

N° d'ordre :08/2007-M\MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN: MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse (Systèmes dynamiques)

Par

BENKACI ALI Nadir

THÈME

PROBLÈMES AUX LIMITES
À
PLUSIEURS POINTS

Soutenu le 28 /10/ 2007, devant le jury composé de :

MR. A. KESSI	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
MR. A. BENMEZAI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
MR. S. DJEBALI	Professeur	E.N.S. Kouba	Examineur.
MR. T. ALIZIANE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.
MR. T. MOUSSAOUI	Chargé de cours	E.N.S. Kouba	Examineur.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur A. BEN-MEZAI mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordé. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur A. KESSI, Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement Messieurs S. DJEBALI, Professeur à l'E.N.S. Kouba et T. AL-IZIANE , Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B et T. MOUSSAOUI, Chargé de cours à l'E.N.S. Kouba, qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes frères et soeurs pour leur soutien tout au long de mes études.

Problèmes aux limites à plusieurs points

Résumé

Beaucoup de phénomènes physiques reliés à la théorie d'oscillations tels que, propagation d'ondes, oscillations et vibrations des membranes sont décrits par des équations différentielles ordinaires soumises à des conditions aux limites à plusieurs points. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'existence de solutions positives et des solutions qui changent de signes des problèmes aux limites à plusieurs points. Pour ce faire, on se ramènera à l'étude d'existence du point fixe de l'opérateur non linéaire associé à chaque problème. En appliquant quelques théorèmes du point fixe tels que, le théorème de Schauder, le théorème de Krasnoselskii et le théorème de Leggett Williams, on va étudier l'existence et la multiplicité des solutions.

Mots-clés : Théorème du point fixe, Degré topologique, Indice du point fixe, Sous et sur-solution.

Abstract

Many physical phenomenas connected to the theory of oscillations such as: propagation of waves, oscillations and vibrations of the membranes, are described by ordinary differential equations with boundary conditions at several points. In this memory, we are interested in the study of existence of the positive solutions and the solutions of the unspecified signs of the multi-point boundary value problems. For this reason, we'll be reduced to the study of existence of the fixed point of the nonlinear operator associated to each problem. By applying some theorems of the fixed point such as: the Schauder's theorem, the Krasnoselskii's theorem and the theorem of Leggett-Williams, we'll study the existence and the multiplicity of the solutions.

Key words: Fixed point theorem, Topological Degree, Fixed point index, Lower and upper-solution.

Table des matières

	v
	1
Introduction générale	1
1 Rappels et préliminaires	5
1.1 Introduction	5
1.2 Degré topologique en dimension finie (degré de Brouwer)	5
1.2.1 Définition du degré dans le cas d'une valeur régulière	6
1.2.2 Définition du degré dans le cas d'une valeur singulière	6
1.2.3 Définition du degré dans le cas des fonctions continues	7
1.3 Degré topologique de Leray-Schauder	7
1.3.1 Définition du degré de Leray-Schauder	8
1.3.2 Propriétés principales du degré de Leray schauder	9
1.3.3 Indice d'une solution isolée	11
1.4 Indice du point fixe sur les cônes	12
1.4.1 Définition de l'indice du point fixe	12
1.4.2 Propriétés Principales	12
2 Résultats d'existence et de multiplicité de solutions positives	15
2.1 Solutions positives pour un problème aux limites à m points	15
2.1.1 Introduction	15

2.1.2	Formulation en un problème du point fixe	16
2.1.3	Résultats principaux	22
2.2	Existence de trois solutions positives pour un problème aux limites à trois points	30
2.2.1	Introduction	30
2.2.2	Formulation en un problème du point fixe	30
2.2.3	Résultat principal	31
2.3	Existence de trois solutions pour un problème linéairement dépendant de la dérivée	34
2.3.1	Introduction	34
2.3.2	Formulation en un problème du point fixe	35
2.3.3	Résultat principal	40
2.4	Solution positive d'un problème avec une non linéarité qui change de signe	43
2.4.1	Introduction	43
2.4.2	Formulation en un problème du point fixe	43
2.4.3	Résultat principal	46
3	Existence de solutions de signes quelconques	49
3.1	Problème aux limites à trois points en resonance	49
3.1.1	Introduction	49
3.1.2	Formulation en un problème du point fixe	50
3.1.3	Cas des sur et sous-solutions bien ordonnées	53
3.1.4	Cas des sur et sous-solutions d'ordres opposés	56
3.2	Existence de solutions par un théorème de continuation	65
3.2.1	Introduction	65
3.2.2	Formulation en un problème du point fixe	66
3.2.3	Résultats principaux	71
3.3	Existence de solutions par la méthode des sous et sur-solutions	82
3.3.1	Introduction	82
3.3.2	Formulation en un problème du point fixe	84
3.3.3	Résultats principaux	94

4	Existence de solution pour un problème aux limites d'ordre supérieur	103
4.1	Introduction	103
4.2	Formulation en un problème du point fixe	104
4.3	Résultats principaux	107
	Conclusion	112
	Annexe	113

Introduction générale

Beaucoup de phénomènes physiques sont décrits par des équations différentielles ordinaires soumises à des conditions aux limites à plusieurs points, voir les travaux de Prescott [29, 37]. L'étude des problèmes aux limites à trois points a été lancée par Il'in et Moiseev [17]. Depuis lors, les problèmes aux limites à plusieurs points ont été étudiés par plusieurs auteurs, nous citons en tant que contributions récentes l'article de W.Feng et J.R.L.Webb [7], Elloe et Henderson [5] Elloe et Y.Gao [6] et Ryun Ma [23, 24, 26, 22, 25]. Un certain nombre de ces travaux traitent l'existence des solutions positives, pour exemple, voir les travaux d'Agarwal et Wong [38], Graef et Yang [9] et de Anderson, [1].

Dans ce mémoire, on fournira des conditions suffisantes pour l'existence de solutions positives ou de signe quelconque pour certaines classes de problèmes aux limites à plusieurs points. Pour ce faire, on formulera chaque problème en une équation au point fixe $x = Ax$ où A est un opérateur non linéaire défini sur un espace de Banach. Par l'intermédiaire des théorèmes du point fixe ou du degré topologique, des résultats d'existence ou de multiplicité sont obtenus. Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappellera brièvement les notions suivantes : Degré topologique et la théorie de l'indice du point fixe.

Dans le deuxième chapitre, on examine l'existence de solutions positives pour plusieurs classes de problèmes à plusieurs points associés à des équations différentielles du second ordre. Ce chapitre est constitué de quatre sections. Dans la première section, on va étudier le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda a(t)f(u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i) \end{cases}$$

où $a \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonction continues, $\lambda > 0$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m-2\}$ $\alpha_i \geq 0$.

Sous des conditions locales imposées à f , on déterminera des intervalles du paramètre λ , dans lesquels on a existence d'une ou plusieurs solutions positives. En formulant le problème ci dessus sous forme d'une équation au point fixe, le théorème du point fixe de Krasnoselskii est utilisé pour démontrer plusieurs résultats.

Dans la deuxième section, on utilisera le théorème du point fixe de Leggett-Williams pour établir un résultat d'existence de trois solutions positives du problème aux limites a trois point:

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda f(t, u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \eta < 1$, $\alpha\eta < 1$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et satisfait des conditions locales.

Dans la troisième section, on examine le problème aux limites dépendant linéairement de la dérivée

$$\begin{cases} -u''(t) = [a(t)u'(t) + b(t)u(t) + h(t)f(u(t))] & t \in]0, 1[\\ u(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases}$$

où $\eta \in]0, 1[$, $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $a \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in [0, 1] \rightarrow]-\infty, 0[$ sont des fonctions continues et non identiquement nulles et $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue soumise à des conditions locales.

En utilisant le théorème de Leggett-Williams on obtiendra un résultat d'existence de trois solutions positives.

Dans la quatrième section on utilisera les propriétés de l'indice du point fixe pour établir un résultat d'existence d'au moins une solution positive du problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h(t)f(t, u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = \beta u'(0), u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases}$$

où $\alpha, \eta \in]0, 1[$, $\beta \geq 0$, $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, positive avec $0 < \int_0^1 h(t)dt < \infty$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Le troisième chapitre est constitué de trois sections et est consacré à l'étude de l'existence de solutions de signe quelconque pour plusieurs classes de problème aux limites à plusieurs

points. Dans la première section, on étudie le problème à trois points

$$\begin{cases} x'' = f(t, x) & t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases}$$

où $\eta \in]0, 1[, \alpha = \frac{1}{\eta}$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

En combinant la méthode des sous et sur-solution avec un théorème de continuation on obtient un resultat d'existence de solution dans chacun des cas où les sous et sur-solution sont bien ordonnées ou d'ordre opposé.

Dans la deuxième section, on examine l'existence de solution du problème de type Neumann

$$\begin{cases} (\phi(x'))' = f(t, x, x') & t \in]0, 1[\\ x'(0) = 0, \theta(x'(1)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \theta(x'(\xi_i)) \end{cases}$$

où $a_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m-2\}$ et $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1$ avec $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \leq 1$. ϕ et θ deux homéomorphismes impaires et strictement croissants avec ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$. Un théorème de continuation est employé pour montrer deux résultats d'existence de solutions.

Dans la troisième section, on utilise la méthode des sous-solutions et sur-solutions pour étudier le problème

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0 & t \in]0, 1[\\ u'(0) - \sum_{i=1}^m a_i u'(t_i) = \lambda_1, u(1) - \sum_{i=1}^m b_i u(t_i) = \lambda_2 \end{cases}$$

où $m \in \mathbb{N}^*, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

On discute suivant le paramètre $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ l'existence et la nonexistence de solution du problème aux limites ci dessus.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude d'un problème d'ordre supérieur, en utilisant le théorème de Krasnoselskii, on donne des résultats d'existence de solutions positives du problème

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda g(t).f(u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = u'(1) = u''(0) = u''(p) - u''(1) = 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

où, $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues telles que $\int_0^1 g(t)dt > 0$.

On termine ce mémoire par une conclusion et des questions ouvertes.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce paragraphe, on va rappeler brièvement quelques outils indispensables de l'ANALYSE NON LINÉAIRE qu'on utilisera dans la suite de ce mémoire pour l'étude des problèmes aux limites à plusieurs points. Parmi ces outils figurent le degré topologique de Leray-Schauder et certains théorèmes du point fixe qui nous permettront de montrer des résultats d'existence et de multiplicité de solutions pour différentes classes de problèmes aux limites à plusieurs points associés à des équations différentielles.

1.2 Degré topologique en dimension finie (degré de Brouwer)

Soit $f \in C([a, b[, \mathbb{R})$, avec $a < b$. Pour tout $\alpha \in]a, b[$, on définit le degré de Brouwer de f relativement à $]a, b[$ au point α de la manière suivante :

$$d_B(f, \Omega, \alpha) = \frac{1}{2} [\text{sign}(f(b) - \alpha) - \text{sign}(f(a) - \alpha)].$$

Remarque 1.2.1 Si $d_B(f, \Omega, \alpha) \neq 0$, alors l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Dans toute cette section, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 1$ et $\partial\Omega$ sa frontière.

Pour $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $f'(x)$ désigne la différentielle de f au point $x \in \Omega$ et $J_f(x)$ est le jacobien de f au point $x \in \Omega$, ie: $J_f(x) = \text{Det}(f'(x))$.

Un point $x \in \Omega$ est dit régulier si $J_f(x) \neq 0$, dans le cas contraire x est dit singulier.

Une valeur $b \in \mathbb{R}^n$ est dite régulière si pour tout $x \in \Omega$ avec $b = f(x)$, $J_f(x) \neq 0$. Dans le cas contraire b est dite valeur singulière.

L'ensemble de tous les points singuliers de f est noté par S_f , ie:

$$S_f = \{x \in \Omega / J_f(x) = 0\}.$$

1.2.1 Définition du degré dans le cas d'une valeur régulière

La compacité de $\bar{\Omega}$ et le théorème d'inversion local entraînent

Lemme 1.2.1 *Si $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^n \setminus (f(\partial\Omega) \cup f(S_f))$ alors l'ensemble*

$$f^{-1}(\{b\}) = \{x \in \bar{\Omega} / f(x) = b\}$$

est fini.

Le degré topologique de f relativement à Ω au point b est défini par :

$$d(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(\{b\})} \text{sgn} J_f(x).$$

1.2.2 Définition du degré dans le cas d'une valeur singulière

Le lemme suivant nous permettra d'étendre la définition du degré au cas d'une valeur b singulière.

Lemme 1.2.2 (lemme de Sard) : *Soit $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. L'ensemble $f(S_f)$ est de mesure nulle (de Lebesgue). Pour plus de détails voir [15].*

D'après le lemme de Sard, si $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ et $b \in f(S_f)$, il existe alors une suite de valeurs régulières (b_n) qui converge vers b . Par conséquent, on définit le degré de la manière suivante :

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega, b_1), \quad b_1 \in U$$

où U est une composante connexe contenant b telle que $U \setminus \{b\} \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega) \cup f(S_f)$.

1.2.3 Définition du degré dans le cas des fonctions continues

Les deux lemmes suivants vont nous permettre d'étendre encore la définition du degré au cas continu.

Lemme 1.2.3 *Si $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$, alors il existe $\hat{U}$ un voisinage de f dans $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, tel que pour tout $\Psi \in \hat{U}$*

$$1/ b \notin \Psi(\partial\Omega)$$

$$2/ d(\Psi, \Omega, b) = d(f, \Omega, b).$$

Lemme 1.2.4 Invariance par homotopie : *Soit $H \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$, si $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ alors la valeur $d(H(\cdot, \lambda), \Omega, b)$ ne dépend pas du choix de λ dans $[0, 1]$.*

Preuve. En effet, posons $f = H(\cdot, t)$, où $t \in [0, 1]$ fixé. On a $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$ et d'après le lemme (1.2.3), il existe $\hat{U}$ un voisinage de f dans $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, tel que pour tout $\Psi \in \hat{U}$, $b \notin \Psi(\partial\Omega)$ et $d(\Psi, \Omega, b) = d(f, \Omega, b)$. Puisque f et $\frac{dH(x,t)}{dx}$ sont continues sur $\bar{\Omega}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $H(\cdot, \lambda) \in \hat{U}$ pour tout $\lambda \in]t - \alpha, t + \alpha[\cap [0, 1]$. Donc, le degré $d(H(\cdot, \lambda), \Omega, b)$ est constant sur $]t - \alpha, t + \alpha[$, ceci pour tout $t \in [0, 1]$. Enfin, par la continuité du degré par rapport à λ , on déduit que $d(H(\cdot, \lambda), \Omega, b)$ ne dépend pas du choix de λ dans $[0, 1]$. ■

Soient $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$, $r = \rho(b, f(\partial\Omega)) > 0$ désigne la distance entre b et $f(\partial\Omega)$. Notons par $\hat{U} = \{\Psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \text{ tel que } \|\Psi - f\|_\infty < r/2\}$. Puisque $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ est dense dans $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\hat{U} \neq \emptyset$. On montre aisément que pour $\Psi \in \hat{U}$, le degré $d(\Psi, \Omega, b)$ est bien définie.

De plus, le lemme ci dessus entraîne que l'application d est constante sur $\hat{U}$.

Ainsi on défini le degré $d(f, \Omega, b)$ par

$$d(f, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$$

où $\Psi \in \hat{U}$.

1.3 Degré topologique de Leray-Schauder

Dans toute cette section, Ω désigne un ouvert borné de E , où E est un espace de Banach réel.

1.3.1 Définition du degré de Leray-Schauder

Définition 1.3.1

- Un opérateur $T : \Omega \longrightarrow E$ est dit compact si T est continu et $T(\Omega)$ est relativement compact dans E .
- Un opérateur $T : \Omega \longrightarrow E$ est dit complètement continue si T est continu et l'image par T de tout borné est relativement compact dans E .
- Si $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$, où $Q(\bar{\Omega}, E)$ est l'ensemble de tous les opérateurs compacts sur $\bar{\Omega}$, alors l'application $\phi = I - T$ est appelée perturbation compacte de l'identité.

Définition 1.3.2 Soit $T : \bar{\Omega} \longrightarrow E$ un opérateur continu. S'il existe un sous espace vectoriel de dimension finie F de E tel que $\overline{T(\bar{\Omega})} \subset F$, alors l'application $\phi = I - T$ est appelée perturbation de dimension finie de l'identité.

Si de plus $b \in E \setminus \phi(\partial\Omega)$, alors $d(\phi/\bar{\Omega} \cap F, \Omega \cap F, b)$ est indépendant du choix de F .

Par conséquent, le degré topologique de ϕ relativement à Ω au point b est défini par

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi/\bar{\Omega} \cap F, \Omega \cap F, b).$$

Lemme 1.3.1 Soit K un compact de E . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple $(F_\varepsilon, g_\varepsilon)$ où F_ε est un sous espace vectoriel de dimension finie de E et $g_\varepsilon \in C(K, F_\varepsilon)$ vérifiant $\|x - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon, \forall x \in K$.

Preuve. (Voir [33]). ■

Lemme 1.3.2 Si $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$, alors l'application $\phi = I - T$ est fermée et propre, c'est-à-dire que l'image de tout fermé de $\bar{\Omega}$ est un sous ensemble fermé de E et que l'image réciproque de tout sous ensemble compact de E est compact.

Preuve.

1/ Soit $F \subset \bar{\Omega}$ un fermé de E et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ une suite telle que $y_n = \phi(x_n)$ converge vers $\alpha \in E$.

Puisque l'opérateur T est compact, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $T(x_{n_k})$ converge dans E , cela entraîne que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$, où $x = \alpha + \beta$, avec $\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_{n_k})$. Par conséquent, $\alpha \in \phi(F)$, donc ϕ est fermée.

2/ Soit $K \subset E$ un compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{\Omega}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \phi(x_n) \in K$.

Puisque l'opérateur T est compact, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $T(x_{n_k})$ converge dans E . Par conséquent, la suite définie par

$$x_{n_k} = T(x_{n_k}) + y_{n_k}$$

admet une sous suite qui converge dans $\bar{\Omega}$, donc ϕ est une application propre. ■

Soit $b \in E \setminus \phi(\partial\Omega)$, où $\phi = I - T$ avec $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$. La valeur $r = \rho(b, \phi(\partial\Omega))$ désigne la distance entre b et $\phi(\partial\Omega)$. D'après le lemme (1.3.2) $\phi(\partial\Omega)$ est fermé, $r > 0$, et l'ensemble $K = \overline{T(\bar{\Omega})}$ est un compact dans E . D'après le lemme (1.3.1) pour $\varepsilon = \frac{r}{2}$ il existe un sous espace vectoriel F_r de dimension finie de E et $g_r \in C(K, F_r)$ tels que $\|x - g_r(x)\| \leq \varepsilon$, $\forall x \in K$.

Posons $T_r = g_r \circ T : \bar{\Omega} \longrightarrow F_r$ et $\phi_r = I - T_r$, on a

$$\|\phi_r(x) - \phi(x)\| \leq \varepsilon = \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ et } b \notin \phi_r(\partial\Omega).$$

Définition 1.3.3 *Le degré topologique $d(\phi, \Omega, b)$ est défini par :*

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_r, \Omega, b)$$

1.3.2 Propriétés principales du degré de Leray schauder

1/ Degré de l'identité :

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \Omega \\ 0 & \text{si } b \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$

2/ Propriété d'existence :

Si $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $\phi(x) = b$.

3/ Additivité :

Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1 et Ω_2 deux ouverts disjoints de E et $b \in E \setminus (\phi(\partial\Omega_1) \cup \phi(\partial\Omega_2))$, alors

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega_1, b) + d(\phi, \Omega_2, b).$$

4/ Propriété d'excision :

Si K est un fermé de E inclus dans $\bar{\Omega}$ et $b \notin \phi(K)$ Alors $d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega \setminus K, b)$.

5/ Le degré est constant sur chaque composante connexe de $E \setminus \phi(\partial\Omega)$:

Si b et b' sont dans la même composante connexe de $E \setminus \phi(\partial\Omega)$ alors; $d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega, b')$.

6/ Degré des fonctions qui coïncident sur la frontière :

Soit Ψ une autre perturbation compacte de l'identité $\Psi = I - S$, $S \in Q(\bar{\Omega}, E)$ telle que $\Psi = \phi$ sur $\partial\Omega$ alors $d(\phi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$.

7/ Continuité par rapport à T :

Il existe un voisinage U de T dans $Q(\bar{\Omega}, E)$ tel que pour tout $g = I - f$ où $f \in U$ on a

1. $b \notin g(\partial\Omega)$,

2. $d(\phi, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$.

(En utilisant lemme (1.2.3) , on peut démontrer cette propriété).

8/ Invariance du degré par homotopie :

Soit $H \in C(\bar{\Omega} \times [0, 1], E)$ définit par; $H(x, t) = x - f(x, t)$, $f(., t) \in Q(\bar{\Omega}, E) \forall t \in [0, 1]$, si $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ alors $d(H(., t), \Omega, b)$ est constant sur $[0, 1]$.

(En utilisant le lemme (1.2.4) , on peut démontrer cette propriété).

Théorème 1.3.1 (Schauder [3]) Soit C un sous ensemble non vide convexe, fermé et borné de E , si l'opérateur $T : C \longrightarrow C$ est compact alors T admet au moins un point fixe dans C .

Théorème 1.3.2 (de Continuation de Leray-Schauder [31])

Soient $C \subset E$ un sous ensemble non vide, convexe, fermé et borné et $T : [a, b] \times C \rightarrow C$ un opérateur complètement continu. L'ensemble $S = \{(\lambda, x) \in [a, b] \times C, T(\lambda, x) = x\}$ contient un sous ensemble fermé et connexe qui rencontre à la fois $\{a\} \times C$ et $\{b\} \times C$.

1.3.3 Indice d'une solution isolée

En général, il n'est pas facile de calculer le degré topologique associé à une application relativement à un ouvert et une valeur donnée. Nous allons donner dans cette sous section un exemple où le degré topologique est calculé.

Définition 1.3.4 Soit $b \in E$, une solution x_0 de l'équation $\phi(x) = b$ est dite une isolée s'il existe un voisinage V de x_0 dans E tel que $\phi(x) \neq b, \forall x \in V \setminus \{x_0\}$.

Si $r_0 > 0$ est tel que $B(x_0, r_0) \subset V$ alors la propriété d'excision entraîne que pour tout $r \in]0, r_0[, d(\phi, B(x_0, r_0), b) = d(\phi, B(x_0, r), b)$.

Dans ce cas, l'indice de la solution x_0 est l'entier $i(\phi, x_0, b)$ défini par

$$i(\phi, x_0, b) = d(\phi, B(x_0, r_0), b) = \lim_{r \rightarrow 0} d(\phi, B(x_0, r), b).$$

Définition 1.3.5 Soit $L : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire. $\mu \in \mathbb{R}^*$ est une valeur caractéristique de L si $1/\mu = \lambda$ est une valeur propre de L .

Lemme 1.3.3 Soient $L : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire compact et $\phi = I - L$. Si L n'admet pas 1 comme valeur caractéristique alors :

1. 0 est une solution isolée de l'équation $\phi(x) = 0$
2. $i(\phi, 0, 0) = (-1)^\beta$ où β est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de L comprises entre 0 et 1.

Lemme 1.3.4 Soit V un voisinage de l'origine dans E et $T \in Q(V, E)$ est différentiable au sens de Fréchet à l'origine, (i.e: $\phi = I - T$ est différentiable à l'origine) alors:

- 1/ $T'(0)$ est un opérateur compact.
- 2/ Si $T(0) = 0$ et 1 n'est pas une valeur caractéristique de $T'(0)$ alors 0 est une solution isolée de l'équation $\phi(x) = 0$ et $i(\phi, 0, 0) = (-1)^\beta$ avec $\phi = I - T$, où β est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de $T'(0)$ comprises entre 0 et 1.

Pour plus de détails concernant la théorie du degré topologique, voir [31].

1.4 Indice du point fixe sur les cônes

Dans toute la suite de cette section P désigne un sous ensemble non vide de E , où E est un espace de Banach réel.

1.4.1 Définition de l'indice du point fixe

Définition 1.4.1 *Le sous ensemble P est un cône dans E si P est fermé, convexe et*

1- $\forall \lambda \geq 0 \forall x \in P, \lambda x \in P,$

2- *Si $x \in P$ et $(-x) \in P$ alors $x = 0$*

Définition 1.4.2 *Le sous ensemble P est un retract de E s'il existe une application continue $R : E \longrightarrow P$ telle que $Rx = x$ pour tout $x \in P$. Ainsi l'application R est une retraction de E dans P .*

D'après un théorème d'extension de Dugundji, tout sous ensemble non vide fermé et convexe de E est un retract de E .

Dans la suite de cette section, P désigne un cône de E , Ω est un ouvert borné et non vide de E et $F : \bar{\Omega} \longrightarrow P$ un opérateur complètement continu n'ayant pas de point fixe sur $\partial\Omega$.

Définition 1.4.3 *L'indice du point fixe de l'opérateur T sur Ω relativement à P est l'entier désigné par $i(F, \Omega \cap P, P)$ défini par*

$$i(F, \Omega, P) = d(I - F \circ R, R^{-1}(\Omega \cap P), 0).$$

Remarque 1.4.1 *Cette définition est indépendante du choix de la retraction R . Pour plus de détails, voir [11].*

1.4.2 Propriétés Principales

1/ **Normalisation :**

Si $F(x) = b$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ où $b \in \Omega$ alors $i(F, \Omega \cap P, P) = 1$.

2/ Propriété d'existence :

Si $i(F, \Omega \cap P, P) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega \cap P$ tel que $F(x) = x$.

3/ Propriété d'excision :

Si Ω_1 est un ouvert de E tel que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ et $F(x) \neq x$ pour tout $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1$ alors

$$i(F, \Omega \cap P, P) = i(F, \Omega_1 \cap P, P).$$

4/ Additivité :

Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints de Ω tels que $F(x) \neq x$ pour tout $x \in \bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ alors

$$i(F, \Omega \cap P, P) = i(F, \Omega_1 \cap P, P) + i(F, \Omega_2 \cap P, P).$$

5/ Invariance par homotopie :

Si $h : [0, 1] \times (\bar{\Omega} \cap P) \longrightarrow P$ est complètement continue et $h(t, x) \neq x$ pour tout $(t, x) \in [a, b] \times (\partial\Omega \cap P)$ alors l'indice $i(h(t, \cdot), \Omega \cap P, P)$ est indépendante de $t \in [0, 1]$.

Pour démontrer ces propriétés, on utilise les propriétés du degré topologique.

Théorème 1.4.1 (Krasnoselskii) Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés de E tels que $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Supposons que $T : P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \longrightarrow P$ est un opérateur complètement continue vérifiant l'une des conditions suivantes

$$i) \quad \|T(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \quad \text{et} \quad \|T(x)\| \geq \|x\| \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2,$$

$$ii) \quad \|T(x)\| \geq \|x\| \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \quad \text{et} \quad \|T(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in P \cap \partial\Omega_2.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Définition 1.4.4 Soit $\psi : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. ψ est dite concave si pour tout $(t, x, y) \in [0, 1] \times P \times P$

$$\psi(tx + (1-t)y) \geq t\psi(x) + (1-t)\psi(y).$$

Pour a, b et c dans $\mathbb{R}_+^*$, on convient de noter par

$$P_c = \{x \in P / \|x\| < c\}$$

et

$$P(\psi, a, b) = \{x \in P / \|x\| \leq b, \psi(x) \geq a\}.$$

Théorème 1.4.2 (*Leggett-Williams [19]*) Soient $T : \bar{P}_c \longrightarrow \bar{P}_c$ un opérateur complètement continu et ψ une fonctionnelle positive, continue et concave sur P telle que pour tout $x \in \bar{P}_c$ $\psi(x) \leq \|x\|$. S'il existe trois nombres réels a, b et d avec $0 < a < b < d \leq c$ et tels que

C1) $P(\psi, b, d) \neq \emptyset$ et $\psi(Tx) > b$ pour tout $x \in P(\psi, b, d)$,

C2) Pour tout $x \in E$, $\|x\| \leq a$ implique $\|Tx\| < a$ et

C3) Pour tout $x \in P(\psi, b, c)$, $\|T(x)\| > d$ implique $\psi(T(x)) > b$.

Alors T admet au moins trois points fixes x, y et z tels que $\|x\| < a$, $\psi(y) > b$ et $\|z\| > a$ avec $\psi(z) < b$.

Théorème 1.4.3 Soient $r > 0$ et $\Omega = \{x \in E / \|x\| < r\}$, supposons que $T : \bar{\Omega} \longrightarrow P$ est un opérateur complètement continu tel que $T(x) \neq x$ pour tout $x \in P \cap \partial\Omega$ alors;

i) Si $\|T(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in P \cap \partial\Omega$ alors $i(T, P \cap \Omega, P) = 1$,

ii) Si $\|T(x)\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in P \cap \partial\Omega$ alors $i(T, P \cap \Omega, P) = 0$.

En utilisant les propriétés de l'indice du point fixe sur P , on peut démontrer ce théorème (Voir [11]).

Chapitre 2

Résultats d'existence et de multiplicité de solutions positives

2.1 Solutions positives pour un problème aux limites à m points

2.1.1 Introduction

Dans cette section, on se propose d'examiner l'existence de solution positive du problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda a(t)f(u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) = 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où λ est un paramètre réel strictement positive, $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et est non identiquement nulle sur tout sous intervalle de $[0, 1]$, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue telle que $f(t) > 0$ pour tout $t > 0$, les familles $(\xi_i)_{i=1}^{i=m-2}$ et $(a_i)_{i=1}^{i=m-2}$ sont telles que

$$\begin{aligned} & 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1, \\ & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, m-2\} \quad a_i \geq 0, \quad a_{m-2} > 0 \text{ et} \\ & \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i < 1. \end{aligned}$$

Ce problème a été étudié par Yongping Sun [35].

Dans le cas où $\lambda = 1$ et $m = 3$, R. Ma [27] a montré que le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive lorsque f est sur-linéaire (i.e $(f_0, f_\infty) = (0, \infty)$) ou f est sous-linéaire (i.e $(f_0, f_\infty) = (\infty, 0)$) où

$$f_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ et } f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t}.$$

Les résultats que nous allons prouver fourniront des intervalles des valeurs du paramètre λ , dans lesquels on a existence d'une ou plusieurs solutions positives du problème (2.1.1). Après formulation en une équation au point fixe, le théorème de Krasnoselskii est utilisé pour montrer l'existence d'une ou plusieurs solutions au problème (2.1.1).

2.1.2 Formulation en un problème du point fixe

Dans la suite de cette section, E désigne l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|$. E^+ et K sont les cônes définis par

$$\begin{aligned} E^+ &= \{u \in E \text{ telle que } u \geq 0\}, \\ K &= \left\{u \in E^+ \text{ telle que } \min_{[\xi_{m-2}, 1]}(u(t)) \geq \gamma \|u\|\right\} \text{ où} \\ \gamma &= \min \left\{ \xi_1, a_{m-2} \xi_{m-2}, \frac{a_{m-2}(1 - \xi_{m-2})}{1 - a_{m-2} \xi_{m-2}} \right\}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda > 0$, $T_\lambda : K \longrightarrow C([0, 1])$ est l'opérateur défini par ;

$$T_\lambda u(t) = \alpha t \left[A_\lambda u(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i A_\lambda u(\xi_i) \right] - A_\lambda u(t)$$

où $\alpha = \left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i\right)^{-1}$ et

$$A_\lambda u(t) = \int_0^t (t-s) \lambda a(s) f(u(s)) ds \text{ sur } [0, 1].$$

Pour des raisons de simplicité, on pose

$$\begin{aligned} A &= \alpha \int_0^1 (1-s) a(s) ds \text{ et} \\ B &= \xi_1 \alpha \left(\sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i \right) \int_{\xi_{m-2}}^1 (1-s) a(s) ds. \end{aligned}$$

h et $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies par :

$$h(m) = \frac{m}{A. \max_{s \in [0, m]} f(s)} \text{ et } g(m) = \frac{m}{B. \min_{s \in [\gamma m, m]} f(s)}.$$

Lemme 2.1.1 u est solution du problème (2.1.1) si et seulement si u est un point fixe de T_λ .

Preuve. Soit u est une solution du problème (2.1.1). En intégrant deux fois l'équation différentielle dans (2.1.1) et en tennant compte de $u(0) = 0$ on obtient pour tout $t \in [0, 1]$

$$u(t) = u'(0)t + \int_0^t \left(\int_0^s (-\lambda a(w)f(u(w))dw \right) ds \quad (2.1.2)$$

En particulier on a

$$u(1) = u'(0) + \int_0^1 \left(\int_0^s (-\lambda a(w)f(u(w))dw \right) ds \quad (2.1.3)$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, m-2\}$

$$u(\xi_i) = u'(0)\xi_i + \int_0^{\xi_i} \left(\int_0^s -\lambda a(w)f(u(w))dw \right) ds. \quad (2.1.4)$$

En multipliant (2.1.4) par a_i et en sommant sur i , on arrive à

$$u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) = u'(0) \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} \left(\int_0^s -\lambda a(w)f(u(w))dw \right) ds. \quad (2.1.5)$$

En injectant (2.1.5) dans (2.1.3) on obtient

$$u'(0) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \left(\sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} \int_0^s -\lambda a(w)f(u(w))ds - \int_0^1 \left(\int_0^s -\lambda a(w)f(u(w))dw \right) ds \right).$$

En intégrant par parties dans la formule ci dessus, il s'en suit

$$u'(0) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \left(A_\lambda u(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i A_\lambda u(\xi_i) \right). \quad (2.1.6)$$

En injectant (2.1.6) dans (2.1.2) et en intégrant par parties, il vient que u est un point fixe de T_λ .

Réciproquement, soit u est un point fixe de T_λ , en dérivant deux fois les membres de l'équation $u = T_\lambda u$, on obtient $u''(w) = -\lambda a(w)f(u(w))$ pour tout $w \in]0, 1[$.

Il est clair que $u(0) = 0$, il reste donc à montrer que $u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i)$.

Posons

$$X = \sum_{i=1}^{m-2} a_i A_\lambda u(\xi_i) \text{ et } Z = A_\lambda u(1).$$

En multipliant par a_j l'expression $u(\xi_j) = T_\lambda u(\xi_j)$ et en sommant sur j , on obtient

$$\sum_{j=1}^{m-2} a_j u(\xi_j) = \alpha (Z - X) \left(\sum_{j=1}^{m-2} a_j \xi_j \right) - X.$$

D'autre part l'expression $u(1) = T_\lambda u(1)$ s'écrit

$$u(1) = \alpha (Z - X) - Z.$$

Ainsi un calcul direct donne $u(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) = 0$. ■

Lemme 2.1.2 *L'opérateur T_λ est complètement continu sur K .*

Preuve. i) Continuité : En fait, il suffit de montrer que l'opérateur A_λ est continu.

Soit $u \in K$ et $(u_n)_n$ une suite qui converge vers u dans E . Posons $\omega = \max \{\|u\|, \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|\}$, $\theta = \lambda \int_0^1 (1-s)a(s)ds$.

Puisque la fonction f est uniformément continue sur $[0, \omega]$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, y dans $[0, \omega]$,

$$|x - y| < \delta \text{ implique } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Aussi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\|u_n - u\| < \delta \text{ entraîne } \|f(u_n) - f(u)\| < \frac{\epsilon}{\theta}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$|A_\lambda u_n(t) - A_\lambda u(t)| \leq \theta \|f(u_n) - f(u)\| < \epsilon.$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(u_n) = T_\lambda(u)$.

ii) Compacité :

Soient $r > 0$ et $B = B(0, r) \cap K$. Dans le but d'utiliser le théorème d'ASCOLI-ARZÉLA, nous allons montrer d'abord que $T_\lambda(B)$ est un ensemble équicontinu. Pour tout w et z dans $[0, 1]$, $w < z$ et $u \in B$

$$\begin{aligned} T_\lambda(u)(w) - T_\lambda(u)(z) &= \alpha(w - z) \left[A_\lambda u(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i A_\lambda u(\xi_i) \right] \\ &\quad - \lambda \left[\int_0^z (w - z) a(s) f(u(s)) ds - \int_z^w (w - s) a(s) f(u(s)) ds \right]. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Si on pose

$$c = m \left[2 + \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i^2 \right) \right] \text{ où } m = \max_{(s,x) \in [0,1] \times [0,r]} \{ \lambda a(s) f(x) \},$$

il découle alors de (2.1.7) que pour tout $w, z \in [0, 1]$

$$|T_\lambda(u)(w) - T_\lambda(u)(z)| \leq c |w - z|.$$

Ceci signifie que $T_\lambda(B)$ est équicontinu. En dernier, pour tout $u \in B$ et $t \in [0, 1]$, $|T_\lambda(u)(t)| \leq c$ et d'après le théorème (4.3.4) d'Ascoli Arzela, l'opérateur T_λ est complètement continu. ■

Lemme 2.1.3 Soit $u \in C([0, 1])$ une fonction concave. Si u vérifie les conditions aux limites du problème (2.1.1) alors $u(t)$ est positive et vérifie l'inégalité :

$$\min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) \geq \gamma \|u\|$$

$$\text{où } \gamma = \min \left\{ \xi_1, a_{m-2} \xi_{m-2}, \frac{a_{m-2}(1 - \xi_{m-2})}{1 - a_{m-2} \xi_{m-2}} \right\}.$$

Preuve. Montrons tout d'abord que u est positive. Puisque u est concave, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\frac{u(1) - u(t)}{1 - t} \leq \frac{u(t)}{t}$$

ou encore

$$u(t) \geq tu(1). \quad (2.1.8)$$

Ainsi pour montrer que u est positive, il suffit de vérifier que $u(1) \geq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $u(1) < 0$. Il vient de (2.1.8) que pour tout $i \in \{1, \dots, m-2\}$

$$\xi_i u(1) \leq u(\xi_i). \quad (2.1.9)$$

En multipliant (2.1.9) par a_i et en sommant sur i on arrive à

$$u(1) \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i \leq \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) = u(1)$$

ce qui contredit $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i < 1$.

Montrons maintenant que

$$\min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) \geq \gamma \|u\|.$$

Si $w \in]0, 1]$ est tel que $u(w) = \|u\|$, on distingue alors les quatre cas suivants:

- Si $\xi_{m-2} > w$, la concavité de u entraîne alors que

$$\frac{u(1) - u(\xi_{m-2})}{1 - \xi_{m-2}} \leq \frac{u(\xi_{m-2}) - u(w)}{\xi_{m-2} - w}$$

puis

$$u(w) \leq \frac{1}{1 - \xi_{m-2}} [u(\xi_{m-2}) \cdot \frac{1 - w}{\xi_{m-2} - w} - u(1)]. \quad (2.1.10)$$

En tenant compte de

$$u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) \geq a_{m-2} u(\xi_{m-2})$$

on obtient de (2.1.10)

$$\begin{aligned} u(w) &\leq \frac{1}{1 - \xi_{m-2}} [u(\xi_{m-2}) \cdot \frac{1 - w}{\xi_{m-2} - w} - a_{m-2} u(\xi_{m-2})] \\ &\leq u(\xi_{m-2}) \left[\frac{1 - a_{m-2} \xi_{m-2}}{1 - \xi_{m-2}} \right]. \end{aligned}$$

Par suite

$$\min_{[\xi_{m-2}, 1]} \{u(t)\} = u(1) \geq a_{m-2} \cdot u(\xi_{m-2}) \geq u(w) \cdot \left[\frac{1 - \xi_{m-2}}{1 - a_{m-2} \xi_{m-2}} \cdot a_{m-2} \right],$$

c'est à dire

$$\min_{[\xi_{m-2}, 1]} \{u(t)\} \geq \|u\| \cdot \left[\frac{1 - \xi_{m-2}}{1 - a_{m-2} \xi_{m-2}} \cdot a_{m-2} \right].$$

- Si $\xi_{m-2} < w < 1$, alors $\min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) \in \{u(1), u(\xi_{m-2})\}$. De plus, la concavité de u entraîne pour tout $i \in \{1, \dots, m-2\}$

$$u(\xi_i) \geq \xi_i u(w).$$

ce qui implique

$$u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) \geq u(w) \cdot \sum_{i=1}^{m-2} a_i \cdot \xi_i \geq u(w) \cdot a_{m-2} \xi_{m-2} \text{ et}$$

Ainsi $\min_{t \in [\xi_{m-2}, 1]} u(t) \geq \|u\| \min \{a_{m-2} \xi_{m-2}, \xi_1\} \geq \gamma \|u\|$.

- Si $\xi_{m-2} = w$:

$$\min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) = u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) \geq a_{m-2} u(\xi_{m-2}) = a_{m-2} \|u\| \geq a_{m-2} \xi_{m-2} \|u\|.$$

• Si $w = 1$ alors $\min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) = u(\xi_{m-2})$ et en remplaçant par $t = \xi_{m-2}$ dans (2.1.8) on obtient $u(\xi_{m-2}) \geq \xi_{m-2} u(1) = \xi_{m-2} \|u\|$. D'où

$$\min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) \geq \xi_1 \|u\|.$$

■

Remarque 2.1.1 On déduit du lemme précédent que $T_\lambda(K) \subset K$.

Lemme 2.1.4 Soit $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, \infty[$. La fonction p définie par $p(m) = \min_{t \in [\gamma m, m]} h(t)$ avec $\gamma \in [0, 1[$, est continue sur $[0, \infty[$.

Pour la preuve de ce lemme, voir l'annexe.

Lemme 2.1.5 Pour tout $u \in K$,

$$\|T_\lambda u\| \geq \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_1 \int_{\xi_{m-2}}^1 (1-s) \cdot a(s) \cdot f(u(s)) ds \right].$$

Preuve. Soit $u \in K$. Puisque

$$T_\lambda u(1) = \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \left(\int_0^1 (1-s) \xi_i \cdot a(s) f(u(s)) ds - \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) a(s) f(u(s)) ds \right) \right],$$

on a

$$\begin{aligned} T_\lambda u(1) &= \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \left(\int_{\xi_i}^1 \xi_i \cdot a(s) f(u(s)) ds - \int_0^1 \xi_i \cdot s \cdot a(s) f(u(s)) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\xi_i} s \cdot a(s) f(u(s)) ds \right) \right], \end{aligned}$$

ou encore

$$T_\lambda u(1) \geq \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \left(\int_{\xi_i}^1 \xi_i \cdot a(s) f(u(s)) ds - \int_0^1 \xi_i \cdot s \cdot a(s) f(u(s)) ds \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{\xi_i} \xi_i \cdot s \cdot a(s) f(u(s)) ds \right) \right] \quad (2.1.11)$$

et avec le fait que $\xi_1 \leq \xi_i \leq \xi_{m-2}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-2\}$, l'inégalité (2.1.11) entraîne

$$\|T_\lambda u\| \geq \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_1 \int_{\xi_{m-2}}^1 (1-s) \cdot a(s) f(u(s)) ds \right].$$

■

2.1.3 Résultats principaux

Théorème 2.1.1 *S'il existe deux constantes réelles positives R_1 et R_2 , telles que $0 < R_1 < \gamma R_2$ et vérifiant*

$$\begin{cases} f(x) \leq \frac{R_1}{\lambda A} \quad \forall x \in [0, R_1] \text{ et} \\ f(x) \geq \frac{R_2}{\lambda B} \quad \forall x \in [\gamma R_2, R_2] \end{cases}$$

alors le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive $u \in K$ telle que, $\|u\| \in [R_1, R_2]$.

Preuve. Posons $\Omega_1 = B(0, R_1)$ et $\Omega_0 = B(0, R_2)$.

Si $u \in K \cap \partial\Omega_1$ alors pour tout $t \in [0, 1]$,

$$T_\lambda u(t) \leq \alpha \lambda \left[\int_0^1 (1-s) a(s) \left(\frac{R_1}{\lambda A} \right) ds \right] = R_1,$$

et donc $\|T_\lambda u\| \leq \|u\|$.

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors pour tout $s \in [\xi_{m-2}, 1]$

$$u(s) \geq \min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) \geq \gamma \|u\| = \gamma R_2.$$

Ainsi $f(u(s)) \geq \frac{R_2}{\lambda B}$ pour tout $s \in [\xi_{m-2}, 1]$ et

$$\begin{aligned} T_\lambda u(1) &= \sum_{i=1}^{m-2} a_i T_\lambda u(\xi_i) \geq \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \left(\int_{\xi_i}^1 \xi_i \cdot (1-s) a(s) f(u(s)) ds \right) \right] \\ &\geq \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_1 \int_{\xi_{m-2}}^1 (1-s) \cdot a(s) \frac{R_2}{\lambda B} ds \right] = R_2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\|T_\lambda u\| \geq \|u\|.$$

En conclusion, la condition (i) du théorème (1.4.1) de Krasnoselskii est vérifiée. Par conséquent l'opérateur T_λ admet un point fixe dans $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ qui est d'après le lemme 2.1.1 solution positive du problème (2.1.1). ■

Théorème 2.1.2 *S'il existe deux constantes réelles positives R_1 et R_2 telles que $R_1 > R_2 > 0$, $B.R_1 > A.R_2$ et vérifiant*

$$\begin{cases} f(x) \leq \frac{R_1}{\lambda A} \quad \forall x \in [0, R_1] \text{ et} \\ f(x) \geq \frac{R_2}{\lambda B} \quad \forall x \in [\gamma R_2, R_2] \end{cases}$$

alors le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive $u \in K$ telle que,

$$R_2 \leq \|u\| \leq R_1.$$

Preuve. Posons $\Omega_1 = B(0, R_2)$ et $\Omega_2 = B(0, R_1)$.

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors pour tout $t \in [0, 1]$

$$T_\lambda u(t) \leq \alpha \lambda \left[\int_0^1 (1-s)a(s) \left(\frac{R_1}{\lambda A} \right) ds \right] = R_1$$

c'est à dire $\|T_\lambda u\| \leq \|u\|$.

Si $u \in K \cap \partial\Omega_1$, alors pour tout $s \in [\xi_{m-2}, 1]$

$$u(s) \geq \min_{[\xi_{m-2}, 1]} (u(t)) \geq \gamma \|u\| = \gamma R_2,$$

d'où $f(u(s)) \geq \frac{R_2}{\lambda B}$ pour tout $s \in [\xi_{m-2}, 1]$ et

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u\| &\geq T_\lambda u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i T_\lambda u(\xi_i) \\ &\geq \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i \int_{\xi_{m-2}}^1 (1-s)a(s) f(u(s)) ds \right] \\ &\geq \alpha \lambda \left[\sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i \int_{\xi_{m-2}}^1 (1-s)a(s) \frac{R_2}{\lambda B} ds \right] = R_2 \end{aligned}$$

et ainsi on a

$$\|T_\lambda u\| \geq \|u\|.$$

Du théorème (1.4.1) de Krasnoselskii, on déduit que T_λ admet un point fixe dans $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ qui est d'après le lemme (2.1.1) solution positive du problème (2.1.1). ■

Corollaire 2.1.1 *Si f_0 et f_∞ sont strictement positifs et $Af_0 < \gamma Bf_\infty$, alors pour tout $\lambda \in]\frac{1}{\gamma Bf_\infty}, \frac{1}{Af_0}[$ le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive.*

Preuve. Soit $\lambda \in]\frac{1}{\gamma Bf_\infty}, \frac{1}{Af_0}[$. Si on choisit ϵ tel que

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ f_\infty - \frac{1}{\lambda \gamma B}, \frac{1}{\lambda A} - f_0, f_0 \right\},$$

alors $\lambda \in [\frac{1}{\gamma B(f_\infty - \epsilon)}, \frac{1}{A(f_0 + \epsilon)}]$.

D'après la définition de f_0 , il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]0, R_1]$,

$$f(x) < (f_0 + \epsilon)x \leq \frac{R_1}{A\lambda}.$$

D'autre part, puisque $f_\infty > 0$, il existe $\bar{R}_2 > 0$ tel que pour tout $x \geq \bar{R}_2$

$$f(x) \geq (f_\infty - \epsilon)x$$

Si on pose $R_2 = \max \{ \gamma^{-1}R_1, \gamma^{-1}\bar{R}_2 \}$, alors pour tout $x \in [\gamma R_2, R_2]$.

$$f(x) \geq \frac{1}{\gamma B\lambda}x \geq \frac{R_2}{B\lambda}.$$

Les conditions du théorème (2.1.1) sont satisfaites. Par conséquent le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive $u \in K$ telle que $R_1 \leq \|u\| \leq R_2$. ■

Corollaire 2.1.2 *Si f_0 et f_∞ sont strictement positifs et $A.f_\infty < \gamma.B.f_0$ alors pour tout $\lambda \in]\frac{1}{\gamma Bf_0}, \frac{1}{Af_\infty}[$ le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive.*

Preuve. En effet, soit $\lambda \in]\frac{1}{\gamma Bf_0}, \frac{1}{Af_\infty}[$, si on choisit ϵ tel que

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ f_0 - \frac{1}{\lambda \gamma B}, \frac{1}{A\lambda} - f_\infty \right\},$$

alors $\lambda \in [\frac{1}{\gamma B(f_0 - \epsilon)}, \frac{1}{A(f_\infty + \epsilon)}]$.

Puisque $f_0 = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{f(c)}{c}$, il existe $R_2 > 0$ (assez petit) tel que, pour tout $x \in [\gamma R_2, R_2]$

$$f(x) \geq (f_0 - \epsilon)x \geq \frac{R_2}{B.\lambda}.$$

D'autre part, il existe $R_0 > R_2$ tel que pour tout $x \in [R_0, \infty[$

$$f(x) \leq (f_\infty + \epsilon)x \leq \frac{1}{A\lambda}x.$$

Ainsi, si on choisit $R_1 > \max \left\{ R_0, \lambda AM, \frac{A.R_2}{B} \right\}$ où $M = \max_{[0, R_0]} f(x)$, on a alors

$$f(x) \leq \frac{R_1}{\lambda A} \text{ pour tout } x \in [0, R_1].$$

Il est clair ainsi que les conditions du théorème (2.1.2) sont satisfaites. Par conséquent le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive $u \in K$ avec $\|u\| \in [R_2, R_1]$. ■

Corollaire 2.1.3 *Si la fonction f vérifie l'une des conditions suivantes,*

1/ f est sous-linéaire, c'est-à-dire que $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$ ou

2/ f est sur-linéaire, c'est-à-dire que $f_\infty = \infty$ et $f_0 = 0$.

Alors pour tout $\lambda \in]0, \infty[$, le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive.

Preuve. 1) Le cas sous-linéaire.

On déduit des définitions de f_0 et de f_∞ qu'il existe deux constantes positives R_2 et R_0 telles que

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda\gamma B}x \geq \frac{R_2}{\lambda B} \quad \forall x \in [\gamma R_2, R_2]$$

et

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{\lambda A}\right)x \quad \forall x \in [0, R_0].$$

Si on choisit

$$R_1 > \max \left\{ R_0, \lambda AM, \frac{A.R_2}{B} \right\}$$

où $M = \max_{[0, R_0]} f(x)$ alors on vérifie facilement que les conditions du théorème (2.1.2) sont satisfaites et par conséquent le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive $u \in K$ telle que $\|u\| \in [R_2, R_1]$.

2) Le cas sur-linéaire:

On déduit des définitions de f_0 et de f_∞ qu'il existe deux constantes positives R_1 et $R_2 > \gamma^{-1}R_1$ telles que

$$f(x) \leq \frac{1}{\lambda A}x \leq \frac{R_1}{\lambda A} \text{ pour tout } x \in [0, R_1]$$

et

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda B \cdot \gamma} x \geq \frac{R_2}{\lambda B} \text{ pour tout } x \in [\gamma R_2, R_2].$$

D'après le théorème (2.1.1) , le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive $u \in K$ telle que, $\|u\| \in [R_1, R_2]$. ■

Corollaire 2.1.4 Si $f_0 = \infty$ et $f_\infty > 0$ (Resp. $f_\infty = \infty$ et $f_0 \in]0, \infty[$), alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda^*[$, le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive.

Preuve. D'après le lemme (2.1.4) la fonction $h(m) = \frac{m}{A \max_{s \in [0, m]} f(s)}$ est continue et bornée sur $]0, \infty[$. Soit $\lambda \in]0, \lambda^*[$ où $\lambda^* = \sup_{]0, \infty[} h(m) = h(m_0)$, $m_0 \in]0, \infty[$.

1/ Si $f_0 = \infty$ et $f_\infty > 0$, alors

$$\lim_{m \rightarrow 0} h(m) = 0. \quad (2.1.12)$$

Ceci entraîne l'existence d'une constante positive $c_0 < m_0$ telle que $h(c_0) = \lambda$. Ainsi pour tout $x \in [0, c_0]$, $f(x) \leq \max_{[0, c_0]} f(s) = \frac{c_0}{\lambda A}$.

D'autre part, puisque $f_0 = \infty$, si on choisit $\epsilon = \frac{1}{\lambda \gamma B}$ alors il existe $d_0 < \min \left\{ c_0, \frac{B \cdot c_0}{A} \right\}$ tel que pour tout $x \in]0, d_0]$

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda \gamma B} x \geq \frac{d_0}{\lambda B} \forall x \in [\gamma d_0, d_0].$$

Ainsi les conditions du théorème (2.1.2) sont satisfaites et le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive .

2/ Si $f_\infty = \infty$ et $f_0 > 0$ alors $\lim_{m \rightarrow \infty} h(m) = 0$, ce qui entraîne l'existence d'une constante $c_1 > m_0$ tel que $h(c_1) = \lambda$. D'où

$$f(x) \leq \max_{[0, c_1]} f(s) = \frac{c_1}{\lambda A}, \forall x \in [0, c_1].$$

D'autre part, puisque $f_\infty = \infty$, si on choisit $\epsilon = \frac{1}{\lambda \gamma B}$ il existe alors $d_1 > \frac{c_1}{\gamma}$ tel que

$$f(x) \geq \frac{x}{\lambda \gamma B} \geq \frac{d_1}{\lambda B} \forall x \in [\gamma d_1, d_1].$$

Ainsi les conditions du théorème (2.1.1) sont satisfaites par conséquent le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive . ■

Corollaire 2.1.5

1/ Si $f_0 = 0$ et $f_\infty \in]0, \infty[$ alors pour tout $\lambda \in]\frac{1}{\gamma B f_\infty}, \infty[$, le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive.

2/ Si $f_0 \in]0, \infty[$ et $f_\infty = 0$ alors pour tout $\lambda \in]\frac{1}{\gamma B f_0}, \infty[$, le problème (2.1.1) admet au moins une solution positive.

Preuve. **1/** Si on choisit ϵ tel que $0 < \epsilon \leq f_\infty - \frac{1}{\lambda \gamma B}$, il vient alors $]\frac{1}{\gamma B f_\infty}, \infty[\subset]\frac{1}{\gamma B (f_\infty - \epsilon)}, \infty[$. On déduit de la définition de f_0 l'existence d'une constante $R_1 > 0$ telle que

$$f(x) \leq \frac{1}{\lambda A} x \leq \frac{R_1}{\lambda A} \forall x \in [0, R_1].$$

La définition de f_∞ entraîne qu'il existe $\bar{R}_2 > 0$ tel que

$$f(x) \geq (f_\infty - \epsilon)x \geq \frac{1}{\lambda \gamma B} x, \forall x \geq \bar{R}_2.$$

Si on prend $R_2 > \max \{ \gamma^{-1} R_1, \gamma^{-1} \cdot \bar{R}_2 \}$, on a alors

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda \gamma B} x \geq \frac{R_2}{\lambda B} \forall x \geq \gamma \cdot R_2.$$

Ainsi le théorème (2.1.1) assure l'existence d'au moins une solution positive du problème (2.1.1).

2/ Si on choisit ϵ tel que $0 < \epsilon \leq f_0 - \frac{1}{\lambda \gamma B}$, on a alors $]\frac{1}{\gamma B f_0}, \infty[\subset]\frac{1}{\gamma B (f_0 - \epsilon)}, \infty[$.

La définition de f_0 entraîne qu'il existe $R_2 > 0$ tel que

$$f(x) \geq (f_0 - \epsilon)x \geq \frac{1}{\lambda \gamma B} x \geq \frac{R_2}{\lambda B} \forall x \in [\gamma R_2, R_2].$$

$\forall x \in [\gamma R_2, R_2]$ donc $f(x) \geq \frac{R_2}{\lambda B}$

Aussi d'après la définition de f_∞ , il existe $R_0 > 0$ tel que

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{\lambda A} \right) \cdot x, \forall x \in [R_0, \infty[.$$

En prenant $R_1 > \max \{ R_0, \lambda A M, \frac{A \cdot R_2}{B} \}$ où $M = \max_{[0, R_0]} f(x)$, on a alors

$$f(x) \leq \frac{R_1}{\lambda A} \text{ pour tout } x \in [0, R_1],$$

car $f(x) \leq \frac{\lambda A M}{\lambda A} \leq \frac{R_1}{\lambda A}$ si $x \in [0, R_0]$ et $f(x) \leq \frac{1}{\lambda A} x \leq \frac{R_1}{\lambda A}$ si $x \in [R_0, R_1]$.

Ainsi le théorème (2.1.2) assure l'existence d'une solution positive du problème (2.1.1).

■

Corollaire 2.1.6 *Supposons que $f_0 = f_\infty = \infty$, alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda^*[$, le problème (2.1.1) admet au moins deux solutions positives.*

Preuve. Il vient du fait que $f_\infty = f_0 = \infty$ que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h(m) = \lim_{m \rightarrow 0} h(m) = 0. \quad (2.1.13)$$

On déduit ainsi de (2.1.13) qu'il existe $m_0 > 0$ tel que

$$h(m_0) = \sup_{]0, \infty[} h(m) = \lambda^*$$

et que pour $\lambda \in]0, \lambda^*[$ il existe deux nombres réels $c_1 < m_0 < c_2$ tels que $h(c_2) = \lambda = h(c_1)$ et

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{c_1}{Ah(c_1)} = \frac{c_1}{A \cdot \lambda} \text{ pour tout } x \in [0, c_1] \\ f(x) &\leq \frac{c_2}{Ah(c_2)} = \frac{c_2}{A \cdot \lambda} \text{ pour tout } x \in [0, c_2]. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $f_0 = f_\infty = \infty$, il existe deux nombres réels $d_1 < \min\{c_1, \frac{B \cdot c_1}{A}\}$ et $d_2 > \frac{c_2}{\gamma}$ tels que

$$\begin{cases} f(x) \geq \frac{d_1}{\lambda B} & \text{pour tout } x \in [\gamma d_1, d_1] \\ f(x) \geq \frac{d_2}{\lambda B} & \text{pour tout } x \in [\gamma d_2, d_2] \end{cases}$$

Ainsi, les théorèmes (2.1.1) et (2.1.1) assurent l'existence de deux solutions positives u_1, u_2 telles que $\|u_1\| \in [d_1, c_1]$ et $\|u_2\| \in [c_2, d_2]$. ■

Corollaire 2.1.7 *Si $f_0 = f_\infty = 0$, alors il existe $\lambda^{**} > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]\lambda^{**}, \infty[$, le problème (2.1.1) admet au moins deux solutions positives.*

Preuve. Puisque $f_\infty = 0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g(m) = \infty.$$

Le lemme (2.1.4) et le fait que $f_0 = 0$ impliquent que g est continue sur $]0, \infty[$ et que

$$\lim_{m \rightarrow 0} g(m) = \infty.$$

Soit $m_0 \in]0, \infty[$ tel que $g(m_0) = \inf_{]0, \infty[} g(m)$ et posons $\lambda^{**} = h(m_0)$. Soit $\lambda \in]\lambda^{**}, \infty[$, puisque $\lim_{m \rightarrow \infty} g(m) = \infty$ et $\lim_{m \rightarrow 0} g(m) = \infty$, il existe deux nombres réels $c_1 < m_0 < c_2$ tels que $g(c_2) = \lambda = g(c_1)$. Cela entraîne

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{c_1}{B \cdot g(c_1)} = \frac{c_1}{\lambda B} \quad \text{pour tout } x \in [\gamma c_1, c_1] \\ f(x) &\geq \frac{c_2}{B \cdot g(c_2)} = \frac{c_2}{\lambda B} \quad \text{pour tout } x \in [\gamma c_2, c_2]. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $f_0 = f_\infty = 0$, il existe deux nombres réels d_1, d_2 $d_1 < \min \left\{ c_1, \frac{B \cdot c_1}{A} \right\}$ et $d_2 > \frac{c_2}{\gamma}$ tels que

$$\begin{cases} f(x) \leq \frac{d_1}{\lambda A} & \forall x \in [\gamma d_1, d_1] \\ f(x) \leq \frac{d_2}{\lambda A} & \forall x \in [\gamma d_2, d_2] \end{cases}$$

Ainsi les théorèmes (2.1.1) et (2.1.2) assurent l'existence de deux solutions positives u_1, u_2 telles que $\|u_1\| \in [d_1, c_1]$ et $\|u_2\| \in [c_2, d_2]$. ■

2.2 Existence de trois solutions positives pour un problème aux limites à trois points

2.2.1 Introduction

On se propose d'étudier le problème aux limites à trois points :

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où les paramètres réels α et η sont strictement positif avec $\eta < 1$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue telle que la fonction $f(., 0)$ n'est pas identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Ce problème a été étudié par Xiaoming He et Weigao Ge [12].

Dans [25], Ruyun Ma a étudié le problème (2.2.1) dans le cas où $f(t, x) = \lambda h(t)g(x)$. Il a donné un résultat d'existence d'une solution positive par la méthode des sous et sur solutions et en utilisant les propriétés d'indice du point fixe.

Sous certaines hypothèses sur f , on démontrera l'existence de trois solutions positives du problème (2.2.1).

2.2.2 Formulation en un problème du point fixe

Dans la suite E désigne l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|u\| = \max \{|u(t)|, t \in [0, 1]\}$ et P est le cône

$$P = \{u \in E \text{ telle que } u \text{ est positive et concave}\}.$$

On considère la fonctionnelle Ψ et l'opérateur T définis sur P de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \min_{[\eta, 1]} u(t), \\ Tu(t) &= -Au(t) + \frac{t}{1 - \alpha\eta} [Au(1) - \alpha Au(\eta)] \end{aligned}$$

$$\text{où } Au(t) = \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds.$$

Remarque 2.2.1 On peut facilement vérifier que la fonctionnelle Ψ est continue, concave sur P et vérifie $\Psi(u) \leq \|u\|$ pour tout $u \in P$.

Lemme 2.2.1

1/ u est une solution du problème (2.2.1) si et seulement si $Tu = u$.

2/ $T : P \longrightarrow P$ est complètement continu.

Lemme 2.2.2 Soit $u \in C([0, 1])$ une fonction concave. Si u vérifie les conditions aux limites du problème (2.2.1), alors

$$u \geq 0 \text{ et } \min_{t \in [\eta, 1]} u(t) \geq \gamma \|u\|, \text{ où } \gamma = \min \left\{ \alpha\eta, \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} \right\}.$$

Remarque 2.2.2

1. Les lemmes (2.2.1) et (2.2.2) ont été démontrés dans la première section (pour $m = 3$).

2. On a vu aussi dans la section précédente que pour tout $u \in P$

$$\frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta} \int_{\eta}^1 (1-s)f(s, u(s))ds \leq \|Tu\| \leq \frac{1}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds.$$

Dans toute la suite de cette section les constantes m et δ sont données par

$$m = 2(1-\alpha\eta) \text{ et } \delta = \gamma \left[\frac{\alpha\eta(1-\eta)^2}{2(1-\alpha\eta)} \right].$$

Pour $b > 0$ et $c > 0$, on définit les ensembles

$$P_c = \{x \in P / \|x\| < c\} \text{ et}$$

$$P(\Psi, b, c) = \{x \in P, \Psi(x) \geq b \text{ et } \|x\| \leq c\}.$$

2.2.3 Résultat principal

Théorème 2.2.1 Supposons qu'il existe trois nombres réels a, b et c avec $0 < a < b < \frac{b}{\gamma} \leq c$ tels que

d1) $f(t, x) < ma \ \forall (t, x) \in [0, 1] \times [0, a]$

d2) $f(t, x) > \frac{b}{\delta} \ \forall (t, x) \in [\eta, 1] \times [b, \frac{b}{\gamma}]$

d3) $f(t, x) < mc \ \forall (t, x) \in [0, 1] \times [0, c]$

Alors le problème (2.2.1) admet au moins trois solutions positives u_1, u_2 et u_3 avec

$$\|u_1\| < a, \min_{t \in [\eta, 1]} \{u_2(t)\} > b, \|u_3\| > a \text{ et } \min_{t \in [\eta, 1]} \{u_3(t)\} < b.$$

Exemple 2.2.1 On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} u''(t) = -e^{-t}h(u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = 0, u(1) = 2u(\frac{1}{4}) \end{cases}$$

où $f(t, x) = e^{-t}h(x)$ avec

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x & \text{si } x \in [48, 50] \\ 47x - 46 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 48 & \text{si } x \in [2, 48] \\ x \cdot (\frac{1+2x}{51+x}) & \text{si } x \in [50, \infty[\end{cases}$$

Il est clair que la fonction $f(t, 0) = e^{-t}$ n'est pas identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Si on choisit $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ et $c = 48$, alors

$$\begin{cases} f(t, x) = e^{-t}x \leq x < m.a & \text{si } (t, x) \in [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ f(t, x) = e^{-t}48 > \frac{b}{8} & \text{si } (t, x) \in [\frac{1}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ f(t, x) = e^{-t}h(x) \leq 48 < m.c & \text{si } (t, x) \in [0, 1] \times [0, 48] \end{cases}.$$

Le théorème (2.2.1) assure l'existence de trois solutions positives vérifiant

$$\|u_1\| < \frac{1}{2}, \quad 2 < \min_{t \in [\eta, 1]} \{u_2(t)\}, \quad \|u_3\| > \frac{1}{2} \text{ et } \min_{t \in [\eta, 1]} \{u_3(t)\} < 2.$$

Preuve. La preuve est divisée en trois étapes, dans chacune d'elle on montre que les conditions du théorème (1.4.2) de Leggett-Williams est satisfaite.

1^{ère} étape: Il vient des hypothèses (d1) et (d3) que pour $e \in \{a, c\}$ et $u \in \bar{P}_e = \{x \in P / \|x\| < e\}$

$$f(t, u(t)) < me \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Ainsi

$$|Tu(t)| \leq \frac{1}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1-s)f(s, u(s))ds \text{ pour tout } t \in [0, 1],$$

puis

$$\|Tu\| < me \left[\frac{1}{2(1 - \alpha\eta)} \right] = e.$$

Ceci signifie que $T\bar{P}_e \subset P_e$.

2^{ème} étape: Montrons maintenant que l'ensemble $\left\{ y \in P(\Psi, b, \frac{b}{\gamma}) / \Psi(y) > b \right\}$ est non vide et que $\Psi(Tu) > b$ pour tout u dans $P(\Psi, b, \frac{b}{\gamma})$.

Il est clair que u_0 définie par $u_0(t) = \frac{b}{\gamma}$ pour tout $t \in [0, 1]$, est dans $P(\Psi, b, \frac{b}{\gamma})$.

D'autre part, pour $u \in P(\Psi, b, \frac{b}{\gamma})$, $b \leq u(t) \leq \frac{b}{\gamma} \forall t \in [\eta, 1]$, ainsi l'hypothèse (d2) entraîne que $f(t, u(t)) > \frac{b}{\delta}$ pour tout $t \in [\eta, 1]$. Par suite,

$$\begin{aligned} \|Tu\| &\geq \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta} \int_{\eta}^1 (1-s)f(s, u(s))ds \\ &> \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta} \int_{\eta}^1 (1-s)\left(\frac{b}{\delta}\right)ds = \frac{b}{\gamma} \end{aligned}$$

et enfin, on déduit que

$$\Psi(Tu) \geq \gamma \|Tu\| > b.$$

3^{ème} étape: Il reste à montrer que pour tout $y \in P(\Psi, b, c)$, $\|Ty\| > \frac{b}{\gamma}$, implique $\Psi(Ty) > b$.

Soit $y \in P(\Psi, b, c)$, si $\|Ty\| > \frac{b}{\gamma}$, alors $\Psi(Ty) = \min_{[\eta, 1]} Ty(t) \geq \gamma \|Ty\| > \gamma \left(\frac{b}{\gamma}\right) = b$.

Ainsi, le théorème (1.4.2) de Leggett-Williams assure l'existence d'au moins trois solutions positives du problème (2.2.1). ■

2.3 Existence de trois solutions pour un problème linéairement dépendant de la dérivée

2.3.1 Introduction

Dans cette section, on se propose d'examiner l'existence de trois solutions positives du problème aux limites :

$$\begin{cases} -u''(t) = a(t)u'(t) + b(t)u(t) + h(t)f(u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où η et α sont des paramètres réels strictement positifs avec $\alpha < 1$, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, $a, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions continues non identiquement nulles et $b : [0, 1] \rightarrow]-\infty, 0[$ est une fonction continue.

On suppose dans toute cette section que l'équation

$$u''(t) = -[a(t)u'(t) + b(t)u(t)] \quad (2.3.2)$$

admet deux solutions non nulles ϕ_1 et ϕ_2 dans $C^2([0, 1])$ telles que : $0 < \alpha\phi_1(\eta) < 1$, $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 1)$ et $(\phi_1(1), \phi_2(1)) = (1, 0)$, avec

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= t + t \int_0^1 \left(\int_0^s (a(\tau)\phi_1'(\tau) + b(\tau)\phi_1(\tau)) d\tau \right) ds - \int_0^t \left(\int_0^s (a(\tau)\phi_1'(\tau) + b(\tau)\phi_1(\tau)) d\tau \right) ds \\ \phi_2(t) &= 1 - t + t \int_0^1 \left(\int_0^s (a(\tau)\phi_2'(\tau) + b(\tau)\phi_2(\tau)) d\tau \right) ds - \int_0^t \left(\int_0^s (a(\tau)\phi_2'(\tau) + b(\tau)\phi_2(\tau)) d\tau \right) ds \end{aligned}$$

Ce problème a été étudié par Jian Ping Sun, Wan Ton Li et Ya Hong Li [34].

Dans [27], R. MA a étudié le problème (2.3.1) dans le cas où $a = b = 0$. En utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii, il obtient un résultat d'existence d'une solution positive dans le cas où f est surlinéaire et dans le cas où f est sous linéaire.

Dans cette section, on va donner un résultat d'existence de trois solutions positives, et pour cela on va utiliser le théorème de Leggett Williams.

2.3.2 Formulation en un problème du point fixe

On pose $E = C([0, 1])$ et $P = \{x \in E, x \geq 0\}$. Pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, on définit une fonctionnelle ψ et un opérateur A de la manière suivante :

$$\psi(u) = \min_{[\delta, 1-\delta]} \{u(t)\}, \quad Au(t) = \int_0^1 J(t, s)h(s)f(u(s))ds,$$

où

$$J(t, s) = \left[\frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} G(\eta, s) + G(t, s) \right] p(s),$$

avec

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{1}{\phi_1'(0)} \begin{cases} \phi_1(t)\phi_2(s) & 1 \geq s \geq t \geq 0 \\ \phi_1(s)\phi_2(t) & 1 \geq t \geq s \geq 0 \end{cases} \\ p(t) &= \frac{\phi_1'(0)}{(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2')(t)} > 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Pour des raisons de simplicité, on pose

$$\begin{aligned} \gamma &= \min \{ \phi_1(\delta), \phi_1(1 - \delta) \}, \\ D &= \max_{t \in [0, 1]} \left[\int_0^1 G(t, s)p(s)h(s)ds + \frac{\alpha}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)ds \right], \\ c &= \min_{t \in [\delta, 1-\delta]} \left[\int_\delta^{1-\delta} G(t, s)p(s)h(s)ds + \frac{\alpha\phi_1(\delta)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_\delta^{1-\delta} G(\eta, s)p(s)h(s)ds \right], \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1 Il n'est pas difficile de voir que G vérifie les propriétés suivantes.

1/ G est positive sur $[0, 1]^2$ et $G(0, s) = G(1, s) = 0$ pour tout $s \in [0, 1]$.

2/ $G(t, s) \leq G(s, s)$ pour tout $(t, s) \in [0, 1]^2$, car si $s \leq t$ alors

$$G(t, s) = \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(s)\phi_2(t) \leq \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(s)\phi_2(s)$$

et si $s > t$, alors

$$G(t, s) = \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(t)\phi_2(s) \leq \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(s)\phi_2(s).$$

3/ $G(t, s) \geq \gamma G(s, s)$ pour tout $(t, s) \in [\delta, 1 - \delta] \times [0, 1]$, car si $s \leq t$ alors $G(t, s) = \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(s)\phi_2(t)$.

$$\begin{aligned} G(t, s) &\geq \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(s)\phi_2(1 - \delta) \\ &\geq \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_2(1 - \delta)\phi_1(s)\phi_2(s) \geq \gamma G(s, s), \end{aligned}$$

et si $s \geq t$, alors

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(t) \phi_2(s) \\ &\geq \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(\delta) \phi_2(s) \\ &\geq \frac{1}{\phi_1'(0)} \phi_1(\delta) \phi_1(s) \phi_2(s) \geq \gamma G(s, s). \end{aligned}$$

Lemme 2.3.1

1/ La fonction ϕ_1 est strictement croissante et ϕ_2 est strictement décroissante sur $[0, 1]$ avec $\phi_1 \leq 1$ et $\phi_2 \leq 1$.

2/ $(\phi_1' \phi_2 - \phi_1 \phi_2')(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Preuve. On montre seulement que ϕ_1 est strictement croissante et ϕ_2 est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et les inégalités

$$\phi_1 \leq 1, \phi_2 \leq 1 \text{ et } (\phi_1' \phi_2 - \phi_1 \phi_2') > 0$$

seront des conséquences directes.

Raisonnant par l'absurde.

- Supposons que ϕ_1 n'est pas strictement croissante sur $[0, 1]$.

Puisque $\phi_1(0) = 0$ et $\phi_1(1) = 1$, l'ensemble $\{t \in]0, 1[/ \phi_1'(t) = 0\}$ est non vide. Si $t_0 = \min \{t \in]0, 1[/ \phi_1'(t) = 0\}$, l'équation (2.3.2) entraîne que

$$\phi_1(t_0) \phi_1''(t_0) = 0 - b(t_0) \phi_1^2(t_0) < 0,$$

ce qui est absurde puisque ϕ_1 devrait toucher en t_0 un maximum relatif.

• Supposons que ϕ_2 n'est pas strictement décroissante sur $[0, 1]$. Puisque $\phi_2(0) = 1$ et $\phi_2(1) = 0$, l'ensemble $\{t \in]0, 1[/ \phi_2'(t) = 0\}$ est non vide. Si $t_1 = \max \{t \in]0, 1[/ \phi_2'(t) = 0\}$, $\phi_2(t_1) > 0$ et l'équation (2.3.2) entraîne que

$$\phi_2(t_1) \phi_2''(t_1) = 0 - b(t_1) \phi_2^2(t_1) > 0,$$

ce qui est absurde puisque ϕ_2 devrait atteindre en t_1 un maximum relatif. ■

Lemme 2.3.2 Si u est un point fixe de A , alors u est une solution du problème (2.3.1).

Preuve. Soit u un point fixe de l'opérateur A , On a

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \quad (2.3.4)$$

$$+ \frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds. \quad (2.3.5)$$

donc

$$u(0) = 0 \text{ et } u(\eta) = \frac{1}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds.$$

Par la relation (2.3.4) on déduit

$$u(1) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds = \alpha u(\eta).$$

En tenant compte de (2.3.3) on trouve

$$u(t) = \frac{1}{\phi_1'(0)} \int_0^t (\phi_1(s)\phi_2(t))p(s)h(s)f(u(s))ds \quad (2.3.6)$$

$$+ \frac{1}{\phi_1'(0)} \int_t^1 (\phi_1(t)\phi_2(s))p(s)h(s)f(u(s))ds \quad (2.3.7)$$

$$+ \frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds. \quad (2.3.8)$$

En dérivant les deux côtés de l'égalité (2.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\phi_2'(t)}{\phi_1'(0)} \int_0^t (\phi_1(s))p(s)h(s)f(u(s))ds + \frac{\phi_1'(t)}{\phi_1'(0)} \int_t^1 (\phi_2(s))p(s)h(s)f(u(s))ds \\ &\quad + \frac{\alpha\phi_1'(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Donc

$$\begin{aligned} a(t)u'(t) + b(t)u(t) &= (a(t)\phi_2'(t) + b(t)\phi_2(t))\frac{1}{\phi_1'(0)} \int_0^t (\phi_1(s))p(s)h(s)f(u(s))ds \\ &\quad + (a(t)\phi_1'(t) + b(t)\phi_1(t))\left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{\phi_1'(0)} \int_t^1 (\phi_2(s))p(s)h(s)f(u(s))ds\right]. \end{aligned}$$

Ainsi l'hypothèse (4), entraîne

$$\begin{aligned} a(t)u'(t) + b(t)u(t) &= -\frac{\phi_2''(t)}{\phi_1'(0)} \int_0^t (\phi_1(s))p(s)h(s)f(u(s))ds \\ &\quad - \phi_1''(t)\left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{\phi_1'(0)} \int_t^1 (\phi_2(s))p(s)h(s)f(u(s))ds\right]. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

D'autre part, en dérivant les deux côtés de l'égalité (2.3.9), on obtient encore

$$u''(t) = \frac{\phi_2''(t)}{\phi_1'(0)} \int_0^t (\phi_1(s))p(s)h(s)f(u(s))ds + \phi_1''(t) \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \right. \\ \left. + \frac{1}{\phi_1'(0)} \int_t^1 (\phi_2(s))p(s)h(s)f(u(s))ds \right] - h(t)f(u(t)). \quad (2.3.11)$$

Par (2.3.11) et (2.3.10), on déduit que $-u'' = au' + bu + hf(u)$. ■

Lemme 2.3.3 *L'opérateur $A : P \longrightarrow P$ est complètement continu sur P .*

Preuve.

i) Continuité : Soit $u \in K$ et $(u_n)_n$ une suite qui converge vers u dans E . Posons

$$\omega = \max \left\{ \|u\|, \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| \right\} \text{ et } \theta = \max_{t \in [0,1]} \left[\int_0^1 J(t, s)h(s)ds \right].$$

Puisque la fonction f^* est uniformément continue sur $[0, \omega]$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, y dans $[0, \omega]$,

$$|x - y| < \delta \text{ implique } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\|u_n - u\| < \delta \text{ entraîne } \|f(u_n) - f(u)\| < \frac{\epsilon}{\theta}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$|Au_n(t) - Au(t)| \leq \theta \|f(u_n) - f(u)\| < \epsilon.$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} A(u_n) = A(u)$.

ii) La compacité :

Pour $r > 0$, on pose $B = B(0, r) \cap K$, on montre l'équicontinuité.

En effet, soit $(w, z) \in [0, 1]^2$ tel que $w > z$. On pose

$$y(s, x) = p(s)h(s)f(x).$$

Puisque la fonction y est positive et continue sur le compact $[0, 1] \times [0, r]$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $(s, u) \in [0, 1] \times B$

$$y(s, u(s)) \leq T.$$

Donc

$$\begin{aligned} A(u)(w) - A(u)(z) &= \int_0^1 (G(w, s) - G(z, s))p(s)h(s)f(u(s))ds \\ &\quad + \frac{\alpha(\phi_1(w) - \phi_1(z))}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} A(u)(w) - A(u)(z) &= \int_0^z (G(w, s) - G(z, s))y(s, u(s))ds + \frac{\alpha(\phi_1(w) - \phi_1(z))}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)y(s, u(s))ds \\ &\quad + \int_z^w (G(w, s) - G(z, s))y(s, u(s))ds + \int_w^1 (G(w, s) - G(z, s))y(s, u(s))ds \\ &= \frac{(\phi_2(w) - \phi_2(z))}{\phi_1'(0)} \int_0^z \phi_1(s)p(s)h(s)f(u(s))ds \\ &\quad + \frac{\alpha(\phi_1(w) - \phi_1(z))}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \\ &\quad + \frac{1}{\phi_1'(0)} \int_z^w (\phi_1(s)\phi_2(w) - \phi_1(z)\phi_2(s))p(s)h(s)f(u(s))ds \\ &\quad + \frac{(\phi_1(w) - \phi_1(z))}{\phi_1'(0)} \int_w^1 \phi_2(s).p(s)h(s)f(u(s))ds. \end{aligned}$$

De plus,

$$\phi_1(t) = t + t \int_0^1 \left(\int_0^s g(\tau, \phi_1(\tau), \phi_1'(\tau))d\tau \right) ds - \int_0^t \left(\int_0^s g(\tau, \phi_1(\tau), \phi_1'(\tau))d\tau \right) ds,$$

où $g(t, x, y) = a(t)y + b(t)x$ pour tout $(t, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$.

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ telles que

$$|(\phi_1(t)\phi_2(w) - \phi_1(z)\phi_2(t))| \frac{1}{\phi_1'(0)} < \theta_1 \text{ et } |g(t, \phi_1(t), \phi_1'(t))| \leq \theta_2 \quad \forall t \in [0, 1],$$

On a

$$|(\phi_1(w) - \phi_1(z))| \leq (w - z) + (w - z)\theta_2 + (w - z)\theta_2 = (w - z)(2\theta_2 + 1)$$

$$\text{et } \phi_2(t) = 1 - t + t \int_0^1 \left(\int_0^s g(\tau, \phi_2(\tau), \phi_2'(\tau))d\tau \right) ds - \int_0^t \left(\int_0^s g(\tau, \phi_2(\tau), \phi_2'(\tau))d\tau \right) ds$$

donc, $|(\phi_2(w) - \phi_2(z))| \leq (w - z)(2\theta_2 + 1)$.

D'où

$$\begin{aligned} |A(u)(w) - A(u)(z)| &\leq \frac{(w-z)(2\theta_2+1)}{\phi_1'(0)} \int_0^1 \phi_1(s)Tds \\ &\quad + \frac{\alpha(w-z)(2\theta_2+1)}{1-\alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)Tds \\ &\quad + \int_z^w \theta_1 ds + \frac{(w-z)(2\theta_2+1)}{\phi_1'(0)} \int_0^1 \phi_2(s)Tds \end{aligned}$$

donc

$$|A(u)(w) - A(u)(z)| \leq K(w-z),$$

avec

$$\begin{aligned} K &= \frac{(2\theta_2+1)}{\phi_1'(0)} \int_0^1 \phi_1(s)Tds + \frac{\alpha(2\theta_2+1)}{1-\alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)Tds \\ &\quad + \theta_1 + \frac{(2\theta_2+1)}{\phi_1'(0)} \int_0^1 \phi_2(s)Tds, \end{aligned}$$

De plus, l'ensemble $A(B)$ est borné, donc d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, l'opérateur A est compact. Par conséquent, A est complètement continu. ■

2.3.3 Résultat principal

Théorème 2.3.1 *On suppose qu'il existe trois nombres réels d_0, d_1 et d_2 , $0 < d_0 < d_1 < \frac{d_1}{\gamma} < d_2$ tels que*

- i) $f(x) < \frac{d_0}{D} \ \forall x \in [0, d_0]$,*
- ii) $f(x) > \frac{d_1}{c} \ \forall x \in [d_1, \frac{d_1}{\gamma}]$,*
- iii) $f(x) < \frac{d_2}{D} \ \forall x \in [0, d_2]$.*

Alors le problème (2.3.1) admet au moins trois solutions positives u_1, u_2 et u_3 telles que ;

$$\|u_1\| < d_0, \quad \min_{t \in [\delta, 1-\delta]} \{u_2(t)\} > d_1 \text{ et } \|u_3\| > d_0 \text{ avec } \min_{t \in [\delta, 1-\delta]} \{u_3(t)\} < d_1.$$

Preuve. La preuve est divisée en trois étapes dans chacune on montre qu'une condition du théorème (1.4.2) de Leggett-Williams est satisfaite.

1^{ère} étape: Il vient des hypothèses (i) et (iii) que pour $r \in \{d_0, d_2\}$ et $u \in \bar{P}_e = \{x \in P / \|x\| < e\}$

$$f(u(t)) < \frac{r}{D} \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Ainsi

$$Au(t) < \frac{r}{D} \left[\int_0^1 G(t, s)p(s)h(s)ds + \frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)ds \right]$$

donc $\|Au\| < r$, ce qui signifie que $T\bar{P}_r \subset P_r$.

2^{ème} étape: Montrons maintenant que l'ensemble $Q = \left\{ u \in P(\psi, d_1, \frac{d_1}{\gamma}) / \psi(u) > d_1 \right\} \neq \emptyset$ et que $\psi(Au) > d_1 \ \forall u \in P(\psi, d_1, \frac{d_1}{\gamma})$.

Puisque $\gamma \leq 1$ et $\frac{d_1 + \frac{d_1}{\gamma}}{2} > d_1$, la fonction u_0 définie par $u_0(t) = \frac{d_1 + \frac{d_1}{\gamma}}{2}$ pour tout $t \in [0, 1]$ appartient à P .

De plus, si $u \in P(\psi, d_1, \frac{d_1}{\gamma})$ alors pour tout $t \in [\delta, 1 - \delta]$

$$\frac{d_1}{\gamma} \geq \|u\| \geq u(t) \geq \min_{[\delta, 1-\delta]} u(t) = \psi(u) \geq d_1,$$

ça entraîne que pour tout $s \in [\delta, 1 - \delta]$,

$$f(u(s)) > \frac{d_1}{c}.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [\delta, 1 - \delta]$,

$$Au(t) \geq \int_\delta^{1-\delta} G(t, s)p(s)h(s)f(u(s))ds + \frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_\delta^{1-\delta} G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds$$

ce qui conduit à

$$Au(t) > \frac{d_1}{c} \left[\int_\delta^{1-\delta} G(t, s)p(s)h(s)ds + \frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_\delta^{1-\delta} G(\eta, s)p(s)h(s)ds \right]$$

avec

$$c = \min_{[\delta, 1-\delta]} \int_\delta^{1-\delta} G(t, s)p(s)h(s)ds + \frac{\alpha\phi_1(\delta)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_\delta^{1-\delta} G(\eta, s)p(s)h(s)ds.$$

Donc pour tout $t \in [\delta, 1 - \delta]$,

$$Au(t) > d_1$$

et à la fin on déduit de ce qui précède que

$$\psi(Au) = \min_{[\delta, 1-\delta]} Au > d_1.$$

3^{ème} étape: Il reste à montrer que pour tout $u \in P(\psi, d_1, d_2)$, $\|Au\| > \frac{d_1}{\gamma}$ implique $\psi(Au) > d_1$.

Soit $u \in P(\psi, d_1, d_2)$, Si $\|Au\| > \frac{d_1}{\gamma}$, alors pour tout $t \in [\delta, 1 - \delta]$,

$$Au(t) \geq \int_0^1 G(t, s)p(s)h(s)f(u(s))ds + \frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds.$$

Puisque $\gamma G(s, s) \leq G(t, s)$, $\phi_1(t) \geq \phi_1(\delta) \geq \gamma$, pour tout $t \in [\delta, 1 - \delta]$,

$$Au(t) \geq \gamma \left[\int_0^1 G(s, s)p(s)h(s)f(u(s))ds + \frac{\alpha}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \right]$$

et

$$\min_{[\delta, 1-\delta]} Au(t) \geq \gamma \left[\int_0^1 G(s, s)p(s)h(s)f(u(s))ds + \frac{\alpha}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \right]$$

et avec le fait que $\phi_1(t) \leq 1$ et $G(s, s) \geq G(t, s)$ pour tout $(t, s) \in [0, 1]^2$, on déduit que

$$\psi(Au) \geq \gamma \left[\int_0^1 G(t, s)p(s)h(s)f(u(s))ds + \frac{\alpha\phi_1(t)}{1 - \alpha\phi_1(\eta)} \int_0^1 G(\eta, s)p(s)h(s)f(u(s))ds \right] = \gamma Au(t).$$

Par conséquent, $\psi Au \geq \gamma \|Au\| > \gamma \frac{d_1}{\gamma} = d_1$.

Ainsi, le théorème (1.4.2) de Leggett-Williams assure l'existence d'au moins trois solutions positives du problème (2.2.1). ■

2.4 Solution positive d'un problème avec une non linéarité qui change de signe

2.4.1 Introduction

Dans cette section, on se propose d'examiner l'existence de solution positive du problème aux limites :

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h(t)f(t, u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = \beta u'(0) & u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où α , β et η sont des paramètres réels positifs avec $0 < \alpha, \eta < 1$, $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et h est une fonction mesurable sur $[0, 1]$ positive telle que $0 < \int_0^1 h(t)dt < \infty$.

Ce problème a été étudié par Jingli Ren [32].

Dans le cas où $\beta = 0$, ce problème a été étudié par R. Ma [26], en utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Il a donné un résultat d'existence d'une solution positive dans le cas où f est sur-linéaire et indépendante de t .

En utilisant les propriétés de l'indice du point fixe, on donnera un résultat d'existence d'une solution positive.

2.4.2 Formulation en un problème du point fixe

On considère l'espace $X = C([0, 1])$ muni de la norme $\|u\| = \sup \{|u(t)|, t \in [0, 1]\}$, et le cône $K = \{u \in X, u \geq 0 \text{ sur } [0, 1]\}$.

Pour tout $M > 0$, on définit la fonction $f_M^* : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f_M^*(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{si } x \geq Mw(t) \\ f(t, Mw(t)) & \text{si } x \leq Mw(t) \end{cases}$$

et l'opérateur $T : K \rightarrow X$,

$$Tu(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s)h(s)f_M^*(s, u(s))ds$$

où

$$w(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s)ds$$

et

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(s + \beta)[(1 - t) - \alpha(\eta - t)]}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} & s \leq t, s \leq \eta \\ \frac{(s + \beta)(1 - t) + \alpha(\eta + \beta)(t - s)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} & \eta < s \leq t \\ \frac{(t + \beta)[(1 - s) - \alpha(\eta - s)]}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} & t \leq s \leq \eta \\ \frac{(t + \beta)(1 - s)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} & s \geq t, s \geq \eta \end{cases}$$

Noter que

$$G(t, s) \geq 0 \text{ pour tout } (t, s) \in [0, 1]^2.$$

On aura besoin de la fonctionnelle $\theta : K \longrightarrow K$ définie par

$$\theta y(t) = \max \{y(t), w(t)\} \text{ pour tout } y \in K.$$

Dans toute la suite de cette section, la constante A est donnée par

$$A = \max_{t \in [0, 1]} \left[\int_0^1 G(t, s)h(s)ds \right].$$

Lemme 2.4.1 *Si u est un point fixe de T et $u \geq Mw$ sur $[0, 1]$ alors u est une solution du problème (2.4.1) .*

Preuve. Soit u un point fixe de T avec $u \geq Mw$ sur $[0, 1]$. On a alors $f_M^*(., u(.)) = f(., u(.))$. Ainsi, en dérivant deux fois chacun des membres de l'équation $u = Tu$, il vient $-u''(t) = \lambda h(t)f(t, u(t))$ sur $]0, 1[$. Enfin, les conditions aux limites découlent directement des égalités $u(0) = Tu(0)$ et $u(1) = Tu(1)$. ■

Lemme 2.4.2 *L'opérateur $\theta \circ T : K \longrightarrow K$ est complètement continu.*

Preuve. En effet, puisque θ est continue, il suffit de vérifier que l'opérateur T est complètement continu K :

i) Continuité : Soit $u \in K$ et $(u_n)_n$ une suite qui converge vers u dans E . Posons $\omega = \max \{\|u\|, \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|\}$, $\rho = \lambda A$.

Puisque la fonction f est uniformément continue sur $[0, \omega]$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, y dans $[0, \omega]$,

$$|x - y| < \delta \text{ implique } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\|u_n - u\| < \delta \text{ entraîne } \|f(u_n) - f(u)\| < \frac{\epsilon}{\rho}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| \leq \rho \|f(u_n) - f(u)\| < \epsilon.$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = T(u)$.

ii) La compacité :

Soit $r_0 > 0$, $B = B(0, r_0) \cap K$ et $M_0 = \max \{|f(t, x)|, (t, x) \in [0, 1] \times [-r_0, r_0]\}$.

Il s'agit de montrer que $T(B)$ est un ensemble équicontinu et borné. Soit $(w, z) \in [0, 1]^2$ avec $w > z$ on a pour tout $u \in B$

$$\begin{aligned} T(u)(w) - T(u)(z) &= \lambda \left[\int_0^\eta \frac{(s + \beta)[(z - w) - \alpha(z - w)]}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} h(s) f(s, u(s)) ds \right. \\ &\quad + \int_\eta^t \frac{(s + \beta)(z - w) + \alpha(\eta + \beta)(w - z)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} h(s) f(s, u(s)) ds \\ &\quad \left. + \int_t^1 \frac{(w - z)(1 - s)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} h(s) f(s, u(s)) ds \right] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |T(u)(w) - T(u)(z)| &\leq \lambda M_0 \left[\int_0^\eta \left| \frac{(s + \beta)[(z - w) - \alpha(z - w)]}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} \right| h(s) ds \right. \\ &\quad + \int_\eta^t \left| \frac{(s + \beta)(z - w) + \alpha(\eta + \beta)(w - z)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} \right| h(s) ds \\ &\quad \left. + \int_t^1 \left| \frac{(w - z)(1 - s)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} \right| h(s) ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |T(u)(w) - T(u)(z)| &\leq \lambda M(w - z) \left[\int_0^\eta \left| \frac{(s + \beta)[1 - \alpha]}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} \right| h(s) ds \right. \\ &\quad + \int_\eta^t \left| \frac{-(s + \beta) + \alpha(\eta + \beta)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} \right| h(s) ds + \int_t^1 \left| \frac{(1 - s)}{(1 - \alpha\eta) + \beta(1 - \alpha)} \right| h(s) ds \Big]. \end{aligned}$$

Si on pose $C = \lambda M_0 \Lambda$ où

$$\Lambda = \max_{[0,1]} \left[\int_0^\eta \frac{(s+\beta)[1-\alpha]}{(1-\alpha\eta) + \beta(1-\alpha)} h(s) ds + \int_\eta^t \left| \frac{-(s+\beta) + \alpha(\eta+\beta)}{(1-\alpha\eta) + \beta(1-\alpha)} \right| h(s) ds \right. \\ \left. + \int_t^1 \frac{(1-s)}{(1-\alpha\eta) + \beta(1-\alpha)} h(s) ds \right].$$

on obtient alors $|T(u)(w) - T(u)(z)| \leq C(w-z)$ ce qui signifie que $T(B)$ est équicontinu. De plus, $|T(u)(t)| \leq C$ pour tout $u \in B$, donc $T(B)$ est borné. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, l'opérateur T est complètement continu. ■

2.4.3 Résultat principal

Théorème 2.4.1 *Supposons qu'il existe deux nombres réels r et M , $r > M > 0$, tels que $\min \{f(t, Mw(t)), t \in [0, 1]\} > 0$ et*

$$\frac{M}{\min_{[0,1]} f(t, Mw(t))} = a < b = \frac{r}{A(\max_{[0,1] \times [Mw(t), r]} f(t, s))}.$$

Alors pour tout $\lambda \in [a, b]$ le problème (2.4.1) admet au moins une solution positive $u_1 \geq Mw$.

Preuve. Soient $\lambda \in [a, b]$ et $u \in \partial\Omega$ avec $\Omega = \{x \in K, \|x\| < r\}$.

On pose $I = \bar{B}$ avec $B = \{t \in [0, 1] / f_M^*(t, u(t)) > 0\}$.

Puisque

$$\max_{t \in I} f_M^*(t, u(t)) \leq \max_{I \times [0, r]} f_M^*(t, s) \leq \max_{[0, 1] \times [Mw(t), r]} f(t, s),$$

pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \theta \circ Tu(t) &= \lambda \int_0^1 G(t, s) h(s) f_M^*(s, u(s)) ds \leq \lambda \int_I G(t, s) h(s) f_M^*(s, u(s)) ds \\ &\leq \lambda \left[\max_{[0, 1] \times [Mw(t), r]} f(t, s) \right] \int_I G(t, s) h(s) ds \\ &\leq \lambda \left[\max_{[0, 1] \times [Mw(t), r]} f(t, s) \right] \int_0^1 G(t, s) h(s) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\theta \circ Tu\| \leq bA \max_{[0, 1] \times [Mw(t), r]} f(t, s) = r = \|u\|$$

Supposons que l'opérateur $\theta \circ T$ n'admet pas de point fixe dans $\partial\Omega$. D'après le théorème 1.4.3, on a

$$i(\theta \circ T, \Omega, K) = 1 \neq 0,$$

et la Propriété de l'existence entraîne que $\theta \circ T$ admet au moins un point dans Ω . Soit u_1 un point fixe de $\theta \circ T$.

Pour vérifier que u_1 est un point fixe de T , il suffit de montrer que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$(Tu_1)(t) \geq Mw(t).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$v(t_0) = \max_{[0,1]} v(t) > 0$$

où $v(t) = Mw(t) - Tu_1(t)$.

Plusieurs cas se présentent ;

1^{er} cas: Si $t_0 = 0$: $v(0) = \max_{[0,1]} v(t)$ donc $v'(0) \leq 0$. Puisque Mw et Tu vérifient les conditions aux limites du problème (2.4.1) on a,

$$v(0) - \beta v'(0) = (Mw(0) - Tu_1(0)) - \beta(Mw'(0) - Tu_1'(0)) = 0 \Rightarrow v(0) \leq 0$$

absurde.

2^{ème} cas: Si $t_0 = 1$:

$$v(1) = Mw(1) - Tu_1(1) = \alpha(Mw(\eta) - Tu_1(\eta)) = \alpha v(\eta)$$

donc $v(\eta) > 0$ et $v(1) < v(\eta)$ absurde.

3^{ème} cas: Si $t_0 \in]0, 1[$ alors $v'(t_0) = 0$.

1/ S'il existe $t_1 \in [0, 1]$ tel que $v(t_1) = 0$, alors $t_1 \neq t_0$. Posons $I =]\min\{t_1, t_0\}, \max\{t_1, t_0\}]$, on va considérer seulement le cas $v(t) > 0$ sur I (pour le cas $v(t) < 0$, on procède de la même manière).

- Si $t_1 < t_0$ alors pour tout $t \in [0, t_0]$,

$$v'(t) = v'(t_0) - \int_t^{t_0} v''(s)ds = h(t) \int_t^{t_0} [M - \lambda f_M^*(s, u_1(s))]ds$$

et comme $h \geq 0$ et $\lambda \geq a$ donc $v'(t) \leq 0$ cela implique que, $0 = v(t_1) \geq v(t_0)$ absurde.

- Si $t_1 > t_0$ alors pour tout $t \in [t_0, 1]$,

$$v'(t) = v'(t_0) + \int_{t_0}^t v''(s)ds = 0 + h(t) \int_t^{t_0} [M - \lambda f_M^*(s, u_1(s))]ds \geq 0$$

donc $v'(t) \geq 0$ et $0 = v(t_1) \geq v(t_0)$ absurde.

2/ Si $v > 0$ sur $[0, 1]$, alors

$$v(t_0) = M \int_0^1 G(t_0, s)h(s)ds - \lambda \int_0^1 G(t_0, s)h(s)f_M^*(s, u_1(s))ds$$

$v(t_0) = \int_0^1 G(t_0, s)h(s)[M - \lambda f_M^*(s, u_1(s))]ds$, avec le fait que $\lambda \geq a$ cela entraîne

$$v(t_0) \leq \int_0^1 G(t_0, s)h(s)[M - a \min_{[0,1]} f(t, Mw(t))]ds = 0,$$

absurde.

Donc $(Tu_1)(t) \geq Mw(t) \geq 0$ et $u_1 = \theta \circ Tu_1 = Tu_1$. Par conséquent; u_1 est un point fixe de T et $u_1 \geq Mw$ cela signifie que, $f_M^*(s, u_1(s)) = f(s, u_1(s))$ et

$$u_1(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s)h(s)f(s, u_1(s))ds.$$

Par conséquent, u_1 est une solution positive du problème (2.4.1) . ■

Chapitre 3

Existence de solutions de signes quelconques

3.1 Problème aux limites à trois points en resonance

3.1.1 Introduction

Dans cette section, on fournira des conditions suffisantes pour l'existence d'au moins une solutions du problème aux limites à trois points

$$\begin{cases} x'' = f(t, x) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\eta \in]0, 1[$, avec

$$\alpha\eta = 1. \quad (3.1.2)$$

Le problème (3.1.1) est en resonance, car d'après la condition (3.1.2), le problème homogène associé à (3.1.1) admet au moins une solution non triviale. Ce problème a été étudié par R. Ma [25].

Dans [40], Wong et Zheng ont montré l'existence d'une solution positive du problème aux limites autonome

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda g(x(t)) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

où les paramètres λ , η et α sont tels que $\lambda > 0$, $\eta \in]0, 1[$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{\eta}[$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et surlinéaire. Le cas où la nonlinéarité est à variables séparées c'est à dire le problème

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda a(t)g(x(t)) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

où $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Le problème (3.1.4) a été largement étudié, on cite comme exemple l'article [23].

Définitions :

Soit $x \in C^2([0, 1])$.

1/ On dit que x est une sur-solution du problème (3.1.1) si elle vérifie le système ;

$$\begin{cases} x'' \leq f(t, x) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, x(1) - \alpha x(\eta) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{a})$$

De plus, si l'inégalité (a) est stricte, alors on dit que la fonction x est une sur-solution stricte.

2/ On dit que x est une sous-solution du problème (3.1.1) si elle vérifie le système ;

$$\begin{cases} x'' \geq f(t, x) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, x(1) - \alpha x(\eta) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{a}')$$

De plus, si l'inégalité (a') est stricte, alors on dit que x est une sous-solution stricte.

3.1.2 Formulation en un problème du point fixe

On considère l'espace $X = C^1([0, 1])$ muni de la norme $\|u\| = \max \{\|u\|_0, \|u'\|_0\}$, où

$$\|u\|_0 = \max_{s \in [0, 1]} |u(s)| \text{ et le sous ensemble ;}$$

$$X_0 = \{u \in X, u(0) = 0\}$$

Pour chaque $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $g \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'ensemble $S_{a,b}(g) = \{(\lambda, u) \in [a, b] \times X, B_g(\lambda, u) = u\}$, où $B_g : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ est un opérateur défini par

$$B_g(\lambda, u) = L_g(u + \lambda I)$$

tel que pour tout $t \in [0, 1]$

$$I(t) = t \text{ et } L_g(u)(t) = \int_0^t (t-s)g(s, u(s))ds.$$

On définit une fonctionnelle A_g de la manière suivante

$$A_g(\lambda, u) = F_g(u + \lambda I),$$

où

$$\begin{aligned} F_g u &= \int_0^1 G(\eta, s) g(s, u(s)) ds \quad \text{avec} \\ G(t, s) &= \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t \leq s \\ s(1-t) & \text{si } s \leq t \end{cases}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite on va considérer le système suivant

$$\begin{cases} v = B_g(\lambda, v) \\ F_g(v + \lambda I) = 0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

et le problème aux limites

$$\begin{cases} x'' = g(t, x) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Lemme 3.1.1 *Soit $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times X$. Si (λ, v) vérifie le système (3.1.5), alors la fonction $u = v + \lambda I$ est une solution du problème (3.1.6).*

Preuve. Soit $u \in X$ tel que $u = v + \lambda I$ avec $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times X$ vérifie le système (3.1.5).

Puisque $v = B_g(\lambda, v)$, pour tout $t \in [0, 1]$

$$u(t) = (v + \lambda I)(t) = \lambda t + \int_0^t (t-s)g(s, u(s))ds. \quad (3.1.7)$$

On a

$$u(0) = 0 \text{ et } u''(t) = g(t, u(t)) \quad \forall t \in]0, 1[.$$

De plus,

$$u(1) = \lambda + \int_0^1 (1-s)g(s, u(s))ds. \quad (3.1.8)$$

En tenant compte de (3.1.7) et le fait que $\alpha\eta = 1$, on trouve

$$\alpha u(\eta) = \lambda + \alpha \int_0^\eta (\eta-s)g(s, u(s))ds \quad (3.1.9)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 F_g u &= \int_0^1 G(\eta, s)g(s, u(s))ds \\
 &= \int_0^\eta G(\eta, s)g(s, u(s))ds + \int_\eta^1 G(\eta, s)g(s, u(s))ds \\
 &= \int_0^1 \eta(1-s)g(s, u(s))ds - \int_0^\eta (\eta-s)g(s, u(s))ds.
 \end{aligned}$$

Comme $F_g u = 0$ et $\alpha = \frac{1}{\eta}$, il vient que

$$\int_0^1 (1-s)g(s, u(s))ds = \alpha \int_0^\eta (\eta-s)g(s, u(s))ds. \quad (3.1.10)$$

Les relations (3.1.8) , (3.1.9) et (3.1.10) entraînent

$$u(1) = \alpha u(\eta).$$

Par conséquent, u est une solution du problème (3.1.1) . ■

Lemme 3.1.2 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'opérateur $B_\lambda = B_g(\lambda, \cdot)$ est complètement continu et les fonctionnelles A_g et F_g sont continues sur X .*

La démonstration de ce lemme est omise puisque elle est basée sur les mêmes arguments utilisés dans les sections précédentes.

Lemme 3.1.3 *Si $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_g(\mathbb{R} \times X) \subset \bar{B}(0, r) \cap X_0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur $B_\lambda = B_g(\lambda, \cdot)$ admet au moins un point fixe dans $\bar{B}(0, r) \cap X_0$.*

Preuve. Pour montrer ce lemme, il suffit de vérifier que $B_g(\mathbb{R} \times X) \subset \bar{B}(0, r) \cap X_0$ et le théorème de Schauder, assurera l'existence d'un point fixe dans $\bar{B}(0, r) \cap X_0$ pour l'opérateur $B_\lambda = B_g(\lambda, \cdot)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $M > 0$ tel que $|g(t, x)| \leq M$ pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ et pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$, posons $v(t) = u(t) + \lambda t$. on a ainsi pour tout $t \in [0, 1]$

$$|L_g v(t)| = \left| \int_0^t (t-s)g(s, u(s) + \lambda s)ds \right| \leq M$$

et

$$|(L_g v)'(t)| = \left| \int_0^t g(s, u(s)) ds \right| \leq M$$

D'où $\|B_g(\lambda, u)\| = \|L_g(u + \lambda I)\| \leq M$ et

$$B_g(\lambda, u)(0) = 0.$$

Si on choisit $r = M$ on a alors

$$B_g(\mathbb{R} \times X) \subset \bar{B}(0, r) \cap X_0.$$

■

Dans toute la suite, on va supposer que le problème (3.1.1) admet une sur-solution stricte x et une sous-solution stricte y .

3.1.3 Cas des sur et sous-solutions bien ordonnées

Dans ce cas, on va supposer que $x > y$ sur $]0, 1[$.

On définit la fonction f^* par

$$f^*(t, s) = \begin{cases} f(t, x(t)) & \text{si } (t, s) \in \Omega_1 \\ f(t, s) & \text{si } (t, s) \in \Omega_2 \\ f(t, y(t)) & \text{si } (t, s) \in \Omega_3 \end{cases}$$

où $\Omega_1 =]0, 1[\times]x(t), +\infty[$, $\Omega_2 = [0, 1] \times [y(t), x(t)]$ et $\Omega_3 =]0, 1[\times]-\infty, y(t)[$.

Il est clair que la fonction f^* est continue et bornée sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Considérons le problème modifié

$$\begin{cases} x'' = f^*(t, x) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta). \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Lemme 3.1.4 *Si u est une solution du problème (3.1.11) alors u est une solution du problème (3.1.1).*

Preuve. Il suffit de montrer que $(t, u(t)) \in \Omega_2$. Pour cela, on va seulement vérifier que $u \leq x$ (l'inégalité $u \geq y$ se démontre de la même manière).

Raisonnant par l'absurde et supposons qu'il existe $s \in [0, 1]$ tel que $u(s) > x(s)$. Si on pose $v = u - x$, on a alors $v(0) = 0$ et il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que $v(t_0) = \max \{v(t), t \in [0, 1]\} > 0$.

• Si $t_0 \in]0, 1[$ alors $v'(t_0) = 0$ et $v''(t_0) \leq 0$. D'autre part, $u''(t_0) = f^*(t_0, u(t_0))$ et $u(t_0) > x(t_0)$ donc

$$u''(t_0) = f^*(t_0, u(t_0)) = f(t_0, x(t_0)) > x''(t_0).$$

Ceci implique l'absurdité $v''(t_0) > 0$.

• Si $t_0 = 1$ alors $v(0) = 0$ et il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que, $v(\theta) = 0$ avec $v(t) > 0 \forall t \in]\theta, 1]$.

i) Si $\theta \in]\eta, 1]$: soit $t_1 \in [0, \theta]$ tel que $v(t_1) = \max \{v(t), t \in [0, \theta]\}$. Puisque $\theta \in]\eta, 1]$ on a,

$$v(t_1) \geq v(\eta) = u(\eta) - x(\eta) \geq \eta v(1) > 0$$

donc $v'(t_1) = 0$ et $v''(t_1) \leq 0$. D'autre part,

$$u''(t_1) = f^*(t_1, u(t_1)) = f(t_1, x(t_1)) > x''(t_1)$$

d'où $v''(t_1) > 0$, absurde.

ii) Si $\theta \in [0, \eta]$ alors pour tout $t \in]\theta, 1]$ $u(t) > x(t)$. Puisque

$$0 < v(1) \leq \frac{1}{\eta} v(\eta),$$

on a $\theta \neq \eta$.

Pour tout $t \in]\theta, 1]$,

$$u''(t) = f^*(t, u(t)) = f(t, x(t)) > x''(t)$$

d'où $v''(t) > 0$. La concavité de u entraîne

$$\frac{1-\theta}{\eta-\theta} v(\eta) < v(1) \leq \frac{v(\eta)}{\eta} \quad (3.1.12)$$

donc $\theta \neq 0$ et l'inégalité (3.1.12) contredit le fait que $\eta < 1$. ■

Résultat principal

Théorème 3.1.1 *Le problème (3.1.1) admet au moins une solution u telle que, pour tout $t \in [0, 1]$ $u(t) \in [y(t), x(t)]$.*

Preuve. En effet, le lemme (3.1.3) assure l'existence d'un nombre réel $r > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur $B_\lambda = B_{f^*}(\lambda, \cdot)$ admet au moins un point fixe dans C , où $C = \bar{B}(0, r) \cap X_0$.

D'après le lemme (3.1.1), il suffit de montrer qu'il existe $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times X$, tel que (λ, v) vérifie le système (3.1.5) pour $g = f^*$.

D'après le théorème de continuation de Leray Schauder (1.3.2), l'ensemble $S_{a,b}(f^*)$ contient un sous ensemble connexe $\Sigma_{a,b}$ qui rencontre à la fois $\{a\} \times C$ et $\{b\} \times C$.

D'autre part, pour tout $v \in C$ et $t \in]0, 1]$

$$\rho_v t + v(t) \geq x(t) \text{ et } \rho'_v t + v(t) \leq y(t),$$

où

$$\rho_v = \max_{[0,1]} (x'(s) - v'(s)) \text{ et } \rho'_v = \min_{[0,1]} (y'(s) - v'(s)).$$

Si on prend

$$\rho > \max_{v \in C} \{\rho_v\} \text{ et } \rho' < \min \left\{ \rho, \min_{v \in C} \{\rho'_v\} \right\},$$

alors pour tout $v \in C$ et $t \in]0, 1]$

$$\rho t + v(t) > x(t) \text{ et } \rho' t + v(t) < y(t).$$

On pose, $a = \rho'$ et $b = \rho$. L'ensemble $S_{\rho',\rho}(f^*)$ contient un sous ensemble connexe $\Sigma_{\rho',\rho}$ qui rencontre à la fois $\{\rho'\} \times C$ et $\{\rho\} \times C$.

1/ Pour tout $v \in C$ et $t \in]0, 1]$, on pose

$$u(t) = \rho' t + v(t).$$

On a $u(t) = \rho' t + v(t) < y(t)$, donc

$$\begin{aligned} A_{f^*}(\rho', v) &= F_{f^*}(v + \rho' I) = \int_0^1 G(\eta, s) f^*(s, u(s)) ds \\ &= \int_0^1 G(\eta, s) f(s, y(s)) ds < \int_0^1 G(\eta, s) y''(s) ds \end{aligned}$$

ou encore

$$A_{f^*}(\rho', v) < \eta y(1) - y(\eta) \leq 0$$

donc pour $v_1 \in S_{\rho', \rho}(f^*)$, $a_1 = A_{f^*}(\rho, v_1) < 0$.

2/ Pour tout $v \in C$ et $t \in]0, 1]$, on pose

$$u(t) = \rho t + v(t).$$

On a $u(t) = \rho t + v(t) > x(t)$, donc

$$\begin{aligned} A_{f^*}(\rho, v) &= F_{f^*}(v + \rho I) = \int_0^1 G(\eta, s) f^*(s, u(s)) ds \\ &= \int_0^1 G(\eta, s) f(s, x(s)) ds > \int_0^1 G(\eta, s) x''(s) ds \end{aligned}$$

ou encore

$$A_{f^*}(\rho, v) > \eta x(1) - x(\eta) \geq 0$$

donc pour $v_0 \in S_{\rho', \rho}(f^*)$, $a_2 = A_{f^*}(\rho, v_0) > 0$.

Par conséquent, $A_{f^*}(\Sigma_{\rho', \rho})$ est un sous ensemble connexe de $\mathbb{R}$ contenant a_1 et a_2 avec $a_1 < 0 < a_2$, d'où

$$0 \in A_{f^*}(\Sigma_{\rho', \rho})$$

et cela signifie qu'il existe $(\lambda, v) \in \Sigma_{\rho', \rho}$ tel que

$$A_{f^*}(\lambda, v) = 0,$$

donc (λ, v) vérifie le système (3.1.5) pour $g = f^*$. Par conséquent, $u(t) = \lambda t + v(t)$ est une solution du problème (3.1.1). ■

3.1.4 Cas des sur et sous-solutions d'ordres opposés

Dans ce cas, on va supposer que $x < y$ sur $]0, 1[$ et que la fonction f vérifie la condition suivante :

(H) Il existe deux fonctions positives p et r dans $L([0, 1])$ avec $\int_0^1 |p(s)| ds = \|p\|_1 < 1$ et telles que

$$|f(t, x)| \leq p(t) |x| + r(t) \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

On définit l'opérateur continu $\tilde{f} : X \longrightarrow X$ par

$$\tilde{f}(u)(t) = \begin{cases} f(t, y(t)) \text{ sur }]0, 1[& \text{si } u(s) \geq y(s) \ \forall s \in [0, 1] \\ f(t, u(t)) \text{ sur }]0, 1[& \text{si } \exists t_0 \in]0, 1[/ u(t_0) \in]x(t_0), y(t_0)[\\ f(t, x(t)) \text{ sur }]0, 1[& \text{si } u(s) \leq x(s) \ \forall s \in [0, 1] \end{cases}$$

Dans toute la suite, on considère ψ et $\hat{F}$ deux fonctionnelles définies par

$$\psi(u)(t) = \begin{cases} M & \text{si } u(t) \geq M \\ u(t) & \text{si } u(t) \in]-M, M[\\ -M & \text{si } u(t) \leq -M \end{cases}$$

et

$$\hat{F}(t, u(t)) = \tilde{f}(\psi u)(t)$$

où

$$M = \frac{\|\delta\|_1 + \max\{\|x'\|_0, \|y'\|_0\}}{1 - \|p\|_1} + 1 + \max\{\|x\|_0, \|y\|_0\},$$

Il est clair que ψ et $\hat{F}$ sont continues et bornées.

Considérons le problème modifié (3.1.13)

$$\begin{cases} x''(t) = \hat{F}(t, x(t)) & t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, \ x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Lemme 3.1.5 *Si u est une solution du problème (3.1.13), alors il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que, $u(t_0) \in]x(t_0), y(t_0)[$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que $u(t) \notin]x(t), y(t)[$ pour tout $t \in]0, 1]$.

1/ Si $u \leq x$ sur $]0, 1[$ alors $\psi(u) \leq x$ sur $[0, 1]$, car s'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\psi(u)(\alpha) > x(\alpha)$ alors $\alpha \neq 0$ et

$$\psi(u)(\alpha) > x(\alpha) > -M.$$

De plus $u(\alpha) \leq x(\alpha) < M$ donc

$$u(\alpha) \in]-M, M[\text{ et } u(\alpha) = \psi(u)(\alpha) > x(\alpha)$$

absurde, donc $\psi(u) \leq x$.

Puisque u est une solution du problème (3.1.13), pour tout $t \in]0, 1[$

$$u''(t) = \hat{F}(t, u(t)) = f(t, x(t)) > x''(t).$$

Posons $v = u - x$, on a $v(0) = 0$, $v(t) \leq 0$ et pour tout $t \in]0, 1[$

$$v''(t) > 0.$$

De plus, $v(1) \leq \alpha v(\eta) \leq 0$ et avec le fait que

$$\frac{v(\eta)}{\eta} < \frac{v(1) - v(\eta)}{1 - \eta},$$

on trouve $\frac{v(\eta)}{\eta} < v(1)$, ce qui est absurde.

2/ Si $u \geq y$ sur $]0, 1[$ alors pour tout $t \in [0, 1]$

$$\psi(u) \geq y$$

car s'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\psi(u)(\alpha) < y(\alpha)$ alors $\alpha \neq 0$ et $\psi(u)(\alpha) < y(\alpha) < M$. De plus

$$u(\alpha) \geq y(\alpha) > -M$$

cela entraîne que

$$u(\alpha) \in]-M, M[\text{ et } u(\alpha) = \psi(u)(\alpha) < y(\alpha),$$

ce qui est impossible; donc

$$\psi(u) \geq y.$$

Pour tout $t \in]0, 1[$

$$u''(t) = \hat{F}(t, u(t)) = f(t, y(t)) < y''(t).$$

Si on pose $v = y - u$, alors $v(0) = 0$ et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$v(t) \leq 0 \text{ et } v''(t) > 0.$$

De plus, $v(1) \leq \alpha v(\eta) \leq 0$ et avec le fait que

$$\frac{v(\eta)}{\eta} < \frac{v(1) - v(\eta)}{1 - \eta},$$

on a $\frac{v(\eta)}{\eta} < v(1)$, d'où la contradiction. ■

Lemme 3.1.6 *Si u est une solution du problème (3.1.13), alors $\|u\| < M$.*

Preuve. En effet, d'après le lemme (3.1.5), il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que $u(t_0) \in]x(t_0), y(t_0)[$, donc $\psi(u)(t_0) = u(t_0)$ et pour tout $t \in]0, 1[$

$$\hat{F}(t, u(t)) = f(t, \psi(u)(t)).$$

1/ On montre que pour tout $t \in]0, 1[$

$$\left| \hat{F}(t, u(t)) \right| \leq p(t) |u(t)| + r(t).$$

En effet, pour tout $t \in]0, 1[$

$$\left| \hat{F}(t, u(t)) \right| = |f(t, \psi(u)(t))| \leq p(t) |\psi(u)(t)| + r(t)$$

et comme

$$|\psi(u)(t)| \leq |u(t)|,$$

on a bien

$$\left| \hat{F}(t, u(t)) \right| \leq p(t) |u(t)| + r(t).$$

2/ On montre qu'il existe $\tau \in [0, 1]$ tel que $|u'(\tau)| \leq \gamma = \max \{\|x'\|_0, \|y'\|_0\}$.

• Si $u'(t) > \gamma$ pour tout $t \in [0, 1]$ alors

$$\int_0^t u'(s) ds \geq \int_0^t y'(s) ds.$$

Puisque $u(0) = y(0) = 0$, pour tout $t \in [0, 1]$

$$u(t) \geq y(t)$$

absurde.

• Si $u'(t) < -\gamma$ sur $[0, 1]$, alors pour tout $t \in [0, 1]$

$$u'(t) < x'(t) \text{ et } u(t) \leq x(t)$$

absurde.

3/ On montre que $\|u\| < M$, puisque $|u(t)| \leq \int_0^t |u'(s)| ds$ pour tout $t \in [0, 1]$, il suffit alors de vérifier que pour tout $t \in]0, 1[$

$$|u'(t)| \leq \|p\|_1 \mu + \|r\|_1 + \gamma,$$

où $\mu = \|u'\|_0$.

En effet, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$|u(t)| \leq \int_0^t |u'(s)| ds \leq \mu,$$

ainsi

$$|u''(t)| = |\hat{F}(t, u(t))| \leq p(t) \|u\|_0 + r(t).$$

• Si $t \geq \tau$, alors

$$\begin{aligned} - \int_{\tau}^t [p(s) \|u\|_0 + r(s)] ds &\leq \int_{\tau}^t u''(s) ds \\ &\leq \int_{\tau}^t [p(s) \|u\|_0 + r(s)] ds, \end{aligned}$$

donc

$$|u'(t) - u'(\tau)| \leq \|p\|_1 \mu + \|r\|_1$$

ou encore

$$|u'(t)| \leq \|p\|_1 \mu + \|r\|_1 + \gamma.$$

• Si $t < \tau$, alors

$$\begin{aligned} - \int_t^{\tau} [p(s) \|u\|_0 + r(s)] ds &\leq \int_t^{\tau} u''(s) ds \\ &\leq \int_t^{\tau} [p(s) \|u\|_0 + r(s)] ds \end{aligned}$$

donc

$$|u'(t) - u'(\tau)| \leq \|p\|_1 \mu + \|r\|_1$$

ou encore

$$|u'(t)| \leq \|p\|_1 \mu + \|r\|_1 + \gamma.$$

■

Résultat principal

Théorème 3.1.2 *Si l'hypothèse (H) est vérifiée, alors le problème (3.1.1) admet au moins une solution u telle que $u(t_0) \in]x(t_0), y(t_0)[$ pour un certain $t_0 \in]0, 1[$.*

Preuve. On remarque d'abord que pour tout $x \in X$ on a $|\psi(x)| \leq M$. De plus, pour tout $(t, u) \in [0, 1] \times X$,

$$|f(t, u(t))| \leq p(t) |u(t)| + r(t).$$

Donc

$$\hat{F}(t, u(t)) = \tilde{f}(\psi u)(t) \leq p(t) |\psi u(t)| + r(t).$$

On montre que x est une sur-solution stricte et y est une sous-solution stricte du problème (3.1.13).

i/ Pour tout $t \in]0, 1[$, $|x(t)| \leq \|x\|_0 < M$ donc $\psi(x(t)) = x(t)$ cela signifie que

$$\hat{F}(t, x(t)) = \tilde{f}(x)(t) = f(t, x(t))$$

d'où x est une sur-solution stricte du problème (3.1.13).

ii/ Pour tout $t \in]0, 1[$, $|y(t)| \leq \|y\|_0 < M$ cela entraîne que $\psi(y(t)) = y(t)$ d'où

$$\hat{F}(t, y(t)) = \tilde{f}(y)(t) = f(t, y(t)).$$

donc y est une sous-solution stricte du problème (3.1.13).

De plus, $\|\psi u\|_0 \leq \|u\|_0$, donc $\hat{F}(t, u(t)) \leq p(t) \|u\|_0 + r(t)$.

Puisque $\hat{F}$ est continue et bornée sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$, d'après le lemme (3.1.3), il existe $r > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur $B_\lambda = B_{\hat{F}}(\lambda, \cdot)$ admet au moins un point fixe dans C , où $C = \bar{B}(0, r) \cap X_0$, et d'après le lemme (3.1.1); pour montrer l'existence d'une solution du problème (3.1.13), il suffit de montrer qu'il existe $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times X$, tel que (λ, v) vérifie le système (3.1.5) pour $g = \hat{F}$.

D'après le théorème de continuation de Leray Schauder (1.3.2), pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, l'ensemble $\tilde{S}_{a,b}(\hat{F})$ contient un sous ensemble connexe $\tilde{\Sigma}_{a,b}$ qui rencontre à la fois $\{a\} \times C$ et $\{b\} \times C$.

D'autre part, pour tout $v \in C$ et $t \in]0, 1[$,

$$\rho'_v t + v(t) \geq y(t) \text{ et } \rho_v t + v(t) \leq x(t),$$

avec

$$\rho'_v = \max_{[0,1]} \{y'(s) - v'(s)\} \text{ et } \rho_v = \min_{[0,1]} \{x'(s) - v'(s)\}.$$

Si on prend

$$\rho' > \max_{v \in C} \{\rho'_v\} \text{ et } \rho < \min \left\{ \rho', \min_{v \in C} \{\rho_v\} \right\},$$

alors pour tout $v \in C$ et $t \in]0, 1]$,

$$\rho't + v(t) > y(t) \text{ et } \rho t + v(t) < x(t).$$

Si on pose $a = \rho$ et $b = \rho'$, alors $\tilde{S}_{\rho', \rho}(\hat{F})$ contient un sous ensemble connexe $\tilde{\Sigma}_{\rho', \rho}$ qui rencontre à la fois $\{\rho'\} \times C$ et $\{\rho\} \times C$.

i/ Pour tout $v \in C$, posons

$$u(t) = \rho't + v(t) > y(t) \text{ pour tout } t \in]0, 1].$$

Puisque $\psi(u) \geq y$ sur $[0, 1]$, pour tout $t \in [0, 1]$

$$\hat{F}(t, u(t)) = f(t, y(t)).$$

donc

$$\begin{aligned} A_{\hat{F}}(\rho', v) &= F_{\hat{F}}(v + \rho'I) = \int_0^1 G(\eta, s) \hat{F}(s, u(s)) ds \\ &< \int_0^1 G(\eta, s) y''(s) ds. \end{aligned}$$

ou encore

$$A_{\hat{F}}(\rho', v) < \eta y(1) - y(\eta) \leq 0.$$

En particulier, si on prend $v_1 \in C$ telle que $(\rho', v_1) \in \tilde{\Sigma}_{\rho', \rho}$, on a $A_{\hat{F}}(\rho', v_1) < 0$.

ii/ Pour tout $v \in C$, posons

$$u(t) = \rho t + v(t) < x(t) \text{ } t \in]0, 1].$$

Puisque $\psi(u) \leq x$ sur $[0, 1]$, on a $\hat{F}(., u(.)) = f(., x(.))$.

$$\begin{aligned} A_{\hat{F}}(\rho, v) &= F_{\hat{F}}(v + \rho I) = \int_0^1 G(\eta, s) \hat{F}(s, u(s)) ds \\ &> \int_0^1 G(\eta, s) x''(s) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$A_{\hat{F}}(\rho, v) > \eta x(1) - x(\eta) \geq 0.$$

En particulier, si on prend $v_0 \in C$ telle que $(\rho, v_0) \in \tilde{\Sigma}_{\rho', \rho}$, on a $A_{\hat{F}}(\rho, v_0) > 0$.

$A_{\hat{F}}(\tilde{\Sigma}_{\rho', \rho})$ est un sous ensemble connexe de $\mathbb{R}$ contenant a_1 et a_2 , $a_1 < 0 < a_2$ avec

$$a_1 = A_{\hat{F}}(\rho', v_1) \text{ et } a_2 = A_{\hat{F}}(\rho, v_0),$$

cela entraîne qu'il existe $(\lambda, v) \in \Sigma_{\rho', \rho}$ tel que

$$A_{\hat{F}}(\lambda, v) = 0$$

donc $u = v + \lambda I$ est une solution du problème (3.1.13) .

De plus

$$\exists t_0 \in]0, 1], \quad u(t_0) \in]x(t_0), y(t_0)[\text{ et } \|u\| < M,$$

donc $\psi u = u$ sur $[0, 1]$. Par conséquent, u est une solution du problème (3.1.1). ■

Conséquence : Si f vérifie la condition (H) et que le problème (3.1.1) admet une sur-solution x_2 et deux sous-solutions x_1 et x_3 telles que $x_1 < x_2 < x_3$, alors il existe au moins deux solutions u et v telles que, pour tout $t \in [0, 1]$, $u(t) \in [x_1(t), x_2(t)]$ et qu'il existe $s \in]0, 1]$ tel que

$$v(s) \in]x_2(s), x_3(s)[.$$

Preuve. en effet, $x_1 < x_2$ et par le théorème (3.1.1) , on déduit l'existence d'une solution u telle que $u(t) \in [x_1(t), x_2(t)]$, $\forall t \in [0, 1]$, de plus, $x_2 < x_3$, par le théorème (3.1.2) , on déduit que le problème (3.1.1) admet une autre solution v telle qu'il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que, $v(t_0) \in]x(t_0), y(t_0)[$. ■

Exemple 3.1.1 *Considérons le problème suivant,*

$$\begin{cases} x'' = g(t, x(t)) & t \in]0, 1[\\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \quad (3.1.14)$$

où, $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes ;

1/ $|g(t, x)| < |x| \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$

2/ il existe trois constantes réelles r_1, r_2 et r_3 avec $r_1 < r_2 < r_3$ et telles que

$$\begin{cases} g(t, r_1 t) < 0 \\ g(t, r_2 t) > 0 \\ g(t, r_3 t) < 0 \end{cases} .$$

la condition 1/ implique que g vérifie l'hypothèse (H).

Si on prend, $x_1(t) = r_1 t$, $x_2(t) = r_2 t$ et $x_3(t) = r_3 t$, alors x_2 est une sur-solution et x_1, x_3 sont des sous solutions du problème (3.1.14) telles que, $x_1 < x_2 < x_3$. Par conséquent, le problème (3.1.14) admet au moins deux solutions u et v telles que, $\forall t \in [0, 1], u(t) \in [r_1 t, r_2 t]$ et $\exists s \in]0, 1[/ v(s) \in]r_2 s, r_3 s[$, et on remarque que si de plus, $r_1 > 0$ alors u est une solution positive.

3.2 Existence de solutions par un théorème de continuation

3.2.1 Introduction

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solutions du problème

$$\begin{cases} (\phi(x'(t)))' = f(t, x(t), x'(t)), & t \in]0, 1[\\ x'(0) = 0, \theta(x'(1)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \theta(x'(\xi_i)) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où $a_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-2\}$ avec $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \leq 1$ et $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1$.

ϕ et θ deux homéomorphismes, impaires et strictement croissantes et ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory, c'est-à-dire que f vérifie les conditions suivantes;

- 1) $f(., x)$ soit mesurable sur $[0, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,
- 2) $f(t, .)$ soit continue sur $\mathbb{R}^2$ presque partout sur $[0, 1]$,
- 3) $\forall R > 0, \exists \rho_R \in L^1([0, 1])$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^2$, si $\|x\|_{\mathbb{R}^2} \leq R$ alors $|f(t, x)| \leq \rho_R(t)$ presque pour tout $t \in [0, 1]$.

Ce problème a été étudié par M. Garcia-Huidobro, C.P. Gupta et R. Manasevich [16].

Dans [8], W. Feng et J. Webb ont étudié le problème

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x'(0) = 0, x'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x'(\xi_i) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

dans le cas où $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et f satisfait la condition de Carathéodory, en utilisant le théorème de Schauder, ils ont donné quelques resultats d'existence d'une solution.

Comme contribution récentes dans le cas du p -Laplacien, le problème

$$\begin{cases} (\phi_p(x'(t)))' = f(t, x(t), x'(t)) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x'(0) = 0, x'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x'(\xi_i) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

où pour $p > 1$, $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$ a été étudié dans [16, 20, 40].

Une autre généralisation du problème (3.2.2) est

$$\begin{cases} x'' = f(t, x(t), x'(t)) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x'(0) = 0, \theta(x'(1)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \theta(x'(\xi_i)) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

où $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme et f satisfait les conditions de Carathéodory. Le problème (3.2.4) est étudié par J. Mawhin [21], il a obtenu des résultats d'existence d'une solution par la méthode de Continuation.

La motivation pour notre étude vient du fait que les problèmes (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4) sont des cas particuliers du problème (3.2.1) qu'on va étudier dans cette section, on va donner quelques résultats principaux d'existence d'une solution et cela en utilisant les propriétés du degré topologique.

Soit $f^* : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f^*(t, s, r, 1) = f(t, s, r) \quad \forall (t, s, r) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2. \quad (3.2.5)$$

On pose $\gamma = \theta \circ \phi^{-1}$.

3.2.2 Formulation en un problème du point fixe

On définit la fonctionnelle β et l'opérateur ψ^* sur $C^1([0, 1]) \times [0, 1]$ de la manière suivante

$$\beta(x, \lambda) = \lambda(\theta(x'(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \theta(x'(\xi_i))) + (1 - \lambda) \left[\phi(x'(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \phi(x'(\xi_i)) \right]. \quad (3.2.6)$$

et

$$\psi^*(x, \lambda)(t) = x(0) + \gamma(\lambda Ax(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \gamma(\lambda Ax(\xi_i)) \quad (3.2.7)$$

$$+ (1 - \lambda) \left(Ax(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i Ax(\xi_i) \right) + \int_0^t \phi^{-1}(\lambda Ax(s)) ds \quad (3.2.8)$$

où

$$Ax(t) = \int_0^t f^*(\tau, x(\tau), x'(\tau), \lambda) d\tau.$$

Soit $E = C^1([0, 1])$, l'espace de Banach muni de la norme $\|u\|_1 = \text{Max}(\|u\|_0, \|u'\|_0)$ où

$$\|u\|_0 = \sup_{[0,1]} |u(t)|.$$

Considérons le problème aux limites ;

$$\begin{cases} (\phi(x'(t)))' = \lambda f^*(t, x(t), x'(t), \lambda) & \text{si } t \in]0, 1[\\ x'(0) = 0, \beta(x, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par :

$$\rho \longmapsto F(\rho) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} f^*(t, \rho, 0, 0) dt - \int_0^1 f^*(t, \rho, 0, 0) dt \quad (3.2.10)$$

Lemme 3.2.1 Soit $(x, \lambda) \in E \times [0, 1]$.

x est une solution du problème (3.2.9) si et seulement si

$$x = \psi^*(x, \lambda).$$

Preuve. Soit $(\lambda, x) \in [0, 1] \times C^1([0, 1])$.

Si x est une solution du problème (3.2.9), alors

$$\phi(x'(t)) = \int_0^t \lambda f^*(\tau, x(\tau), x'(\tau), \lambda) d\tau = \lambda Ax(t). \quad (3.2.11)$$

Cela implique que

$$\theta(x'(t)) = \gamma \left(\int_0^t \lambda f^*(\tau, x(\tau), x'(\tau), \lambda) d\tau \right) = \gamma(\lambda Ax(t)).$$

De plus

$$0 = \beta(x, \lambda) = \lambda \left[\gamma(\lambda Ax(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \gamma(\lambda Ax(\xi_i)) \right] \quad (3.2.12)$$

$$+ (1 - \lambda) \left(Ax(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i Ax(\xi_i) \right). \quad (3.2.13)$$

Par (3.2.7), (3.2.11) et (3.2.12), on déduit que pour tout $t \in [0, 1]$

$$x(t) = \psi^*(x, \lambda)(t). \quad (3.2.14)$$

Réciproquement, si $x = \psi^*(x, \lambda)$ alors en dérivant on obtient

$$x'(t) = \phi^{-1}(\lambda Ax(t))$$

d'où

$$\theta(x'(t)) = \gamma(\lambda Ax(t)) \quad (3.2.15)$$

avec $\gamma = \theta \circ \phi^{-1}$.

De (3.2.15) , il vient $x'(0) = 0$ et pour tout $t \in [0, 1]$

$$(\phi(x'(t)))' = \lambda \cdot f^*(t, x(t), x'(t), \lambda).$$

En remplaçant $t = 0$ dans (3.2.14) , on obtient la relation (3.2.12) . ■

Lemme 3.2.2 *L'opérateur ψ^* est complètement continu sur $C^1([0, 1]) \times [0, 1]$.*

Preuve. En effet, il suffit de montrer que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, l'opérateur $L = L_\lambda$ défini par

$$Lx(t) = \int_0^t \phi^{-1}(\lambda Ax(s)) ds$$

est complètement continu.

i/ Continuité:

En effet, soit $x \in C^1([0, 1])$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1([0, 1])$ une suite qui converge vers x dans $C^1([0, 1])$.

Presque pour tout t dans $[0, 1]$, $f^*(t, \dots)$ est continu par rapport à x, y et λ , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f^*(t, x_n(t), x'_n(t), \lambda) = f^*(t, x(t), x'(t), \lambda)$ presque partout sur $[0, 1]$.

Posons $\varphi_n(t) = f^*(t, x_n(t), x'_n(t), \lambda)$ et $\varphi(t) = f^*(t, x(t), x'(t), \lambda)$,

Puisque f^* satisfait la condition de Carathéodory, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) \leq \rho_R(t)$ p.p sur $[0, 1]$, où $R = \max \{\|x\|_1, \|x_n\|_1, n \in \mathbb{N}\}$ et $\rho_R \in L^1([0, 1])$. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\varphi_n(s) - \varphi(s)| ds = 0.$$

Ceci entraîne que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi_n(s) ds = \int_0^t \varphi(s) ds$ uniformément par rapport à $t \in [0, 1]$.

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma \left(\lambda \int_0^t \varphi_n(s) ds \right) = \gamma \left(\lambda \int_0^t \varphi(s) ds \right)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-1} \left(\lambda \int_0^t \varphi_n(s) ds \right) = \varphi^{-1} \left(\lambda \int_0^t \varphi(s) ds \right)$$

uniformément sur $[0, 1]$.

Donc

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|Lx_n - Tx\|_0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|(Lx_n)' - (Tx)'\|_0 = 0 \end{cases}$$

d'où la continuité.

ii) Compacité :

Soient $r > 0$ et $B = B(0, r) \cap K$. Dans le but d'utiliser le théorème d'ASCOLI-ARZÉLA, nous allons montrer que $L(B)$ est un ensemble équicontinu. Pour tout t_1 et t_2 dans $[0, 1]$, $t_1 < t_2$ et $x \in B$, puisque f vérifie la condition de Carathéodory, il existe $\rho_r \in L^1([0, 1])$ telle que

$$|f^*(t, x(t), x'(t), \lambda)| \leq \rho_r(t) \text{ p.p sur } [0, 1]$$

d'où $\lambda Ax(t) \leq \|\rho_r\|_{L^1}$ sur $[0, 1]$.

D'autre part,

$$|Lx(t_1) - Lx(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} \phi^{-1}(\|\rho_r\|_{L^1}) dt = c |t_2 - t_1| \quad (3.2.16)$$

avec $c = \phi^{-1}(\|\rho_r\|_{L^1})$. Il découle alors de (3.2.16) que pour tout $w, z \in [0, 1]$

$$|Lx(t_1) - Lx(t_2)| \leq c |t_2 - t_1|.$$

Ceci signifie que $L(B)$ est équicontinu. Enfin, pour tout $x \in B$ et $t \in [0, 1]$, $|L(x)(t)| = \left| \int_0^t \phi^{-1}(\lambda Ax(s)) ds \right| \leq c$ et d'après le théorème (4.3.4) d'Ascoli Arzela, l'opérateur L est complètement continu. ■

Lemme 3.2.3 Soit $\Omega \subset C^1([0, 1])$ un ouvert borné. Posons $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}$.

Si les conditions suivantes sont vérifiées

i/ $\forall \lambda \in]0, 1[$, le problème (3.2.9) n'a pas de solutions dans $\partial\Omega$,

ii/ l'équation $F(\rho) = 0$ n'admet pas de solution dans $\partial\Omega \cap \mathbb{R}$,

iii/ le degré de Brouwer $d_B(F, \Omega_0, 0) \neq 0$ où $d_B(F, \Omega_0, 0) =$

Alors le problème (3.2.1) admet au moins une solution dans $\bar{\Omega}$.

Preuve. Supposons que le problème (3.2.1) n'admet pas solutions dans $\partial\Omega$, cela signifie que le problème (3.2.9) n'admet pas de solutions pour $\lambda = 1$.

On va montrer que $\psi^*(x, 0) \neq x$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

En effet, si on suppose que $\psi^*(., 0)$ admet un point fixe dans $\partial\Omega$, alors

$$x(t) = x(0) + \left(\int_0^1 f^*(\tau, x(\tau), x'(\tau), 0) d\tau - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} f^*(\tau, x(\tau), x'(\tau), 0) d\tau \right),$$

donc x est constante sur $[0, 1]$.

Si on pose $\rho \equiv x$, alors $\rho \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$ et

$$F(\rho) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} f^*(t, \rho, 0, 0) dt - \int_0^1 f^*(t, \rho, 0, 0) dt = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse (ii). Par conséquent, $\forall x \in \partial\Omega$ $\psi^*(x, \lambda) \neq x$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$

.

La propriété de l'invariance du degré par l'homotopie entraîne $d_{LS}(I - \psi^*(., 1), \Omega, 0) = d_{LS}(I - \psi^*(., 0), \Omega, 0)$. D'autre part, $\psi^*(., 0) : C^1([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi^*(x, 0) = x(0) + \left(\int_0^1 f^*(\tau, x(\tau), x'(\tau), 0) d\tau - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} f^*(\tau, x(\tau), x'(\tau), 0) d\tau \right)$$

est continue sur $C^1([0, 1])$ et $Im(\psi^*(., 0)) \subset \mathbb{R}$; donc l'opérateur $\varphi = I - \psi^*(., 0)$ est une perturbation de dimension finie de l'identité, et par la définition du degré on a $d_{LS}(\varphi, \Omega, 0) = d_B(\varphi|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}}, \Omega \cap \mathbb{R}, 0)$. De plus, $\forall x \in \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}$

$$\psi^*(x, 0) = x(0) - F(x(0)) = x - F(x),$$

donc

$$F(x) = (I - \psi^*(., 0))_{/\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}}(x) = \varphi_{/\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}}(x).$$

$$d_{LS}(I - \psi^*(., 1), \Omega, 0) = d_{LS}(\varphi, \Omega, 0) = d_B(F, \Omega_0, 0) \neq 0.$$

Par conséquent, l'opérateur $\psi^*(., 1)$ admet au moins un point fixe dans Ω , solution du problème (3.2.1) . ■

3.2.3 Résultats principaux

Théorème 3.2.1 *On suppose que f satisfait les conditions suivantes :*

i) Il existe des fonctions positives d_1, d_2 et r dans $L^1([0, 1])$ telles que

$$|f(t, x, y)| \leq d_1(t) \cdot \phi(|x|) + d_2(t) \cdot \phi(|y|) + r(t)$$

presque pour tout $t \in [0, 1]$, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

ii) Il existe $\Lambda > 0$, $A \geq 0, B \geq 0$ et $u_0 > 0$, tels que pour tout $(t, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$, si $|u| > u_0$ alors

$$|f(t, u, v)| \geq \Lambda \cdot \phi(|u|) - A \cdot \phi(|v|) - B.$$

iii) Il existe un nombre réel $R > \max\{u_0, B/\Lambda\}$ tel que pour tout $(\rho, t) \in]R, +\infty[\times [0, 1]$

$$f(t, \rho, 0)f(t, -\rho, 0) < 0,$$

iv) On suppose que $\|d_2\|_{L^1} < 1$ et $\Theta : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction définie par

$$\Theta(z) = \phi^{-1}\left(\frac{\|d_1\|_{L^1}}{1 - \|d_2\|_{L^1}}\phi(z) + \frac{\|r\|_{L^1}}{1 - \|d_2\|_{L^1}}\right) + \phi^{-1}\left(\frac{A \cdot \|d_1\|_{L^1}}{\Lambda(1 - \|d_2\|_{L^1})}\phi(z) + \frac{A \cdot \|r\|_{L^1}}{\Lambda(1 - \|d_2\|_{L^1})} + \frac{B}{\Lambda}\right)$$

et telle que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Theta(z)}{z} < 1 \tag{3.2.17}$$

Alors le problème (3.2.1) admet au moins une solution dans $C^1([0, 1])$.

Remarque 3.2.1 *La relation (3.2.17) implique que $\|d_1\|_{L^1} + \|d_2\|_{L^1} < 1$.*

Exemple 3.2.1 *Considérons le problème aux limites ;*

$$\begin{cases} [\phi_p(x'(t))]' = \lambda(t) \cdot \phi_p(x(t)) - A \cdot |x'(t)|^{p-1} - B & \text{si } t \in]0, 1[\\ x'(0) = 0, \phi_q(x'(1)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \phi_q(x'(\xi_i)) \end{cases} \quad (3.2.18)$$

où $p > 1$, $q = 1/p - 1 = p^*$, $(\phi_q = \phi_p^{-1})$ et $a_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, m-2\}$ avec $0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i < 1$, $\lambda \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ est une fonction strictement positive sur $[0, 1]$, $B > 0$ et $A \in]0, 1[$. On pose $\lambda_0 = \inf_{[0, 1]} \lambda(t)$ et $f(t, x, y) = \lambda(t) \cdot \phi_p(x) - A \cdot |y|^{p-1} - B$. Si $(\|\lambda\|_1 / (1-A))^{p^*-1} (1 + (A/\lambda_0)^{p^*-1}) < 1$, alors les conditions du théorème (3.2.1) sont vérifiées. Par conséquent, le problème (3.2.18) admet au moins une solution. (pour plus de détails, voir [16])

Preuve. La preuve est divisée en trois étapes; dans chacune on montre qu'une condition du lemme (3.2.3) est satisfaite pour $f^*(t, x, y, \lambda) = f(t, x, y)$ sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$.

1^{ère} étape: Pour vérifier la condition (i) du lemme (3.2.3), il suffit de montrer qu'il existe $\rho_0 > 0$, tel que pour tout $x \in C^1([0, 1])$, si x est solution du problème (3.2.9), alors $\|x\|_1 \leq \rho_0$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$, car dans ce cas lorsque on prend $\Omega = B(0, R_0)$, où $R_0 > \max\{R, \rho_0\}$ avec R est la constante de l'hypothèse (iii), pour tout $\lambda \in]0, 1[$, le problème (3.2.9) n'admet pas de solutions dans $\partial\Omega_{R_0}$.

En effet, supposons que $(\lambda, x) \in]0, 1] \times C^1([0, 1])$ tel que x est une solution du problème (3.2.9). Puisque $\beta(x, \lambda) = 0$, on a

$$\gamma(\lambda Ax(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \gamma(\lambda Ax(\xi_i)) + (1 - \lambda) \left(Ax(1) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i Ax(\xi_i) \right) = 0 \quad (3.2.19)$$

avec

$$Ax(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau), x'(\tau), \lambda) d\tau.$$

D'abord, on montre que $\|x\|_0 \leq u_0 + \Theta(\|x\|_0)$, où u_0 est la constante de l'hypothèse (ii).

Pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$\phi(x'(t)) = \int_0^t \lambda f(s, x(s), x'(s)) ds \text{ et } \theta(x'(t)) = \gamma \left(\int_0^t \lambda f(s, x(s), x'(s)) ds \right). \quad (3.2.20)$$

En utilisant l'hypothèse (i) on trouve

$$|\phi(x'(t))| \leq \int_0^1 (d_1(s) \cdot \phi(|x(s)|) + d_2(s) \cdot \phi(|x'(s)|) + r(s)) ds.$$

et la croissance stricte de ϕ entraîne

$$\phi(\|x'\|_0) \leq \phi(\|x\|_0) \|d_1\|_{L^1} + \phi(\|x'\|_0) \|d_2\|_{L^1} + \|r\|_{L^1} ,$$

donc

$$\|x'\|_0 \leq \phi^{-1}\left(\frac{\phi(\|x\|_0) \|d_1\|_{L^1} + \|r\|_{L^1}}{1 - \|d_2\|_{L^1}}\right) \quad (3.2.21)$$

- S'il existe $p \in [0, 1]$ tel que $|x(p)| \leq u_0$, alors pour tout $t \in [0, 1]$

$$|x(t)| \leq |x(p)| + \left| \int_p^t x'(s) ds \right| \leq u_0 + \|x'\|_0$$

et par la relation (3.2.21) , on tire

$$\|x\|_0 \leq u_0 + \phi^{-1}\left(\frac{\phi(\|x\|_0) \|d_1\|_{L^1} + \|r\|_{L^1}}{1 - \|d_2\|_{L^1}}\right) \leq u_0 + \Theta(\|x\|_0), \quad (3.2.22)$$

- Si $|x(t)| > u_0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors l'hypothèse (ii) entraîne

$$\Lambda \cdot \phi(|x(t)|) - A \cdot \phi(|x'(t)|) - B \leq |f(t, x(t), x'(t))| \text{ pour tout } t \in [0, 1]. \quad (3.2.23)$$

Montrons qu'il existe $\tau_1 \in]0, 1[$ tel que $f(\tau_1, x(\tau_1), x'(\tau_1)) = 0$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que $f(\tau, x(\tau), x'(\tau)) \neq 0$ pour tout $\tau \in]0, 1[$. La fonction Ax est strictement monotone, on peut supposer que

$$Ax(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau), x'(\tau), \lambda) d\tau > 0 \text{ pour tout } t \in]0, 1[. \quad (3.2.24)$$

- i/ Si $\sum_{i=1}^{m-2} a_i = 0$ alors la relation (3.2.19) devient

$$\gamma(\lambda Ax(1)) + (1 - \lambda)(Ax(1)) = 0$$

et cela contredit (3.2.24) .

- ii/ Supposons que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \neq 0$, on pose

$$T = \sum_{i=1}^{m-2} a_i, \quad I_1 = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \gamma(\lambda Ax(\xi_i)) \text{ et } I_2 = \sum_{i=1}^{m-2} a_i Ax(\xi_i).$$

Soient ξ^+, ξ^- dans $[0, 1]$ tels que

$$Ax(\xi^+) = \max_{i \in \{1, \dots, m-1\}} Ax(\xi_i),$$

et

$$Ax(\xi^-) = \min_{i \in \{1, \dots, m-1\}} Ax(\xi_i).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$,

$$Ax(\xi^-) \leq Ax(\xi_i) \leq Ax(\xi^+) \quad (3.2.25)$$

et

$$\gamma(\lambda Ax(\xi^-)) \leq \gamma(\lambda Ax(\xi_i)) \leq \gamma(\lambda Ax(\xi^+)). \quad (3.2.26)$$

En multipliant les relations (3.2.25) et (3.2.26) par a_i et en sommant par rapport à i , on trouve

$$T\gamma(\lambda Ax(\xi^-)) \leq I_1 \leq T\gamma(\lambda Ax(\xi^+)),$$

et

$$TAx(\xi^-) \leq I_2 \leq TAx(\xi^+).$$

Puisque la fonction Ax est continu, il existe t_1, t_2 dans $[a, b]$ tels que

$$\gamma(\lambda Ax(t_1)) = \frac{I_1}{T} \text{ et } Ax(t_2) = \frac{I_2}{T}. \quad (3.2.27)$$

où $a = \min(\xi^-, \xi^+)$ $b = \max(\xi^-, \xi^+)$.

En tenant compte de (3.2.27) la relation (3.2.19) devient

$$\gamma(\lambda Ax(1)) - T\gamma(\lambda Ax(t_1)) + (1 - \lambda)(Ax(1) - TAx(t_2)) = 0.$$

ou encore

$$\gamma(\lambda Ax(1)) + (1 - \lambda)Ax(1) = T[\gamma(\lambda Ax(t_1)) + (1 - \lambda)Ax(t_2)] \quad (3.2.28)$$

et cela contredit la croissance stricte de la fonction Ax .

Soit $\tau_1 \in]0, 1[$ tel que $f(\tau_1, x(\tau_1), x'(\tau_1)) = 0$, la relation (3.2.23) entraîne

$$|x(\tau_1)| \leq \phi^{-1}(A \cdot \phi(\|x'\|_0)/\Lambda + B/\Lambda). \quad (3.2.29)$$

D'autre part, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$x(t) = x(\tau_1) + \int_0^t x'(s)ds \quad (3.2.30)$$

et en tenant compte des relations (3.2.21) et (3.2.29), il vient immédiatement que

$$\|x\|_0 \leq \phi^{-1} \left(\frac{A}{\Lambda} \cdot \left[\frac{\phi(\|x\|_0) \|d_1\|_{L^1} + \|r\|_{L^1}}{1 - \|d_2\|_{L^1}} \right] + B/\Lambda \right) + \phi^{-1} \left(\frac{\phi(\|x\|_0) \|d_1\|_{L^1} + \|r\|_{L^1}}{1 - \|d_2\|_{L^1}} \right)$$

d'où

$$\|x\|_0 \leq \Theta(\|x\|_0). \quad (3.2.31)$$

Maintenant, on montre qu'il existe $\rho_0 > 0$ tel que $\|x\|_1 \leq \rho_0$.

La relation (3.2.17) de l'hypothèse (iv) signifie qu'il existe $\rho_0 > R$ tel que si $z > \rho_0$, alors

$$\frac{u_0 + \Theta(\|z\|_0)}{\|z\|_0} < 1$$

où R est la constante de l'hypothèse (iii).

Puisque $\|x\|_0 \leq u_0 + \Theta(\|u\|_0)$, on a $\|x\|_0 \leq \rho_0$.

D'autre part, en utilisant l'inégalité (3.2.21), on trouve

$$\|x'\|_0 \leq \phi^{-1} \left(\frac{\phi(\|x\|_0) \|d_1\|_{L^1} + \|r\|_{L^1}}{1 - \|d_2\|_{L^1}} \right) \leq \Theta(\|x\|_0),$$

donc

$$\|x'\|_0 \leq \Theta(\|x\|_0) \quad \text{et} \quad \|x\|_0 \leq \rho_0 \quad (3.2.32)$$

Il est clair que si $\|x\|_0 \geq \|x'\|_0$ alors $\|x\|_1 \leq \rho_0$, on suppose que $\|x\|_0 \leq \|x'\|_0$, alors

$$\Theta(\|x\|_0) \leq \Theta(\|x'\|_0),$$

et avec la relation (3.2.32) cela entraîne que

$$\|x'\|_0 \leq \Theta(\|x'\|_0)$$

donc $\|x\|_1 \leq \rho_0$.

2^{ème} étape: On vérifie la condition (ii) pour l'ouvert $\Omega = B(0, \rho_0)$.

En effet, pour tout $\rho \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$,

$$|\rho| = \rho_0 > R$$

et par l'hypothèse (iii), on a $f(t, \rho, 0)f(t, -\rho, 0) < 0$ sur $[0, 1]$.

On peut supposer que $f(., \rho, 0) > 0$ et $f(., -\rho, 0) < 0$ sur $[0, 1]$.

Par le fait que $f(., \rho, 0) > 0$, il vient

$$F(\rho) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} f(t, \rho, 0) dt - \int_0^1 f(t, \rho, 0) dt < T \int_0^1 f(t, \rho, 0) dt - \int_0^1 f(t, \rho, 0) dt \leq 0,$$

donc $F(\rho) < 0$.

Par le fait que $f(., -\rho, 0) < 0$, on obtient

$$(-F(-\rho)) < 0.$$

d'où la condition (ii) du lemme (3.2.3) .

3^{ème} étape:

Le degré de Brouwer de F est

$$d_B(F, \Omega_0, 0) = 1/2[\text{sgn}(F(\rho_0)) - \text{sgn}(F(-\rho_0))].$$

Pour avoir $d_B(F, \Omega_0, 0) \neq 0$, il suffit que $F(\rho_0).F(-\rho_0) < 0$.

En effet, on a

$$F(\rho_0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} f(t, \rho_0, 0) dt - \int_0^1 f(t, \rho_0, 0) dt$$

et

$$F(-\rho_0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} f(t, -\rho_0, 0) dt - \int_0^1 f(t, -\rho_0, 0) dt.$$

Puisque $\rho_0 > R$, on a ou bien

$$f(t, \rho_0, 0) < 0 \text{ et } f(t, -\rho_0, 0) > 0 \text{ sur } [0, 1]$$

ou

$$f(t, \rho_0, 0) > 0 \text{ et } f(t, -\rho_0, 0) < 0 \text{ sur } t \in [0, 1].$$

On procède de la même manière que la preuve de la condition (ii), on constate que

$$F(\rho_0).F(-\rho_0) < 0$$

donc $d_B(F, \Omega_0, 0) \neq 0$, d'où le resultat. ■

Théorème 3.2.2 *Supposons que la fonction f vérifie les conditions suivantes;*

1/ Il existe $M > 0$ tel que pour tout $(t, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$, si $|u| > M$ alors

$$u \cdot f(t, u, v) > 0, \quad (3.2.33)$$

2/ Pour tout $K > 0$, il existe deux fonctions positives b_1 et b_2 dans $L^1([0, 1])$ telles que pour tout $(u, v) \in [-K, K] \times \mathbb{R}$,

$$|f(t, u, v)| \leq b_1(t) + b_2(t)\phi(|v|) \text{ p.p sur } [0, 1]. \quad (3.2.34)$$

Alors le problème (3.2.1) admet au moins une solution dans $C^1([0, 1])$.

Preuve. La preuve est divisée en trois étapes dans chacune on montre qu'une condition du lemme (3.2.3) est satisfaite pour $f^*(t, x, y, \lambda) = f(t, x, y)$ sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$.

1^{ère} étape: On montre qu'il existe $c > 0$, telle que pour tout $(\lambda, x) \in]0, 1] \times C^1([0, 1])$, si x est une solution du problème (3.2.9) alors $\|x\|_1 < c$.

Soit $M > 0$ la constante définie dans l'hypothèse (1), supposons que $(\lambda, x) \in]0, 1] \times C^1([0, 1])$ tel que x est une solution du problème (3.2.9), alors pour tout $t \in]0, 1[$,

$$(\phi(x'(t)))' = \lambda f(t, x(t), x'(t)).$$

et

$$\begin{aligned} \beta(x, \lambda) &= \lambda(\theta(x'(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \theta(x'(\xi_i))) \\ &\quad + (1 - \lambda) \left[\phi(x'(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \phi(x'(\xi_i)) \right], \end{aligned}$$

avec $x'(0) = 0$.

On montre que $|x(0)| \leq M$. Raisonnons par l'absurde, supposons que $|x(0)| \notin [0, M]$.

On va considérer seulement le cas $x(0) > M$ (pour le cas $x(0) < -M$, on procède de la même manière). La continuité de x entraîne qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \epsilon]$

$$x(t) > M.$$

L'hypothèse (1) entraîne que pour tout $t \in [0, \epsilon]$

$$f(t, x(t), x'(t)) > 0.$$

Puisque x' est strictement croissante sur $[0, \epsilon]$ et $x'(0) = 0$, on a $x' \geq 0$ sur $[0, \epsilon]$.

On pose

$$t_M = \sup \{t \in [0, 1] \mid x' \text{ est strictement croissante et positive sur } [0, t]\}$$

on a $t_M \geq \epsilon$.

i/ Si $t_M < 1$, puisque $x(t_M) > M$, il existe $\delta \in]0, t_M[$ tel que pour tout $t \in [t_M - \delta, t_M + \delta]$

$$x(t) > M.$$

Par l'hypothèse (1), pour tout $t \in [t_M - \delta, t_M + \delta]$

$$f(t, x(t), x'(t)) > 0$$

de plus $x'(t)$ est strictement croissante et positive sur $[0, t_M + \delta]$, ça contredit la maximalité de t_M .

ii/ Si $t_M = 1$ alors x' soit strictement croissante et positive sur $]0, 1]$.

D'autre part, puisque $\beta(x, \lambda) = 0$, il existe $\pi \in \{\theta, \phi\}$ tel que

$$\pi(x'(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \pi(x'(\xi_i)) < 0.$$

Soit $\xi \in \{\xi_i, i \in \{1, \dots, m-2\}\}$ telle que

$$x'(\xi) = \max_{i \in \{1, \dots, m-2\}} \{x'(\xi_i)\},$$

comme $\pi(x'(1)) < \pi(x'(\xi))$, on a

$$x'(1) < x'(\xi),$$

absurde. Par conséquent $|x(0)| \leq M$.

Posons

$$v_M = \sup \{t \in [0, 1] \mid |x(s)| \leq M \text{ sur } [0, t]\}.$$

Pour $K = M$, on a

$$|x(s)| \leq K \text{ pour tout } s \in [0, v_M]. \quad (3.2.35)$$

Par l'hypothèse (2), on a pour tout $t \in [0, v_M]$

$$|f(t, x(t), x'(t))| \leq b_1(t) + b_2(t)\phi(|x'(t)|)$$

et ainsi,

$$\phi(|x'(t)|) = \left| \int_0^t f(s, x(s), x'(s)) ds \right| \leq \|b_1\|_{L^1} + \int_0^t b_2(s) \cdot \phi(|x'(s)|) ds.$$

On appliquant le lemme (4.3.1) (Gronwall), on a pour tout $t \in [0, v_M]$

$$|\phi(x'(t))| \leq \|b_1\|_{L^1} \cdot \exp\left(\int_0^{v_M} b_2(s) ds\right) \leq \|b_1\|_{L^1} \cdot \exp \|b_2\|_{L^1}$$

Si on pose, $c_0 = \|b_1\|_{L^1} \cdot \exp \|b_2\|_{L^1}$ et $c = M + \phi^{-1}(c_0) + 1$, alors

$$|x'(t)| \leq \phi^{-1}(c_0) \text{ sur } [0, v_M]. \quad (3.2.36)$$

Dans le cas où $v_M = 1$, les relations (3.2.36) et (3.2.35) entraînent

$$\|x\|_1 < c.$$

Supposons que $v_M < 1$, dans ce cas on a $|x(v_M)| = M$.

On va montrer que

$$\|x'\|_0 < \phi^{-1}(c_0),$$

seulement pour le cas $x(v_M) = M$ (pour le cas $x(v_M) = -M$ on procède de la même manière).

La fonction x n'admet pas de maximum local sur $]v_M, 1[$, car sinon il va exister $t_0 \in]v_M, 1[$ tel que $x'(t_0) = 0$ et tel que

$$x(t_0) > M \text{ et } (\phi(x'(t)))' \big|_{t=t_0} \leq 0,$$

donc $f(t_0, x(t_0), x'(t_0)) \leq 0$ et cela va contredire l'hypothèse (1).

Puisque x est strictement croissante et positive sur $]v_M, 1[$, donc pour tout $t \in]v_M, 1[$

$$x(t) > M.$$

L'hypothèse (1) entraîne que pour tout $t \in]v_M, 1[$,

$$f(t, x(t), x'(t)) > 0.$$

Donc x' est strictement croissante et positive sur $]v_M, 1[$.

De plus, puisque $\beta(x, \lambda) = 0$, il existe $\pi \in \{\theta, \phi\}$ tel que

$$\pi(x'(1)) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \pi(x'(\xi_i)) < 0$$

et avec le fait que $x'(1) > 0$ cela signifie que l'ensemble

$$\Omega'_0 = \{i \in \{1, \dots, m-2\} \text{ tel que } x'(\xi_i) > 0\}.$$

est non vide.

Soit $j \in \Omega'_0$ tel que

$$x'(\xi_j) = \max_{i \in \Omega'_0} x'(\xi_i),$$

puisque π est strictement croissante, on a

$$\pi(x'(1)) < \sum_{i \in \Omega'_0} a_i \pi(x'(\xi_i)) \leq \left(\sum_{i \in \Omega'_0} a_i \right) \pi(x'(\xi_j))$$

et avec le fait que $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \leq 1$ on trouve

$$x'(1) < x'(\xi_j).$$

Puisque x' est strictement croissante sur $]v_M, 1]$, on a $\xi_j \notin]v_M, 1]$, donc $x'(\xi_j) < \phi^{-1}(c_0)$ et

$$x'(t) < x'(1) < \phi^{-1}(c_0) \quad \forall t \in]v_M, 1]. \quad (3.2.37)$$

Les deux inégalités (3.2.36) et (3.2.37) impliquent que

$$\|x'\|_0 < \phi^{-1}(c_0). \quad (3.2.38)$$

De plus, pour tout $t \in]v_M, 1]$

$$|x(t)| \leq |x(v_M)| + \int_{v_M}^1 |x'(s)| ds \leq M + \phi^{-1}(c_0) \quad (3.2.39)$$

En tenant compte de (3.2.38), la relation (3.2.39) entraîne

$$\|x\|_1 < c.$$

2^{ème} étape: Soit $\rho \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, avec $\Omega = B(0, c)$.

On peut écrire la fonction F sous la forme

$$F(\rho) = - \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \right) \int_0^1 f(t, \rho, 0) dt + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_{\xi_i}^1 f(t, \rho, 0) dt \right]. \quad (3.2.40)$$

Puisque $|\rho| = c > M$, par l'hypothèse (1) on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\rho \cdot f(t, \rho, 0) > 0.$$

- Si $\rho = c$ alors $f(., \rho, v) > 0$ sur $[0, 1]$ et par la relation (3.2.40) on a

$$F(\rho) < 0.$$

- Si $\rho = -c$ alors $f(., \rho, v) < 0$ sur $[0, 1]$ et toujours par (3.2.40) il vient

$$F(\rho) > 0.$$

Par conséquent, on a $\forall \rho \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}, F(\rho) \neq 0$.

3^{ème} étape: Puisque $F(c) < 0$ et $F(-c) > 0$, le degré $d_B(F, \Omega_0, 0) \neq 0$. ■

3.3 Existence de solutions par la méthode des sous et sur-solutions

3.3.1 Introduction

Dans cette section, on s'intéressera à l'étude du problème aux limites à plusieurs points

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) & t \in]0, 1[\\ u'(0) - \sum_{i=1}^m a_i u'(t_i) = \lambda_1, u(1) - \sum_{i=1}^m b_i u(t_i) = \lambda_2 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Dans toute la suite, on va supposer que $(\sum_{i=1}^m a_i, \sum_{i=1}^m b_i) \in]0, 1[\times]0, 1[$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction vérifiant :

- i) $f(., x, y)$ est mesurable sur $[0, 1]$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ii) $f(t, ., .)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ p.p sur $[0, 1]$.

Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $m = 1$, le problème a été largement étudié par J.Y. Wong et D.Q. Jiang [39]; ils ont donné des différents résultats d'existence d'une solution par la méthode des sous et sur solutions et cela en utilisant les propriétés du degré topologique.

Dans notre cas, on va supposer que $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on donnera deux domaines disjoints Λ^E, Λ^N dans le plan (λ_1, λ_2) tels que, si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^E$, alors le problème (3.3.1) admet au moins une solution et si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^N$, alors le problème (3.3.1) n'admet pas de solutions. Pour cela, on va utiliser les conditions suivantes ;

(H1) $\forall \gamma > 0, \exists \rho_\gamma \in L([0, 1])$ telle que

$$f(t, x, y) \leq \rho_\gamma(t) \text{ pour tout } (t, x, y) \in [0, 1] \times [-\gamma, \gamma]^2.$$

(H2) $\exists (\xi, \eta, r) \in \mathbb{R}^2 \times L([0, 1])$ tel que $0 < \eta < \xi$, $r \geq 0$, on a

$$f(t, x, y) \leq r(t) \forall (t, x, y) \in [0, 1] \times [0, \xi] \times [-\xi, 0]$$

et

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \left[\int_0^1 r(s) ds + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} r(s) ds \right] \leq \eta$$

(H3) $\exists(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$f(t, x, y) \geq \chi(t).x \quad \forall (t, x, y) \in]t_m, 1[\times [\eta_1, \infty[\times]-\infty, -\eta_2],$$

avec $\chi \in L([t_m, 1])$, $\chi \geq 0$ telle que; $\int_{t_m}^1 (1-s)\chi(s)\mu(s)ds \geq 1 - \sum_{i=1}^m b_i$, où $\mu(t) = \min\{t, 1-t\}$, $t \in [0, 1]$.

Ce problème a été étudié par Lingju Kong et Qingkai Kong [18].

On considère les espaces de Banach $X = C^1(0, 1)$ et $L([0, 1])$ muni respectivement de la norme $\|u\| = \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}$ et $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(s)|ds$, où $\|u\|_\infty = \max_{[0,1]} |u(t)|$.

Définitions :

Soit $u \in X$.

1/ On dit que u est une sous-solution du problème (3.3.1) si elle vérifie le système :

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) > 0 & t \in]0, 1[\\ u'(0) - \sum_{i=1}^m a_i u'(t_i) \geq \lambda_1, u(1) - \sum_{i=1}^m b_i u(t_i) \leq \lambda_2 \end{cases}.$$

2/ On dit que u est une sur-solution du problème (3.3.1) si elle vérifie le système :

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) < 0 & t \in]0, 1[\\ u'(0) - \sum_{i=1}^m a_i u'(t_i) \leq \lambda_1, u(1) - \sum_{i=1}^m b_i u(t_i) \geq \lambda_2 \end{cases}.$$

Dans toute la suite, on va considérer les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{aligned} \Lambda_*^E &= \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1 \geq \frac{-a'_1 b'_1}{b'_2} . c, \lambda_2 \leq b'_1 c, \frac{-\lambda_1 . b'_2 + \lambda_2 . a'_1}{a'_1 b'_1} \leq c \right\}, \\ \Lambda_*^N &= \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1 \leq -\eta_2 (1 - \sum_{i=1}^m a_i), \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i (t_i - 1) + \lambda_2 (1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} \geq \eta_1 \right\} \\ \Lambda_{**}^E &= \{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E, \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0 \} \end{aligned}$$

avec

$$a'_1 = 1 - \sum_{i=1}^m a_i, \quad b'_1 = 1 - \sum_{i=1}^m b_i, \quad b'_2 = 1 - \sum_{i=1}^m b_i t_i \quad \text{et} \quad c = \xi - \eta,$$

où ξ et η sont deux constantes définies dans l'hypothèse (H2) et η_1 et η_2 sont deux constantes définies dans l'hypothèse (H3).

Soit Λ_+^E un sous ensemble de Λ_*^E défini par

$$\Lambda_+^E = A_0 \cup A_1,$$

où

$$A_0 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E / \lambda_1 < 0, \lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i) > 0 \right\}$$

et

$$A_1 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E / \lambda_1 \geq 0, \lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i) > 0 \right\}.$$

3.3.2 Formulation en un problème du point fixe

Considérons le problème aux limites :

$$\begin{cases} -v''(t) = g(t, v) & t \in]0, 1[\\ v'(0) - \sum_{i=1}^m a_i v'(t_i) = 0, \quad v(1) - \sum_{i=1}^m b_i v(t_i) = 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

où $g(t, v) = f(t, v(t) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, v'(t) + \lambda_1 y_1')$ avec

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{t}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} + \frac{\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}, \\ y_2(t) &= \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i}. \end{aligned}$$

Pour chaque $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $X(\eta) = \{v \in X, (v(t), v'(t)) \in [0, \eta] \times [-\eta, 0] \ \forall t \in [0, 1]\}$.

On remarque que $X(\eta)$ est croissante par rapport à η (au sens de l'inclusion).

On définit un opérateur $T_3 : X \longrightarrow X$ de la manière suivante :

$$T_3 u(t) = - \int_0^t (t-s) g(s, u) ds + t b(u) + c(u), \text{ où}$$

$$\begin{cases} b(u) = - \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} g(s, u) ds \\ c(u) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} [\int_0^1 (1-s) g(s, u) ds - \sum_{i=1}^m b_i \int_0^{t_i} (t_i - s) g(s, u) ds + A u] \\ A u = \frac{1 - \sum_{i=1}^m b_i t_i}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} g(s, u) ds. \end{cases}.$$

En utilisant le fait que f est positive, on peut montrer que $T_3 u \geq 0 \ \forall u \in X$.

Soient α et β deux fonctions dans X , telles que $\alpha(t) \leq \beta(t)$ et $\alpha'(t) \geq \beta'(t) \ \forall t \in [0, 1]$.

Pour chaque $u \in X$, les fonctions $\tilde{u}$ et $\tilde{u}^{(1)} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont définies par :

$$\tilde{u}^{(1)}(t) = \max \{ \beta'(t), \min \{ u'(t), \alpha'(t) \} \}, \quad \tilde{u}(t) = \max \{ \alpha(t), \min \{ u(t), \beta(t) \} \} \quad t \in [0, 1].$$

On pose $\varphi(u'(t_i)) = \tilde{u}^{(1)}(t_i)$, $\psi(u(t_i)) = \tilde{u}(t_i)$.

On définit la fonctionnelle $f_3 :]0, 1[\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f_3(t, u) = \begin{cases} f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) + \frac{u'(t) - \alpha'(t)}{1 + (u'(t))^2} & u'(t) > \alpha'(t) \\ f(t, \tilde{u}(t), u'(t)) & \beta'(t) \leq u'(t) \leq \alpha'(t) \\ f(t, \beta(t), \beta'(t)) + \frac{u'(t) - \beta'(t)}{1 + (u'(t))^2} & u'(t) \leq \beta'(t). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $f_3(t, \cdot)$ est continue et bornée sur X , presque pour tout $t \in]0, 1[$.

Considérons le problème aux limites ;

$$\begin{cases} -u''(t) = f_3(t, u) & t \in]0, 1[\\ u'(0) - \sum_{i=1}^m a_i \varphi(u'(t_i)) = \lambda_1, \quad u(1) - \sum_{i=1}^m b_i \psi(u(t_i)) = \lambda_2. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

On remarque que $\tilde{\alpha}^{(1)}(t) = \alpha'(t)$, $\tilde{\beta}^{(1)}(t) = \beta'(t)$ et que $\forall t \in [0, 1]$, $f_3(t, \cdot)$ est bornée et continue sur X . On définit l'opérateur $T : X \longrightarrow X$ de la manière suivante :

$$Tx(t) = \sum_{i=1}^m a'_i(t-1) + \sum_{i=1}^m b'_i + \lambda_2 + \int_0^1 G(t, s) f_3(s, u) ds,$$

où $a'_i = a_i \varphi(x'(t_i)) + \frac{\lambda_1}{m}$, $b'_i = b_i \psi(x(t_i))$ $i \in \{1, \dots, m\}$ et

$$G(t, s) = \begin{cases} 1 - s & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ 1 - t & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Lemme 3.3.1

i/ x est une solution du problème (3.3.3) si et seulement si x vérifie l'équation :

$$x = Tx \quad (3.3.4)$$

ii/ Si x est un point fixe de T_3 , alors x est une solution du problème (3.3.2) et la fonction

$$u = x + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

est une solution du problème (3.3.1) .

Preuve.

i/ Soit x une solution du problème (3.3.3) .

$$x(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t \int_0^s f_3(\tau, x) d\tau ds. \quad (3.3.5)$$

En integrant les deux cotés de l'inégalité (3.3.5) et avec le fait que $x'(0) = \lambda_1 + \sum_{i=1}^m a_i \varphi(x'(t_i))$, on trouve

$$x(1) = x(0) + x'(0) - \int_0^1 \int_0^s f_3(\tau, x) d\tau ds = \lambda_2 + \sum_{i=1}^m b_i \psi(x(t_i)),$$

$$\text{d'où } x(0) = \sum_{i=1}^m b_i \psi(x(t_i)) + \lambda_2 + \int_0^1 \int_0^s f_3(\tau, x) d\tau ds - (\lambda_1 + \sum_{i=1}^m a_i \varphi(x'(t_i))).$$

D'autre part,

$$\int_t^1 \int_0^s f_3(\tau, x) d\tau ds = (1-t) \int_0^t f_3(s, x) ds + \int_t^1 (1-s) f_3(s, x) ds,$$

donc,

$$\int_t^1 \int_0^s f_3(\tau, x) d\tau ds = \int_0^1 G(t, s) f_3(\tau, x) ds,$$

d'où l'équation (3.3.4) .

Reciproquement, supposons que x vérifie l'équation (3.3.4) . On pose,

$$h(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds, \quad t \in]0, 1[.$$

Pour tout $t \in]0, 1[$

$$h'(t) = - \int_0^t f_3(s, x) ds \text{ et } x'' = h'' = -f_3(t, x)$$

avec

$$x'(t) = \sum_{i=1}^m a'_i - \int_0^t f_3(s, x) ds \text{ et } G(1, \cdot) \equiv 0$$

donc

$$x'(0) = \sum_{i=1}^m a'_i = \sum_{i=1}^m a_i \varphi(x'(t_i)) + \lambda_1 \text{ et } x(1) = \sum_{i=1}^m b'_i + \lambda_2,$$

x est une solution du problème (3.3.3) .

ii/ Si $u(t) = - \int_0^t (t-s) g(s, u) ds + tb(u) + c(u)$ alors

$$u(1) = \sum_{i=1}^m b_i u(t_i)$$

et $\forall t \in]0, 1[:$

$$\begin{cases} u''(t) + g(s, u) = 0 \\ u'(t) = - \int_0^t g(s, u) ds + b(u) \Rightarrow u'(0) = \sum_{i=1}^m a_i u'(t_i) \end{cases}.$$

u est une solution du problème (3.3.2) . ■

Lemme 3.3.2

1/ S'il existe $p \in L^1([0, 1])$ tel que pour tout $(t, x, y) \in [0, 1] \times [\alpha(t), \beta(t)] \times [\beta'(t), \alpha'(t)]$

$$f(t, x, y) \leq p(t),$$

alors les opérateurs T est complètement continu sur X .

2/ Si on suppose qu'il existe $(\xi, r) \in \mathbb{R}_+^* \times L([0, 1])$ tel que pour tout $(t, x, y) \in [0, 1] \times [0, \xi] \times [-\xi, 0]$;

$$f(t, x, y) \leq r(t) ,$$

alors $T_3 : X(\xi) \longrightarrow X$ est complètement continu sur $X(\xi)$.

Preuve. Il suffit de montrer la continuité de

$$Au(t) = (t - 1) \sum_{i=1}^m a_i \tilde{u}^{(1)}(t_i)$$

et que l'opérateur

$$Lu(t) = \int_0^1 G(t, s) f_3(s, u(s)) ds$$

est complètement continu sur X .

En effet, soit $u_0 \in X$, et $(u_n)_n \subset X$ une suite telle que, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$ dans X .

Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on pose

$$A_i : u \longmapsto \tilde{u}^{(1)}(t_i), \text{ avec } \tilde{u}^{(1)}(t) = \max \{ \beta'(t), \min \{ u'(t), \alpha'(t) \} \} .$$

Il est claire que

$$\tilde{\alpha}^{(1)}(t) = \alpha'(t) \text{ et } \tilde{\beta}^{(1)}(t) = \beta'(t).$$

On considère les sous ensembles; $D_1^t =]\beta'(t), \alpha'(t)[$, $D_2^t =]\alpha'(t), \infty[$ et $D_3^t =]-\infty, \beta'(t)[$,

on remarque que, $\forall u \in X$, on a :

$$\tilde{u}^{(1)}(t) = \begin{cases} u'(t) & \text{si } u'(t) \in]\beta'(t), \alpha'(t)[\\ \alpha'(t) & \text{si } u'(t) > \alpha'(t) \\ \beta'(t) & \text{si } u'(t) < \beta'(t) \end{cases}$$

- Si $u'_0(t_i) \notin \{\alpha'(t_i), \beta'(t_i)\}$ alors il existe $\exists j \in \{1, 2, 3\} / u'_0(t_i) \in D_j^{t_i}$ et on a,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(t_i) = u'_0(t_i) \in D_j^{t_i}$$

donc $\exists n_0 > 0 / \forall n \geq n_0, u'_n(t_i) \in D_j^{t_i}$ cela signifie qu'on a ou bien

$$\tilde{u}_n^{(1)}(t_i) = \tilde{u}_0^{(1)}(t_i) \in \{\alpha'(t_i), \beta'(t_i)\} \forall n \geq n_0 \text{ si } j \in \{2, 3\}$$

ou

$$\tilde{u}_n^{(1)}(t_i) = u'_n(t_i) \text{ et } \tilde{u}_0^{(1)}(t_i) = u'_0(t_i) \text{ si } j = 1.$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} A_i u_n = A_i u_0$.

- Si $u'_0(t_i) \in \{\alpha'(t_i), \beta'(t_i)\}$, on peut supposer que $u'_0(t_i) = \alpha'(t_i)$ (les mêmes arguments utilisés pour le cas $u'_0(t_i) = \beta'(t_i)$).

Puisque $\alpha'(t_i) > \beta'(t_i)$, il existe $n_3 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_3$,

$$u'_n(t_i) > \beta'(t_i),$$

donc $\tilde{u}_0^{(1)}(t_i) = \alpha'(t_i)$ et

$$A_i u_0 - A_i u_n = \alpha'(t_i) - \max \{ \beta'(t_i), \min \{ u'_n(t_i), \alpha'(t_i) \} \},$$

ou encore

$$\begin{aligned} |A_i u_0 - A_i u_n| &= \alpha'(t_i) - \max \{ \beta'(t_i), \min \{ u'_n(t_i), \alpha'(t_i) \} \} \\ &= \alpha'(t_i) - \min \{ u'_n(t_i), \alpha'(t_i) \} \\ &\leq |u'_n(t_i) - \alpha'(t_i)| \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} |u'_n(t_i) - \alpha'(t_i)| = 0$, donc pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_i u_0 - A_i u_n| = 0.$$

et cela signifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a_i \tilde{u}_n^{(1)}(t_i) = \sum_{i=1}^m a_i \tilde{u}_0^{(1)}(t_i).$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} |A u_n - A u_0| = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |(A u_n)' - (A u_0)'| = 0$ uniformément sur $[0, 1]$, d'où la continuité.

Il reste à montrer que $Lu(t) = \int_0^1 G(t, s)f_3(s, u)ds$ est complètement continu.

(i) **Continuité :** Soit $u_0 \in X$, $(u_n)_n$ une suite qui converge vers u_0 dans X .

On montre que les suites $(Lu_n)_n$ converge vers Lu_0 dans X .

D'abord, on montre que $|f_3(\cdot, u)| \leq p(\cdot) + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1 \forall u \in X$.

- Si $u'(t) > \alpha'(t)$ alors

$$f_3(t, u) = f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) + \frac{u'(t) - \alpha'(t)}{1 + (u'(t))^2}$$

et par hypothèse, on a $|f(t, \alpha(t), \alpha'(t))| \leq p(t)$ donc

$$|f_3(t, u)| \leq p(t) + |\alpha'(t)| + \frac{|u'(t)|}{1 + (u'(t))^2} \leq p(t) + \|\alpha\| + 1$$

- Si $u'(t) < \beta'(t)$ alors,

$$|f_3(t, u)| = \left| f(t, \beta(t), \beta'(t)) + \frac{u'(t) - \beta'(t)}{1 + (u'(t))^2} \right| \leq p(t) + \|\beta\| + 1$$

- Si $u'(t) \in [\beta'(t), \alpha'(t)]$ alors, $|f_3(t, u)| = |f(t, \tilde{u}(t), u'(t))| \leq p(t)$.

On pose

$$F_n = f_3(\cdot, u_n), F = f_3(\cdot, u_0) \text{ et } g(\cdot) = p(\cdot) + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1.$$

on a $\forall n \in \mathbb{N} |F_n| \leq g$.

Par continuité de $f_3(t, \cdot)$ p.p sur $[0, 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t) \text{ p.p sur } [0, 1].$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_3(t, u_n) - f_3(t, u_0)| dt = 0.$$

D'autre part, on a $\forall (t, s) \in [0, 1]^2, |G(t, s)| \leq 1$ et

$$\begin{cases} |(Lu_n) - (Lu_0)|(t) \leq \int_0^1 |f_3(t, u_n) - f_3(t, u_0)| dt \\ |(Lu_n)' - (Lu_0)'|(t) \leq \int_0^1 |f_3(t, u_n) - f_3(t, u_0)| dt \end{cases}.$$

Par conséquent, $(Lu_n)_n$ et $((Lu_n)')_n$ convergent uniformément vers Lu_0 et $(Lu_0)'$ respectivement, d'où la continuité.

(ii) **Compacité :**

On remarque que pour tout $u \in X$, $(t, s) \in [0, 1]^2$ $|G(t, s)| \leq 1 - s$ et $|f_3(t, u)| \leq g(t)$.

Pour montrer la compacité de T_1 on va utiliser le théorème d'Ascoli Arzela,

Soit $B = B(0, r)$ avec $r > 0$. on va vérifier que l'ensemble $L(B)$ est équicontinu, en effet,

Soit $(s_1, s_2) \in [0, 1]^2 / s_1 < s_2$, on a $\forall u \in B$,

$$|Lu(s_1) - Lu(s_2)| = \left| \int_0^1 (G(s_1, s) - G(s_2, s)) f_3(s, u(s)) ds \right|$$

$$\int_0^1 (G(s_1, s) - G(s_2, s)) f_3(s, u(s)) ds = \int_0^{s_1} (s_1 - s_2) f_3(s, u(s)) ds + \int_{s_1}^{s_2} (s_2 - s) f_3(s, u(s)) ds$$

Si on pose $c = \int_0^1 g(s) ds$, alors

$$|Lu(s_1) - Lu(s_2)| \leq c |s_1 - s_2|, \forall u \in B.$$

De plus, $L(B)$ est borné dans X . Donc l'opérateur F est complètement continu. ■

Lemme 3.3.3 *Supposons que le problème (3.3.1) admet une sous-solution α et une sur-solution β telles que $\alpha(t) \leq \beta(t)$ et $\alpha'(t) \geq \beta'(t) \quad \forall t \in [0, 1]$. Si u est une solution du problème (3.3.3), alors u est une solution du problème (3.3.1).*

Preuve. Supposons que u est une solution du problème (3.3.3) on remarque que si

$$(u(t), u'(t)) \in [\alpha(t), \beta(t)] \times [\beta'(t), \alpha'(t)]$$

alors,

$$\tilde{u}^{(1)}(t_i) = u'(t_i) \text{ et } \tilde{u}(t) = u(t) \forall (t, i) \in [0, 1] \times \{1, \dots, m\},$$

donc,

$$f_3(t, u) = f(t, \tilde{u}(t), u'(t)) = f(t, u(t), u'(t)),$$

cela signifie que u est une solution du problème (3.3.1), donc il suffit de montrer que

$$(u(t), u'(t)) \in [\alpha(t), \beta(t)] \times [\beta'(t), \alpha'(t)].$$

1/ On montre seulement que $u'(t) \geq \beta'(t)$ et $u(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ (les inégalités $u'(t) \leq \alpha'(t)$ et $u(t) \geq \alpha(t)$ se démontrent de la même manière).

En effet, raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $v(t_0) = \min_{[0,1]} v(t) < 0$ avec $v = u' - \beta'$.

Trois cas se présentent :

1^{er} **cas** : Si $t_0 \in]0, 1[$ alors,

$$\begin{aligned} 0 &= v'(t_0) = u''(t_0) - \beta''(t_0) \\ &\geq -(f(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0)) + \frac{u'(t_0) - \beta'(t_0)}{1 + (u'(t_0))^2}) + f(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0)) \end{aligned}$$

cela implique que $0 = v'(t_0) \geq -\frac{u'(t_0) - \beta'(t_0)}{1 + (u'(t_0))^2} > 0$, absurde.

2^{ème} **cas** : Si $t_0 = 0$ alors,

$$\begin{aligned} 0 &> v(0) = u'(0) - \beta'(0) = \sum_{i=1}^m a_i \tilde{u}^{(1)}(t_i) + \lambda_1 - \beta'(0) \\ &\geq \sum_{i=1}^m a_i \beta'(t_i) + \lambda_1 - \beta'(0) \geq 0, \end{aligned}$$

absurde.

3^{ème} **cas** : Si $t_0 = 1$ alors $\exists t_* \in]0, 1[$ / $v(t_*) < 0$ et $v'(t_*) \leq 0$, de plus,

$$\begin{aligned} 0 &\geq v'(t_*) = u''(t_*) - \beta''(t_*) \\ &\geq -(f(t_*, \beta(t_*), \beta'(t_*)) + \frac{u'(t_*) - \beta'(t_*)}{1 + (u'(t_*))^2}) + f(t_*, \beta(t_*), \beta'(t_*)) \end{aligned}$$

cela implique que $0 \geq v'(t_*) \geq -\frac{u'(t_*) - \beta'(t_*)}{1 + (u'(t_*))^2} > 0$, absurde.

2/ On montre que $u(t) \leq \beta(t) \forall t \in [0, 1]$; en effet, si on pose $w = u - \beta$ alors,

$$w(1) = \sum_{i=1}^m b_i \tilde{u}(t_i) + \lambda_2 - \beta(1) \leq \sum_{i=1}^m b_i \beta(t_i) + \lambda_2 - \beta(1) \leq 0$$

donc, $w(1) \leq 0$. Puisque $w' \geq 0$, on a $w \leq 0$. ■

Lemme 3.3.4 Soit $u \in X$, si $u \geq 0$ et u' est décroissante sur $[0, 1]$ alors $u(t) \geq \mu(t) \max_{[0,1]} u(s)$ sur $[0, 1]$, où $\mu(t) = \min \{t, 1 - t\}$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que,

$$u(t_0) < \mu(t_0) \max_{[0,1]} |u(s)|.$$

Soit $t_* \in]0, 1]$ tel que $\max_{[0,1]} |u(s)| = u(t_*)$.

Il est clair que $t_0 \neq 0$ car $\mu(0) = 0$ et $u \geq 0$.

Deux cas se présentent :

1^{er} cas : Si $t_0 \leq 1 - t_0$ alors $\mu(t_0) = t_0$ et $t_0 \neq 1$,

- Si $t_0 < t_*$ alors, par concavité

$$\frac{u(t_0) - u(0)}{t_0} \geq \frac{u(t_*) - u(t_0)}{t_* - t_0}$$

ça implique que $u(t_0) \geq t_0 \cdot u(t_*)$, donc

$$u(t_0) \geq \mu(t_0) \max_{[0,1]} |u(s)|,$$

absurde.

- Si $t_0 = t_*$ alors

$$u(t_0) > t_0 u(t_0) = \mu(t_0) u(t_*),$$

absurde.

- Si $t_0 > t_*$ alors

$$\frac{u(1) - u(t_0)}{1 - t_0} \leq \frac{u(t_0) - u(t_*)}{t_0 - t_*}$$

donc

$$u(t_0) \geq \left(\frac{1 - t_0}{1 - t_*} \right) \cdot u(t_*) \geq t_0 \cdot u(t_*) = \mu(t_0) \max_{[0,1]} |u(s)|,$$

absurde.

2^{ème} cas : Si $t_0 > 1 - t_0$ alors $\mu(t_0) = 1 - t_0$,

- Si $t_0 < t_*$ alors, $\frac{u(t_0) - u(0)}{t_0} \geq \frac{u(t_*) - u(t_0)}{t_* - t_0} \Rightarrow u(t_*) \leq \frac{u(t_0)}{t_0}$ cela entraîne que,

$$u(t_0) \geq (1 - t_0) u(t_*) = \mu(t_0) \max_{[0,1]} |u(s)|$$

absurde.

- Si $t_0 > t_*$ alors,

$$\frac{u(1) - u(t_0)}{1 - t_0} \leq \frac{u(t_0) - u(t_*)}{t_0 - t_*}$$

ça implique que

$$u(t_0) \geq \left(\frac{1 - t_0}{1 - t_*} \right) \cdot u(t_*)$$

ainsi

$$u(t_0) \geq (1 - t_0).u(t_*) = \mu(t_0) \max_{[0,1]} |u(s)|,$$

donc

$$u(t_0) \geq \left(\frac{1 - t_0}{1 - t_*}\right).u(t_*) \geq (1 - t_0).u(t_*) = \mu(t_0) \max_{[0,1]} |u(s)|,$$

absurde.

- Si $t_0 = t_*$ alors

$$u(t_0) < \mu(t_0) \max_{[0,1]} |u(s)| = (1 - t_0)u(t_0) \leq u(t_0),$$

absurde. Par conséquent $u(t) \geq \mu(t) \max_{[0,1]} u(s) \forall t \in [0, 1]$. ■

Lemme 3.3.5

i/ $y_1 \leq 0$ et $y_2 > 0$ sur $[0, 1]$,

ii/ $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$

$$\frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} \leq \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \leq \frac{\lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)},$$

iii/ $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \geq \frac{\lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}.$$

Preuve. D'abord, on remarque que pour tout $t \in [0, 1]$, on a

a/

$$\begin{aligned} t(1 - \sum_{i=1}^m b_i) + \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1 &\leq (1 - \sum_{i=1}^m b_i) + \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1 \\ &\leq \sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1) \leq 0. \end{aligned}$$

b/

$$t(1 - \sum_{i=1}^m b_i) + \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1 \geq \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1.$$

i/ Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$y_1(t) = \frac{t(1 - \sum_{i=1}^m b_i) + \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} \leq 0,$$

et $y_2(t) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i}$ avec $\sum_{i=1}^m b_i \in [0, 1[$, donc $y_2(t) > 0$.

ii/ Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \frac{\lambda_1(t(1 - \sum_{i=1}^m b_i) + \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}.$$

Par l'inégalité a/, on tire

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \geq \frac{\lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1)) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}$$

et l'inégalité b/, entraîne

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \leq \frac{\lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}.$$

iii/ $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \frac{\lambda_1(t(1 - \sum_{i=1}^m b_i) + \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)},$$

donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \geq \frac{\lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}$. ■

3.3.3 Résultats principaux

Théorème 3.3.1 *Supposons que le problème (3.3.1) admet une sous-solution α et une sur-solution β telles que $\alpha(t) \leq \beta(t)$ et $\alpha'(t) > \beta'(t) \quad \forall t \in]0, 1[$.*

S'il existe $p \in L^1([0, 1])$ telle que :

$$|f(t, x, y)| \leq p(t) \quad \forall (t, x, y) \in]0, 1[\times [\alpha(t), \beta(t)] \times [\beta'(t), \alpha'(t)],$$

alors le problème (3.3.1) admet au moins une solution u vérifiant :

$$(u(t), u'(t)) \in [\alpha(t), \beta(t)] \times [\beta'(t), \alpha'(t)] \quad \forall t \in [0, 1].$$

Preuve. On montre que le problème (3.3.3) admet au moins une solution.

On pose $g(\cdot) = p(\cdot) + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1$, on a

$$|f_3(t, u)| \leq p(t) + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1, \quad \forall (t, u) \in [0, 1] \times X.$$

D'après le lemme (3.3.1), il suffit de montrer que T admet au moins un point fixe.

$$\forall u \in X, |\tilde{u}^{(1)}(t_i)| \leq \max\{\|\alpha\|, \|\beta\|\} \text{ et } |\tilde{u}(t_i)| \leq \max\{\|\alpha\|, \|\beta\|\}. \quad |G(t, s)| \leq 1 \Rightarrow \left| \int_0^1 G(t, s) f_3(s, u) ds \right| \leq \|p\|_1 + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1.$$

On pose $M_0 = \max\{\|\alpha\|, \|\beta\|\}$, on a $\forall t \in [0, 1]$

$$|Tu(t)| \leq \sum_{i=1}^m (a_i M_0 + \frac{|\lambda_1|}{m}) + \sum_{i=1}^m b_i M_0 + |\lambda_2| + \|p\|_1 + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1$$

donc,

$$\|Tu\| \leq \sum_{i=1}^m (a_i M_0 + \frac{|\lambda_1|}{m}) + \sum_{i=1}^m b_i M_0 + |\lambda_2| + \|p\|_1 + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1$$

Par conséquent, si on prend

$$r = \sum_{i=1}^m (a_i M_0 + \frac{|\lambda_1|}{m}) + \sum_{i=1}^m b_i M_0 + |\lambda_2| + \|p\|_1 + \|\alpha\| + \|\beta\| + 1$$

on a $TX \subset \bar{B}(0, r)$, par le théorème (1.3.1) de Schauder, on déduit que l'opérateur T admet au moins un point fixe. ■

Corollaire 3.3.1 *Supposons que le problème (3.3.1) admet une sous-solution α et une sur-solution β telles que $\alpha'(t) \geq \beta'(t) \quad \forall t \in [0, 1]$. On pose*

$$\alpha_*(t) = \min\{\alpha(t), \beta(t)\}, \beta_*(t) = \max\{\alpha(t), \beta(t)\}.$$

Si il existe $p \in L([0, 1])$ tel que

$$|f(t, x, y)| \leq p(t) \quad \forall (t, x, y) \in]0, 1[\times [\alpha_*(t), \beta_*(t)] \times [\beta'(t), \alpha'(t)],$$

alors le problème (3.3.1) admet au moins une solution $u \in X$ telle que

$$(u(t), u'(t)) \in [\alpha_*(t), \beta_*(t)] \times [\beta'(t), \alpha'(t)] \quad \forall t \in [0, 1].$$

Preuve. D'après le théorème (3.3.1), il suffit de montrer que $\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in [0, 1]$:

En effet, si on pose $v = \beta - \alpha$, alors $v(1) \geq \sum_{i=1}^m b_i v(t_i)$.

Puisque $\alpha'(t) \geq \beta'(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, v est une fonction décroissante et

$$v(t_i) \geq v(1) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

donc

$$v(1) \geq \sum_{i=1}^m b_i v(t_i) \geq v(1) \sum_{i=1}^m b_i$$

et avec le fait que $\sum_{i=1}^m b_i < 1$ ça entraîne que $v(1) \geq 0$. ■

Théorème 3.3.2 *On suppose que l'hypothèse H1 est vérifiée.*

S'il existe $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que le problème (3.3.1) admet au moins une solution $\bar{u}$, alors

$$\bar{u} \geq \bar{\lambda}_1 y_1 + \bar{\lambda}_2 y_2 \text{ et } \bar{u}' \leq \bar{\lambda}_1 y_1'.$$

De plus, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in [\bar{\lambda}_1, \infty[\times]-\infty, \bar{\lambda}_2]$, le problème (3.3.1) admet au moins une solution u vérifiant :

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \leq u \leq \bar{u} \text{ et } \bar{u}' \leq u' \leq \lambda_1 y_1'.$$

Preuve. En effet, si on pose $v = \bar{u} - (\bar{\lambda}_1 y_1 + \bar{\lambda}_2 y_2)$ alors v est une solution du problème (3.3.2) , de plus

$$v \geq 0 \text{ et } \bar{u} \geq \bar{\lambda}_1 y_1 + \bar{\lambda}_2 y_2.$$

Puisque $f \geq 0$, $v'' \leq 0$ et

$$v'(0) = \sum_{i=1}^m a_i v'(t_i) \leq \sum_{i=1}^m a_i v'(0)$$

avec $v'(0) \leq 0$, donc

$$v' \leq 0,$$

et ainsi on trouve

$$\bar{u}' \leq \bar{\lambda}_1 y_1'.$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in [\bar{\lambda}_1, \infty[\times]-\infty, \bar{\lambda}_2]$, en utilisant le théorème (3.3.1) , on montre que le problème (3.3.1) admet au moins une solution u .

D'abord, on vérifie que, $\bar{u} = v + \bar{\lambda}_1 y_1 + \bar{\lambda}_2 y_2 \geq \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; En effet, on a

$$\bar{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \text{ et } \bar{u}' = v' + \bar{\lambda}_1 y_1'$$

avec $y_1 \leq 0$ et $y_2 > 0$, en tenant compte du fait que $v' \leq 0$ on déduit que

$$\bar{u}' \leq \lambda_1 y_1'.$$

On définit deux fonctions $(\alpha, \beta) \in X^2$ de la manière suivante :
$$\begin{cases} \alpha = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \beta = \bar{u} \end{cases}.$$

On remarque que $\alpha \leq \beta$ et $\alpha' \geq \beta'$. De plus, par l'hypothèse (H1), on a :

$\forall \gamma > 0, \exists \rho_\gamma \in L([0, 1])$ telle que, $f(t, x, y) \leq \rho_\gamma(t) \forall (t, x, y) \in [0, 1] \times [-\gamma, \gamma]^2$.

Pour $\gamma = \max \{ \|\alpha\|, \|\beta\| \}$, f vérifie la condition du théorème (3.3.1) . Pour montrer ce théorème, il suffit de vérifier que α est une sous-solution et β est une sur-solution du problème(3.3.1) .

a) On montre que α est une sous-solution : en effet, $\forall t \in]0, 1[$,

$$y_1(t) = \frac{t}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} + \frac{\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}, y_2(t) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i}$$

donc

$$\alpha''(t) = \lambda_1 y_1''(t) + \lambda_2 y_2''(t) = 0 \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t))$$

de plus, $\alpha'(0) = \lambda_1 y_1'(0) = \lambda_1 \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i}$ et

$$\alpha'(t_i) = \lambda_1 y_1'(t_i) = \lambda_1 \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} = \alpha'(0) \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i \alpha'(t_i) = \alpha'(0) \sum_{i=1}^m a_i$$

donc

$$\alpha'(0) - \sum_{i=1}^m a_i \alpha'(t_i) = \lambda_1,$$

et

$$\alpha(1) = \lambda_1 y_1(1) + \lambda_2 y_2(1) = \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i (t_i - 1) + \lambda_2 (1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}$$

$$\alpha(t_i) = \lambda_1 y_1(t_i) + \lambda_2 y_2(t_i) = \frac{\lambda_1 (t_i (1 - \sum_{i=1}^m b_i) + \sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2 (1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)}$$

donc, $\alpha(1) - \sum_{i=1}^m b_i \alpha(t_i) = \lambda_2$ et par conséquent on a

$$\begin{cases} \alpha''(t) + f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \geq 0 \\ \alpha'(0) - \sum_{i=1}^m a_i \alpha'(t_i) = \lambda_1, \alpha(1) - \sum_{i=1}^m b_i \alpha(t_i) = \lambda_2 \end{cases}$$

donc α est une sous-solution du problème(3.3.1) .

b) On montre que β est une sur-solution : en effet, pour $(\lambda_1, \lambda_2) = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$, $\bar{u}$ est une solution du problème (3.3.1) , on a

$$\begin{cases} \bar{u}''(t) + f(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t)) = 0 & t \in]0, 1[\\ \bar{u}'(0) - \sum_{i=1}^m a_i \bar{u}'(t_i) = \bar{\lambda}_1, \bar{u}(1) - \sum_{i=1}^m b_i \bar{u}(t_i) = \bar{\lambda}_2 \end{cases}.$$

Comme $(\lambda_1, \lambda_2) \in [\bar{\lambda}_1, \infty[\times]-\infty, \bar{\lambda}_2]$, $\bar{u}$ vérifie le système,

$$\begin{cases} \bar{u}''(t) + f(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t)) \leq 0 & t \in]0, 1[\\ \bar{u}'(0) - \sum_{i=1}^m a_i \bar{u}'(t_i) \leq \lambda_1, \bar{u}(1) - \sum_{i=1}^m b_i \bar{u}(t_i) \geq \lambda_2 \end{cases}$$

donc β est une sur-solution du problème (3.3.1) . ■

Théorème 3.3.3 *Si l'hypothèse (H2) est vérifiée, alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E$, le problème (3.3.1) admet au moins une solution u qui satisfait,*

$$u(t) \geq \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \text{ et } u'(t) \leq \lambda_1 y_1'(t) \forall t \in [0, 1].$$

Preuve. D'abord, on montre que le problème (3.3.1) admet au moins une solution pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_{**}^E$.

En effet, $X(\eta) = \{v \in X, (v(t), v'(t)) \in [0, \eta] \times [-\eta, 0] \forall t \in [0, 1]\}$. On remarque que $X(\eta)$ est un sous ensemble fermé et borné de X , d'après le lemme (3.3.1), il suffit de vérifier que l'opérateur T_3 admet au moins un point fixe.

On montre que $T_3(X(\eta)) \subset X(\eta)$: En effet, soit $v \in X(\eta)$,

$T_3 v(t) = -\int_0^t (t-s)g(s, v)ds + tb(g) + c(g)$, et vérifie le système suivant,

$$\begin{cases} (T_3 v)''(t) + g(t, v) = 0 & t \in]0, 1[\\ (T_3 v)'(0) - \sum_{i=1}^m a_i (T_3 v)'(t_i) = 0, (T_3 v)(1) - \sum_{i=1}^m b_i (T_3 v)(t_i) = 0 \end{cases}$$

on a $T_3 v \geq 0$. D'autre part, $1 - \sum_{i=1}^m b_i t_i \geq 1 - \sum_{i=1}^m b_i$ et $\eta - \xi < 0$,
 $\eta - \xi \leq \frac{1 - \sum_{i=1}^m b_i}{1 - \sum_{i=1}^m b_i t_i}(\eta - \xi)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E$ ça entraîne que,

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^m b_i}{1 - \sum_{i=1}^m b_i t_i}(\eta - \xi) \leq \frac{\lambda_1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \leq 0.$$

Par définition de Λ_{**}^E on a,

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \leq \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i (t_i - 1) + \lambda_2 (1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} \leq \eta - \xi \\ \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \geq \frac{\lambda_2 (1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} = \frac{\lambda_2}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \end{cases}$$

ou encore,

$$0 \leq \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \leq \eta - \xi \forall t \in [0, 1].$$

Puisque $v \in X(\eta)$, on a

$$\begin{cases} 0 \leq v(t) + \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \leq \xi \\ -\xi \leq v'(t) + \lambda_1 y_1'(t) \leq 0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, 1],$$

et par l'hypothèse (H2) on a, $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq g(t, v) \leq r(t)$. De plus,

$$b(g) = -\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} g(s, v)ds \leq 0$$

donc

$$0 \leq T_3 v(t) = - \int_0^t (t-s)g(s, v)ds + tb(g) + c(g) \leq c(g)$$

$$0 \leq T_3 v(t) \leq \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \left[\int_0^1 (1-s)g(s, v)ds + \frac{1 - \sum_{i=1}^m b_i t_i}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} g(s, v)ds \right]$$

et on a

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \left[\int_0^1 r(s)ds + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} r(s)ds \right] \leq \eta$$

donc

$$0 \leq T_3 v(t) \leq \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \left[\int_0^1 r(s)ds + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} r(s)ds \right] \leq \eta$$

donc $0 \leq T_3 v(t) \leq \eta$.

D'autre part, $(T_3 v)'(t) = - \int_0^t g(s, v)ds + b(g) \leq 0$ et

$$\int_0^t g(s, v)ds + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} g(s, v)ds \leq \int_0^1 r(s)ds + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} r(s)ds$$

donc,

$$-\eta \leq -\eta(1 - \sum_{i=1}^m b_i) \leq -\left(\int_0^1 r(s)ds + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} r(s)ds \right) \leq (T_3 v)'(t)$$

et cela signifie que pour tout $t \in [0, 1]$ et $v \in X(\eta)$,

$$((T_3 v)(t), (T_3 v)'(t)) \in [0, \eta] \times [-\eta, 0]$$

donc, $T_3(X(\eta)) \subset X(\eta)$.

D'après le théorème (1.3.1) de Schauder, l'opérateur T_3 admet au moins un point fixe v dans $X(\eta)$. Par conséquent, la fonction $\bar{u}$ définie par, $\bar{u} = v + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution du problème (3.3.1) .

Maintenant, on montre le résultat pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E$.

En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E \setminus \Lambda_{**}^E$, d'après le théorème (3.3.2) , il suffit de vérifier qu'il existe

$$(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) \in \Lambda_{**}^E / (\lambda_1, \lambda_2) \in [\bar{\lambda}_1, \infty[\times]-\infty, \bar{\lambda}_2],$$

- Si $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \leq 0$ alors $\bar{\lambda}_1 \leq 0 \leq \lambda_1$ et $\bar{\lambda}_2 \geq 0 \geq \lambda_2$.

- Si $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ alors il suffit de prendre $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2$, on a $(\lambda_1, \lambda_2) \in [\bar{\lambda}_1, \infty[\times] - \infty, \bar{\lambda}_2]$.
- Si $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$ alors il suffit de prendre $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1$, on a $(\lambda_1, \lambda_2) \in [\bar{\lambda}_1, \infty[\times] - \infty, \bar{\lambda}_2]$.

Par conséquent, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^E$, le problème (3.3.1) admet au moins une solution $\bar{u} = v + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ telle que, $v \in X(\eta)$, c'est-à-dire que $u(t) \geq \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ et $u'(t) \leq \lambda_1 y_1'(t) \forall t \in [0, 1]$. ■

Maintenant on va étudier l'existence de solutions positives du problème (3.3.1), et pour cela, on va considérer le domaine Λ_+^E défini précédemment.

Corollaire 3.3.2 *Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées, alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_+^E$, le problème (3.3.1) admet au moins une solution positive u telle que, $u' \leq \lambda_1 y_1'$.*

Preuve. En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_+^E$, on a $\Lambda_+^E \subset \Lambda_*^E$ et d'après le théorème (3.3.3), le problème (3.3.1) admet au moins une solution u telle que $u(t) \geq \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ et $u'(t) \leq \lambda_1 y_1'(t) \forall t \in [0, 1]$,

1/ Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in A_0$ alors $\lambda_1 < 0, \lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i) > 0$, on a

$$\frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} \leq \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$$

donc $\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) > 0$ cela implique que $u \geq 0$.

2/ Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in A_1$ alors $\lambda_1 \geq 0, \lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i) > 0$, on a

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \geq \frac{\lambda_1(\sum_{i=1}^m b_i t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} > 0$$

donc la solution u est positive. ■

Théorème 3.3.4 *Si l'hypothèse (H3) est vérifiée, alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^N$, le problème (3.3.1) n'admet pas de solutions dans X .*

Preuve. Raisonnons par l'absurde, supposons que le problème (3.3.1) admet au moins une solution pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^N$. $u = v + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, où v est une solution du problème (3.3.2) et $v \geq 0$. De plus, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^N$ c'est-à-dire que, $\lambda_1 \leq -\eta_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i) < 0$,

$$\frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} \geq \eta_1 > 0$$

et avec le lemme (3.3.5) on trouve

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \geq \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^m b_i(t_i - 1) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^m a_i)}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)(1 - \sum_{i=1}^m b_i)} \geq \eta_1 > 0$$

donc $u \geq \eta_1 > 0$.

D'autre part, par l'équation du problème (3.3.2) on tire,

$$v''(t) = -g(t, v) \leq 0, v'(0) - \sum_{i=1}^m a_i v'(t_i) = 0$$

et $v(1) - \sum_{i=1}^m b_i v(t_i) = 0$, avec, $\sum_{i=1}^m a_i < 1$ et $\sum_{i=1}^m b_i < 1$ et on a,

$$v'(0) = \sum_{i=1}^m a_i v'(t_i) \leq \sum_{i=1}^m a_i v'(0) \Rightarrow v'(0) \leq 0 \Rightarrow v' \leq 0$$

sur $[0, 1]$, de plus,

$$v'(t) + \lambda_1 y_1'(t) = v'(t) + \frac{\lambda_1}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)} \leq \frac{\lambda_1}{(1 - \sum_{i=1}^m a_i)} \leq -\eta_2 < 0$$

et $\forall t \in]t_m, 1[$, $v(t) + \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \in [\eta, \infty[$ et par l'hypothèse ((H3)) on déduit que,

$$g(t, v) \geq \chi(t)u(t) = \chi(t)(v(t) + \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)) \geq \chi(t)v(t) \forall t \in]t_m, 1[$$

avec $\int_{t_m}^1 (1-s)\chi(s)\mu(s)ds \geq 1 - \sum_{i=1}^m b_i$. On a $\mu(s) = \min\{s, 1-s\}$ et

$$\int_{t_m}^1 (1-s)g(s, v)ds \geq \int_{t_m}^1 (1-s)\chi(s)v(s)ds.$$

Puisque $v = T_3 v$ on a

$$v(0) = c(g) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \left[\int_0^1 (1-s)g(s, v)ds - \sum_{i=1}^m b_i \int_0^{t_i} (t_i - s)g(s, v)ds + A \right]$$

avec

$$A = \frac{1 - \sum_{i=1}^m b_i t_i}{1 - \sum_{i=1}^m a_i} \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{t_i} g(s, v)ds$$

$$v(0) \geq \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \left[\int_0^1 (1-s)g(s, v)ds - \sum_{i=1}^m b_i \int_0^{t_i} (t_i - s)g(s, v)ds \right]$$

ou encore

$$\begin{aligned} v(0) &> \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \left[\int_0^1 (1-s)g(s, v)ds - \int_0^{t_m} (1-s)g(s, v)ds \right] \\ v(0) &> \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \int_{t_m}^1 (1-s)g(s, v)ds \end{aligned}$$

donc

$$v(0) > \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \int_{t_m}^1 (1-s)\chi(s)v(s)ds,$$

et par le lemme (3.3.4) ,

$$v(s) \geq \mu(s) \max_{[0,1]} v(t)$$

et cela implique que

$$v(0) > \max_{[0,1]} \left\{ v(t). \left[\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m b_i} \int_{t_m}^1 (1-s)\chi(s)\mu(s)ds \right] \right\} \geq \max_{[0,1]} v(t) \geq v(0)$$

absurde. Par conséquent pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_*^N$, le problème (3.3.1) n'admet pas de solutions dans X . ■

Chapitre 4

Existence de solution pour un problème aux limites d'ordre supérieur

4.1 Introduction

On se propose d'étudier le problème aux limites à trois points du quatrième ordre suivant :

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda g(t).f(u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = u'(1) = u''(0) = u''(p) - u''(1) = 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonction continues avec $\int_0^1 g(t)dt > 0$.

On pose

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ et } f_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Ce problème a été étudié par John Graef, Chuanxi Qian et Bon Yang [10].

Dans [24], R. Ma et Zang ont considéré l'équation différentielle du problème (4.1.1) avec la condition aux limites

$$u(0) = u'(1) = u''(0) = 0$$

Ils ont démontré l'existence d'une solution positive dans le cas où la fonction f est surlinéaire ou sous linéaire et cela en utilisant le théorème de Krasnoselskii.

Sous certaines conditions de linéarité imposées à f , on vas obtenir des résultats d'existence et de multiplicité de solutions positives, en utilisant le théorème de Krasnoselskii.

4.2 Formulation en un problème du point fixe

Soit $X = C([0, 1])$ l'espace de Banach munit de la norme $\|u\| = \max_{[0,1]} |u(t)|$ et P un cône

$$P = \{x \in X, x \text{ positive, croissante et } a(t).x(1) \leq x(t) \leq b(t).x(1) \text{ sur } [0, 1]\},$$

$$\text{avec } a(t) = \frac{1}{2}(3t - t^3) \text{ et } b(t) = \begin{cases} \frac{t}{p}(2 - \frac{t}{p}), & 0 \leq t \leq p \\ 1. & p \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

On considère l'opérateur $T : X \longrightarrow X$ défini par :

$$Tu(t) = \lambda \int_0^1 J(t, s)g(s).f(u(s))ds,$$

où, $J(t, s) = \int_0^1 G_1(t, v)G_2(v, s)dv$ avec

$$G_1(t, s) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s & \text{si } 1 \geq t \geq s \geq 0 \end{cases},$$

$$G_2(v, s) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq p \leq 1 \\ s & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \text{ et } s \leq p \\ \frac{1-s}{1-p}t & \text{si } s \geq p \text{ et } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s + \frac{p-s}{1-p}t & \text{si } 1 \geq t \geq s \geq p \geq 0 \end{cases}.$$

On pose

$$A = \int_0^1 J(1, s)g(s)a(s)ds, \quad B = \int_0^1 J(1, s)g(s)b(s)ds$$

et pour $c \in [0, 1]$,

$$A_c = \int_c^1 J(1, s)g(s)a(s)ds.$$

Lemme 4.2.1

$1/u$ est une solution du problème (4.1.1) si et seulement si

$$u''(t) = -\lambda \int_0^1 G_2(t, s)g(s)f(u(s))ds \text{ et } u(0) = u'(1) = 0.$$

2/ u est une solution du problème (4.1.1) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur T

Preuve. Soit $u \in C^2([0, 1])$, on pose $y(t) = \lambda g(t)f(u(t))$ et $v(t) = u''(t)$.

1/ Si u est une solution du problème (4.1.1) alors $u(0) = u'(1) = 0$ et

$$\begin{cases} v''(t) = y(t) & t \in]0, 1[\\ v(0) = v(p) - v(1) = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

$v(t) = v(0) + tv'(0) + \int_0^t [\int_0^s y(\tau) d\tau] ds$ et avec le fait que $v(p) = v(1)$ on trouve,
 $v'(0) = \frac{1}{1-p} \left(\int_0^p (p-s)y(s)ds - \int_0^1 (1-s)y(s)ds \right)$, d'où

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{t}{1-p} \left[\int_0^p (p-s)y(s)ds - \int_0^1 (1-s)y(s)ds \right] + \int_0^t (t-s)y(s)ds \\ &= - \int_0^1 G_2(t, s)y(s)ds. \end{aligned}$$

Reciproquement, si $u''(t) = -\lambda \int_0^1 G_2(t, s)g(s)f(u(s))ds$ et $u(0) = u'(1) = 0$, alors
 $u''(0) = u''(p) - u''(1) = 0$ et $u^{(4)}(t) = \lambda g(t)f(u(t)) \forall t \in]0, 1[$.

2/ u est une solution du problème (4.1.1), si et seulement si

$$\begin{cases} u''(t) = v(t) = - \int_0^1 G_2(t, s)y(s)ds & t \in]0, 1[\\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} u(t) &= -t \int_0^1 v(s)ds + \int_0^t (t-s)v(s)ds = - \int_0^1 G_1(t, s)v(s)ds \\ &= \int_0^1 G_1(t, s) \left(\int_0^1 G_2(s, w)y(w)dw \right) ds = \int_0^1 J(t, w)y(w)dw. \end{aligned}$$

■

Lemme 4.2.2 Soit $x \in C^4(0, 1) \setminus \{0\}$, si $u^{(4)}(t) \geq 0$ sur $]0, 1[$ et u vérifie les conditions aux limites du problème (4.1.1) Alors :

1/ $x(1) > x(t) > 0$ pour tout $t \in]0, 1[$.

2/ $x'(t) > 0$ sur $[0, 1[$.

3/ $x''(t) < 0$ sur $]0, 1]$.

4/ $a(t)x(1) \leq x(t) \leq b(t)x(1)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Preuve.

1/ D'abord, on va vérifier les trois premières inégalités . En effet, puisque $x''(p) = x''(1)$, il existe $q \in]p, 1[$ tel que $x^{(3)}(q) = 0$. De plus $x^{(3)}$ est croissante, $x^{(3)} \leq 0$ sur $]0, q[$, $x^{(3)} \geq 0$ sur $]q, 1[$ et $x^{(3)} \not\equiv 0$ donc la fonction x'' est décroissante sur $]0, q[$ et croissante sur $]q, 1[$ avec $x''(0) = 0$ cela implique que, $x''(t) \leq 0$ sur $]0, q[$. On montre que $x''(q) < 0$.

En effet, si $x''(q) = 0$ alors $x'' = 0$ sur $]0, q[$, et comme $q > p$ on a

$$x''(p) = 0 \Rightarrow x''(1) = 0 \Rightarrow x'' = 0 \text{ sur } [0, 1],$$

absurde.

$x''(q) < 0$, $x''(0) = 0$ et la concavité de x'' entraîne que $x'' < 0$ sur $]0, q[$ et

$$0 > x''(p) = x''(1) \text{ et } x'' < 0 \text{ sur }]0, 1], \text{ d'où l'inégalité 3.}$$

Puisque $x'(1) = 0$, on a x' est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et cela implique que,

$$x'(t) > 0 \text{ sur } [0, 1[.$$

De plus $x(0) = 0$ et x est strictement croissante, donc $x(t) > 0$ sur $]0, 1]$ et $x(1) > x(t) > 0$ $\forall t \in]0, 1[$, d'où la relation 1.

2/ Vérifions l'inégalité 4 .

• Posons $y(t) = u(t) - a(t)$ où $u(t) = \frac{x(t)}{x(1)}$ $t \in [0, 1]$.

i/ $y^{(4)}(t) = u^{(4)}(t) \geq 0$ sur $]0, 1[$ et $y^{(4)} \not\equiv 0$

ii/ $y(0) = y(1) = y'(1) = y''(0) = 0$, donc $\exists r_1 \in]0, 1[$ tel que $y'(r_1) = 0 = y'(1)$ et $\exists r_2 \in]r_1, 1[$ $y''(r_2) = 0$.

$y''(r_2) = 0 = y''(0) \Rightarrow \exists r_3 \in]0, r_2[$ $y^{(3)}(r_3) = 0$. Comme $y^{(4)} \geq 0$ sur $]0, 1[$, on a $y^{(3)} \leq 0$ sur $]0, r_3[$ et $y^{(3)} \geq 0$ sur $]r_3, 1[$ avec $y^{(3)} \not\equiv 0$ et $y'' \leq 0$. La concavité de y'' entraîne, $y'' \leq 0$ sur $]0, r_2[$ $y''(r_2) = 0$ et $y'' \geq 0$ sur $]r_2, 1[$ avec $y'' \not\equiv 0$, $y(0) = y'(r_1) = y'(1) = 0$ et y' est décroissante sur $]0, r_2[$, donc $y' \geq 0$ sur $]0, r_1[$ et $y' \leq 0$ sur $]r_1, 1[$ avec $y' \not\equiv 0$. Par conséquent, $y \geq 0$ sur $]0, 1[$, et ça implique que, $x(t) \geq a(t)x(1)$ sur $[0, 1]$.

• On pose $z(t) = b(t) - u(t)$ où, $u(t) = \frac{x(t)}{x(1)}$ $t \in [0, 1]$,

Si $t \in [p, 1]$, alors $b(t) = 1 = x(1) \geq x(t)$ donc $z(t) \geq 0$.

Si $t \in [0, p]$, alors $z(t) = \frac{t}{p}(2 - \frac{t}{p}) - u(t)$ et on a,

$$z'(t) = \frac{2}{p} - 2\frac{t}{p^2} - u'(t), \quad z''(t) = -2\frac{1}{p^2} - u''(t), \quad z^{(3)}(t) = -u^{(3)}(t)$$

avec $z^{(4)}(t) = -u^{(4)}(t)$. Donc

$$z(0) = 0, \quad z(p) = 1 - u(p) > 0,$$

et

$$z'(p) = -u'(p) < 0, \quad z''(0) = -2\frac{1}{p^2} < 0.$$

Puisque $]0, p[\subset]0, q[$, pour tout $t \in]0, p[$ $z^{(3)} \geq 0$.

Par le fait que $z(0) = 0$ et $z(p) > 0$, on a $\exists s_1 \in]0, p[$ tel que

$$z'(s_1) = 0$$

et comme $z^{(3)} \geq 0$ sur $]0, p[$ et avec le fait que $z'(p) < 0$, on trouve

$$z'(s_1) > 0,$$

cela entraîne qu'il existe $t_1 \in]s_1, p[$ tel que $z' \geq 0$ sur $]0, s_1[$ et $z' \leq 0$ sur $]s_1, p[$, de plus $z(0) = 0$ et $z(p) > 0$ donc $z > 0$ sur $]0, p[$, d'où l'inégalité 4. ■

Lemme 4.2.3 *L'opérateur $T : P \longrightarrow P$ est complètement continu sur P .*

Preuve. On montre seulement que $T(P) \subset P$ et la continuité complète se fait par les mêmes arguments utilisés dans le deuxième chapitre.

En effet, soit $u \in P$. Posons $v = Tu$, d'après le lemme (4.2.1), v est une solution du problème ;

$$\begin{cases} v^{(4)} = \lambda g.f(u) \text{ sur }]0, 1[\\ v(0) = v'(1) = v''(0) = v''(p) - v''(1) = 0 \end{cases}$$

Donc $v^{(4)} \geq 0$ et $v^{(4)} \not\equiv 0$, par le lemme (4.2.2), $v \in X$, $v(1) \geq 0$, v croissante et

$$a(t)v(1) \leq v(t) \leq b(t)v(1) \text{ pour tout } t \in [0, 1]$$

d'où $v \in P$. ■

4.3 Résultats principaux

Théorème 4.3.1 *Si $A.f_\infty > B.f_0$, alors pour tout $\lambda \in (A.f_\infty)^{-1}, (B.f_0)^{-1}[$, le problème (4.1.1) admet au moins une solution positive.*

Exemple 4.3.1 Si on considère le problème suivant ;

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda g(t) \cdot f(u(t)) & t \in]0, 1[\\ u(0) = u'(1) = u''(0) = u''(\frac{4}{5}) - u''(1) = 0 \end{cases} \quad (4.3.1)$$

où $g(t) = 1 + 16t^4$ et $f(x) = x^{\frac{1+2x}{1+x}}$.

$f_0 = 1, 2 = f_\infty$, $A = \frac{160667}{109375}$, $B = \frac{13047421}{7875000}$ et

$$J(1, s) = \begin{cases} \frac{1}{6}s(3 - s^2) & \text{si } s \in [0, \frac{4}{5}] \\ \frac{5}{6}(\frac{8}{5} - \frac{7s}{5} - \frac{s^3}{5}) & \text{si } s \in [\frac{4}{5}, 1] \end{cases}$$

Par le théorème (4.3.1), on déduit que, si

$$0,34 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{109375}{160667} \right) = (Af_\infty)^{-1} < \lambda < 0,6 \simeq \frac{7875000}{13047421} = (Bf_0)^{-1},$$

alors le problème (4.3.1) admet au moins une solution positive

Preuve. Soit $\lambda \in](A.f_\infty)^{-1}, (B.f_0)^{-1}[$, si on prend $0 < \epsilon \leq \frac{1}{\lambda.B} - f_0$, alors $\lambda \leq (B.(f_0 + \epsilon))^{-1}$. Puisque $f_0 = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{f(c)}{c}$, on a $\exists h_1 > 0$ tel que $f(x) \leq (f_0 + \epsilon)x \quad \forall x \in [0, h_1]$.

Si on prend $\Omega_1 = B(0, h_1)$, alors $\forall u \in \partial\Omega_1 \cap P$, $u(s) \in [0, h_1], \forall s \in [0, 1]$ et

$$f(u(s)) \leq (f_0 + \epsilon)u(s),$$

$$\begin{aligned} Tu(1) &= \lambda \int_0^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds \leq \lambda \int_0^1 J(1, s)g(s)(f_0 + \epsilon)u(s)ds \\ &\leq \lambda(f_0 + \epsilon)u(1) \int_0^1 J(1, s)g(s)ds, \end{aligned}$$

donc $\|Tu\| = Tu(1) \leq u(1) = \|u\|$.

D'autre part, $\lim_{c \rightarrow 0} A_c = A$ et $A > \frac{1}{\lambda.f_\infty}$ donc $\exists c \in]0, \frac{1}{4}[$ tel que $A_c > \frac{1}{\lambda.f_\infty}$.

Si on prend $0 < \epsilon' \leq f_\infty - \frac{1}{\lambda.A_c}$ alors $\lambda \geq (A_c.(f_\infty - \epsilon'))^{-1}$.

De plus $f_\infty = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{f(c)}{c}$, donc il existe $h'_2 > 0$ tel que $f(x) \geq (f_\infty - \epsilon')x, \forall x \geq h'_2$.

Si on pose $h_2 = \max \left\{ \frac{h'_2}{a(c)}, 2h_1 \right\}$ et $\Omega_2 = B(0, h_2)$, alors $\forall u \in \partial\Omega_2 \cap P$, $\|u\| = h_2 \geq h'_2$ et par croissance de u , on a ; $\forall s \in [c, 1] \quad u(s) \geq u(c) \geq a(c) \|u\| = a(c)h_2 \geq h'_2$ donc $f(u(s)) \geq (f_\infty - \epsilon')u(s) \quad \forall s \in [c, 1]$.

$$\begin{aligned} Tu(1) &= \lambda \int_0^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds \geq \lambda \int_c^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds \\ &\geq \lambda \int_c^1 J(1, s)g(s)(f_\infty - \epsilon')u(s)ds. \end{aligned}$$

Puisque $\|Tu\| = Tu(1)$, on a

$$\|Tu\| \geq \lambda(f_\infty - \epsilon') \|u\| \int_c^1 J(1, s)g(s)a(s)ds,$$

donc $\|Tu\| \geq \|u\|$.

D'après le théorème (1.4.1) de Krasnoselskii, l'opérateur T admet au moins un point fixe dans $\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1$, d'où le résultat. ■

Théorème 4.3.2 *Si $A.f_0 > B.f_\infty$, alors pour tout $\lambda \in](A.f_0)^{-1}, (B.f_\infty)^{-1}[$ le problème (4.1.1) admet au moins une solution positive.*

Preuve. Soit $\lambda \in](A.f_0)^{-1}, (B.f_\infty)^{-1}[$, si on prend $\epsilon \in]0, f_0 - \frac{1}{\lambda A}]$, alors $\lambda \geq (A.(f_0 - \epsilon))^{-1}$. Puisque $f_0 \in]0, \infty[$, on a $\exists h_1 > 0$ tel que $f(x) \geq (f_0 - \epsilon)x, \forall x \in [0, h_1]$.

Si on pose $\Omega_1 = B(0, h_1)$, alors $\forall u \in \partial\Omega_1 \cap P$,

$$\begin{aligned} Tu(1) &\geq \lambda \int_0^1 J(1, s)g(s)(f_0 - \epsilon)u(s)ds \\ &\geq \lambda(f_0 - \epsilon)u(1) \int_0^1 J(1, s)g(s)a(s)ds \end{aligned}$$

donc $\|Tu\| \geq \|u\|$.

D'autre part, si on prend $0 < \epsilon' \leq \frac{1}{B+1}[\frac{1}{\lambda} - Bf_\infty]$, alors

$$\lambda \leq (B(f_\infty + \epsilon') + \epsilon')^{-1}.$$

De plus, puisque $f_\infty \in]0, \infty[$, on a $\exists h'_2 > 0$ tel que

$$f(x) \leq (f_\infty + \epsilon')x, \forall x \geq h'_2.$$

On pose $M = \max_{[0, h'_2]} f(x)$, soit $q \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que

$$\int_0^q J(1, s)g(s)ds \leq \frac{\epsilon'}{2M}.$$

Si on prend $\Omega_2 = B(0, h_2)$ avec $h_2 > \max \left\{ 2h_1, 1, \frac{h'_2}{a(q)} \right\}$, alors pour tout $u \in \partial\Omega_2 \cap P$,

$$u(1) = h_2 \geq 2h'_2$$

et

$$u(t) \geq a(t) \|u\| = a(t).h_2 > a(t). \frac{h'_2}{a(q)}$$

et ainsi

$$a(t) \geq a(q),$$

d'où $u(t) > h'_2$ et $u(0) = 0$ avec $u(1) = h_2 > h'_2$.

La croissance de u entraîne que

$$\exists b \in]0, q[\text{ tel que } u \leq h'_2 \text{ sur } [0, b[\text{ et } u \geq h'_2 \text{ sur }]b, 1[.$$

De plus, puisque $\|Tu\| = Tu(1)$, on a

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \lambda \int_0^b J(1, s)g(s)f(u(s))ds + \lambda \int_b^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds \\ &\leq \lambda(M \int_0^q J(1, s)g(s)ds + \int_b^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds), \end{aligned}$$

ou encore,

$$\|Tu\| \leq \lambda(\epsilon' + \int_b^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds) \leq \lambda(\epsilon' + \int_b^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds)$$

donc

$$\begin{aligned} \|Tu\| &\leq \lambda(\epsilon' + (f_\infty + \epsilon') \int_b^1 J(1, s)g(s)u(s)ds) \\ &\leq \lambda(\epsilon' + (f_\infty + \epsilon')u(1) \int_b^1 J(1, s)g(s)b(s)ds) \leq \|u\|. \end{aligned}$$

Par le théorème du point fixe de Krasnoselskii (1.4.1) , on déduit que le problème (4.1.1) admet au moins une solution positive. ■

Théorème 4.3.3 *Supposons que f vérifie l'une des conditions suivantes;*

1/ $\lambda Bf(x) < x$ pour tout $x > 0$ ou

2/ $\lambda Af(x) > x$ pour tout $x > 0$.

Alors le problème (4.1.1) n'admet pas de solutions positives.

Exemple 4.3.2 *Considérons le problème (4.3.1) . Si*

$$\lambda < \frac{7875000}{26094842} \simeq 0,3 \text{ ou } \lambda > \frac{109375}{160667} \simeq 0,68$$

alors ou bien $\lambda Bf(x) < x, \forall x > 0$ ou $\lambda Af(x) > x, \forall x > 0$. Par le théorème 4.3, on déduit que, si $\lambda < \frac{7875000}{26094842} \simeq 0,3$ ou $\lambda > \frac{109375}{160667} \simeq 0,68$, alors le problème (4.3.1) n'admet pas de solutions positives.

Preuve.

1/ Supposons que $\lambda Bf(x) < x, \forall x > 0$, si le problème (4.1.1) admet au moins une solution positive u , alors

$$\begin{aligned} u(1) &= \lambda \int_0^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds < B^{-1} \int_0^1 J(1, s)g(s)u(s)ds \\ &\leq B^{-1} \int_0^1 J(1, s)g(s)u(1)b(s)ds \leq u(1) \end{aligned}$$

donc, $u(1) < u(1)$ absurde

2/ Supposons que $\lambda Af(x) > x \forall x > 0$, si le problème (4.1.1) admet au moins une solution positive u , alors

$$\begin{aligned} u(1) &= \lambda \int_0^1 J(1, s)g(s)f(u(s))ds > B^{-1} \int_0^1 J(1, s)g(s)u(s)ds \\ &\geq B^{-1} \int_0^1 J(1, s)g(s)u(1)a(s)ds \geq u(1) \end{aligned}$$

absurde.

Par conséquent, le problème (4.3.1) n'admet pas de solutions positives. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié certaines classes de problèmes aux limites à plusieurs points associés à des équations différentielles non linéaires sur des intervalles bornés. Dans chaque cas on s'est ramené à l'étude de l'existence de point fixe d'un opérateur associé.

Plusieurs résultats d'existence ou de multiplicité ont été fournis. Les outils utilisés dans ce travail sont, degré topologique, indice du point fixe, théorèmes du point fixe et méthode des sous et sur solutions.

Cependant, les problèmes aux limites à plusieurs points évoquant le φ -Laplacien (φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$) ou les problèmes posés sur des intervalles non bornés sont peu abordés dans la littérature.

Aussi les questions d'existence et de multiplicité restent sans réponses pour tels problèmes pour des ordres plus élevés.

Au cours de notre étude, plusieurs questions nous sont parvenues. Parmi ces questions, la suivante. Considérons le problème aux limites :

$$\begin{cases} -u''(x) = a(x)f(u(x)) & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Il est démontré dans [28] que lorsque

$$\frac{f(u)}{u} > \lambda_1 \text{ pour tout } u > 0$$

ou

$$\frac{f(u)}{u} < \lambda_1 \text{ pour tout } u > 0$$

où λ_1 est la première valeur propre du problème :

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda a(x)u(x) & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

le problème (4.3.2) n'admet pas de solution. Qu'en est-il si les conditions de Dirichlet sont remplacées par des conditions aux limites à plusieurs points. Toutes ces questions feront objet de futures recherches.

Annexe

Théorème 4.3.4 (Ascoli-Arzelà) : Soit I un interval compact de $\mathbb{R}$, on munit l'espace $E = C(I)$ de la norme $\|u\| = \max_I |u(t)|$, si A est un sous ensemble non vide de E vérifiant les conditions suivantes :

a) A est borné dans E ,

b) A est équicontinu, c'est-à-dire que, pour tout $t_0 \in I$, on a ;

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $|t - t_0| < \delta$ alors $|u(t) - u(t_0)| < \epsilon$ ceci $\forall u \in A$.

alors A est relativement compact dans E .

Remarque : S'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, $|u(t) - u(t_0)| < c \cdot |t - t_0|$, $\forall (t, t_0) \in I^2$, $\forall u \in A$, alors A est un ensemble équicontin.

Lemme 4.3.1 (B.Gronwall): Soient $T > 0$, $r \geq 0$, u et v deux fonctions positives définies sur $[0, T]$ vérifiant

$$u(t) \leq r + \int_0^t u(s) \cdot v(s) ds < \infty, \quad \forall t \in [0, T]$$

alors $u(t) \leq r \cdot \exp(\int_0^T v(s) ds)$, $\forall t \in [0, T]$.

Théorème 4.3.5 (Fonction de Green) :

Considérons le problème :

$$\begin{cases} Lu(t) = h(t) & \text{si } t \in]a, b[\\ a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0 = b_0 u(b) + b_1 u'(b) \end{cases} \quad (4.3.3)$$

où $(a, b, a_i, b_i) \in \mathbb{R}^4$ $i \in \{0, 1\}$, $a < b$ et $h \in C(I)$ avec $I = [a, b]$.

Si le problème homogène :

$$\begin{cases} Lu(t) = 0 & \text{si } t \in]a, b[\\ a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0 = b_0 u(b) + b_1 u'(b) \end{cases} \quad (4.3.4)$$

n'admet pas de solution non triviale, alors il existe une fonction $G : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant les conditions suivantes ;

1/ G est symétrique, i.e: $G(x, t) = G(t, x)$ $\forall (x, t) \in I^2$,

2/ $\forall x \in I$, $LG(x, \cdot) \equiv 0$ sur I , ainsi que les conditions aux limites,

3/ G est dérivable sauf pour $x = t$ où la dérivée présente un saut,

4/ u est une solution du problème (4.3.3) si et seulement si $u(x) = \int_I G(x, t) \cdot h(t) dt$.

Théorème 4.3.6 (de la convergence dominée de Lebesgue):

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que

1/ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ presque partout sur Ω ,

2/ Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p $x \in \Omega$.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

Définition 4.3.1 Soit $u \in C(I)$ une fonction continue sur I , avec I est un interval de $\mathbb{R}$.

u est dite concave si, pour tout x, y et z dans I , si $x < y < z$, alors

$$\frac{u(z) - u(y)}{z - y} \leq \frac{u(y) - u(x)}{y - x}.$$

u est dite convexe si

$$\frac{u(z) - u(y)}{z - y} \geq \frac{u(y) - u(x)}{y - x}.$$

Lemme 4.3.2 Soit $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, \infty[$. La fonction p définie par $p(m) = \min_{t \in [\gamma m, m]} h(t)$ avec $\gamma \in [0, 1[$, est continue sur $[0, \infty[$.

Preuve. En effet, comme $p(m) = \min_{t \in [\gamma m, m]} h(t) = - \max_{t \in [\gamma m, m]} f(t)$ avec $h = -f$, il suffit de montrer la continuité de la fonction $g(x) = \max_{t \in [\gamma x, x]} f(t)$.

En effet, Soit $(x_n)_n$ une suite telle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, puisque $g(x_n) = \max_{t \in [\gamma x_n, x_n]} f(t) = f(t_n)$ avec $t_n \in [\gamma x_n, x_n]$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ et la continuité de f entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(0) = g(0)$, d'où la continuité en 0.

D'autre part, soit $x \in]0, \infty[$, on pose

$$x_0 = \max \{t \in [\gamma x, x] / f(t) = g(x)\} \text{ et}$$

$$x_1 = \min \{t \in [\gamma x, x] / f(t) = g(x)\}.$$

et

$$g(x) = \max_{t \in [\gamma x, x]} f(t) = f(x_0) = f(x_1).$$

On montre seulement la continuité à droite, (la continuité à gauche se démontre de la même manière).

Soit $(x_n)_n$ une suite telle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $x_n > x$.

Trois cas se présentent :

1^{er} cas : Pour $x_0 \in]\gamma x, x[$.

i/ Si $x_1 \neq \gamma x$, alors par la continuité de f on a, $\exists u > 0$ / $\gamma(x + u) < x_0$ et telle que pour tout $s \in]0, u]$,

$$g(x) = \max_{t \in [\gamma x, x]} f(t) = \max_{t \in [\gamma(x+s), x+s]} f(t) = f(x_0) = g(x + s),$$

g est constante sur $]x, x + u]$ donc g est continue à droite en x .

ii/ Si $x_1 = \gamma x$ alors

$$g(x_n) = \max_{t \in [\gamma x_n, x_n]} f(t) = \max_{t \in [\gamma x, \gamma x_n]} f(t) = f(y_n), y_n \in [\gamma x, \gamma x_n]$$

et par continuité de f on a, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x) = g(x)$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$ d'où la continuité à droite en x .

2^{ème} cas : Si $x_0 = x$, alors $f(x) = g(x)$ et

$$g(x_n) = \max_{t \in [\gamma x_n, x_n]} f(t) = \max_{t \in [x, x_n]} f(t) = f(y_n),$$

$y_n \in [x, x_n]$ et par continuité de f on a,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x) = g(x)$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$, d'où la continuité à droite en x .

3^{ème} cas : Si $x_0 = \gamma x$ alors $\exists \epsilon \in]0, x[$ / $\forall y \in [x, x + \epsilon]$ on a,

$$g(y) = \max_{t \in [\gamma y, y]} f(t) = f(\gamma \cdot y)$$

d'où la continuité. ■

Bibliographie

- [1] D. Anderson, R.I. Avery & A.C. Peterson, Three positive solutions to a discret focal boundary value problem, J.Comput. Appl. Math, 88, 103-118, 1998.
- [2] A.V. Bitsadze, On the theory of nonlocal boundary value problem, Soviet.Math. Dokl30, 8-10, 1984.
- [3] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [4] J. Dieudonné, Eléments d'analyse, Tome 1, Gauttiller Villart, 1990.
- [5] P.W. Elloe & J. Henderson, Multipoint boundary value problems for ordinary differential equations, J.Differential equations 114, 232-242, 1994.
- [6] P.W. Elloe & Y. Gao, The method of quasilinearisation and a three-point boundary value problem, J. Korean Math. Soc. 39, 319-330, 2002.
- [7] W. Feng & J.R.L. Webb, Solvability of a three-point boundary value problem at resonance, Nonlinear Anal. 30. 3227-3238, 1997.
- [8] W. Feng & J.R.L. Webb, Solvability of m-point boundary value problems at resonance 3, Nonlinear Anal.TMA 30 (6) (1997) 3227-3238.
- [9] R. Graef & B. Yang, Boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations, Commun. Appl. Anal. 6, 273-288, 2002.
- [10] J. Graef, C. Qian & B. Yang, A Three-point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations, J. Math. Anal. Appl. 287 217-233, 2003.

- [11] D. Guo & V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [12] X. He & W. Ge, Triple solutions for second order three-point boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis* 268, 256-265, 2002.
- [13] J. Henderson & H.B. Thompson, Multiple symmetric positive solutions for a second order boundary value problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128, 2373-2379, 2000.
- [14] J. Henderson & H. Wang, Positive solutions of nonlinear eigenvalue problems, *J. Math. Appl.* 208, 2520-2593, 1997.
- [15] F. Herbert, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, 1969.
- [16] G. Huidobro, C.P. Gupta et R. Manasevich, An m -point boundary value problem of Neumann type for a p -Laplacian like operator, *Nonlinear Analysis* 56 1071-1089, 2004.
- [17] V.A. Il'in & Moiseev, Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm Liouville operator in its differential and finite difference aspects, *Differential equations* 23.7, 803-810, 1987.
- [18] L. Kong & Q. Kong, Multi-point boundary value problems of second order differential equations, *Nonlinear Analysis* 58 909-931, 2004.
- [19] R.W. Legett & L.R. Williams, Multiple positive fixed points of nonlinear operator on ordered Banach spaces, *Indiana University Mathematics Journal* 28, 673-688, 1979.
- [20] Y. Liu & W. Ge, Multiple positive solutions to a three-point boundary value problem with p -Laplacian, *J. Math. Anal. Appl.* 277, 293-302, 2003.
- [21] J. Mawhin, Ordinary differential equation with nonlinear boundary conditions, in "NSF-CBMS Regional Conference Series in Math, N°.40", Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1979.
- [22] R. Ma & B. Thompson, Global behavior of positive solutions of nonlinear three-point boundary value problems, *Nonlinear Analysis* 60 685-701, 2005.

- [23] R. Ma, Existence theorems for a second order three point boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.* 212,430-442, 1997.
- [24] R. Ma, J. Zang & S. Fu, The method of lower and upper solutions for forth order two point boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.* 215,415-422, 1997.
- [25] R. Ma, Multiplicity of positive solutions for a second order three point boundary value problems, *Comput. Math. Appl.* 40 193-204, 2000.
- [26] R. Ma, Multiplicity results for a three-point boundary value problem at resonance, *Nonlinear Anal.* 53 777-789, 2003.
- [27] R. Ma, Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problems, *Electron J, Differential Equations* 34 , 1-8, 1999.
- [28] Y. Naito & S. Tanaka, On the existence of multiple solutions of the boundary value problem for nonlinear second-order differential equations, *Nonlinear Anal.* 56, 919-935, 2004.
- [29] J. Prescott, *Applied elasticity*, Dover, New york, 1961.
- [30] P.H. Rabinowitz, *Nonlinear Sturm-Liouville problems for second order ordinary differential equation*, *Comm. Pure. Appl. Math.* 23, 939-961, 1970.
- [31] P.H. Rabinowitz, *Theorie du degré topologique et applications aux problèmes aux limites non linéaires*. Univ. paris VI, 1975.
- [32] J. Ren, Positive solution for three-point boundary value problems with sign changing Nonliearities, *Appl. Math Letters* 17 451-458, 2004.
- [33] L. Schwartz, Exemples d'espaces vérifiant la propriété d'approximation, *Séminaire Schwartz, Faculté des sciences de Paris*, Tome 1, exp n°15, P. 1-10, 1954.
- [34] J.P. Sun, W.T. LI & Y. H. Zhao, Three positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem, *J.Math.Anal.Appl.* 288 708-716, 2003.

- [35] Y. Sun, Positive solutions of nonlinear second order m-point boundary value problem, *Nonlinear Anal.* 61, 1283-1294, 2005.
- [36] W. Soedel, *Vibrations of shells and plates*, Dekker, New York, 1993.
- [37] S.P. Timoshenko, *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill, New york, 1961.
- [38] J.Y. Wong & R.P. Agarwall, Criteria for multiple solutions of difference and partial difference equations subject to multi-point conjugate conditions, *Nonlinear Analysis* 40, 629-661, 2000.
- [39] J.Y. Wong & D.Q. Jiang, A unified approach to some two-point, three-point and four-point boundary value problems with Carathéodory functions, *J. Math. Anal. Appl.* 211, 223-232, 1997.
- [40] J.Y. Wong & D.W. Zheng, On the existence of positive solution to a three point boundary value problem for the one-dimensional P-Laplacian, 77 477-479, 1997.
- [41] M. Zima, Fixed point theorem of Leggett-Williams type and its application, *J. Math. Appl.* 299, 254-260, 2004.