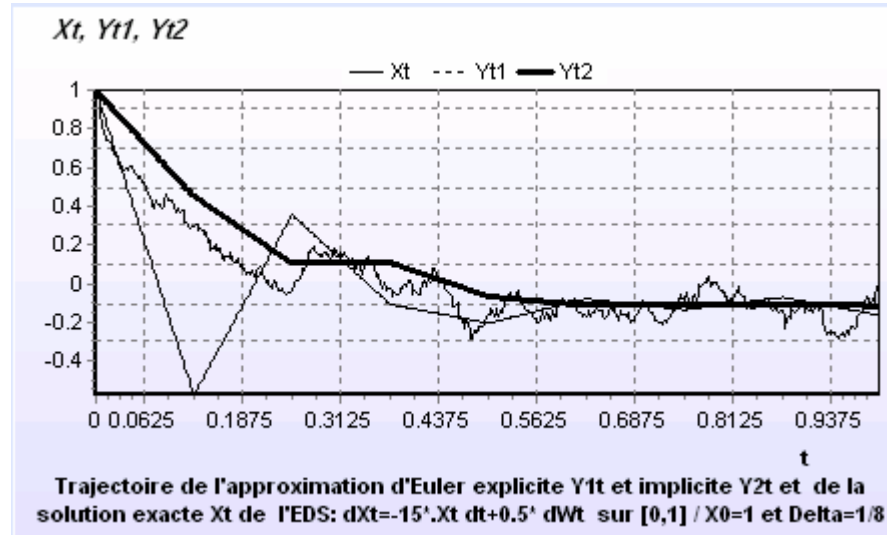
Si $RATIO_PAS > 1$ THEN

De $J=1, \dots, RATIO_PAS-1$ faire

o $YT1[(I-1)*RATIO_PAS+J] \leftarrow YT1ANC + J*(YT1[I*RATIO_PAS]-YT1ANC)/RATIO_PAS;$

o $YT2[(I-1)*RATIO_PAS+J] \leftarrow YT2ANC + J*(YT2[I*RATIO_PAS]-YT2ANC)/RATIO_PAS;$

Résultat de simulation :



Les équations différentielles stochastiques sont le principal instrument utilisé par les scientifiques pour formuler des modèles mathématiques de situations réelles à caractère aléatoire. Par leur nature, ces équations ne se prêtent pas à une résolution analytique exacte. Néanmoins, des approches numériques se sont élaborées pour la détermination par simulation des solutions approchées.

Dans les deux chapitres qui se suivent nous présentons un certain nombre d'approximations fortes et faibles, utiles pour le développement des algorithmes efficaces pour les problèmes de simulation.

CHAPITRE 5

APPROXIMATIONS FORTES

APPROXIMATIONS FORTES

Afin d'approcher les solutions des équations différentielles stochastiques (EDS), nous allons appliquer des méthodes explicites à un pas, comme les schèmes forts de Taylor et les schèmes explicites, ainsi que les schèmes à multiples pas et implicites en considérant le critère de convergence fort.

5.1. Approximations fortes de Taylor

Les approximations en temps discret sont basées sur le développement de Taylor stochastique quant à la convergence au sens fort, d'où l'appellation « Approximation forte de Taylor ». Nous décrivons les schèmes forts de Taylor d'une manière succincte dans le cas général d'un processus d'Itô de dimension d satisfaisant l'EDS de type Itô:

$$(1.1) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j, \quad \forall t \in [t_0, T]$$

La forme équivalente en terme de Stratonovich est :

$$(1.2) \quad X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) \circ dW_s^j, \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Pour toute fonction f définie sur $\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^d$, On utilisera l'abréviation $f = f(\tau_n, Y_n) \quad \forall n=0,1,\dots$

1. Schème d'Euler stochastique

Il s'agit de l'approximation forte de Taylor la plus simple avec un ordre de convergence de 0.5, alors qu'il vaut 1 dans le cas déterministe. Nous présentons la forme de cette approximation suivant la dimension du processus d'Itô et du processus de Wiener.

1. $d=m=1$, le schème d'Euler a la forme : (1.3) $Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n$

où $\Delta_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} dt = \tau_{n+1} - \tau_n$ est le pas de discrétisation ou longueur de l'intervalle de discrétisation

$[\tau_n, \tau_{n+1}]$ et $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ sont les incréments du processus de Wiener. Les ΔW_n sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de moyenne nulle et de variance Δ_n .

2. $d=m=1,2,\dots$, la $k^{ième}$ composante du schème d'Euler est :

$$(1.4) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j, \quad \text{où les } \Delta W_n^j = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} dW_t^j = W_{\tau_{n+1}}^j - W_{\tau_n}^j \text{ sont des variables}$$

aléatoires indépendantes de loi $N(0, \Delta_n)$, $a = (a^1, \dots, a^d)$ est le vecteur de dérive « drift » et $b = [b^{k,j}]_{k=1,\dots,d, j=1,\dots,m}$ la matrice des coefficients de diffusion.

Pour appliquer le schème d'Euler stochastique (1.4) dans le cas d'une EDS bidimensionnelle

$dX_t = A(t, X_t)dt + B1(t, X_t)dW_t^1 + B2(t, X_t)dW_t^2$ on utilise l'algorithme ci-dessous :

Algorithme 5.1.1 :

1. Paramètres : $T0, T, X0, A(t, X_t), B1(t, X_t), B2(t, X_t)$.

2. Simulation:

Etape1: Génération des fonctions

- a. Génération des fonctions drift $A(TI, XI) = \alpha XI$ et de diffusion $B1(TI, XI) = \beta_1 XI$ et $B2(TI, XI) = \beta_2 XI$:
 $A \leftarrow \text{ALPHA} * XI$; $B1 \leftarrow \text{BETA1} * XI$; $B2 \leftarrow \text{BETA2} * XI$;
- b. Génération des dérivés partielles $dB1(TI, XI)/dXI$ et $dB2(TI, XI)/dXI$:
 $DB1X \leftarrow \text{BETA1}$; $DB2X \leftarrow \text{BETA2}$;
- c. Génération de la solution explicite SOLEXPL $(TI, W1T, W2T)$:
 - i. $Q \leftarrow \text{ALPHA} - 0.5 * (\text{BETA1} * \text{BETA1} + \text{BETA2} * \text{BETA2})$; {variable intermédiaire}
 - ii. $\text{SOLEXPL}(TI, W1T, W2T) \leftarrow X0 * \exp(Q * (TI - T0) + \text{BETA1} * W1T + \text{BETA2} * W2T)$;
- d. Génération de la formule de l'erreur absolue ABSERR(XT, YT) : $\text{ABSERR} \leftarrow \text{ABS}(XT - YT)$;

Etape2: Génération de la procédure CalMoyVar(N, X, SMOYENNE, SVARIANCE) qui Calcul les paramètres d'un échantillon donné X de taille N);

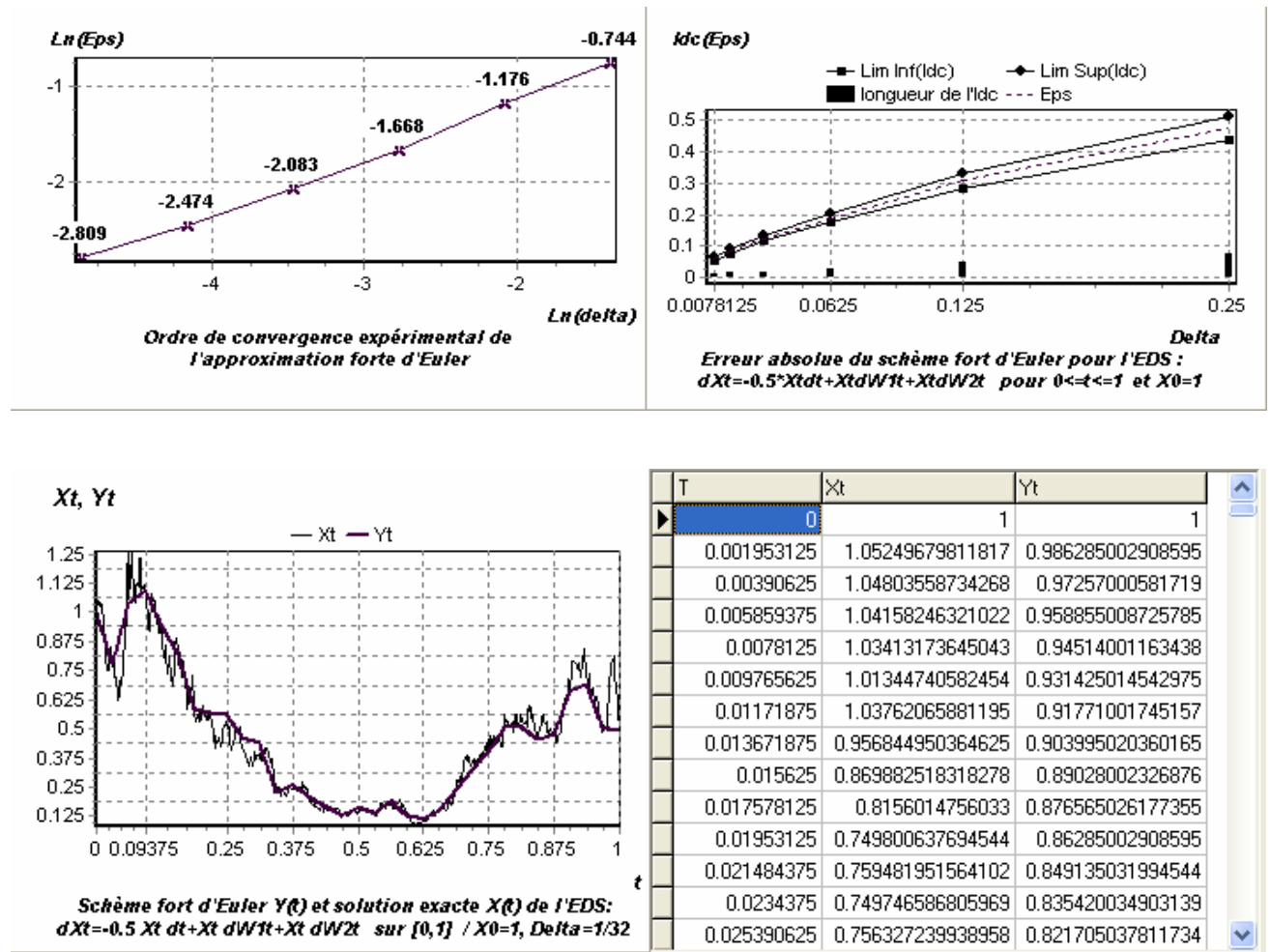
- i. Initialisation : $\text{Moyenne} \leftarrow 0.0$; $\text{Variance} \leftarrow 0.0$; $SQ \leftarrow 0.0$; {variable intermédiaire}
- ii. De $J=1, \dots, N$ faire : $\text{Moyenne} \leftarrow \text{Moyenne} + X[J]$; $SQ \leftarrow SQ + X[J] * X[J]$
- iii. Calcul des paramètres : $\text{Variance} \leftarrow (SQ - \text{Moyenne} * \text{Moyenne} / N) / (N - 1)$;
 $\text{Moyenne} \leftarrow \text{Moyenne} / N$;

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes taille de pas de temps

- a. Calcul de la taille de pas de temps maximale des approximations d'Euler : $\text{DELTA} \leftarrow (T - T0) / 4$;
- b. Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation d'Euler et initialisation :
 - i. $\text{DELTA_Y} \leftarrow 2 * \text{DELTA}$;
 - ii. $G \leftarrow 0$; {Initialisation de l'indice de la taille de pas de temps utilisée}
- c. Répéter $G = \text{Num}$ fois { Num est le nombre de différentes tailles de pas de temps }
 1. $G \leftarrow G + 1$;
 2. $\text{DELTA_Y} \leftarrow \text{DELTA_Y} / 2$; { taille de pas de temps courant }
 3. $\text{SQDELTA_Y} \leftarrow \sqrt{\text{DELTA_Y}}$; { Racine de DELTA_Y }
 4. Génération pour différentes séries :
 - i. Initialisation : $J \leftarrow 0$;
 - ii. Répéter $J = M$ fois {M est le nombre de séries}
 - 1) $J \leftarrow J + 1$; { indice de la série}
 - 2) $\text{EPSYLON}[J] \leftarrow 0.0$; {Somme des erreurs absolues de la série utilisée}
 - 3) Génération pour différentes trajectoires :
 - a. Initialisation : $K \leftarrow 0$;
 - b. Répéter $K = N$ fois {N est la taille de chacune des séries}
 - i. $K \leftarrow K + 1$; { indice de la trajectoire utilisée}
 - II. Evaluer la 1^{er} et la 2^{ème} composante du processus de Wiener à $t = T0$: $W1T \leftarrow 0.0$; $W2T \leftarrow 0.0$;
 - III. Génération de l'approximation d'Euler et son erreur absolue
 1. $I \leftarrow 0$; {I est l'indice du pas de temps}
 2. $TI \leftarrow T0$; {temps initial }
 3. $YT \leftarrow X0$; {valeur initiale de l'approximation }
 4. Tant que $TI < T$ faire
 - i. $I \leftarrow I + 1$;
 - ii. Calculer le temps courant : $TI \leftarrow TI + \text{DELTA_Y}$;
 - iii. Appeler la procédure GaussMarsag($G1, G2$);
 - iv. Calculer les incréments des deux processus de Wiener DW1 et DW2 à l'instant $t = TI$: $DW1TI \leftarrow G1 * \text{SQDELTA_Y}$; $DW2TI \leftarrow G2 * \text{SQDELTA_Y}$;
 - v. Calculer la valeur des deux processus de Wiener W1 et W2 :
 $W1T \leftarrow W1T + DW1TI$; $W2T \leftarrow W2T + DW2TI$;
 - vi. Evaluer l'approximation d'Euler en utilisant l'intégrale d'Itô:
 $YT \leftarrow YT + A(TI - \text{DELTA_Y}, YT) * \text{DELTA_Y}$
 $+ B1(TI - \text{DELTA_Y}, YT) * DW1TI + B2(TI - \text{DELTA_Y}, YT) * DW2TI$;

5. Evaluation de la solution exacte et Sommation des erreurs absolues :
 - i. Calcul de la solution exacte : $XT \leftarrow \text{SOLEXP}(TI, W1T, W2T)$;
 - ii. Calcul de la somme des erreurs: $\text{EPSYLON}[JJ] \leftarrow \text{EPSYLON}[JJ] + \text{ABSERR}(XT, YT)$;
 - c. Estimation de l'erreur absolue de la $j^{\text{ème}}$ série : $\text{EPSYLON}[JJ] \leftarrow \text{EPSYLON}[JJ]/N$;
5. Calcul de l'intervalle de confiance
 - i. Sauvegarder la taille de pas de temps courant : $\text{DEL}[G] \leftarrow \text{DELTA_Y}$;
 - ii. Appeler la procédure CalMoyVar : $\text{CalMoyVar}(M, \text{EPSYLON}, \text{MOYENNE}, \text{VARIANCE})$;
 - iii. $\text{EPS}[G] \leftarrow \text{MOYENNE}$;
 - iv. $\text{DIFFER}[G] \leftarrow \text{QUANTILE} * \text{SQRT}(\text{VARIANCE}/M)$; {moitié de la longueur de l'Idc }
Quantile est la valeur de Student à $(M-1)$ degré de liberté pour α fixé.

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha X_t dt + \beta_1 X_t dW_t^1 + \beta_2 X_t dW_t^2$ avec $T0 \leftarrow 0, T \leftarrow 1, X0 \leftarrow 1, \text{Alpha} \leftarrow -0.5, \text{Beta1} \leftarrow 1, \text{Beta2} \leftarrow 1, \text{Num} \leftarrow 7, N \leftarrow 100, M \leftarrow 20, \text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



L'erreur absolue (Eps) qui résulte de l'approximation d'Euler stochastique appliquée sur l'EDS : $dX_t = -0.5 \cdot X_t dt + X_t dW_t^1 + X_t dW_t^2 \quad \forall t \in [0,1]$ varie entre 0.041 et 0.475 pour des tailles de pas de temps (Delta) variant entre 2^{-8} et 2^{-2} . Notons que cette erreur est estimée après 2000 simulations effectuées pour chacune des tailles de pas de temps. Pour ce nombre important de simulation, le CPU est de l'ordre de 831 millisecondes. En outre, la représentation du logarithme de l'erreur en fonction de celui de Delta a donnée une tangente égale à 0.587 qui n'est autre que l'ordre de convergence expérimental de l'approximation forte d'Euler dans ce cas particulier de l'EDS.

**Erreur absolue de l'approximation d'Euler stochastique
(cas d'EDS linéaire bidimensionnelle)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.475	[0.438, 0.512]	0.074	<001
$2^{-3}=0.125$	0.308	[0.285, 0.331]	0.046	020
$2^{-4}=0.0625$	0.188	[0.176, 0.201]	0.024	020
$2^{-5}=0.03125$	0.124	[0.115, 0.133]	0.018	040
$2^{-6}=0.015625$	0.084	[0.075, 0.093]	0.017	100
$2^{-7}=0.0078125$	0.060	[0.054, 0.066]	0.012	211
$2^{-8}=0.00390625$	0.041	[0.037, 0.045]	0.008	440

2. Schème de Milstein

Ce schème d'approximation est proposé par Milstein, son ordre de convergence est supérieur à celui d'Euler, il est égal à 1. Lorsque le processus d'Itô et de Wiener sont de dimension égale à 1, alors l'approximation de Milstein en terme d'intégrale d'Itô n'est autre que celle d'Euler plus un terme,

$$(1.5) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2}bb' \cdot \left\{ (\Delta W_n)^2 - \Delta_n \right\}$$

Pour $d = m = 1, 2, \dots$, la $k^{ième}$ composante du schème de Milstein en terme d'intégrale d'Itô $I_{(j_1, j_2)}$ est :

$$(1.6) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)}$$

En terme d'intégrale de Stratonovich, elle est donnée par :

$$(1.7) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \underline{a}^k \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m \underline{L}^{j_1} b^{k, j_2} J_{(j_1, j_2)}, \text{ où } \underline{a}^k \text{ et } \underline{L}^{j_1} \text{ sont données par :}$$

$$(1.8) \quad \underline{a}^k = a^k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \underline{L}^j b^{k,j} \quad \forall 1 \leq k \leq d \quad (1.9) \quad \underline{L}^j = L^j = \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

Les intégrales multiples d'Itô et de Stratonovich pour $j_1, j_2, j_3, \dots, j_l \in \{0, 1, \dots, m\}$, $l = 1, 2, \dots$ et $n = 0, 1, \dots$ sont :

$$(1.10) \quad I_{(j_1, j_2, \dots, j_l)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \dots \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1}^{j_1} \dots dW_{s_l}^{j_l}, \quad (1.11) \quad J_{(j_1, j_2, \dots, j_l)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \dots \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1}^{j_1} \circ \dots \circ dW_{s_l}^{j_l} \text{ avec}$$

$$(1.12) \quad W_t^0 = t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Les intégrales multiples stochastiques $I_{(j_1, j_2)}$ et $J_{(j_1, j_2)}$ sont faciles à exprimer lorsque $j_1 = j_2$, ils prennent la forme :

$$(1.13) \quad I_{(j_1, j_1)} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (\Delta W_n^{j_1})^2 - \Delta_n \right\} \text{ et } J_{(j_1, j_1)} = \frac{1}{2} (\Delta W_n^{j_1})^2.$$

Par ailleurs, pour $j_1 \neq j_2$, on a $I_{(j_1, j_2)} = J_{(j_1, j_2)}$. Ces deux intégrales sont exprimées en utilisant l'approximation de l'intégrale multiple de Stratonovich $J_{(j_1, j_2)}^p$:

$$(1.14) \quad J_{(j_1, j_2)}^p = I_{(j_1, j_2)}^p = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta} (a_{j_2, 0} \varepsilon_{j_1} - a_{j_1, 0} \varepsilon_{j_2}) + \Delta A_{j_1, j_2}^p$$

La variable $A_{(j_1, j_2)}^p$ est donnée par $A_{(j_1, j_2)}^p = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} (\zeta_{j_1, r} \eta_{j_2, r} - \eta_{j_1, r} \zeta_{j_2, r})$.

Les v.a $\varepsilon_j, \eta_{r,j}$ et $\zeta_{j,r}$ sont indépendantes de loi $N(0,1)$ et l'expression de $a_{j,0}$ est donnée en (III.2.12).

La précision de l'approximation $I_{(j_1, j_2)}^p$ de $I_{(j_1, j_2)}$ dépend de p . Ce dernier doit être choisi de telle façon que $p = p(\Delta) \geq \frac{K}{\Delta}$ pour une certaine valeur positive K qui permet à l'approximation de MilStein d'atteindre un certain ordre de convergence $\gamma=1.0$.

Cas particulier

Dans la majorité des problèmes pratiques, les coefficients de diffusion possèdent des propriétés particulières qui nous évitent carrément l'utilisation des intégrales stochastiques doubles, ce qui rend facile l'implémentation des approximations sur ordinateur. A titre d'exemples, nous prenons les cas suivants :

1. Cas d'un bruit additive $b(t, x) = b(t) \Rightarrow \frac{db(t, x)}{dx} = 0$, le schème de Mil Stein se coïncide

$$\text{avec celui d'Euler :} \quad (1.15) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W$$

2. Cas d'un bruit diagonal, pour lequel $d=m$, $b^{k,j}(t, x) = 0$ et $\frac{db^{j,j}}{dx^k}(t, x) = 0$

$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, et $\forall j = k = 1, \dots, m$, $j \neq k$, l'approximation de Mil Stein est de la forme :

$$(1.16) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + b^{k,k} \Delta W^k + \frac{1}{2} b^{k,k} \frac{db^{k,k}}{dx^k} \left\{ (\Delta W^k)^2 - \Delta \right\}$$

3. Cas d'un bruit commutatif, pour lequel la matrice de diffusion satisfait la condition de commutativité : $\underline{L}^{j_1} b^{k, j_2}(t, x) = \underline{L}^{j_2} b^{k, j_1}(t, x) \quad \forall j_1, j_2 = 1, \dots, m, k = 1, \dots, d$ et $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, et le schème de Mil Stein sera dans ce cas :

$$(1.17) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W^j + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m \underline{L}^{j_1} b^{k, j_2} \Delta W^{j_1} \Delta W^{j_2}$$

a^k et $\underline{L}^j$ sont donnés en (1.8) et (1.9)

L'algorithme ci-dessous nous permet d'estimer l'intervalle de confiance des erreurs absolues résultantes de l'approximation de Milstein (1.6) de la solution exacte de l'EDS unidimensionnelle :

$$dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t$$

Algorithme 5.1.2:

1. **Paramètres** : $T_0, T, X_0, Alpha, Beta$.

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions

- Génération des fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B(TI, XI)$: $A \leftarrow ALPHA * XI$; $B \leftarrow BETA * XI$;
- Génération de la première dérivé partielle de B $dB(TI, XI)/dXI$: $DBX \leftarrow BETA$;
- Génération de la solution explicite SOLEXPL (TI, WT) :
 $SOLEXPL(TI, WT) \leftarrow X_0 * EXP((ALPHA - 0.5 * BETA * BETA) * (TI - T_0) + BETA * WT)$;
- Génération de la formule de l'erreur absolue {Voir Algorithme 5.1.1}

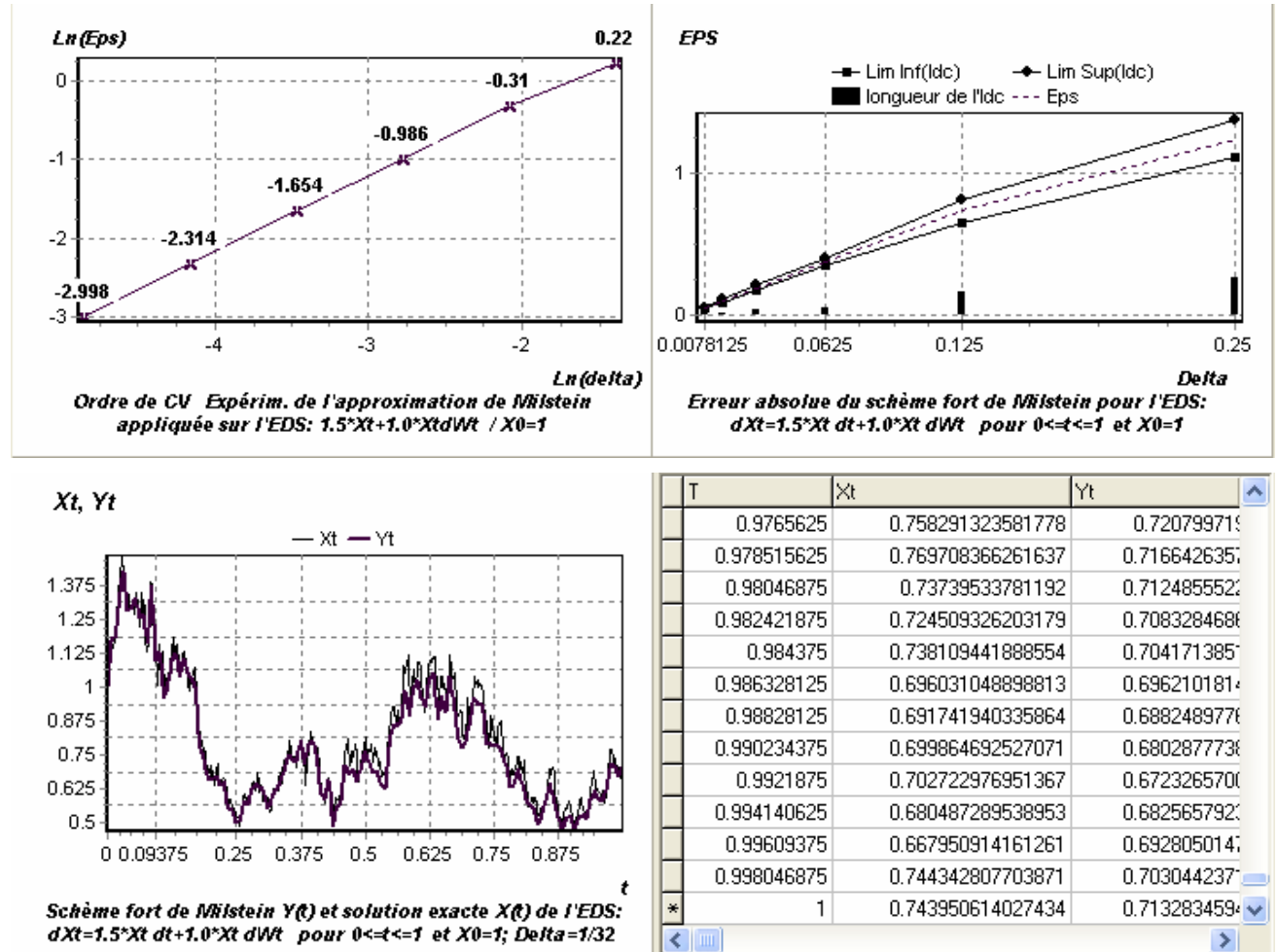
Etape2: Génération de la procédure CalMoyVar($N, X, SMOYENNE, SVARIANCE$); {Voir Algorithme 5.1.1}

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes tailles de pas de temps

- Calcul de la taille de pas de temps maximale de l'approximation de Milstein : $DELTA \leftarrow (T - T_0)/4$;
- Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation de Milstein et initialisation :
 - $DELTA_Y \leftarrow 2 * DELTA$;
 - $G \leftarrow 0$; {Initialisation de l'indice de la taille de pas de temps utilisé}
- Répéter $G = Num$ fois { Num est le nombre de différentes tailles de pas de temps }
 - $G \leftarrow G + 1$;
 - $DELTA_Y \leftarrow DELTA_Y / 2$; { taille de pas de temps courant }
 - $SQDELTA_Y \leftarrow SQRT(DELTA_Y)$; { Racine de $DELTA_Y$ }

4. Génération pour différentes séries :
 - i. Initialisation : $J \leftarrow 0$;
 - ii. Répéter $J=M$ fois {M est le nombre de séries}
 - 1) $J \leftarrow J+1$; { indice de la série }
 - 2) $EPSYLON[J] \leftarrow 0.0$; {Somme des erreurs absolues de la série utilisée }
 - 3) Génération pour différentes trajectoires :
 - a. Initialisation : $J \leftarrow 0$;
 - b. Répéter $K=N$ fois {N est la taille de chacune des séries}
 - i. $K \leftarrow K+1$; { indice de la trajectoire utilisée }
 - ii. Evaluer le processus de Wiener à $t=T0$: $WT \leftarrow 0.0$;
 - iii. Génération de l'approximation de Milstein et son erreur absolue
 1. $I \leftarrow 0$; {I est l'indice du pas de temps}
 2. $TI \leftarrow T0$; {temps initial }
 3. $YT \leftarrow X0$; {valeur initiale de l'approximation}
 4. Tant que $TI < T$ faire
 - i. $I \leftarrow I+1$;
 - ii. Calculer le temps courant : $TI \leftarrow TI + DELTA_Y$;
 - iii. Si $I \bmod 2 = 1$ alors Appeler la procédure GaussMarsag($G1, G2$)
Sinon $G1 \leftarrow G2$;
 - iv. Calculer les incrémentations du processus de Wiener DW à l'instant $t=TI$: $DWTI \leftarrow G1 * SQDELTA_Y$;
 - v. Calculer la valeur du processus de Wiener W : $WT \leftarrow WT + DWTI$;
 - vi. Evaluer l'approximation de Milstein en utilisant l'intégrale d'Itô :
 - o Calcul des intégrales d'Itô :
 - $I1 \leftarrow DWTI$;
 - $I11 \leftarrow 0.5 * (DWTI * DWTI - DELTA_Y)$;
 - o Evaluer les fonctions ainsi que les dérivés du schème de Milstein :
 - $AA \leftarrow A(TI - DELTA_Y, YT)$;
 - $BB \leftarrow B(TI - DELTA_Y, YT)$;
 - $DBDX \leftarrow DBX(TI - DELTA_Y, YT)$;
 - o Evaluer les opérateurs du schème de Milstein
 $L1B11 \leftarrow BB * DBDX$;
 - o Calculer l'approximation de Milstein
 $YT \leftarrow YT + AA * DELTA_Y + BB * I1 + L1B11 * I11$;
5. Evaluation de la solution exacte et Somme des erreurs absolues :
 - ii. Calcul de la solution exacte : $XT \leftarrow SOLEXPL(TI, WT)$;
 - iii. Calcul de la somme des erreurs:
 $EPSYLON[J] \leftarrow EPSYLON[J] + ABSERR(XT, YT)$;
 - c. Estimation de l'erreur absolue de la $j^{ème}$ série : $EPSYLON[J] \leftarrow EPSYLON[J] / N$;
5. Estimation de l'intervalle de confiance de l'erreur ($Idc(Eps)$)
 - ❑ Calcul de la taille de pas de temps courant : $DEL[G] \leftarrow DELTA_Y$;
 - ❑ Appeler la procédure CalMoyVar : $CalMoyVar(M, EPSYLON, MOYENNE, VARIANCE)$;
 - ❑ $EPS[G] \leftarrow Moyenne$; { estimation de l'erreur }
 - ❑ $DIFFER[G] \leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE/M)$; {moitié de la longueur de l'Idc }

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha \cdot X_t dt + \beta \cdot X_t dW_t$ avec $T0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X0 \leftarrow 1$,
 $Alpha \leftarrow 1.5$, $Beta \leftarrow 1.0$, $Num \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $Quantile(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



Selon les résultats de simulation, la valeur minimale et maximale de la longueur de l'intervalle de confiance de l'erreur absolue pour différentes valeurs de Delta est égale respectivement à 6×10^{-3} et 0.243. Néanmoins, l'application du schéma d'Euler sur la même EDS (voir algorithme 4.3.2) a donné des valeurs plus élevées, soit respectivement 0.027 et 0.323. Ce qui nous incite à dire que le schéma de Milstein donne des résultats meilleurs pour ce cas particulier d'EDS. L'ordre de convergence expérimental pour ce type d'approximation dans ce cas particulier d'EDS est proche de 1.0, soit 0.9359.

Le temps d'exécution pour l'estimation de l'erreur absolue dû au schéma de Milstein dans le cas de l'EDS linéaire unidimensionnelle $dX_t = 1.5 \cdot X_t dt + X_t dW_t$ est égal à 471 millisecondes.

Erreur absolue de l'approximation de Milstein

(cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	1.251	[1.130, 1.372]	0.243	<001
$2^{-3}=0.125$	0.732	[0.668, 0.796]	0.128	010
$2^{-4}=0.0625$	0.384	[0.361, 0.407]	0.046	010
$2^{-5}=0.03125$	0.187	[0.170, 0.205]	0.034	030
$2^{-6}=0.015625$	0.01	[0.089, 0.108]	0.018	060
$2^{-7}=0.0078125$	0.050	[0.046, 0.053]	0.006	121
$2^{-8}=0.00390625$	0.025	[0.022, 0.028]	0.006	240

Dans le cas bidimensionnel, $dX_t = A(t, X_t)dt + B1(t, X_t)dW_t^1 + B2(t, X_t)dW_t^2, \forall t \in [T_0, T]$ l'algorithme d'estimation de l'intervalle de confiance des erreurs absolues dû à l'approximation de Milstein (1.6) est le même que l'algorithme 5.1.1. Seulement on rajoute certaines procédures qui concernent la simulation de l'approximation de l'intégrale multiples d'Itô.

On reprend les fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B1(TI, XI)$ et $B2(TI, XI)$, la solution explicite $SOLEXPL(TI, W1T, W2T)$, la formule de l'erreur absolue $ABSERR(XT, YT)$ et la procédure $CalMoyVar(M, EPSYLON, MOYENNE, VARIANCE)$ pour l'estimation des paramètres d'un échantillon.

Algorithme 5.1.3 :

1. **Paramètres** : $T0, T, X0, Alpha, B1, B2$.

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions suscitées {Voir Algorithme 5.1.1}

Etape2: Génération des procédures

a. Calcul du paramètre d'approximation ROP dans les intégrales multiples J12 par la procédure $PARAINTMULTJ12(P, ROP)$:

- i. $ROP \leftarrow 0.0$;
- ii. De $R \leftarrow 1$ à P faire $ROP \leftarrow ROP + 1/(R*R)$;
- iii. $ROP \leftarrow PI*PI/6 - ROP$; $ROP \leftarrow ROP/(2*PI*PI)$;

b. Génération des intégrales multiples J12 par la procédure :

$INTMULTJ12(PL, PR, ROP, DELTA, GSI1, GSI2, MU1, MU2, SOMVAL, J12)$;

Où - Delta est le pas de temps, PL et PR (≤ 100) sont les paramètres de précisions.

- $GSI1, GSI2, MU1$ et $MU2$ sont des nombres aléatoires de loi gaussiennes générées par la procédure GaussMarsag (voir Algorithme 1.2.1).
- $SOMVAL$ est une variable intermédiaire permettant de faire la sommation.

i. De $R \leftarrow PL$ à PR faire

GaussMarsag($ZETA[1, R], ZETA[2, R]$); GaussMarsag($ETA[1, R], ETA[2, R]$);

$SOMVAL \leftarrow SOMVAL + (1/R) * (ZETA[1, R] * (SQRT(2) * GSI2 + ETA[2, R])$

$- ZETA[2, R] * (SQRT(2) * GSI1 + ETA[1, R]))$; /*Eta et Zeta sont des matrices de dimension (2, 100) */

ii. $J12 \leftarrow SOMVAL * DELTA / PI$;

$J12 \leftarrow J12 + DELTA * (GSI1 * GSI2 / 2 + SQRT(ROP) * (MU1 * GSI2 - MU2 * GSI1))$;

c. Calcul des paramètres d'un échantillon donné X de taille N :

Procédure $CalMoyVar(M, EPSYLON, MOYENNE, VARIANCE)$

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes taille de pas de temps

a. Calcul de la taille de pas de temps maximale des approximations de Milstein : $DELTA \leftarrow (T - T0)/4$;

b. Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation de Milstein et initialisation :

i. $DELTA_Y \leftarrow 2 * DELTA$;

ii. $G \leftarrow 0$; {Initialisation de l'indice de la taille de pas de temps utilisée }

c. Appeler la procédure $PARAINTMULTJ12(P, ROP)$ pour avoir une approximation de Rop

d. Répéter $G = \text{Num fois}$ { Num est le nombre de différentes tailles de pas de temps }

1. $G \leftarrow G + 1$;

2. $DELTA_Y \leftarrow DELTA_Y / 2$; { taille de pas de temps courant }

3. $SQDELTA_Y \leftarrow SQRT(DELTA_Y)$; { Racine de $DELTA_Y$ }

4. Génération pour différentes séries :

i. Initialisation : $J \leftarrow 0$;

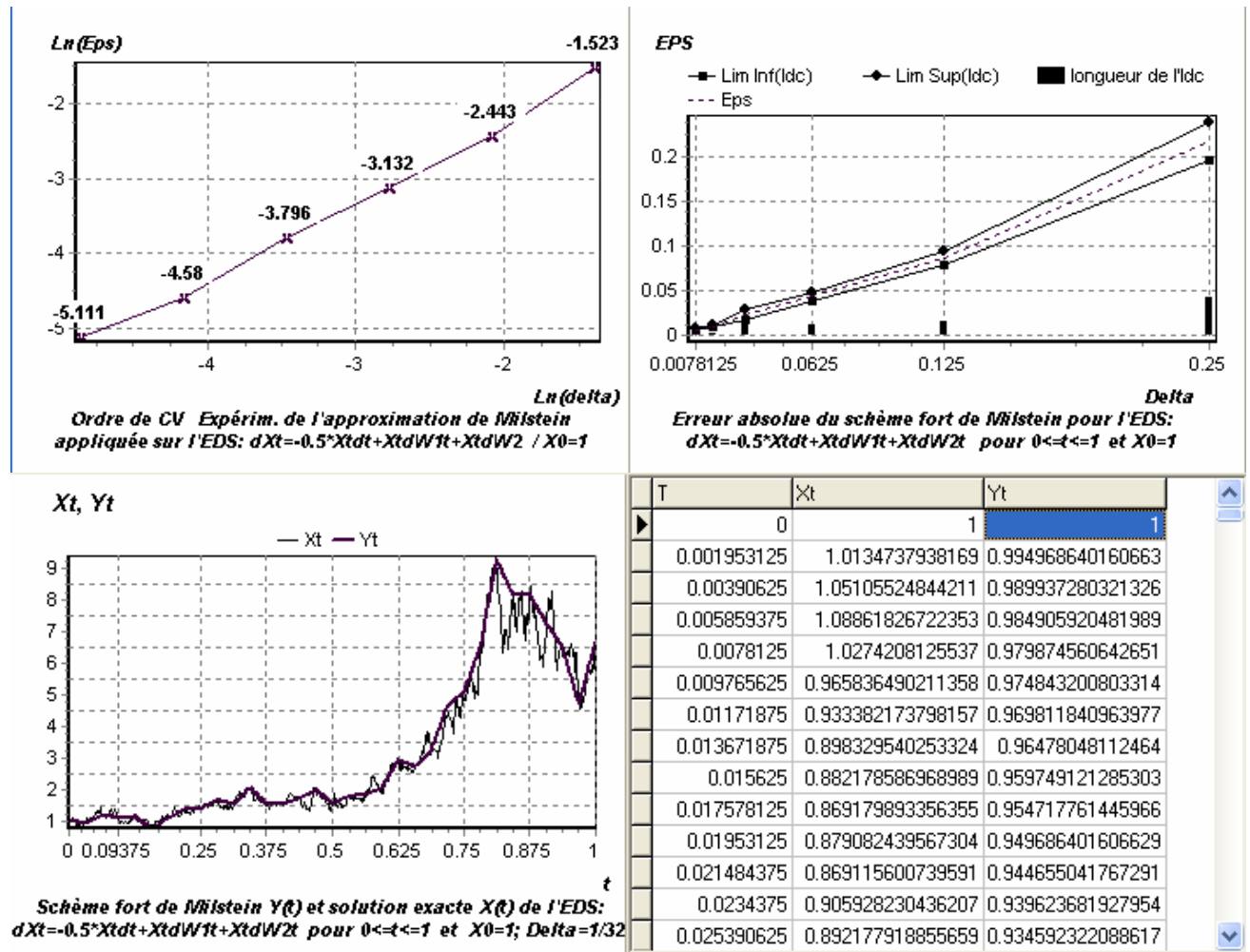
ii. Répéter $J = M$ fois {M est le nombre de séries}

1) $J \leftarrow J + 1$; { indice de la série }

2) $EPSYLON[J] \leftarrow 0.0$; {Somme des erreurs absolues de la série utilisée }

3) Génération pour différentes trajectoires :**a. Initialisation :** $J \leftarrow 0$;**b. Répéter** $K=N$ fois {N est la taille de chacune des séries}**I.** $K \leftarrow K+1$; { indice de la trajectoire utilisée }**II.** Evaluer la 1^{er} et la 2^{ème} composante du processus de Wiener à $t=T_0$: $W1T \leftarrow 0.0$; $W2T \leftarrow 0.0$;**III.** Génération de l'approximation de Milstein et son erreur absolue**1.** $I \leftarrow 0$; {I est l'indice du pas de temps}**2.** $TI \leftarrow T_0$; {temps initial }**3.** $YT \leftarrow X_0$; {valeur initiale de l'approximation }**4.** Tant que $TI < T$ faire**i.** $I \leftarrow I+1$;**ii.** Calculer le temps courant : $TI \leftarrow TI + \Delta Y$;**iii.** Appeler la procédure GaussMarsag($G1, G2$);**iv.** Calculer les incrémentations des deux processus de Wiener $DW1$ et $DW2$ à l'instant $t=TI$: $DW1TI \leftarrow G1 * \sqrt{\Delta Y}$; $DW2TI \leftarrow G2 * \sqrt{\Delta Y}$;**v.** Calculer la valeur des deux processus de Wiener $W1$ et $W2$ $W1T \leftarrow W1T + DW1TI$; $W2T \leftarrow W2T + DW2TI$;**vi.** Evaluer l'approximation de l'intégrale multiple de Stratonovich $J12$ **o** $SOMVAL \leftarrow 0.0$;**o** Appeler la procédure GaussMarsag($MU1, MU2$);**o** Appeler la procédure $INTMULTJ12(1, P, ROP, \Delta Y, G1, G2, MU1, MU2, SOMVAL, J12P)$;**o** Calcul de l'approximation $J21P$: $J21P \leftarrow DW1TI * DW2TI - J12P$;**vii.** Evaluer l'approximation de Milstein en utilisant l'intégrale d'Itô:**o** Calcul des intégrales d'Itô $I1 \leftarrow DW1TI$; $I11 \leftarrow 0.5 * (DW1TI * DW1TI - \Delta Y)$; $I12P \leftarrow J12P$; $I2 \leftarrow DW2TI$; $I22 \leftarrow 0.5 * (DW2TI * DW2TI - \Delta Y)$; $I21P \leftarrow J21P$;**o** Evaluer les fonctions ainsi que les dérivés du schème de Milstein : $AA \leftarrow A(TI - \Delta Y, YT)$; $BB1 \leftarrow B1(TI - \Delta Y, YT)$; $DB1DX \leftarrow DB1X(TI - \Delta Y, YT)$; $BB2 \leftarrow B2(TI - \Delta Y, YT)$; $DB2DX \leftarrow DB2X(TI - \Delta Y, YT)$;**o** Evaluer les opérateurs du schème de Milstein $L1B11 \leftarrow BB1 * DB1DX$; $L1B12 \leftarrow BB1 * DB2DX$; $L2B12 \leftarrow BB2 * DB2DX$; $L2B11 \leftarrow BB2 * DB1DX$;**o** Calculer l'approximation par le schème de Milstein : $YT \leftarrow YT + AA * \Delta Y + BB1 * I1 + BB2 * I2 + L1B11 * I11$
 $+ L1B12 * I12P + L2B11 * I21P + L2B12 * I22$;**5.** Evaluation de la solution exacte et Somme des erreurs absolues : $\triangleright$ Calcul de la solution exacte : $XT \leftarrow SOLEXPL(TI, W1T, W2T)$; $\triangleright$ Calcul de la somme des erreurs: $EPSYLON[J] \leftarrow EPSYLON[J] + ABSERR(XT, YT)$;**c.** Estimation de l'erreur absolue de la $j^{ème}$ série : $EPSYLON[J] \leftarrow EPSYLON[J] / N$;**5. Calcul de l'intervalle de confiance** $\square$ Sauvegarder la taille de pas de temps courant : $DEL[G] \leftarrow \Delta Y$; $\square$ Appeler la procédure CalMoyVar : $CalMoyVar(M, EPSYLON, MOYENNE, VARIANCE)$; $\square$ $EPS[G] \leftarrow MOYENNE$; $\square$ $DIFFER[G] \leftarrow QUANTILE * \sqrt{VARIANCE / M}$; {moitié de la longueur de l'Idc }

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha X_t dt + \beta_1 X_t dW_t^1 + \beta_2 X_t dW_t^2$ avec $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_0 \leftarrow 1$, $\alpha \leftarrow -0.5$, $\beta_1 \leftarrow -1.0$, $\beta_2 \leftarrow -1.0$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow -1.73$, $P \leftarrow 10$.



En utilisant la même EDS linéaire bidimensionnelle pour tester le schème de Milstein, nous retrouvons des résultats meilleurs mais la durée d'exécution est plus longue, soit 12.077 millisecondes. Ce temps devient de plus en plus important lorsqu'on réduit le pas.

Nous enregistrons ainsi une erreur absolue variant entre 0.0026 et 0.202 correspondants aux mêmes tailles de pas de temps que précédemment ($2^{-8}, \dots, 2^{-2}$) avec un ordre de convergence expérimental égal à 1.044.

Erreur absolue de l'approximation de Milstein (cas d'EDS linéaire bidimensionnelle)

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.202	[0.179, 0.224]	0.045	100
$2^{-3}=0.125$	0.090	[0.081, 0.098]	0.016	190
$2^{-4}=0.0625$	0.039	[0.036, 0.042]	0.006	381
$2^{-5}=0.03125$	0.021	[0.018, 0.023]	0.004	751
$2^{-6}=0.015625$	0.009	[0.009, 0.01]	0.001	1.532
$2^{-7}=0.0078125$	0.005	[0.004, 0.005]	0.001	3.035
$2^{-8}=0.00390625$	0.0026	[0.0023, 0.0029]	0.001	6.088

3. Schème fort de Taylor d'ordre 1.5

Les intégrales stochastiques multiples fournissent des informations supplémentaires concernant la trajectoire du processus de Wiener dans un sous intervalle de discrétisation. La nécessité de les inclure dans des schèmes d'ordre supérieur constitue la différence fondamentale entre l'analyse numérique des EDS et des EDO. Grâce au développement de Taylor stochastique (3.1.11) dans un cas particulier où $d=m=1$ et $a(t, x) = a(x)$, $b(t, x) = b(x)$, on obtient le schème fort de Taylor d'ordre 1.5 :

$$(1.18) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2}bb' \left\{ (\Delta W_n)^2 - \Delta_n \right\} + a'b\Delta Z_n + \frac{1}{2} \left(aa' + \frac{1}{2}b^2 a'' \right) \Delta_n^2 + \left(ab' + \frac{1}{2}b^2 b'' \right) \left\{ \Delta W_n \Delta_n - \Delta Z_n \right\} + \frac{1}{2}b \left(bb'' + (b')^2 \right) \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W_n)^3 - \Delta_n \Delta W_n \right\}$$

La variable ΔZ_n est défini par :

$$(1.19) \quad \Delta Z_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} ds_2 \quad \text{Où } \Delta Z_n \approx N\left(0, \frac{1}{3}\Delta_n^3\right) \text{ et } E(\Delta Z_n \Delta W_n) = \frac{1}{2}\Delta_n^2$$

Le dernier terme dans (1.18) représente l'intégral d'Itô triplet $I_{(1,1,1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W_n)^3 - \Delta_n \Delta W_n \right\}$

Dans le cas général multidimensionnel $d, m=1, 2, \dots$, la $k^{ième}$ composante du schème fort de Taylor d'ordre 1.5 pour $k=1, 2, \dots, d$ est donnée par:

$$(1.20) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \frac{1}{2} L^0 a^k \Delta_n^2 + \sum_{j=1}^m \left(b^{k,j} \Delta W_n^j + L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + L^j a^k I_{(j,0)} \right) + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{j_1} L^{j_2} b^{k, j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)} \quad \text{où } L^0 \text{ est donnée en (III.1.14)}$$

Les intégrales doubles d'Itô sont données en (1.13) et (1.14)

Pour l'estimation de l'intervalle de confiance des erreurs absolues résultantes de l'approximation de Taylor d'ordre 1.5 (1.18) de la solution exacte de l'EDS unidimensionnelle : $dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t$, on se base sur l'algorithme 5.1.2. Nous aurons besoin des fonctions de dérivés partielles de premier et second ordre et nous remplaçons les instructions permettant la génération du schème de Milstein (voir étape3) par celle de Taylor d'ordre 1.5 .

Algorithme 5.1.3 :

1. **Paramètres** : $T0, T, X0, A, B$,

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions des fonctions

a. Génération des fonctions des fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B(TI, XI)$, solution exacte et le critère de l'erreur absolue : {Voir Algorithme 5.1.2 }

b. Génération de la première et la deuxième dérivé partielle de A et B en x et en t :

$DAX \leftarrow ALPHA$; $DAT \leftarrow 0.0$; $DDAXX \leftarrow 0.0$;

$DBX \leftarrow BETA$; $DBT \leftarrow 0.0$; $DDBXX \leftarrow 0.0$;

Etape2: Génération de la procédure $CalMoyVar(N, X, SMOYENNE, SVARIANCE)$; {Voir Algorithme 5.1.1 }

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes tailles de pas de temps

.....

vi. Evaluer l'approximation de Taylor d'ordre 1.5 en utilisant l'intégrale d'Itô :

o Calcul des intégrales d'Itô :

$I1 \leftarrow DWTI$; $I11 \leftarrow 0.5 * (DWTI * DWTI - DELTA_Y)$; $I00 \leftarrow 0.5 * DELTA_Y * DELTA_Y$;
 $I10 \leftarrow 0.5 * SQDELTA_Y * DELTA_Y * (G1 + G2 / SQRT3)$; $I01 \leftarrow DWTI * DELTA_Y - I10$;
 $I111 \leftarrow 0.5 * (DWTI * DWTI / 3 - DELTA_Y) * DWTI$;

o Evaluer les fonctions ainsi que les dérivés du schème de Taylor d'ordre 1.5 :

$TIANC \leftarrow TI - DELTA_Y$; {point gauche du sous intervalle}

$AA \leftarrow A(TIANC, YT)$; $DADX \leftarrow DAX(TIANC, YT)$;

$BB \leftarrow B(TIANC, YT)$; $DBDX \leftarrow DBX(TIANC, YT)$;

o Evaluer les opérateurs du schème de Taylor d'ordre 1.5

$L0A11 \leftarrow DAT(TIANC, YT) + AA * DADX + 0.5 * BB * BB * DDAXX(TIANC, YT)$;

$L0B11 \leftarrow DBT(TIANC, YT) + AA * DBDX + 0.5 * BB * BB * DDBXX(TIANC, YT)$;

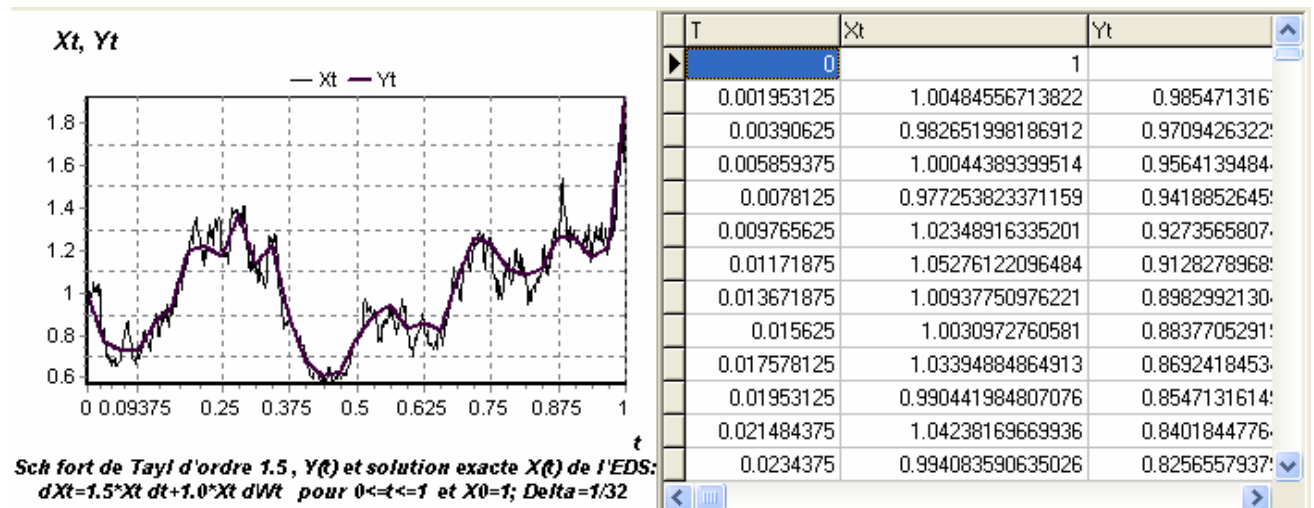
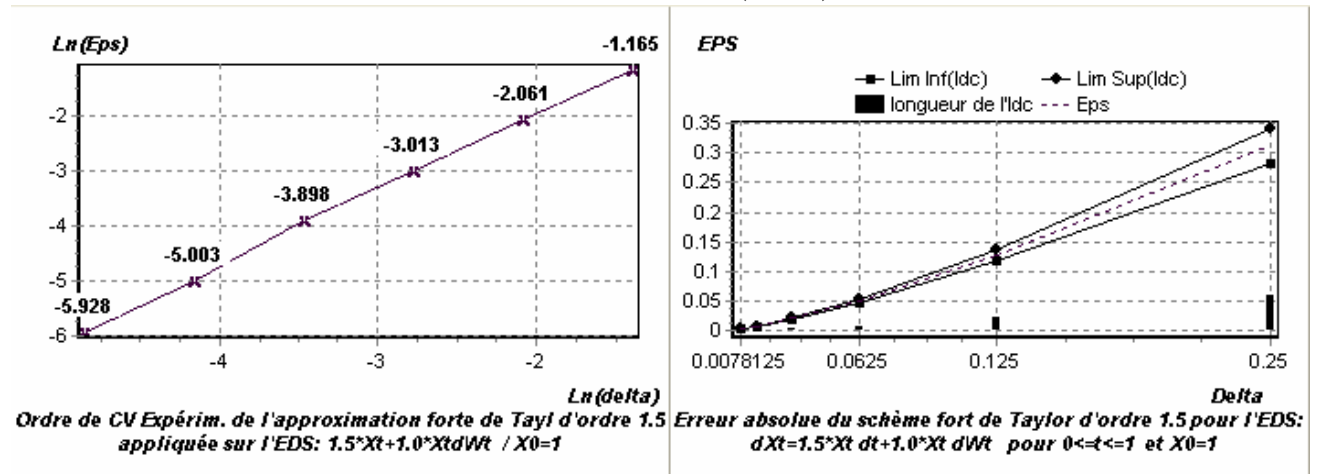
$L1A11 \leftarrow BB * DADX$; $L1B11 \leftarrow BB * DBDX$;

$L1L1B11 \leftarrow BB * (DBDX * DBDX + BB * DDBXX(TIANC, YT))$;

o Calculer l'approximation de Taylor d'ordre 1.5 :

$YT \leftarrow YT + AA * DELTA_Y + BB * I1 + L1B11 * I11 + L1A11 * I10 + L0B11 * I01 + L0A11 * I00 + L1L1B11 * I111$;
{Pour la suite voir Algorithme 5.1.2}.....

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t$ avec $T0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X0 \leftarrow 1$, $\alpha \leftarrow 1.5$, $\beta \leftarrow 1.0$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$.



La méthode d'approximation forte de Taylor d'ordre 1.5 appliquée sur une EDS de type linéaire: $dX_t = 1.5X_t dt + X_t dW_t \quad \forall t \in [0,1]$ donne des résultats plus précises avec une erreur variant entre 0.31 et $9 \cdot 10^{-4}$ et un ordre de convergence expérimental égal à 1.3926. En ce qui concerne le temps d'exécution des résultats obtenus, le CPU enregistre 911 millisecondes.

**Erreur absolue de l'approximation forte de Taylor d'ordre 1.5
(cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.310	[0.289, 0.332]	0.043	010
$2^{-3}=0.125$	0.127	[0.119,0.036]	0.017	020
$2^{-4}=0.0625$	0.049	[0.047,0.052]	0.005	030
$2^{-5}=0.03125$	0.020	[0.018,0.021]	0.003	050
$2^{-6}=0.015625$	0.0067	[0.006,0.007]	0.0008	120
$2^{-7}=0.0078125$	0.0026	[0.0025,0.003]	0.0002	221
$2^{-8}=0.00390625$	0.0009	[0.0008,0.001]	0.0001	460

4. Schème fort de Taylor d'ordre 2.0

En incluant plus de termes dans le développement de Taylor stochastique, on obtient des schèmes d'ordre encore plus supérieur que ceux établis jusqu'à présent. Ces schèmes sont de plus en plus compliqués dans le cas général mais souvent simples dans des cas particuliers. Dans le cas multidimensionnel $d=1,2,\dots$ avec un bruit scalaire $m=1$, la $k^{ième}$ composante du schème fort de Taylor d'ordre 2.0 pour $k=1,2,\dots,d$ est donnée par:

$$(1.21) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \underline{a}^k \Delta W_n + \underline{b}^k \Delta W_n + \frac{1}{2!} \underline{L}^1 \underline{b}^k (\Delta W_n)^2 + \underline{L}^1 \underline{a}^k \Delta Z_n + \frac{1}{2} \underline{L}^0 \underline{a}^k (\Delta_n)^2 + \underline{L}^0 \underline{b}^k \{\Delta W_n \Delta_n - \Delta Z_n\} \\ + \frac{1}{3!} \underline{L}^1 \underline{L}^1 \underline{b}^k (\Delta W_n)^3 + \frac{1}{4!} \underline{L}^1 \underline{L}^1 \underline{L}^1 \underline{b}^k (\Delta W_n)^4 + \underline{L}^0 \underline{L}^1 \underline{b}^k J_{(0,1,1)} + \underline{L}^1 \underline{L}^0 \underline{b}^k J_{(1,0,1)} + \underline{L}^1 \underline{L}^1 \underline{a}^k J_{(1,1,0)}$$

Les variables aléatoires ΔW_n et ΔZ_n sont générées comme précédemment et quant à la génération des intégrales multiples de Stratonovich, voir section2 du chapitre 3 (Formule 2.15 et 2.16).

L'opérateur $\underline{L}^j$ est donnée en (1.9) et $\underline{L}^0$ est donnée par : (1.22) $\underline{L}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d \underline{a}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$

L'algorithme ci-dessous nous permet d'estimer l'intervalle de confiance des erreurs absolues résultantes de l'approximation de Taylor d'ordre 2.0 pour l'EDS unidimensionnelle : $dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t$.

On se base toujours sur l'algorithme 5.1.2 avec quelques rajouts et modifications.

Algorithme 5.1.4 :

1. **Paramètres** : $T0, T, X0, A, B$.

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions

- Génération des fonctions drift et de diffusion : $A \leftarrow \text{ALPHA} * XI$; $B \leftarrow \text{BETA} * XI$;
- Génération des dérivés partielles de A et B en x et en t :
 $DAX \leftarrow \text{ALPHA}$; $DAT \leftarrow 0.0$; $DDAXX \leftarrow 0.0$; $DBX \leftarrow \text{BETA}$;
 $DBT \leftarrow 0.0$; $DDBXX \leftarrow 0.0$; $DDBXT \leftarrow 0.0$; $DDBTX \leftarrow 0.0$; $DDDBXXX \leftarrow 0.0$;
- Génération de la solution explicite et de la formule de l'erreur moyenne

Etape2: Génération des procédures

- Calcul des paramètres pour l'évaluation des intégrales multiples par la procédure $\text{PARAINTMULT}(P, \text{ALPHA}, \text{ROP})$:

- i. $ALPHAP \leftarrow 0.0; ROP \leftarrow 0.0;$
- ii. De $R \leftarrow 1$ à P faire $INCRE \leftarrow 1/(R*R); ROP \leftarrow ROP + INCRE;$
 $ALPHAP \leftarrow ALPHAP + INCRE * INCRE; \{P \leftarrow 5 \text{ est le paramètre de troncation pour les}$
intégrales multiples ou paramètre de précision }
- iii. $ALPHAP \leftarrow (PI * PI * PI * PI / 90 - ALPHAP) / (2 * PI * PI);$
- iv. $ROP \leftarrow PI * PI / 6 - ROP; ROP \leftarrow ROP / (2 * PI * PI);$
- b. Génération des intégrales multiples $J1, J01, J10, J11, J011, J101$ et $J110$ par la procédure *INTMULT* ($P; DWT, J1, J01, J10, J11, J011, J101, J110$);
 - i. Appeler la procédure *GaussMarsag*($FIIP, MUEIP$);
 - ii. Initialization: $A10 \leftarrow 0.0; B1P \leftarrow 0.0; B11P \leftarrow 0.0;$
 - iii. Calcul de $A10, B1P$ et $B11P$:
 - 1. De $R \leftarrow 1$ TO P faire
 - Appeler la procédure *GaussMarsag*($FII[R], ETA1[R]$);
 - $A10 \leftarrow A10 + FII[R] / R;$
 - $B1P \leftarrow B1P + ETA1[R] / (R * R);$
 - $B11P \leftarrow B11P + (FII[R] * FII[R] + ETA1[R] * ETA1[R]) / (R * R);$
 - 2. $A10 \leftarrow (1 / PI) * A10 * SQRT(2.0) * SQDELTA_Y;$
 $A10 \leftarrow A10 - 2 * SQDELTA_Y * SQRT(ROP) * MUEIP;$
 - 3. $B1P \leftarrow B1P * SQDELTA_Y / SQRT(2.0) + SQDELTA_Y * SQRT(ALPHAP) * FIIP;$
 - 4. $B11P \leftarrow B11P / (4 * PI * PI);$
 - iv. Calcul des intégrales $J1, J01, J10$ et $J11$
 - 1. $J1 \leftarrow GSI * SQDELTA_Y;$
 - 2. $J10 \leftarrow 0.5 * DELTA_Y * (J1 + A10);$
 - 3. $J01 \leftarrow J1 * DELTA_Y - J10;$
 - 4. $J11 \leftarrow 0.5 * J1 * J1;$
 - v. Calcul des intégrales $J011, J101$ et $J110$
 - 1. $GSI \leftarrow DWT;$
 - 2. Calcul de $C11P$:
 - o $C11P \leftarrow 0.0; R \leftarrow 0;$
 - o Répéter P fois :
 - $R \leftarrow R + 1; L \leftarrow 0;$
 - Répéter P fois :
 - $L \leftarrow L + 1;$
 - Si $L <> R$ Alors $C11P \leftarrow C11P + (R / (R * R - L * L)) * (FII[R] * FII[L] / L - ETA1[R] * ETA1[L] * L / R);$
 - o $C11P \leftarrow -C11P / (2 * PI * PI);$
 - 3. $J101 \leftarrow SQR(DELTA_Y * GSI) / 6 - DELTA_Y * A10 * A10 / 4;$
 $J101 \leftarrow J101 + SQDELTA_Y * DELTA_Y * GSI * B1P / PI;$
 $J101 \leftarrow J101 - DELTA_Y * DELTA_Y * B11P;$
 - 4. $J110 \leftarrow SQR(DELTA_Y * GSI) / 6 + DELTA_Y * A10 * A10 / 4;$
 $J110 \leftarrow J110 - SQDELTA_Y * DELTA_Y * GSI * B1P / (2 * PI);$
 $J110 \leftarrow J110 + SQDELTA_Y * DELTA_Y * A10 * GSI / 4;$
 $J110 \leftarrow J110 - DELTA_Y * DELTA_Y * C11P;$
 - 5. $J011 \leftarrow J11 * DELTA_Y - J101 - J110;$
- c. Calcul des paramètres d'un échantillon donné X de taille N (Procédure *CalMoyVar*)
(Voir algorithme 5.1.2)

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes tailles de pas de temps

- a. Appeler la procédure *PARAINTMULT*($P, ALPHAP, ROP$)
- b. On reprend les mêmes instructions que l'algorithme 5.1.2 (étape3.a.b.c), seulement le point vi en c sera modifié :
- vi. Evaluer l'approximation de Taylor d'ordre 2.0 en utilisant l'intégrale d'Itô :
 - o Calcul des intégrales d'Itô :
 - 1. Appeler la procédure *INTMULT* ($P, G1, J1, J01, J10, J11, J011, J101, J110$);
 - 2. $J00 \leftarrow 0.5 * DELTA_Y * DELTA_Y; J111 \leftarrow J11 * DWT / 3; J1111 \leftarrow J111 * DWT / 4;$
 - o Evaluer les fonctions ainsi que les dérivés du schème de Taylor d'ordre 2.0 :
 - $TIANC \leftarrow TI - DELTA_Y; \{ \text{point gauche du sous intervalle} \}$
 - $AA \leftarrow A(TIANC, YT); DADX \leftarrow DAX(TIANC, YT); DDADX \leftarrow DDAXX(TIANC, YT);$
 - $BB \leftarrow B(TIANC, YT); DBDX \leftarrow DBX(TIANC, YT); DDBDX \leftarrow DDBXX(TIANC, YT);$
 - $DDBDXT \leftarrow DDBXT(TIANC, YT); DDDBDXXX \leftarrow DDDBDXXX(TIANC, YT);$

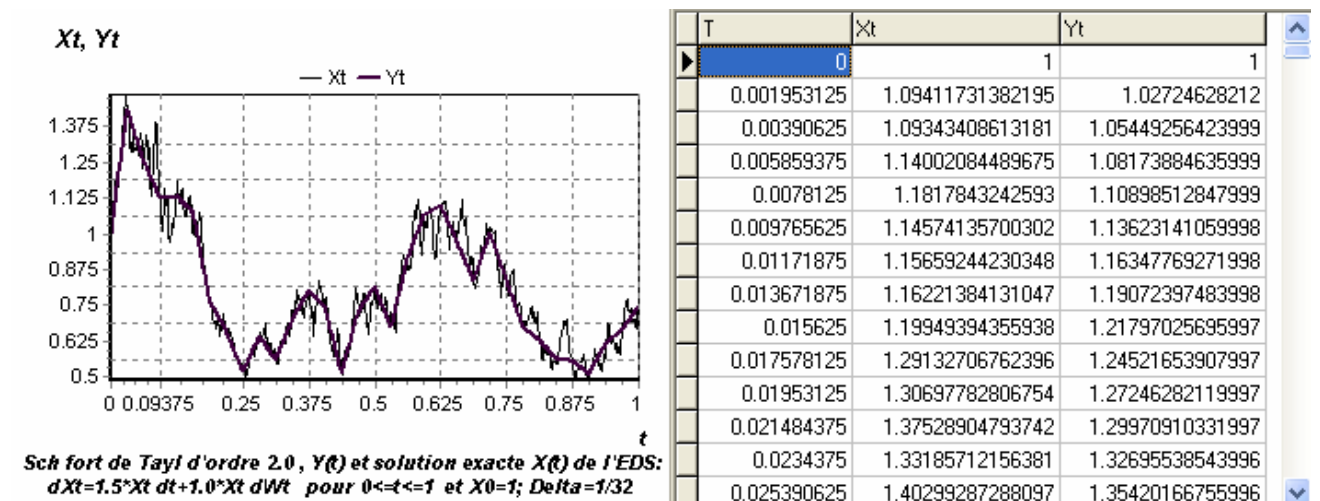
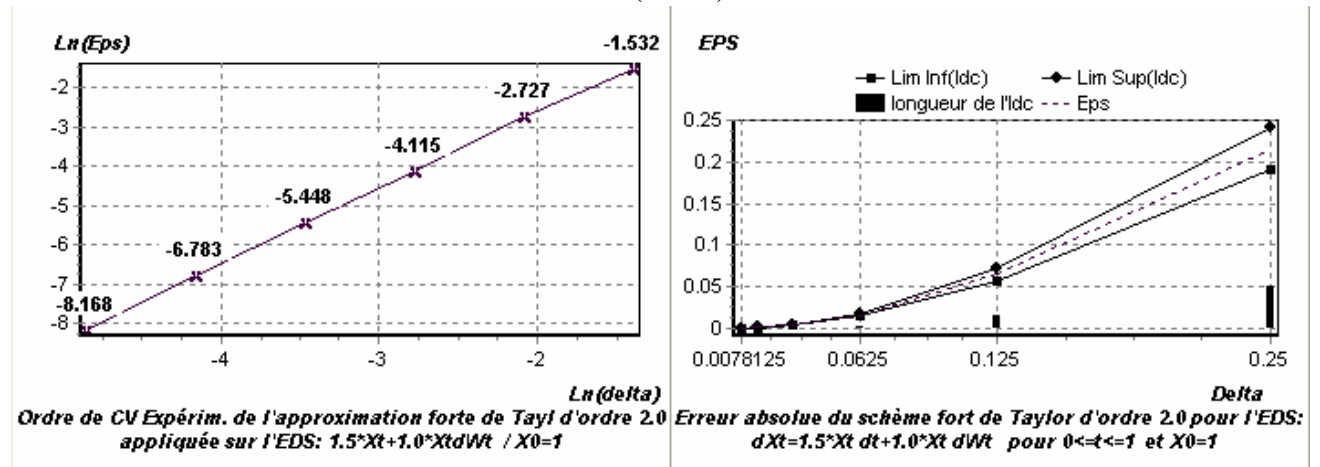
- o Evaluer les opérateurs du schème de Taylor d'ordre 2.0

```

TIANC←TI-DELTA_Y;
AA←A(TIANC,YT);DADX←DAX(TIANC,YT);DDADXX←DDAXX(TIANC,YT);
BB←B(TIANC,YT);DBDX←DBX(TIANC,YT);DDBDXX←DDBXX(TIANC,YT);
DDBDXT←DDBXT(TIANC,YT);DDDBDXXX←DDDBXXX(TIANC,YT);
LIB11←BB*DBDX;
DERIVCORR←AA-0.5*LIB11;DLIB11DX←DBDX*DBDX+BB*DDBDXX;
L0A11←DAT(TIANC,YT)-0.5*(DBT(TIANC,YT)*DBDX+BB*DDBDXT);
L0A11←L0A11+DERIVCORR*(DADX-0.5*DLIB11DX);
LIA11←BB*(DADX-0.5*DLIB11DX);
L1L1A11←DBDX*LIA11+BB*BB*(DDADXX-0.5
*(3.*DBDX*DDBDXX+BB*DDDBDXXX));
L0B11←DBT(TIANC,YT)+DERIVCORR*DBDX;
L0L1B11←DBT(TIANC,YT)*DBDX+BB*DDBDXT+DERIVCORR*DLIB11DX;
L1L0B11←BB*(DDBTX(TIANC,YT)+(DADX-0.5*DLIB11DX)
*DBDX+DERIVCORR*DDBDXX);
L1L1B11←BB*DLIB11DX;
L1L1L1B11←DBDX*L1L1B11+BB*BB*(3.*DBDX*DDBDXX+BB*DDDBDXXX);
o Calculer l'approximation de Taylor d'ordre 2.0 :
YT←YT+DERIVCORR*DELTA_Y+BB*J1+LIB11*J11+LIA11*J10+L0B11*J01;
YT←YT+L0A11*J00+L1L1B11*J111+L1L1L1B11*J1111;
YT←YT+L0L1B11*J011+L1L0B11*J101+L1L1A11*J110;
.....(Voir algorithme 5.1.2) .....

```

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t$ avec $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_0 \leftarrow 1$, $\alpha \leftarrow 1.5$, $\beta \leftarrow 1$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$, $P \leftarrow 10$



Nous enregistrons pour l'approximation forte de Taylor d'ordre 2.0, une erreur absolue égale à 0.0042 pour une taille de pas de temps de 2^{-5} . La même erreur est estimée par l'application du schème de Taylor d'ordre 1.5 à 0.022. Notons que le CPU passe respectivement 20 et 50 millisecondes pour la simulation des deux erreurs, soit 6,23% et 5,55% du temps d'exécution global des deux schèmes, respectivement. La présente application donne un ordre de convergence expérimental de 1.9208.

**Erreur absolue de l'approximation forte de Taylor d'ordre 2.0
(cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exéc en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.2169	[0.1934, 0.2404]	0.0469	<001
$2^{-3}=0.125$	0.0649	[0.0589, 0.0710]	0.0121	010
$2^{-4}=0.0625$	0.0168	[0.0158, 0.0178]	0.0020	010
$2^{-5}=0.03125$	0.0042	[0.0039, 0.0045]	0.0006	020
$2^{-6}=0.015625$	0.0011	[0.0010, 0.0012]	0.0002	041
$2^{-7}=0.0078125$	0.00028	[0.00026, 0.00029]	$3.36 \cdot 10^{-5}$	080
$2^{-8}=0.00390625$	$7.36 \cdot 10^{-5}$	$[6.33 \cdot 10^{-5}, 8.39 \cdot 10^{-5}]$	$2.06 \cdot 10^{-5}$	160

5. Comparaison des schèmes forts de Taylor

Nous terminons cette section par une comparaison des différentes approximations fortes de Taylor présentées (Euler, Milstein, Taylor d'ordre 1.5 et Taylor d'ordre 2.0) appliquées sur une EDS linéaire unidimensionnelle avec un bruit multiplicatif : $dX_t = \alpha \cdot X_t dt + \beta \cdot X_t dW_t$ avec $\alpha=1.5$ et $\beta=0.1$

La présente comparaison se fait en représentant le logarithme de l'erreur d'approximation forte (Eps) en fonction du logarithme de la taille de pas de temps (Delta). Pour avoir une idée sur le niveau de précision de ces approximations, nous pouvons tracer aussi le graphe du logarithme du temps d'exécution (TempEuler,...) en fonction de l'erreur absolue.

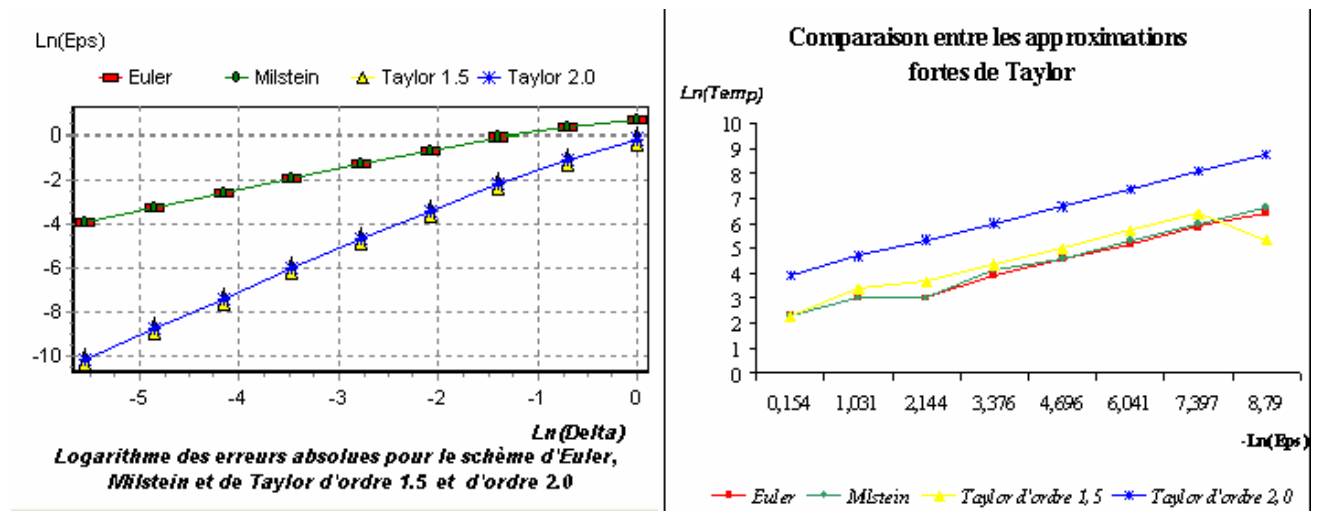
Erreur absolue et temps d'exécution des schèmes forts de Taylor

Ln(Delta)	Ln(EpsEuler)	TempEuler	Ln(EpsMilstein)	TempMilstein	Ln(EpsTaylor 1.5)	TempTay1.5	Ln(EpsTaylor 2)	TempTay2.0
0	0.683300239	00,00,00,010	0.678890942608	00,00,00,010	-0.1626649900	00,00,00,010	-0.1542537081	00,00,00,050
-0.69314718	0.355014642	00,00,00,010	0.352150873036	00,00,00,010	-1.0334049795	00,00,00,021	-1.0313241081	00,00,00,100
-1.38629436	-0.099025936	00,00,00,020	-0.092724995833	00,00,00,030	-2.1265363755	00,00,00,040	-2.1442626820	00,00,00,210
-2.07944154	-0.632774484	00,00,00,040	-0.625324888383	00,00,00,060	-3.3761426947	00,00,00,080	-3.3768942525	00,00,00,421
-2.77258872	-1.248396251	00,00,00,070	-1.250592824576	00,00,00,100	-4.6953899799	00,00,00,160	-4.6963386199	00,00,00,811
-3.46573590	-1.894680635	00,00,00,160	-1.897206690009	00,00,00,280	-6.0373020409	00,00,00,310	-6.0419346718	00,00,01,642
-4.15888308	-2.569933733	00,00,00,341	-2.564810161060	00,00,00,421	-7.4080547914	00,00,00,601	-7.3971459231	00,00,03,315
-4.85203026	-3.247270524	00,00,00,691	-3.250765134782	00,00,00,811	-8.7962016530	00,00,01,222	-8.7900460015	00,00,06,900

AN : T0←0, T←1, X0←1, Alpha←1.5, Beta←0.1, Num←8, N←100, M←20, Quantile($\alpha=0,1$)←1.73, P←5

Ces résultats montrent que les erreurs d'approximations du schème d'Euler et de Milstein ainsi que celui de Taylor d'ordre 1.5 et 2.0 coïncident. Si l'on examine le temps d'exécution de ces schèmes, nous constatons que le CPU passe le même temps d'exécution pour estimer les erreurs du schème

d'Euler et de Milstein alors que celui du schème de Taylor d'ordre 1.5 est plus réduit que celui de Taylor d'ordre 2.0.

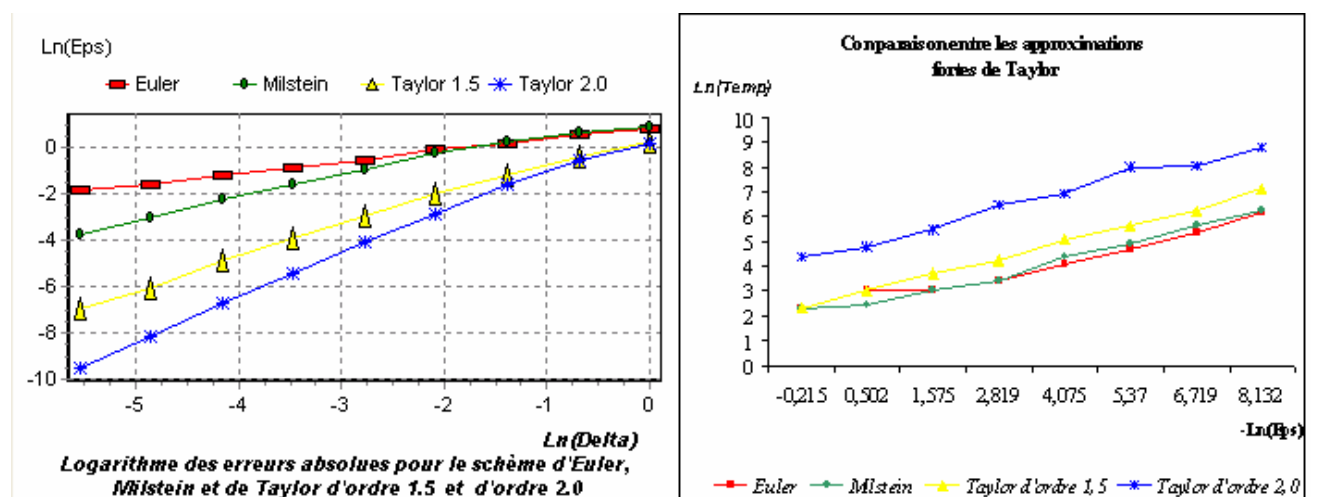


Nous pouvons conclure que pour l'EDS considérée avec un bruit faible, on peut opter pour le schème d'Euler ou de Taylor d'ordre 1.5 au lieu de choisir respectivement le schème de Milstein ou de Taylor d'ordre 2.0 ; bien que ces deux derniers possèdent un ordre de convergence plus fort.

Lorsque $\beta=1.0$, la meilleure approximation est celle qui possède l'ordre de convergence le plus important, comme le montre les résultats ci-après

Erreur absolue et temps d'exécution des schèmes forts de Taylor

Ln(Delta)	Ln(EpsEuler)	TempEuler	Ln(EpsMilstein)	TempMilstein	Ln(EpsTaylor 1.5)	TempTay1.5	Ln(EpsTaylor 2.0)	TempTay2.0
0	0,8265327326	00,00,00,010	0,905786774277	00,00,00,010	0,23664539572	00,00,00,010	0,21588151116	00,00,00,080
-0,693147181	0,5787555703	00,00,00,010	0,638620693738	00,00,00,011	-0,3494440628	00,00,00,020	-0,5026492722	00,00,00,121
-1,38629436	0,2078299543	00,00,00,010	0,282531146908	00,00,00,020	-1,1798202083	00,00,00,040	-1,5757336517	00,00,00,240
-2,07944154	-0,039285695	00,00,00,030	-0,180997307724	00,00,00,030	-1,9551352422	00,00,00,070	-2,8199185379	00,00,00,631
-2,77258872	-0,525143788	00,00,00,060	-0,915394068630	00,00,00,080	-2,8997835995	00,00,00,161	-4,0752655250	00,00,00,981
-3,46573590	-0,839875087	00,00,00,110	-1,575686112944	00,00,00,140	-3,8980443303	00,00,00,270	-5,3709853208	00,00,02,884
-4,15888308	-1,156324792	00,00,00,220	-2,217417451894	00,00,00,270	-4,8845312397	00,00,00,501	-6,7192549778	00,00,03,135
-4,85203026	-1,580338701	00,00,00,471	-2,972193327408	00,00,00,531	-6,0181982006	00,00,01,201	-8,1321189237	00,00,06,309



5.2. Approximations fortes explicites

L'inconvénient des approximations fortes de Taylor est qu'en plus des coefficients drift et de diffusion qu'on doit déterminer à chaque étape, il est nécessaire d'évaluer aussi leurs dérivés à divers ordres. Cependant, dans la présente section, nous examinerons les schèmes forts qui évitent l'utilisation des dérivés.

1. Schème fort explicite d'ordre 1.0

La généralisation des schèmes numériques déterministes aux EDS comme les schèmes de Runge Kutta est limitée vu la différence qui existe entre le calcul stochastique et déterministe.

Dans un cas unidimensionnel avec $d=m=1$, le schème fort explicite d'ordre 1.0 proposé par Platen est donnée par :

$$(2.1) \quad Y_{n+1} = Y_n + \underline{a}\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2\sqrt{\Delta_n}} \{b(\tau_n, \bar{\gamma}_n) - b\} (\Delta W_n)^2 \quad \text{avec} \quad \bar{\gamma}_n = Y_n + \underline{a}\Delta_n + b\sqrt{\Delta_n}$$

où $\underline{a}$ est le coefficient drift corrigé de stratonovich défini par : $\underline{a} = a - \frac{1}{2}bb'$ avec $b = b(\tau_n, Y_n)$

Dans le cas multidimensionnel $d=1,2,\dots$, la $k^{\text{ième}}$ composante du schème fort explicite d'ordre 1.0 est :

$$(2.2) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \underline{a}^k \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j + \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{j_1, j_2=1}^m \{b^{k,j_2}(\tau_n, \bar{\gamma}_n^{j_1}) - b^{k,j_2}\} J_{(j_1, j_2)}$$

$$\text{avec} \quad \bar{\gamma}_n^j = Y_n + \underline{a} \Delta_n + b^j \sqrt{\Delta_n} \quad \forall j=1,2,\dots$$

Si la condition de commutativité du bruit est vérifiée: $\forall k=1,\dots,d$ et $j_1, j_2=1,\dots,m$, $\underline{L}^{j_1} b^{k,j_2} = \underline{L}^{j_2} b^{k,j_1}$,

le schème sera définit par : (2.3) $Y_{n+1}^k = Y_n^k + \underline{a}^k \Delta_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \{b^{k,j}(\tau_n, \bar{\gamma}_n) + b^{k,j}\} \Delta W_n^j$

$$\text{avec} \quad \bar{\gamma}_n = Y_n + \underline{a} \cdot \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta W_n^j \quad \forall j=1,2,\dots$$

Il existe une autre version de ce schème qui utilise le coefficient drift d'Itô a , par exemple pour un bruit général, Platen a proposé un schème avec un ordre de convergence égal à 1.0, défini par :

$$(2.4) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta W_n^j + \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{j_1, j_2=1}^m \{b^{j_2}(\tau_n, \bar{\gamma}_n^{j_1}) - b^{j_2}\} I_{(j_1, j_2)}$$

$$\text{avec} \quad \bar{\gamma}_n^j = Y_n + a\Delta_n + b^j \sqrt{\Delta_n} \quad \forall j=1,2,\dots$$

Pour estimer l'intervalle de confiance de l'erreur absolue qui résulte du schème (2.3) appliqué à une EDS de type linéaire et bidimensionnelle: $dX_t = \alpha X_t dt + \beta_1 X_t dW_t^1 + \beta_2 X_t dW_t^2$, on reprend les mêmes instructions que l'algorithme 5.1.1 avec certaines modifications qui concernent l'évaluation de l'approximation en cours. A noter qu'on n'a pas besoin pour cet algorithme d'évaluer les fonctions drift et de diffusion ni leurs dérivés partielles. Par contre on aura besoin de calculer la constante du schème

Algorithme 5.2.1 :**1. Paramètres :** $T_0, T, X_0, \text{Alpha}, \text{Beta1}, \text{Beta2}$.**2. Simulation:****Etape1:** Génération des fonctions : (... Voir Algorithme 5.1.1 ...)**a.** Génération de la solution explicite SOLEXPL (TI, WT) :**b.** Génération de la formule de l'erreur absolue ABSERR(XT, YT) :**Etape2:** Génération de la procédure CalMoyVar($N, X, \text{SMOYENNE}, \text{SVARIANCE}$)

..... Voir Algorithme 5.1.1

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes tailles de pas de temps

..... Voir Algorithme 5.1.1

- Calcul de la valeur constante du schème :

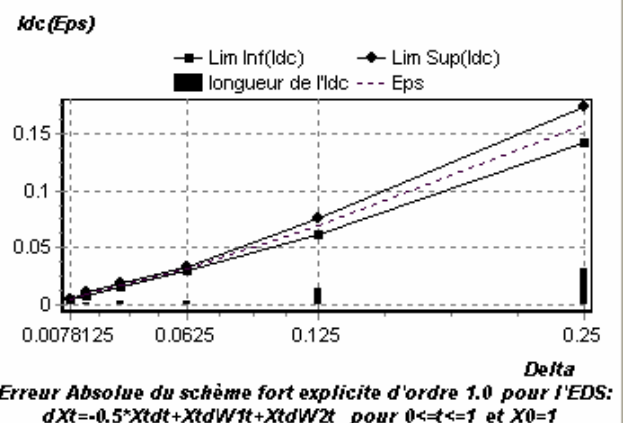
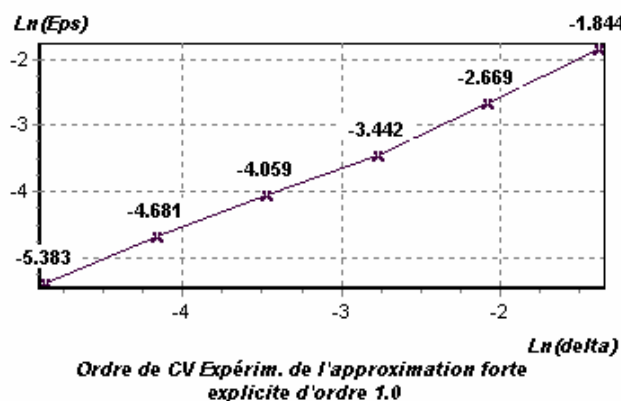
$$KAPPA = (\text{ALPHA} - 0.5 * (\text{BETA1} * \text{BETA1} + \text{BETA2} * \text{BETA2})) * \text{DELTA_Y};$$

$$KAPPA = 1.0 + KAPPA;$$

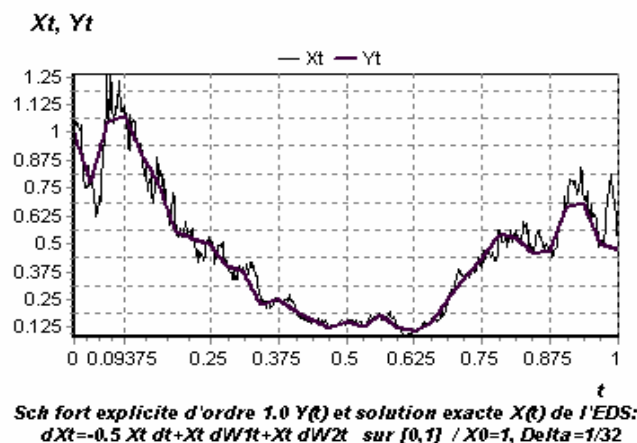
- Evaluer l'approximation forte explicite d'ordre 1.0:

$$YT = YT * (KAPPA + 0.5 * \text{BETA1} * \text{DW1TI} * (KAPPA + \text{BETA1} * (1.0 + \text{DW1TI}) + \text{BETA2} * \text{DW2TI}) + 0.5 * \text{BETA2} * \text{DW2TI} * (KAPPA + \text{BETA1} * \text{DW1TI} + \text{BETA2} * (1.0 + \text{DW2TI})));$$

..... Pour la suite voir Algorithme 5.1.1

Résultat de Simulation : $T_0 \leftarrow 0, T \leftarrow 1, X_0 \leftarrow 1, \text{Alpha} \leftarrow -0.5, \text{Beta1} \leftarrow 1, \text{Beta2} \leftarrow 1, \text{Num} \leftarrow 7, N \leftarrow 100,$ $M \leftarrow 20, \text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$ 

Pour une EDS linéaire bidimensionnelle, il est plus commode d'utiliser le schème explicite d'ordre 1.0 que d'utiliser le schème de Milstein puisque l'erreur absolue pour une taille de pas de temps de 2^{-5} est égale respectivement à 0.0017 et 0.021. L'ordre de convergence expérimental pour ce type d'approximation est estimée à 1.0326.



T	Xt	Yt
0.953125	0.625146886361205	0.5860592704
0.955078125	0.637695361169538	0.57473966719
0.95703125	0.628894387573621	0.56342006394
0.958984375	0.611751584651747	0.55210046070
0.9609375	0.593175571338322	0.54078085746
0.962890625	0.521085604592352	0.52946125422
0.96484375	0.484686195339906	0.51814165096
0.966796875	0.499109116195524	0.50682204774
0.96875	0.514287980530974	0.49550244449
0.970703125	0.492671852311352	0.49408749104
0.97265625	0.503709682759652	0.4926725375
0.974609375	0.505520066517115	0.49125758413
0.9765625	0.579853275754571	0.48984263067

**Erreur absolue de l'approximation forte explicite d'ordre 1.0
(cas d'EDS linéaire bidimensionnelle)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.1588	[0.1433, 0.1744]	0.0310	<001
$2^{-3}=0.125$	0.0700	[0.0621, 0.0779]	0.0158	010
$2^{-4}=0.0625$	0.0321	[0.0304, 0.0339]	0.0035	010
$2^{-5}=0.03125$	0.00170	[0.0159, 0.0181]	0.0022	020
$2^{-6}=0.015625$	0.0093	[0.0081, 0.0103]	0.0022	041
$2^{-7}=0.0078125$	0.0046	[0.0039, 0.0052]	0.0012	080
$2^{-8}=0.00390625$	0.0021	[0.0020, 0.0023]	0.0003	160

2. Schème fort à deux pas d'ordre 1.5

Les méthodes de pas multiples sont souvent numériquement plus efficaces que les méthodes à un pas avec le même ordre de convergence car elles nécessitent essentiellement à chaque itération seulement une évaluation nouvelle du coté droit de l'équation différentielle. Dans cette section, nous donnons une brève introduction sur le schème stochastique à deux pas.

Le schème à un pas sera utilisé pour générer les pas initiaux nécessaires pour commencer le schème à deux pas. On peut parfois profiter de la structure de certaines EDS pour obtenir des schèmes de pas multiples relativement simples.

Le schème fort à deux pas d'ordre 1.5 est une généralisation stochastique à un ordre de convergence fort élevé de la méthode déterministe d'ordre supérieur « Midpoint method » (voir 4.1.12).

Dans un cas général multidimensionnel $d, m=1, 2, \dots$ le schème fort à deux pas d'ordre 1.5 est :

$$(2.8) \quad Y_{n+1} = Y_{n-1} + 2a\Delta_n + \sum_{j=1}^m L^j a(\tau_{n-1}, Y_{n-1}) \Delta W_{n-1}^j \Delta_n + V_n + V_{n-1}$$

$$\text{avec } V_n = \sum_{j=1}^m \left[b^j \Delta W_n^j + L^0 b^j (\Delta W_n^j \Delta_n - \Delta Z_n^j) + L^j a \Delta Z_n^j \right] + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{j_2} I_{(j_1, j_2), \tau_n, \tau_{n+1}} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{j_1} L^{j_2} b^{j_3} I_{(j_1, j_2, j_3), \tau_n, \tau_{n+1}}$$

Les intégrales multiples d'Itô peuvent être approchés.

L'opérateur L^j est donné en (1.9) et L^0 est donnée par : $L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m b^{k,j} \cdot b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}$

Pour l'estimation de l'intervalle de confiance de l'erreur absolue dû à l'approximation à deux pas d'ordre 1.5, on utilise l'algorithme ci-dessous en considérant une EDS linéaire unidimensionnelle :

$$dX_t = \alpha \cdot X_t + \beta \cdot X_t dW_t$$

Algorithme 5.2.3 :

1. Paramètres : $T0, T, X0, Alpha, Beta$

2. Simulation:

Etape1: Génération des fonctions

a. Génération de la solution explicite SOLEXPL (TI,WT) :

$SOLEXPL(TI,WT) \leftarrow X0 * EXP((ALPHA - 0.5 * BETA * BETA) * (TI - T0) + BETA * WT);$

b. Génération de la formule de l'erreur absolue {Voir Algorithme 5.1.1 }

Etape2: Génération de la procédure CalMoyVar(N,X,SMOYENNE,SVARIANCE); {Voir Algorithme 5.1.1 }

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes tailles de pas de temps

a. $DELTA \leftarrow (T - T0)/4$; $DELTA_Y \leftarrow 2 * DELTA$;

b. $G \leftarrow 0$;

c. Répéter

Début 1

i. $G \leftarrow G + 1$;

ii. $DELTA_Y \leftarrow DELTA_Y / 2$; $SQDELTA_Y \leftarrow SQRT(DELTA_Y)$;

iii. $KAPPA1 \leftarrow 1.0 + ALPHA * DELTA_Y$; { les valeurs constantes du schème }

iv. $KAPPA2 \leftarrow BETA * BETA * (ALPHA * SQDELTA_Y + BETA)$; { les valeurs constantes du schème }

v. $J \leftarrow 0$;

vi. Répéter pour différentes séries (J=M fois)

Début 2

1. $J \leftarrow J + 1$;

2. $EPSYLON[J] \leftarrow 0.0$;

3. $K \leftarrow 0$;

4. Répéter pour différentes trajectoires (K=N fois)

Début 3

o $K \leftarrow K + 1$;

o $WT \leftarrow 0.0$;

o $I \leftarrow 0$; $TI \leftarrow T0$; $YT \leftarrow X0$;

o $I \leftarrow I + 1$;

o $TI \leftarrow TI + DELTA_Y$;

o GaussMarsag(G1,G2);

o $DWTI \leftarrow G1 * SQDELTA_Y$; $WT \leftarrow WT + DWTI$;

o $I11 \leftarrow 0.5 * (DWTI * DWTI - DELTA_Y)$;

o $I111 \leftarrow (DWTI * (DWTI * DWTI - 3 * DELTA_Y)) / 6$;

o $VN1 \leftarrow BETA * YT * (DWTI + ALPHA * DWTI * DELTA_Y + BETA * I11 + BETA * BETA * I111)$;

o $YT \leftarrow YT * (0.5 * ALPHA * ALPHA * DELTA_Y * DELTA_Y + (1.0 + BETA * DWTI) * KAPPA1 + BETA * BETA * (DWTI * DWTI - DELTA_Y) / 2 + KAPPA2 * DWTI * (DWTI * DWTI - 3 * DELTA_Y) / 6)$;

{ La valeur de l'approximation explicite d'ordre 1.5 }

o $YN \leftarrow X0$;

o Tant que $TI < T$ faire

Début 4

■ $I \leftarrow I + 1$; $TI \leftarrow TI + DELTA_Y$; $DWTN \leftarrow DWTI$;

■ Si $I \bmod 2 = 1$ alors GaussMarsag(G1,G2) Sinon $G1 \leftarrow G2$;

■ $DWTI \leftarrow G1 * SQDELTA_Y$; $WT \leftarrow WT + DWTI$;

■ $I11 \leftarrow 0.5 * (DWTI * DWTI - DELTA_Y)$;

■ $I111 \leftarrow (DWTI * (DWTI * DWTI - 3 * DELTA_Y)) / 6$;

■ $VN2 \leftarrow VN1$;

■ $VN1 \leftarrow BETA * YT * (DWTI + ALPHA * DWTI * DELTA_Y + BETA * I11 + BETA * BETA * I111)$;

■ $YTOLD \leftarrow YT$;

■ $YT \leftarrow YN * (1.0 - ALPHA * BETA * DWTN * DELTA_Y) + 2 * ALPHA * DELTA_Y * YT + VN1 + VN2$;

■ $YN \leftarrow YTOLD$; { La valeur du schème à deux pas d'ordre 1.5 }

Fin4

o $XT \leftarrow SOLEXPL(TI,WT)$; { Valeur de la solution exacte }

o $EPSYLON[J] \leftarrow EPSYLON[J] + ABSERR(XT,YT)$; { Somme des erreurs absolues }

Fin3

5. $EPSYLON[J] \leftarrow EPSYLON[J] / N$; { estimation de l'erreur absolue de la série }

Fin2

vii. $DEL[G] \leftarrow DELTA_Y$;

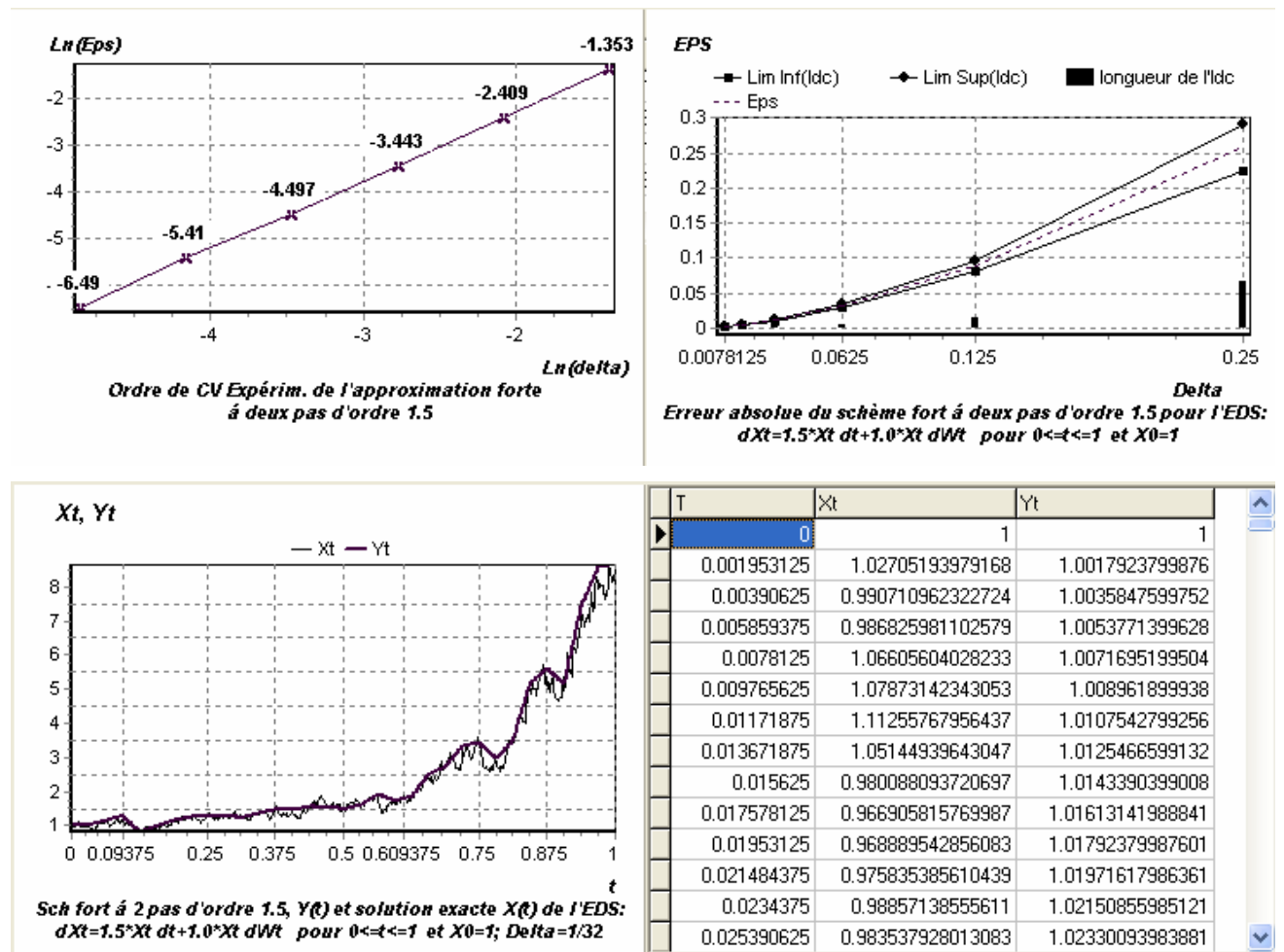
viii. Appeler la procédure CalMoyVar(N,X,SMOYENNE,SVARIANCE);

ix. $EPS[G] \leftarrow AVERAGE$;

x. $DIFFER[G] \leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE / M)$;

Fin1

Résultat de Simulation : $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_0 \leftarrow 1$, $\text{Alpha} \leftarrow 1.5$, $\text{Beta} \leftarrow 1.0$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



La longueur de l'intervalle de confiance de l'erreur dû à l'approximation forte à deux pas d'ordre 1.5 varie nettement par rapport à différentes taille de pas de temps. Elle passe de 0.07 à $8.2 \cdot 10^{-5}$ pour une taille de pas de temps égale respectivement à 2^{-2} et 2^{-8} .

L'ordre de convergence expérimental du schème fort à deux pas est estimé à 1,423 où le CPU est de l'ordre de 330 millisecondes.

Erreur absolue de l'approximation forte à deux pas d'ordre 1.5 (cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.2562	[0.2217, 0.2908]	0.0691	<001
$2^{-3}=0.125$	0.0894	[0.0815, 0.0973]	0.0158	010
$2^{-4}=0.0625$	0.0325	[0.0299, 0.0350]	0.0050	010
$2^{-5}=0.03125$	0.0110	[0.0103, 0.0118]	0.0015	020
$2^{-6}=0.015625$	0.0044	[0.0042, 0.0047]	0.0005	040
$2^{-7}=0.0078125$	0.0015	[0.0014, 0.0016]	0.0001	090
$2^{-8}=0.00390625$	0.00056	[0.00052, 0.00060]	$8.2 \cdot 10^{-5}$	160

5.3. Approximations fortes implicites

Les schèmes forts implicites ont habituellement des tailles de pas de temps très grandes qui conviennent aux approximations des systèmes dynamiques stochastiques, en particulier ceux qui nécessitent des échelles de temps très grandes sous l'accumulation excessive des erreurs d'arrondis qui sont inévitables. Ces schèmes sont essentiellement utilisés pour la simulation des solutions des EDS renforcées (voir section 4.5.2).

Pour tester les schèmes implicites, nous prenons comme exemple l'EDS renforcée (Stiff) de type linéaire : (3.1) $dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t$, où W_t est un processus de Wiener de dimension 1 et les

matrices A et B sont définies par : $A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

La solution explicite de cette EDS est donnée par : $X_t = \exp\left(\left(A - \frac{1}{2}B^2\right) \cdot t + B \cdot W_t\right) \cdot X_0$

Ses composantes de Lyapunov sont données par $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\beta^2$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\beta^2 - 2\alpha$

1. Schème d'Euler implicite

Le schème implicite le plus simple est le schème d'Euler implicite qui a un ordre de convergence $\gamma=0.5$. Pour assurer l'existence de la solution de ce schème, seulement le terme drift qui est implicite. C'est à dire que l'expression du schème explicite $Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n) \cdot \Delta + b(Y_n) \cdot \Delta W_n$ devient :

$$(3.2) \quad Y_{n+1} = Y_n + a(Y_{n+1}) \cdot \Delta + b(Y_n) \cdot \Delta W_n.$$

Dans le cas général multidimensionnel $d, m=1, 2, \dots$ la $k^{\text{ième}}$ composante de la famille des schèmes d'Euler implicites pour un degré d'implicitement $\alpha \in [0, 1]$ est donnée par :

$$(3.3) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \{\alpha_k \cdot a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1 - \alpha_k) \cdot a^k\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j$$

Comme nous le constatons de l'expression (3.3), pour chaque composante du schème on peut utiliser différentes valeurs du paramètre α .

Si $\forall k, \alpha_k = 0$, ce schème d'Euler est dit explicite et il est entièrement implicite si $\alpha_k = 1$.

Pour $\alpha_k = 0.5$, on retrouve une généralisation de la méthode de trapèze déterministe (4.1.5).

Pour l'estimation de l'intervalle de confiance des erreurs fortes (erreurs absolues) dû à l'approximation d'Euler implicite de la solution de l'EDS (3.1) pour différentes tailles de pas de temps avec des paramètres d'implicitement ALPHAK1 et ALPHAK2, nous appliquons l'algorithme suivant :

Algorithme 5.3.1

1. **Paramètres** : $T0, T, X10, X20, Alpha, Beta$

2. **Simulation**:

Etape1: Génération de la formule du critère de l'erreur en utilisant la norme euclidienne $SQRTERR$;
 $SQRTERR := SQRT((X1 - Y1) * (X1 - Y1) + (X2 - Y2) * (X2 - Y2));$

Etape2: Génération des procédures**1.** Génération des composantes de la solution exacte *PROCEDURE SOLEXPL* (TI,WT,X1,X2) :

- a. $EROP := EXP(BETA * (-0.5 * BETA * (TI - T0) + WT)); EROM := EROP * EXP(-2.0 * ALPHA * (TI - T0));$
- b. $Q1 := 0.5 * (EROP + EROM); Q2 := 0.5 * (EROP - EROM);$
- c. $X1 := Q1 * X10 + Q2 * X20; X2 := Q2 * X10 + Q1 * X20;$

2. Calcul des paramètres d'un échantillon de taille N : *CalMoyVar*(N;X;SAVERAGE,SVARIANCE);

- a. Initialisation : Moyenne $\leftarrow 0.0$; Variance $\leftarrow 0.0$; SQ $\leftarrow 0.0$; {variable intermédiaire}
- b. De J=1, ... N faire : Moyenne $\leftarrow$ Moyenne + X[J]; SQ $\leftarrow$ SQ + X[J]*X[J]
- c. Calcul des paramètres : Variance $\leftarrow (SQ - Moyenne * Moyenne / N) / (N - 1)$; Moyenne $\leftarrow$ Moyenne / N;

Etape3 Estimation de l'intervalle de confiance des erreurs fortes pour différentes tailles de pas de temps

a. DELTA $\leftarrow (T - T0) / 4$;

b. DELTA_Y $\leftarrow 2. * DELTA$;

c. G $\leftarrow 0$;

d. Répéter

 Début 1

 i. G $\leftarrow G + 1$;

 ii. DELTA_Y $\leftarrow DELTA_Y / 2$; SQDELTA_Y $\leftarrow SQRT(DELTA_Y)$;

 iii. KAPPA0 $\leftarrow ALPHA * DELTA_Y$; {Initialisation des valeurs constantes du schème}

 iv. KAPPA1 $\leftarrow KAPPA0 * (2.0 - ALPHA_K1 - ALPHA_K2)$;

 v. J $\leftarrow 0$;

 vi. Répéter pour différentes séries (J=M fois)

 Début 2

 1. J $\leftarrow J + 1$;

 2. EPSYLON[J] $\leftarrow 0.0$;

 3. K $\leftarrow 0$;

 4. Répéter pour différentes trajectoires (K=N fois)

 Début 3

 o K $\leftarrow K + 1$; {indice de la trajectoire utilisé }

 o WT $\leftarrow 0.0$; { valeur du processus de Wiener à t=T0 }

 o I $\leftarrow 0$;

 o TI $\leftarrow T0$;

 o Y1T := X10; Y2T := X20; {initialisation de la 1^{er} et 2^{ème} composante de l'approximation}

 o HII := Y2T - Y1T;

 o Tant que TI < T faire

 Début 4

 ▪ I $\leftarrow I + 1$;

 ▪ TI $\leftarrow TI + DELTA_Y$;

 ▪ DWTN $\leftarrow DWTI$;

 ▪ Si I MOD 2 = 1 alors GaussMarsag(G1,G2) Sinon G1 $\leftarrow$ G2;

 ▪ DWTI $\leftarrow G1 * SQDELTA_Y$;

 ▪ WT $\leftarrow WT + DWTI$;

 ▪ HH := 1.0 + BETA * DWTI;

 ▪ HI := HII; HII := HII * (HH - KAPPA1) / KAPPA2;

 ▪ Y1T := Y1T * HH + KAPPA0 * (ALPHA_K1 * HII + (1.0 - ALPHA_K1) * HI);
 {1^{er} composante du schème d'Euler implicite}

 ▪ Y2T := Y2T * HH - KAPPA0 * (ALPHA_K2 * HII + (1.0 - ALPHA_K2) * HI);
 {2^{ème} composante du schème d'Euler implicite}

 Fin4

 o Appeler la procédure SOLEXPL(TI,WT,X1T,X2T); {Evaluer les deux composantes de la solution}

 o EPSYLON[J] $\leftarrow$ EPSYLON[J] + SQRTERR(X1T,X2T,Y1T,Y2T); {Somme des erreurs absolues}

 Fin3

 5. EPSYLON[J] $\leftarrow$ EPSYLON[J] / N; { estimation de l'erreur absolue de la série}

 Fin2

 vii. DEL[G] $\leftarrow DELTA_Y$;

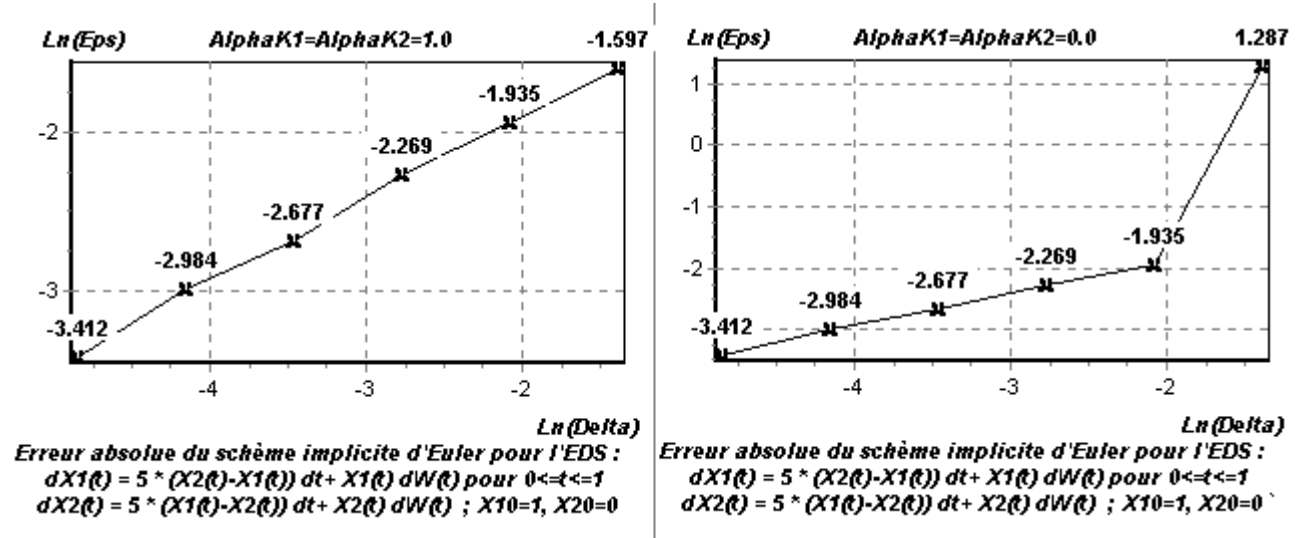
 viii. Appeler la procédure CalMoyVar(M,Epsylon,MOYENNE,VARIANCE);

 ix. EPS[G] $\leftarrow$ Moyenne;

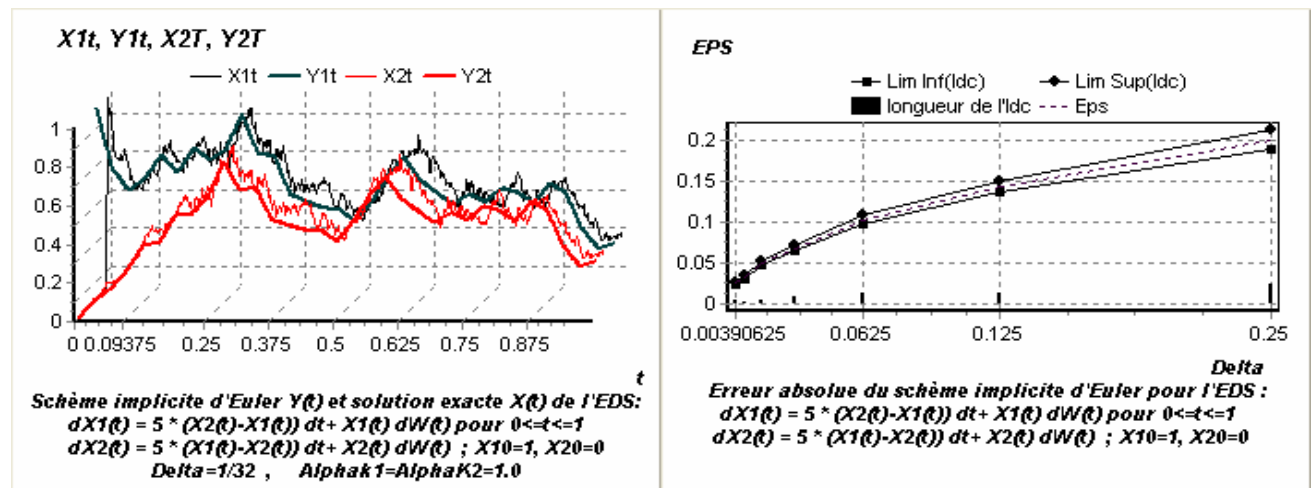
 x. DIFFER[G] $\leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE / M)$;

Fin1

Résultat de Simulation : $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_0 = (X_{10}, X_{20}) \leftarrow (1, 0)$, $\text{Alpha} \leftarrow 5.0$, $\text{Beta} \leftarrow 1.0$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$, $\text{AlphaK1} = \text{AlphaK2} \leftarrow 0$; 1



Les deux graphes ci-dessus montrent que pour les systèmes d'EDS de type renforcés (le cas de notre application numérique avec $\lambda_1 = -2 \cdot 10^{-5} \gg \lambda_2 = -2 \cdot 10^{-5} - 10$) le schème implicite d'Euler pour lequel $\text{AlphaK1} = \text{AlphaK2} = 0.0$, ne semble pas être une bonne méthode d'approximation alors que lorsque ces deux paramètres d'implicitement prennent la valeur 1 ($\text{AlphaK1} = \text{AlphaK2} \leftarrow 1.0$) les résultats sont beaucoup meilleurs. Dans ce dernier cas, l'ordre de convergence est estimé à 0.50036.



T	X1T	Y1T	X2T	Y2T
0.990234375	0.298091533493423	0.286714976677037	0.298061691718578	0.28661089454
0.9921875	0.293321884275292	0.28827075604403	0.293293087916196	0.2881679070
0.994140625	0.305119111837949	0.289826535411022	0.305089736652014	0.28972491951
0.99609375	0.290914066899349	0.291382314778014	0.290886600987325	0.29128193200
0.998046875	0.294517577807173	0.292938094145006	0.294490309473138	0.29283894448
*	1	0.291699091915269	0.294493873511999	0.291672606881118

**Erreur absolue de l'approximation d'Euler implicite
(cas d'EDS linéaire bidimensionnelle d'Ito)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.2016	[0.1892, 0.2139]	0.0246	<001
$2^{-3}=0.125$	0.1437	[0.1377, 0.1497]	0.0120	010
$2^{-4}=0.0625$	0.1037	[0.0976, 0.1097]	0.0121	010
$2^{-5}=0.03125$	0.0686	[0.0645, 0.0726]	0.0081	020
$2^{-6}=0.015625$	0.0507	[0.0481, 0.0532]	0.0051	050
$2^{-7}=0.0078125$	0.0328	[0.0314, 0.0342]	0.0027	100
$2^{-8}=0.00390625$	0.0252	[0.0235, 0.0270]	0.0035	181

2. Schème de Milstein implicite

En passant à un ordre de convergence plus élevé que le schème d'Euler implicite, soit, $\gamma=1.0$, on obtient la famille des schèmes de Milstein implicites. Dans un cas multidimensionnel, la $k^{\text{ième}}$ composante du schème est donné pour tout $k=1, \dots, d$ et $\alpha \in [0, 1]$ par :

$$(3.4) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \left\{ \alpha \cdot a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1-\alpha) \cdot a^k \right\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)}$$

En terme d'intégrale de Stratonovich, il suffit de remplacer dans l'expression (3.4) le coefficient a par $\underline{a}$ et l'intégrale $I_{(j_1, j_2)}$ par $J_{(j_1, j_2)}$. Ces deux intégrales peuvent être approchées comme c'est déjà montré en (3.2.13).

Pour un bruit commutatif $L^{j_1} b^{k, j_2} = L^{j_2} b^{k, j_1} \quad \forall j_1, j_2=1, \dots, m, k=1, \dots, d$, le schème de Milstein implicite se simplifie comme suit :

$$(3.5) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \left\{ \alpha \cdot a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1-\alpha) \cdot a^k \right\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} \left\{ \Delta W_n^{j_1} \Delta W_n^{j_2} - \delta_{j_1, j_2} \Delta_n \right\}$$

δ_{j_1, j_2} est le symbole de Kronecker définit par $\delta_{j_1, j_2}=1$ si $j_1=j_2$ et $\delta_{j_1, j_2}=0$ si $j_1 \neq j_2$

L'estimation de l'erreur forte résultante de l'approximation implicite de Milstein nécessite la simulation des intégrales multiples additionnels qui constituent la différence qui existe entre l'algorithme de simulation pour ce type d'approximation est celle d'Euler (Algorithme 5.3.1).

Algorithme 5.3.2

1. Paramètres : $T0, T, X10, X20, Alpha, Beta$.

2. Simulation:

Etape1: Génération de la formule de l'erreur en utilisant la norme euclidienne $SQRTERR(X1, X2, Y1, Y2); \dots$

Etape2: Génération des procédures $SOLEXPL(TI, WT, X1, X2)$ et $CalMoyVar(N; X; SAVERAGE, SVARIANCE)$;

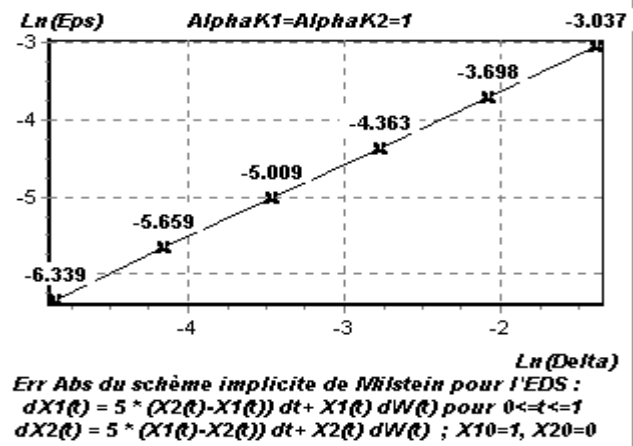
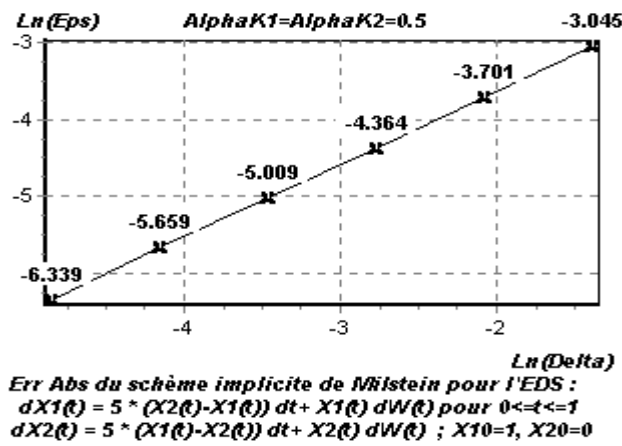
Etape3 Estimation de l'intervalle de confiance des erreurs fortes pour différentes tailles de pas de temps

.....

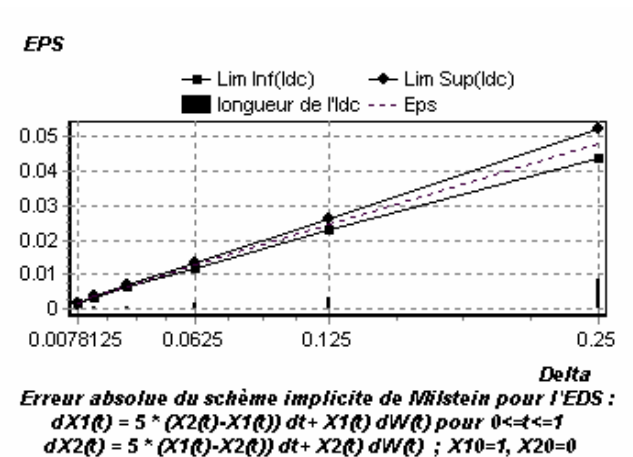
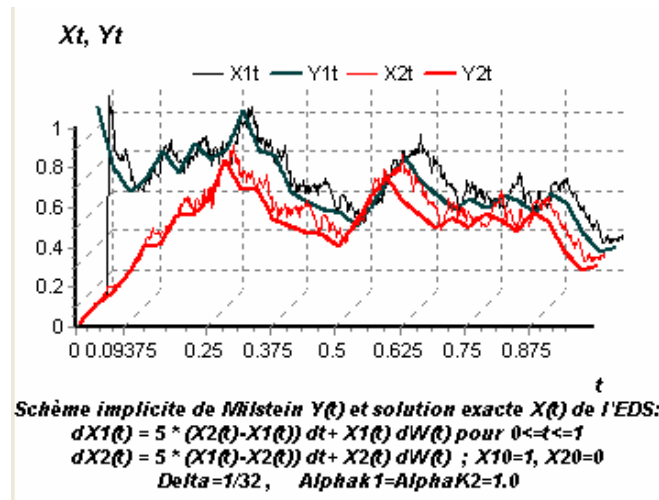
- $WT \leftarrow WT + DWTI$;
- $III := 0.5 * (DWTI * DWTI - DELTA * Y)$; { l'intégral multiple III }
- $HH := 1.0 + BETA * (DWTI + BETA * III)$;
- $HII := HII; HII := HII * (HH - KAPPA1) / KAPPA2$;
- $YIT := YIT * HH + KAPPA0 * (ALPHA * K1 * HII + (1.0 - ALPHA * K1) * HI)$;
 { 1^{er} composante du schème d'Euler implicite }
- $Y2T := Y2T * HH - KAPPA0 * (ALPHA * K2 * HII + (1.0 - ALPHA * K2) * HI)$;
 { 2^{ème} composante du schème d'Euler implicite }

.....

Résultat de Simulation : $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_0 = (X_{10}, X_{20}) \leftarrow (1, 0)$, $\text{Alpha} \leftarrow 5.0$, $\text{Beta} \leftarrow 1.0$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$, $\text{AlphaK1} = \text{AlphaK2} \leftarrow 0$; 1



Le schème implicite de Milstein, avec un paramètre d'implicitement prenant les deux valeurs 0.5 et 1.0, donne des résultats très semblables et satisfaisant sur les systèmes d'EDS renforcés.



T	X1T	Y1T	X2T	Y2T
0	1	1	0	0
0.001953125	1.00693796908226	0.98073523833198	0.00983306602155576	0.00584259977459186
0.00390625	0.981974034316249	0.96147047666396	0.0191767419709113	0.0116851995491837
0.005859375	0.921626680122217	0.942205714995939	0.0269930593098547	0.0175277993237756
0.0078125	0.949310423297544	0.922940953327919	0.037063588811338	0.0233703990983675
0.009765625	0.919599909504904	0.903676191659899	0.044866688157378	0.0292129988729593
0.01171875	0.87449414436405	0.884411429991879	0.051181332286607	0.0350555986475512

Si $\text{ALPHAK1}=\text{ALPHAK2}=1.0$ alors l'intervalle de confiance de l'erreur forte pour une taille de pas de temps choisi égale à 0.25 passe de $[0.19, 0.22]$ pour le schème d'Euler implicite à $[0.044, 0.052]$ pour le schème de Milstein implicite. Cette dernière approximation donne un ordre de convergence expérimental égal à 0.9738.

**Erreur absolue de l'approximation de Milstein implicite
(cas d'EDS linéaire bidimensionnelle d'Ito)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.0480	[0.0436, 0.0524]	0.0087	<001
$2^{-3}=0.125$	0.0246	[0.0230, 0.0261]	0.0031	010
$2^{-4}=0.0625$	0.0127	[0.019, 0.0135]	0.0016	010
$2^{-5}=0.03125$	0.0066	[0.0063, 0.0070]	0.00066	030
$2^{-6}=0.015625$	0.0035	[0.0032, 0.0037]	0.00046	050
$2^{-7}=0.0078125$	0.00176	[0.00168, 0.0018]	0.00016	090
$2^{-8}=0.00390625$	0.0008	[0.00075, 0.00091]	0.00105	190

3. Schème fort de Taylor implicite d'ordre 1.5

Dans le cas général multidimensionnel $d, m=1, 2, \dots$, la $k^{\text{ième}}$ composante de la famille des schèmes fort de Taylor implicite d'ordre 1.5, $\forall k=1, \dots, d$ et $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, est donnée par :

$$(3.6) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \left\{ \alpha a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1-\alpha)a^k \right\} \Delta_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \left\{ \beta L^0 a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1-\beta)L^0 a^k \right\} \Delta_n^2 \\ + \sum_{j=1}^m \left(b^{k,j} \Delta W_n^j + L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + L^j a^k \left\{ I_{(j,0)} - \alpha \Delta W_n^j \Delta_n \right\} \right) + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{j_1} L^{j_2} b^{k, j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)}$$

Les deux paramètres d'implicitement α et β peuvent être non constants (dépendants de k)

Les intégrales multiples stochastiques peuvent être approchés via les expressions (3.2.12)- (3.2.17).

Le schème ci-dessus se réduit dans le cas d'un bruit commutatif $L^{j_1} L^{j_2} b^{k, j_3} = L^{j_2} L^{j_1} b^{k, j_3}$ et pour un paramètre d'implicitement $\alpha=0,5$ à :

$$(3.7) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \frac{1}{2} \left\{ a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + a^k \right\} \Delta_n + \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^{j_1-1} L^{j_1} b^{k, j_2} \Delta W_n^{j_1} \Delta W_n^{j_2} + \frac{1}{2} \sum_{j_1 \neq j_2=1}^m L^{j_1} L^{j_2} b^{k, j_3} \Delta W_n^{j_1} \left\{ (W_n^{j_2})^2 - \Delta_n \right\} \\ + \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^{j_1-1} \sum_{j_3=1}^{j_2-1} L^{j_1} L^{j_2} b^{k, j_3} \Delta W_n^{j_1} \Delta W_n^{j_2} \Delta W_n^{j_3} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m L^j L^j b^{k, j} \left\{ \frac{1}{3} (W_n^j)^2 - \Delta_n \right\} \cdot \Delta W_n^j \\ + \sum_{j=1}^m \left[b^{k,j} \Delta W_n^j + \frac{1}{2} L^j b^{k,j} \left\{ (\Delta W_n^j)^2 - \Delta_n \right\} + L^0 b^{k,j} \left\{ \Delta W_n^j \Delta_n - \Delta Z_n^j \right\} + L^j a^k \left\{ \Delta Z_n^j - \frac{1}{2} \Delta W_n^j \Delta_n \right\} \right]$$

Pour l'implémentation de ce schème on a besoin seulement de générer des paires de variables aléatoires gaussiennes corrélés $(\Delta W_n^j, \Delta Z_n^j) \forall j=1, \dots, m$ (voir expression (1.19)).

L'algorithme de simulation de l'erreur forte résultante du schème implicite d'ordre 1.5 est similaire à l'algorithme 5.3.1. Seulement nous introduisons d'autres paramètres d'implicitement BetaK1 et BetaK2 et nous remplaçons l'expression du schème d'Euler par celle de la formule (3.7).

Algorithme 5.3.3

1. Paramètres : $T0, T, X10, X20, Alpha, Beta, AlphaK1, alphaK2, BetaK1, BetaK2, Num, N, M, Quantile$.

2. Simulation:

Etape1: Génération de la formule de l'erreur en utilisant la norme euclidienne $SQRTERR(X1, X2, Y1, Y2);$

.....

Etape2: Génération des procédures SOLEXPL (TI,WT,X1,X2) et CalMoyVar(N;X;SAVERAGE,SVARIANCE);

Etape3 Estimation de l'intervalle de confiance des erreurs fortes pour différentes tailles de pas de temps

KAPPA13:=BETA*(1.-ALPHA*1);KAPPA23:=BETA*(1.-ALPHA*2); { constantes globales }

DELTA_Y:=2.*DELTA; G:=0;

Répéter pour différentes tailles de pas (Num fois)

Début I

G:=G+1;

DELTA_Y:=DELTA_Y/2; SQDELTA_Y:=SQRT(DELTA_Y);

KAPPA0:=ALPHA*DELTA_Y; { initialisation des valeurs constantes du schème }

KAPPA11:=ALPHA*1-2.*(0.5-ALPHA*1)*BETA*1*KAPPA0;

KAPPA12:=1.-ALPHA*1-2.*(0.5-ALPHA*1)*(1.-BETA*1)*KAPPA0;

KAPPA21:=ALPHA*2-2.*(0.5-ALPHA*2)*BETA*2*KAPPA0;

KAPPA22:=1.-ALPHA*2-2.*(0.5-ALPHA*2)*(1.-BETA*2)*KAPPA0;

KAPPA:=1.+KAPPA0*(KAPPA11+KAPPA21);

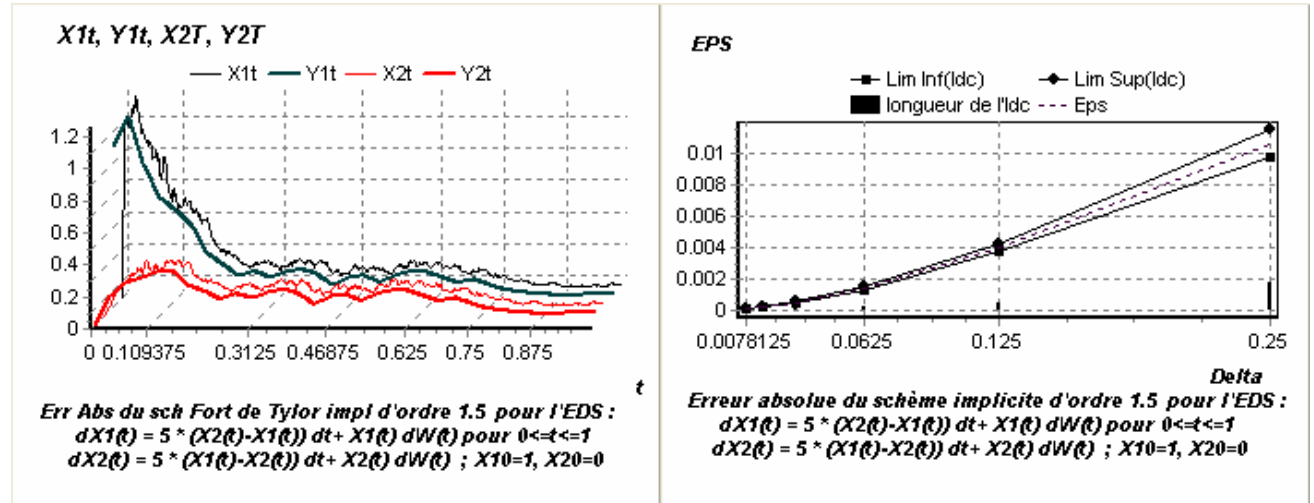
J:=0;

- WT←WT+DWTI;
- I11:=0.5*(DWTI*DWTI-DELTA_Y); { l'intégral multiple I11 }
- I111:=DWTI*(DWTI*DWTI-3.*DELTA_Y)/6.; { l'intégrale multiple I111 }
- HH:=1.0+BETA*(DWTI+BETA*(I11+BETA*I111));HI:=HII;
- HII:=HII*(HH-KAPPA0*(KAPPA12+KAPPA22+(KAPPA13+KAPPA23)*DWTI))/KAPPA;
- Y1T:=Y1T*HH+KAPPA0*(HII*KAPPA11+HI*(KAPPA12+KAPPA13*DWTI));
- Y2T:=Y2T*HH-KAPPA0*(HII*KAPPA21+HI*(KAPPA22+KAPPA23*DWTI));

FinI

Résultat de Simulation : T0←0, T←1, X0=(X10,X20)←(1,0), Alpha←5.0, Beta←1.0, Num←7,N←100,

M←20, Quantile($\alpha=0,1$)←1.73, AlphaK1=AlphaK2←0.5, BetaK1=BetaK2←1.0



T	X1T	Y1T	X2T	Y2T	
	0.98828125	0.0785468258920358	0.0811542872218666	0.0785388075323624	0.0811463665452122
	0.990234375	0.0792366015524076	0.0814850446708656	0.0792286692210351	0.0814772519141727
	0.9921875	0.0793273857791245	0.0818158021198647	0.0793195979528165	0.0818081372831332
	0.994140625	0.0765925002614007	0.0821465595688637	0.076585126357738	0.0821390226520936
	0.99609375	0.0749614582032053	0.0824773170178627	0.0749543809077065	0.0824699080210541
	0.998046875	0.0832901665003401	0.0828080744668618	0.08328245496034	0.0828007933900146
*	1	0.0830026779699084	0.0831388319158608	0.0829951416805556	0.0831316787589751

L'erreur résultante du schème implicite d'ordre 1.5 est plus réduite que les deux approximations implicites d'Euler et de Milstein, établies précédemment. Nous enregistrons ainsi pour une taille de pas de temps de 1/32, une erreur égale respectivement à 0.0068 et 0.0066. Pour l'approximation implicite d'ordre 1.5, cette même erreur est estimée à 0.0005. L'ordre de convergence expérimentale de cette approximation est de 1.47.

**Erreur absolue de l'approximation forte de Taylor implicite d'ordre 1.5
(cas d'EDS linéaire bidimensionnelle d'Ito)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.0105	[0.0097, 0.0114]	0.00176	<001
$2^{-3}=0.125$	0.0039	[0.0037, 0.0042]	0.0047	010
$2^{-4}=0.0625$	0.0013	[0.00129, 0.00148]	0.00019	010
$2^{-5}=0.03125$	0.0005	[0.00046, 0.00053]	$6.48 \cdot 10^{-5}$	030
$2^{-6}=0.015625$	0.0002	[0.00019, 0.00022]	$3.62 \cdot 10^{-5}$	060
$2^{-7}=0.0078125$	$7.68 \cdot 10^{-5}$	$[7.02 \cdot 10^{-5}, 8.34 \cdot 10^{-5}]$	$1.32 \cdot 10^{-5}$	100
$2^{-8}=0.00390625$	$2.60 \cdot 10^{-5}$	$[2.45 \cdot 10^{-5}, 2.76 \cdot 10^{-5}]$	$3.12 \cdot 10^{-6}$	221

4. Schème fort de Runge Kutta implicite

Ces schèmes implicites évitent l'utilisation des dérivés pour les termes incluant des intégrales multiples non déterministes. Ils sont obtenus à partir des schèmes fort de Taylor implicites correspondants en remplaçant les dérivées par des différences finies exprimées en terme de valeurs de support appropriées. C'est pour cette raison qu'on les appelle schèmes fort de Runge-Kutta implicite. En interpolant entre le schème complètement implicite et le schème explicite correspondant, on peut former la famille des schèmes fort de Runge-Kutta implicites d'ordre 1.0. En général, dans un cas multidimensionnel $d=m=1,2,\dots$, la $k^{\text{ième}}$ composante du schème est de la

$$\text{forme : (3.6)} \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \left\{ \alpha \cdot a(\tau_{n+1}, Y_{n+1}^k) + (1-\alpha) \cdot a^k \right\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j + \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \sum_{j_1, j_2=1}^m \left\{ b^{k,j_2} \left(\tau_n, \bar{\gamma}_n^{j_1} \right) - b^{k,j_2} \right\} I_{(j_1, j_2)}$$

avec un vecteur des valeurs support donné par $\bar{\gamma}_n^j = Y_n + a \Delta_n + b^j \sqrt{\Delta_n} \quad \forall j=1, \dots, m$ et $\alpha \in [0,1]$

Pour un bruit commutatif, cette approximation se réduit en termes d'intégrales de Stratonovich à

$$(3.7) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + \left\{ \alpha \cdot a^k(\tau_{n+1}, Y_{n+1}^k) + (1-\alpha) \cdot a^k \right\} \Delta_n + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left\{ b^{k,j}(\tau_n, \psi_n) + b^{k,j} \right\} \Delta W_n^j$$

avec $\psi_n = Y_n + a \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta W_n^j \quad \forall j=1, \dots, m$ et $\alpha \in [0,1]$

Pour la simulation de l'erreur due à l'approximation de Runge Kutta implicite dans un cas le plus simple où le bruit est commutatif, on se base toujours sur l'algorithme 5.3.1.

Algorithme 5.3.4

1. Paramètres : $T0, T, X10, X20, Alpha, Beta, AlphaK1, alphaK2, Num, N, M, Quantile.$

2. Simulation:

Etape1: Génération de la formule de l'erreur en utilisant la norme euclidienne $SQRTERR(X1, X2, Y1, Y2);$

.....

Etape2: Génération des procédures SOLEXPL (TI,WT,X1,X2) et CalMoyVar(N;X;SAVERAGE,SVARIANCE);

Etape3 : Estimation de l'intervalle de confiance des erreurs fortes pour différentes tailles de pas de temps

DELTA_Y:=2.*DELTA; G:=0;

Répéter pour différentes tailles de pas (Num fois)

Début 1

G:=G+1; DELTA_Y:=DELTA_Y/2; SQDELTA_Y:=SQRT(DELTA_Y);

KAPPA3:=ALPHA*DELTA_Y; {initialisation des constantes du schème}

KAPPA1:=0.5*BETA*BETA*DELTA_Y;KAPPA14:=1.0+ALPHA*KAPPA1;

KAPPA24:=1.0+ALPHA*KAPPA1;KAPPA12:=ALPHA*KAPPA3;KAPPA22:=ALPHA*KAPPA3;

KAPPA10:=KAPPA14-KAPPA1;KAPPA20:=KAPPA24-KAPPA1;KAPPA1:=2.0-KAPPA1;

KAPPA:=1.0+KAPPA22/KAPPA24+KAPPA12/KAPPA14;

WT←WT+DWTI;

HH:=0.5*BETA*DWTI*(KAPPA1+BETA*DWTI);

Y1T:=(Y1T*(KAPPA10+HH)+KAPPA3*(1.0-ALPHA*K1+0.5*BETA*DWTI)*HII)/KAPPA14;

Y2T:=(Y2T*(KAPPA20+HH)-KAPPA3*(1.0-ALPHA*K2+0.5*BETA*DWTI)*HII)/KAPPA24;

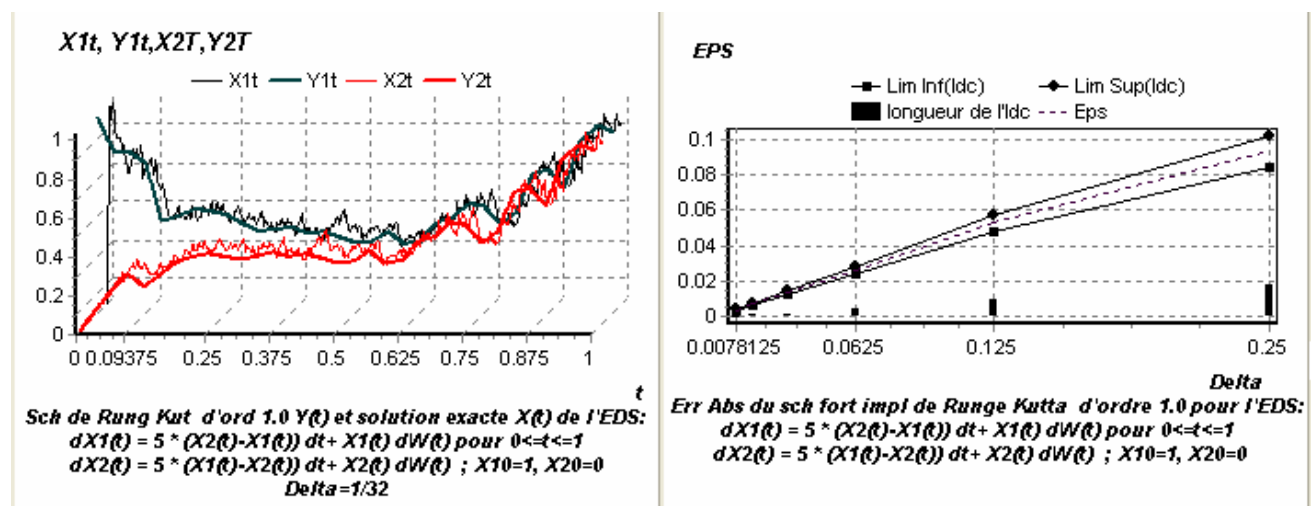
HII:=(Y2T-Y1T)/KAPPA;

Y1T:=Y1T+KAPPA12*HII/KAPPA14; {1^e composante du schème de Runge Kutta avec bruit additif}

Y2T:=Y2T-KAPPA22*HII/KAPPA24; {2^e composante du schème de Runge Kutta avec bruit additif}

Fin1

Résultat de Simulation : T0←0, T←1, X0=(X10,X20)←(1,0), Alpha←5.0, Beta←1.0, Num←7,N←100, M←20, Quantile($\alpha=0,1$)←1.73, AlphaK1=AlphaK2←1.0.



T	X1T	Y1T	X2T	Y2T
0	1	1	0	0
0.001953125	1.01414396703107	0.989334542141949	0.00990343485832379	0.00670100129723235
0.00390625	0.9660570852083	0.978669084283898	0.0188659035827865	0.0134020025944647
0.005859375	0.950356205537701	0.968003626425848	0.0278345038993075	0.0201030038916971
0.0078125	1.01404510911853	0.957338168567797	0.0395910020980961	0.0268040051889294
0.009765625	1.01359234713133	0.946672710709746	0.0494525187392961	0.0335050064861618
0.01171875	1.0327295420784	0.936007252851695	0.0604423416622744	0.0402060077833941

Le schème fort de Runge Kutta complètement implicite donne un ordre de convergence expérimental de 0.94 sachant que la valeur théorique est égale à 1.0.

L'erreur résultante de cette approximation varie en fonction de la taille de pas de temps entre 0.0018 et 0.0932, soit un intervalle de confiance égal respectivement à [0.0016 ,0.0021] et [0.0845, 0.102].

**Erreur absolue de l'approximation forte de Runge Kutta implicite
(cas d'EDS linéaire bidimensionnelle d'Ito)**

Delta	Eps	Idc(Eps)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécution en millisecondes
$2^{-2}=0.25$	0.0932	[0.0845, 0.102]	0.0174	010
$2^{-3}=0.125$	0.0528	[0.046,0.057]	0.0098	010
$2^{-4}=0.0625$	0.0258	[0.024, 0.028]	0.0038	010
$2^{-5}=0.03125$	0.0135	[0.0128,0.0142]	0.0014	030
$2^{-6}=0.015625$	0.0071	[0.0046,0.0076]	0.0009	060
$2^{-7}=0.0078125$	0.0036	[0.0034,0.0038]	0.00044	120
$2^{-8}=0.00390625$	0.0018	[0.0016,0.0021]	0.00048	220

Les résultats expérimentaux obtenus montrent l'efficacité des simulateurs des schèmes d'approximations. Ceci est encourageant pour la résolution numérique des problèmes modélisés via les équations différentielles stochastiques.

CHAPITRE 6.

APPROXIMATIONS FAIBLES

APPROXIMATIONS FAIBLES

Plusieurs applications nécessitent l'estimation d'une transformation de la solution d'une EDS. Ceci est plus facile si on procède numériquement par une approximation de la mesure de probabilité de la solution seulement plutôt que l'approximation de ses trajectoires qui sont très irrégulières. Néanmoins, ceci est compliqué en pratique.

Les schèmes d'ordre supérieur associés à ce type de convergence faible peuvent être construit d'une manière systématique à travers le développement de Taylor stochastique en générant des variables aléatoires où la simplicité de cette approximation dépend de l'ordre désiré du schème.

Dans ce chapitre nous introduisons les approximations faibles comme les schèmes faibles de Taylor, les schèmes faibles implicites et explicites et leurs extrapolations pour approcher des fonctions de solutions des EDS. L'exemple le plus simple de telles fonctions est le moment de la solution dans un intervalle de temps donnée.

6.1. Schèmes faibles de Taylor

Le schème faible de Taylor est une approximation en temps discret basée sur le critère de convergence faible en tronquant, comme pour l'approximation forte, le développement de Taylor stochastique. L'ordre de convergence faible désiré détermine quelle troncation doit être utilisée. Nous soulignons que pour un même ordre de convergence, la troncation nécessaire pour la convergence faible diffère de celle de la convergence forte.

1. Schème faible d'Euler

Dans un cas général multidimensionnel $d, m=1,2,\dots$, la $k^{ième}$ composante du schème d'Euler a la

$$\text{forme : } (1.1) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta W_n^j \quad \text{avec } Y_0 = X_0, \Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n \text{ et } \Delta W_n^j = W_{\tau_{n+1}}^j - W_{\tau_n}^j$$

Si a et b sont des fonctions suffisamment lissées, alors l'approximation d'Euler a un ordre de convergence $\beta=1.0$.

Etant donnée que le critère de convergence considéré est le critère faible alors pour avoir une approximation précise et suffisante de la loi de probabilité du processus de diffusion, les incrémentations ΔW_n^j seront remplacées par des variables aléatoires $\Delta \hat{W}_n^j$ de distribution :

$$(1.2) \quad P[\Delta \hat{W}_n^j = \pm \sqrt{\Delta_n}] = \frac{1}{2}.$$

Ce qui donne le schème d'Euler simplifié :

$$(1.3) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^{k,j} \Delta \hat{W}_n^j$$

L'algorithme ci-dessous nous permet d'estimer l'Idc des erreurs $E(g(Y(T))-g(X(T)))$ dû à l'approximation d'Euler faible (1.1). L'EDS considérée est une équation linéaire à deux dimensions (deux processus de Wiener): $dX_t = A(t, X_t)dt + B1(t, X_t)dW_t^1 + B2(t, X_t)dW_t^2$

Algorithme 6.1.1 :

1. Paramètres : $T0, T, X0, A(t, X_t), B1(t, X_t), B2(t, X_t)$.

2. Simulation:

Etape1: Génération des fonctions

- Génération des fonctions drift $A(TI, XI) = \alpha XI$ et de diffusion $B1(TI, XI) = \beta_1 XI$ et $B2(TI, XI) = \beta_2 XI$:
 $A \leftarrow ALPHA * XI$; $B1 \leftarrow BETA1 * XI$; $B2 \leftarrow BETA2 * XI$;
- Génération de la valeur exacte de la moyenne (1^{er} moment) de la fonction $g : E(g(.))$:
 $MOYGXT(TI) \leftarrow X0 * EXP(ALPHA * (TI - T0))$; $\{ E(X_T) = X_0 \cdot \exp(\alpha \cdot T) \}$
- Génération de la fonction de $g(.)$: $GXT(X) := X$;

Etape2: Génération de la procédure CalMoyVar(NN, X, SMOYENNE, SVARIANCE qui estime les paramètres d'un échantillon donné X de taille N);

- Initialisation : $Moyenne \leftarrow 0.0$; $Variance \leftarrow 0.0$; $SQ \leftarrow 0.0$; {variable intermédiaire}
- De $J=1, \dots, N$ faire : $Moyenne \leftarrow Moyenne + X[J]$; $SQ \leftarrow SQ + X[J] * X[J]$
- Calcul des paramètres : $Variance \leftarrow (SQ - Moyenne * Moyenne / N) / (N - 1)$; $Moyenne \leftarrow Moyenne / N$;

Etape3: Calcul de l'intervalles de confiance des erreurs moyennes pour différentes taille de pas de temps

- Calcul de la taille de pas de temps maximale des approximations d'Euler : $DELTA \leftarrow (T - T0) / 4$;
- Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation, de la moyenne de g et initialisation :
 - $EGXT := MEANGXT(T)$; {calcul de $E(g(X(T)))$ }
 - $DELTA_Y \leftarrow 2 * DELTA$;
 - $G \leftarrow 0$; {Initialisation de l'indice de la taille de pas de temps utilisée}
- Répéter $G = \text{Num}$ fois {Num est le nombre de différentes tailles de pas de temps}
 - $G \leftarrow G + 1$; $DELTA_Y \leftarrow DELTA_Y / 2$; {taille de pas de temps courant}
 - $SQDELTA_Y \leftarrow SQRT(DELTA_Y)$; {Racine de $DELTA_Y$ }
 - Génération pour différentes séries :
 - Initialisation : $J \leftarrow 0$;
 - Répéter $J = M$ fois {M est le nombre de séries}
 - $J \leftarrow J + 1$; {indice de la série}
 - $MUYLON[J] \leftarrow 0.0$; {Somme des erreurs moyennes de la série utilisée}
 - Génération pour différentes trajectoires :
 - Initialisation : $K \leftarrow 0$;
 - Répéter $K = N$ fois {N est la taille de chacune des séries}
 - $K \leftarrow K + 1$; {indice de la trajectoire utilisée}
 - II. Evaluer la 1^{er} et la 2^{ème} composante du processus de Wiener à $t = T0$:
 $W1T \leftarrow 0.0$; $W2T \leftarrow 0.0$;
 - III. Génération de l'approximation faible d'Euler et son erreur moyenne
 - $I \leftarrow 0$; {I est l'indice du pas de temps}
 - $TI \leftarrow T0$; {temps initial}
 - $YT \leftarrow X0$; {valeur initiale de l'approximation}
 - Tant que $TI < T$ faire
 - $I \leftarrow I + 1$;
 - Calculer le temps courant : $TI \leftarrow TI + DELTA_Y$;
 - Appeler la procédure GaussMarsag($G1, G2$);
 - Calculer les incréments des deux processus de Wiener ΔW_n^1 et ΔW_n^2 à l'instant $t = TI$: $DW1TI \leftarrow G1 * SQDELTA_Y$; $DW2TI \leftarrow G2 * SQDELTA_Y$;
 - Evaluer l'approximation faible d'Euler (1.1):
 $YT \leftarrow YT + A(TI - DELTA_Y, YT) * DELTA_Y$
 $+ B1(TI - DELTA_Y, YT) * DW1TI + B2(TI - DELTA_Y, YT) * DW2TI$;
 - Sommation des valeurs de la fonction $g(Y(T))$:
 $MUYLON[J] \leftarrow MUYLON[J] + GXT(YT)$;
 - Estimation de l'erreur moyenne de la série : $MUYLON[J] := MUYLON[J] / N - EGXT$

4. Calcul de l'intervalle de confiance

- i. Calcul de la taille de pas de temps courant : $DEL[G] \leftarrow DELTA_Y$;
- ii. Appeler la procédure CalMoyVar : $CalMoyVar(M, MUYLON, MOYENNE, VARIANCE)$;
- iii. $Mu[G] \leftarrow MOYENNE$;
- iv. $DIFFER[G] \leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE/M)$; {moitié de la longueur de l'Idc }

Remarque : Lorsqu'on utilise l'approximation faible d'Euler simplifié (1.3), les incrémentations du processus de Wiener seront générées non pas via la procédure GaussMarsag mais en faisant appel aux deux procédures :

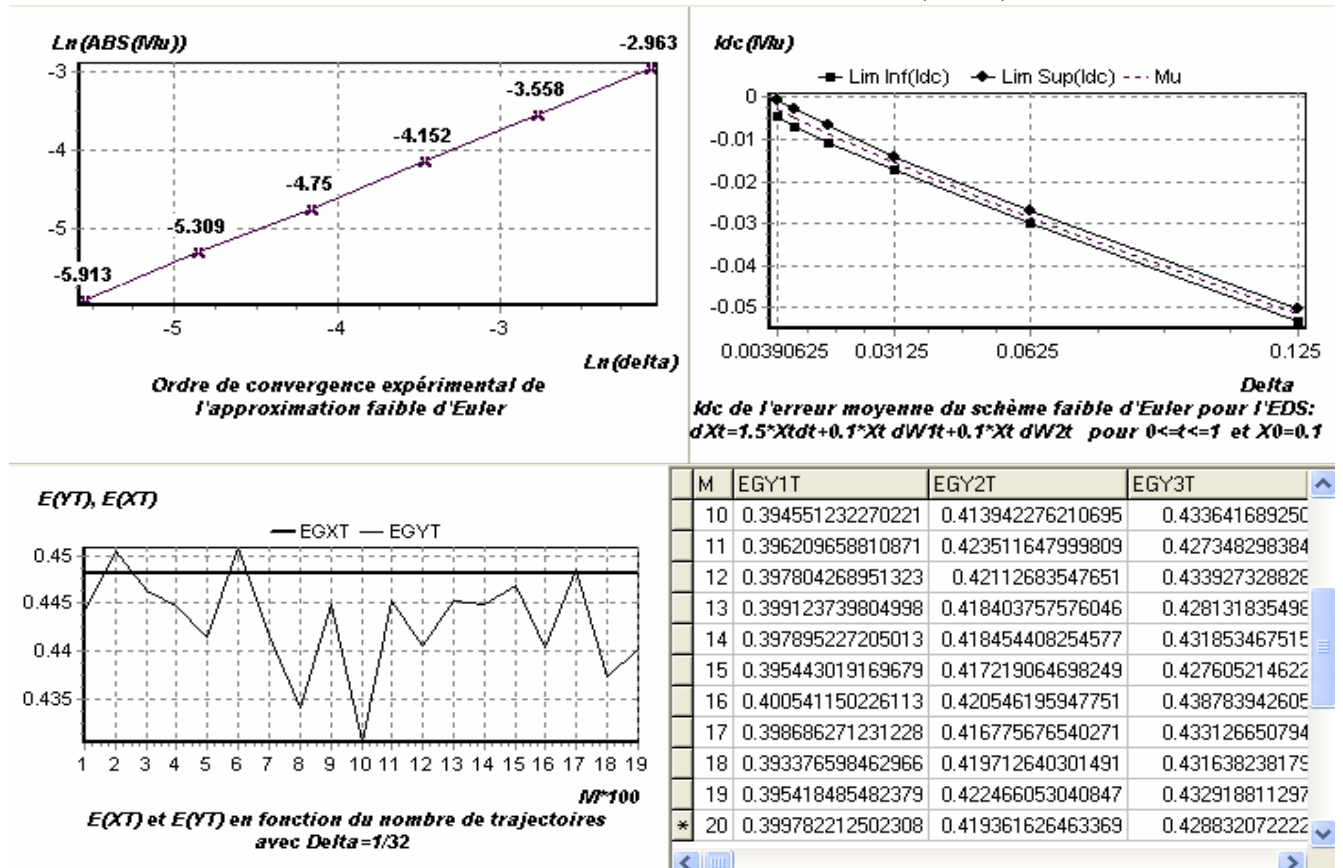
1. $GENER01(0.5, SQDELTA_Y, -SQDELTA_Y, DW1TI)$;
2. $GENER01(0.5, SQDELTA_Y, -SQDELTA_Y, DW2TI)$;

La procédure $GENER01(p, X1, X2, XU)$ permet de générer une variable aléatoire X définie en deux points $x1$ et $x2$ ($x1 < x2$) tel que $P[X=x1] = p = 1 - P[X=x2]$, en utilisant une v.a. XU uniforme sur $[0,1]$.

Cette procédure est donnée par :

1. $XU \leftarrow RANDOM$;
2. Si $XU \leq P$ alors $XU \leftarrow X1$ Sinon $XU \leftarrow X2$;

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha X_t dt + \beta_1 X_t dW_t^1 + \beta_2 X_t dW_t^2$ avec $T0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X0 \leftarrow 0.1$, $\alpha \leftarrow 1.5$, $\beta_1 \leftarrow 0.1$, $\beta_2 \leftarrow 0.1$, $Num \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $Quantile(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



Nous constatons de ces résultats qu'il existe une corrélation négative entre l'erreur moyenne et la taille de pas de temps et que l'ordre de convergence expérimental du schéma faible d'Euler est de 1.021 sachant que l'ordre théorique est égal à 1. Pour estimer cette erreur, le CPU a passé 781 millisecondes. En appliquant cette approximation ($M \times 100$) fois ($M=1,2,\dots,20$) avec un pas de temps fixé à $1/32$, la moyenne du processus de diffusion estimée (EGYT) varie entre 0.3945 et 0.4053. Notons que la valeur théorique à l'instant $T=1$ de cette moyenne (EGXT) est de 0.4481.

**Erreur moyenne du schème faible d'Euler
(cas d'EDS linéaire bidimensionnelle)**

Delta	Mu	Idc(Mu)	Longueur de l'Idc	EGYT de la 20 ^{ème} série	Temps d'exécut en ms*
$2^{-2}=0.25$	-0.0517	[-0.0532, -0.0501]	0.0061	0.3997	000
$2^{-3}=0.125$	-0.0284	[-0.0301, -0.0286]	0.0065	0.4193	015
$2^{-4}=0.0625$	-0.0157	[-0.0171, -0.0143]	0.0056	0.4288	032
$2^{-5}=0.03125$	-0.0086	[-0.0108, -0.0064]	0.0088	0.4429	046
$2^{-6}=0.015625$	-0.0049	[-0.069, -0.0029]	0.0079	0.4460	094
$2^{-7}=0.0078125$	-0.0027	[-0.0047, -0.00071]	0.0079	0.4416	203
$2^{-8}=0.00390625$	-0.00073	[-0.0031, +0.0017]	0.0097	0.4415	391

*ms : Millisecondes

2. Schème faible de Taylor d'ordre 2.0

En incluant davantage des intégrales stochastiques multiples à partir du développement de Taylor stochastique, nous obtiendrons des schèmes faibles de Taylor plus précises.

Si on rajoute toutes les intégrales doubles du développement de Taylor stochastique au schème d'Euler, nous obtiendrons le schème faible de Taylor. Dans le cas unidimensionnel $d,m=1$, on obtient le schème faible de Taylor d'ordre 2.0, donné par :

$$(1.4) \quad Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + \frac{1}{2}bb' \left\{ (\Delta W_n)^2 - \Delta_n \right\} + a'b\Delta Z_n + \frac{1}{2} \left(aa' + \frac{1}{2}a''b^2 \right) \Delta_n^2 + \left(ab' + \frac{1}{2}b''b^2 \right) \left\{ \Delta W_n \Delta_n - \Delta Z_n \right\}$$

Où ΔZ_n est défini par : (1.5)
$$\Delta Z_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} ds_2$$

La paire de variables aléatoires corrélés $(\Delta W_n, \Delta Z_n)$ de loi gaussienne peut être générée à partir d'une paire de v.a indépendantes (G_1, G_2) de distribution $N(0,1)$, comme suit:

$$\Delta W_n = \sqrt{h} \cdot G_1 \text{ et } \Delta Z_n = \frac{1}{2} h^{\frac{3}{2}} \cdot \left(G_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} G_2 \right) \text{ avec } h = E(W_n^2) = \sqrt{t} \text{ et } G_1, G_2 \approx N(0,1)$$

Une manière plus simple à procéder pour l'implémentation du schème (1.4) consiste à remplacer ΔW_n et ΔZ_n par leurs approximations : (1.6)
$$\Delta \hat{W}_n = W_n \text{ et } \Delta \hat{Z}_n = \frac{1}{2} \Delta \hat{W}_n \Delta_n$$

La v.a $\Delta \hat{W}_n$ est de loi : (1.7)
$$P[\Delta \hat{W}_n = \pm \sqrt{3\Delta_n}] = \frac{1}{6} \text{ et } P[\Delta \hat{W}_n = 0] = \frac{2}{3}$$

Dés lors, pour $d,m=1,2,\dots$, et $n=0,1,2,\dots$ la k^{ème} composante du schème faible de Taylor simplifié d'ordre 2.0 proposé par Tolay sera :

$$(1.8) \quad Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k \Delta_n + \frac{1}{2} L^0 a^k \Delta_n^2 + \sum_{j=1}^m \left\{ b^{k,j} + \frac{1}{2} \Delta_n \left(L^0 b^{k,j} + L^j a^k \right) \right\} \Delta \hat{W}_n^j + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{k, j_2} \Delta \hat{W}_n^{j_1} \Delta \hat{W}_n^{j_2} + V_{j_1, j_2}$$

où L^j est donnée par :

$$L^j = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d b^{k,j} \cdot b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \text{ si } j=0 \text{ et } L^j = \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ si } j=1,2,\dots,m$$

Les V_{j_1, j_2} sont des v.a définies par :

$$(1.9) \quad P[V_{j_1, j_2} = \pm \Delta_n] = \frac{1}{2} \quad \forall j_2=1,\dots,j_1-1; \quad V_{j_1, j_1} = -\Delta_n \text{ et } V_{j_1, j_2} = -V_{j_2, j_1} \quad \forall j_2=j_1+1,\dots,m \text{ et } j_1=1,\dots,m$$

Pour l'estimation de l'Idc de l'erreur moyenne résultante de l'approximation (1.8), on applique l'algorithme ci-dessous. Nous considérons le cas général de l'EDS : $dX_t = A(X_t)dt + B(X_t)dW_t$

Algorithme 6.1.2

1. **Paramètres** : $T0, T, X0, A(X_t), B(X_t)$.

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions

- Génération des fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B(TI, XI)$: $A \leftarrow \text{ALPHA} * XI$; $B \leftarrow \text{BETA} * XI$;
- Génération de la première dérivé partielle de A et B : $DBX \leftarrow \text{Alpha}$; $DBX \leftarrow \text{BETA}$;
- Génération de la valeur de la fonction g et de sa moyenne $E(g(\cdot))$:

.....voir algorithme 6.1.1

Etape2: Génération de la procédure $\text{CalMoyVar}(NN, X, \text{SMOYENNE}, \text{SVARIANCE})$ qui Calcul les paramètres d'un échantillon donné X de taille N ;

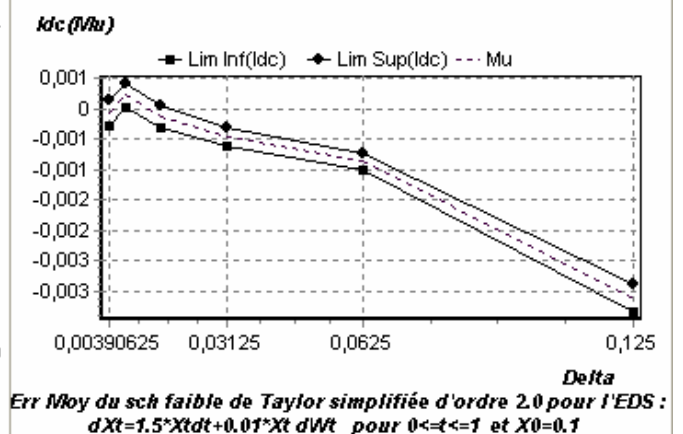
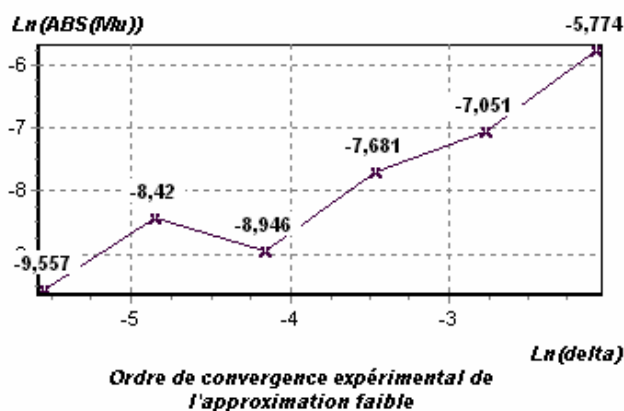
.....voir algorithme 6.1.1

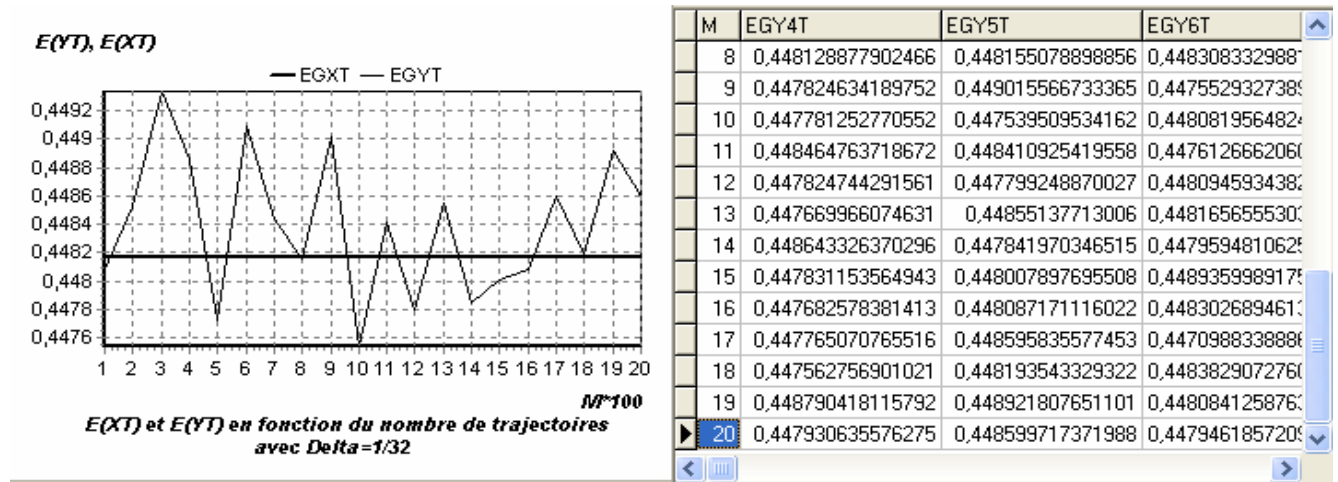
Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs pour différentes tailles de pas de temps.

Pour se faire, on reprend l'étape 3 de l'algorithme 6.1.1 sans oublier de changer le point c.III qui permet de générer l'approximation faible d'Euler par celui qui génère le schème faible de Taylor simplifiée d'ordre 2.0 :

- $I := 0$; $TI := T0$; $YT := X0$;
- Tant que $TI < T$ faire
 - $I := I + 1$;
 - $TI := TI + \text{DELTA_Y}$;
 - $U := \text{RANDOM}$; { génération de 3 points de loi uniforme
 - Si $U > 1./3$. Alors $U := 0.0$ Sinon Si $U > 1./6$. Alors $U := -1.0$ Sinon $U := +1.0$;
 - $DWTI := U * \text{SQDELTA_Y} * \text{SQRT}(3.0)$; {les incréments simplifiés $W(t(i+1)) - W(ti)$ }
 - $\text{DELZ} := 0.5 * \text{DELTA_Y} * DWTI$; { Intégrale multiple I10 }
 - $I11 := 0.5 * (DWTI * DWTI - \text{DELTA_Y})$; { Intégrale multiple I11 }
 - $AA := A(YT)$; $DADX := DAX(YT)$; $BB := B(YT)$; $DBDX := DBX(YT)$;
 - $YT := YT + AA * \text{DELTA_Y} + 0.5 * AA * DADX * \text{DELTA_Y} * \text{DELTA_Y} + BB * DWTI$;
 - $YT := YT + BB * DBDX * I11 + (AA * DBDX + BB * DADX) * \text{DELZ}$;

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha \cdot X_t dt + \beta \cdot X_t dW_t$ avec $T0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X0 \leftarrow 0.1$, $\text{Alpha} \leftarrow 1.5$, $\text{Beta} \leftarrow 0.01$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$





Pour un pas de temps fixé à $1/32$, la moyenne approchée du processus de diffusion par le schème de Tylor simplifié d'ordre 2.0 varie selon le nombre de trajectoires entre 0.4475 et 0.4493. Nous obtenons ainsi un intervalle de confiance de l'erreur moyenne égal à $[-0.0003, -4.83 \cdot 10^{-5}]$.

**Erreur moyenne du schème faible de Taylor d'ordre 2.0
(cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)**

Delta	Mu	Idc(Mu)	Longueur de l'Idc	EGYT de la 20 ^{ème} série	Temps d'exéc en ms*
$2^{-2}=0.25$	-0.0031	$[-0.0033, -0.0028]$	0.0009	0.4458	016
$2^{-3}=0.125$	-0.00086	$[-0.0010, -0.00073]$	0.00053	0.4467	016
$2^{-4}=0.0625$	-0.00046	$[-0.0006, -0.0003]$	0.00060	0.4478	031
$2^{-5}=0.03125$	-0.00013	$[-0.0003, -4.83 \cdot 10^{-5}]$	0.00071	0.4479	078
$2^{-6}=0.015625$	+0.00022	$[+2.89 \cdot 10^{-5}, +0.0004]$	0.00076	0.4485	156
$2^{-7}=0.0078125$	$-7.07 \cdot 10^{-5}$	$[-0.00027, +0.00013]$	0.00080	0.4479	297
$2^{-8}=0.00390625$	$+5.95 \cdot 10^{-5}$	$[-8.99 \cdot 10^{-5}, +0.0002]$	0.00059	0.4483	594

*ms : Millisecondes

3. Schème faible de Taylor d'ordre 3.0

Ce schème, proposé par Platen, est obtenu en incluant toutes les intégrales multiples d'Itô de multiplicité égal à 3 du développement de Taylor stochastique. Or cet ordre de multiplicité élevé rend difficile l'implémentation du schème, alors on a recours à approcher les intégrales multiples d'Itô par des v.a gaussiennes. Le cas le plus simple ($d=m=1$) est celui du schème faible de Taylor simplifié d'ordre 3.0, donnée par :

$$\begin{aligned}
 (1.10) \quad Y_{n+1} = & Y_n + a \Delta_n + b \Delta \tilde{W}_n + \frac{1}{2} L^1 b \left\{ (\Delta \tilde{W}_n)^2 - \Delta_n \right\} + L^1 a \Delta \tilde{Z}_n + \frac{1}{2} L^0 a \Delta_n^2 + L^0 b \left\{ \Delta \tilde{W}_n \Delta_n - \Delta \tilde{Z}_n \right\} \\
 & + \frac{1}{6} (L^0 L^0 b + L^0 L^1 a + L^1 L^0 a) \Delta \tilde{W}_n \Delta_n^2 + \frac{1}{6} (L^1 L^1 a + L^1 L^0 b + L^0 L^1 b) \left\{ (\Delta \tilde{W}_n)^2 - \Delta_n \right\} \Delta_n \\
 & + \frac{1}{6} L^1 L^1 b \left\{ (\Delta \tilde{W}_n)^2 - 3 \Delta_n \right\} \Delta \tilde{W}_n + \frac{1}{6} L^0 L^0 a \Delta_n^3
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, les intégrales multiples d'Itô sont représenté exactement ou approximativement en terme de v.a gaussiennes corrélés $\Delta \tilde{W}_n$ et $\Delta \tilde{Z}_n$ tel que

$$(1.11) \quad \Delta \tilde{W}_n \approx N(0, \Delta_n), \quad \Delta \tilde{Z}_n \approx N\left(0, \frac{1}{3} \Delta_n^3\right) \text{ et } E(\Delta \tilde{W}_n \Delta \tilde{Z}_n) = \frac{1}{2} \Delta_n^2$$

Pour l'estimation de l'Idc de l'erreur moyenne pour différentes séries en utilisant le schème faible de Taylor simplifié d'ordre 3.0, on utilise les mêmes étapes que l'algorithme 6.1.2. Nous rajoutons seulement les instructions permettant de calculer les paramètres du schème.

L'EDS considérée est une équation linéaire à une dimension:

$$dX_t = \alpha X_t + \beta X_t dW_t \quad \text{avec } X(t_0) = X_0$$

Algorithme 6.1.3

1. Paramètres : $T0, T, X0, Alpha, Beta$.

2. Simulation:

Etape1: Génération de la valeur de la fonction g et de sa moyenne $E(g(.))$:

.....voir algorithme 6.1.1

Etape2: Génération de la procédure $CalMoyVar(NN, X, SMOYENNE, SVARIANCE)$ qui Calcul les paramètres d'un échantillon donné X de taille N ;

.....voir algorithme 6.1.1

Etape3: Calcul de l'intervalles de confiance des erreurs moyennes pour différentes taille de pas de temps

a. $DELTA \leftarrow (T - T0)/4$;

b. $EGXT := MEANGXT(T)$; $DELTA_Y \leftarrow 2 * DELTA$; $G \leftarrow 0$;

c. Répéter $G = Num$ fois

1. $G \leftarrow G + 1$;

2. $DELTA_Y \leftarrow DELTA_Y / 2$; $SQDELTA_Y \leftarrow SQRT(DELTA_Y)$;

3. Calcul des paramètres du schème :

i. $KAPPA1 := ALPHA * DELTA_Y$; $KAPPA2 := KAPPA1 * KAPPA1 / 2$; $G1 := 1.0 + KAPPA1$;

ii. $KAPPA0 := G1 + KAPPA2 * (1.0 + KAPPA1 / 3)$; $KAPPA1 := G1 + KAPPA2$; $KAPPA2 := G1$;

4. Génération pour différentes séries :

.....voir le point.c.4 de l'étape 3 de l'algorithme 6.1.1

III. Génération de l'approximation faible de Taylor simplifié d'ordre 3.0 :

1. $I \leftarrow 0$; $TI \leftarrow T0$; $YT \leftarrow X0$;

2. Tant que $TI < T$ faire

• $I := I + 1$;

• $TI := TI + DELTA_Y$;

• Si $I \bmod 2 = 1$ Alors $GaussMarsag(G1, G2)$ Sinon $G1 := G2$;

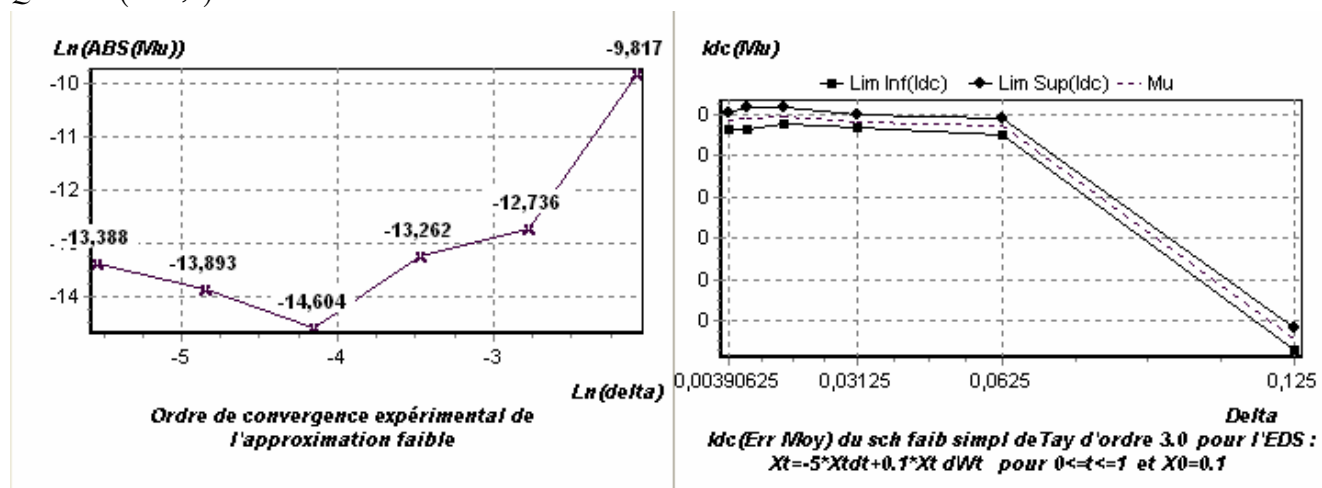
• $DWTI := G1 * SQDELTA_Y$;

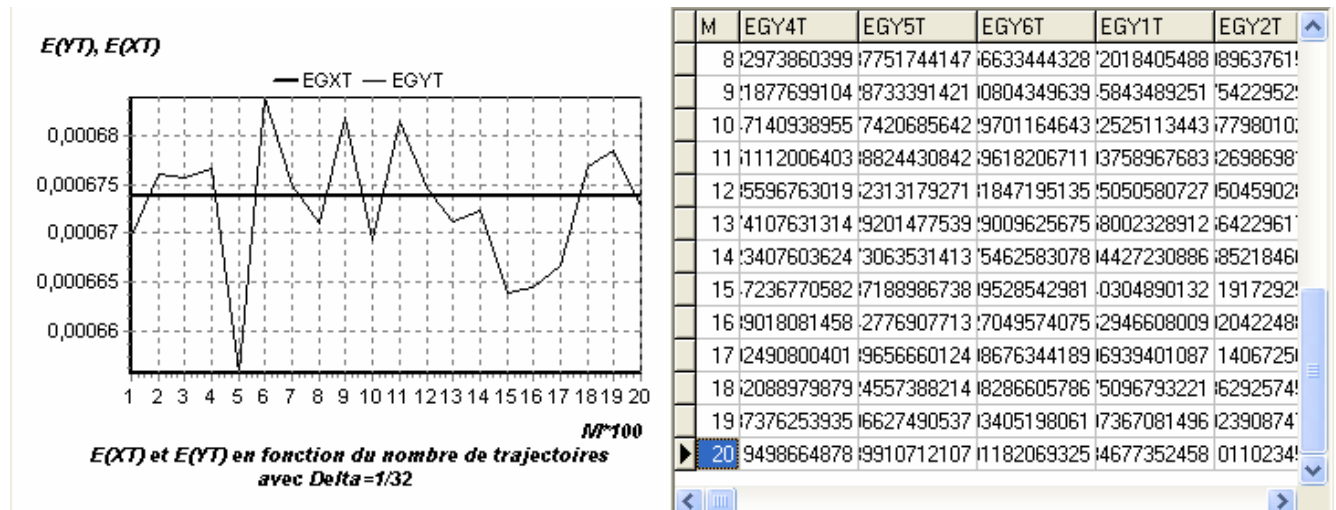
• $I11 := 0.5 * (DWTI * DWTI - DELTA_Y)$; }

• $I111 := DWTI * (DWTI * DWTI - 3 * DELTA_Y) / 6$;

• $YT := YT * (KAPPA0 + BETA * (KAPPA1 * DWTI + BETA * (KAPPA2 * I11 + BETA * I111)))$;

Résultat de Simulation : $T0 \leftarrow 0, T \leftarrow 1, X0 \leftarrow 1, Alpha \leftarrow -5, Beta \leftarrow 0.1, Num \leftarrow 7, N \leftarrow 100, M \leftarrow 20$,
Quantile($\alpha=0,1$) $\leftarrow 1.73$





Pour l'EDS $dX_t = -5 \cdot X_t + 0.1 \cdot X_t dW_t$ avec $X_0 = 0.1$, la moyenne du processus de diffusion à l'instant $T=1$, est égale à 0.000673. Le schème faible de Taylor simplifié d'ordre 3.0 a donné pour un pas de temps égal à $1/32$, une moyenne approchée variant entre 0.000655 et 0.000683. Ces deux valeurs correspondent respectivement à 500 et 600 trajectoires.

Erreur moyenne du schème faible de Taylor d'ordre 3.0 (cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)

Delta	Mu	Idc(Mu)	Longueur de l'Idc	EGYT de la 20 ^{ème} série	Temps d'exécut en ms*
2^{-2}	$-5.45 \cdot 10^{-5}$	$[-7.70 \cdot 10^{-5}, -5.19 \cdot 10^{-5}]$	$1.03 \cdot 10^{-5}$	$61,68 \cdot 10^{-5}$	000
2^{-3}	$-2.94 \cdot 10^{-6}$	$[-4.95 \cdot 10^{-6}, -9.33 \cdot 10^{-7}]$	$8.03 \cdot 10^{-6}$	$66,09 \cdot 10^{-5}$	015
2^{-4}	$-1.74 \cdot 10^{-6}$	$[-3.30 \cdot 10^{-6}, -1.73 \cdot 10^{-7}]$	$6.26 \cdot 10^{-6}$	$67,41 \cdot 10^{-5}$	016
2^{-5}	$-4.54 \cdot 10^{-7}$	$[-2.49 \cdot 10^{-6}, -1.58 \cdot 10^{-6}]$	$8.14 \cdot 10^{-6}$	$67,73 \cdot 10^{-5}$	062
2^{-6}	$-9.25 \cdot 10^{-7}$	$[-3.55 \cdot 10^{-6}, +1.69 \cdot 10^{-6}]$	$1.05 \cdot 10^{-7}$	$67,28 \cdot 10^{-5}$	094
2^{-7}	$-1.53 \cdot 10^{-6}$	$[-3.56 \cdot 10^{-6}, +4.96 \cdot 10^{-7}]$	$8.12 \cdot 10^{-6}$	$67,39 \cdot 10^{-5}$	188
2^{-8}	$+6.95 \cdot 10^{-7}$	$[-2.64 \cdot 10^{-6}, +1.41 \cdot 10^{-6}]$	$8.11 \cdot 10^{-6}$	$67,42 \cdot 10^{-5}$	406

*ms : Millisecondes

6.2. Schèmes faibles explicites

La détermination des dérivés de divers ordres des coefficients drift et de diffusion dans les schèmes faibles de Taylor d'ordre supérieur peut être évité en utilisant les schèmes faibles de Runge-Kutta, appelés schèmes faibles explicites.

Par ailleurs, si on veut augmenter l'ordre de convergence des schèmes faibles, il sera plus commode d'utiliser les méthodes d'extrapolation.

1. Schèmes faibles explicites d'ordre 2.0

Platen a proposé un schème ayant les mêmes propriétés que le schème faible de Taylor simplifié d'ordre 2.0 établi en (1.8) mais seulement pour éviter l'utilisation des dérivés des coefficients drift et de diffusion, des points de support additionnels seront considérés.

Dans le cas général $d, m=1, 2, \dots$, le schème faible explicite d'ordre 2.0, est donnée par :

$$(2.1) \quad Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2}(a(\bar{\gamma}) + a) \Delta_n + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left[(b^j(\bar{R}_+^j) + b^j(\bar{R}_-^j) + 2b^j) \Delta \hat{W}_n^j + \sum_{r \neq j=1}^m (b^j(\bar{U}_+^r) + b^j(\bar{U}_-^r) - 2b^j) \Delta \hat{W}_n^j \Delta_n^{-1/2} \right] \\ + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left[(b^j(\bar{R}_+^j) - b^j(\bar{R}_-^j)) (\Delta \hat{W}_n^j)^2 - \Delta_n \right] + \sum_{r \neq j=1}^m (b^j(\bar{U}_+^r) - b^j(\bar{U}_-^r)) (\Delta \hat{W}_n^j \Delta \hat{W}_n^r + V_{r,j}) \Delta_n^{-1/2}$$

avec des valeurs de support données par :

$$\bar{\gamma} = Y_n + a \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta \hat{W}_n^j, \quad \bar{R}_\pm^j = Y_n + a \Delta_n \pm b^j \sqrt{\Delta_n} \quad \text{et} \quad \bar{U}_\pm^j = Y_n \pm b^j \sqrt{\Delta_n}$$

Les v.a $\Delta \hat{W}_n^j$ et $V_{r,j}$ sont définies en (1.7) et (1.9).

Dans le cas unidimensionnel Talay a proposé un autre schème ayant la forme suivante :

$$(2.2) \quad Y_{n+1} = Y_n + \sqrt{2} b(\bar{\gamma}) \Delta \tilde{W}_n + \frac{1}{\sqrt{2}} b(\Delta \hat{W}_n - \Delta \tilde{W}_n) + (a(\bar{\gamma}) - \frac{1}{2} b(\bar{\gamma}) b'(\bar{\gamma})) \Delta_n \\ + \frac{1}{2} b \cdot b' (\Delta \hat{W}_n)^2 + \frac{1}{2} b(\bar{\gamma}) b'(\bar{\gamma}) (\Delta \tilde{W}_n)^2 - \frac{1}{2} b \cdot b' (\Delta \hat{W}_n + \Delta \tilde{W}_n)^2$$

$$\text{avec} \quad (2.3) \quad \bar{\gamma} = Y_n + \frac{1}{\sqrt{2}} b \Delta \hat{W}_n + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} b \cdot b' \right) \cdot \Delta_n + \frac{1}{4} b \cdot b' \cdot (\Delta \hat{W}_n)^2,$$

où $\Delta \hat{W}_n$ et $\Delta \tilde{W}_n$ sont des v.a indépendantes définies comme en (1.7)

Nous présentons ci-dessous un algorithme d'estimation de l'intervalle de confiance des erreurs moyennes résultantes de l'approximation faible explicite d'ordre 2.0 pour l'EDS linéaire unidimensionnelle : $dX_t = \alpha \cdot X_t + \beta \cdot X_t dW_t$

Algorithme 6.2.1

1. Paramètres : $T_0, T, X_0, \text{Alpha}, \text{Beta}$.

2. Simulation:

Etape1: Génération de la valeur de la fonction g et de sa moyenne $E(g(\cdot))$:voir algorithme 6.1.1 ...

Etape2: Génération de la procédure $\text{CalMoyVar}(NN, X, \text{SMOYENNE}, \text{SVARIANCE})$:voir algorithme 6.1.1 ...

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs moyennes pour différentes taille de pas de temps

a. $\text{DELTA} \leftarrow (T - T_0)/4$;

b. Calcul de la constante du schème : $\text{KAPPA} := \text{SQRT}(2.0)$;

c. $\text{EGXT} := \text{MEANGXT}(T)$;

d. $\text{DELTA_Y} \leftarrow 2 \cdot \text{DELTA}$; $G \leftarrow 0$;

c. Répéter $G = \text{Num fois}$

1. $G \leftarrow G + 1$; $\text{DELTA_Y} \leftarrow \text{DELTA_Y} / 2$; $\text{SQDELTA_Y} \leftarrow \text{SQRT}(\text{DELTA_Y})$;

2. Calcul des paramètres du schème (constante du schème) :

i. $\text{KAPPA1} := (\text{ALPHA} - 0.5 \cdot \text{BETA} \cdot \text{BETA}) \cdot \text{DELTA_Y}$;

ii. $\text{KAPPA0} := 1.0 + 0.5 \cdot \text{KAPPA1}$;

3. Génération pour différentes séries :voir le point.c.4 de l'étape 3 de l'algorithme 6.1.1

III. Génération de l'approximation faible de Taylor simplifié d'ordre 3.0 :

1. $I \leftarrow 0$; $\text{TI} \leftarrow T_0$; $\text{YT} \leftarrow X_0$;

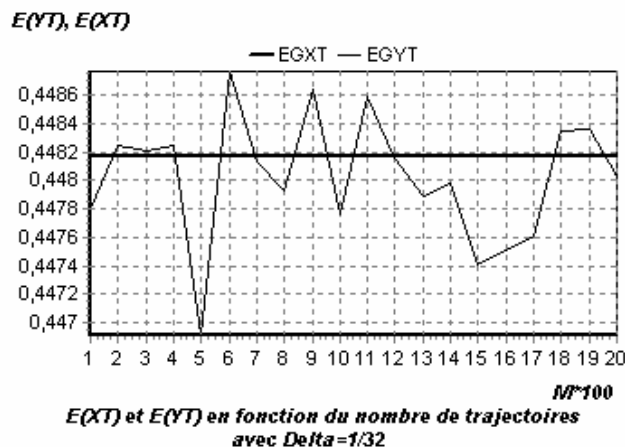
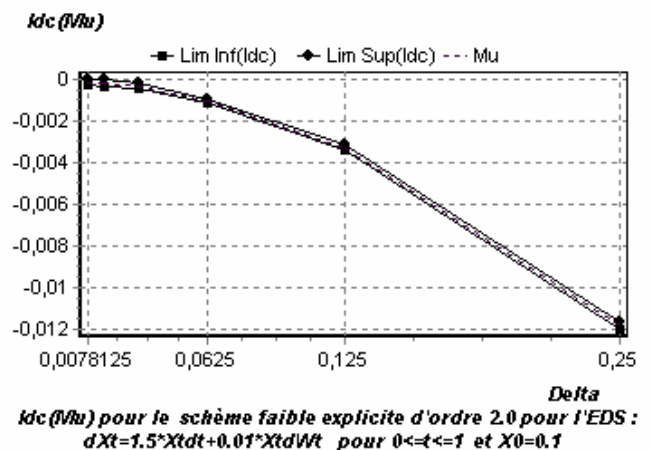
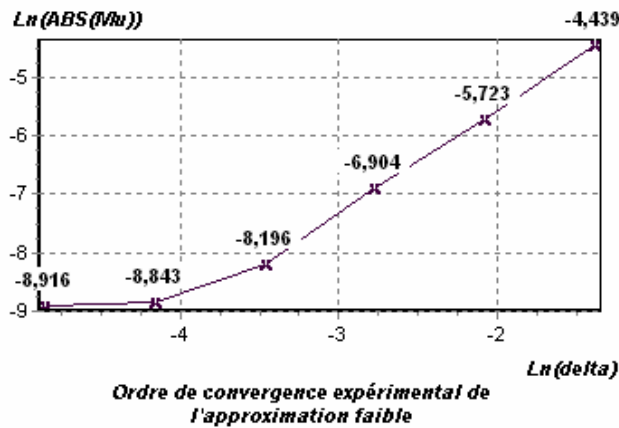
2. Tant que $\text{TI} < T$ faire

• $I := I + 1$; $\text{TI} := \text{TI} + \text{DELTA_Y}$;

• $\text{GENERATE}(\text{HDWTI}, \text{TDWTI})$;

- $HDWTI := HDWTI * SQDELTA_Y; TDWTI := TDWTI * SQDELTA_Y;$
- $H1 := 1.0 + BETA * (HDWTI - TDWTI) / KAPPA - BETA * BETA * TDWTI * (HDWTI + 0.5 * TDWTI);$
- $H2 := KAPPA0 + BETA * HDWTI * (1. / KAPPA + 0.25 * BETA * HDWTI);$
- $H2 := H2 * (KAPPA1 + BETA * TDWTI * (KAPPA + 0.5 * BETA * TDWTI));$
- $YT := YT * (H1 + H2);$

Résultat de Simulation : $T0 \leftarrow 0, T \leftarrow 1, X0 \leftarrow 0.1, Alpha \leftarrow 1.5, Beta \leftarrow 0.01, Num \leftarrow 7, N \leftarrow 100, M \leftarrow 20,$
Quantile ($\alpha=0,1$) $\leftarrow 1.73$



M	EGY4T	EGY5T	EGY6T	E
8	0.447535002760587	0.447921701232224	0.4487250485	E
9	0.447636039459829	0.448635798791012	0.4490919054	E
10	0.448404686611968	0.447765361277855	0.4493343701	E
11	0.447157341967065	0.448589070808663	0.4493343701	E
12	0.447531686240018	0.448150629001388	0.4493343701	E
13	0.447931803567203	0.447888813736217	0.4493343701	E
14	0.447902845496753	0.447981075626929	0.4493343701	E
15	0.447928386789693	0.447401020837648	0.4493343701	E
16	0.447903400675198	0.44750309910839	0.4493343701	E
17	0.448199910654234	0.447606093472724	0.4493343701	E
18	0.447532924111375	0.448347467843963	0.4493343701	E
19	0.44757228070655	0.448355759702707	0.4493343701	E
20	0.448193045748773	0.448031421883312	0.4493343701	E

Pour l'EDS $dX_t = 1.5 \cdot X_t + 0.01 \cdot X_t dW_t$ avec $X_0 = 0.1$, la moyenne du processus de diffusion à l'instant $T=1$ est estimée à 0.4481. L'utilisation de l'approximation faible explicite d'ordre 2.0 implique une erreur moyenne qui varie en valeur absolue entre $6.78 \cdot 10^{-5}$ et 0.0118.

Erreur moyenne du schème faible explicite d'ordre 2.0 (cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)

Delta	Mu	Idc(Mu)	Longueur de l'Idc	EGYT de la 20 ^{ème} série	Temps d'exéc en ms*
2^{-2}	-0,0118	[-0,0119, -0,0116]	0,00064	0.4451	000
2^{-3}	-0.0033	[-0.0034, -0.0031]	0.00051	0.4451	015
2^{-4}	-0.0010	[-0.0011, -0.0009]	0.00041	0.4472	016
2^{-5}	-0.0003	[-0.0004, -0.00014]	0.00055	0.4475	047
2^{-6}	-0.00014	[-0.00032, $2.95 \cdot 10^{-5}$]	0.00069	0.4482	094
2^{-7}	-0.00013	[-0.0002, $3.26 \cdot 10^{-5}$]	0.00054	0.4482	172
2^{-8}	$-6.78 \cdot 10^{-5}$	[-0.0002, $6.32 \cdot 10^{-5}$]	0.00052	0.4478	359

2. Approximation par la méthode d'extrapolation

Nous présentons une méthode d'approximation proposée par Talay et Tubaro, connu par Extrapolation de Romberg-Richardson, qui consiste à simuler des fonctions du processus de diffusion. Cette méthode a pour but d'augmenter l'ordre de convergence des approximations faibles en temps discret, à condition qu'elles soient stables.

La méthode d'extrapolation la plus simple est celle d'ordre faible égal à 2.0 et qui utilise l'approximation d'Euler Y^δ généralisé avec une taille de pas de temps δ . L'extrapolation de Romberg-Richardson d'ordre 2.0 est donnée par : (2.4) $V_{1,2}^\delta = 2V_{1,1}^\delta - V_{1,1}^{2\delta}$ où $V_{1,1}^\Delta$ est une fonction simulée définit pour toute fonction continue et croissante g : (2.5) $V_{1,1}^\Delta = E(g(Y^\Delta(T)))$

Pour l'estimation de l'Idc de l'erreur moyenne résultante de l'approximation par la méthode d'extrapolation de Romberg-Richardson d'ordre 2.0 sur l'EDS : $dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t$, on applique l'algorithme suivant :

Algorithme 6.2.2

2. **Paramètres** : $T0, T, X0, A(t, X_t), B(t, X_t)$.

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions

- a. Génération des fonctions drift $A(TI, XI)$ et de diffusion $B(TI, XI)$: $A \leftarrow \text{ALPHA} * XI$; $B \leftarrow \text{BETA} * XI$;
- b. Génération de la valeur de la fonction g et de sa moyenne $E(g(\cdot))$:voir algorithme 6.1.1

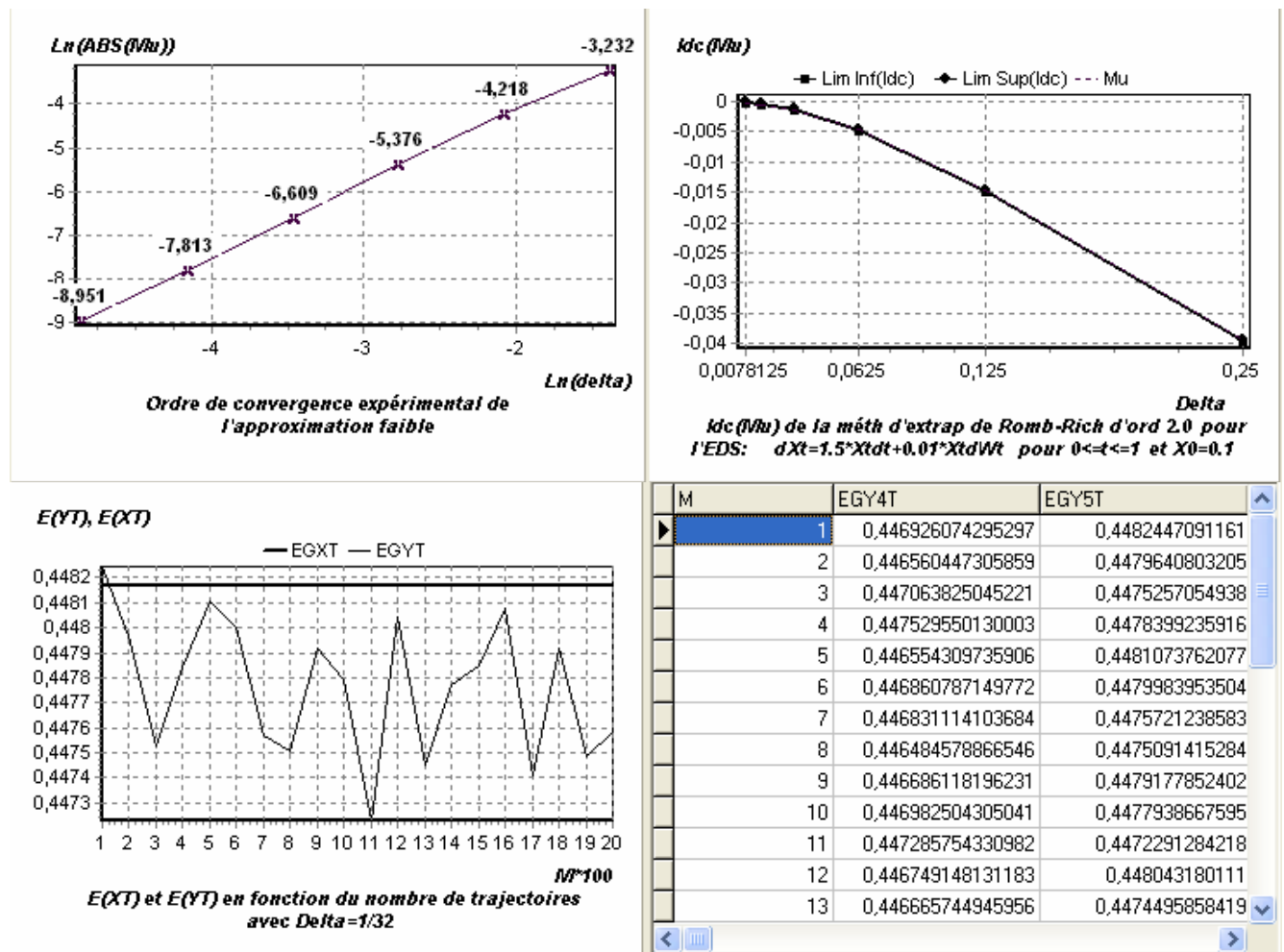
Etape2: Génération de la procédure $\text{CalMoyVar}(NN, X, \text{SMOYENNE}, \text{SVARIANCE})$: ...voir algorithme 6.1.1 ...

Etape3: Calcul de l'intervalles de confiance des erreurs moyennes pour différentes taille de pas de temps

- a. $\text{DELTA} \leftarrow (T - T0)/4$;
- b. Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation d'Euler, de la moyenne de g et initialisation :
 $\text{DELTA_Y} \leftarrow 2 * \text{DELTA}$; $\text{EGXT} := \text{MEANGXT}(T)$; $G \leftarrow 0$;
- c. Répéter $G = \text{Num}$ fois { Num est le nombre de différentes tailles de pas de temps }
 - 1. $G \leftarrow G + 1$; $\text{DELTA_Y} \leftarrow \text{DELTA_Y} / 2$; $\text{SQDELTA_Y} \leftarrow \text{SQRT}(\text{DELTA_Y})$;
 - 2. Génération pour différentes séries :
 - i. Initialisation : $J \leftarrow 0$;
 - ii. Répéter $J = M$ fois {M est le nombre de séries}
 - iii. Incrémentation et estimation de $E(g(Y(T)))$ et $E(g(Y2(T)))$ pour chacune des séries
 $J := J + 1$; $\text{EGYT}[J] := 0.0$; $\text{EGY2T}[J] := 0.0$;
 $Y(T)$ et $Y2(T)$ sont respectivement la valeur de l'approximation d'Euler en utilisant δ et 2δ
 - iv. Génération pour différentes trajectoires :
 - a. Initialisation : $K \leftarrow 0$;
 - b. Répéter $K = N$ fois {N est la taille de chacune des séries}
 - I. $K \leftarrow K + 1$; { indice de la trajectoire utilisée }
 - II. Génération de l'approximation faible $Y(T)$
 - 1. Initialisation : $I := 0$; $TI := T0$; $YT := X0$; $Y2T := X0$;
 - 2. Tant que $TI < T$ faire
 - $I := I + 1$; $TI := TI + \text{DELTA_Y}$;
 - Si $I \text{ MOD } 2 = 1$ Alors $\text{GaussMarsag}(G1, G2)$ Sinon $\text{DW2TI} := \text{DWTI}$; $G1 := G2$;
 - $\text{DWTI} := G1 * \text{SQDELTA_Y}$;
 - Calcul du schème d'Euler pour DELTA_Y
 $YT := YT + A(TI - \text{DELTA_Y}, YT) * \text{DELTA_Y} + B(TI - \text{DELTA_Y}, YT) * \text{DWTI}$;

- Calcul du schème d'Euler pour $2 \cdot \text{DELTA_Y}$: Si $I \bmod 2 = 0$ Alors
 - $\text{DW2TI} := \text{DW2TI} + \text{DWTI}$;
 - $\text{Y2T} := \text{Y2T} + 2 \cdot \text{A}(\text{TI} - 2 \cdot \text{DELTA_Y}, \text{Y2T}) \cdot \text{DELTA_Y} + \text{B}(\text{TI} - 2 \cdot \text{DELTA_Y}, \text{Y2T}) \cdot \text{DW2TI}$;
- III. Sommation des valeurs de la fonction $g(\text{Y}(T))$:
 - $\text{EGYT}[J] := \text{EGYT}[J] + \text{GXT}(\text{YT})$; $\text{EGY2T}[J] := \text{EGY2T}[J] + \text{GXT}(\text{Y2T})$;
- v. Estimation de l'erreur moyenne de l'extrapolation pour chaque série j
 - $\text{EGYT}[J] := \text{EGYT}[J] / N$; $\text{EGY2T}[J] := \text{EGY2T}[J] / N$;
 - $\text{ERRV}[J] := 2 \cdot \text{EGYT}[J] - \text{EGY2T}[J] - \text{EGXT}$; { erreur d'extrapolation }
- 3. Calcul de l'intervalle de confiance de l'erreur moyenne Mu pour chaque pas de temps.
 - i. Calcul de la taille de pas de temps courant : $\text{DEL}[G] \leftarrow \text{DELTA_Y}$;
 - ii. Appeler la procédure CalMoyVar :
 - $\text{CalMoyVar}(\text{M}, \text{EPSYLON}, \text{MOYENNE}, \text{VARIANCE})$;
 - iii. $\text{Mu}[G] \leftarrow \text{MOYENNE}$;
 - iv. $\text{DIFFER}[G] \leftarrow \text{QUANTILE} \cdot \text{SQRT}(\text{VARIANCE} / \text{M})$; { moitié de la longueur de l'Idc }
Quantile est la valeur de Student à $(\text{M}-1)$ degré de liberté pour α fixé.

Résultat de Simulation : L'EDS considérée est $dX_t = \alpha \cdot X_t dt + \beta \cdot X_t dW_t$ avec $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_0 \leftarrow 1$, $\text{Alpha} \leftarrow 1.5$, $\text{Beta} \leftarrow 0.01$, $\text{Num} \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $\text{Quantile}(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



En appliquant la méthode d'extrapolation de Romberg-Richardson d'ordre 2.0 sur la même EDS que le schème faible explicite d'ordre 2.0, nous constatons que l'erreur moyenne est plus petite. Pour une taille de pas de temps égale à 2^{-5} , cette erreur est égale respectivement à -0.00134 et -0.0001.

**Erreur moyenne de l'approximation par la méthode d'extrapolation
(cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)**

Delta	Mu	Idc(Mu)	Longueur de l'Idc	EGYT de la 20 ^{ème} série	Temps d'exécut en ms*
2^{-2}	-0.0394	[-0.0396, -0.0393]	0.00065	0.4332	000
2^{-3}	-0.0147	[-0.0148, -0.0146]	0.00039	0.4430	016
2^{-4}	-0.0046	[-0.0048, -0.0044]	0.0006	0.4418	016
2^{-5}	-0.00134	[-0.00148, -0.0012]	0.00056	0.4480	046
2^{-6}	-0.0004	[-0.0005, -0.00029]	0.00043	0.4480	079
2^{-7}	-0.00013	[-0.00028, $2.80 \cdot 10^{-5}$]	0.00063	0.4481	171
2^{-8}	-0.00013	[-0.00028, $2.35 \cdot 10^{-5}$]	0.0006	0.4482	344

6.3.Approximations faibles implicites

Généralement, l'application de ce type d'approximation nécessite beaucoup de calcul car l'équation algébrique doit être résolu à chaque pas de temps. Néanmoins, ces schèmes implicites ainsi que les schèmes prédictor-correcteur conviennent pour les équations différentielles renforcées «Stiff EDS » et ils sont numériquement plus stables que beaucoup de schèmes explicites.

1. Schème faible implicite d'Euler

Le schème d'Euler implicite est le schème faible implicite le plus simple de forme générale :

$$(3.1) \quad Y_{n+1} = Y_n + \{(1-\alpha) \cdot a(\tau_n, Y_n) + \alpha a(\tau_{n+1}, Y_{n+1})\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j(\tau_n, Y_n) \Delta \hat{W}_n^j \quad \forall d, m, n=1, 2, \dots$$

où $\alpha \in [0, 1]$ est le degré d'implicitement

$\forall j=1, \dots, m$ et $n=1, 2, \dots$, les $\Delta \hat{W}_n^j$ sont des v.a indépendantes de distribution donnée en (1.2).

Pour $\alpha=0.0$ le schème (3.1) se réduit au schème d'Euler explicite simplifié (1.3), alors que pour $\alpha=0.5$, on retrouve une généralisation stochastique de la méthode Trapézoïdale (4.1.5).

Le schème (3.1) converge faiblement avec un ordre $\beta=1.0$ et il est A-Stable pour $\alpha \in [0.5, 1]$ mais pour $\alpha \in [0, 0.5]$ sa région de stabilité absolue est l'intérieur du cercle de rayon $r=(1-2\alpha)^{-1}$, centré en $-r+0i$ dans un plan complexe.

Considérons l'EDS linéaire à deux dimensions suivante: (3.2) $dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t$

$$\text{avec } A = a \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = bI = b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

Nous notons de (2.1.16) que l'espérance $E(X_t)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire linéaire à deux dimensions : $\frac{dm}{dt} = Am$ alors : (3.3) $E(X_t) = E(X_0) \exp(At) = E(X_0) \cdot \begin{bmatrix} 1+2e^{-at} & 1-e^{-at} \\ 1-e^{-at} & 1+e^{-at} \end{bmatrix}$.

Pour arriver à des résultats satisfaisant lors de l'estimation des fonctions $E(X_t)$, il serait plus intéressant d'attribuer au coefficient de diffusion b une valeur assez petite.

Ce choix nous évite d'obtenir des intervalles de confiance très petits. Pour obtenir une approximation faible implicite d'Euler qui converge vers celle de l'équation d'Itô, on a besoin de modifier le coefficient drift en introduisant des paramètres d'implicitement car généralement cette convergence n'est pas vérifiée [10].

Dans le cas général multidimensionnel $d, m=1,2,\dots$, la famille des schèmes d'Euler implicites avec des paramètres d'implicitement $\alpha, \eta \in [0,1]$ est donnée par :

$$(3.4) \quad Y_{n+1} = Y_n + \left\{ \alpha \bar{a}_\eta(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1-\alpha) \bar{a}_\eta(\tau_n, Y_n) \right\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m \left\{ \eta b^j(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + (1-\eta) b^j(\tau_n, Y_n) \right\} \Delta \hat{W}_n^j$$

où $\Delta \hat{W}_n^j$ est défini en (1.2) et le coefficient drift corrigé est donné par :

$$(3.5) \quad \bar{a}_\eta = a - \eta \sum_{j,j_2=1}^m \sum_{k=1}^d b^{k,j_1} \frac{\partial b^{j_2}}{\partial x^k}$$

Si on choisit $\alpha=\eta=1$ alors (3.4) devient un schème d'Euler complètement implicite et si $\eta=0.5$ alors $\bar{a}_\eta = \underline{a}$ est le coefficient corrigé de l'équation de Stratonovich correspondante.

Pour $\alpha=0.5$, le schème (3.4) sera une généralisation stochastique de la méthode déterministe de Trapèze (4.1.5).

L'algorithme d'estimation de l'erreur moyenne résultante de l'approximation (3.4) appliqué sur l'EDS (3.2) est présenté ci-après.

Algorithme 6.3.1

1. **Paramètres** : T_0, T, X_0, a, b .

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions

a. Génération de la valeur moyenne exacte de la fonction $g : E(g(X_1(t)))$ en fonction de TI :

- $FACTOR := \exp(-2 * A * TI)$;
- $MoyGX1T := 0.5 * (X10 * (1 + FACTOR) + X20 * (1 - FACTOR))$; $\{ E(X_t) = X_0 \cdot \exp(At) \}$

b. Génération de la valeur moyenne exacte de la fonction $g : E(g(X_2(t)))$ en fonction de TI :

- $FACTOR := \exp(-2 * A * TI)$;
- $MOYGX2T := 0.5 * (X10 * (1 - FACTOR) + X20 * (1 + FACTOR))$;

c. Génération de la fonction $g(.)$: $GXT(X) := X$;

d. Génération de la norme utilisée (norme Euclidienne) en fonction de X_1 et X_2 :

$$NORM := \sqrt{X_1 * X_1 + X_2 * X_2};$$

Etape2: Génération des procédures $CalMoyVar(NN, X, SMOYENNE, SVARIANCE)$ et $GENER01(P, X_1, X_2, XU)$: {Voir la suite de l'algorithme 6.1.1}

Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs moyennes pour différentes taille de pas de temps

a. $DELTA \leftarrow (T - T_0)/8$;

b. Calcul de $E(g(X_1(T)))$ et $E(g(X_2(T)))$: $EGX1T := MEANGX1T(T)$; $EGX2T := MEANGX2T(T)$;

c. Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation et initialisation :

$$DELTA_Y \leftarrow 2 * DELTA; \quad G \leftarrow 0;$$

d. Répéter $G = Num$ fois $\{ Num \text{ est le nombre de différentes tailles de pas de temps } \}$

1. $G \leftarrow G + 1$; $DELTA_Y \leftarrow DELTA_Y / 2$; $SQDELTA_Y \leftarrow \sqrt{DELTA_Y}$;

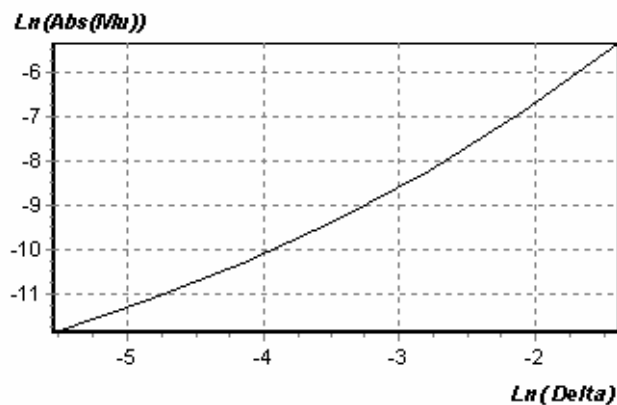
2. Calcul des constantes globales du schème

- $KAPPA := 1 - ETA * B * B * (1 - ALPHA) * A * DELTA_Y$;
- $KAPPA0 := KAPPA - 2 * (1 - ALPHA) * A * DELTA_Y$;
- $KAPPA2 := 1 + ETA * B * B * ALPHA * A * DELTA_Y$;
- $KAPPA1 := KAPPA2 + 2 * ALPHA * A * DELTA_Y$;

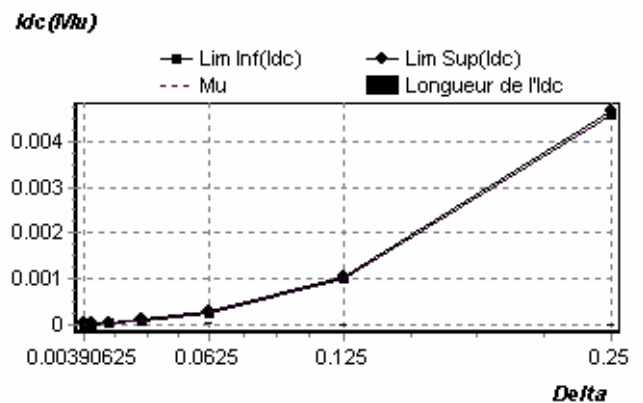
3. Génération pour différentes séries :

- ii. Initialisation : $J \leftarrow 0$;
 - iii. Répéter $J=M$ fois $\{M \text{ est le nombre de séries}\}$
 - iv. Incrémentation et sommation des erreurs de chaque série
 $J:=J+1$; $MUIYLON[J]:=0.0$; $MU2YLON[J]:=0.0$;
 - v. Génération pour différentes trajectoires :
 - a. Initialisation : $K \leftarrow 0$;
 - b. Répéter $K=N$ fois $\{N \text{ est la taille de chacune des séries}\}$
 - I. $K \leftarrow K+1$; $\{ \text{indice de la trajectoire utilisée} \}$
 - II. Génération de l'approximation faible $Y(T)$
 1. Initialisation : $I:=0$; $TI:=T0$; $Y1T:=X10$; $Y2T:=X20$; $HII:=X20-X10$;
 $\{ Y1T \text{ et } Y2T \text{ sont respectivement la première et la deuxième composante de l'approximation et } HII \text{ est une variable intermédiaire} \}$
 2. Tant que $TI < T$ faire
 - i. $I:=I+1$; $TI:=TI+DELTA_Y$;
 - ii. Génération des incréments simplifiés en appelant la procédure GENER01:
 $GENER01(0.5, SQDELTA_Y, SQDELTA_Y, DWTI)$;
 - iii. Approximation d'Euler implicite avec des paramètres d'implicitement α et η
 - o $HI:=HII$; $HII:=(KAPPA0+(1.-ETA)*B*DWTI)*HI/(KAPPA1-ETA*B*DWTI)$;
 - o $HH:=KAPPA2-ETA*B*DWTI$;
 - o $Y1T:=(KAPPA+(1.-ETA)*B*DWTI)*Y1T$;
 - o $Y1T:=(Y1T+(1.-ALPHA)*A*DELTA_Y*HI+ALPHA*A*DELTA_Y*HII)/HH$;
 - o $Y2T:=(KAPPA+(1.-ETA)*B*DWTI)*Y2T$;
 - o $Y2T:=(Y2T+(1.-ALPHA)*A*DELTA_Y*HI-ALPHA*A*DELTA_Y*HII)/HH$;
 - III. Sommation des valeurs de la fonction $g(Y(T))$:
 - $MUIYLON[J]:=MUIYLON[J]+GXT(Y1T)$;
 - $MU2YLON[J]:=MU2YLON[J]+GXT(Y2T)$;
 - vi. Estimation de l'erreur moyenne pour chaque série j
 - $MUIYLON[J]:=MUIYLON[J]/N-EGX1T$;
 - $MU2YLON[J]:=MU2YLON[J]/N-EGX2T$;
3. Calcul de l'intervalle de confiance de l'erreur moyenne μ pour chaque pas de temps.
 - i. Calcul de la taille de pas de temps courant : $DEL[G] \leftarrow DELTA_Y$;
 - ii. Calcul de μ_1 :
 - $CalMoyVar(M, MUIYLON, MOYENNE, VARIANCE)$;
 - $\mu_1[G] \leftarrow MOYENNE$; $DIFFER1[G] \leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE/M)$;
 - iii. Calcul de μ_2 :
 - $CalMoyVar(M, MU2YLON, MOYENNE, VARIANCE)$;
 - $\mu_2[G] \leftarrow MOYENNE$; $DIFFER2[G] \leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE/M)$;

Résultat de Simulation : $T0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X10 \leftarrow 1$, $X20 \leftarrow 0$, $a \leftarrow 5.0$, $b \leftarrow 0.001$, $\alpha \leftarrow 1$, $\eta \leftarrow 0.0$
 $Num \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $Quantile(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



$Ln(Abs(V\mu))$ du schéma implicite d'Euler pour l'EDS :
 $dX1(t) = 5 * (X2(t) - X1(t)) dt + 0.001 * X1(t) dW(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$
 $dX2(t) = 5 * (X1(t) - X2(t)) dt + 0.001 * X2(t) dW(t)$; $X10=1$, $X20=0$



$Idc(V\mu)$ du schéma implicite d'Euler pour l'EDS :
 $dX1(t) = 5 * (X2(t) - X1(t)) dt + 0.001 * X1(t) dW(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$
 $dX2(t) = 5 * (X1(t) - X2(t)) dt + 0.001 * X2(t) dW(t)$; $X10=1$, $X20=0$

**Erreur moyenne de l'approximation faible implicite d'Euler
(cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)**

Delta	Mu	Idc(Mu)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécute en ms
2^{-2}	0.00467	[0.0046, 0.00468]	$1.003 \cdot 10^{-6}$	000
2^{-3}	0.001045	[0.001043, 0.001046]	$3.20 \cdot 10^{-6}$	000
2^{-4}	0.00027	[0.00027, 0.00028]	$2.09 \cdot 10^{-5}$	016
2^{-5}	$8.56 \cdot 10^{-5}$	$[7.28 \cdot 10^{-5}, 9.83 \cdot 10^{-5}]$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	031
2^{-6}	$3.31 \cdot 10^{-5}$	$[2.48 \cdot 10^{-5}, 4.13 \cdot 10^{-5}]$	$3.29 \cdot 10^{-5}$	047
2^{-7}	$1.45 \cdot 10^{-5}$	$[2.87 \cdot 10^{-6}, 3.19 \cdot 10^{-5}]$	$6.96 \cdot 10^{-5}$	093
2^{-8}	$6.98 \cdot 10^{-6}$	$[-8.87 \cdot 10^{-6}, 2.28 \cdot 10^{-5}]$	$6.34 \cdot 10^{-5}$	188

2. Schème faible implicite d'ordre 2.0

Le schème faible de Taylor implicite d'ordre 2.0 proposé par Milstein est donnée par :

$$(3.6) Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \{a(\tau_{n+1}, Y_{n+1}) + a\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta \hat{W}_n^j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m L^0 b^j \Delta \hat{W}_n^j \Delta_n + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} b^{j_2} (\Delta \hat{W}_n^{j_1} \Delta \hat{W}_n^{j_2} + V_{j_1, j_2}),$$

où les v.a $\Delta \hat{W}_n^j$ et V_{j_1, j_2} sont définies en (1.7) et (1.9).

Notons que ce schème est A-Stable.

Le schème que nous allons présenter ci-après, proposé par Platen, nous évite l'évaluation des dérivées.

Pour $d=1, 2, \dots$, avec un bruit scalaire $m=1$, le schème faible implicite d'ordre 2.0 est:

$$(3.7) Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \{a + a(Y_{n+1})\} \Delta_n + \frac{1}{4} (b(\bar{\gamma}^+) + b(\bar{\gamma}^-) + 2b) \Delta \hat{W}_n + \frac{1}{4} (b(\bar{\gamma}^+) - b(\bar{\gamma}^-)) (\hat{W}_n^2 - \Delta_n) \Delta_n^{-1/2}$$

avec des valeurs de support $\bar{\gamma}^\pm = Y_n + a \Delta_n \pm b \sqrt{\Delta_n}$

En considérant la même EDS que l'approximation précédente, l'estimation de l'erreur moyenne ainsi que son intervalle de confiance sont effectués grâce à l'algorithme suivant :

Algorithme 6.3.2

2. **Paramètres** : $T0, T, X0, a, b$.

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions :voir Algorithme 6.3.1

Etape2: Génération de la procédure CalMoyVar(NN,X,SMOYENNE,SVARIANCE°

.....voir algorithme 6.1.1

Etape3: Calcul de l'intervalles de confiance des erreurs moyennes pour différentes taille de pas de temps

a. $DELTA \leftarrow (T-T0)/8$;

b. Calcul de $E(g(X1(T)))$ et $E(g(X2(T)))$

$EGX1T := MEANGX1T(T)$; $EGX2T := MEANGX2T(T)$;

c. Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation et initialisation :

$DELTA_Y \leftarrow 2 * DELTA$; $G \leftarrow 0$;

d. Répéter $G = \text{Num fois}$ { Num est le nombre de différentes tailles de pas de temps }

1. $G \leftarrow G+1$; $DELTA_Y \leftarrow DELTA_Y/2$; $SQDELTA_Y \leftarrow SQRT(DELTA_Y)$;

2. Calcul des constantes globales du schème

• $KAPPA := A * DELTA_Y$; $KAPPA0 := 1 - KAPPA$;

• $KAPPA1 := 1 + KAPPA$; $KAPPA := 0.5 * KAPPA$;

3. Génération pour différentes séries :

i. Initialisation : $J \leftarrow 0$;

ii. Répéter $J = M$ fois {M est le nombre de séries}

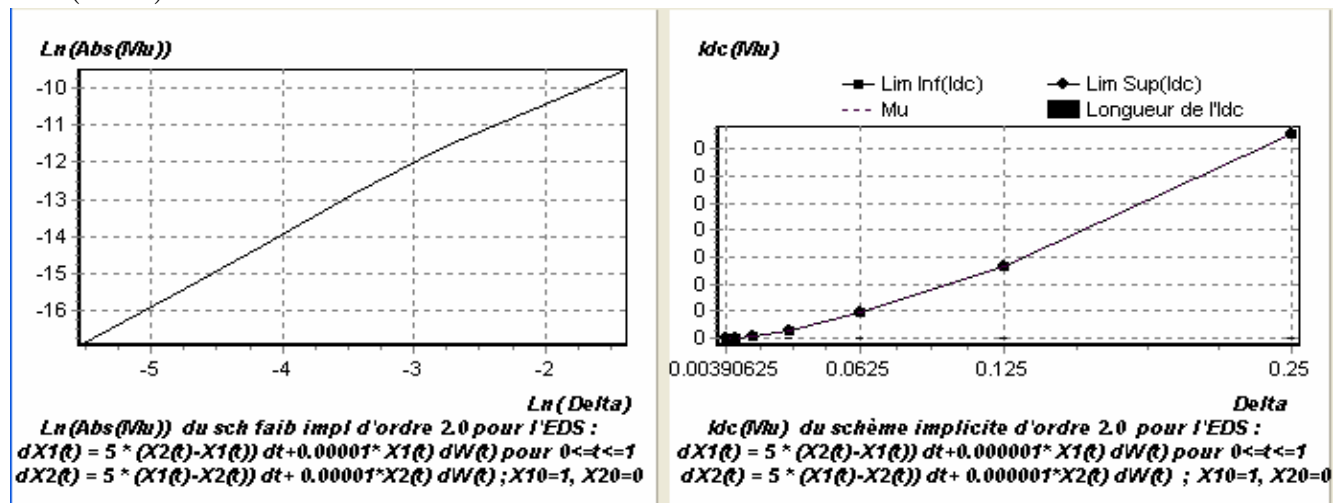
iii. Incrémentation et sommation des erreurs de chaque série

- iv. $J:=J+1$; $MU1YLON[J]:=0.0$; $MU2YLON[J]:=0.0$;
- v. Génération pour différentes trajectoires :
- Initialisation : $K \leftarrow 0$;
 - Répéter $K=N$ fois $\{N$ est la taille de chacune des séries $\}$
 - $K \leftarrow K+1$; $\{$ indice de la trajectoire utilisée $\}$
 - Génération de l'approximation faible $Y(T)$
 - Initialisation : $I:=0$; $TI:=T0$; $Y1T:=X10$; $Y2T:=X20$; $HII:=X20-X10$;
 $\{Y1T$ et $Y2T$ sont respectivement la première et la deuxième composante de l'approximation et HII est une variable intermédiaire $\}$
 - Tant que $TI < T$ faire
 - $I:=I+1$; $TI:=TI+DELTA_Y$;
 - Génération des incréments simplifiés :
 - Génération de 3 points de loi uniforme
 - $U:=RANDOM$;
 - Si $U > 1/3$. Alors $U:=0.0$ Sinon
Si $U > 1/6$. Alors $U:=-1.0$ Sinon $U:=+1.0$;
 - Calcul des incréments simplifiés :
 $DWTI:=U*SQDELTA_Y*SQRT(3.0)$;
 - Génération des intégrales multiples :
 - $DELZ:=0.5*DELTA_Y*DWTI$; $\{ DELZ$ correspond à $I10$ $\}$
 - $I11:=0.5*(DWTI*DWTI-DELTA_Y)$;
 - Approximation faible implicite d'ordre 2.0 avec un paramètre d'implic $\alpha=0.5$
 - $HH:=B*DWTI+B*B*I11$; $HI:=HII$;
 - $HII:=(KAPPA0+HH-B*A*DELTA_Y*DWTI)*HI/KAPPA1$; $HH:=1.+HH$;
 - $Y1T:=HH*Y1T+B*KAPPA*DWTI*HI+KAPPA*(HI+HII)$;
 - $Y2T:=HH*Y2T-B*KAPPA*DWTI*HI-KAPPA*(HI+HII)$;
 - Sommation des valeurs de la fonction $g(Y(T))$:
 - $MU1YLON[J]:=MU1YLON[J]+GXT(Y1T)$;
 - $MU2YLON[J]:=MU2YLON[J]+GXT(Y2T)$;
 - Estimation de l'erreur moyenne pour chaque série j
 - $MU1YLON[J]:=MU1YLON[J]/N-EGX1T$;
 - $MU2YLON[J]:=MU2YLON[J]/N-EGX2T$;

4. Calcul de l'intervalle de confiance de l'erreur moyenne Mu pour chaque pas de temps.

 - Calcul de la taille de pas de temps courant : $DEL[G] \leftarrow DELTA_Y$;
 - Calcul de $MU1$:
 - $CalMoyVar(M,MU1YLON,MOYENNE,VARIANCE)$;
 - $Mu1[G] \leftarrow MOYENNE$; $DIFFER1[G] \leftarrow QUANTILE*SQRT(VARIANCE/M)$;
 - Calcul de $MU2$:
 - $CalMoyVar(M,MU2YLON,MOYENNE,VARIANCE)$;
 - $Mu2[G] \leftarrow MOYENNE$; $DIFFER2[G] \leftarrow QUANTILE*SQRT(VARIANCE/M)$;

Résultat de Simulation : $T0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X10 \leftarrow 1$, $X20 \leftarrow 0$, $a \leftarrow 5.0$, $b \leftarrow 0.000001$, $Num \leftarrow 7$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $Quantile(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



La représentation ci-dessus montre que le schème faible implicite d'ordre 2.0 est très efficace pour approcher la moyenne du processus de diffusion dans le cas de l'EDS (3.2).

Erreur moyenne de l'approximation faible implicite d'ordre 2.0
(cas d'EDS linéaire unidimensionnelle)

Delta	Mu	Idc(Mu)	Longueur de l'Idc	Temps d'exécut en ms
2^{-2}	$7.567166*10^{-5}$	$[7.567163*10^{-5}, 7.567168*10^{-5}]$	$1.05*10^{-10}$	000
2^{-3}	$2.64153*10^{-5}$	$[2.64152*10^{-5}, 2.64154*10^{-5}]$	$2.15*10^{-10}$	000
2^{-4}	$9.3904*10^{-6}$	$[9.39025*10^{-6}, 9.39054*10^{-6}]$	$5.84*10^{-10}$	016
2^{-5}	$2.5449*10^{-6}$	$[2.5444*10^{-6}, 2.5455*10^{-6}]$	$2.27*10^{-9}$	031
2^{-6}	$6.4906*10^{-7}$	$[6.4812*10^{-7}, 6.5002*10^{-7}]$	$3.80*10^{-9}$	031
2^{-7}	$1.6776*10^{-7}$	$[1.5863*10^{-7}, 1.7689*10^{-7}]$	$3.65*10^{-8}$	094
2^{-8}	$4.324*10^{-8}$	$[2.558*10^{-8}, 6.091*10^{-8}]$	$7.07*10^{-8}$	172

3. Approximation par la méthode prédicteur-correcteur

Cette méthode proposée par Platen est fréquemment utilisée car elle est numériquement stable. Les schèmes Prédicteur-Correcteur sont composés des schèmes faibles de Taylor ou explicites en tant que partie prédictrice et les schèmes implicites correspondants comme partie correctrice.

Dans un cas général multidimensionnel $d, m=1, 2, \dots$, on a la famille des méthodes Prédicteur-Correcteur d'ordre 1.0 pour des paramètres d'implicitement $\alpha, \eta \in [0, 1]$:

$$(3.8) \quad Y_{n+1} = Y_n + \left\{ \alpha \bar{a}_\eta(\tau_{n+1}, \bar{Y}_{n+1}) + (1-\alpha) \bar{a}_\eta(\tau_n, Y_n) \right\} \Delta_n + \sum_{j=1}^m \left\{ \eta b^j(\tau_{n+1}, \bar{Y}_{n+1}) + (1-\eta) b^j(\tau_n, Y_n) \right\} \Delta \hat{W}_n^j$$

$$\text{ou (3.9)} \quad \bar{Y}_{n+1} = Y_n + a \Delta_n + \sum_{j=1}^m b^j \Delta \hat{W}_n^j$$

Les $\Delta \hat{W}_n^j$ et $\bar{a}_\eta$ sont définies en (1.7) et (3.5), respectivement.

L'expression (3.8) représente le terme correcteur et (3.9) le terme prédicteur.

Lorsqu'on passe à un ordre plus élevé (ordre=2.0), on sera obligé d'évaluer les dérivés, alors pour éviter cela on utilise le schème (3.7) comme terme correcteur sans oublier de remplacer dans la partie droite de cette expression, l'approximation Y_{n+1} par le terme prédicteur $\bar{Y}_{n+1}$.

On obtient ainsi le schème faible Prédicteur-Correcteur indépendant des dérivés d'ordre 2.0, de terme correcteur :

$$(3.10) \quad Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \left\{ a + a(\bar{Y}_{n+1}) \right\} \Delta_n + \phi_n$$

$$\phi_n = \frac{1}{4} \left(b(\bar{\gamma}^+) + b(\bar{\gamma}^-) + 2b \right) \Delta \hat{W}_n + \frac{1}{4} \left(b(\bar{\gamma}^+) - b(\bar{\gamma}^-) \right) \left(\Delta \hat{W}_n \right)^2 - \Delta_n \left\{ \Delta_n^{-1/2} \right.$$

avec des valeurs de support $\bar{\gamma}^\pm = Y_n + a \Delta_n \pm b \sqrt{\Delta_n}$

et de terme prédicteur :

$$(3.11) \quad \bar{Y}_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \left\{ a(\bar{\gamma}) + a \right\} \Delta_n + \phi_n \quad \text{ou} \quad \bar{\gamma} = Y_n + a \Delta_n + b \Delta \hat{W}_n$$

Il y a lieu de noter que les schèmes prédicteur-Correcteur sont très utiles pour l'analyse numérique dans les équations différentielles stochastiques car si la moyenne de l'erreur locale $\bar{Y}_{n+1} - Y_{n+1}$ est grande, alors il suffit de changer le pas de temps et refaire les calculs. L'avantage est que cela peut se faire pour chaque pas de temps.

Algorithme 6.3.3

3. **Paramètres** : T_0, T, X_0, a, b .

2. **Simulation**:

Etape1: Génération des fonctions :voir Algorithme 6.3.1.....

Etape2: Génération de la procédure CalMoyVar(NN,X,SMOYENNE,SVARIANCE°
.....voir algorithme 6.1.1.....

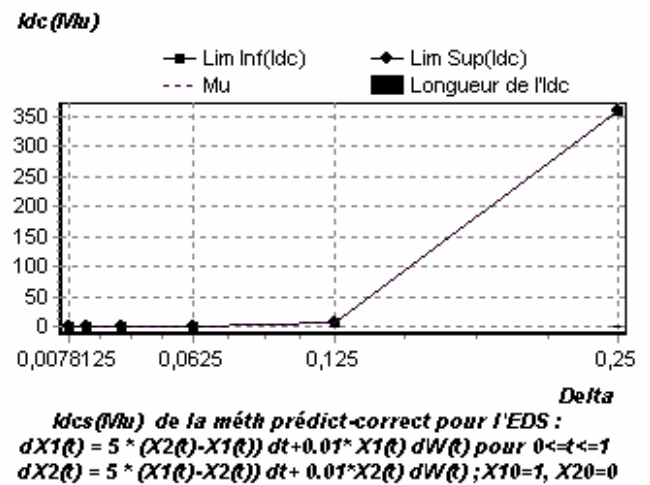
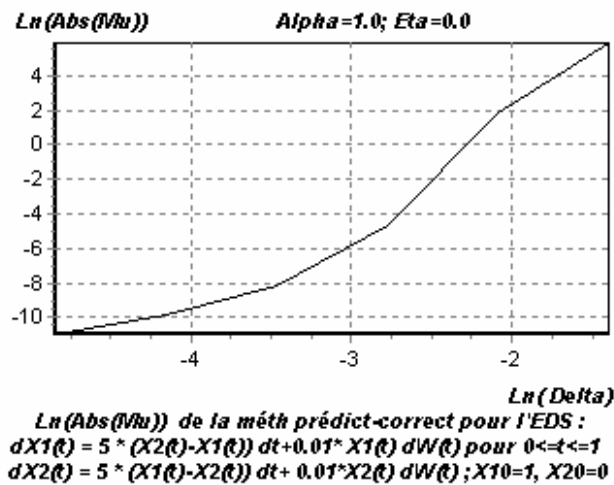
Etape3: Calcul de l'intervalle de confiance des erreurs moyennes pour différentes taille de pas de temps

- d. $\Delta \leftarrow (T-T_0)/8$;
- e. Calcul de $E(g(X_1(T)))$ et $E(g(X_2(T)))$
 $EGX1T := MEANGX1T(T)$; $EGX2T := MEANGX2T(T)$;
- f. Calcul de la taille de pas de temps de l'approximation et initialisation :
 $\Delta_Y \leftarrow 2 * \Delta$; $G \leftarrow 0$;
- d. Répéter $G = \text{Num fois}$ { Num est le nombre de différentes tailles de pas de temps }
 4. $G \leftarrow G + 1$; $\Delta_Y \leftarrow \Delta_Y / 2$; $SQDELTA_Y \leftarrow \text{SQRT}(\Delta_Y)$;
 5. Calcul des constantes globales du schème
 - $KAPPA := A * \Delta_Y$;
 - $KAPPA0 := 1 - \eta * B * B * \Delta_Y$;
 - $KAPPA1 := 1 - \alpha * (2 * KAPPA + \eta * B * B * \Delta_Y)$;
 - $KAPPA2 := (\alpha + \eta) * B$;
 6. Génération pour différentes séries :
 - i. Initialisation : $J \leftarrow 0$;
 - ii. Répéter $J = M$ fois {M est le nombre de séries}
 - iii. Incrémentation et sommation des erreurs de chaque série
 - iv. $J := J + 1$; $MU1YLON[J] := 0.0$; $MU2YLON[J] := 0.0$;
 - v. Génération pour différentes trajectoires :
 - a. Initialisation : $K \leftarrow 0$;
 - b. Répéter $K = N$ fois {N est la taille de chacune des séries}
 - I. $K \leftarrow K + 1$; {indice de la trajectoire utilisée}
 - II. Génération de l'approximation faible $Y(T)$
 3. Initialisation : $I := 0$; $TI := T_0$; $Y1T := X_{10}$; $Y2T := X_{20}$; $HII := X_{20} - X_{10}$;
{Y1T et Y2T sont respectivement la première et la deuxième composante de l'approximation et HII est une variable intermédiaire }
 4. Tant que $TI < T$ faire
 - iv. $I := I + 1$; $TI := TI + \Delta_Y$;
 - v. Génération des incréments simplifiés en appelant la procédure GENER01:
 $GENER01(0.5, SQDELTA_Y, -SQDELTA_Y, DWTI)$; {Voir la suite de l'algorithme 6.1.1 }
 - vi. Approximation faible par la méthode prédicteur-correcteur d'ordre 1.0
 - $HI := Y2T - Y1T$;
 - $HH := KAPPA0 + B * DWTI * (1 + \eta * B * (DWTI - B * \alpha * \Delta_Y))$;
 - $HHH := KAPPA * (KAPPA1 + KAPPA2 * DWTI)$;
 - $Y1T := Y1T * HH + HI * HHH$;
 - $Y2T := Y2T * HH - HI * HHH$;
 - III. Sommation des valeurs de la fonction $g(Y(T))$:
 - $MU1YLON[J] := MU1YLON[J] + GXT(Y1T)$;
 - $MU2YLON[J] := MU2YLON[J] + GXT(Y2T)$;
 - viii. Estimation de l'erreur moyenne pour chaque série j
 - $MU1YLON[J] := MU1YLON[J] / N - EGX1T$;
 - $MU2YLON[J] := MU2YLON[J] / N - EGX2T$;

5. Calcul de l'intervalle de confiance de l'erreur moyenne μ pour chaque pas de temps.

- i. Calcul de la taille de pas de temps courant : $DEL[G] \leftarrow DELTA_Y$;
- ii. Calcul de μ_1 :
 - $CalMoyVar(M, \mu_1 YLON, MOYENNE, VARIANCE)$;
 - $\mu_1[G] \leftarrow MOYENNE$; $DIFFER1[G] \leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE/M)$;
- iii. Calcul de μ_2 :
 - $CalMoyVar(M, \mu_2 YLON, MOYENNE, VARIANCE)$;
 - $\mu_2[G] \leftarrow MOYENNE$; $DIFFER2[G] \leftarrow QUANTILE * SQRT(VARIANCE/M)$;

Résultat de Simulation : $T_0 \leftarrow 0$, $T \leftarrow 1$, $X_{10} \leftarrow 1$, $X_{20} \leftarrow 0$, $A \leftarrow 5.0$, $B \leftarrow 0.01$, $\alpha \leftarrow 1.0$, $\eta = 0.0$, $Num \leftarrow 7$, $\alpha \leftarrow 1.0$, $N \leftarrow 100$, $M \leftarrow 20$, $Quantile(\alpha=0,1) \leftarrow 1.73$



**Erreur moyenne de l'approximation Prédicteur correcteur
d'ordre 1.0**

Del	Mu	Idc_G	Idc_D	long_IdcMu	TempExec
0,25	359,943861390459	359,907956858075	359,979765922842	0,0718090647671341	00,00,00,000
0,125	6,22672554795613	6,22633855536166	6,2271125405506	0,0007739851889356	00,00,00,010
0,0625	0,00983229007204928	0,00981847136056613	0,00984610878353243	2,7637422966299E-5	00,00,00,010
0,03125	0,000279621776430686	0,000104549219674682	0,00045469433318669	0,0003501451135120	00,00,00,040
0,015625	5,25039864839471E-5	-4,92462553819863E-5	0,00015425422834988	0,0002035004837318	00,00,00,060
0,0078125	2,49794673953159E-5	-0,000155493236562902	0,000205452171353534	0,0003609454079164	00,00,00,130
0,00390625	1,88691824875055E-5	-0,000142713541842684	0,000180451906817695	0,0003231654486603	00,00,00,260

Pour comparer l'efficacité des schèmes numériques forts et faibles déjà établis, nous pouvons tracer le graphe du logarithme, respectivement, de l'erreur absolue et de l'erreur moyenne en fonction du logarithme de la taille du pas du temps. On peut également représenter le logarithme du temps d'exécution du CPU en fonction du logarithme de ces erreurs pour différentes valeurs de la taille de pas de temps. Ceci nous permet de mesurer le niveau de précision de la méthode d'approximation numérique adoptée.

PRESENTATION DU PROGICIEL

``ANSEDS``

Nous vous présentons une version de l'application nommée « ANSEDS » qui permet de modéliser et de trouver une solution approchée d'une équation différentielle stochastique (EDS) qui est un processus de diffusion ou bien une fonction de ce processus.

I. Fenêtre principale

La figure 1 nous montre l'interface générale de l'application « ANSEDS ».

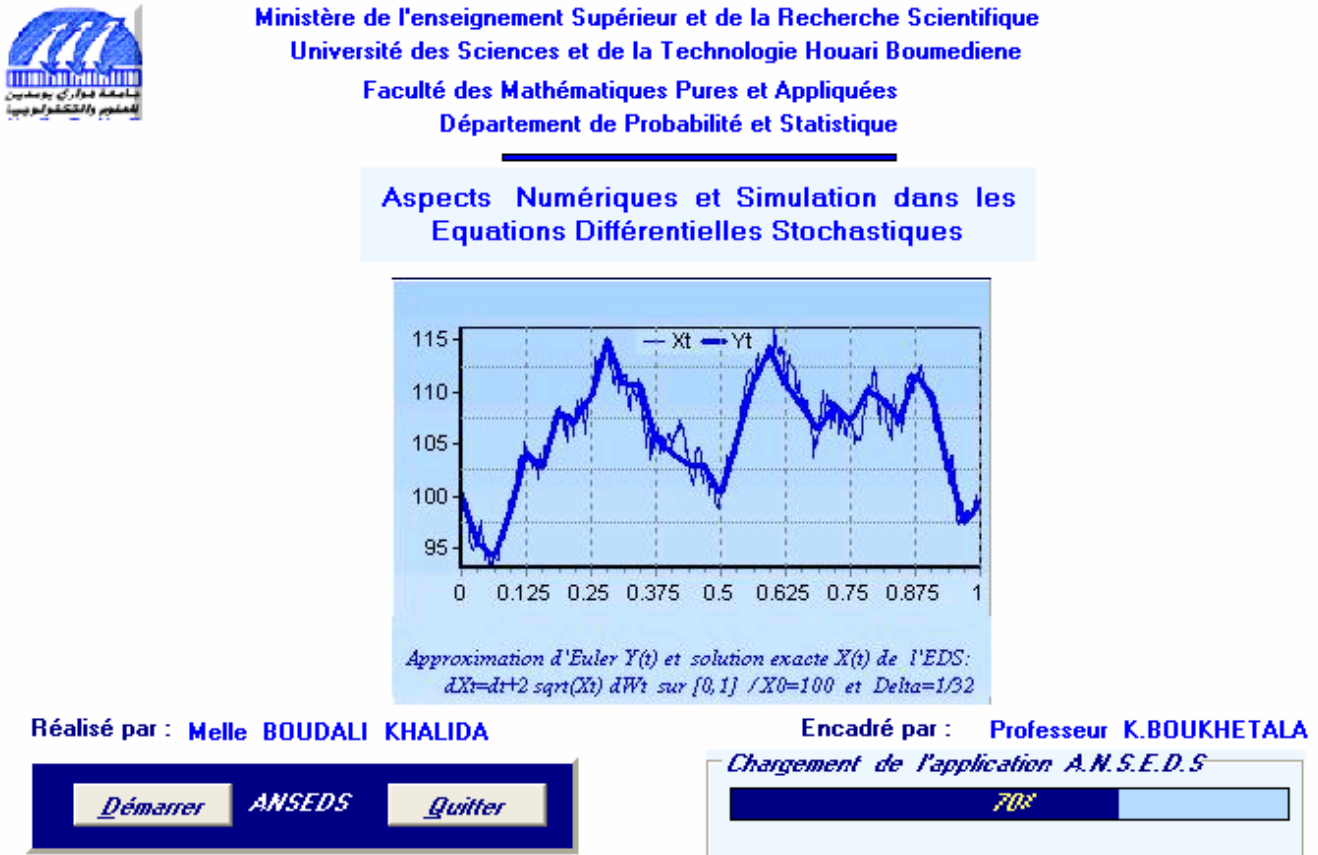


Figure1

[Retour](#)

En bas de cette fenêtre, l'utilisateur trouvera deux boutons "Démarrer" et "Quitter". Ce dernier bouton permet de quitter l'application "ANSEDS". L'activation du premier bouton sert à entamer le chargement de l'application en question tel que lorsqu'il arrive à 100%, une nouvelle fenêtre s'affiche.

II. Menu Principal

Après chargement de notre application, une barre de Menu apparaît ([Figure 2.1,2.2,2.3](#)).

En activant le groupe Fichier\Nouveau, l'utilisateur choisira d'exprimer son équation différentielle stochastique s'il connaît sa forme en activant "Modèle de diffusion" ou bien d'éditer des données s'il en possède. Ces données peuvent être également importées à partir d'un fichier d'extension ".txt " ([Figure 2.3](#)).

Notons que si l'utilisateur a déjà introduit des données via notre application, il peut les sauver pour une éventuelle utilisation en activant "Enregistrer" et le fichier sauvegardé est d'extension ".Tab". Le fichier en question peut être ouvert en activant le groupe "Ouvrir/Base de données(voir [Figure 2.2](#)).



Figure2.1



Figure2.2



Figure2.3

[Retour](#)

La suite de cette présentation, sera divisé en deux parties, une partie destinée à un utilisateur qui dispose des données et il cherche le bon modèle qui leurs régissent et un autre qui a le problème inverse. C'est à dire qu'il connaît la forme de l'équation différentielle stochastique (modèle de diffusion) mais ignore la solution(pas de données).

Partie A : Base de données

1. Nouvelle table

Cette fenêtre apparaît si le choix de la fenêtre « Menu » était sur « Données à éditer ».

Comme le montre la [figure a.1](#), l'utilisateur doit désigner le nombre de lignes et de colonnes dont il a besoin pour saisir ces données. Il a même la possibilité d'ajouter, d'insérer, de supprimer des lignes ou des colonnes en appuyant seulement sur le bouton droit de la souris. Il peut aussi renommer ces variables s'il ne veut pas garder l'intitulé standard "Var1,..Var5" en activant "Modifier le titre". Dans ce cas là, une fenêtre apparaît ([figure a.2](#)) qui permet à l'utilisateur de donner les nouveaux titres des variables après avoir choisi laquelle à vouloir changer le nom et ensuite activer le bouton "Modifier". Le bouton "Valider" sert à porter les modifications voulues et de quitter cette fenêtre.

Il y'a lieu de noter que le bouton « Tracer le graphe » de la [figure a.1](#) est désactivé si l'utilisateur n'a pas chargé la table des données. Idem pour le bouton « Choisir le modèle » qui ne sera affiché qu'après avoir achevé la procédure de représentation graphique.



Figure a.1

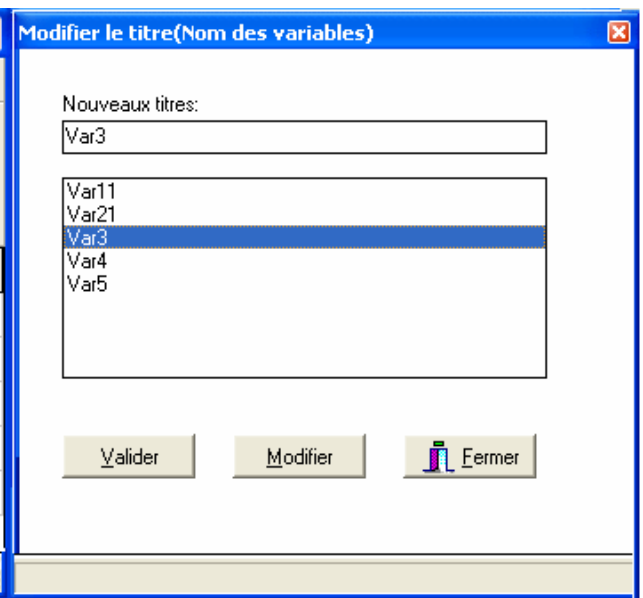
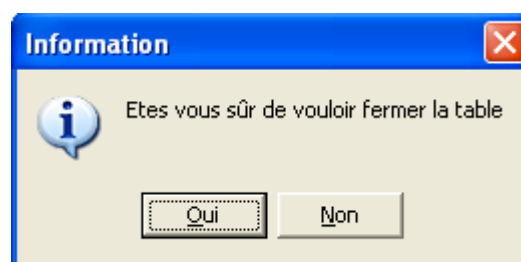


Figure a.2

La note d'information ci-dessous est une fenêtre de rappel de sauvegarde des données qui s'affiche lorsque l'utilisateur veut fermer la fenêtre "Nouvelle table".



2. Importer un fichier « *.txt »

Une base de données peut être importée en activant le groupe Fichier \ Importer\ Un fichier text dans le menu principal. Ceci entraîne l’affichage de la fenêtre suivante :

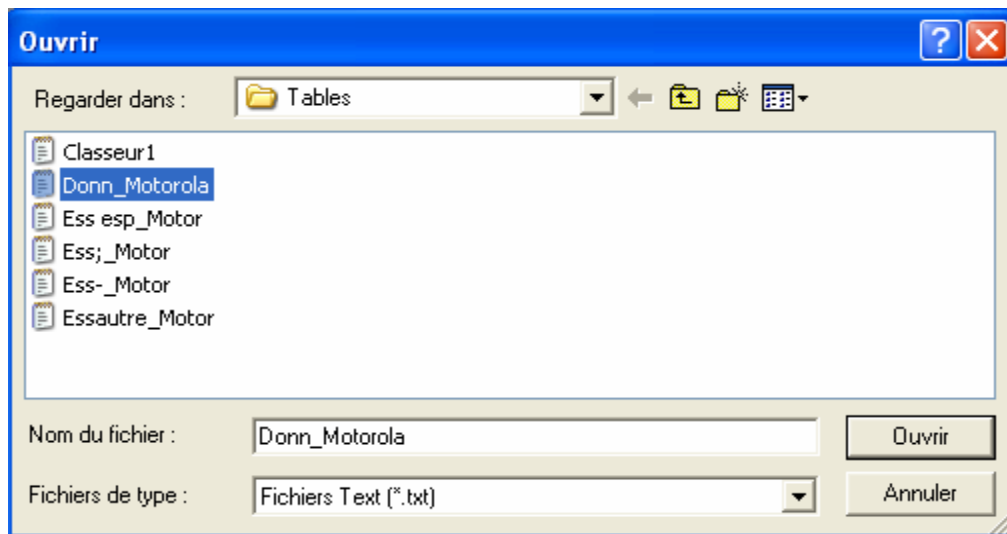


Figure a.3

La même fenêtre s’affiche lorsqu’il s’agit d’ouvrir un fichier mais seulement les fichiers qui seront proposés à l’utilisateur sont de type « *.Tab » et non pas « *.txt ».

Suite à cette étape, l’utilisateur peut choisir les séparateurs contenus dans ses données et il peut voir les changements sur son texte dans l’aperçu (voir [Figure a.4](#)). Le nombre de lignes et de colonnes dans la table des données est également affiché. Néanmoins, il doit spécifier si la première ligne du texte représente le nom des variables ou non.

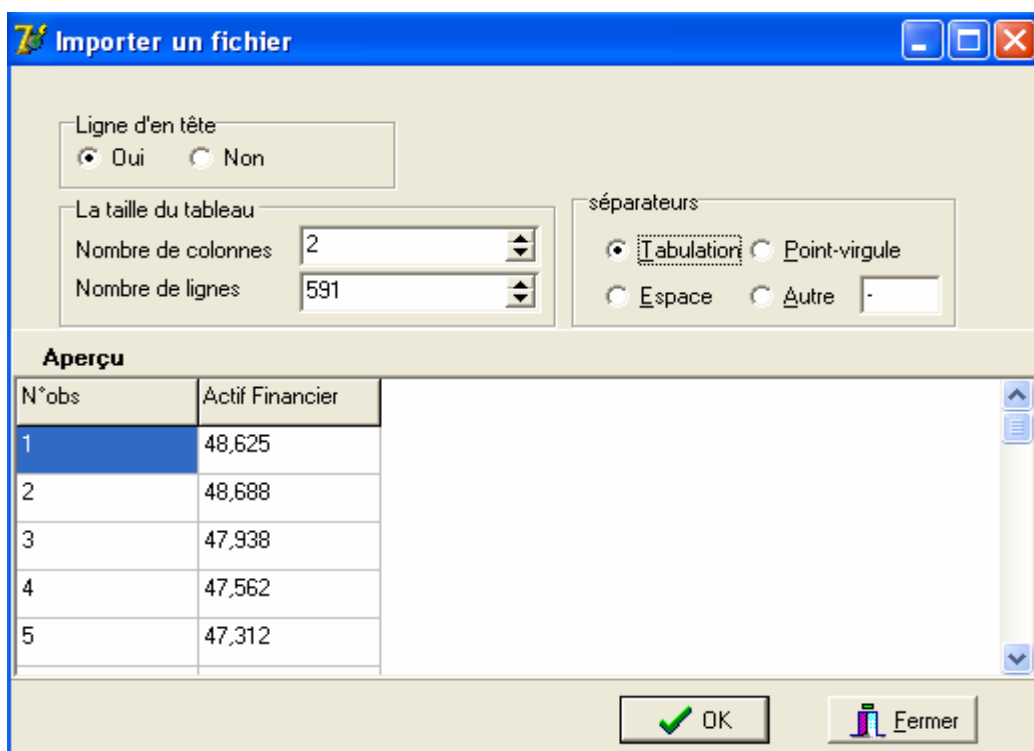


Figure a.4

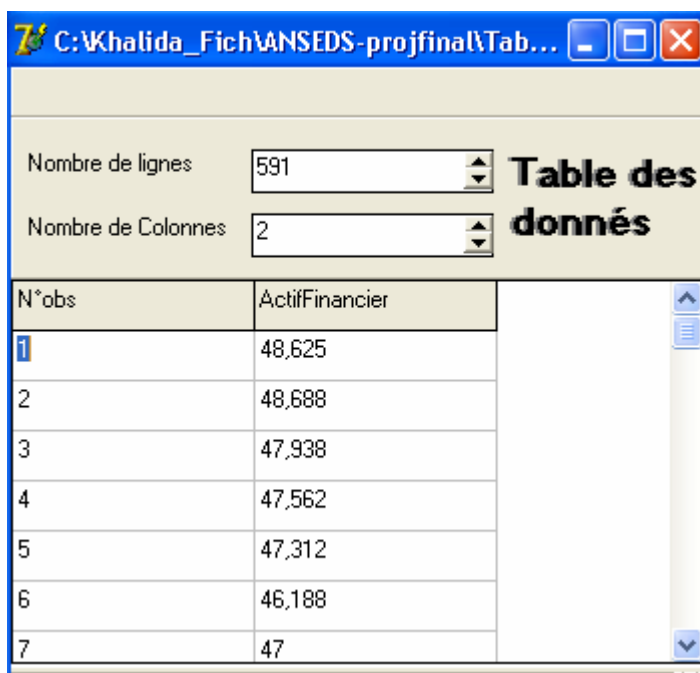
Dans l'exemple pratique considéré, il s'agit d'une table à deux variables, le n° de l'observation (1-591) et le prix de l'actif financier qu'on veut représenter graphiquement via notre progiciel en activant « Tracer le graphe ». La fenêtre ci-dessous ([Figure a.5](#)) s'affiche suite au choix, pris par l'utilisateur, sur le bouton « OK » de la [figure a.4](#).

3. Représentation graphique et choix des modèles

Puisque les données sont à présent chargées dans la table, alors le bouton « Tracer le graphe » ([Figure a.5](#)) devient actif. Ce choix implique l'affichage de la deuxième fenêtre ci-dessous ([Figure a.6](#)). Cette fenêtre est composée de trois champs : la liste des variables existantes dans la table, la variable à considérer en axe des abscisses (X) et les variables de l'axe des ordonnées (Y). Les valeurs de la variable X doivent être triées selon un ordre croissant.

Notons que le nombre de graphes que l'utilisateur peut représenter est égal à quatre sachant que pour la modélisation stochastique de ces données il n'a besoin qu'un seul graphe.

Dans la même fenêtre, si l'utilisateur appuie sur le bouton «OK », le graphe s'affiche ([Figure a.7](#)).



N°obs	ActifFinancier
1	48,625
2	48,688
3	47,938
4	47,562
5	47,312
6	46,188
7	47

Figure a.5

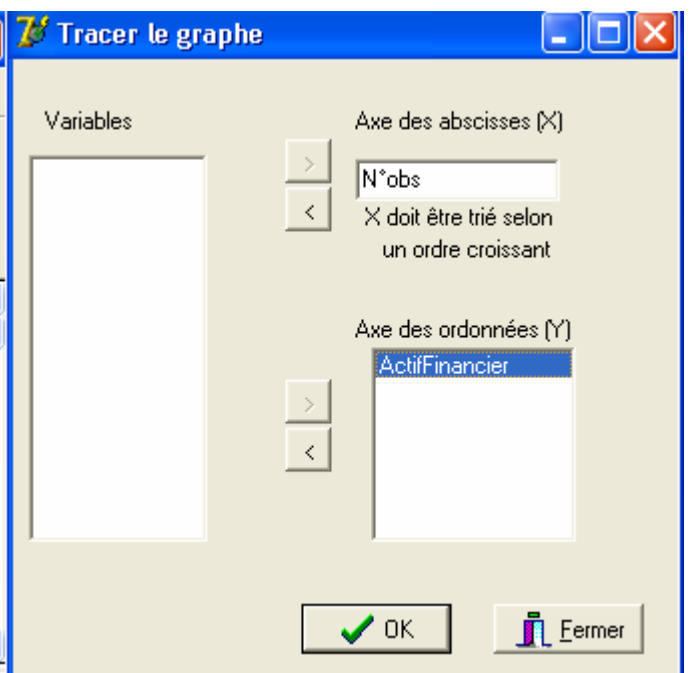


Figure a.6

Une fois que la représentation graphique est achevée, l'utilisateur pourra entamer la procédure de recherche du modèle le plus adéquat en activant « Choisir un modèle » par un click sur le bouton droit de la souris ([Figure a.7](#)). Le nombre de modèles qu'on propose à l'utilisateur est 14.

Les modèles d'EDS proposés avec leurs solutions sont :

$$\begin{aligned}
 dX_t &= \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t, \quad X_t = X_0 \cdot \exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta W_t\right) \\
 dX_t &= (\alpha X_t + \beta)dt + \lambda dW_t, \quad X_t = e^{\alpha t} \left(X_0 + \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right) + \lambda \int_0^t e^{-\alpha s} dW_s \\
 dX_t &= \left(\frac{2}{1+t}X_t + \beta(1+t^2)\right)dt + \beta(1+t^2)dW_t, \quad X_t = \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 X_0 + \beta(1+t^2)(W_t - W_{t_0} + t - t_0) \\
 dX_t &= -\alpha X_t dt + \beta dW_t, \quad X_t = e^{-\alpha t} \left(X_0 + \beta \int_0^t e^{\alpha s} dW_s\right) \\
 dX_t &= \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)X_t^{1-2/\alpha}dt + \alpha X_t^{1-1/\alpha}dW_t, \quad X_0 > 0, \quad X_t = (W_t + X_0^{1/\alpha})^\alpha \\
 dX_t &= \frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt + \alpha X_t dW_t, \quad X_t = X_0 \cdot \exp(\alpha W_t) \\
 dX_t &= \frac{1}{2}(\ln \alpha)^2 X_t dt + (\ln \alpha) X_t dW_t, \quad \alpha > 0, \quad X_t = X_0 \cdot \exp(W_t \ln \alpha) \\
 dX_t &= -\frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt + \alpha \sqrt{1-X_t^2} dW_t, \quad |X_0| \leq 1, \quad X_t = \sin(\alpha W_t + \arcsin X_0) \\
 dX_t &= -\frac{1}{2}\alpha^2 X_t dt - \alpha \sqrt{1-X_t^2} dW_t, \quad |X_0| \leq 1, \quad X_t = \cos(\alpha W_t + \arccos X_0) \\
 dX_t &= -X_t(2\ln X_t + 1)dt - 2X_t \sqrt{-\ln X_t} dW_t, \quad X_0 \leq 1, \quad X_t = \exp\left(-\left(W_t + \sqrt{-\ln X_0}\right)^2\right) \\
 dX_t &= \frac{1}{2}\alpha^2 m X_t^{2m-1}dt + \alpha X_t^m dW_t, \quad m \neq 1; X_0 > 0, \quad X_t = \left(X_0^{1-m} - \alpha(m-1)W_t\right)^{1/(1-m)} \\
 dX_t &= -\beta^2 X_t(1-X_t^2)dt + \beta(1-X_t^2)dW_t, \quad X_t = \frac{(1+X_0)\exp(2\beta W_t) + X_0 - 1}{(1+X_0)\exp(\beta W_t) + 1 - X_0} \\
 dX_t &= \frac{1}{3}X_t^{1/3}dt + X_t^{2/3}dW_t, \quad X_t = \left(X_0^{1/3} + \frac{1}{3}W_t\right)^3 \\
 dX_t &= -(\alpha + \beta^2 X_t)(1-X_t^2)dt + \beta(1-X_t^2)dW_t, \quad X_t = \frac{(1+X_0)\exp(-2\alpha(t-t_0) + 2\beta W_t) + X_0 - 1}{(1+X_0)\exp(-2\alpha(t-t_0) + \beta W_t) + 1 - X_0}
 \end{aligned}$$

Afin de parcourir tous ces modèles, il suffit d'utiliser les deux boutons « Suivant » et « Précédent » de la fenêtre ci-après ([Figure a.8](#)). En activant le bouton « Trajectoire », de nouvelles simulations sont obtenues et par conséquent de nouvelles trajectoires seront présentées.

En outre, l'utilisateur a la possibilité de personnaliser les paramètres des modèles proposés. Certains de ces paramètres peuvent être estimés en utilisant la base des données déjà introduite via d'autres applications. Notre exploration graphique nous a permis de juger que le modèle linéaire unidimensionnel avec bruit multiplicatif est le plus adéquat aux données considérées (exemple pratique). A préciser que les valeurs attribuées à α et β sont des estimateurs de ces deux paramètres ([Figure a.8](#)) qu'on a obtenu grâce à une étude exploratoire des modèles d'option en Finance [25]. Dans cette étude, la base de données considérée est la même que celle qu'on a pris dans l'exemple illustratif.

En plus, cette même fenêtre donne la forme de la solution de l'EDS proposé et si l'utilisateur veut voir les résultats simulés, il n'a qu'à appuyer sur le bouton « Visualiser ».

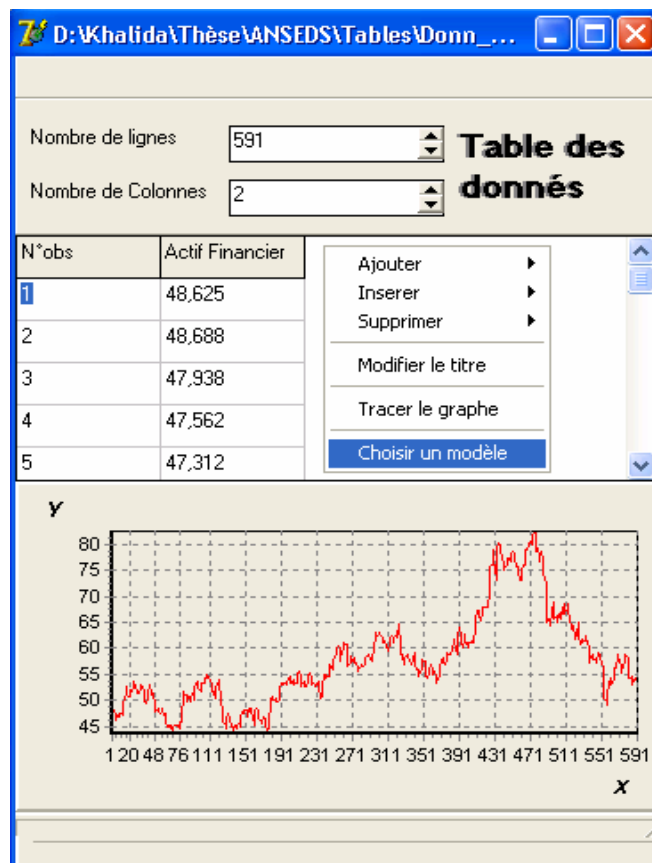


Figure a.7

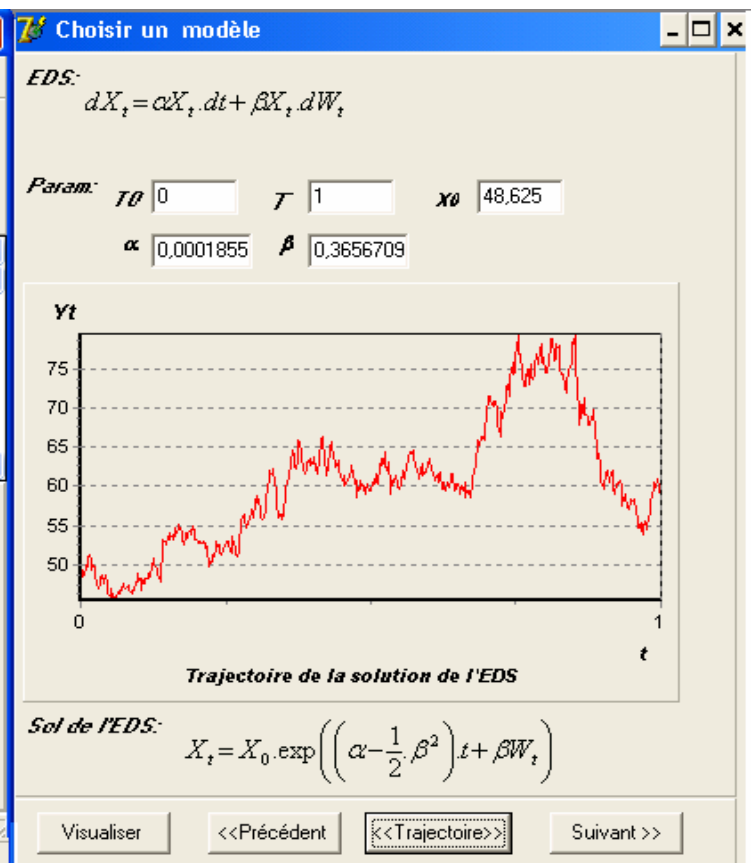


Figure a.8

Partie B : Modèle de diffusion

1. Type d'équation

Dans le cas où le choix est porté sur « Modèles de diffusion » dans la fenêtre « Menu principal », la fenêtre « choisir le type d'équation » s'affiche. Un ensemble d'EDS de type linéaire de dimension 1 et 2 est proposé et c'est à l'utilisateur de choisir la forme qui correspond bien à son EDS, voir [figure b.1](#).

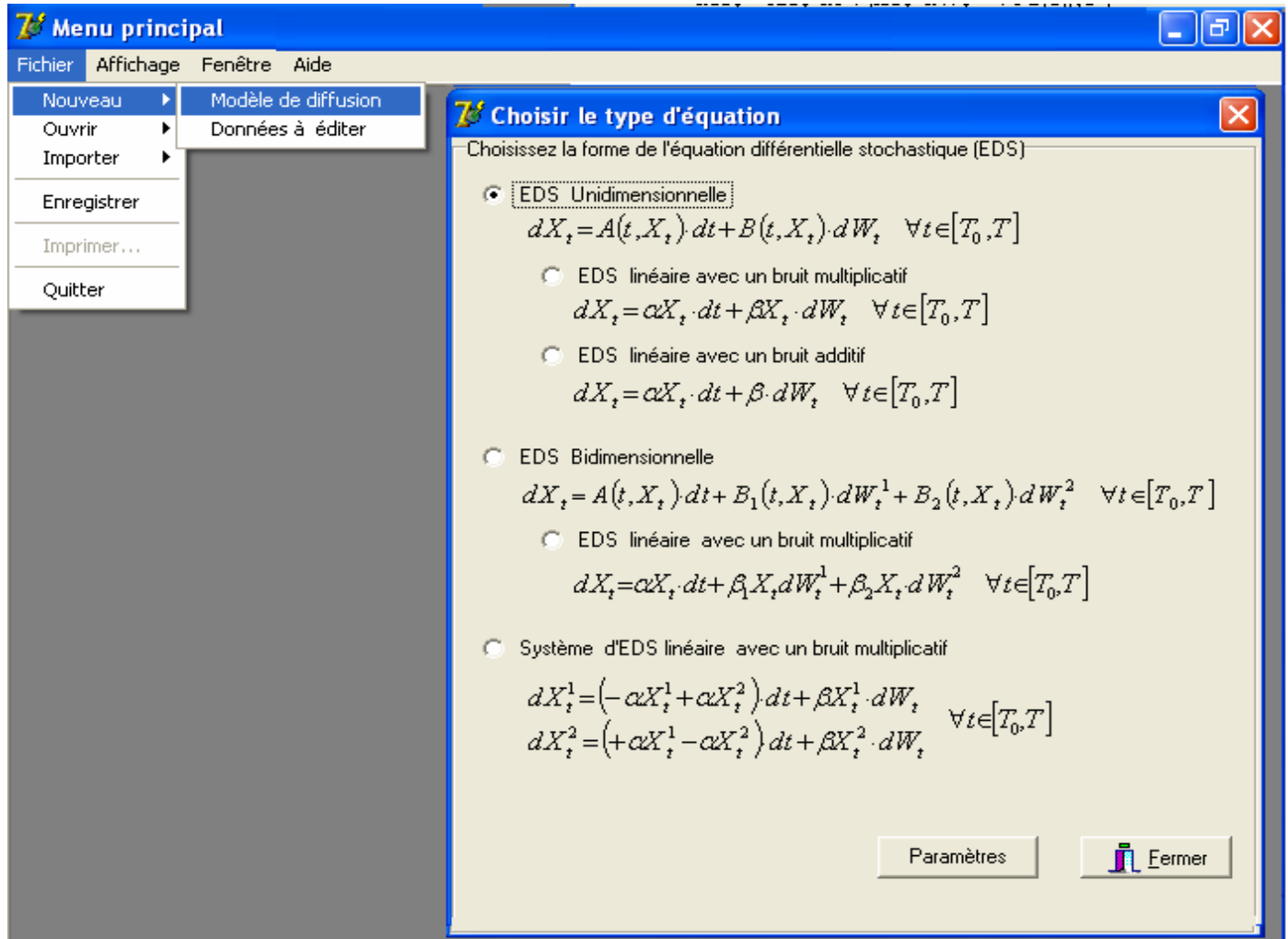


Figure b.1

Le bouton qui se trouve en bas de la fenêtre, « Paramètres », nous permet de passer selon le choix de l'équation aux fenêtres : « Paramètres de l'EDS ».

2. Paramètres de l'EDS

Si l'utilisateur a choisi dans la [fenêtre b.1](#), la première EDS (EDS unidimensionnelle), alors la [fenêtre b.2](#) apparaît. Cette fenêtre vous permet de personnaliser les paramètres de l'EDS en introduisant formellement les fonctions drift et de diffusion de l'EDS ainsi que les dérivées premières et secondes par rapport à x et t . La solution de l'EDS peut être aussi introduite si sa forme explicite est connue. L'utilisateur doit aussi préciser l'intervalle de temps $[T_0, T]$ et la valeur initiale X_0 . L'insertion de tous ces paramètres se fait via la deuxième fenêtre ([Figure b.3](#)).

Menu principal

Fichier Affichage Fenêtre Aide

☒ pavé numérique
Liste des Approximations

Paramètres d'une EDS de forme générale unidimensionnelle

Donner la forme des deux coefficients drift $A(t, X_t)$ et de diffusion $B(t, X_t)$ de l'EDS:

$$dX_t = A(t, X_t) dt + B(t, X_t) dW_t$$

$A(t, x)$

$B(t, x)$

Donner les fonctions dérivées premières et secondes en x et t de A et B

dA/dx

dB/dx

ddA/dxx

ddB/dxx

dA/dt

dB/dt

Intervalle de temps
 T_0 T

Valeur initiale
 X_0

Si vous connaissez la forme de la solution X_t de l'EDS ci-dessus, veuillez la saisir

Exemple: $X_t = \exp(-(Wt + \text{rac}(-\ln(X_0)))^2)$

Pavé Numérique

+ 7 8 9 t
- 6 5 4 x
* 1 2 3 W
/ 0 Pi ()
. , < fonct Sup

Fonctions Numeriques

(?^?)
Abs(?)
ArcCos(?)
ArcSin(?)
Arctan(?)
ArgCh(?)
ArgSh(?)
Ch(?)
Cos(?)
Cotan(?)
Coth(?)
Exp(?)
Fac(?)
Ln(?)
Log(?)
Rac(?)
Rnd(?)

x puissance y

Figure b.2

Figure b.3

Comme le montre la [figure b.3](#), le pavé numérique contient des chiffres (0-9), des opérateurs arithmétiques (+, -, *, /), la routine arithmétique (Pi=π) et des lettres (t, x, W) tel que pour introduire par exemple dans la solution explicite le mouvement Brownien Wt , il suffit d'appuyer sur les deux boutons W et t.

Le bouton « Sup » sert à supprimer un texte après l'avoir sélectionné et « fonct » est un bouton permettant à l'utilisateur d'introduire des fonctions arithmétiques qui se trouve en bas de la fenêtre. Les fonctions considérées sont : (?^?), Abs(?), ArcCos(?), ArcSin(?), Arctan(?), ArgCh(?), ArgSh(?), Ch(?), Cos(?), Cotan(?), Coth(?), Exp(?), Fac(?), Ln(?), Log(?), Rac(?), Rnd(?), Sh(?), Sin(?), Tan(?), Th(?).

Chaque fois que l'utilisateur sélectionne une fonction, il peut trouver sa forme arithmétique habituelle en attachement. A titre d'exemple, pour introduire la fonction x^2 (x puissance 2), l'utilisateur se positionne d'abord sur la première fonction (?^?) et active le bouton « fonct » et ensuite il appui sur les deux boutons x et 2. De cette manière, les deux points d'interrogations seront remplacés, respectivement, par x et 2.

La [fenêtre b.3](#) devient invisible en activant le groupe Menu principal \ Affichage \ Pavé Numérique

Nous passons maintenant à d'autres fenêtres qui donne à l'utilisateur la possibilité de personnaliser les paramètres d'EDS's choisies auparavant dans la [fenêtre b.1](#).

Comme le montre la [figure b.4](#) et la [figure b.5](#), les coefficients de l'EDS linéaire doivent être introduits ainsi que l'intervalle de temps $[T_0, T]$ et la valeur initiale X_0 .

Figure b.4

Figure b.5

Si le choix de la [fenêtre b.1](#), était sur une EDS de dimension 2 ayant une forme générale, alors l'utilisateur doit insérer les coefficients drift et de diffusion de l'EDS choisie et de leurs dérivés premières d'une manière formelle. Idem pour la solution explicite si évidemment l'utilisateur connaît sa forme. Il doit aussi introduire l'intervalle de temps $[T_0, T]$ et la valeur initiale X_0 . L'insertion de tous ces paramètres se fait via la [fenêtre b.3](#), qui sera attaché à la [fenêtre b.6](#) dès son ouverture.

Paramètres d'une EDS de forme générale bidimensionnelle

Donner la forme des deux coefficients drift $A(t, X_t)$ et de diffusion $B(t, X_t)$ de l'EDS:

$$dX_t = A(t, X_t) \cdot dt + B_1(t, X_t) \cdot dW_t^1 + B_2(t, X_t) \cdot dW_t^2 \quad \forall t \in [T_0, T]$$

$A(t, x)$

$B1(t, x)$ $B2(t, x)$

Donner les fonctions dérivées premières s en x de A et B

dA/dx $dB1/dx$

$dB2/dx$

Intervalle de temps

$T0$ T

Valeur initiale

$X0$

Si vous connaissez la forme de la solution de l'EDS ci-dessus, veuillez la saisir

Figure b.6

En restant toujours à l'étape de personnalisation des paramètres des EDS, l'une des deux fenêtres ci-après ([Figure b.7](#) et [Figure b.8](#)) s'affichent dans le cas où le choix de la [fenêtre b.1](#) était porté sur l'une des deux dernières EDS's.

Paramètres de l'EDS 2.1

Donner les constantes α et β de l'EDS:

$$dX_t = \alpha X_t \cdot dt + \beta_1 X_t \cdot dW_t^1 + \beta_2 X_t \cdot dW_t^2 \quad \forall t \in [T_0, T]$$

α $\beta1$ $\beta2$

Intervalle de temps $[T0, T]$

$T0$ T

Valeur initiale

$X0$

Figure b.7

Paramètres de l'EDS 3

Donner les constantes Alpha et Beta de l'EDS:

$$dX_t^1 = (-\alpha X_t^1 + \alpha X_t^2) \cdot dt + \beta X_t^1 \cdot dW_t$$

$$dX_t^2 = (+\alpha X_t^1 - \alpha X_t^2) \cdot dt + \beta X_t^2 \cdot dW_t$$

α β

Intervalle de temps $[T0, T]$ Valeur initiale

$T0$	T	$X10$	$X20$
0	1	1	0

Figure b.8

3. Choix de l'approximation :

Pour toutes les fenêtres qui concernent les paramètres de l'EDS, on trouve deux boutons. Le bouton « Fermer » est conçu pour la fermeture de la fenêtre et le deuxième sert à passer à la [fenêtre b.9](#) qui présente un ensemble de schèmes numériques que l'utilisateur choisira afin d'approcher la solution de l'EDS déjà choisi dans la [fenêtre b.1](#).

Choix de l'approximation

- [-] 1. Approximations fortes
 - [-] Approximations de Taylor
 - Schème d'Euler stochastique
 - Schème de Milstein
 - [-] Schème de Taylor d'ordre 1.5
 - Trajectoire du processus de diffusion**
 - Erreur d'approximation
 - Schème de Taylor d'ordre 2.0
 - [-] 1. Approximations faibles
 - [-] Approximations de Taylor
 - Schème faible de Taylor d'ordre 2.0
 - [-] Approximations explicites
 - Schème faible explicite d'ordre 2.0
 - Approximation par la méthode d'extrapolation

Figure b.9

En sélectionnant l'approximation voulue et en double cliquant sur « Trajectoire du processus de diffusion » de la fenêtre ci-dessus, la [fenêtre b.10](#) s'affiche. Dans cette fiche, la solution exacte de l'EDS (X_t) ainsi que son approximation (Y_t) sont présentées. Avec l'activation du bouton « Trajectoire », l'utilisateur peut avoir d'autres simulations de la solution et cela pour différentes valeurs du taille de pas de temps. Le tableau des résultats peut être sauvegardé en appuyant sur « Enregistrer » et dans ce cas là une nouvelle fenêtre s'affiche ([figure b.11](#))

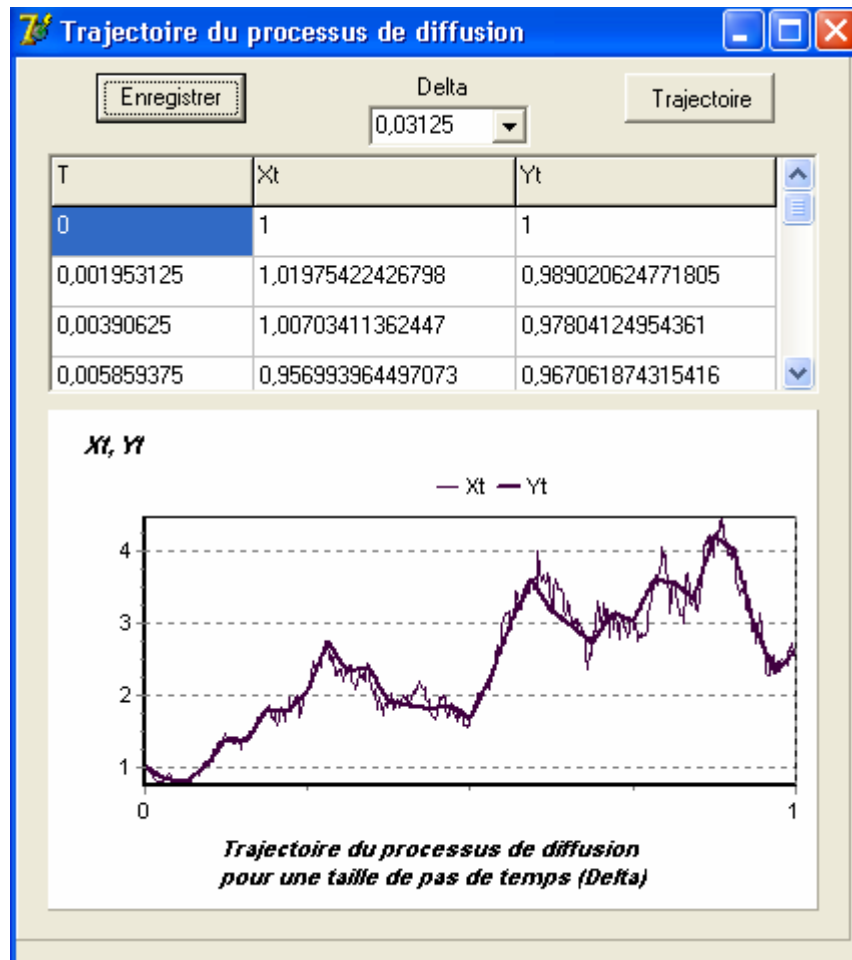


Figure b.10

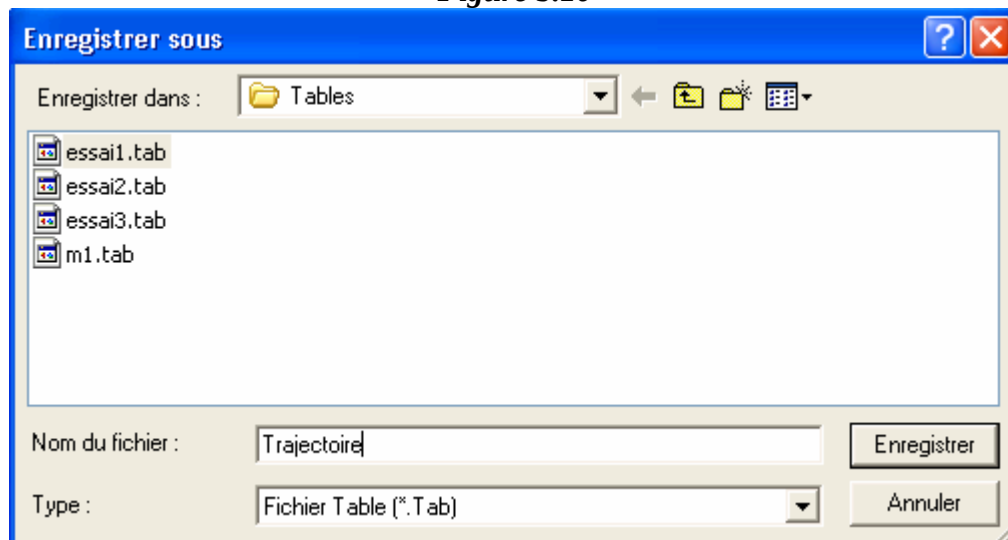


Figure b.11

Le bouton « Erreur d'approximation » de la [fenêtre b.9](#) permet d'estimer l'erreur résultante de la méthode d'approximation choisie ainsi que son intervalle de confiance ([figure b.14](#)). En activant ce bouton, la [fenêtre b.9](#) demeure affichée un bon moment et au cours de ce temps, l'utilisateur peut apercevoir à l'entête de la fiche un compteur qui s'incrémente d'un pas ([figure b.12](#), [b.13](#)). La vitesse de ce pas dépend de la capacité de mémoire de la machine qu'on utilise.

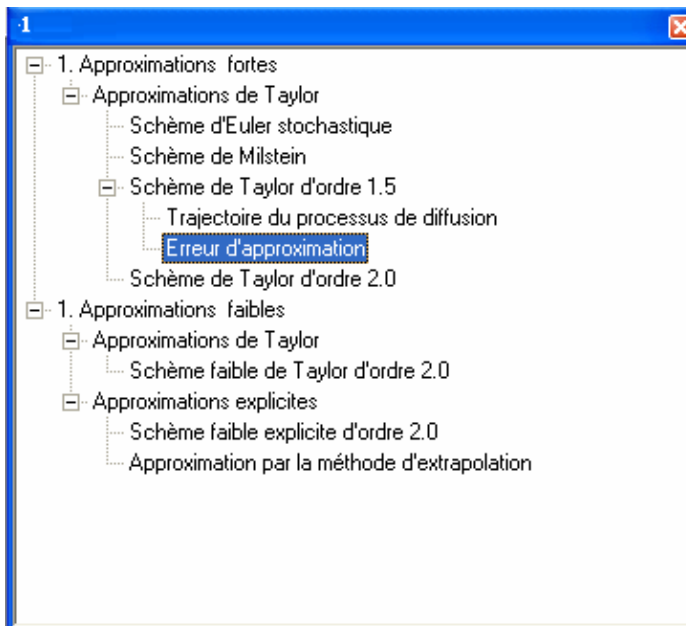


Figure b.12

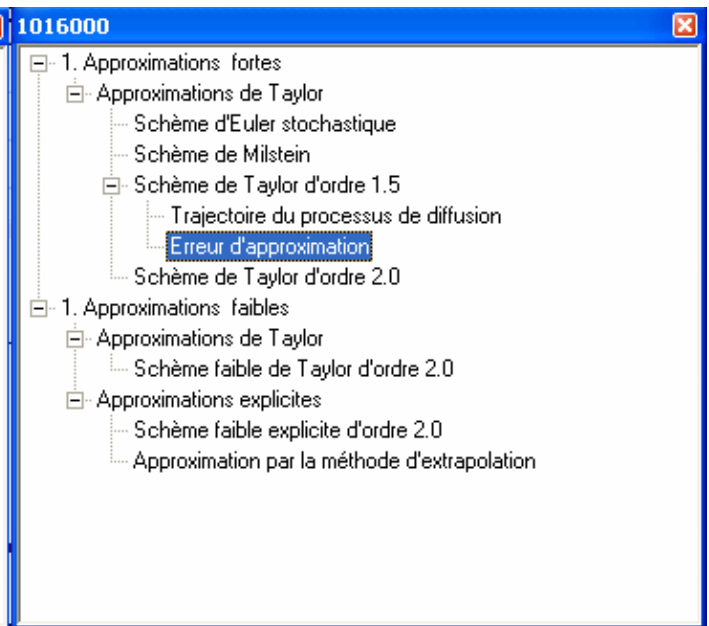


Figure b.13

Une fois que le compteur arrive à 1016000 itérations, la [fenêtre b.14](#) s'affiche. Elle donne pour chaque taille de pas (Delta), l'erreur d'approximation et son intervalle de confiance ainsi que la longueur de cet intervalle. Cette fenêtre contient aussi l'ordre de convergence expérimental de l'approximation.

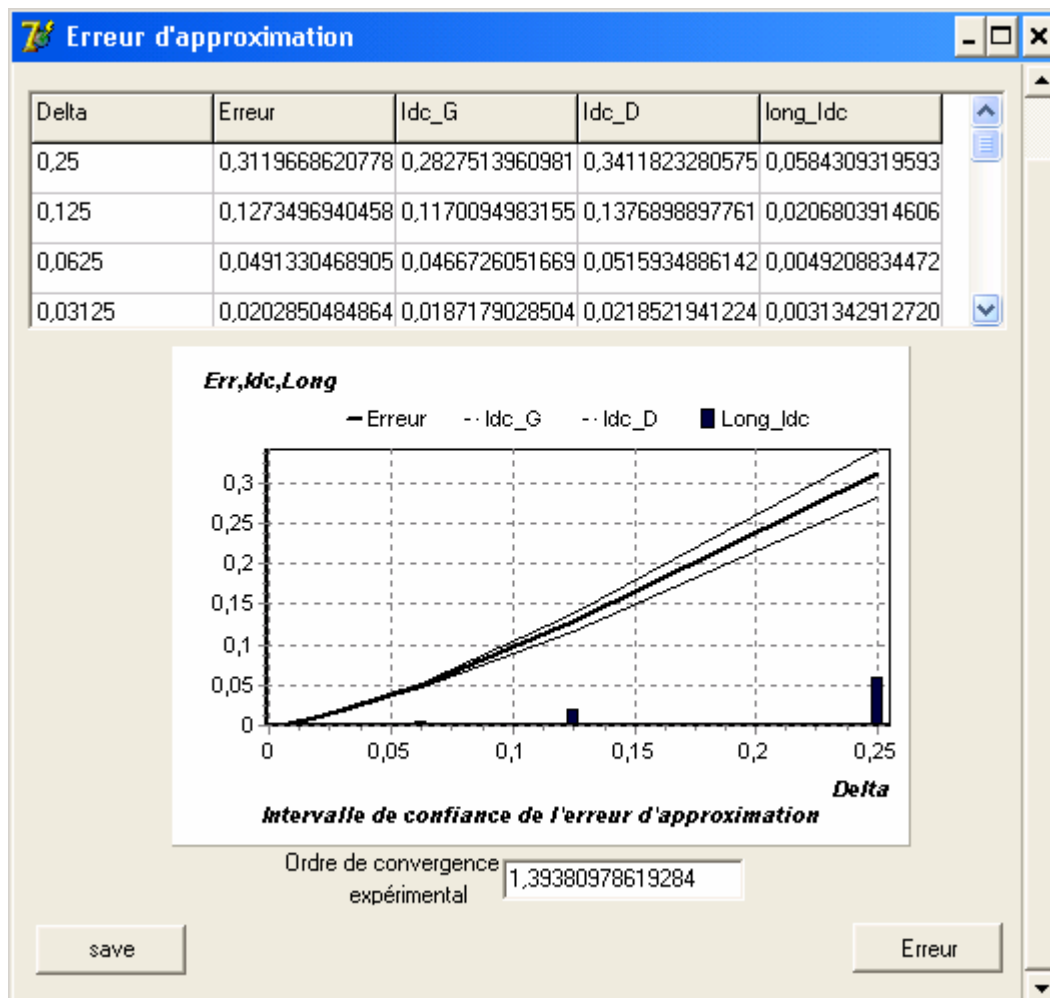


Figure b.14

Conclusion

Lorsque l'on s'intéresse à une description plus fine de beaucoup de systèmes dynamiques dans différentes disciplines, on est souvent obligé de tenir compte de toutes les petites perturbations locales qui viennent parasiter le phénomène étudié. Cependant, dans le cas présent, il faut tenir compte d'une difficulté supplémentaire introduite par la présence de l'aléa.

Ces phénomènes imprévisibles peuvent être l'objet d'une modélisation via les équations différentielles stochastiques. Généralement et par leur nature, ces équations ne se prêtent pas à une résolution analytique exacte. Néanmoins, des approches numériques se sont élaborées pour la détermination par simulation de solutions approchées.

Ceci a fait l'objet de notre travail. Notre objectif était d'étudier et de présenter un certain nombre d'algorithmes de résolution des EDS's afin de concevoir une bibliothèque d'objets pour une utilisation plus large destinée à des utilisateurs non-spécialistes en calcul stochastique, Notamment dans des domaines d'application comme en Finance, Assurance, Environnement, Biologie,... .

Un logiciel interactif, sous l'environnement Delphi, permettant la mise en œuvre de ces algorithmes et par conséquent la détermination par simulation des solutions approchées des EDS's ainsi que l'estimation de l'erreur résultante, était conçu. Cette même application est un outil pour l'aide à la décision puisqu'elle propose à l'utilisateur un ensemble de modèles et de stratégie de résolution. Le modèle choisi est le plus adapté aux données réelles et permettra d'effectuer des prévisions.

Malgré la complexité algorithmique, l'amélioration des performances des ordinateurs nous a permis de simuler numériquement et d'une manière très efficace l'intervalle de confiance des erreurs résultantes ainsi que la vitesse de convergence de différentes approximations étudiées. Pour pouvoir comparer entre ces schémas numériques, nous avons estimé le temps d'exécution de chacune des méthodes présentés.

Bibliographie:

- [1] Zeev Schuss (1937). Theory and applications of stochastic differential equations.
- [2] I.I.Gihman, A.V.Skorohod (1972). Stochastic differential equations. Springer-Verlag.
- [3] I.I.Gihman, A.V.Skorohod (1973). The theory of stochastic processes. Springer-Verlag, Berlin.
- [4] S.karlin, H.M.Taylor (1975). A first course in stochastic processes. Academic Press. New York
- [5] A.Friedman(1975). Stochastic differential equations and applications. Academic Press.
- [6] I.I.Gihman, A.V.Skorohod (1980). Introduction à la théorie des processus aléatoires. Moscou, éditions Mir.
- [7] N.Ikeda, S.Watanabe(1981). Stochastic differential equations and diffusion processes. North Holland Publishing company- Kodousha ltd-Tokio
- [8] R.J. Elliott(1982). Stochastic Calculus and Applications. Springer-Verlag NewYork.
- [9] L.Karatzas, S.E.Shreve (1988). Brownian motion and stochastic calculus (ISNN). Springer Verlag.
- [10] P.E.Kloeden, E.Platen(1991). Numerical solution of stochastic differential equations. Springer.
- [11] Henry Schurz (1991). Numerical solution of stochastic differential equations through. Computer experiments. Springer.
- [12] P. Embrechts, C. Klüppelberg(1997). Modelling External Events for insurance and finance Springer-Verlag NewYork, Heidelberg Berlin.
- [13] A.Tverto, R. Winther(1998). Introduction to partial differential equations. A computational approach . Springer-Verlag-NewYork .
- [14] K.Boukhetala (1984). Estimation des paramètres de dérivées d'une équation différentielle stochastique(EDS) linéaire contrôlée. Thèse de magister, USTHB.
- [15] K.Boukhetala (1998). Application des processus de diffusion et problème d'échantillonnage. Thèse de Doctorat d'état, USTHB

- [16] A.Bouslah(2003).Les EDS's en Finance, Conception d'une règle de décision pour un investissement productif.Thèse de Magister, encadré par K.Boukhetala, USTHB.
- [17] F. Brodeau (1981).Etude des solutions d'une EDS linéaire en vue d'identifications optimales des paramètres de dérive. Rapport de recherche, Grenoble.
- [18] F.Y. Hisao (2003).Equation stochastique de dynamique de populations de type proie prédateur avec diffusion dans un territoire. Rapport universitaire.
- [19] Boukhetala (1995). Identification and simulation of a communication system. MMR Review, (ISSN1114398), Vol. 4 pp 55-79.
- [20] K.Boukhetala (1996). A Modelling and simulation of a dispersal pollutant with attractive center, Edition Computational Mechanics Publications, (ISBN 1853124249 (USA)) , (ISBN 156252342 (U.K)), pp. 245-252.
- [21] K.Boukhetala (1998). Distribution Estimation of the first passage time for a simulated diffusion. MMR Review (ISSN1114398), Vol.7,N°1, pp. 1-25.
- [22] K.Boukhetala (1998). Kernel density of the exit time, in a simulated diffusion (Tunis , Nov 1998). Proceedings du colloque CMMNI6, Issue spéciale de la revue (*les Annales Maghrébines de l'Ingénieur*. ISSN), Vol. 12, pp.587-589.
- [23] K.Boukhetala (1994). Simulation study of a dispersion about an attractive center. COMPSTAT, Edition R.Dutter and W.Grossman, Vienne Institute of Statistics. Vol. 1, pp. 128-130.
- [24] K.Boukhetala and L. Raked (1998) . Estimation of the exit time distribution of a diffusion process, modelling a semi-conductor system. COMPSTAT, Edition Roger Payne, IACR-Rothamsted , University of Bristol, England (ISBN0-9514456-7-7), Vol. 2 pp.147-149.
- [25] R Lebtahi et A.Laouar (2003). Etude exploratoire des modèles d'option en Finance.
Mémoire d'Ingéniorat, encadré par K.Boukhetala, USTHB.