

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : PHYSIQUE

Spécialité : **Energétique et Mécanique des Fluides**

Par : **Mr MOKRANI Abderrahmane**

Thème :

**Contribution à l'étude de la conduction avec
changement de phase
(Cas de fusion avec terme source)***

Soutenu publiquement le 03/07/2012, devant un jury composé de :

Ma.	A. MATAOUI	Professeur, à l'USTHB	Présidente
Mr.	E.K.SI-AHMED	Professeur, à l'USTHB	Directeur de Mémoire
Mr.	A. BENZAOUI	Professeur, à l'USTHB	Examineur
Mr.	M.MAHFOUD	Professeur, à l'USTHB	Examineur
Mr.	N.SADOUN	Maitre Assistant/A, à l'USTHB	Invité

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée de la Faculté de Physique, à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB).

Tout d'abord, je voudrai exprimer toute l'affection et la profonde gratitude à mes très chers parents qui ont su m'apporter tout le soutien dont j'avais besoin durant ces longues années, qui ont toujours été à mes côtés et particulièrement pendant la réalisation de ce travail, et qui ont su me supporter et croire toujours en moi ainsi que mes frères et sœurs. Je leur dédie ce travail et ils resteront toujours pour moi l'honorable exemple à suivre dans la vie.

Je remercie, tout d'abord, Monsieur N.SADOUN qui m'a initié à ce travail pendant plus d'une année, et puis je remercie aussi, Monsieur E.K. SI-AHMED, Professeur à la Faculté de Physique (USTHB), qui a codirigé cette thèse tout au long de cette recherche. Ils ont su orienter mon travail de recherche, tout en y gardant un œil critique et avisé. Qu'ils trouvent, ici, l'expression de mon profond respect et toute ma gratitude pour leur soutien permanent et pour les discussions fructueuses que nous avons eues tout au long de ce travail.

J'exprime, vivement, mes remerciements à Madame A. Mataoui, Professeur à la Faculté de Physique (USTHB), d'avoir accepté de présider mon jury de mémoire.

Mes profonds respects et remerciements vont aux Professeurs A. Benzaoui et M. Mahfoud d'avoir accepté d'être les examinateurs de cette thèse.

Je tiens à remercier T. Benheddade et S.Guezmir pour leurs aides à établir ce manuscrit.

Enfin, je remercie, vivement, mes collègues et amis du Laboratoire de Mécanique des fluides: R.Makhloufe, Y. Zenati et M. Smaili pour leur sympathie et la grande joie qu'ils m'ont apportée de travailler dans un climat d'amitié et de confiance.

TABLE DES MATIERE.

<i>Remerciements</i>	<i>i</i>
<i>Table des matières</i>	<i>ii</i>
<i>Nomenclature</i>	<i>iv</i>
<i>Introduction Générale</i>	1
<i>Chapitre 1</i>	4
<i>Généralité et introduction aux problèmes de Stefan</i>	
1.1 Introduction	5
1.2 Les travaux pionniers	7
1.3 Modèle mathématique	8
1.3.1 modèle explicite	8
1.3.1.1 Solution de Stefan (une phase)	8
1.3.1.2 Solution de Neumann (deux phases)	10
1.3.2 Méthode implicite ou Méthodes d'enthalpie	13
1.3.2.1 Formulation enthalpie totale	14
1.3.2.2 Capacité thermique apparente	16
1.3.2.3 Terme source pour chaleur latente	17
1.4 L'influence de la convection naturelle sur l'interface de solidification	21
1.4.1 Cas de la solidification	21
1.4.2 Cas de la fusion	23
1.5 Situation de sujet	25
1.6 Conclusion	26
<i>Chapitre 2</i>	28
<i>Formulation du problème</i>	
2.1 Introduction	29
2.1.1 Modèle physique	29
2.1.2 Hypothèses simplificatrices	30
2.1.3 Modèle mathématique	30
2.1.3.1 L'équation de la diffusion	30
2.1.3.2 Evaluation de l'énergie à l'interface	33

2.2	Problème de Stefan à une dimension avec source et distribution initiale	35
2.2.1	Description du modèle	35
2.2.2	Modèle adimensionnel dans le domaine mobile	37
2.3	Solutions exactes	39
2.4	Conclusion	43
 <i>CHAPITRE 3</i>		44
<i>METHODES NUMERIQUES</i>		
3.1	Introduction	45
3.2	La méthode de l'interface immobile (BIM)	45
3.3	Formulation du problème dans l'espace fixe	46
3.4	Discrétisation	47
3.5	Conclusion	54
 <i>CHAPITRE 4</i>		55
<i>RESULTATS ET DISCUSSION</i>		
4.1	Introduction	56
4.2	Validation de la méthode numérique	56
4.2.1	Validation par le problème 3	56
4.2.2	Validation par un problème de Stefan avec terme source	60
4.3	Résolution par la présente méthode	70
4.4	Conclusion	79
 Conclusion générale et perspectives		80
<i>Références Bibliographiques</i>		82

Nomenclature

C	Chaleur spécifique (JKg ⁻¹ K ⁻¹)
C _{app}	Chaleur spécifique apparente (éq.) (JKg ⁻¹ K ⁻¹)
E	Energie interne spécifique (JKg ⁻¹)
g _l , g _s	Fractions volumiques liquide et solide (m ⁻³)
h = h _c + h _L	Enthalpie totale (JKg ⁻¹) (éq.2.9)
h _c = e	Enthalpie spécifique (JKg ⁻¹)
h _L	Enthalpie associée au changement de phase (JKg ⁻¹)
H _{ref}	Enthalpie adimensionnel de référence
K	Conductivité thermique (Wm ⁻¹ K ⁻¹)
l ₀	Longueur de référence (m)
L	Chaleur latente de solidification (JKg ⁻¹)
N	Nombre de nœuds
\vec{n}	La normale en un point à une surface
$Ste = \frac{\rho c(T_0 - T_m)}{\rho L}$	Nombre de Stefan : inverse de la chaleur latente adimensionnelle
t	Temps (s)
T	Température (K)
V	vitesse de l'interface (ms ⁻¹)
X	Abscisse (m)
T ₀	Température référentielle.
T _m	Température de fusion.

Symboles grecques

α	Diffusivité thermique (m^2s^{-1})
δ	Position du front de solidification (m)
δ_0	Position initiale de l'interface (m)
$\Delta = \delta/\delta_0$	Position adimensionnelle du front de solidification
$\bar{\eta}, \bar{\xi}$	Pas d'incrémentations sur l'espace
$\bar{\tau}$	Pas d'incrémentations sur le temps
$\eta = x/l_0$	Abscisse adimensionnelle dans le domaine déformable $[0, \delta]$
$\xi = x/\delta = \eta/\Delta$	Variable de Landau ou abscisse adimensionnelle dans le domaine fixe
Γ	Interface solide/liquide
λ	Constante de solidification
$\theta(\eta, \tau) = \frac{T(x, t) - T_m}{T_0 - T_m}$	Température adimensionnelle
ρ	Masse volumique (Kg m^{-3})
$\sigma = \Delta^2$	Carré de la position adimensionnelle de l'interface
Σ	Surface extérieure entourant le volume
$\tau = \frac{\alpha}{\delta_0^2} t$	Temps adimensionnel
$\Sigma(\eta, \tau)$	Terme source adimensionnel

Indices et Exposants

I	Relatif au i^{eme} nœud
J	Relatif au j^{eme} pas de temps
K	Numéro d'itération
L	Relatif à la phase liquide
m	Point de solidification (melting)
Max	valeur maximale
Min	valeur minimale
Moy	valeur moyenne
N	Relatif au nœud voisin de l'interface
R	Point de référence
S	Relatif à la phase solide
$S(x,t)$	Terme source ($\text{j.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$)

Fonctions et Operateurs

E	Fonction exponentielle
Erf	Fonction erreur
f	Distribution initiale de la température dans le bloc liquide
F	Distribution initiale de la température dans le bloc liquide dans le domaine adimensionnel
$\mathcal{D}(\tau)$	Fonction de la position adimensionnelle de l'interface de problème de Stefan classique
$\vec{\nabla}$	Vecteur gradient

Introduction Générale

Le problème de changement de phase est d'une importance indéniable dans de nombreux domaines. Parmi les applications courantes, on peut citer, l'étude des systèmes de stockage d'énergie thermique, la mise en forme et le traitement de certains matériaux (fonderie, moulage, soudure, extrusion, etc.), l'analyse des accidents de réacteurs nucléaires, l'étude de plusieurs phénomènes géophysiques (gel des sols et des lacs, fonte ou formation des glaciers et les éruptions volcaniques), la congélation d'aliments et la préservation de matières organiques pour ne citer que quelques exemples.

Ce problème, appelé à l'origine problème de Stefan, pose plusieurs défis. Ceux-ci, sont principalement à sa non-linéarité intrinsèque introduite par le saut du flux de chaleur au front de changement de phase. Ce changement fait partie de la solution et constitue une condition limite essentielle au calcul. Par conséquent, seules les configurations les plus simples peuvent être envisagées analytiquement (conduction pure d'un matériau pur en milieu semi-infini), tandis que la solution, de la plupart des problèmes d'intérêt, exige l'utilisation de méthodes numériques. L'équation qui découle de ce problème est appelée : condition de Stefan. Aussi, le caractère mobile de l'interface rend toute approche analytique de la solution délicate.

La première étude du phénomène de solidification a été réalisée par Josef Black dans les années 1758-1762. Il a trouvé que ce phénomène introduisait une nouvelle grandeur physique liée au changement de phase appelée : chaleur latente. Cette dernière a été intégrée dans les équations qui gouvernent ce phénomène par Lami et Clapeyron (1831) trouvant que l'interface solide-liquide varie en racine carré du temps lors de leur expérience sur la solidification de l'eau pure. Ils se sont, intéressés aux méthodes théoriques, numériques et expérimentales et aussi aux diverses applications possibles [Tarzia D.A., (2000)]. Franz Neumann, dans ses conférences des années 1860 [Weber, (1901)], donne la solution exacte pour le changement de phase d'un milieu unidimensionnel et semi infini. Cependant, la première discussion de ce type de problème a été publiée par Stefan en 1891 donnant une solution plus restreinte que celle de Neumann et l'appliqué à l'étude de l'épaisseur des glaces polaires. [Stephan J, (1889)]

INTRODUCTION GENERALE

La formulation de la conduction en régime transitoire avec un changement de phase dans un milieu qui est le siège d'une source/puits de chaleur (problème de Stefan avec terme source) fait l'objet de ce travail dans un premier temps. L'approche développée considère la méthode numérique à pas variable permettant d'immobiliser le front du changement de phase, appelée aussi, la méthode d'immobilisation du front.

Le cas du problème de Stefan a une phase avec terme source a fait également l'objet de nombreuses études [Sadoun N. et al, (2010) ; Kutluay S., (2005) ; Gülkaç V., (2009) ; Fasano A. et Primicerio M., (1979)]. Les solutions analytiques qui existent, pour ce cas, sont des solutions qui n'ont pas une réalité physique, elles sont conçues pour valider les approches des modèles numériques afin de les appliquer à des situations réelles (physiques).

Pour notre étude, parmi les méthodes mathématiques et numérique existant dans la littérature, nous avons choisi ce problème avec un schéma numérique explicite utilisant une discrétisation par différences finies.

La précision de cette méthode a été étudiée à travers un problème particulier dont la solution exacte existe, et aussi à travers la solution exacte du problème de Stefan classique. Dans le cas général, les résultats numériques ont montré une bonne concordance.

Ainsi, le problèmes reste toujours d'actualité et continue de motiver encore de nombreuses études.

La présente contribution s'inscrit dans le cadre des travaux consacrés à la recherche d'approches numériques de la solution du problème décrit ci-dessus par une méthode d'immobilisation de l'interface améliorée. Toutefois, d'autres objectifs secondaires sont envisagés, il s'agit de :

- i) faire une étude historique sur les études pionnières,
- ii) présenter les différentes formulations et modélisations considérées dans la littérature,
- iii) effectuer une étude des méthodes numériques de suivi de l'interface et de développer, si possible, un schéma numérique plus précis qui permettra de valider la solution analytique.

Le manuscrit est composé d'autres chapitres en plus d'une introduction et d'une conclusion générale.

Le premier chapitre présente les domaines d'applications où le phénomène de solidification se manifeste. Il expose les recherches des auteurs initiateurs avec lesquelles ce problème est

INTRODUCTION GENERALE

conçu. On présente, aussi, le modèle mathématique explicite utilisé pour modéliser le problème de solidification des substances pures où sont exposées les deux premières solutions analytiques de Neumann et de Stefan. Est exposé, aussi, les modèles implicites utilisés généralement pour les alliages. Enfin, ce chapitre met en évidence le rôle de la convection naturelle dans le phénomène en considérant quelques résultats expérimentaux et numériques disponibles dans la littérature. Et la situation de la présente contribution par rapport aux travaux antérieurs.

Le deuxième chapitre expose la modélisation de la fusion, avec un terme source à trois dimensions, cerné par des hypothèses simplificatrices. Le modèle mathématique appliqué est un modèle explicite où sont évaluées les équations de l'énergie des deux phases celle de l'interface de manière séparée. Après, on réduit l'étude du problème à une phase et on l'écrit sous une forme adimensionnelle. Enfin, on expose quelques solutions exactes existant dans la littérature pour un tel problème.

Dans le troisième chapitre, on présente la méthode, qui immobilise l'interface, servant à résoudre le problème. Une reformulation du problème est nécessaire, par un changement de variable lié au mouvement de l'interface, afin de la discrétiser par une méthode numérique de différences finies. Le maillage des axes : spatial et temporel utilisé, est un maillage fixe. Ce chapitre présente, aussi, les résultats des travaux de certains auteurs qui ont utilisé cette méthode pour d'autres problèmes de type Stefan en particulier celui de N.Sadoun, (2010) qui élimine le pas spatial, et d'autres qui ont résolu les problèmes de Fasano et Primicirio, (1979) autrement.

Le quatrième chapitre contient les résultats de la présente contribution à la résolution du problème de Stefan avec un terme source. On commence par la validation du schéma numérique par le problème de Stefan classique puis par les solutions de Fasano A. et Primicirio M., pour un nombre de Stefan égale à l'unité. Cela dans le but d'élargir la résolution à des problèmes ne possédant pas de solutions exacte. Enfin, les résultats sont comparés avec ceux existant dans la littérature.

CHAPITRE 1

GENERALITES

ET INTRODUCTION

AU PROBLEME DE STEFAN

1.1 INTRODUCTION

On regroupe sous la dénomination de « problème de Stefan » les problèmes ayant en commun l'existence d'au moins deux phases, généralement séparées par une interface bien définie ou non. Parmi ces phénomènes on pourrait citer, sans être exhaustif, la conduction thermique avec changement de phase, l'évaporation ou la condensation, la recristallisation. D'autres incluent les phénomènes de diffusion de matière dans des milieux poreux saturés, Ce type de problème, connu pour difficulté mathématique, a vu la première solution analytique, communément appelée "solution généralisée de Neumann", exposée par Neumann en 1860 dans ces écrits publiés par Weber, (1901). En effet, le problème concerne le transfert thermique avec changement de phase d'un milieu se trouvant initialement à une température supérieure à sa température de fusion. Ce type de solution sert de base, à divers auteurs, pour valider des modèles numériques liés aux problèmes d'interfaces mobiles. On notera néanmoins que la première publication en rapport à ce type de problème a été produite par Stefan en 1891 [Jiji L.M, (2003)] d'où le nom de « problème de Stefan ».

Ce type de problème non linéaire trouve, comme le démontre l'abondante littérature, un grand nombre d'applications dans des domaines techniques qui intéressent aussi bien les physiciens, les chimistes, les biologistes, les mathématiciens, les mécaniciens, les métallurgistes, les géologues, les médecins [Ankri R. et al, (2008)]

Les applications liées au changement de phase sont si nombreuses qu'il ne serait possible de toutes les citer à travers ce paragraphe. Néanmoins certaines sont présentées en guise d'illustration et ne saurait être considérées comme étant exhaustives.

1.1.1 DANS LA GEODYNAMIQUE

Le phénomène de solidification est utilisé pour la simulation des processus géodynamique dans la terre dans laquelle la recristallisation et la solidification jouent un rôle important dans les processus géodynamiques aussi bien dans le noyau et que dans la lithosphère de la Terre. le rapprochement de noyau est beaucoup plus réaliste avec un problème de Stefan à deux phase, où on trouve les processus liée au chauffage (fusion et recristallisation) et du gel (solidification) jouent un rôle important qu'aux processus liée aux masses en mouvement. [Nedoma J., (1997) ; Nedoma J., (2003) ; Mareschal J.C., (1977)]

1.1.2 STOCKAGE

Le Stockage d'énergie thermique en général, et des matériaux à changement de phase (MCP) en particulier fait l'objet d'importantes investigations [Zalba B. et al, (2003)]. Ces procédés semblent être utiles pour la récupération de chaleur rejetée par des procédés industriels, le stockage d'énergie solaire durant le jour et le déstockage d'énergie électrique pour le chauffage pendant les heures de pointe. Ces systèmes représentent des moyens efficaces pour économiser de l'énergie dont la consommation est en croissance permanente. [Zalba B. et al, (2003) ; Bouadila S., (2011)]

L'avantage de certains MCP qui possèdent une grande capacité thermique de changement de phase, est de permettre le stockage et la restitution de l'énergie à une température constante. A titre d'exemple dans l'habitat solaire : l'intégration de ces matériaux dans des parois composites permet d'obtenir une inertie importante dans un volume réduit et sous un faible intervalle de température. Ce qui a fait naître de nouvelles solutions au problème du chauffage solaire passif, la plus simple d'entre elles étant celle d'un mur du type Trombe-Michel [Bourdeau L., (1982)], ou un matériau à changement de phase remplace les matériaux usuels de stockage (béton-eau) afin de créer une paroi isotherme.

Des auteurs se sont intéressés au stockage thermique latent, dans des PCM, dans le but d'améliorer le rendement thermique des capteurs solaires fabriqués pour le chauffage de l'eau sanitaire. [Bouadila S., (2011)].

Certains modes de solidification ou de fusion influent énormément sur la macrostructure des matériaux. Celle-ci est étroitement liée au profil de l'interface solide-liquide par conséquent, le contrôle de cette interface, qui représente une condition indispensable au problème de Stefan, offre la capacité de produire des matériaux avec de nouvelles propriétés physiques qui ont été modifiées. Par exemple, envisager une propriété de surface améliorée telle une meilleure résistance à l'usure et à la corrosion. [Shen X. et al, (2010) ; Basu B. et al, (1992)].

De plus ce phénomène révèle d'autres applications, comme dans les fusibles utilisés dans les circuits de protection industrielle en cas de forts courants, où le transfert de chaleur et le changement de phase sont présents. [Memiaghe S. et al, (2007)] ;

On citera en complément en guise de conclusion de cette section la fabrication de certains produits pharmaceutiques sur la base d'une technique de solidification-fusion engendrant des produits sous forme des grains qui diffusent facilement et rapidement dans le sang et dans

les tissus biologiques [Paradkar A. et al, (2003)]. Pour cela les auteurs ont appliqué une solution analytique pour le problème inverse de Stefan [Rabin Y. et al, (1995) ; Rabin Y. et al, (1998)].

1.2 LES TRAVAUX PIONNIERS

Les problèmes de frontière libre et mobile pour l'équation de la diffusion de la chaleur contiennent environ 5900 références à des œuvres apparues sur environ 884 sortes de publications. [Tarzia D.A., (2000)]. Ces problèmes aux frontières libres sont souvent appelés problème de Stefan, et ce en référence aux travaux de Josef Stefan en 1890 relatifs à la fusion des glaces polaires. Stefan a récapitulé tous les travaux développés par Joseph Black entre 1758 et 1762, Gabriel Lamé et Emile Clapeyron (1831) et Neumann dans ses conférences de l'année 1860. Joseph Black [Sarler B., (1995)] a introduit le paramètre de la chaleur latente, suites à des expériences effectuées sur les transformations eau/glace, où il déduisit que le transfert thermique avec changement de phase ne peut être expliqué qu'en ne tenant compte que de la chaleur sensible. Gabriel Lamé et Emile Clapeyron, (1831) ont intégré la chaleur latente dans l'équation de diffusion, et ils ont trouvé que la vitesse de l'interface est proportionnelle à la racine carrée du temps en explicitant la constante de proportionnalité.

Franz Neumann a établi la solution analytique [Weber, (1901)], portant l'appellation de "solution généralisée de Neumann", dans le cas de la solidification d'un milieu initialement à son point de fusion, solution qui englobe également le cas général de la solidification d'un milieu à température supérieure à celle de fusion.

La première discussion de ce type de problème a été publiée par Stefan en 1891 [Sarler B., (1995) ; Sandner H., (1984.) ; Nedoma .J, (1997)], Stefan donne une solution plus restreinte que celle de Neumann, il l'applique à l'étude de l'épaisseur des glaces polaires, pour en déduire avec une bonne précision la valeur de la conductivité thermique de la glace polaire, il a ainsi étudié le problème considéré par Lamé et Clapeyron.

1.3 MODELE MATHEMATIQUE

Deux modèles mathématiques sont construits sur la base des équations établies : le modèle à une phase ou implicite et le modèle à deux phases ou explicite. Dans le premier cas, l'équation de l'énergie est écrite de façon à vérifier implicitement le bilan thermique à l'interface dont la localisation n'est pas nécessaire, pour aboutir à la solution du problème. Et la position de l'interface est déduite de l'évolution de la distribution de température dans le domaine. Par contre, le second modèle considère l'équation de l'énergie phasique avec une condition de saut permettant de localiser l'interface.

1.3.1 MODELE EXPLICITE

Cette méthode permet le suivi du mouvement de l'interface [Savović S., et al, (2003)]. On l'appelle aussi la méthode à deux régions, où on distingue la phase liquide de la phase solide, par une interface. Ce sont des méthodes qui s'appliquent principalement aux problèmes unidimensionnels, à titre d'exemple la solidification ou fusion de substances pures, ce qui est le cas de l'expérience de Lamé et Clapeyron, sur la solidification de l'eau pure. Stefan et Neumann ont modélisé ce phénomène par une méthode explicite et résolu le problème analytiquement.

La solution analytique du problème de solidification n'existe que dans quelques cas particuliers. Ces solutions sont valables principalement pour des cas unidimensionnels d'une région infinie ou semi-infinie, avec des conditions aux limites et initiale simples où les propriétés thermiques sont considérées constantes. Il y a des solutions exactes qui sont disponibles pour des géométries régulières (barre, cylindre, sphère, coin) et pour des conditions aux limites constantes. [Alexiades V et Solomon A.D, (1993)].

Ces solutions s'expriment en général à travers une seule variable de la forme $\eta = \sqrt{x/t}$ pour les coordonnées cartésiennes et $\eta = \sqrt{r/t}$ pour les coordonnées sphériques et cylindriques; ces solutions sont connues comme des solutions de similitude.

1.3.1.1 SOLUTION DE STEFAN (UNE PHASE)

C'est le phénomène de solidification d'un matériau pur à l'état liquide dans un plan semi-infini maintenu à sa température de fusion T_m en contact avec une paroi à température $T_0 < T_m$

Il se développe une interface $S(t)$ mobile aux cours du temps de température T_f , qui sépare la phase liquide et solide. Le transfert de chaleur n'apparaît que dans la partie solide où existe un gradient de température. Le problème est décrit par une équation de la chaleur régissant la distribution de la température dans la phase solide (Eq.1.1 et 1.2) soumises aux conditions initiales (Eq. 1.3) et à l'interface (Eq.1.4) appelée aussi condition de Stefan:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < S(t) \quad (1.1)$$

$$T(x,t) = T_m \quad x \geq S(t) \quad (1.2)$$

$$\text{à } t = 0 \quad \forall x \quad \begin{cases} T(x,0) = T_m \\ S(t = 0) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} k \frac{\partial T}{\partial x} = L\rho \frac{dS}{dt} \\ x = S(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Où c, ρ, k et L sont respectivement la chaleur spécifique, la masse volumique, la conductivité thermique et la chaleur latente.

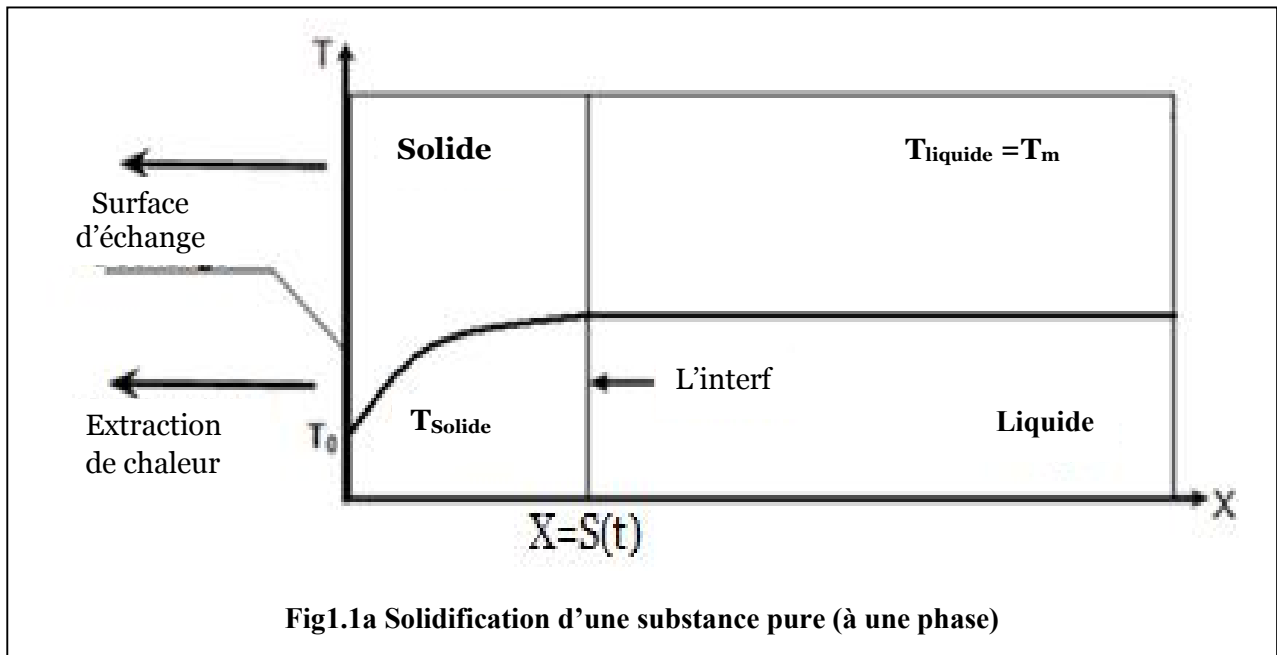
La résolution de ce système d'équations aboutit à une solution analytique du profil de température (Eq. 1.5) et la position de l'interface est donnée par (Eq. 1.6):

$$T(x, t) = T_0 + (T_m - T_0) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \quad 0 < x < S(t) \quad (1.5)$$

$$S(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha t} \quad (1.6)$$

Où λ représente la "constante de solidification" qui est solution de l'équation transcendante suivante :

$$\frac{c(T_f - T_0)}{L\sqrt{\pi}} = \lambda e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) \quad (1.7)$$



1.3.1.2 SOLUTION DE NEUMANN (DEUX PHASES)

La solution de ce problème, présentée par Neumann dans ses conférences de 1860, n'a été publiée qu'après dix ans de la solution de Stefan [Weber, (1901)], on attribue la solution de ce problème à deux phases à Neumann dont la solution de Stefan est une solution particulière.

La solution de Neumann est la première solution exacte établie pour un phénomène de transfert thermique avec changement de phase, pour un domaine plan semi infini occupé par un matériau pur à l'état liquide de température supérieure à sa température de fusion T_i , en contact avec une surface d'échange située à $X=0$ et maintenue à une température T_0 constante inférieure à la température de fusion.[Peng Q. et al, (1992) ; Crank J., (1984)]

Ces conditions imposées au liquide font que l'extraction de la chaleur se fait à travers la paroi. Le milieu demeure avec deux phases : une phase solide due au changement de phase et une liquide où toutes les deux sont le siège de gradients de températures et donc de transferts thermiques : l'un entre l'interface et la paroi pour la phase solide ; l'autre entre l'interface et l'infini pour la phase liquide. Ainsi, on a deux distributions de température, d'où l'appellation de ce problème par « Deux phases ». [Zabaras N. et al, (1994); Chen S., et al, (1997); Peng Q. et al, (1992)]

Les équations mathématiques décrivant les températures T_s et T_l dans la phase solide et liquide respectivement se présentent comme suit :

L'équation de chaleur dans la phase solide

$$k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} = c_s \rho_s \frac{\partial T_s}{\partial t} \quad 0 < x < S(t) \quad (1.8)$$

L'équation de chaleur dans la phase liquide

$$k_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} = c_l \rho_l \frac{\partial T_l}{\partial t} \quad x > S(t) \quad (1.9)$$

Où k_s, c_s et ρ_s sont la conductivité thermique, la capacité calorifique et la masse volumique respectivement de la phase solide ; de même les constantes thermodynamiques de la phase liquide sont notées k_l, c_l et ρ_l ,

Avec les conditions initiales définies par les équations (1.10) et la condition à l'interface définie par la condition de Stefan (1.11)

$$\text{à } t=0 \quad \forall x \quad \begin{cases} T(x,0) = T_i \\ S(t=0) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} k_s \frac{\partial T_1}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_2}{\partial x} = L \rho_s \frac{dS}{dt} \\ x = S(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

La résolution donne les distributions de températures dans chacune des phases présentées ci-dessous par (1.12) et (1.13)

La distribution de température dans la phase solide :

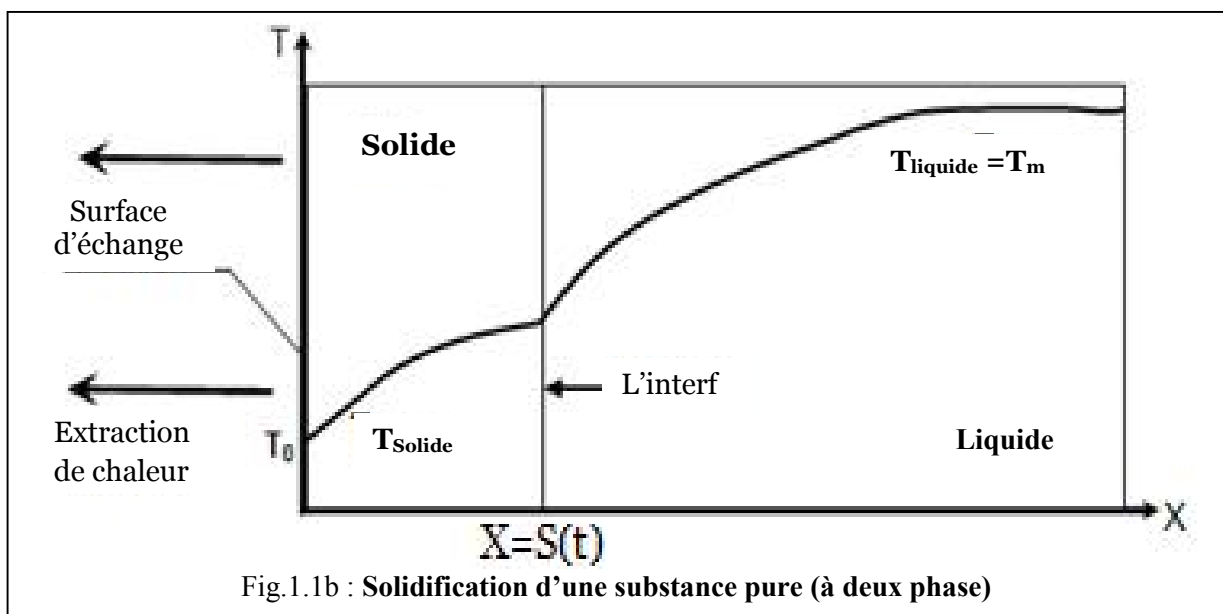
$$T_s(x,t) = T_0 + (T_m - T_0) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \quad 0 < x < S(t) \quad (1.12)$$

La distribution de la température à la phase liquide :

$$T_L(x,t) = T_i + (T_m - T_i) \frac{\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right)\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\lambda \cdot \sqrt{\alpha_S / \alpha_L}\right)} \quad x > S(t) \quad (1.13)$$

Où α_s , α_L sont les diffusivités du matériau dans sa phase liquide et solide respectivement, et λ est la racine de l'équation obtenue par la substitution des distributions de température de chaque phase dans la condition de Stefan

$$\frac{\sqrt{\pi} L \lambda}{c_s (T_f - T_0)} = \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} - \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_L}} \frac{k_l}{k_s} \frac{T_i - T_f}{T_f - T_0} \frac{e^{(-\lambda^2 \alpha_s / \alpha_L)}}{1 - \operatorname{erf}(\lambda \cdot \sqrt{\alpha_S / \alpha_L})} \quad (1.14)$$



Il est à noter que l'on peut trouver la solution de Stefan en remplaçant dans la solution (1.14) de Neumann la température T_i par la température de fusion T_m .

1.3.2 METHODE IMPLICITE OU METHODE ENTHALPIQUE

Ces méthodes, sont caractérisées par une seule variable continue dans tout le domaine. Elles englobent la méthode de l'enthalpie totale, la méthode de capacité thermique apparente et la méthode du terme source latent. Ces méthodes sont valables pour tout le domaine de calcul sans tenir compte de la condition de saut à l'interface. Elles peuvent être employées pour résoudre des problèmes multidimensionnels avec changement de phase isotherme ou dans une marge de température. Ces méthodes sont, en faite, dérivées du modèle à deux phases ou à deux régions [Crank J., (1984)], La formulation des méthodes enthalpiques est basée sur les fractions solide et liquide qui dépendent de plusieurs facteurs, à savoir la température, la concentration, le taux de fusion/solidification, le taux de nucléation, la vitesse de l'interface [Voller et al, (1990)]. Ces fraction sont des fonctions qui définissent le matériau fusible et sont données souvent sous forme de tables ou diagrammes. De plus elles rentrent dans la formulation du phénomène. Elles décrivent aussi les autres paramètres physiques : telle que la capacité calorifique et l'enthalpie qui sont nécessaires à connaître pour que les formulations implicites soient complètes.

On définit g_l la fraction liquide par unité de volume (avec $0 \leq g_l \leq 1$). En désigne, de façon analogue, par g_s la fraction solide.

Elles sont reliées par $g_l = 1 - g_s$.

Ces deux paramètres sont déterminés en fonction de la température T

Dans la phase liquide $g_l = 1$

Dans la phase solide $g_l = 0$

Dans la région diphasique $0 < g_l < 1$

Ces fonctions rendent les équations qui décrivent le phénomène fortement non-linéaires et donc, une procédure itérative est nécessaire. Cette méthode est généralement associée aux difficultés de choisir le pas de temps, le pas d'espace et la marge de transition. [Minwu Y. et al, (1993)]

1.3.2.1 FORMULATION ENTHALPIE TOTALE

La méthode enthalpie est une méthode où le domaine est présenté comme une seule phase décrite par une seule équation de l'énergie en fonction de la température et de l'enthalpie totale qui englobe la chaleur sensible (h_c) et la chaleur latente (h_l). Cette approche est l'une des plus utilisées à cause de sa généralité aux problèmes de changement de phase. [Voller R.V. (1990) ; MEYER G.H., (1973)].

Dans le cas où la solidification ou la fusion sont de forme diphasique, il existe des régions où le liquide et le solide coexistent simultanément :

L'enthalpie se présente sous la forme :

$$h = h_c + h_L = e + Lg_l \quad (1.15)$$

Où e est l'énergie interne qui est égale à la chaleur sensible dans le cas où la variation de pression est nulle.

$$e = h_c = \int_{T_r}^T c dT = \int_{T_r}^T [g_s(T)c_s + g_l(T)c_l] dT \quad (1.16)$$

Où T est la température et T_r celle d'un point de référence. Et l'équation de l'énergie s'écrit simplement :

$$k\nabla^2 T = \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.17)$$

Dans le cas où l'interface est plane, le changement de phase est isotherme. [Benheddad T., (2007)] ; L'enthalpie est définie par trois manières qui sont décrites en fonction de la température et l'enthalpie adimensionnées θ et H . Elles sont adimensionnées par : T_0 , T_m , H_{ref} qui sont respectivement les températures de référence, de fusion et l'enthalpie de référence.

Approximation en escalier

Le saut d'enthalpie à l'interface, est explicité par une formulation de l'enthalpie volumique adimensionnelle sous la forme suivante :

$$H = H_{ref} + \int_1^{\theta} d\theta + \frac{L\delta(\theta)}{c(T_0 - T_m)}$$

En introduisant la fonction de Dirac $\delta(\theta)$, le terme $\frac{L\delta(\theta)}{c(T_0 - T_m)}$ exprime l'enthalpie du changement de phase volumique adimensionnel, H s'exprime par:

$$H = \begin{cases} \theta; & \theta > 0 \\ \theta - \frac{L}{c(T_0 - T_m)}; & \theta \leq 0 \end{cases}$$

Approximation linéaire

Dans cette approximation, on suppose que l'enthalpie évolue linéairement sur une plage de température de $\Delta T = [T_m - (\Delta T/2), T_m + (\Delta T/2)]$. L'enthalpie s'exprime par :

$$H = \begin{cases} \theta; & \theta > \varepsilon_l/2 \\ (1 + \frac{L}{\varepsilon_l c(T_0 - T_m)})\theta - \frac{L}{c(T_0 - T_m)}; & -\varepsilon_l/2 \leq \theta \leq \varepsilon_l/2 \\ \theta - \frac{L}{c(T_0 - T_m)} & \theta \leq -\varepsilon_l/2 \end{cases}$$

Avec $\varepsilon_l = \frac{\Delta T}{T_m - T_0}$

Approximation homographique

L'approximation homographique, à un paramètre, répond aux critères de continuité et de dérivabilité en définissant une évolution de l'enthalpie volumique adimensionnelle sous la forme :

$$H = \theta + \frac{L}{c(T_0 - T_m)} \left(1 + \frac{\theta}{\varepsilon_l + |\theta|} \right)$$

1.3.2.2 CAPACITE THERMIQUE APPARENTE

Dans cette formulation, le changement de phase est supposé se produire dans une marge de température centrée autour de la température de fusion. La chaleur latente libérée est prise en compte à travers une capacité thermique apparente. Cette capacité est fonction de la température, dans le cas où la solidification ou la fusion est de forme diphasique donc il existe des régions où le liquide et le solide coexistent simultanément. La formulation de la capacité calorifique s'écrit de la manière suivante :

$$\text{Dans la phase solide : } C_{p_{app}} = C_{p_{sol}} \quad (1.18)$$

$$\text{Dans la région diphasique : } C_{p_{app}} = C_{p_0} + L \frac{dg_l(T)}{dT} \quad (1.19)$$

$$\text{Dans la phase liquide : } C_{p_{app}} = C_{p_{liq}} \quad (1.20)$$

Où $C_{p_0} = \frac{1}{2}(C_{p_{liq}} + C_{p_{sol}}) - \frac{L}{2} \left(\left. \frac{dg_l(T)}{dT} \right|_{liq} + \left. \frac{dg_l(T)}{dT} \right|_{sol} \right)$, obtenue par la condition de continuité de la fonction $C_{p_{app}}$

L'équation de chaleur s'écrit sous la forme :

$$k \nabla^2 T = \rho C_{p_{app}}(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.21)$$

Dans le cas où l'interface est plane, le changement de phase est isotherme, la capacité calorifique est définie par trois manières [Benheddad T., (2007)]

Approximation en escalier :

$$C = \begin{cases} 1; & \theta > 0 \\ 1 - \frac{L}{2c(T_0 - T_m)}; & \theta \leq 0 \end{cases}$$

Approximation linéaire

$$C = \begin{cases} 1; & \theta > \varepsilon_l/2 \\ 1 - \frac{L}{c(T_0 - T_m)}; & -\varepsilon_l/2 \leq \theta \leq \varepsilon_l/2 \\ 1; & \theta \leq -\varepsilon_l/2 \end{cases}$$

Approximation homographique:

La capacité calorifique s'exprime d'une façon unique dans tout le domaine sous la forme :

$$C = 1 + \frac{L}{c(T_0 - T_m)} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_l + |\theta|} \right)$$

1.3.2.3 TERME SOURCE POUR CHALEUR LATENTE

Dans cette méthode, on définit une source de chaleur latente libérée ou absorbée liée au front de changement de phase. Cette source est basée sur la fraction liquide qui s'est transformée en solide. Ce qui fait que dans l'équation de la chaleur on ajoute un terme source

$$k\nabla^2 T + \rho L \frac{\partial g_s}{\partial t} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.22)$$

Le problème se ramène, ainsi, à une équation de diffusion in-stationnaire avec un terme source dépendant de l'espace et du temps.

Dans le cas où l'interface est plane, le changement de phase est isotherme, la fonction $g(T)$ peut prendre les formes suivantes [Benheddad, (2007)] :

Approximation en escalier :

$$g_s = \begin{cases} 0; & T > T_m \\ 1; & T \leq T_m \end{cases}$$

Approximation linéaire

$$g_s = \begin{cases} 0; & T > T_m + \Delta T/2 \\ 1 - \frac{T - T_m}{\Delta T}; & T_m - \Delta T/2 \leq \theta \leq T_m + \Delta T/2 \\ 1 & \theta \leq T_m - \Delta T/2 \end{cases}$$

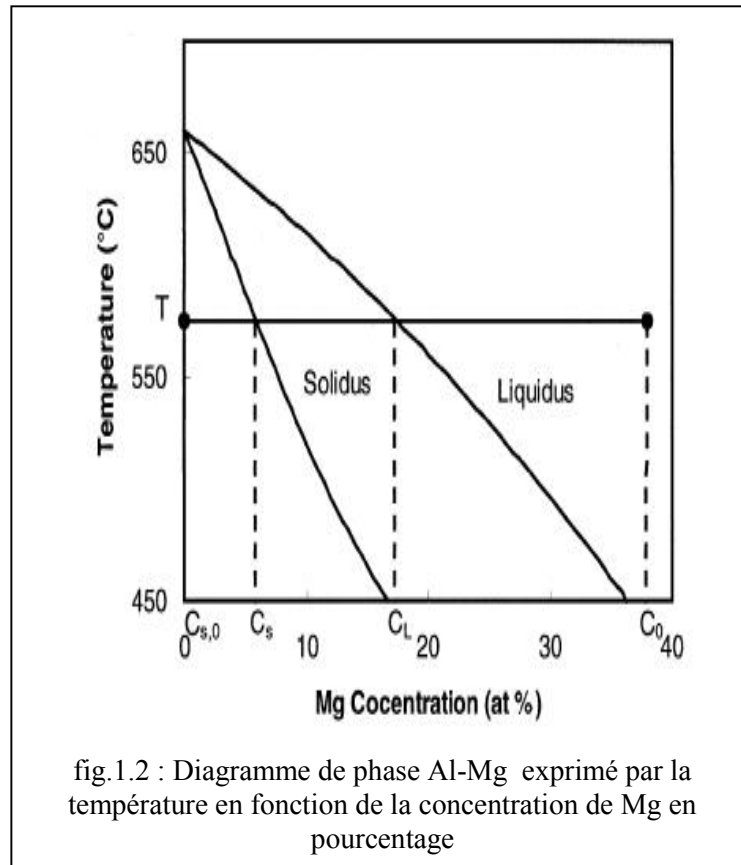
Approximation homographique:

La fraction solide s'exprime d'une façon unique dans tout le domaine sous la forme :

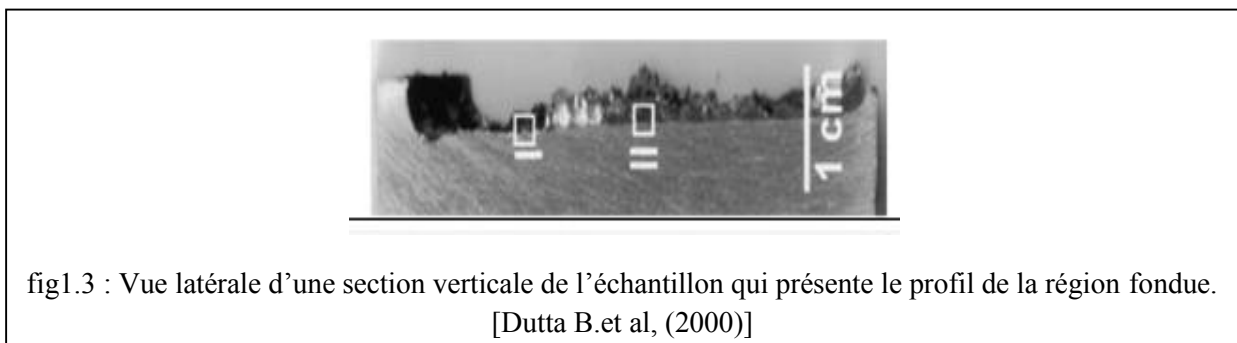
$$g_s = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T - T_m}{\Delta T + |T - T_m|} \right)$$

La méthode implicite est applicable en général à des substances qui ne sont pas pures, des mélanges homogènes qui contiennent plusieurs substances pures, soit des alliages métalliques ou solutions salines, cette impureté rend les problèmes de solidification des milieux homogènes très différents du problème de Stefan classique du fait que la température de fusion qui dépend de la composition de l'alliage, est initialement inconnue ou s'étale sur une plage de températures.

La méthode implicite (enthalpie) est adéquate pour la résolution de tels problèmes. Elle se base sur l'absorption et le dégagement de l'énergie d'enthalpie en chaque point de l'espace où l'on dispose d'informations données par des diagrammes thermodynamiques pour les couples solvant-soluté. Ces diagrammes connus sous le nom d'Eutectique relie la température et la concentration, voir (fig.1.2). [DUTTA B. et al, (2000)]



Si on impose à un matériau non pur les conditions initiales et aux limites du problème défini à la section (1.4.1.2), les phases solide et liquide ne seront pas séparées par une interface mais par une région diphasique de mélange solide et liquide, voir (fig.1.4). Ainsi la face de la phase solide n'est pas lisse mais elle est de forme dendrite, voir (fig1.3) [Dutta B.et al, (2000)].



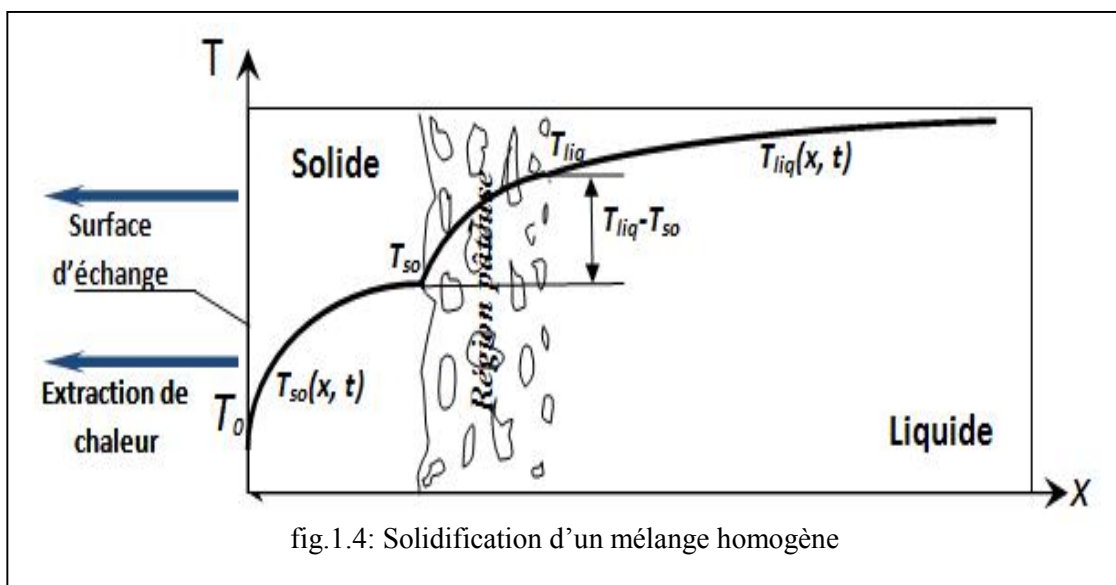
Le changement de phase dans un mélange homogène fait apparaître trois régions différentes, la région solide, la région liquide et une région intermédiaire qu'on appelle région pâteuse, cette dernière est une région diphasique où le solide et le liquide coexistent simultanément dans une plage de température.

Beaucoup d'autres phénomènes peuvent apparaître dans la solidification / fusion des alliages métalliques et les solutions salines et notamment dans la région diphasique [Singh A.K. et al, (2001) ; Chan S. H. et al, (1983) ; Dutta B. et al, (2000)]. Parmi ces phénomènes on peut citer :

- la refusions dans la phase pâteuse lors de solidification
- Formation des taches de rousseur qui est un défaut attribué à des panaches riches de soluté provenant à travers des canaux dans la région pâteuse.
- La ségrégation qui est une dégradation macroscopique des plaques solides flottantes dans la région pâteuse.
- La micro-ségrégation causée principalement par la diffusion de masse.
- La fragmentation (fractionnement) des dendrites.

On procède au problème de solidification, soit en considérant le domaine comme un seul domaine qui englobe les deux phases et on décrit le transfert thermique par une seule équation d'enthalpie, soit en considérant le domaine comme deux domaines, chacun englobant une phase dans laquelle le transfert thermique est décrit par une équation de transfert thermique ; les deux domaines séparés par une interface bien déterminée.

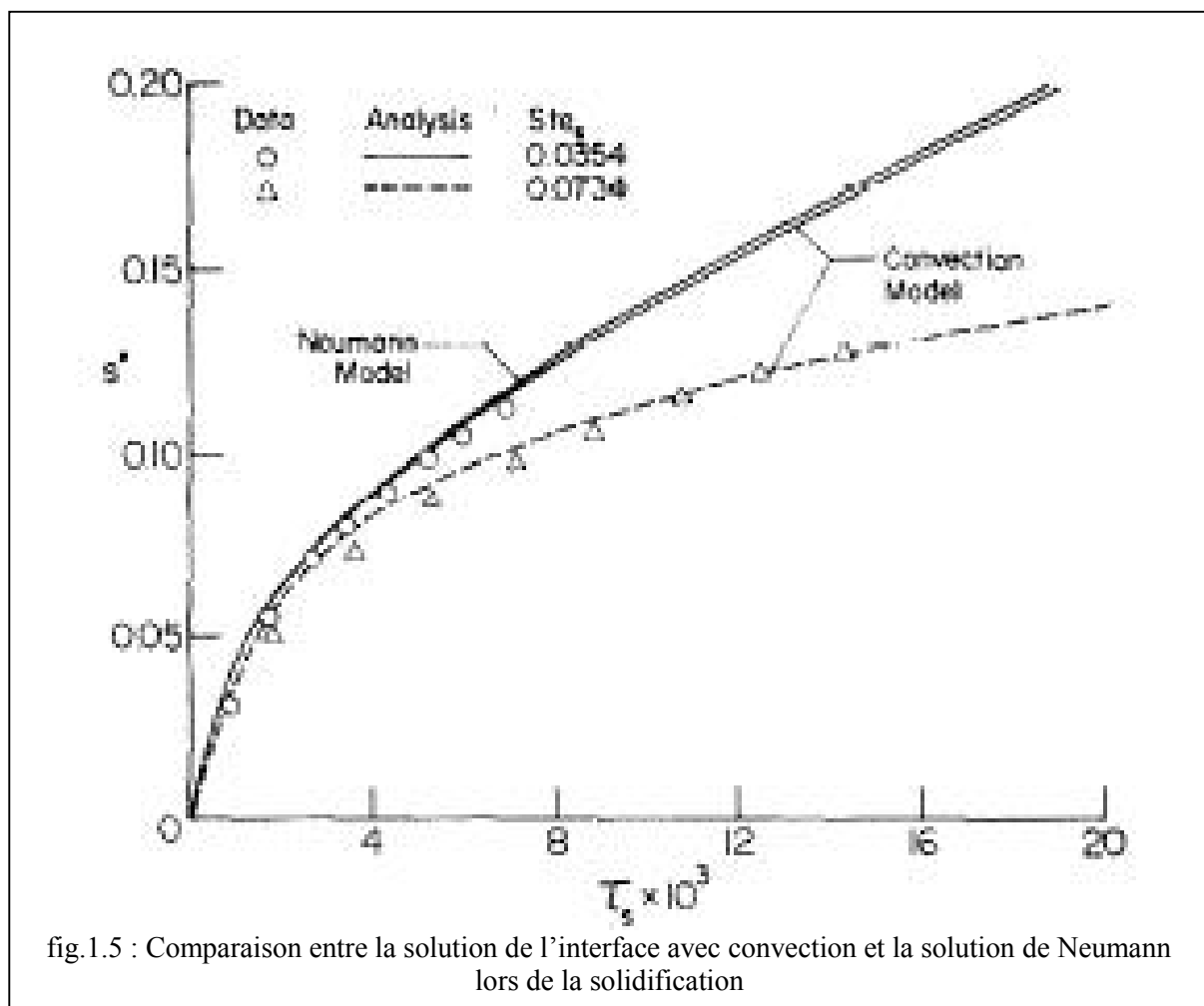
Pour des applications pratiques, on a généralement recours à des méthodes numériques. Les méthodes des différences finies [Bonacina C., et al, (1973)] et des éléments finis [Bonnerot R., et al (1974)]; sont parmi les plus utilisées [Furzeland R.M., (1980); Crank J., (1984) ; Hsiao I.S., (1985)]



1.4 L'INFLUENCE DE LA CONVECTION NATURELLE SUR L'INTERFACE DE SOLIDIFICATION

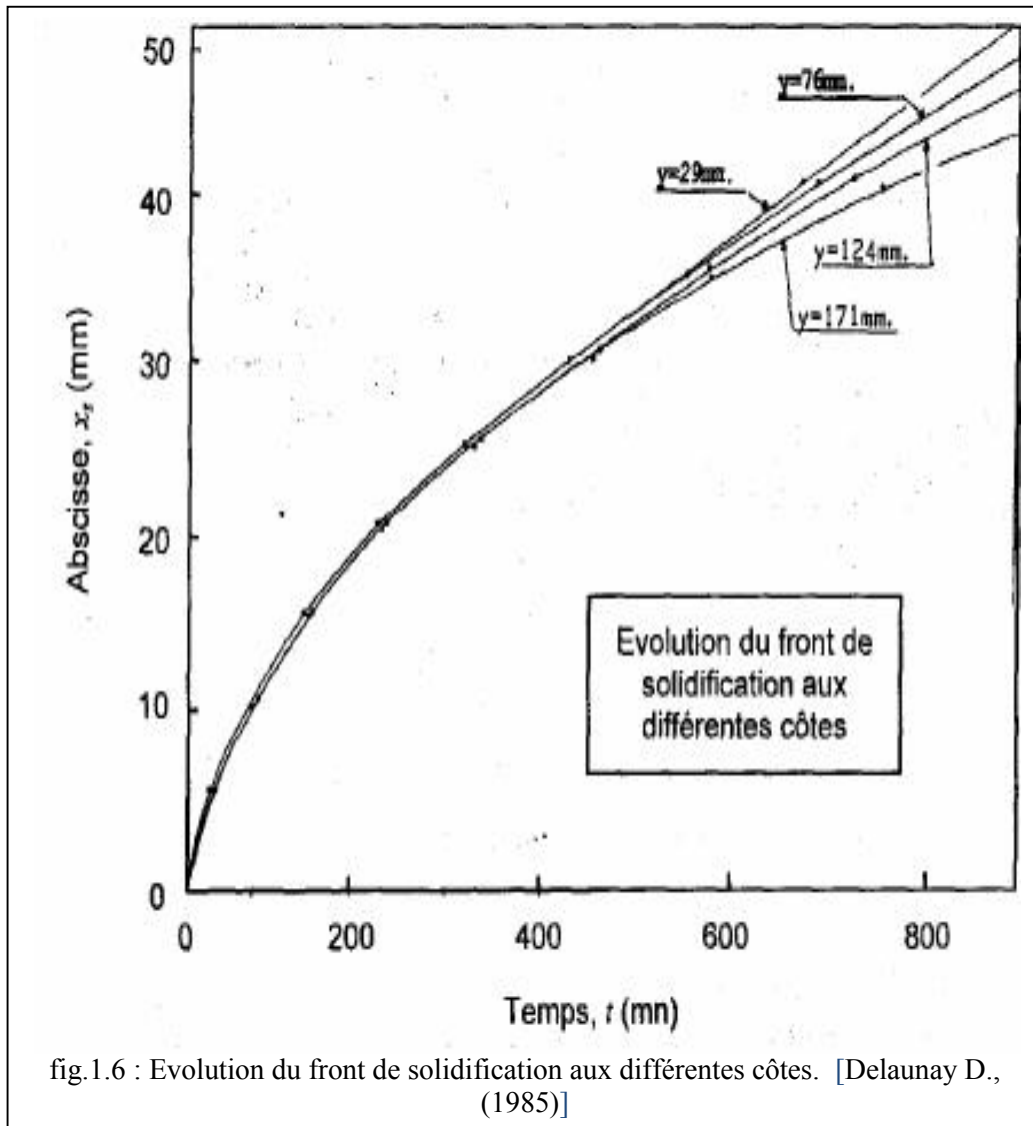
Le transfert thermique aura lieu lorsqu'il y a un gradient de température, dont l'existence donne lieu à des variations de densité dans la substance en phase liquide, ce qui induit des forces de volume qui entraînent les particules de fluide dans un mouvement ascendant, c'est ce qu'on appelle la convection naturelle. Celle-ci peut aussi provenir d'un gradient de concentration. Cependant, une solidification ou fusion avec mouvement de particule de fluide nous oblige à introduire les équations de conservation, ce qui rend le problème fortement non linéaire. Cela nous amène obligatoirement à employer des méthodes numériques ou expérimentales. [Gau C., et al, (1985)]

1.4.1 CAS DE LA SOLIDIFICATION



La solidification des liquides se fait par l'extraction de la chaleur par une couche solide qui va s'épaissir au cours du temps. Dans le cas où la convection naturelle intervient le front de solidification ne se développe pas de la même manière que dans le cas de la solidification par la conduction pure, c'est à dire que l'interface ne sera plus une surface plane.

La présence de la convection naturelle dans le liquide ralentit la vitesse de solidification et complique encore le processus de transport et la morphologie de l'interface. Ce cas a été mis en évidence par [HALE, JR N. W., et al, (1980)] en traitant de la solidification, en présence de la convection, du n-octadecane. Ils comparent la solution de la position de l'interface en fonction de temps présentée par la solution de Neumann et la position évaluée en introduisant la convection naturelle et on voit un ralentissement par rapport à la solution de Neumann fig.1.5.



L'expérience de Delaunay [Delaunay D., (1985)] présente l'évolution dans le temps pour différentes positions verticales d'une interface fig.1.6. On peut noter la superposition de ces évolutions pendant une grande partie de la période de solidification. Même les écarts entre les positions de l'interface pour différentes hauteurs observés après 800 mn restent négligeables, et à mesure que nous montons en hauteur le mouvement du front est retardé.

Lors de la solidification, l'effet de la convection naturelle est négligeable, cela est dû aux faibles vitesses des particules liquides subissant un faible gradient de température. Entre l'interface et le liquide, ces vitesses faibles retardent le processus de solidification.

1.4.2 CAS DE LA FUSION

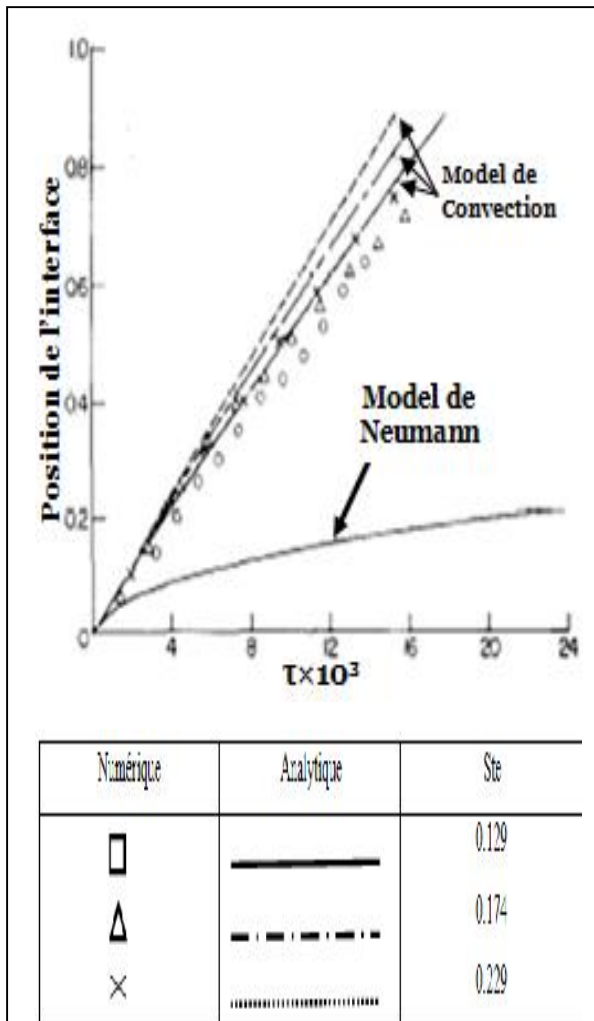


fig.1.7 Comparaison de la solution de l'interface entre le modèle de convection et le modèle de Neumann lors de la fusion [N. Hale, JR. N.W and Viskanta R., (1980)]

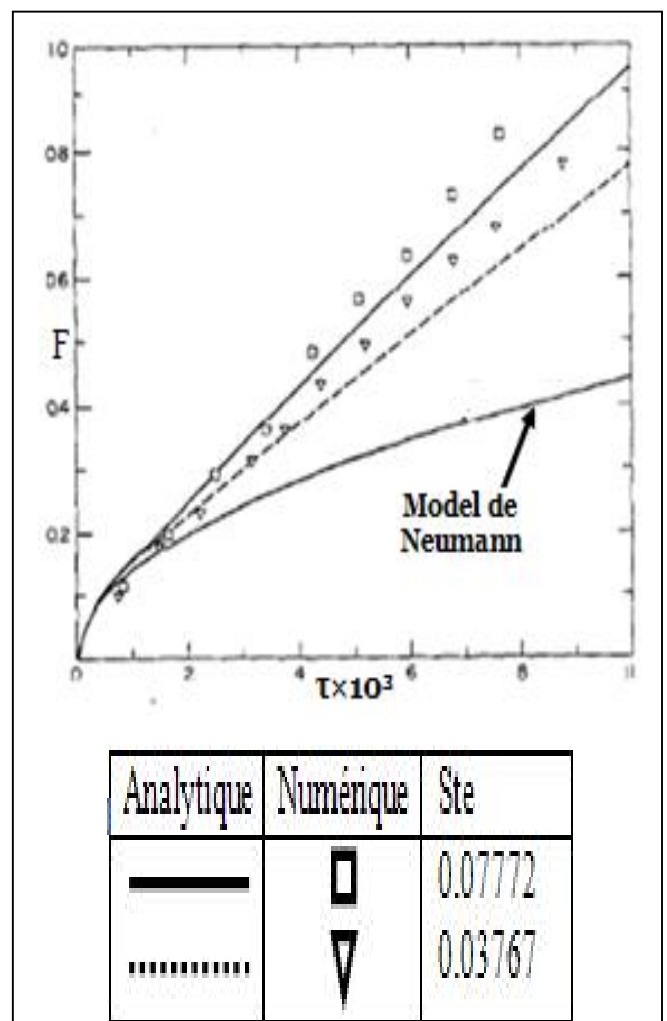


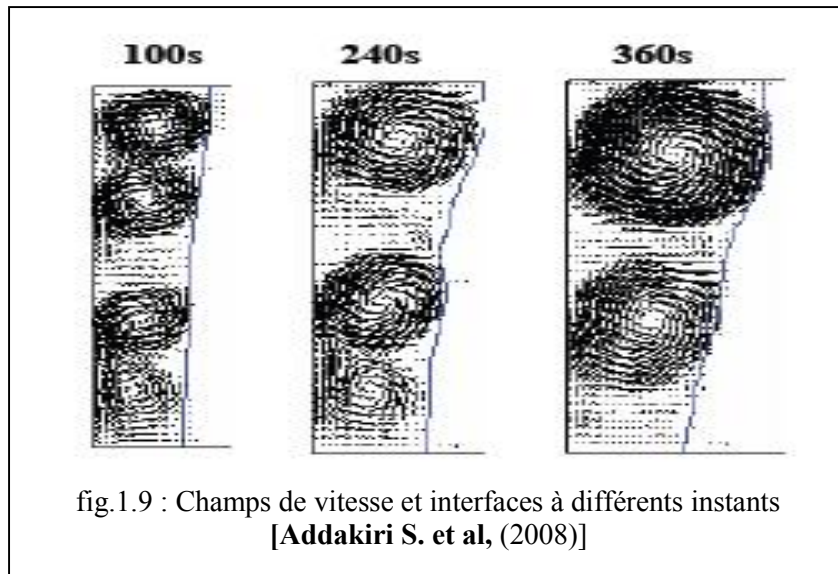
fig.1.8 Influence de la convection naturelle en fonction du temps sur la fraction fondue F pour le modèle de Neumann [Gau C.and Viskanta R., (1985)]

La fusion des solides se fait par injection de la chaleur par une surface plaquée initialement au solide, qui génère un gradient de température dans le liquide qui provient de la fusion de la substance, le gradient de température fait apparaître des rouleaux de convection, qui se mettent à grandir en taille à mesure que la fusion progresse. Les expériences montrent que la convection lors de la fusion a une influence majeure sur le développement du front par rapport à son influence lors de la solidification. Aussi Hale, JR N. W., et Viskanta R., (1980) font la comparaison de l'interface évaluée en présence de la convection et le modèle de Neumann pour un $Ste=0.128$. On remarque clairement un décalage flagrant entre les deux modèles fig.1.7 ; la preuve que lors de la fusion, la convection a une influence majeure sur le développement du front, par rapport à son influence lors de la solidification. Et ceci a été mis en évidence par [Gau C. et al, (1985)] montrant que la convection naturelle lors de la fusion a pour effet de doubler pratiquement le volume fondu. La figure ci-dessous (Fig. 1.8.) montre clairement ce résultat, elle donne les simulations numériques des évolutions de la variation de la fraction fondue F en fonction du temps t , pour $Ste = 0.07772$ et 0.03767 , dans le cas où la convection naturelle est prise en compte dans les équations du problème, et dans celui où elle est négligée ; la fraction fondue est le rapport de volume de liquide à l'instant τ sur le volume initial de liquide. Les carrés et triangles présentent les solutions numériques respectivement et les lignes continues sont les solutions analytiques comparées avec le modèle de Neumann.

Une simulation du développement des rouleaux de convection naturelle, lors de la fusion et leur influence sur la forme de l'interface, a été rapportée par [Addakiri S. et al, (2008)].

Au début, les transferts de chaleur sont purement conductifs et l'interface se déplace parallèlement à la surface d'échange, ce que l'on se voit d'ailleurs dans la fig.1.8 qu'initialement il est superposé à la solution de Neumann ou la convection n'est pas prise en considération.

Par la suite, comme présenté dans la fig.1.9, au fur et à mesure que la couche liquide augmente en épaisseur, des courants convectifs se développent à partir de la surface d'échange et gagnent progressivement toute la couche fondue pour dominer les transferts thermiques.



1.5 SITUATION DU SUJET :

Dans le présent travail, nous nous intéresserons à une méthode explicite pour approcher la solution du problème de Stefan. Le suivi de l'interface constitue l'objectif principal de la solution. La présente étude concerne un problème unidimensionnel de Stefan à une phase. Un matériau de phase solide isotherme occupant un domaine semi-infini est soumis à la température de fusion. Cette phase se trouve en contact avec une phase liquide de même matériau qui est cerné entre la phase solide et la paroi d'échange thermique. Celle-ci possède une distribution de température initiale et une source en fonction de l'espace (de la phase liquide) et du temps. Ces conditions vont déclencher la fusion du solide qui apparaîtra dans le déplacement de l'interface plane.

L'étude a pour ambition de fournir une approche numérique qui permet de suivre le mouvement de l'interface solide/liquide avec une bonne précision.

Le modèle physique considère la fusion plane d'un solide occupant une partie de demi-espace $\eta \geq \Delta$ qui se trouve initialement à son point de fusion et une phase liquide qui occupe le reste du demi-espace entre $(0, \Delta)$, une distribution initiale de température supérieure à la température de fusion et une source chaude, sont imposées sur cette phase ; Le changement de phase commence à partir de l'interface qui délimite la phase solide et liquide $\eta = \Delta$. (Voir Fig.2.4)

Le modèle mathématique est décrit par une équation de diffusion instationnaire et unidimensionnelle avec une source dans un domaine délimité par une frontière dont la position est donnée par $\eta = \Delta(\tau)$. En outre, la condition de saut de flux au niveau de cette dernière complique d'avantage l'analyse mathématique en introduisant la non-linéarité.

La solution de ce problème avec ces conditions rend la solution analytique pratiquement impossible, ce qui nous oblige à la résoudre par des procédures numériques qui vont être validées par des solutions exactes existant dans la littérature. D'ailleurs c'est le but de ce travail, où nous étudions numériquement le problème proposé après validation par ces solutions exactes.

Différentes solutions exactes des problèmes de type Stefan sont de nos jours encore utilisées comme référence standard pour valider les modèles numériques [Gülkaç V., (2009) ; Kutluay S., (2005) ; Sadoun N., (2012)] parmi elles : la solution de Stefan, la solution de Neumann et les solutions de FASANO A. ET PRIMICILIO M., (1979).

1.6 CONCLUSION :

Le présent chapitre a permis de rapporter les études pionnières concernant le problème de Stefan ainsi que les diverses contributions sur le plan analytique et numérique ainsi que les différentes visions développées par ces auteurs pour traiter ce type de problème. Un aperçu, a été donné, sur les méthodes explicites et implicites appliquées aux transferts thermiques avec changement de phase dans les milieux purs et les alliages homogènes (milieux eutectique) où on voit l'influence de la concentration des éléments de l'alliage sur le problème de Stefan.

En plus le rôle joué par la convection naturelle dans les phénomènes de solidification et fusion est mis en relief. L'influence apparaît particulièrement au niveau de la forme du front de changement de phase.

Les premières solutions analytiques de transfert thermique avec changement de phase sont revues à savoir celle de Neumann pour deux phases et du problème de Stefan classique de température de paroi constante inférieure à la température de fusion et un milieu semi-infini qui contient un matériau pur dans son état liquide et à sa température de fusion. Ce problème pour lequel une solution analytique existe coïncidant avec les résultats expérimentaux de

Lame et Clapeyron. Ces solutions ainsi que celles de FASANO A. ET PRIMICILIO M., (1979) incluant une source constituent la référence de base à l'authentification des solutions proposées aux problèmes traités dans ce manuscrit.

CHAPITRE 2

FORMULATION DU

PROBLEME

LA METHODE EXPLICITE

2.1 INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'établir le modèle mathématique gouvernant le phénomène de fusion contrôlée par la conduction instationnaire. La formulation mathématique, donnée par un modèle explicite, est déduite de la considération des bilans énergétiques aussi bien dans les deux phases qu'au niveau de la région de changement de phase. Cette dernière est considérée dans notre étude de forme surfacique.

La mise en équations est considérée dans le cadre d'un certains nombres d'hypothèses simplificatrices. Un modèle mathématique simplifié est obtenu et pour lequel nous rapportons deux solutions exactes obtenues par Fasano A. et Primecchio M., (1979).

2.1.1 MODELE PHYSIQUE:

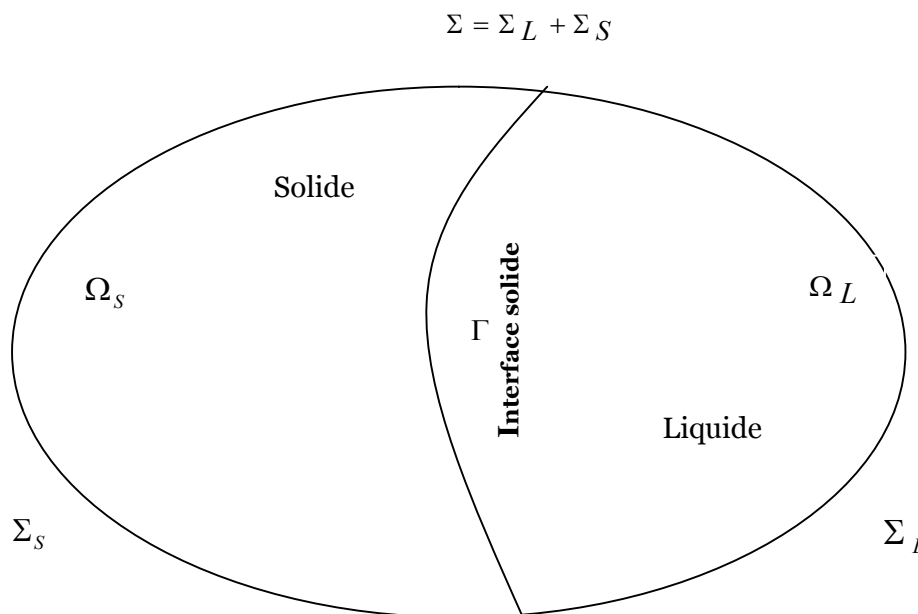


Fig.2.1-Volume de contrôle contenant l'interface solide/liquide de surface extérieure

$$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_L$$

Soit un volume Ω délimité par une surface extérieure Σ composée de deux autres domaines Ω_l et Ω_s . Ω_l est à l'état liquide avec une distribution initiale de température, délimité par une surface Σ_l , et dans lequel agit une source $S(x, t)$ dépendant du temps et de l'espace. Ω_s est le volume solide délimité par Σ_s de même matériaux à la température de fusion T_m .

On désignera par Γ la surface de séparation des deux volumes liquide Ω_s et Ω_l .

2.1.2 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Le modèle physique est considéré dans le cadre des hypothèses réductrices suivantes (par exemple)

- i. Les transferts thermiques se font uniquement par conduction transitoire.
- ii. Tout autre phénomène de transport de chaleur est négligé devant les transferts conductifs.
- iii. On admet que la conduction microscopique est parfaitement décrite par la loi de Fourier.
- iv. Les propriétés thermophysiques des phases liquide et solide sont constantes et indépendantes de la température. Elles peuvent être différentes pour les deux phases.
- v. Le matériau est homogène et isotrope.
- vi. Le matériau est parfaitement pur de sorte à considérer un changement de phase isotherme
- vii. L'interface est lisse et mécaniquement stable, écartant toute formation de dendrites.
- viii. Le mouvement du front de fusion est dû uniquement au changement de phase.
- ix. Les variations de vitesses dues au saut de densités à l'interface, sont négligeables.

2.1.3 MODELE MATHEMATIQUE

2.1.3.1 L'EQUATION DE LA DIFFUSION

Soit une portion cubique de domaine matériel solide ou liquide Ω , ramené à un repère de coordonnées cartésiennes (x, y, z) ; $Q_x, Q_y,$ et Q_z désignent les puissances de chaleur à l'instant t rentrant parallèlement aux axes x, y, z , respectivement par les surface S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} et $Q_{x+dx}, Q_{y+dy}, Q_{z+dz}$ sont les puissance de chaleur à l'instant t sortante parallèlement au mêmes axes précédents à travers les surfaces parallèles aux surfaces $S_{yz}, S_{xz},$ et S_{xy} respectivement.

E_{In} et E_S sont les énergies internes et de source respectivement ; Le bilan d'énergie établi dans un intervalle du temps $[t, t + dt]$ peut être présenté de la façon suivante (Voir Fig.2.2) :

Puissances entrante – Puissances sortante = Puissance interne – puissance de source

$$-(Q_{x+dx} - Q_x) + (Q_{y+dy} - Q_y) + (Q_{z+dz} - Q_z) = \frac{d^2 E_{interne}}{dt} - \frac{d^2 E_{source}}{dt} \quad (2.1)$$

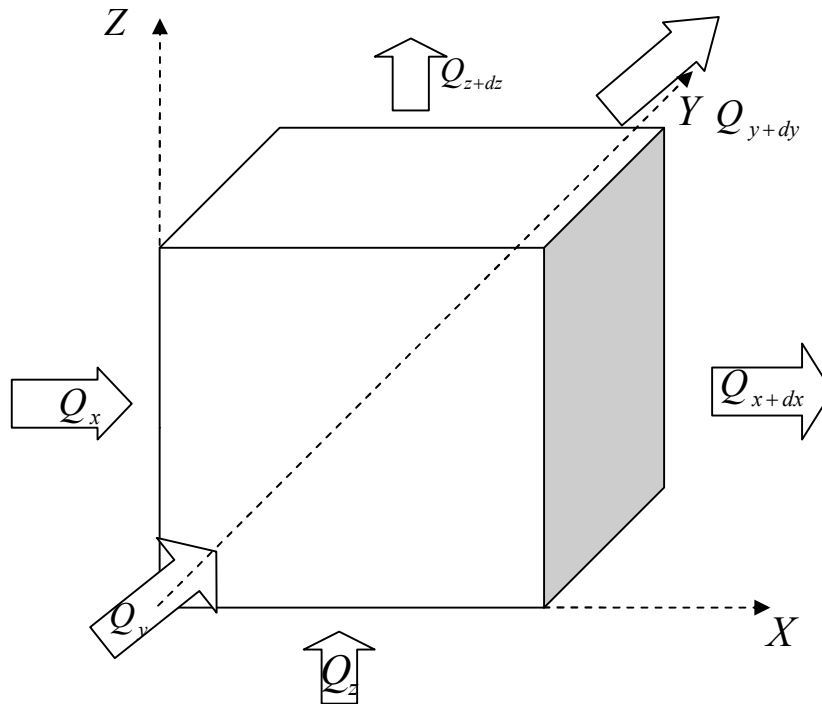


Fig.2.2-Bilan énergétique d'une portion dv

On admet que la variation de pression dans le système est nulle permettant de considérer que la variation de l'énergie interne $dE_{interne}$ n'est due qu'à la seule variation de l'enthalpie dh ce qui s'écrit sous la forme suivante :

$$d^2 E_{interne} = d^2 h = c_p dm dT \quad (2.2)$$

Où c_p est la capacité calorifique à pression constante, dv est le volume de la portion cubique du domaine considéré de masse dm , de masse volumique et de variation de la température dT

On pose

$$d^2 E_{source} = S(M,t)dvdt \quad (2.3)$$

Où $S(M, t)$ est la puissance volumique de la source en chaque point M à l'instant t, en combinant les relations (2.1), (2.2), et (2.3), le bilan s'écrit sous la forme (2.4)

$$-\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz\right) = \rho dv c_p \frac{dT}{dt} - S dv \quad (2.4)$$

Notant que la double variation de l'énergie interne est due à la dépendance de cette dernière de deux variables : la masse et la température, ainsi que l'énergie de source qui dépend du volume et du temps

Les puissances de chaleur s'expriment en fonction du flux de puissance de chaleur à travers les surfaces du cube par,

$$Q_k = q_k dx_i dx_j \quad (2.5)$$

Où les indices représentent les coordonnées x, y, et z.

Le flux de chaleur dérive d'un gradient de température et est exprimé par la première loi de Fourier

$$\vec{q} = -k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (2.6)$$

On substitue les équations (2.5) et (2.6) dans l'équation (2.4) pour trouver l'équation de l'énergie suivante :

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{S}{k} \quad (2.7)$$

Où $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ est la diffusion thermique.

La même équation contrôle le transport de chaleur pour les deux états de matériau, on peut écrire :

$$\Delta T_i = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} - \frac{S_i}{k_i} \quad (2.8)$$

Avec $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i c_{p_i}}$ i = solide, liquide

2.1.3.2 EVALUATION DE L'ENERGIE A L'INTERFACE

Soi un volume dv de masse dm , de masse volumique ρ , délimité par deux surface σ_s , σ_l et d'épaisseur $d\delta$ infiniment petit où σ_s est une partie de la surface de l'interface solide – liquide appelé Γ et σ_l une partie de surface de liquide adjacent à σ_s .

Le but consiste à établir le bilan énergétique qui transforme le volume dv de phase solide à la phase liquide.

Soit dE_{fusion} l'énergie nécessaire à la transformation d'un volume dv à la température T_f de la phase solide à la phase liquide qui se traduit par :

$$dE_{fusion} = L \cdot dm \quad (2.9)$$

Avec $dm = \rho dv$ et L est la chaleur latente de matériau ou autrement dit ; l'énergie massique de changement de phase d'un matériau de la phase solide à la phase liquide donc l'énergie de solidification s'écrit de la forme suivante :

$$dE_{fusion} = L\rho\sigma_l d\delta \quad (2.10)$$

La variation de l'énergie interne d'élément de volume dv au niveau de l'interface est égale à la différence entre l'énergie sortante du volume dv et celle entrante au volume dv pendant une période dt , le volume dv délimité par des surfaces de différente phase.

Pendant une période dt , La portion liquide de volume dv , reçoit une énergie $dE_{entrente}$ par flux de chaleur \vec{q}_l qui rentre à travers la surface liquide σ_l de normale $\vec{n}|_l$.

$$dE_{entrente} = \vec{q}_l \cdot \sigma_l \cdot \vec{n}|_l \cdot dt$$

Et il perd une énergie $dE_{sortante}$ par flux de chaleur qui sort à travers la surface de phase liquide σ_s de normale $\vec{n}|_s$.

$$dE_{sortante} = \vec{q}_s \cdot \sigma_s \cdot \vec{n}|_s \cdot dt$$

La variation de l'énergie interne à l'interface solide/liquide, d'un volume dv pendant une période de temps dt transforme ce volume de phase solide en phase liquide, par conséquent la variation de l'énergie interne à l'interface est égale à l'énergie de fusion.

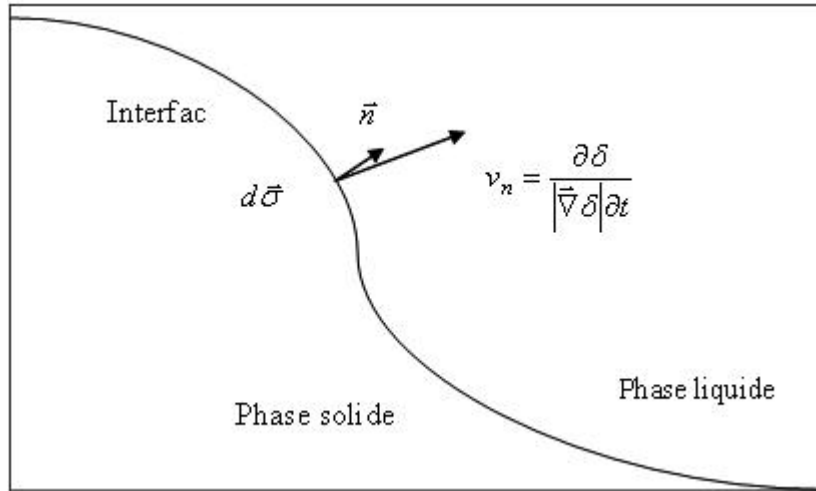


Fig.2 .3-Élément de surface sur le front de changement de phase solide/liquide

La variation de l'énergie interne de l'élément de volume initialement liquide dv est égale à la différence des énergies entrante et sortante pendant la période dt . Au cours de cette variation, la portion solide de volume dv se transforme à la phase liquide en gagnant une énergie de dE_{fusion} qui représente l'énergie nécessaire au changement de phase. La conservation de l'énergie totale nous conduit à l'égalité entre la variation de l'énergie interne et l'énergie de solidification, qui se développe sous la forme :

$$L\rho\sigma_l d\delta = (\vec{q}_l \cdot \sigma_l \cdot \vec{n}|_l - \vec{q}_s \cdot \sigma_s \cdot \vec{n}|_s) \cdot dt \tag{2.11}$$

Enfin en introduisant la première loi de Fourier (2.5), $\vec{q}_i = -k_i \vec{\nabla} T_i$ dans la formule (2.11), et à l'interface en considérant les éléments de surface en contact respectivement avec la phase solide et liquide proche, $\sigma_s \cong \sigma_l$, on obtient l'équation suivante :

$$L\rho v_n = -k_l \vec{\nabla} T_l \cdot \vec{n}|_l + k_s \vec{\nabla} T_s \cdot \vec{n}|_s \tag{2.12}$$

Où $v_n = \frac{d\delta}{dt}$ est la composante normale de la vitesse de l'interface et \vec{n} la normale à celle-ci au point considéré. (Voir Fig.2.3)

Au niveau de l'interface $\frac{d\delta}{dt}\Big|_{x=\delta} = 0 = \frac{\partial\delta}{\partial t} + \vec{v}_n \cdot \vec{\nabla}\delta$ et $\frac{dT_i}{dt}\Big|_{x=\delta} = 0 = \frac{\partial T_i}{\partial t} + \vec{v}_n \cdot \vec{\nabla}T_i$

$$v_n = -\frac{\partial\delta}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\vec{\nabla}\delta|} = -\frac{\partial T_i}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\vec{\nabla}T_i|}, \quad i=s, l$$

2.2 PROBLEME DE STEFAN A UNE DIMENSION AVEC SOURCE ET DISTRIBUTION INITIALE

2.2.1 DESCRIPTION DU MODELE

On considère la fusion au sein d'un matériau à changement de phase qui se trouve initialement ($t=0$) à sa phase solide avec sa température de fusion T_m et occupe le domaine $x > \delta$

Le matériau à changement de phase est en contact avec un matériau de même nature à l'état liquide occupe le domaine $0 \leq x \leq \delta_0$ avec une distribution initiale $T(x,0) = f(x)$; le contact entre les deux phases et le gradient de température dans la phase liquide sont à l'origine de la fusion du solide. Le volume liquide augmente à mesure que le temps s'écoule.

En outre la partie liquide contient une source de puissance volumique $S(x,t)$. Le problème physique considéré est schématisé dans la Fig.2.4

Les propriétés physiques de la phase liquide sont indépendantes de la température et la vitesse du front solide/liquide associée au changement de volume du à la fusion est négligeable, donc l'équation de transfert de chaleur s'exprime comme suit :

Pour $0 \leq x \leq \delta(t)$;

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S(x,t) \quad (2.13)$$

La condition à la limites de l'interface solide /liquide correspondante à l'abscisse $x = \delta(t)$ nommé condition de Stefan s'écrite :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta(t)} = \rho L \frac{d\delta}{dt} \quad (2.14)$$

Où L est la chaleur latente de fusion de matériau

Les conditions initiales sont :

à $t = 0$

$$T(x,0) = f(x) \quad (2.15)$$

$$\delta(0) = \delta_0 \quad (2.16)$$

Les conditions aux limites sur la température

à $t > 0$

$$T(0,t) = T_m \quad (2.17)$$

$$T(\delta,t) = T_m \quad (2.18)$$

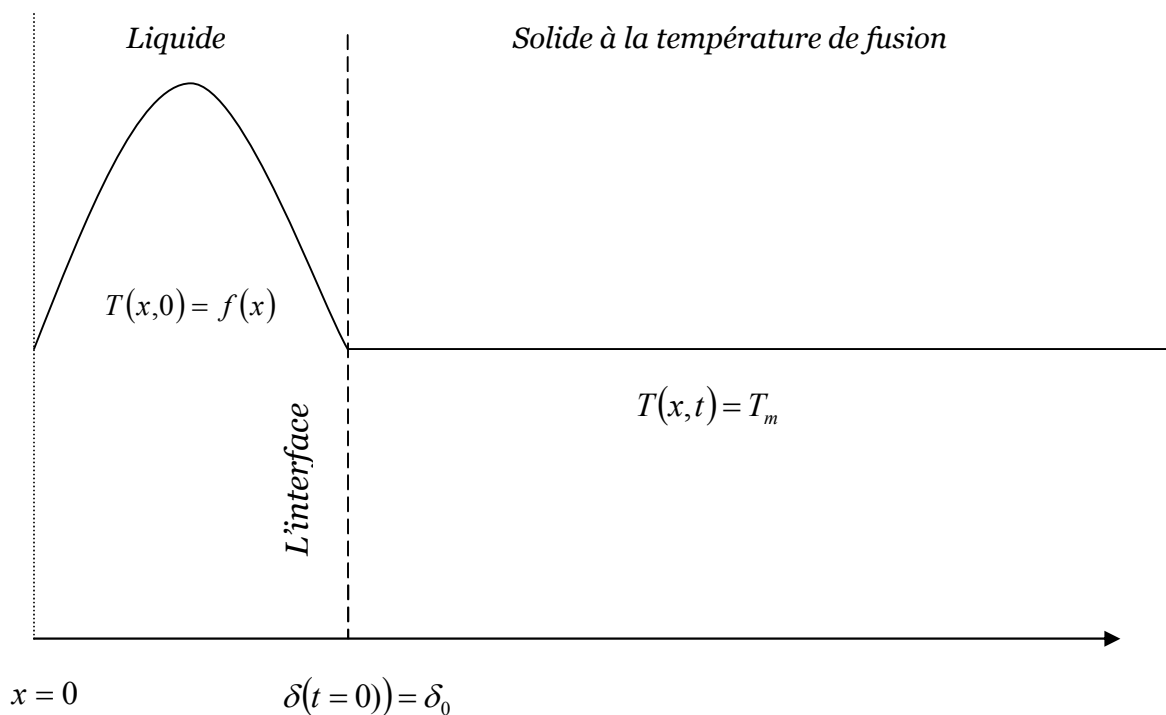


Fig.2.4 : Modèle physique de fusion d'un plan semi infini

Le problème mathématique décrit par les équations (2.13) à (2.18) est désigné par problème de Stefan avec terme source, et l'équation (2.14) est la condition de Stefan non linéaire.

Le modèle mathématique de fusion au début du processus où la convection est faible (qui est celui de notre étude) ou de solidification est le même sauf pour la solidification où l'on introduit un signe moins dans l'un des membres de l'équation (2.14).

2.2.2 MODELE ADIMENSIONNEL DANS LE DOMAINE MOBILE

L'adimensionnement de l'équation de transfert de chaleur (2.13) et de l'équation de Stefan (2.14) est effectué en introduisant des grandeurs de référence : une température T_r et une longueur l_r ,

-Le temps est adimensionné par rapport à la diffusion thermique α et la longueur de référence l_r .

-L'abscisse est adimensionnée par rapport à la longueur de référence l_r ,

-La température est adimensionnée par rapport à la température de référence T_r ,

Introduisons les variables adimensionnelles $\Delta, \theta, \eta, \tau$ respectivement position de l'interface, température, abscisse et temps telles que définies par TAB.2. 1 ci dessous.

Les équations prennent, la forme adimensionnelle suivante :

L'équation de transfert thermique se transforme à :

$$\text{Pour } \tau > 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \Sigma(\eta, \tau); \quad 0 \leq \eta \leq \Delta(\tau) \quad (2.19)$$

Les conditions initiales pour (2.15) et (2.16) à $\tau = 0$

$$\theta(\eta, 0) = F(\eta) \quad (2.20)$$

$$\Delta(0) = 1 \quad (2.21)$$

Et les conditions aux limites à $\tau > 0$

$$\theta(0, \tau) = 0 \quad (2.22)$$

$$\theta(\Delta, \tau) = 0 \quad (2.23)$$

TAB.2.1 - Définition des variables adimensionnelles

$\eta = \frac{x}{\delta_0}$:abscise
$\tau = \frac{\alpha}{\delta_0^2} t$:temps
$\Delta(\tau) = \frac{\delta(t)}{\delta_0}$:position de l'interface
$\theta(\eta, \tau) = \frac{T(x, t) - T_m}{T_0 - T_m}$:température
$\Sigma(\eta, \tau) = \frac{\delta_0^2}{k(T_0 - T_m)} S(x, t)$:fonction forcée
$F(\eta) = \frac{f(x) - T_m}{T_0 - T_m}$:distribution initiale de la température
$Ste = \frac{\rho c (T_0 - T_m)}{\rho L}$:nombre de Stefan

La forme adimensionnelle de la condition de Stefan s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta = \Delta(\tau)} = - \frac{1}{Ste} \frac{d\Delta}{d\tau} \quad (2.24)$$

Où Ste est un nombre sans dimensions appelé nombre de Stefan qui s'exprime sous la forme :

$$Ste = \frac{\rho c (T_0 - T_m)}{\rho L} \quad (2.25)$$

Cette constante est caractéristique du phénomène de changement de phase et représente le rapport de deux quantités de chaleur ; d'une part celle nécessaire au chauffage de la couche liquide de sa température de fusion à la température de référence T_r , et d'autre part celle libérée par la transformation d'état solide-liquide.

2.3 SOLUTIONS EXACTES

Fasano A. et Primicerio M., (1979) ont étudié le problème défini par les équations (2.10) à (2.15) pour un cas particulier de $Ste=1$ et démontrent que le problème à une solution unique pourvu que les fonctions $\Sigma(\eta, \tau)$ et $F(\eta)$ soient suffisamment régulières.

Les deux solutions analytiques exactes sont obtenues dans le cas des problèmes qui suivent :

Problème 1

Ce problème considère le cas défini par les expressions suivantes pour la distribution initiale de la température et un terme source

$$F(\eta) = \eta(1 - \eta)$$

$$\Sigma(\eta, \tau) = \eta e^\tau + 2$$

Les solutions analytiques exactes de la position de l'interface et de la distribution de la température sont données :

$$\Delta(\tau) = e^\tau$$

$$\theta(\eta, \tau) = \eta(e^\tau - \eta)$$

Problème 2

$$F(\eta) = 0,5\pi\eta^2(1 - \eta)$$

$$\Sigma(\eta, \tau) = -2 \frac{\dot{h}(\tau)}{h(\tau)} + 6\eta \frac{\dot{h}(\tau)}{h^2(\tau)} + \eta^2 \left(\frac{\ddot{h}(\tau)}{h(\tau)} - \frac{\dot{h}^2(\tau)}{h^2(\tau)} \right) + \eta^3 \left(2 \frac{\dot{h}^2(\tau)}{h^3(\tau)} - \frac{\ddot{h}(\tau)}{h^2(\tau)} \right)$$

Où $h(\tau) = 1 + 0.5 \sin(\pi\tau)$,

Les solutions exactes sont :

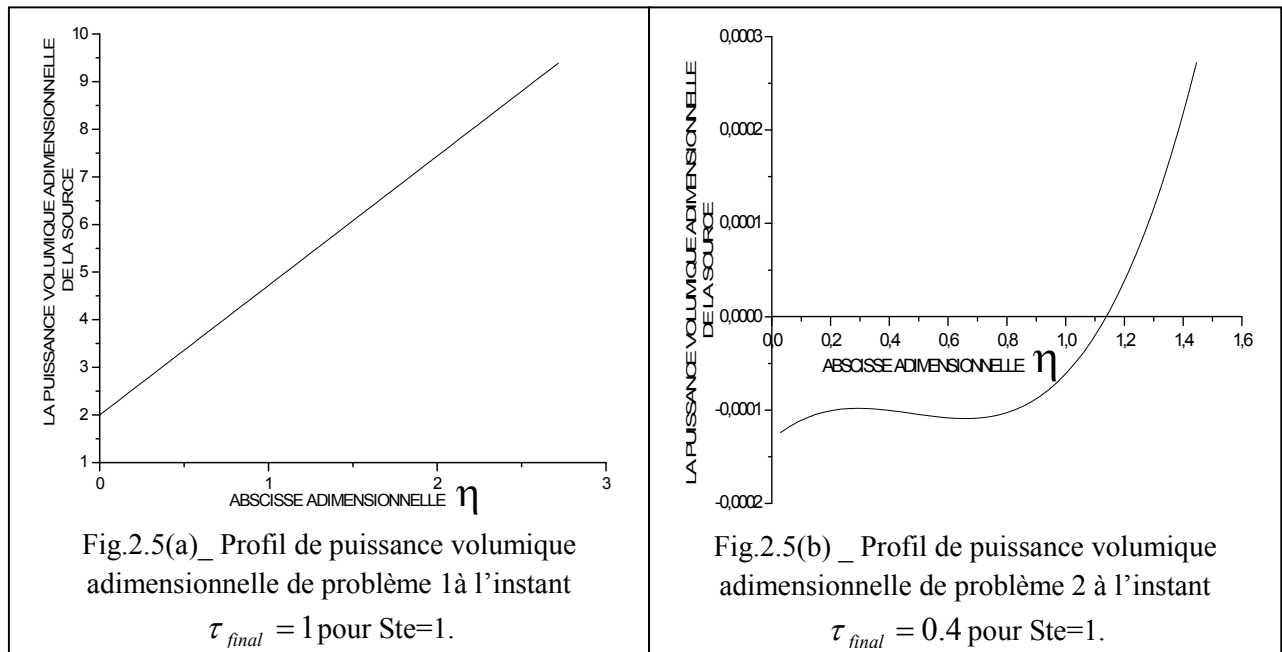
$$\Delta(\tau) = 1 + 0.5 \sin(\pi\tau), \quad \tau \geq 0$$

$$\theta(\eta, \tau) = \frac{0.5\pi\eta^2 \cos(\pi\tau)(\Delta - \eta)}{\Delta^2}, \quad 0 \leq \eta \leq \Delta(\tau)$$

Dans ces deux problèmes, le transfert thermique provient principalement de la source de chaleur $\Sigma(\eta, \tau)$ qui représente l'adimensionnement de la source $S(x, t)$ (Voir TAB.2.1). La source $S(x, t)$ a une dimension de puissance volumique (Voir équation (2.3)), cependant nous pouvons appeler la source $\Sigma(\eta, \tau)$: la puissance volumique adimensionnelle.

La source $\Sigma(\eta, \tau)$ du problème 1 est de signe positif à chaque point spatial (Voir Fig.2.5(a)). En effet, elle va augmenter la température de la phase liquide et par conséquent la partie solide va se fusionner, ce qui nous permet de conclure que la fusion provient principalement de la source $\Sigma(\eta, \tau)$.

Cela est valable pour le problème 2, néanmoins pour celui-ci la source est négative au près de la paroi (Voir Fig.2.5(b)), et induit un abaissement des températures de la phase liquide dans cette région. Cet effet peut engendrer une solidification au niveau de la paroi, et par conséquent une autre interface apparaîtra dans la phase liquide. Ce problème va être discuté dans le chapitre 4.

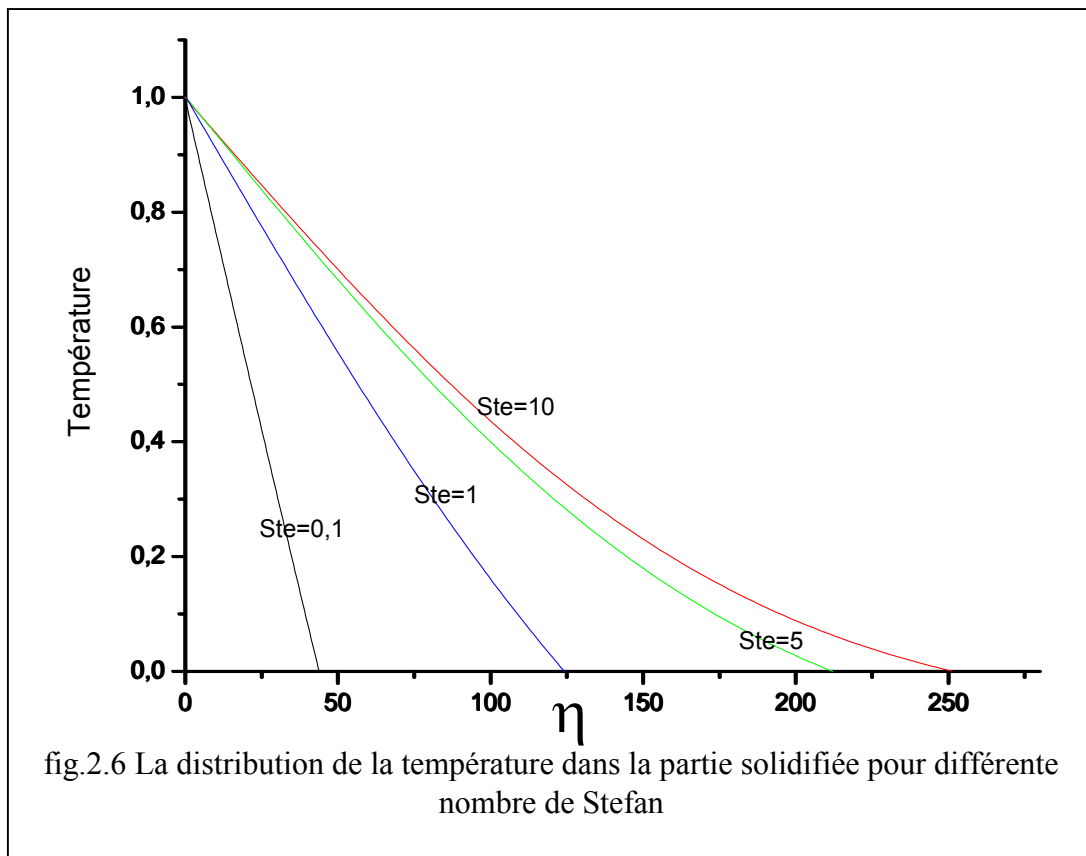


Problème 3 (Problème Stefan classique unidimensionnelle)

La formulation de problème de Stefan classique par rapport au précédent c'est que la source est nulle et aussi la position initiale de l'interface δ ; la température et la position de l'interface du problème de Stefan dans l'espace adimensionnel ont été obtenues en introduisant la variable de similitude $\Xi = \frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}$ dans l'équation de diffusion, pour résoudre une équation à une variable et déduire l'équation de profil de température (2.26) :

$$\theta(\Xi) = 1 - \frac{\text{erf}(\Xi)}{\text{erf}(\lambda)} \quad 0 < \Xi < \lambda \tag{2.26}$$

On introduit la variable Ξ , dans l'équation (2.26), pour décrire dans l'équation (2.27) le profil de la température dans l'espace mobile (η, τ) . Ces profils sont montrés sur la fig.2.6 pour différents nombres de Stefan.

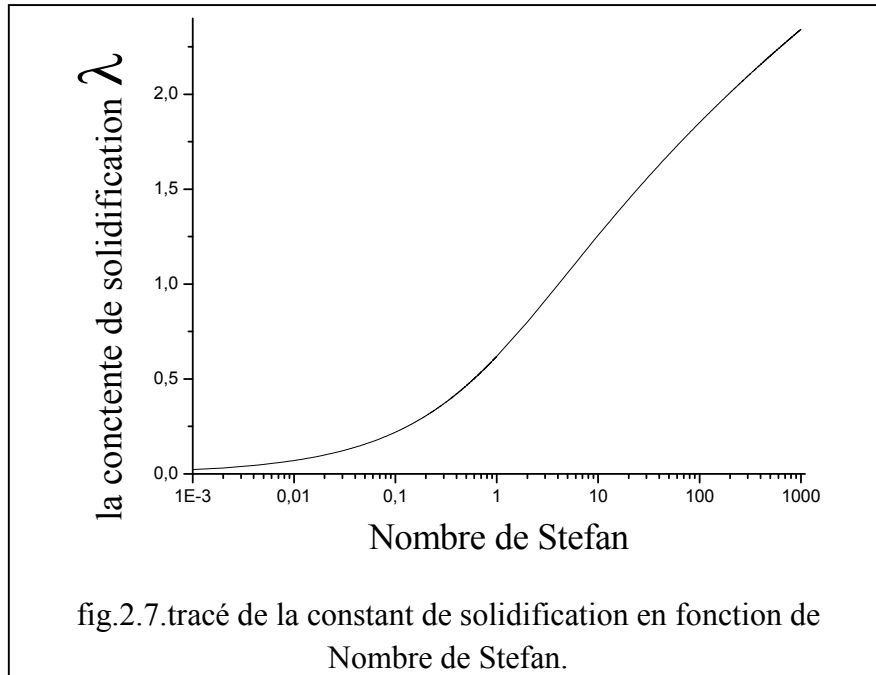


$$\theta(\eta, \tau) = 1 - \frac{\text{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}}\right)}{\text{erf}(\lambda)} \quad 0 < \eta < D(\tau) \tag{2.27}$$

$$D(\tau) = 2 \cdot \lambda \sqrt{\tau} \tag{2.28}$$

Où $\text{erf}(\Xi)$ est la fonction erreur et λ appelé la constante de fusion solution de l'équation transcendante (2.29), obtenue à partir de la substitution de profil de la température (2.27) à la condition de Stefan (2.24), cette équation est représentée par la courbe tracée dans la fig.2.7

$$\frac{Ste}{\sqrt{\pi}} = \lambda e^{\lambda^2} \text{erf}(\lambda) \tag{2.29}$$



Pour présenter le problème de Stefan classique sous la même forme que les deux problèmes précédants, on peut utiliser la solution analytique comme solution de départ [Caldwell J. et al, (2002) ; Caldwell J. et al, (2004)], pour cela on présente la solution analytique qu'on considère comme distribution initiale, à une instant τ_0 , et on annule le terme source

$$\theta(\eta, \tau) = 1 - \frac{\text{erf}\left(\frac{\eta}{2 \cdot \sqrt{\tau_0}}\right)}{\text{erf}(\lambda)} \quad 0 < \eta < D(\tau_0) = 2 \cdot \lambda \sqrt{\tau_0}$$

$$\Sigma(\eta, \tau) = 0$$

Les solutions analytiques exactes de la position de l'interface et de la distribution de la température dans ce cas seront décalées de τ_0 par rapport à celle de Stefan sans distribution, et elles s'écrivent sous la forme :

$$\Delta(\tau) = 2 \cdot \lambda \sqrt{\tau + \tau_0}$$

$$\theta(\eta, \tau) = 1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2 \cdot \sqrt{\tau + \tau_0}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \quad 0 < \eta < \Delta(\tau)$$

2.4 CONCLUSION :

Dans le cas de la diffusion avec changement de phase avec distribution initiale et en présence d'une source, la solution analytique n'existe que dans des cas restreints à cause de la forte non linéarité de l'équation de la diffusion, généralement les solutions ne sont pas des solutions pour des phénomènes physiques réels mais elles sont des solution édifiées pour les utiliser à tester des schémas numériques, exceptée la solution de problème de Stefan classique qui est une solution vérifiée analytiquement et expérimentalement, les autres solutions sont des solutions purement mathématiques comme celles de FASANO A. et PRIMICIRIO M., (1979).

CHAPITRE 3

METHODE NUMERIQUE

LA METHODE DE L'IMMOBILISATION

DE L'INTERFACE

3.1 INTRODUCTION

Il existe plusieurs méthodes numériques pour la résolution de problème de Stefan à savoir la méthode enthalpique, d'immobilisation de la frontière (BIM), des perturbations, la méthode intégrale nodale (NIM) ainsi que la méthode intégrale (HBIM), [Sadoun N., (2009) ; Sadoun N., (2006)]. L'un des avantages de ces méthodes est associé au pas de temps qui est relativement petit donnant la possibilité d'atteindre une meilleure précision en affinant la taille des mailles. [Caldwell J. et Kwan Y.Y., (2004)]

Dans notre étude on se limite à la méthode BIM, qui est une technique basée sur la discrétisation par un schéma numérique de différences finies explicites de l'équation de chaleur et de la condition de Stefan. La méthode BIM permet d'éliminer efficacement la nature mobile de la frontière. Par ailleurs, une solution de départ est nécessaire.

Cette méthode a d'abord été considérée par Crank J., (1957) ; Kutluay S. et al, (1997) ; Caldwell J. et al, (2004)] qui ont aussi appliqués avec succès la méthode pour divers problèmes

3.2 LA METHODE DE L'INTERFACE IMMOBILE (BIM)

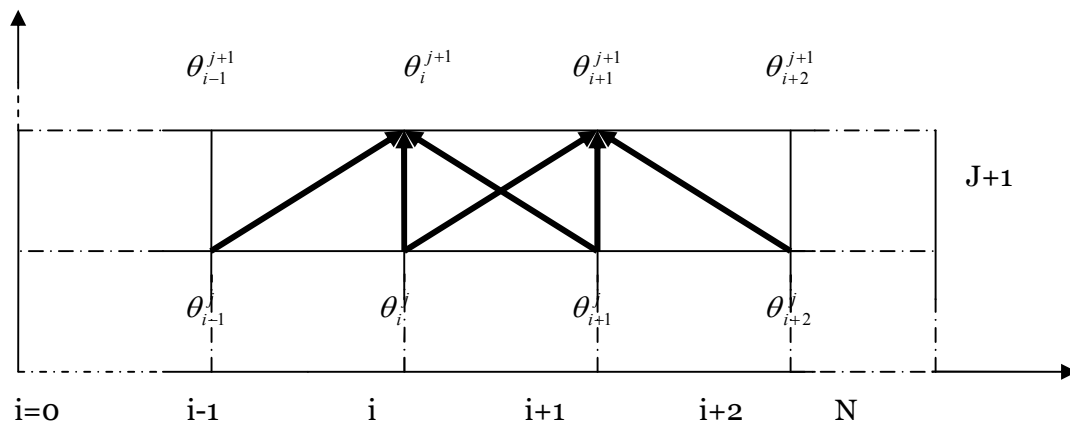


Fig.3.1 le maillage fixe

La méthode BIM consiste à subdiviser le domaine en régions d'égalles épaisseurs $\bar{\xi}$ et de suivre l'évolution des températures nodales, la position de l'interface et sa vitesse par pas de temps régulier $\bar{\tau}$. L'interface et sa vitesse sont déterminées à chaque instant, par rapport aux trois derniers nœuds N-2, N-1, N. (voir fig.4) dans ce qui suit on considère la température

nulle au point nodal N correspondant à la position de l'interface. La vitesse de l'interface dépend alors des températures des nœuds N-2, N-1.

C'est une méthode numérique issue de la méthode qui fixe l'interface, elle transforme les coordonnées réelles de l'interface de forme curviligne en une forme plane immobile et demeure fixe dans le nouveau système de coordonnées. Les deux phases vont occuper des domaines fixes [Ang W-T., (2007) ; Kutluay S. et al, (1997) ; Savović S. et al, (2003)], cette méthode en réalité est une transformation de formalisme mathématique explicite, où les deux phases sont séparées par une interface, à un nouvel formalisme qui décrit les équations de l'énergie d'une forme fortement non-linéaires et contenant des paramètres qui caractérisent le mouvement de l'interface. Dans le cas des problèmes unidimensionnels on utilise la transformation de Landau, (1950) pour immobiliser l'interface.

La méthode d'immobilisation de l'interface est applicable sur des équations dont des domaines spatialement bornés; de ce fait la formulation du problème adaptée à cette méthode numérique constitue la section suivante.

3.3 Formulation du problème dans l'espace fixe

La méthode de Landau, (1950) repose sur la technique d'immobilisation de front mobile à l'aide du changement de variable suivant :

$$\xi = \eta / \Delta(\tau).$$

Ce changement de variable, depuis désignée par variable de Landau, permet de transformer le domaine physique variable $[0, \Delta(\tau)]$ en un domaine fixe borné sur $[0, 1]$, ce qui conduit à l'immobilité de l'interface; ainsi que la forme de l'interface qui reste indéformable dans ce nouveau domaine, $\xi = \eta / \Delta(\tau)$.

Dans le nouveau système de coordonnées (ξ, τ) , l'équation de diffusion, les conditions aux limites et initiales se présentent comme suit:

Equation de diffusion :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|_{\xi} = \frac{\xi}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\tau} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\tau} + \frac{1}{\Delta^2} \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right|_{\tau} + \Sigma(\xi, \Delta, \tau), \quad 0 < \xi < 1 \quad (3.1)$$

Les conditions aux limites $\tau > 0$

$$\theta(0, \tau) = 0 \quad \xi = 0 \quad (3.2)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad \xi = 1 \quad (3.3)$$

L'équation de Stefan:

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = - \frac{Ste}{\Delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \quad (3.4)$$

Conditions initiales à $\tau = 0$

$$\Delta(0) = 1 \quad (3.5)$$

$$\theta(\xi, 0) = F(\xi) \quad (3.6)$$

La formulation de Landau a permis de transformer le domaine de calcul ainsi que la frontière mobile en un domaine fixe défini, mais elle introduit une complexité au niveau de l'équation de la chaleur dont la non-linéarité devient plus explicite.

On peut encore exprimer ce problème autrement en introduisant un changement de variable $\sigma = \Delta^2$ dans les équations (3.1) et (3.4) [Sadoun N. *et al.*, (2012)], les équations vont être exprimées par le carré de la position de l'interface comme suit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \Big|_{\xi} = \frac{\xi}{2\sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\tau} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \Big|_{\tau} + \Sigma(\xi \sqrt{\sigma}, \tau), \quad 0 < \xi < 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -2 Ste \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \quad (3.8)$$

3.4 Discrétisation

Les équations (3.1) et (3.4) sont discrétisées en utilisant une approximation par différence finies explicites pour ce faire on remplace $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}$ par des différences centrées au point nodal (ξ_i, τ_j) on exprime $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ ainsi $\frac{d\Delta}{d\tau}$ par des différentiels avancées, de telle sorte que la

variation temporelle d'un point nodal s'exprime en fonction de celui-ci et des points adjacents pris à l'instant précédent. La température prend la forme discrétisée suivante :

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^j + \frac{\bar{\tau}\bar{\xi}_i}{2\bar{\xi}\Delta_j} \left(\frac{d\Delta}{d\tau} \right)_j (\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j) + \frac{\bar{\tau}}{\bar{\xi}^2 \Delta_j^2} (\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j) + \bar{\tau}\Sigma(\bar{\xi}_i \Delta_j, \tau_j) \quad (3.9)$$

On désigne par θ_i^j la température à l'instant $\tau_j = j\bar{\tau}$ ($j=0,1,\dots$) du i^{eme} nœud placé en $\xi_i = i\bar{\xi}$ ($i=0,1,\dots,N$) et par Δ_j la position de l'interface à cet instant.

On notera que pour les conditions aux limites $\theta_{i=0}^j$, et $\theta_{i=N}^j$ sont nulles à chaque instant τ .

$$\theta_0^j = 0 \quad (3.10)$$

$$\theta_N^j = 0 \quad (3.11)$$

Le gradient de température à l'interface, est donné par la différence à trois termes amont, méthode largement utilisée pour évaluer la quantité approximatif de la variation de la température à l'interface [Furzeland M., (1980) ; Caldwell J. et al, 2004 ; Kutluay S. et al (1997)].

Ce gradient de température est obtenu par le calcul de θ_{N-1} en considérant le développement limité de θ au voisinage de $\xi_N = 1$ et la discrétisation de θ_N substitué dans le développement limité de θ aux voisinages de ξ_{N-1} , on néglige les $(\bar{\xi})$ de l'ordre 2 pour aboutir à l'équation (3.12).

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \frac{3\theta_N + \theta_{N-2} - 4\theta_{N-1}}{2\bar{\xi}} \quad (3.12)$$

La vitesse de l'interface est évaluée à partir de la condition de Stefan (3.4) en remplaçant la variation de la température par l'équation (3.12) avec $\theta_N = 0$:

$$\left(\frac{d\Delta}{d\tau} \right)_j = \frac{Ste}{2\bar{\xi}\Delta_j} (4\theta_{N-1}^j - \theta_{N-2}^j) \quad (3.13)$$

De cette équation on déduit la position de l'interface

$$\Delta_{j+1} = \Delta_j + \frac{\bar{\tau}Ste}{2\bar{\xi}\Delta_j} (4\theta_{N-1}^j - \theta_{N-2}^j) \quad (3.14)$$

Cette discrétisation a permis d'exprimer la position de l'interface et la température d'un point nodal par les températures des points nodaux amont et la position de l'interface à l'instant précédent.

L'étape suivante consiste à considérer la température à l'instant $\tau = 0$ qui correspond à $j = 0$

La distribution initiale de la température est notée $F(i, \bar{\xi})$, ou encore :

$$F(i, \bar{\xi}) = \theta_i^{j=0} \quad (3.15)$$

Il en est de même pour la position initiale

$$\Delta(\tau = 0) = \Delta_{j=0} = 1 \quad (3.16)$$

La vitesse de l'interface à l'instant $\tau = j\bar{\tau}$ est calculée par l'équation (3.1) et la position de l'interface à l'instant suivant $\tau = (j+1)\bar{\tau}$ est donné par l'équation (3.14) pour finalement calculer les températures des points nodaux à ce même instant par l'équation (3.9). Cette procédure permet de suivre le mouvement de l'interface et de calculer la température à chaque instant dans l'espace.

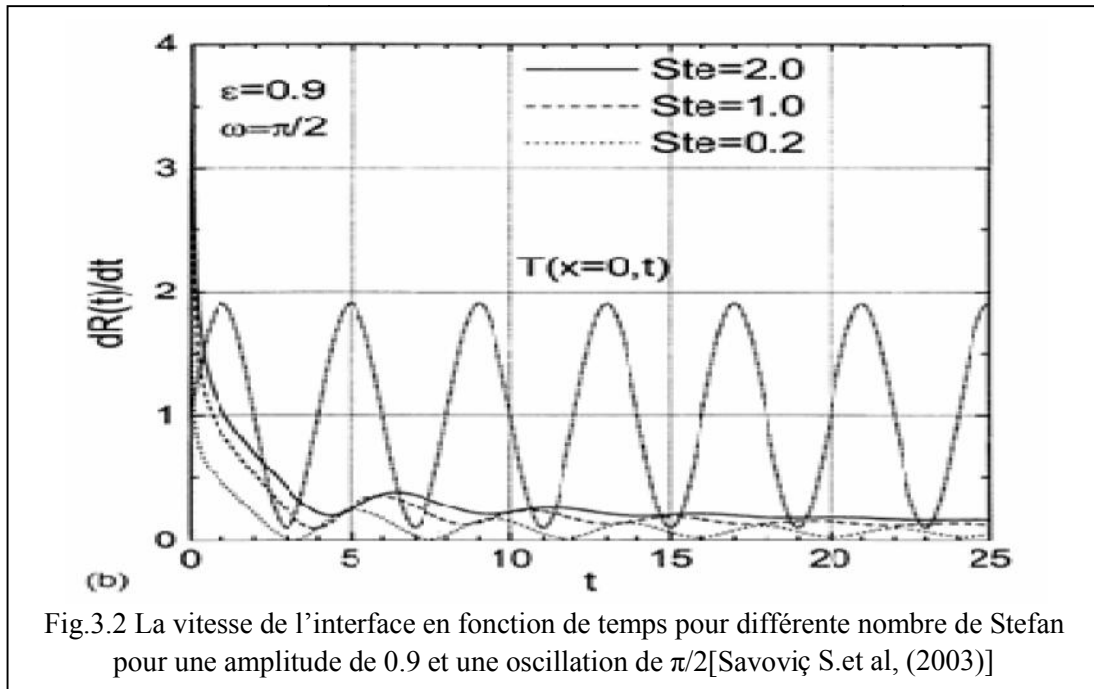
Savović S. et al, (2003) ont appliqué la méthode BIM à un problème de Stefan avec une paroi d'échange thermique sinusoïdale

$$\theta(0, \tau) = 1 + \varepsilon \sin(\omega\tau)$$

Où ε est l'amplitude de l'oscillation et ω sa fréquence. On notera que ω et ε ont une grande influence sur la distribution de la température, la position de l'interface et sa vitesse.

L'amplitude de la vitesse de l'interface est plus élevée pour les hauts nombres de Stefan que pour les faibles nombres de Stefan. Cela est dû à l'intensité de stockage qui dépend du nombre de Stefan. Pour les nombres de Stefan élevés, le stockage est élevé ; ce qui fait que la globalité de l'énergie thermique s'accumule dans le matériau et l'amplitude de la vitesse devient plus intense contrairement au faible nombre de Stefan où le stockage est faible.

Cette différence de stockage par rapport au nombre de Stefan a pour conséquence de réduire la vitesse de l'interface pour les faibles nombres de Stefan. Cette réduction de la vitesse permet au caractère périodique de la température provenant de la paroi, d'évoluer clairement dans la vitesse de l'interface, contrairement aux nombres de Stefan élevés où l'on voit la disparition progressive de la périodicité de la vitesse. Voir (fig.3.2)



Kutluay et al, (1997) ont utilisé cette méthode pour déterminer la distribution de température dans la région liquide $0 \leq \xi \leq 1$, la position de l'interface et sa vitesse pour un problème de Stefan sans distribution initiale avec un flux à la paroi égale à

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\Delta \cdot \exp(\tau) \tag{3.17}$$

Ce problème admet une solution exacte pour la distribution de température ainsi que pour la position de l'interface. Elles sont données, respectivement, par :

$$\theta(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi\Delta) - 1 \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\Delta(\tau) = \tau, \quad \tau \geq 0$$

La discrétisation de l'équation (3.17) du flux à $\xi = 0$, $\theta_{-1}^j = \theta_1^j - 2\bar{\xi}\Delta_j \cdot \exp(\tau_j)$ est substituée dans l'équation (3.9) évaluée en $i=0$ (en annulant le terme source) pour éliminer le terme fictif θ_{-1}^j et introduire le flux de chaleur à la paroi d'échange thermique pour avoir la température:

$$\theta_0^{j+1} = \left(1 - \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\xi}\Delta_j^2}\right)\theta_0^j + \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\xi}\Delta_j^2}\theta_1^j + \frac{2\bar{\tau}}{\bar{\xi}\Delta_j}\exp(\tau_j) \tag{3.18}$$

Pour la stabilité numérique, il est pratique d'utiliser la méthode de Von Neumann à savoir le pas temporelle est choisi tel que $\bar{\tau} : \bar{\tau} \leq \frac{1}{2} \bar{\xi}^2 \Delta^2$

La solution de démarrage de ce schéma numérique est prise à partir de la solution exacte à un instant τ_0

Le même problème a été étudié par Caldwell J. et al, (2004) par la même méthode avec comparaison à la méthode enthalpique et la méthode intégrale. Ils ont élargi l'application de cette méthode au problème dans le cas des géométries cylindriques et sphériques, les résultats obtenus s'accordent avec ceux fournis par la méthode des perturbations. On note que cette méthode s'applique pour une large gamme de nombre Stefan; aux conditions limites dépendant du temps, et en même temps fournit une bonne approximation de la distribution de la température [Caldwell J. et al, (2005)]

Furzeland M., (1980) qualifia cette méthode, par sa facilité de programmation par rapport à d'autres, de particulièrement utile pour l'évolution rapide des gradients dans le temps.

Kutluay S. et al, (1997) ; Kutluay S., (2005) ont utilisé aussi une technique à maillage variable qu'il applique à un problème de Stefan unidimensionnel avec source et une distribution initiale (problème annoncé au chapitre 2.4.2). Les auteurs comparent les résultats obtenus avec ceux trouvés par la méthode d'immobilisation de l'interface. Une étude comparative faite par [Sadoun N. et al, 2012] a montré que les deux schémas considérés par Kutlay S. et al, (1997) Kutluay S., (2005) ne sont que deux expressions différentes d'une même solution, cette méthode est testée sur les solutions de Fasano A. et Primicirio M., et celle traitée par Kutluay S. La forme discrétisée de l'équation de chaleur et de la vitesse de l'interface dans le maillage variable correspond respectivement aux équations (3.19) et (3.20):

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^j + \frac{\bar{\tau} \eta_i^j}{2 \bar{\eta}_j \Delta_j} \left(\frac{d\Delta}{d\tau} \right)_j (\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j) + \frac{\bar{\tau}}{\eta_j} (\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j) + \bar{\tau} \Sigma(\eta_i^j, \tau_j) \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{d\Delta}{d\tau} \right)_j = \frac{Ste}{2 \bar{\eta}_j} (4\theta_{N-1}^j - \theta_{N-2}^j) \quad (3.20)$$

Sadoun N. *et al*, (2012) ont considéré $\bar{\eta}_j = \frac{\Delta_j}{N}$ et $\bar{\eta}_i^j = \frac{i\Delta_j}{N}$, qu'on substitue dans l'équation

(3.19) ou bien $\bar{\xi} = \frac{1}{N}$ qu'on substitue dans l'équation (3.9); pour aboutir à la forme

discrétisée de la température suivante:

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^j + \frac{i\bar{\tau}}{2\Delta_j} \left(\frac{d\Delta}{d\tau} \right)_j (\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j) + \frac{\bar{\tau}N^2}{\Delta_j^2} (\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j) + \bar{\tau}\Sigma \left(\frac{i\Delta_j}{N}, \tau_j \right) \quad (3.21)$$

La vitesse et la position de l'interface prennent respectivement les formes discrétisées (3.22)

et (3.23).

$$\left(\frac{d\Delta}{d\tau} \right)_j = \frac{N \cdot Ste}{2\Delta_j} (4\theta_{N-1}^j - \theta_{N-2}^j) \quad (3.22)$$

$$\Delta_{j+1} = \Delta_j + \frac{\bar{\tau}N \cdot Ste}{2\Delta_j} (4\theta_{N-1}^j - \theta_{N-2}^j) \quad (3.23)$$

Une équation dans laquelle le pas spatial est inclus implicitement, l'équation est exprimée seulement par le pas temporel et le nombre de nœud, et qui remplace les deux discrétisations par une seule. Il apparaît que les deux systèmes résultants conduisent à un seul algorithme de calcul et par conséquent, une même solution, Contrairement à Kutluay S., (2005) qui a exposé les deux schémas comme deux schémas différents. [Sadoun N. *et al*, (2012)].

Sadoun N. et al (2012) dans son article a nommé ce schéma exprimée par le pas temporel et le nombre de nœud, le schéma numérique résultant (ResNS) (Resulting numerical scheme).

Par ce schéma numérique résultant (ResNS) la discrétisation au niveau de la surface d'échange de problème traité par Kutluay S. et al, (1997), s'écrit de la façon suivante :

$$\theta_0^j = \theta_2^j - 2 \frac{\Delta_j}{N} \cdot \exp(\tau_j) \quad (3.24)$$

$$\theta_0^{j+1} = \left(1 - \frac{2N\bar{\tau}}{\Delta_j^2}\right)\theta_0^j + \frac{2N\bar{\tau}}{\Delta_j^2}\theta_1^j + \frac{2N\bar{\tau}}{\Delta_j} \exp(\tau_j) \quad (3.25)$$

La distribution initiale s'écrit

$$F\left(\frac{i}{N}\right) = \theta_i^{j=0} \quad (3.26)$$

en introduisant le changement de variable $\sigma_j = \Delta_j^2$, dans les équation (3.21), (3.22), et (3.23)

on aboutit à un schéma numérique modifié qui décrit la température, la vitesse et la position

de l'interface respectivement par les équations de forme discrétisée (3.21),(3.22) et (3.23) [Sadoun N. et al, (2012)].

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^j + \frac{i\bar{\tau}}{4\sigma_j} \left(\frac{d\sigma_j}{d\tau} \right) (\theta_{i+1}^j - \theta_{i-1}^j) + \frac{\bar{\tau}N^2}{\sigma_j} (\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j) + \bar{\tau}\Sigma \left(\frac{i\sqrt{\sigma_j}}{N}, \tau_j \right) \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)_j = N \cdot Ste (4\theta_{N-1}^j - \theta_{N-2}^j) \quad (3.28)$$

$$\sigma_{j+1} = \sigma_j + \bar{\tau}N \cdot Ste (4\theta_{N-1}^j - \theta_{N-2}^j) \quad (3.29)$$

La position de l'interface à l'instant τ_j peut se déduire de la relation, $\Delta_j = \sqrt{\sigma_j}$ et la vitesse s'évalue à partir de :

$$\left(\frac{d\Delta}{d\tau} \right)_j = \frac{1}{2\sqrt{\sigma_j}} \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)_j \quad (3.30)$$

La discrétisation au niveau de la surface d'échange de problème traité par Kutluay S. et al, (1997), s'écrit de la façon suivante :

$$\theta_0^{j+1} = \left(1 - \frac{2N\bar{\tau}}{\sigma_j}\right)\theta_0^j + \frac{2N\bar{\tau}}{\sigma_j}\theta_1^j + \frac{2N\bar{\tau}}{\sqrt{\sigma_j}}\exp(\tau_j) \quad (3.31)$$

Les auteurs soulignent que le schéma numérique modifié est moins précis quant à la prédiction du mouvement de l'interface, que le schéma initial, mais est légèrement plus précis lorsqu'il s'agit de déterminer la répartition de la température.

Les solutions exactes du problème 1 et 2 dans le chapitre (2.3) de Fasano A. et prémicirio M. pour un problème de Stefan avec un terme source sont utilisées par Gülkaç V., (2009) pour valider son schéma numérique. Il a introduit une approximation par différences finies implicites sur le problème de Stefan unidimensionnelle avec terme source. Cette approximation est basée sur la discrétisation de l'équation de chaleur adimensionnelle (2.16) en trois niveaux de temps.

Il exprime la dérivé partielle de la température par la variation temporelle de trois nœuds consécutif, dans l'espace comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12\bar{\tau}} \left\{ \frac{3}{2} (\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i+1}^j) - \frac{1}{2} (\theta_{i+1}^j - \theta_{i+1}^{j-1}) \right\} + \frac{5}{6\bar{\tau}} \left\{ \frac{3}{2} (\theta_i^{j+1} - \theta_i^j) - \frac{1}{2} (\theta_i^j - \theta_i^{j-1}) \right\} \\ & + \frac{1}{12\bar{\tau}} \left\{ \frac{3}{2} (\theta_{i-1}^{j+1} - \theta_{i-1}^j) - \frac{1}{2} (\theta_{i-1}^j - \theta_{i-1}^{j-1}) \right\} - \frac{1}{-2} (\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j) = \Sigma(\eta_i^j, \tau_j) \end{aligned}$$

Et puis :

$$\left(\frac{3}{2} - 12\frac{\bar{\tau}}{\eta^2}\right)\theta_{i-1}^{j+1} + \left(15 + 24\frac{\bar{\tau}}{\eta^2}\right)\theta_i^{j+1} + \left(\frac{3}{2} - 12\frac{\bar{\tau}}{\eta^2}\right)\theta_{i+1}^{j+1} = 2\theta_{i-1}^j + 20\theta_i^j + 2\theta_{i+1}^j - \frac{1}{2}\theta_{i-1}^{j-1} - 5\theta_i^{j-1} - \frac{1}{2}\theta_{i+1}^{j-1} + 12\bar{\tau}\Sigma(\eta_i^j, \tau_j)$$

Il formule le problème sous forme d'un produit de matrice et de vecteur

$$\theta^{j+1} = A^{-1}B\theta^j - A^{-1}C\theta^{j-1} + A^{-1}D$$

Où $\theta^{j+1}, \theta^j, \theta^{j-1}$ sont les vecteurs de température aux instants τ_{j+1}, τ_j et τ_{j-1} et A, B et C des matrices

On utilisera les fonctions de Fasano A. et primicirio M. qui vont servir à la validation de la méthode numérique proposée dans ce manuscrit.

3.5 CONCLUSION

La méthode d'immobilisation de l'interface, méthode largement utilisée, consiste à reformuler l'équation de la diffusion de la chaleur, par le changement de variable de Landau, pour la décrire dans un domaine fixe (non mobile), la discrétiser par un schéma numérique de différences finies explicite. L'inconvénient de ce changement de variable est qu'il rend l'équation décrite dans ce domaine fixe fortement non linéaire.

Et puis on écrit les équations sous forme discrétisée par la méthode des différences finies. Une équation décrite par le pas spatial et le pas temporel et l'autre décrite par le nombre de nœud et le pas temporel.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 INTRODUCTION :

L'efficacité du schéma numérique (ResNS) (Sadoun N *et al* (2010)) présenté dans le chapitre 3.4 par les équations discrétisées (3.21) et (3.22) est testée. Les résultats sont issus de ce schéma, à savoir la méthode d'immobilisation de l'interface.

On va comparer dans ce qui suit les résultats issus des deux formes de discrétisation, celle décrite en fonction du pas temporel et le nombre de nœud (ResNS) et celle de Kutluay S. (2005) décrite en fonction du pas temporel et du pas spatial.

4.2 VALIDATION DE LA METHODE NUMERIQUE

Deux méthodes numériques basées sur l'immobilisation de l'interface sont appliquées à deux cas dont les solutions exactes existent. Le premier est le problème classique de Stefan à une phase où le milieu est initialement liquide ou solide. Le changement de phase est initié à partir de la surface d'échange en appliquant un échelon de température. Le second concerne la solidification ou la fusion d'un milieu où initialement les deux phases coexistent. Le changement de phase est initié par le flux à l'interface. Le traitement numérique requière dans le premier cas la détermination d'une solution de démarrage du fait que la condition initiale conduit à une singularité

4.2.1 VALIDATION PAR LE PROBLEME 3

On présente ce problème sous la forme décrite au chapitre 2, où la distribution initiale est en fait le profil de température de la solution exacte à l'instant τ_0 , servant ainsi de solution de démarrage. La solution exacte qui en découle, est la solution du problème de Stefan classique d'écalé de τ_0 (problème 3 chapitre 2). On choisit l'instant τ_0 de telle sorte que la position initiale de l'interface vérifie $D(\tau_0) = 1$, où λ est la constante de solidification dépendante du nombre de Stefan.

Le décalage temporel correspond alors à $\tau_0 = \frac{1}{4\lambda^2}$ et $\Delta(0) = 2\lambda\sqrt{\tau_0} = 1$

Le profile de température initiale répond à :

$$\theta(\eta, \tau) = 1 - \frac{\text{erf}(\lambda \eta)}{\text{erf}(\lambda)} \quad 0 < \eta < \Delta(0) = 1 \quad (4.1)$$

Les solutions exactes de profile de température ainsi que de la position de l'interface s'écrivent pour $\tau > 0$:

$$\theta(\eta, \tau) = 1 - \frac{\text{erf}\left(\frac{\eta}{2 \cdot \sqrt{\tau + \frac{1}{4\lambda^2}}}\right)}{\text{erf}(\lambda)} \quad 0 < \eta < \Delta(\tau) \quad (4.2)$$

$$\Delta(\tau) = 2 \cdot \lambda \sqrt{\tau + \frac{1}{4\lambda^2}} \quad (4.3)$$

On défini par : e^j_{Δ} , e^j_v et e^j_{θ} respectivement les erreurs relatives de la position de l'interface, de sa vitesse et de la température au point η_i^j à l'instant τ_j , décrites de la manière suivante :

$$e^j_{\Delta} = 100 \cdot \left| \frac{\Delta_j - \Delta(\tau_j)}{\Delta(\tau_j)} \right|, \quad e^j_v = 100 \cdot \left| \frac{v_j - v(\tau_j)}{v(\tau_j)} \right|, \quad e^j_{\theta} = 100 \cdot \left| \frac{\theta_i^j - \theta(\eta_i^j, \tau_j)}{\theta(\eta_i^j, \tau_j)} \right| \quad (4.4)$$

Où Δ_j , v_j et θ_i^j sont respectivement les valeurs calculées numériquement et $\Delta(\tau_j)$, $v(\tau_j)$ et $\theta(\eta_i^j, \tau_j)$ sont respectivement les valeurs exactes de la position de l'interface sa vitesse et la température.

On définit aussi l'erreur moyenne E_m de M valeurs numériques de température par rapport à la solution exacte comme suit :

$$E_m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=M} \left| \frac{\theta_i^j - \theta(\xi_i, \tau_j)}{\theta(\xi_i, \tau_j)} \right| \quad (4.5)$$

Fig4.1 et Fig4.2 présentent respectivement l'erreur de la position de l'interface et sa vitesse pour différents nombres de Stefan, le calcul est fait pour $N=10$, et un pas temporel $\bar{\tau} = \frac{1}{2 \cdot N^2} = 0.005$ (condition de stabilité de Von Neumann), l'approche de ce modèle numérique à la solution exacte de la position et de la vitesse s'affaiblit en augmentant le

nombre de Stefan, où on voit que les erreurs maximales entre la solution exacte et la solution numérique calculée par cette méthode s'établit à une valeur fixe pour chaque nombre de Stefan, ces valeurs sont 0.67%, 0.04%, 0.024% et 0.0063% pour la position de l'interface, et 0.7%, 0.03%, 0.023% et 0.017% pour la vitesse, pour les nombre de Stefan de 10, 1, 0.1 et 0.01 respectivement.

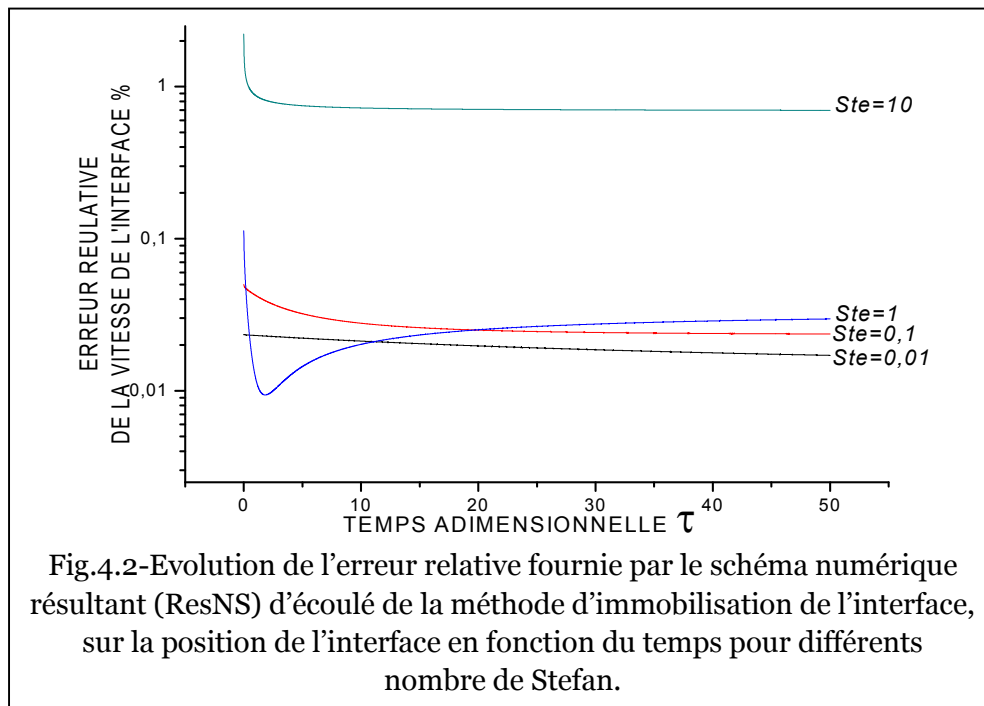
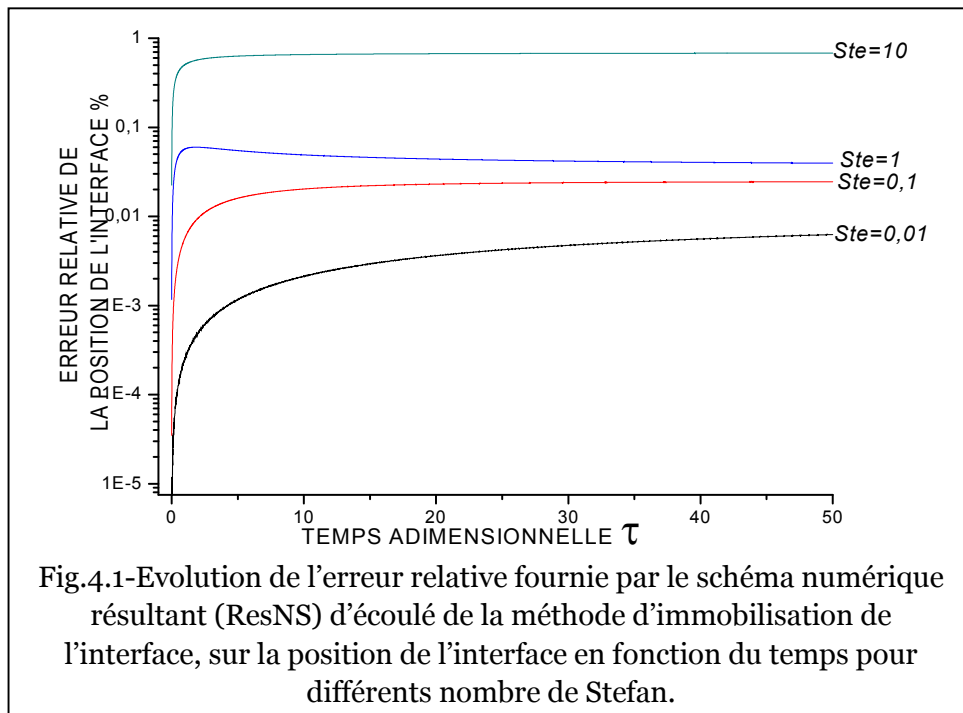
L'approche s'améliore aussi en augmentant le nombre N de partitions de l'axe spatial. Sur le tableau Tab.4.1, on affiche les erreurs moyennes relatives E_m qui s'affinent en augmentant le nombre N, pour un nombre de Ste=10

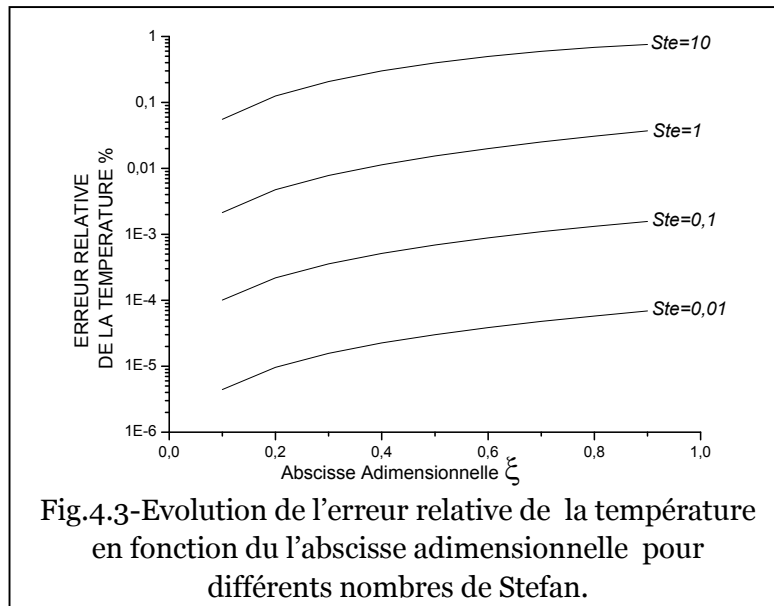
Tab. 4.1 – Résultats numériques comparatifs des températures calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différents nombres répartition de l'axe spatiale N avec la solution exacte de Ste=10

$\xi = \frac{\eta}{\Delta}$	N=10	N=20	N=40	N=80	Solution exacte STE=10
0	1	1	1	1	1
0,1	0,84787	0,84752	0,84742	0,8474	0,8474
0,2	0,70041	0,69975	0,69958	0,69953	0,69953
0,3	0,56186	0,56098	0,56076	0,5607	0,56069
0,4	0,43568	0,4347	0,43445	0,43439	0,43438
0,5	0,32431	0,32335	0,3231	0,32304	0,32303
0,6	0,22904	0,22819	0,22797	0,22791	0,22791
0,7	0,15006	0,1494	0,14922	0,14918	0,14918
0,8	0,08662	0,08618	0,08606	0,08603	0,08603
0,9	0,03724	0,03702	0,03697	0,03696	0,03696
E_m	0,00402	9,97415E-4	2,15549E-4	1,93098E-5	

La fig.4.3 présentes les courbes d'erreur de la température en fonction de la variable adimensionnelle fixe ξ qui décrit la température dans l'espace immobile, pour différents nombres de Stefan, le degré de précision s'améliore aux faibles nombres de Stefan. Les erreurs relative maximales sont 0.74%, 0.038%, 0.0015% et 0.00007% pour les nombres de Stefan 10, 1, 0.1 et 0.01 respectivement.

La prédiction, par cette méthode, des températures pour des nombres de Stefan en dessous de l'unité est meilleure que celle de la position et la vitesse itérfaciale. L'inverse est observé pour des nombres de Stefan supérieurs à l'unité.





4.2.2 VALIDATION PAR UN PROBLEME DE STEFAN AVEC TERME SOURCE

Dans ce qui suit les solutions de Fasano A. et Primicirio M. sont utilisées pour tester la validité de la méthode étudiée, ces deux solutions sont obtenues pour un nombre de Stefan égale à l'unité, on compare les résultats trouvés avec ceux de Kutluay S., (2005).

Les solutions exactes du problème 1 et Problème 2 sont utilisées pour étudier l'effet du maillage sur la précision de la solution. Les tableaux 4.2 et 4.3 sont issus de l'étude du problème 1 à l'instant $\tau = 1$, alors que les tableaux 4.10 et 4.11 proviennent de l'étude du problème 2 à l'instant $\tau = 0.4$. Ces tableaux résument quelques résultats numériques concernant la position de l'interface, sa vitesse, et les erreurs relatives correspondantes. L'erreur relative moyenne, sur les températures nodales, est présentée dans les tableaux 4.5 et 4.13 pour le problème 1 et 2 respectivement. Les schémas présentés ont été testés pour quatre valeurs de $N = 10, 20, 40$ et 80 (nombre de points du maillage). Selon Kutluay S. et al, (1997), l'utilisation de l'analyse de Von Neumann limite la plus faible valeur du pas de temps à $\bar{\tau} = \frac{\Delta_j^2}{2N^2}$, ce qui concerne ces problème étudié, la position de l'interface augmente au cours

du temps, signifiant que $\Delta_j \geq \Delta_0 = 1$ donc $\bar{\tau} = \frac{1}{2N^2}$

PROBLEME 1

Les tableaux 4.2 et 4.3 présentent les valeurs de la position et de la vitesse de l'interface prédites, à l'instant $\tau=1$, par la méthode numérique (ResNS). Les valeurs exactes sont également données, pour comparaison, par les dernières lignes des tableaux. Pour ce qui est de l'évaluation de la position de l'interface, les résultats trouvés par la présente étude sont beaucoup plus précis par rapport à ceux de Kutluay S., (2005) et sont améliorés d'un facteur de 1.3. On notera, en termes de vitesse, que la présente étude donne des résultats extrêmement plus précis que ceux de Kutluay S.,(2005) où le degré de précision est amélioré de facteurs de 6.5, 6.84, 6.89 et 16.

Tab. 4.2 – Résultats numériques comparatifs des erreurs relatives de la position de l'interface calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différents nombres de répartition N de l'axe spatiale avec la solution exacte de problème 1 pour $Ste=1$

N	SOLUTION NUMERIQUE (PRESENTE ETUDE)		SOLUTION NUMERIQUE (KUTLUAY S, 2005)		LA POSITION DE L'INTERFACE EXACTE
	POSITION DE L'INTERFACE	ERREUR%	POSITION DE L'INTERFACE	ERREUR%	
10	2.7119062	0.2345459	2.710248	0.295554	2.718281828459045
20	2.7166983	0.05825408	2.716243	0.075011	2.718281828459045
40	2.7178866	0.01453849	2.717778	0.018541	2.718281828459045
80	2.7181830	0.003633028	2.718149	0.004893	2.718281828459045

Dans le tableau 4.4 les températures calculées, par la méthode présente pour différents nombres de nœud, sont présentées alors que le tableau 4.5 une comparaison de ces valeurs sont faites avec les résultats de Kutluay S., (2005). On constate que Kutluay prédit des valeurs supérieures aux nôtres ; On notera néanmoins que l'évaluation des températures est faite à des nœuds fictifs qui dépendent de la position de l'interface et que la méthode de Kutluay ne prédit pas bien la position de l'interface. A ce titre, la comparaison des approches dans le domaine spatial $0 \leq \xi \leq 1$ ne peut être tranchée, car les positions des nœuds dans l'espace réel calculées par la présente étude et celles de Kutluay sont différentes et ce là est dû à la différence des positions de l'interface calculées par ces méthodes numérique. La comparaison est donc plus significative dans le domaine physique autrement dit le domaine dynamique $0 \leq \eta \leq \Delta(\tau)$

Tab. 4.3 – Résultats numériques comparatifs des erreurs relatives de la vitesse de l’interface calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différente nombre de répartition N de l’axe spatiale avec la solution exacte de problème 1 pour Ste=1

N	SOLUTION NUMERIQUE (PRESENTE ETUDE)		SOLUTION NUMERIQUE (KUTLUAY S, 2005)		LA VITESSE DE L’INTERFACE EXACTE
	VITESSE DE L’INTERFACE	ERREUR%	VITESSE DE L’INTERFACE	ERREUR%	
10	2.7137929	0.1651362	2.688974	1.078181	2.718281828459045
20	2.7171903	0.04015452	2.725744	0.274512	2.718281828459045
40	2.7180108	0.009968202	2.716413	0.068757	2.718281828459045
80	2.7182142	0.002487659	2.717200	0.039804	2.718281828459045

Tab. 4.4 – Résultats numériques comparatifs des températures calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différente nombre de répartition N de l’axe spatiale avec la solution exacte de problème 1 pour Ste=1

ξ	N=10	N=20	N=40	N=80	Solution exacte Ste=1
0,1	0,66152	0,66414	0,6648	0,66496	0,66502
0,2	1,17605	1,1807	1,18186	1,18215	1,18225
0,3	1,54366	1,5497	1,5512	1,55158	1,5517
0,4	1,76435	1,77112	1,77281	1,77323	1,77337
0,5	1,83811	1,84498	1,84669	1,84712	1,84726
0,6	1,76487	1,77125	1,77284	1,77324	1,77337
0,7	1,54455	1,54992	1,55126	1,55159	1,5517
0,8	1,17705	1,18095	1,18193	1,18217	1,18225
0,9	0,66224	0,66432	0,66484	0,66497	0,66502

Tab. 4.5 – Résultats numériques comparatifs des erreurs relatives moyennes calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différente nombre de répartition N de l’axe spatiale avec la solution exacte de problème 1 pour Ste=1

E_m de la température	N=10	N=20	N=40	N=80
Kutluay, 2005	0.002681	0.000830	0.000209	0.000054
présente étude	0,00486	0,00121	0.000302361	0.000075575

Les tableaux ci dessous présentent la comparaison, des températures de dix points successifs, entre les résultats trouvés par la présente étude et ceux de Kutluay dans le domaine réel ($0 \leq \eta \leq \Delta(\tau)$) pour différents nombres de nœuds N , η est évalué en multipliant ξ par la position de l'interface calculée par chacune des méthodes numériques. On détermine les températures exactes dans ces positions et il est constaté une amélioration du degré de précision, dans les températures calculées, d'un facteur de 1,73, 1,89, 1,81 et 3,38 par rapport aux résultats de Kutluay. En revenant au domaine réel (physique) on trouve que la présente méthode prédit mieux les températures puisque les positions des nœuds sont beaucoup mieux prédites.

Tab. 4.6 – Résultats numériques comparatifs des températures et des erreurs relatives moyennes calculées par la présente méthode numérique (ResNS) et ceux calculés par Kutluay, pour un nombre de répartition $N=10$ de l'axe spatiale avec la solution exacte du problème 1 pour $Ste=1$

ξ	présente étude			Kutluay S.		
	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.7119062$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux dans l'espace réelle	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.710248$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux de la dans l'espace réelle
0,1	0,271191	0,65495	0,66363	0,2689	0,67039	0,65863
0,2	0,542381	1,16437	1,18017	0,53779	1,19271	1,17265
0,3	0,813572	1,52833	1,54962	0,80669	1,5664	1,54206
0,4	1,084762	1,74683	1,77198	1,07559	1,79108	1,76686
0,5	1,355953	1,81985	1,84725	1,34449	1,86648	1,84705
0,6	1,627144	1,74734	1,77544	1,61338	1,79242	1,78262
0,7	1,898334	1,5292	1,55653	1,88228	1,56877	1,57359
0,8	2,169525	1,16535	1,19054	2,15118	1,19543	1,21994
0,9	2,440716	0,65566	0,67746	2,42008	0,67237	0,72168
E_m de la température	0,007469			0,01295125		

Tab. 4.7 – Résultats numériques comparatifs des températures et des erreurs relatives moyennes calculées par la présente méthode numérique (ResNS) et ceux calculés par Kutluay, pour un nombre de répartition N=20 de l'axe spatiale avec la solution exacte du problème 1 pour Ste=1

ξ	présente étude			Kutluay S.		
	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.7166983$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux dans l'espace réelle	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.716243$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux de la dans l'espace réelle
0,1	0,271670	0,66249	0,66467	0,27257	0,66645	0,66664
0,2	0,543340	1,17776	1,18173	0,54515	1,18504	1,18468
0,3	0,815010	1,54583	1,55119	0,81772	1,55563	1,55413
0,4	1,086679	1,7667	1,77303	1,0903	1,7781	1,77499
0,5	1,358349	1,84038	1,84726	1,36287	1,8524	1,84725
0,6	1,630019	1,76683	1,77389	1,63545	1,77846	1,77092
0,7	1,901689	1,54605	1,55291	1,90802	1,55627	1,54599
0,8	2,173359	1,17801	1,18431	2,1806	1,18578	1,17248
0,9	2,445029	0,66267	0,66811	2,45317	0,66698	0,65037
E_m de la température	0,001872			0,00354		

Tab. 4.8 – Résultats numériques comparatifs des températures et des erreurs relatives moyennes calculées par la présente méthode numérique (ResNS) et ceux calculés par Kutluay, pour un nombre de répartition N=40 de l'axe spatiale avec la solution exacte du problème 1 pour Ste=1

ξ	présente étude			Kutluay S.		
	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.7178866$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux dans l'espace réelle	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.717778$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux de la dans l'espace réelle
0,1	0,271789	0,66438	0,66493	0,27164	0,66538	0,66461
0,2	0,543577	1,18112	1,18212	0,54328	1,18297	1,18164
0,3	0,815366	1,55023	1,55157	0,81492	1,55271	1,55109
0,4	1,087155	1,7717	1,77329	1,08657	1,77459	1,77297
0,5	1,358943	1,84554	1,84726	1,35821	1,84859	1,84726
0,6	1,630732	1,77174	1,7735	1,62985	1,77469	1,77398
0,7	1,902521	1,55029	1,552	1,90149	1,55289	1,55312
0,8	2,174309	1,18119	1,18276	2,17313	1,18317	1,18469
0,9	2,446098	0,66443	0,66579	2,44477	0,66555	0,66867
E_m de la température	4,682693E-4			8,49076E-4		

Tab. 4.9 – Résultats numériques comparatifs des températures et des erreurs relatives moyennes calculées par la présente méthode numérique (ResNS) et ceux calculés par Kutluay, pour un nombre de répartition N=80 de l'axe spatiale avec la solution exacte du problème 1 pour Ste=1

ξ	présente étude			Kutluay S.		
	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.7181830$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux dans l'espace réelle	$\eta = \xi\Delta$ $\Delta = 2.718149$	Les valeurs numériques des températures	Les valeurs exactes des températures des points nodaux de la dans l'espace réelle
0,1	0,271818	0,66486	0,66499	0,27172	0,66511	0,66478
0,2	0,543637	1,18197	1,18222	0,54344	1,18243	1,1819
0,3	0,815455	1,55133	1,55167	0,81516	1,55196	1,55135
0,4	1,087273	1,77296	1,77335	1,08688	1,77368	1,77314
0,5	1,359092	1,84683	1,84726	1,3586	1,8476	1,84726
0,6	1,630910	1,77296	1,77341	1,63032	1,77371	1,77373
0,7	1,902728	1,55135	1,55178	1,90204	1,552	1,55252
0,8	2,174546	1,18198	1,18238	2,17376	1,18249	1,18366
0,9	2,446365	0,66487	0,66521	2,44548	0,66515	0,66713
E_m de la température	1,171438E-4			3,96238E-4		

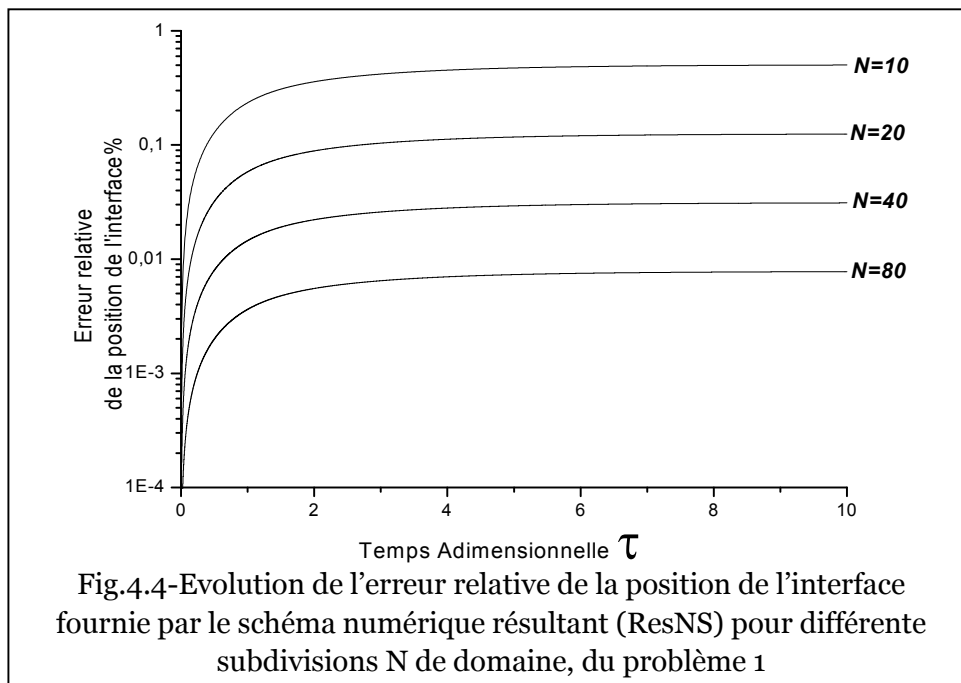
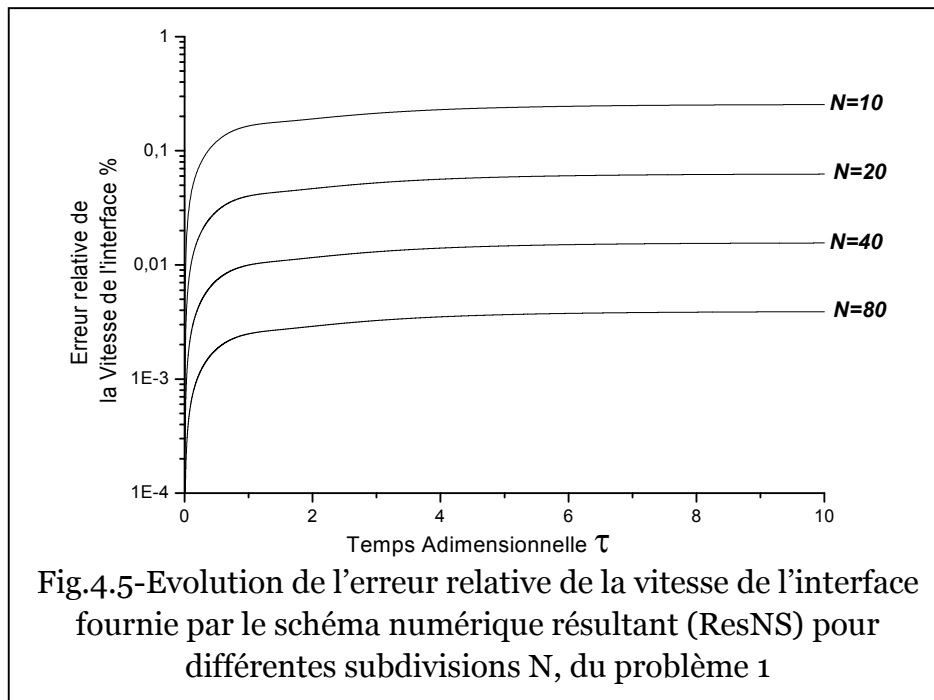
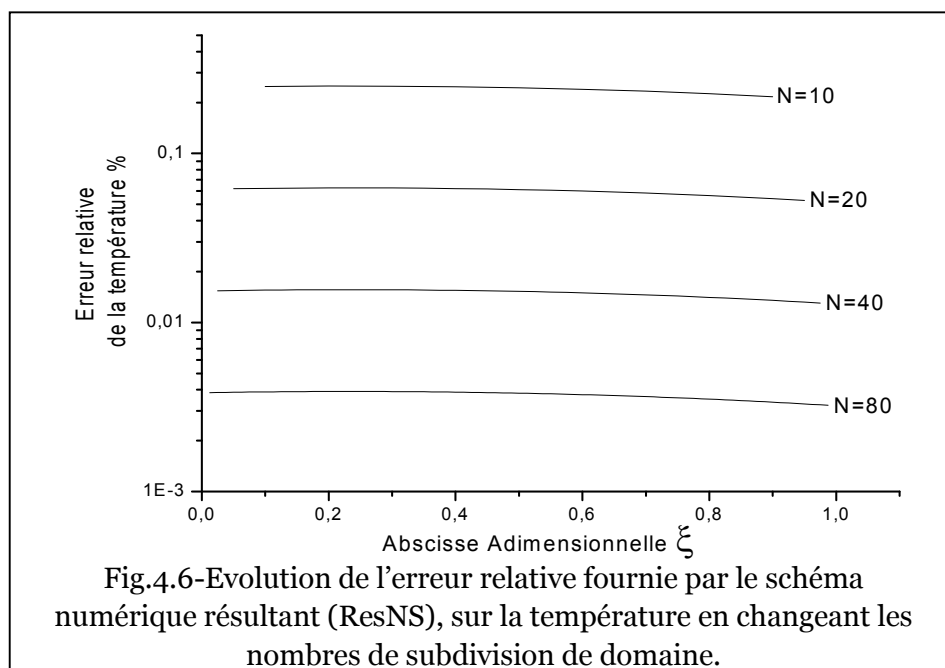


Fig.4.4-Evolution de l'erreur relative de la position de l'interface fournie par le schéma numérique résultant (ResNS) pour différente subdivisions N de domaine, du problème 1



Les courbes présentées par les fig.4.4 et fig.4.5, erreurs relatives de la position de l'interface et celles de sa vitesse respectivement, montrent que la présente méthode s'approche de la solution exacte en augmentant le nombre de subdivision du domaine spatial. Des erreurs maximales de 0.5%, 0.12%, 0.03% et 0.007% sont enregistrées pour la position de l'interface et 0.25%, 0.06%, 0.016% et 0.004 pour la vitesse de l'interface. On enregistre aussi que cette méthode permet d'approcher la valeur exacte de la température en augmentant les subdivisions de domaine : on obtient des erreurs maximale de 0.25, 0.06, 0.015 et 0.004 pour des subdivision de 10, 20, 40 et 80 respectivement.



PROBLEME 2

Ce qui concerne le problème 2, ces valeurs sont évaluées à l'instant $\tau = 0.4$, la présente méthode évalue les trois grandeurs physique avec une grande précision par rapport aux résultats de Kutluay ; Les valeurs exactes sont également données, pour comparaison, par les dernières colonnes des tableaux.

La présente méthode comparée à celle de Kutluay améliore le degré de précision par un facteur de 5.1 pour la position de l'interface, et de 8.7 pour la vitesse de l'interface. Voir (Tab 4.10 et Tab 4.11). Contrairement au problème 1 la présente méthode évalue les températures du problème 2 avec une grande précision dans l'espace immobile $0 \leq \xi \leq 1$ (les rapports des précisions moyennes sont donnés dans le Tableau 4.13). Cette méthode améliore le degré de précision dans l'évaluation des températures par un facteur de 21, 24.5, 26.7 et 28.5 par rapport aux valeurs obtenues par Kutluay pour un nombre de nœuds de 10, 20, 40 et 80 respectivement. Néanmoins l'évaluation réelle de la température se fait dans l'espace $0 \leq \eta \leq \Delta$, dans lequel l'amélioration n'est que de 1,2 par rapport aux résultats de Kutluay. On remarque aussi que les précisions moyennes des températures calculées par Kutluay dans l'espace immobile sont décalées par rapport à celles calculées dans l'espace mobile, contrairement à la présente méthode (voir les tableaux 4.13 et 4.14)

Tab. 4.10 – Résultats numériques comparatifs des erreurs relatives de la position de l'interface calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différente nombre de répartition N de l'axe spatiale avec la solution exacte de problème 2 pour $Ste=1$

N	SOLUTION NUMERIQUE (PRESENTE ETUDE)		SOLUTION NUMERIQUE (KUTLUAY S, 2005)		LA POSITION EXACTE DE L'INTERFACE
	POSITION DE L'INTERFACE	ERREUR%	POSITION DE L'INTERFACE	ERREUR%	
10	1,468260	0,492603	1.440631	2.365052	1.475528
20	1,473731	0,121820	1.466259	0.628182	1.475528
40	1,475080	0,030368	1.473171	0.159739	1.475528
80	1,475416	0,007586	1.474934	0.040257	1.475528

Tab. 4.11 – Résultats numériques comparatifs des erreurs relatives de la vitesse de l’interface calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différents nombres de répartition N de l’axe spatiale avec la solution exacte de problème 2 pour Ste=1

N	SOLUTION NUMERIQUE (PRESENTE ETUDE)		SOLUTION NUMERIQUE (KUTLUAY S, 2005)		LA VITESSE EXACTE DE L’INTERFACE
	VITESSE DE L’INTERFACE	ERREUR%	VITESSE DE L’INTERFACE	ERREUR%	
10	0,473324	2,488374	0.391677	19.30890	0.485403
20	0,482405	0,617506	0.455732	6.112653	0.485403
40	0,484655	0,154064	0.479556	1.204566	0.485403
80	0,485216	0,038495	0.484050	0.278737	0.485403

Tab. 4.12– Résultats numériques comparatifs des températures calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différents nombres de répartition N de l’axe spatiale avec la solution exacte de problème 2 pour Ste=1

ξ	N=10	N=20	N=40	N=80	Solution exacte Ste=1
0,1	0,006294	0,006408	0,006437	0,006444	0,006446
0,2	0,022518	0,022820	0,022894	0,022913	0,022919
0,3	0,044430	0,044951	0,045079	0,045112	0,045122
0,4	0,067788	0,068518	0,068698	0,068743	0,068758
0,5	0,088348	0,089236	0,089455	0,089510	0,089528
0,6	0,101857	0,102821	0,103058	0,103117	0,103136
0,7	0,104056	0,104982	0,105210	0,105266	0,105285
0,8	0,090669	0,091428	0,091615	0,091661	0,091677
0,9	0,057415	0,057867	0,057977	0,058005	0,058014

Tab. 4.13 – Résultats numériques comparatifs des erreurs relatives moyennes calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différents nombres de répartition N de l’axe spatiale avec la solution exacte de problème 2 pour Ste=1 (domaine fixe $0 \leq \xi \leq 1$)

E_m de la température	N=10	N=20	N=40	N=80
Kutluay S., 2005	0.301113	0.086952	0.023664	0.006327
présente étude	0,014342	0,003553	8,862292E-4	2,214195E-4

Tab. 4.14 – Résultats numériques comparatifs des erreurs relatives moyennes calculées par la présente méthode numérique (ResNS), pour différents nombres de répartition N de l'axe spatiale avec la solution exacte de problème 2 pour Ste=1 (domaine mobile $0 \leq \eta \leq \Delta$)

E_m de la température	N=10	N=20	N=40	N=80
Kutluay S., 2005	0,00953	0,00275	7,17E-4	1,88E-4
présente étude	0,009462	0,002338	5,827020E-4	1,455567E-4

Les courbes présentées dans les fig.4.7 et fig.4.8, erreurs relatives de la position de l'interface et celles de sa vitesse respectivement, montrent que la présente méthode s'approche de la solution exacte en augmentant le nombre de subdivision du domaine spatiale où les erreurs maximales sont de 0.5%, 0.12%, 0.03% et 0.007% pour la position de l'interface et de 2.5%, 0,6%, 0,16% et 0.04 pour la vitesse de l'interface. Cette méthode s'approche de la valeur exacte de la température en augmentant les subdivisions du domaine avec des erreurs maximale de 1.03, 0.24, 0.06 et 0.015 pour des subdivision de 10, 20, 40 et 80 respectivement. (Voir Fig.4.9)

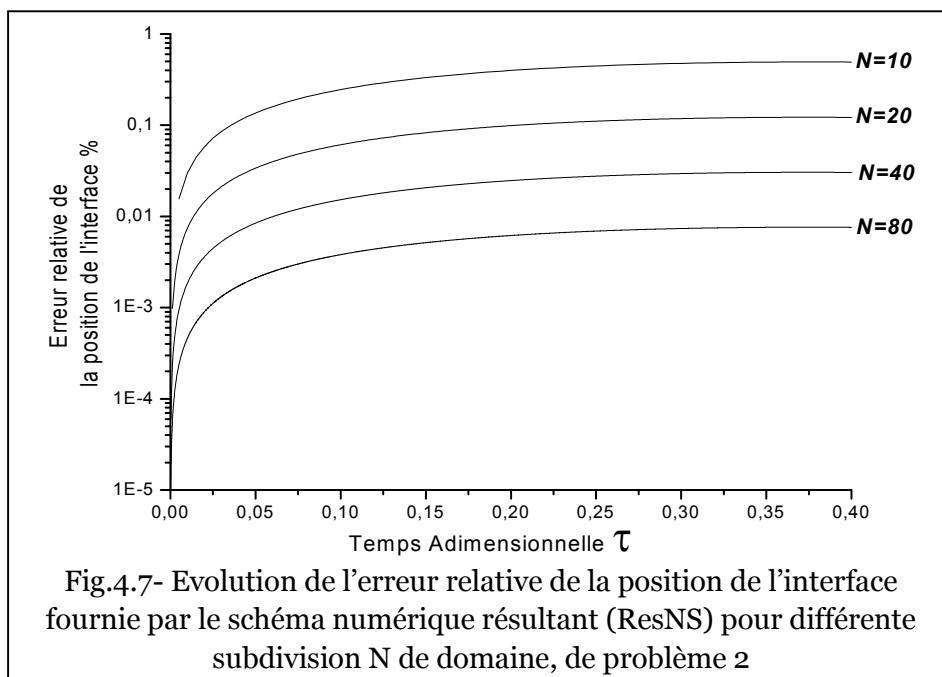
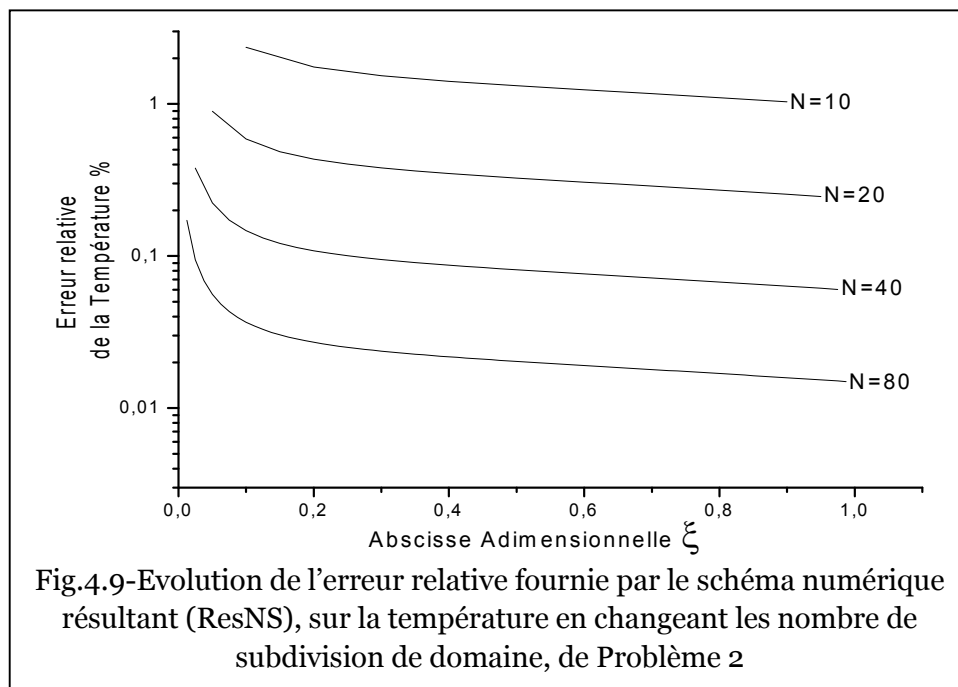
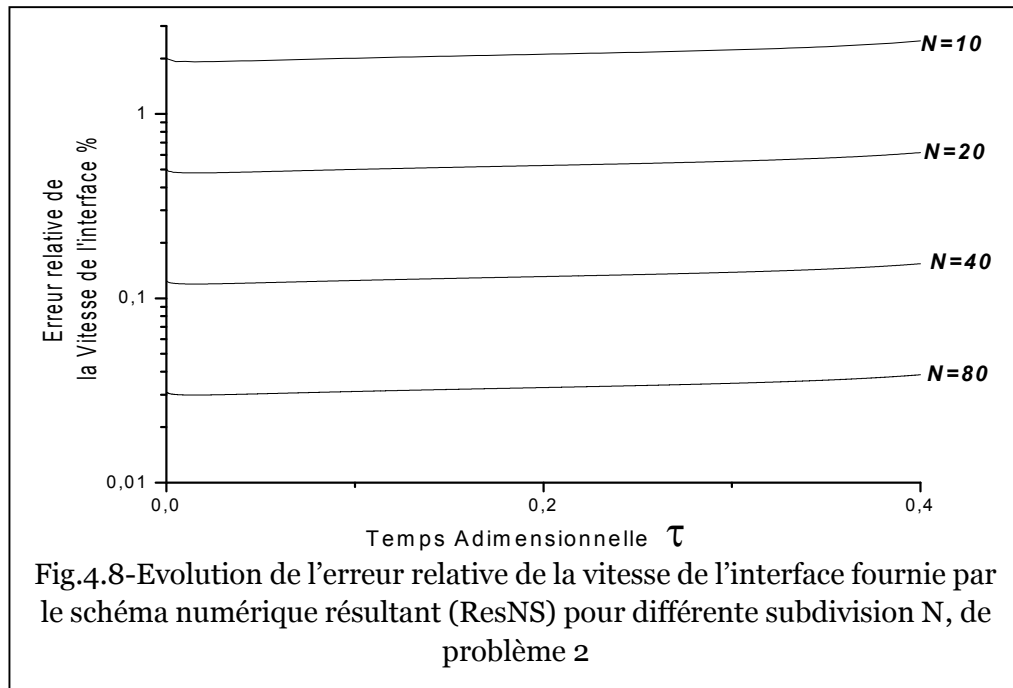


Fig.4.7- Evolution de l'erreur relative de la position de l'interface fournie par le schéma numérique résultant (ResNS) pour différente subdivision N de domaine, de problème 2



4.3 RESOLUTION PAR LA PRESENTE METHODE

Considérant le problème 1et 2 avec un terme source pour St_e différent de 1, décrits par les équations (3.1 à 3.6) dans le domaine fixe et par les équations (2.16 à 2.20) dans le domaine mobile, pour lequel la solution exacte n'existe pas, la différence entre les deux problèmes réside dans leurs distributions initiales et la fonction du terme source.

Dans ce qui suit, les grandeurs physiques seront calculées pour 50 point nodaux et un pas temporel $\bar{\tau} = \frac{1}{2N^2} = 0.0002$ (Von Neumann), qui représente le pas maximum pour que le schéma soit stable. Ces choix sont faits pour une meilleure approche numérique et un gain du temps de calcul.

PROBLEME 1

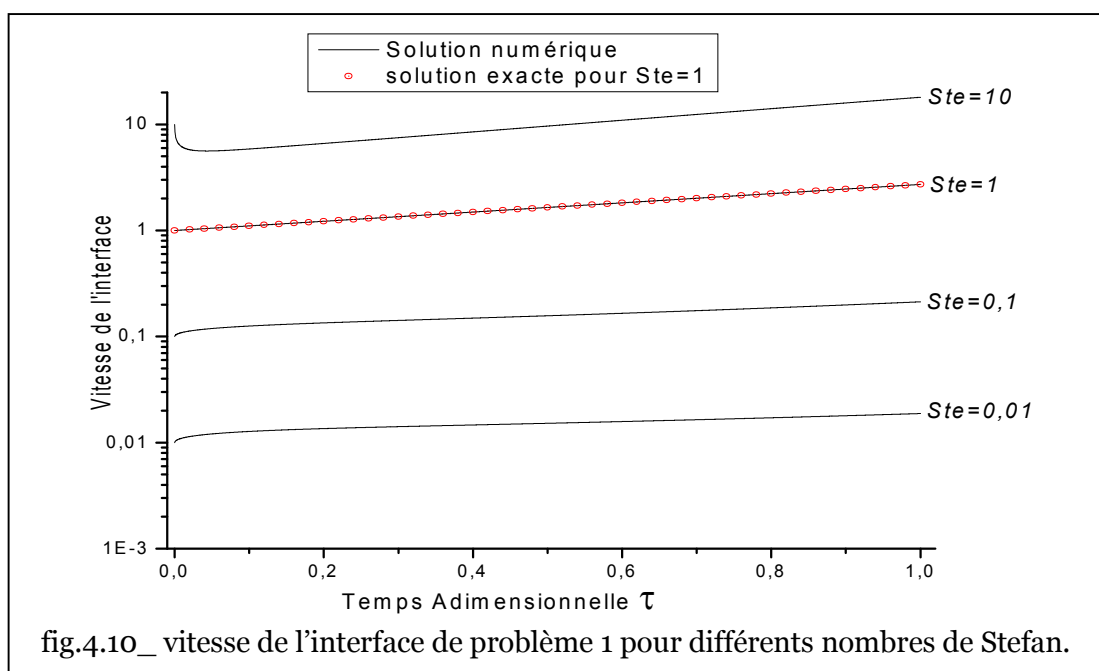
La distribution initiale et la fonction de la source de problème 1 sont décrites respectivement comme suit :

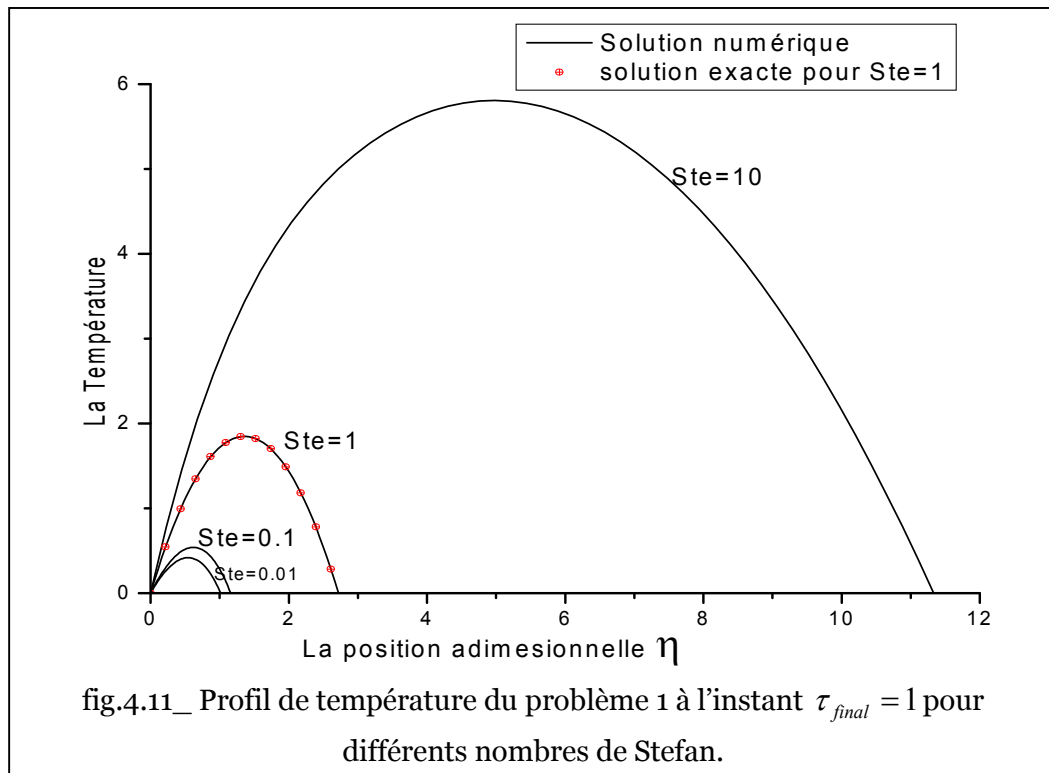
$$F(\eta) = \eta(1 - \eta)$$

$$\Sigma(\eta, \tau) = \eta e^{\tau} + 2$$

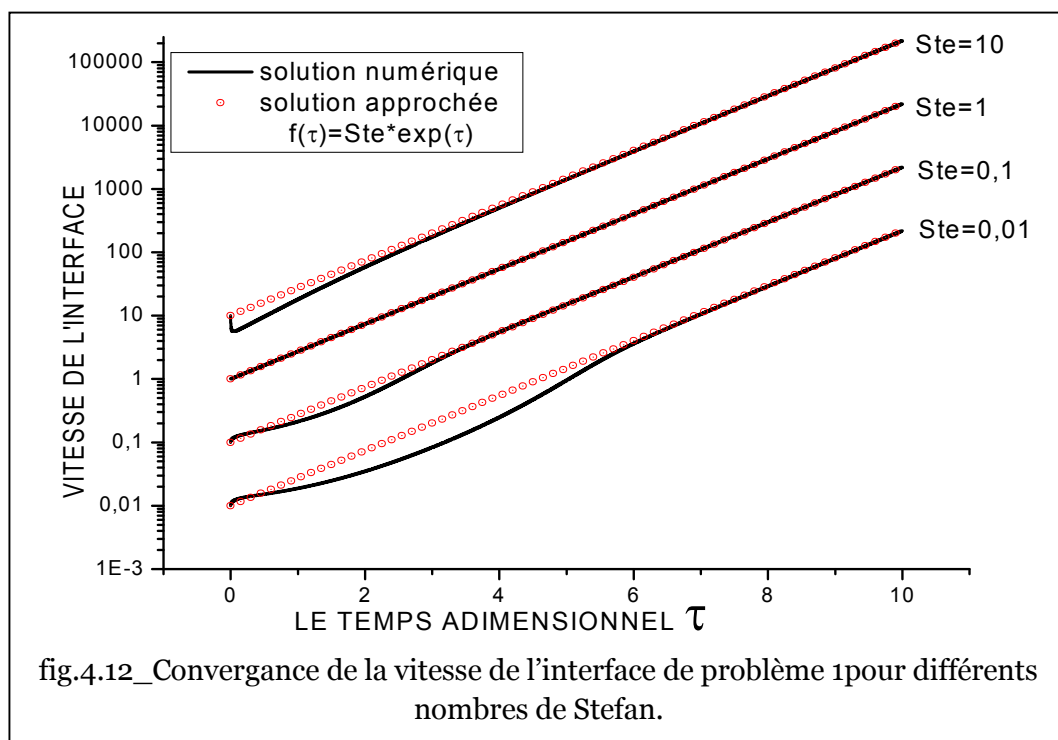
On trace les courbes de la vitesse de l'interface et la température à l'instant $\tau_{final} = 1$, les fig.4.10 fig.4.11 présentent respectivement les vitesses de l'interface et les profils des températures pour différents nombres de Stefan

La première remarque qu'on voit dans les fig.4.10 fig.4.11 c'est que dans le cas où on a les solutions exactes de la vitesse et de la température pour le nombre de Stefan égale à l'unité, les solutions numériques évaluées de ces grandeurs physiques pour le même nombre de Stefan ne se distinguent pas de la solution exacte.

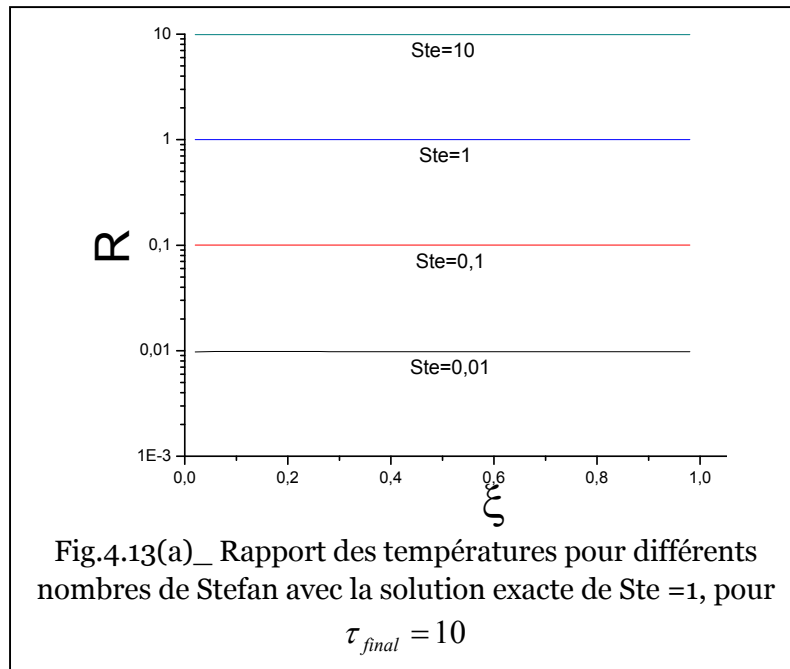




Il est à remarquer aussi que la forme des courbes des vitesses des interfaces pour Stefan différent de l'unité prennent la forme de la courbe de la vitesse de Stefan égale à l'unité, quand le temps augmente, ce qui est montré dans la fig.4.12, les vitesses tendent vers la fonction $f_{\Delta} = Ste \cdot e^{\tau}$.

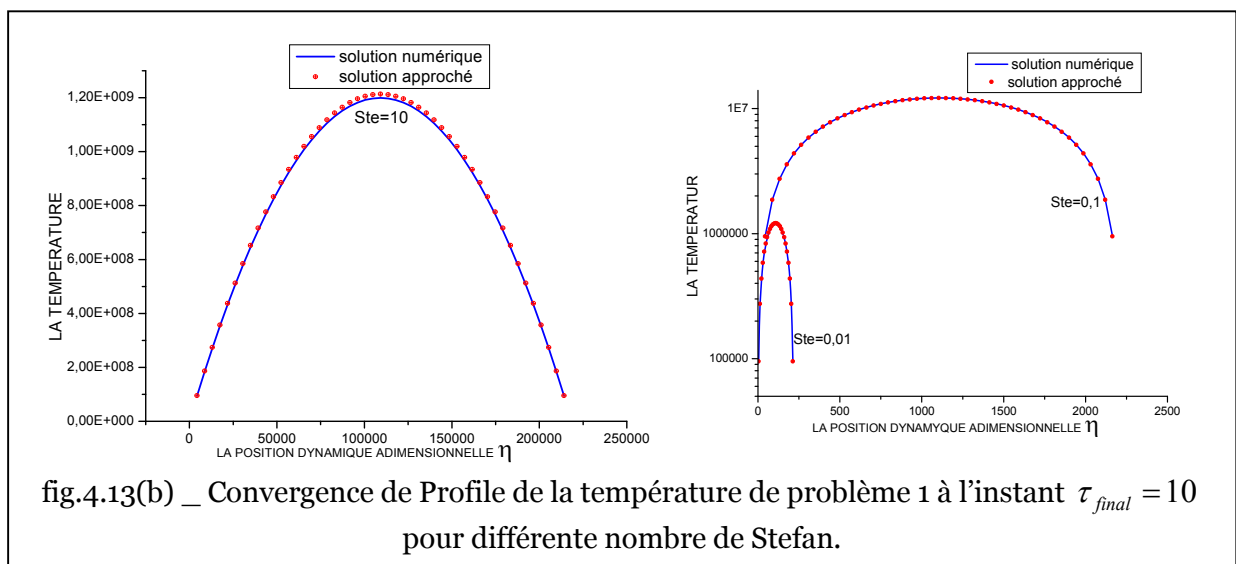


Sur la figure suivante (fig.4.13(a)), est représenté le rapport $R = \frac{\theta_i^j}{e^{2\tau} \xi(1-\xi)}$ des températures calculées pour différents nombres de Stefan par le présent schéma numérique, avec la solution exacte de la température pour Ste=1 à des instants $\tau \gg 1$.



Les profils des températures à l'instant $\tau_{final} = 10$, sont représentés dans la fig.4.13(b), à cet instant la température s'approche de $f\theta = Ste \cdot e^{2\tau} \xi(1-\xi)$, pour déduire que le profil de température, pour des instants très grands devant 1, s'écrit sous la forme :

$$\theta_{proche} = \eta(e^\tau - \frac{\eta}{ste})$$



PROBLEME 2

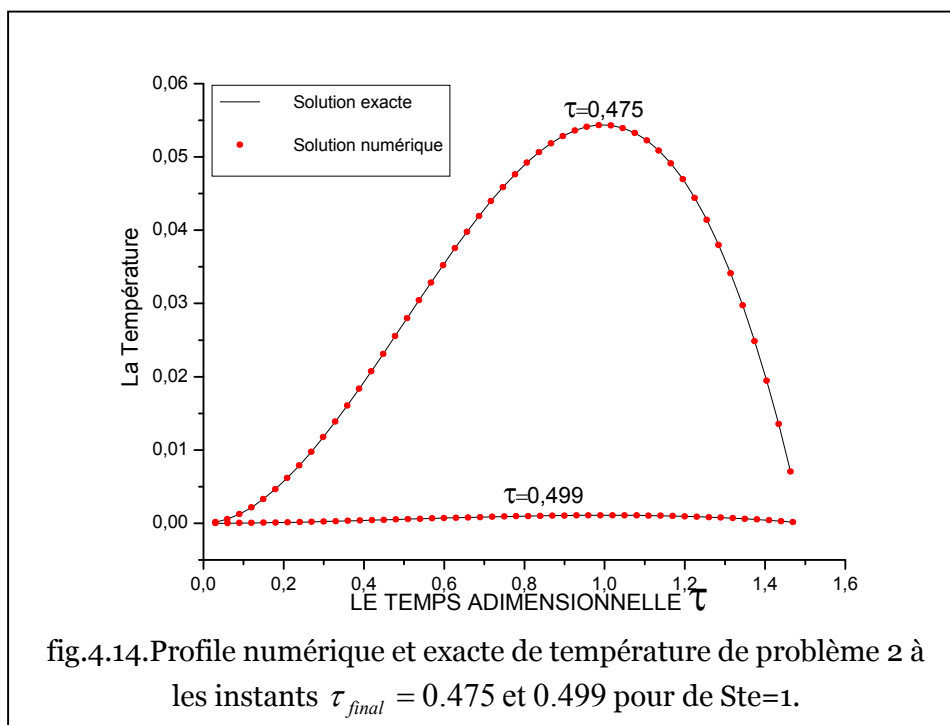
La distribution initiale et la fonction de la source du problème 2 sont décrites respectivement comme suit :

$$F(\eta) = 0,5\pi\eta^2(1-\eta)$$

$$\Sigma(\eta, \tau) = -2 \frac{\dot{h}(\tau)}{h(\tau)} + 6\eta \frac{\dot{h}(\tau)}{h^2(\tau)} + \eta^2 \left(\frac{\ddot{h}(\tau)}{h(\tau)} - \frac{\dot{h}^2(\tau)}{h^2(\tau)} \right) + \eta^3 \left(2 \frac{\dot{h}^2(\tau)}{h^3(\tau)} - \frac{\ddot{h}(\tau)}{h^2(\tau)} \right)$$

Où $h(\tau) = 1 + 0.5 \sin(\pi\tau)$,

L'évaluation des grandeurs physiques calculées par la méthode présente ne s'applique pas pour les temps proche de 0.5 où la solution exacte de la vitesse s'annule : par exemple pour un $\tau_{final} = 0.4998$ la solution est largement décalée de la solution exacte, comme il est montré dans la fig.4.14 qui présente la comparaison des températures calculées par la présente méthode et la solution exacte au même instant. Cette méthode numérique perd de son exactitude au temps proche de 0.5 car à cet instant, le bloc liquide prend entièrement la température de solidification et se transforme en solide ce qui n'est pas conforme par rapport à la base de la méthode : les résultats n'ont plus de sens physique après cela.



Les fig.4.15 et fig.4.16 présentent respectivement les vitesses de l'interface et les profils des températures pour différents nombre de Stefan, la vitesse de l'interface et la température pour Ste égale à l'unité calculées par la méthode numérique se confond avec la solution exacte. Ces grandeurs physiques calculées prennent des forme de courbe presque similaire, pour les nombre de Stefan inférieure à l'unité les températures sont très proches (Voir Fig.4.16).

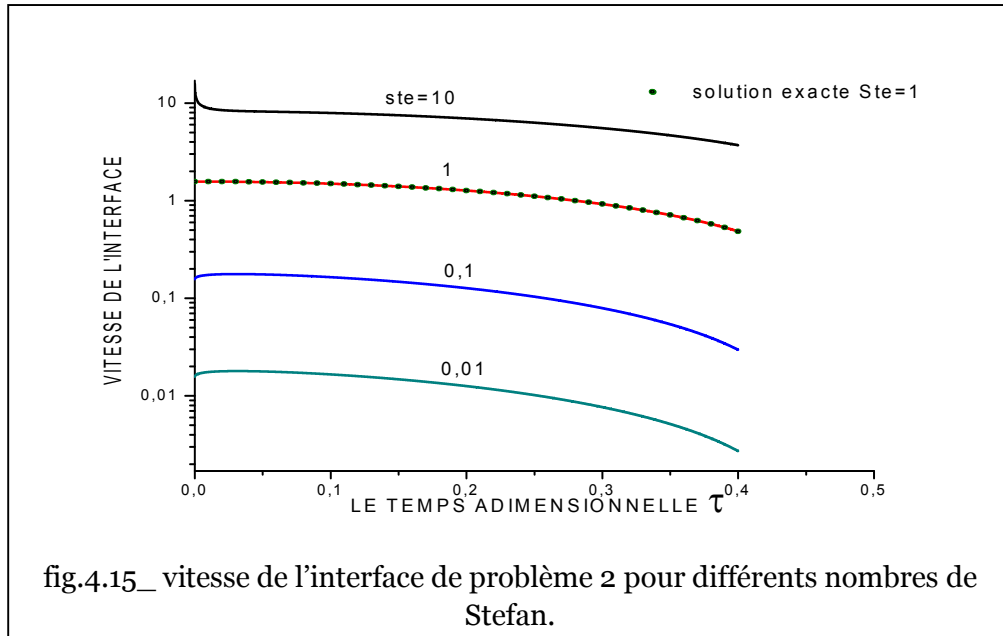


fig.4.15_ vitesse de l'interface de problème 2 pour différents nombres de Stefan.

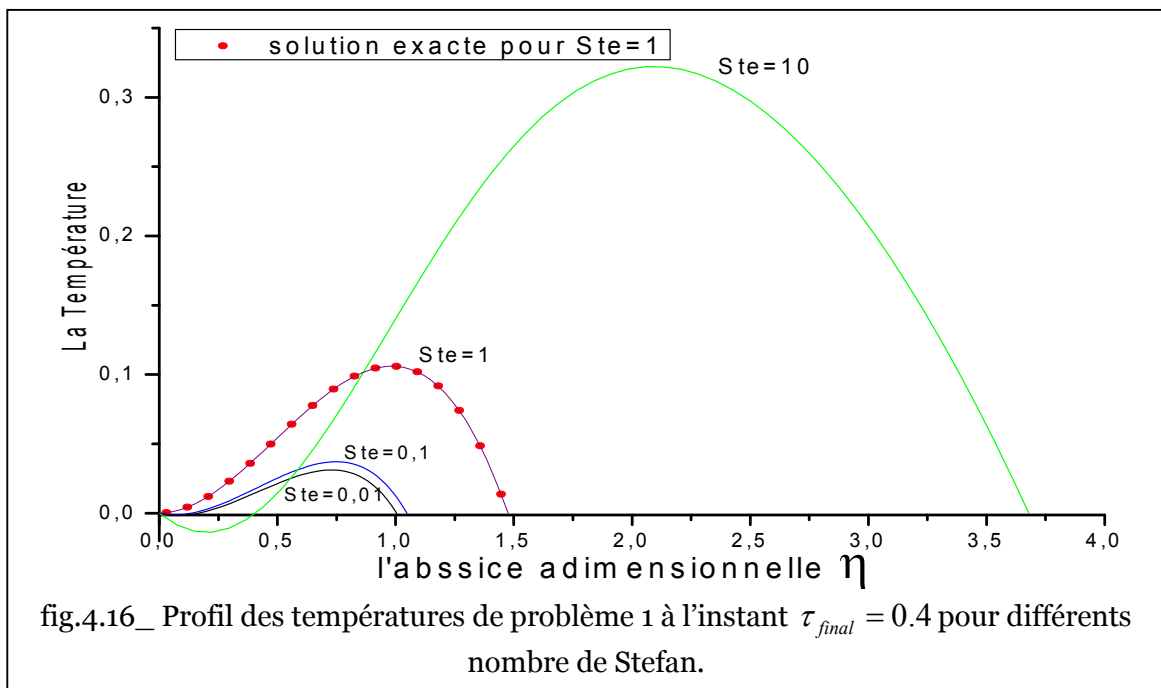
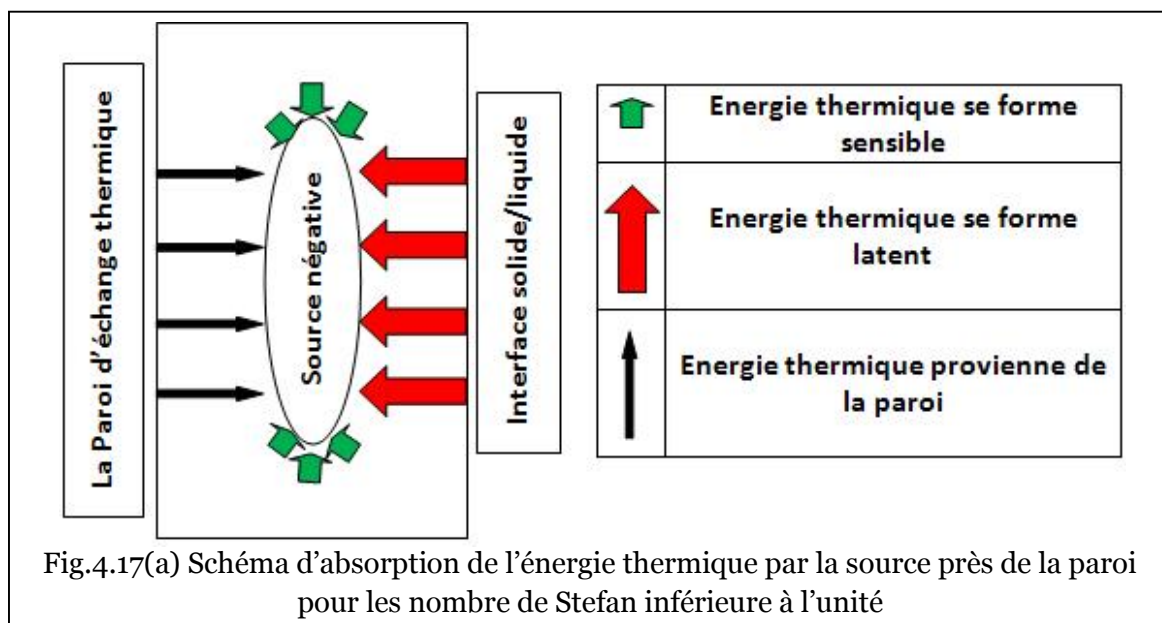


fig.4.16_ Profil des températures de problème 1 à l'instant $\tau_{final} = 0.4$ pour différents nombre de Stefan.

En remarque que la source est de signe négative près de la paroi (fig.4.18). Vu que la paroi est de température adimensionnelle nulle et le liquide se trouvant initialement à des températures positives, cette source va absorber de l'énergie.

Pour les nombres de Stefan inférieurs à l'unité, on remarque que le matériau se trouve sous forme de phase solide près de la paroi à des températures inférieures. Il est, aussi, proche de la température de fusion dans une plage spatiale de $\eta = 0.14$ à partir de la paroi d'échange thermique à l'instant $\tau_{final} = 0.4$. Ce là est dû au fait que la source absorbe de l'énergie thermique provenant de la paroi plus qu'elle en absorbe se forme chaleur sensible du matériau se trouvant initialement en phase liquide. L'accumulation des petites pertes d'énergie thermique se forme chaleur sensible de liquide près de la paroi est absorbée par celle-ci. Ainsi, la source va réduire les températures se trouvant dans cette région. Les faibles vitesses de l'interface donnent le temps pour cette énergie thermique perdue du liquide de s'accumuler, jusqu'à ce qu'il change de phase et devient solide de 23% de la totalité du matériau entre la paroi et l'interface solide/liquide pour $Ste=0.1$ et 0.01 . Les matériaux de faibles nombres de Stefan ont une grande inertie à la perte ou au Stockage de l'énergie thermique se forme chaleur sensible par apport à l'énergie thermique se forme chaleur latente (Voir Fig.4.17(a)), ce qui explique les faibles températures de la partie du matériau adjacente à la paroi.

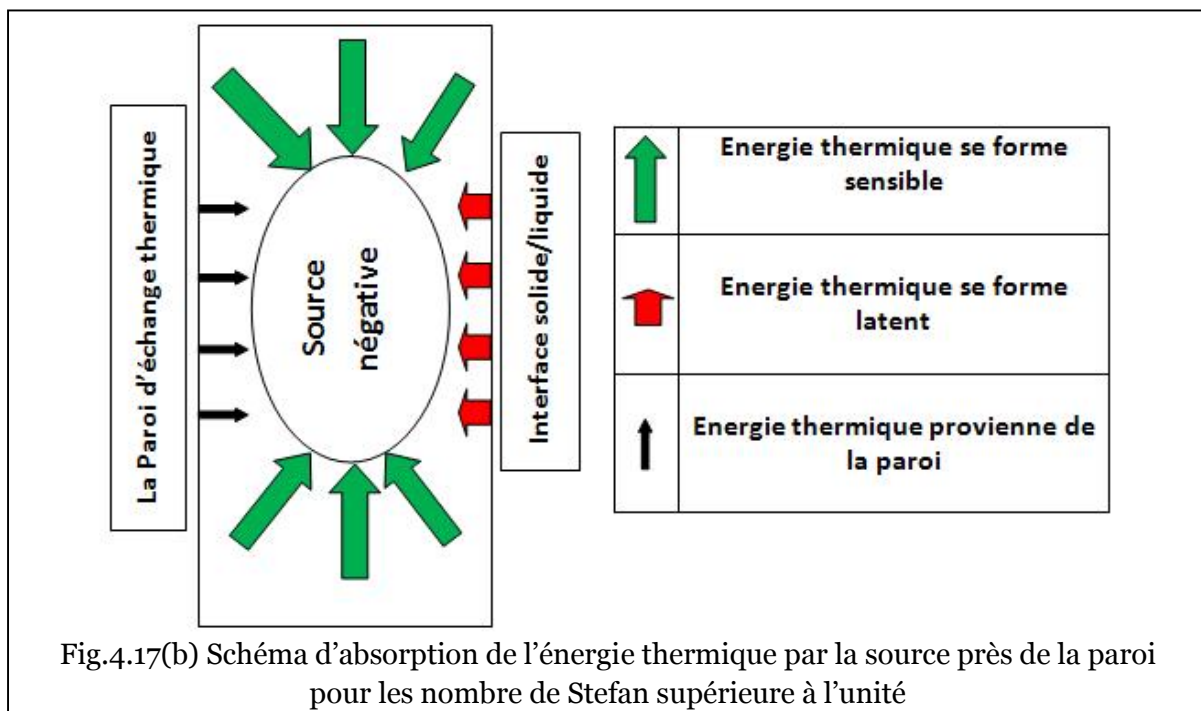
Il faut signaler que l'abscisse correspondant au maximum de la température coïncide avec le point qui annule la source (ces points sont $\eta = 0.77, 0.8$ et 1.1 pour les nombres de Stefan de $0.01, 0.1$ et 1). Cela veut dire que le bloc liquide adapte un gradient positif entre l'abscisse qui annule la source (absorbant de l'énergie) dans cette région et la paroi de température constante égale à la température de fusion à fin que la source peut s'alimenter de la paroi. Tant dis que pour la région où la source est positive, elle contribue à la fusion et l'accélération de l'interface. Voir fig.4.18.



Contrairement, pour les nombres de Stefan supérieurs à l'unité, on remarque que le matériau se trouve sous forme de phase solide à des températures inférieures à la température de fusion et de négativité importante, dans une plage spatiale de $\eta = 0.4$ à partir de la paroi d'échange thermique et à l'instant $\tau_{final} = 0.4$

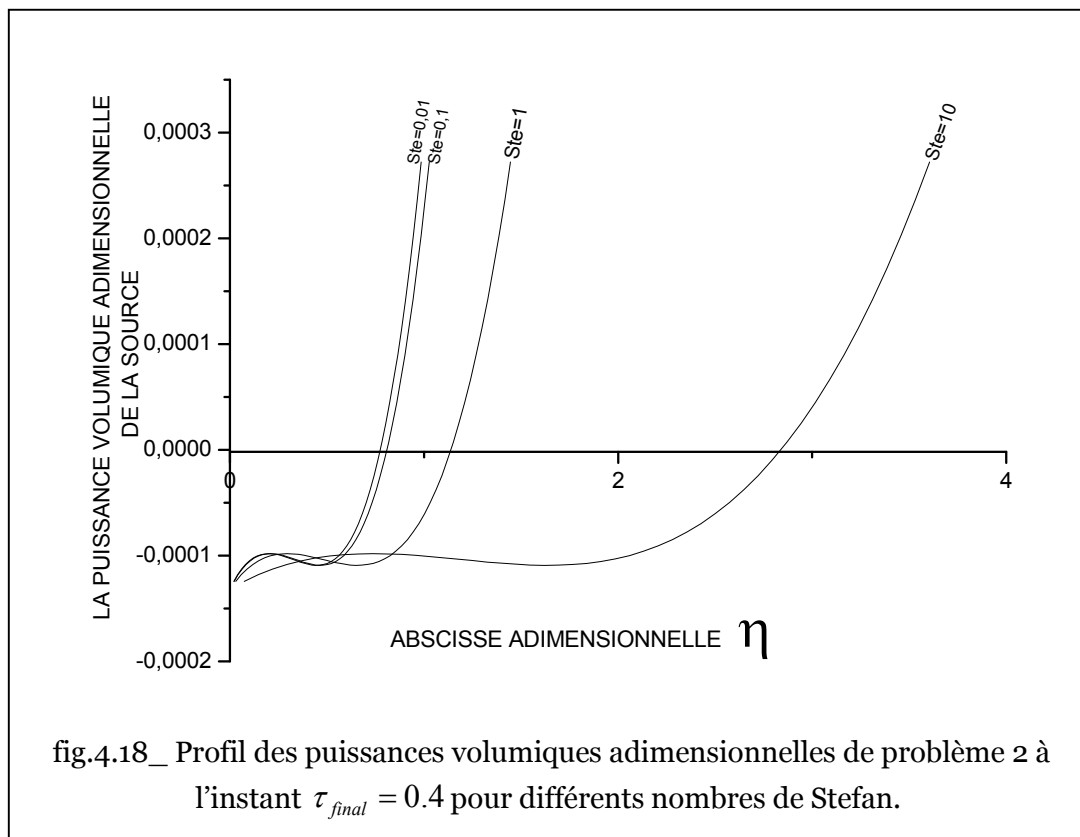
Cela est dû, cette fois-ci, à l'absorption par la source de l'énergie thermique se forme chaleur sensible du matériau se trouvant initialement en phase liquide plus qu'elle en absorbe de la paroi et de matériau se forme chaleur latente. Donc l'intensité de la perte de l'énergie thermique se forme chaleur sensible du liquide près de la paroi causée par celle-ci et la source vont affaiblir intensivement les températures de ce liquide à cette région. Les températures de cette région ainsi que les grandes vitesses de l'interface ne donnent pas le temps à la source de solidifier un large domaine par apport à ce qui est fusionné. La partie solidifiée est de 11% de la totalité de matériau entre la paroi et l'interface solide/liquide pour $Ste=10$. Les matériaux de grand nombre de Stefan ont une grande capacité à la perte ou au Stockage de l'énergie thermique se forme chaleur sensible par apport à l'énergie thermique se forme chaleur latente (Voir Fig.4.17(b)), ce qui explique les températures intenses de la partie de matériau solidifiée adjacente à la paroi.

A l'instant $\tau_f = 0.4$, la source s'annule à $\eta = 2,82$, ce qui est différent de l'abscisse correspondant au maximum de la température qui est égale à $\eta = 2,1$. Cela est dû à l'intensité de la solidification qui apparait au niveau de la paroi.



Ce qui concerne le matériau de nombre de Stefan égale à l'unité, pendant cette période de $\tau_f = 0.4$, la partie de la source négative n'arrive pas à solidifier le liquide grâce à la vitesse de l'interface adéquate au taux de l'énergie dégagée du matériau de phase liquide adjacente à la paroi.

L'apparition d'une phase solide dans le bloc liquide, et par conséquent l'apparition d'une autre interface solide/liquide, met l'exactitude des résultats obtenus par cette méthode numérique dans une case de doute, car la méthode est conçue seulement sur une seule interface, d'où la méthode numérique devient invalide dans ce cas.



4.4 CONCLUSION

Dans le présent chapitre un schéma numérique, basé sur une méthode d'immobilisation de l'interface, a été appliqué à trois problèmes de Stefan, deux avec source et l'autre sans. La méthode a été validée à travers ces trois cas et les résultats ont été comparés à ceux de Kutluay S (2005). La méthode prédit avec exactitude la position de l'interface et sa vitesse. Néanmoins, quelques précautions doivent être prises lors de l'évaluation de la température dans le domaine mobile (domaine physique). Il est important de rappeler que la méthode est conçue sur la base d'une phase initiale liquide et qui reste liquide au cours du temps, pour cela cette méthode est limitée pour les phénomènes de fusion avec une seule interface. De plus elle ne peut être appliquée que pour des sources adimensionnelles positives où il n'y a pas de changement de phase à l'intérieur du bloc liquide, Elle peut être appliquée à des sources adimensionnelles négatives mais à des instants courts et pour de faibles nombres de Stefan où le Stockage est faible. Malgré cela, cette méthode prédit la solidification du bloc liquide physiquement explicable, de plus son degré de précision s'affaiblit pour des nombres de Stefan supérieurs à l'unité.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans ce manuscrit, une solution a été développée, pour le problème de Stefan à une phase, avec un terme source. La solution numérique est basée sur la méthode d'immobilisation de l'interface solide/liquide dans laquelle on a apporté une petite modification s'exprimant en fonction du pas temporel et du nombre de nœuds. Les solutions ont été comparées et validées avec la solution exacte du problème de Stefan classique. Celle-ci correspondant à plusieurs nombres de Stefan, nous a permis de trouver les valeurs de ce nombre qui influent sur l'approche du schéma numérique établi par la méthode d'immobilisation de l'interface solide/liquide. Nous avons trouvé qu'elle est efficace pour les nombres de Stefan inférieurs à 10 qui concernent la plupart des matériaux fusibles isothermes.

Une autre validation a été faite par la comparaison avec deux solutions exactes obtenues par Fasano A. et Primicilio M. (1979) dans le cas particulier du nombre de Stefan égal à l'unité. Aussi, une comparaison a été menée avec les résultats existants dans la littérature qui sont obtenus par l'application de la méthode en fonction des pas spatial et temporel. Nous avons constaté une bonne précision de cette méthode.

Les différentes validations effectuées ont toutes montré un bon comportement de l'approche proposée, ce que nous a permis d'étendre notre application à des problèmes pour lesquels il n'existe pas de solution exacte.

Les résultats atteints par cette méthode expliquent bien la physique du problème étudié notamment lorsque les sources étaient de signe adimensionnellement positif où il ne pouvait pas exister une autre interface. Dans le cas des sources de signe négatif pour lesquelles une seconde interface peut exister, cette méthode peut être appliquée pour ce cas mais seulement pour des nombres de Stefan très petits et à des instants très courts.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

L'approche a permis également de fournir, avec le tracé des courbes des résultats obtenus par cette méthode numérique, une solution analytique approchée pour le mouvement du front mobile dans le cas du problème avec un terme source positif, à des instants très avancés pour différents nombres de Stefan.

Une extension de l'approche au problème de Stefan avec un terme source (dans le cas de la fusion) à deux phases est envisagée, dans des milieux bornés à deux dimensions et pour des diverses géométries différentes ; une approche semi-analytique sera recherchée en se basant sur les résultats obtenues dans le cas de $Ste=1$.

Références Bibliographiques

- Addakiri S., SEMMA El- A., EL GANAOUI M., Bernard PATEYRON, Rachid BENNACER, (2008), "Etude numérique de la fusion/solidification par un couplage hybride Boltzmann/Volumes", publié dans "Congrès Français de Thermique, Toulouse : France
- Alexiades V. and Solomon A.D., (1993), "Mathematical Modeling of melting and freezing processes", hemisphere publishing corporation, A member of the Taylor & Francis Group, Washington Philadelphia London
- Ang W-T., 2007, "A Numerical Method Based on Integro Differential Formulation for Solving a One-Dimensional Stefan Problem", in *Wile Inter Science*.
- Ankri R. et Zebbiche T., (2008), "Résolution d'un problème de changement de phase en présence de la convection naturelle par la méthode enthalpique: Application au Gallium", *Revue des Energies Renouvelables CISM'08 Oum El Bouaghi pp.25 36*
- Benheddad T., "contribution à l'étude du changement du phase solide liquide. Cas d'une géométrie cylindrique", *Thèse de Magistère, USTHB, Alger, Algérie, N° d'ordre : 27/2007 MPH*.
- Biswajit B. and DATE A. W., (1992), "Rapid solidification following laser melting of pure metals-I. Study of flow field and role of convection", in *J. Heat Mass Transfer. Vol. 35, No. 5, pp. 1049-1058*.
- Bonacina C, Cosnini G., Fasano A. et Primicero M.,(1973), "Numerical Solution of Phase Change Problems", *InJ. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 1825-1832*.
- Bonnerot R. and Jamet P., (1974), "A Second Order Finite Element Method for the One-Dimensional Stefan Problem", *international journal for numerical methods in engineering, vol. 8, pp 81 1-820*.
- Bouadila S., Fteiti M., Ouslati M.M., Guizani A.A. and Ben Nasrallah S., (2011) ," Study Of Storage Thermal Energy Of Latent Heat Application To The Solar Collector", *Revue des Energies Renouvelables Vol. 14 pp1 13 – 20*
- Bourdeau L., (1982), "Utilisation d'un matériau à changement de phase dans un mur Trombe sans thermo circulation", *Revue Phys. pp.633-642*
- Cadjan M.G., Lubashevsky I.A.,(1998), "Quasistationary theory of pattern formation described by the one-dimensional Stefan problem", *physics letters a 244 pp285-291*
- Caldwell J., and Kwan Y. Y., (2004), "Numerical methods for one-dimensional Stefan problems", *communications in numerical methods in engineering; vol.pp.20:535–545 (doi: 10.1002/cnm.691*.
- Caldwell J., and Kwan Y. Y., (2005), "Starting solutions for the boundary immobilization method", *communications in numerical methods in engineering; vol.21, pp.289–295*
- Caldwell J., Savović S., (2002), "Numerical solution of Stefan problem by variable space grid method and boundary immobilization method", *J. Math. Sciences vol.3,pp.67– 79*.

- Carslaw H.S. and Jaeger J.C., "Conduction of heat in solids", *Oxford at the clarendon press* 1959.
- Chen S., Merriman B., Osher S., and Smereka P., (1997), "A Simple Level Set Method for Solving Stefan Problems", *journal of computational physics* vol.135, pp.8–29.
- Crank J., (1984), "Free and Moving Boundary Problems", Clarendon Press, Oxford, UK
- Crank J., (1957), "Two methods for the numerical solution of moving-boundary problems in diffusion and heat flow", *Quart. Journal. Mech. and applied math.*, vol. 10, pp. 2
- Delaunay D., (1985), "Etude du couplage convection naturelle-conduction avec changement de phase : Application au stockage périodique de l'énergie". *Thèse de Doctorat Es Sciences, U.F.R des Sciences de l'Université de Nantes, France.*
- Dutta B. and Rettenmayr M., (2000), "An experimental investigation on the kinetics of solute driven remelting", *metallurgical and materials transactions a* vol. 31 a.
- Fasano A., Primicerio M, (1979), "Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions", *J. Math. Anal. Appl.*, 72 ,1, pp. 247-273
- Furzeland R. M., (1980), "A comparative study of numerical methods for moving boundary problems", *J. Inst. Maths Applies* vol.26, pp.411-429.
- Gau C and VISKANTA R,(1985), "Effect of natural convection on solidification from above and melting from below of a pure metal", *In. J. Heat Mass Transfer. Vol. 28, No. 3, pp. 573-587.*
- Gülkaç V., (2009), "Numerical Solution of One-Dimensional Stefan-Like Problems Using Three Time-Level Method", *Ozean Journal of Applied Sciences* 2(1).
- Hale, Jr N. W and Viskanta R, (1980), "Solid-liquid phase-change heat transfer and interface motion in materials cooled or heated from above or below", *Int .j. Heat Mass Transfer. Vol. 23, pp. 283-292.*
- Hsiao I.S., (1985), "An efficient Algorithm for Finite-Difference Analysis of Heat Transfer with Melting and Solidification", *J. Num. Heat Transfer, Vol. 8, pp. 653-666.*
- Jiji L. M., (2003), "HEAT CONDUCTION", jaco publishing house
- Kutluay S., (2005), "Numerical Schemes for one-dimensional Stefan-like problems with a forcing term", *Applied Mathematics and Computation, vol.168, pp.1159–1168*
- Kutluay S., Bahadir A.R., and Ozdes A., (1997), "The Numerical Solution of One-Phase Stefan Problem", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 81, pp.135–144.
- Lame G. et Clapeyron E., (1831), "Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide". *ann. chem. phys.*, vol.47 :pp.250–256.

- Landau H.G., (1950), "Heat conduction in a melting solid", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, VOL.8 PP.81–94.
- Mareschal J.C., (1977), "A linear approximation to the solution of a one-dimensional Stefan problem and its geophysical implications", *Geophys. J. R. astr. soc.* vol49,pp.443-458
- Memiaghe S., Bussière W. and Rochette D., (2007), "Numerical Method For Prearcing Times: Application In HBC Fuses With Heavy Fault Currents", *Conf. on Electric Fuses and Their Appl. (ICEFA)*. pp:127-132.
- Meyer G.H., (1973), "Multidimensional stefan problems siam", *Journal on Numerical Analysis*, Vol. 10, No. 3, pp. 522-538 *Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Minwu Y. and Arnon C., (1993), "An alternative formulation of the apparent heat capacity method for phase-change problems", *numerical heat transfer. vol.24 part b, n° 3*, pp 927-300.
- Nedoma J, (2003), "Numerical solution of a Stefan-like problem in Bingham rheology" *Mathematics and Computers in Simulation* vol61, pp. 271–281
- Nedoma J., (1997), "On a coupled Stefan-like problem in thermo-visco plastic rheology", *Journal of Computational and Applied Mathematics* vol.84, pp. 45-80
- Paradkar A., Maheshwari M., Tyagi A. K., Chauhan B., and Kadam S.S., (2003), "Preparation and Characterization of Flurbiprofen Beads by Melt Solidification Technique", *AAPS PharmSciTech*; 4 (4) Article 65.
- Peng Q., Chaomin Z., Xiaohong L., Xiugan Y., (1992), "A new computation method for solidification process in a finite initially overheated slab", *Journal of Thermal Science Press* Vol.1, No.4.
- Rabin Y. and Shitzer A., (1998), "Numerical Solution of the Multidimensional Freezing Problem during Cryosurgery", *journal of heat transfer* Vol. 120.
- Rabin Y. and Shitzer A., (1995), "Exact solution to the one-Dimensional inverse-Stefan problem in Nonideal Biological Tissues", *journal of heat transfer* Vol. 117/425.
- Sadoun N., (2006), "Contribution a l'étude du problème de solidification approche semi analytique", *Thèse de Magistère, USTHB, Alger, Algérie, N° d'ordre : 25/2006-M/PH*
- Sadoun N., (2009), Si-Ahmed El-K., Colinet P., Legrand J., "On the Goodman heat-balance integral method for Stefan like-problems further considerations and refinements", *THERMAL SCIENCE: Vol. 13 , No. 2*, pp. 81-96
- Sadoun N., Si-Ahmed El-K., Colinet P., Legrand J., (2012), "On the boundary immobilisation and variable space grid methods for transient heat conduction problems with phase change", discussion and refinement, *mecanique* .
- Sandner H., (1984), Josef Stefan, 1835-1893. *Int. Comm. in Heat and Mass Tansfer*, vol.16 pp.1–14.
- Sarler B., (1995), "Stefan's work on solid-liquid phase changes", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.16,PP83–92.

- Savovic S. and Caldwell J., (2003), "Finite difference solution of one-dimensional Stefan problem with periodic boundary conditions", *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol.46 pp2911–2916
- Segal G., Vuik K., and Vermoleny F., (1998), "A Conserving Discretization for the Free Boundary in a Two Dimensional Stefan Problem", *journal of computational physics* 141, 1–21 article no. cp985900
- Shen X., Zhang H., Wang Z-D., Lou H-f., Jia Y-m., and Hu P-x., 2010, "Macrostructure and properties of thin walled copper tubes prepared by the downward continuous unidirectional solidification method", *International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials*, vol.17, pp.63
- Singh A.K., Pardeshi R. and Basu B., (2001), "Modelling of convection during solidification of metal and alloys", *Sadhana Vol. 26, Parts 1 & 2*, pp. 139–162.
- Stefan J, (1889)., "Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung", *Akad. Mat. Natur.* vol.98, pp.173, 616.
- Tarzia D. A., (2000), "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The stefan and related problems", *mat - serie a: conferencias, seminarios y trabajos de matemática*
- Voller V.R., Swaminathan C.R., and Thomas B.G., 1990, "Fixed grid techniques for phase change problems : A review". *Int. J. Numer. Meth. in Engng.*, vol.30, pp.875–898.
- Weber H., (1901), "Die partiellen differential-gleichungen der mathematischen physik, Zweites buch : warmeitung, chapter 49. *Vordringen des Frostes, Vieweg und Sohn, Braunsch weig, 2nd edition.*
- Zabaras N., and Mukherjee S., (1994), "Solidification problems by the boundary element method", *Int. j. Solids Structures* Vol. 31, No. 12/13, pp. 1829-1846.
- Zalba B., Marin J. M^a., Cabeza L. F., Mehling H., (2003), "Review on thermal energy storage with phase change: materials, heat transfer analysis and applications", *Applied Thermal Engineering* vol.23 pp.251–283