

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie «Houari Boumediene»
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : **Recherche Opérationnelle** : Modèles Stochastiques

Par : **Nassim TOUCHE**

Thème

**Inférence statistique sans contrainte de stabilité pour des
modèles à volatilité linéaire des paramètres**

Soutenue publiquement, le 25 Mai 2015, devant le jury composé de :

BENTARZI	Mohamed	Professeur,	à l' U.S.T.H.B.,	Alger	Président
AKNOUCHE	Abdelhakim	Professeur,	à l' U.S.T.H.B.,	Alger	Directeur de thèse
BIBI	Abdelouahab	Professeur,	à l'U/Constantine		Examineur
KERNANE	Toufik	Maitre de onférence/A	à l' U.S.T.H.B.,	Alger	Examineur
BOUALEM	Mohamed	Maitre de onférence/A	à l' Univ/Bejaia		Examineur

Inférence statistique sans contrainte de stabilité pour des modèles à volatilité linéaire des paramètres

TOUCHE Nassim

Département de Recherche opérationnelle

Faculté de Mathématiques,

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene,

U. S. T. H. B.

Résumé

Dans cette thèse nous étudions l'inférence statistique concernant deux classes de modèles à volatilité endogène et linéaire des paramètres, et ce indépendamment de la condition de stabilité. Une première partie de la thèse est consacrée à l'inférence statistique de la classe des modèles *ARCH* à seuil en puissance (δ -*TARCH*) pour lesquels nous proposons une méthode d'estimation basée sur le principe des moindres carrés pondérés en deux étapes (*2SWLSE*). Sous des conditions très faibles et indépendamment de l'hypothèse de stabilité, nous établissons la convergence (forte) et la normalité asymptotique pour cet estimateur. Nous proposons également un estimateur consistant de la variance asymptotique de l'estimateur *2SWLS* dans les deux cas stationnaire et non stationnaire, ce qui nous permettra par la suite de proposer des tests consistants de stationnarité stricte et de symétrie pour le modèle δ -*TARCH*. Aussi, Nous montrons que, pour des innovations à queues lourdes, l'estimateur *2SWLS* est plus efficace que l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (*QMLE*) Gaussien. Une application au problème de test de stationnarité stricte de certains rendements boursiers est donnée.

Dans la deuxième partie de cette thèse nous nous intéressons à l'inférence statistique de la classe des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (*RCA*), pour laquelle nous proposons, dans un premier temps, un estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes (*4SWLSE*). Nous étudions les propriétés asymptotiques de cet estimateur indépendamment de la condition de stationnarité stricte. En outre, nous montrons que cet estimateur a la même variance asymptotique que le *QMLE* Gaussien indépendamment de l'hypothèse de stabilité. Nous proposons également une autre variante des moindres carrés pondérés en quatre étapes basée sur l'estimateur de Schick (1996).

Les résultats asymptotiques obtenus dans les deux parties sont illustrés par des études de simulation où il est montré que les méthodes proposées ont des propriétés finies et algorithm-

miques meilleures que celles du *QMLE* Gaussien.

Mots-Clés

Modèle *ARCH* à seuil en puissance, Modèle *AR* à coefficients aléatoires, Stabilité, Instabilité, Volatilité linéaire des paramètres, Modèles à volatilité endogène, Effet de levier, Effet de Taylor, Distribution à queues lourdes, Estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes, Estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes, Quasi-maximum de vraisemblance Gaussien, Quasi-maximum de vraisemblance non-Gaussien, Normalité asymptotique, Test de stationnarité stricte, Test de symétrie.

Remerciements

Seul mon nom apparaît comme auteur de cette thèse, mais il n'en demeure pas moins qu'il aurait été impossible de la réaliser sans l'aide et le support de mon directeur de thèse, Mr Aknouche Abdelhakim, que je tiens à remercier vivement, sans qui cette tâche m'aurait été impossible à accomplir. Patience, disponibilité et affabilité sont là quelques-unes des qualités qui font de lui un excellent directeur; toutes ces qualités ont fait de cette thèse un vrai moment de plaisir. Je tiens à lui témoigner ma plus sincère gratitude pour tout ce qu'il m'a appris et pour tout le temps qu'il m'a consacré.

Je remercie plus particulièrement le Professeur Mohamed Bentarzi, créateur et responsable de la formation MSRO au sein de l'USTHB de m'avoir honoré en présidant ce jury. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude et je lui rends un vif hommage pour tous les efforts qui l'a dépensés pour que la formation MSRO ait sa place à l'USTHB. Je n'aurais certainement pas pu produire cette thèse de Doctorat sans le bagage théorique que j'ai acquis au cours de ma formation de Magister en MSRO.

Mes remerciements vont également à l'endroit de Monsieur Abdelouahab Bibi, Professeur à l'université de Constantine, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Toufik Kernane Maître de conférence classe A à l'USTHB, pour avoir accepté de juger ce travail.

Je vaudrais remercier également Monsieur Mohamed Boualem, Maître de conférence classe A à l'université de Bejaia pour avoir accepté d'être dans ce jury.

Je remercie plus particulièrement ma femme Aicha pour sa précieuse aide, ses conseils, ses encouragements et surtout pour le soutien qu'elle m'a apporté tout au long de ce travail. Enfin je remercie toute ma famille et tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.

À ma mère et mon père

À ma femme Aicha

*À ma sœur et mon frère ainsi que
leurs familles*

Table des matières

Synopsis	vi
0.1 Introduction	vi
0.2 Présentation et apports de la thèse	xii

I Inférence statistique du modèle $ARCH$ à seuil en puissance basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en deux étapes

1

1 Structure dynamique du modèle $ARCH$ à seuil en puissance	2
1.1 Introduction	2
1.2 Certains traits connus des séries financières	3
1.3 Présentation générale du modèle $ARCH$ à seuil en puissance	5
1.4 Relation du modèle $\delta-TARCH$ avec d'autres modèles de séries chronologiques	8
1.4.1 Relation avec le modèle $ARCH$	8
1.4.2 Relation avec le modèle $ARCH$ en puissance ($\delta-ARCH$)	8
1.4.3 Relation avec le modèle $ARCH$ à seuil ($TARCH$)	9
1.5 Structure probabiliste du modèle $ARCH$ à seuil en puissance ($\delta-TARCH(q)$)	9
1.5.1 Existence de solutions stationnaires (au sens strict et au second-ordre) de l'équation $\delta-TARCH$	10
1.5.2 Existence des moments d'ordre supérieurs du processus $\delta-TARCH$.	12

1.5.3	Comportement asymptotique du processus δ - <i>TARCH</i> en fonction de la condition de stabilité	13
2	Inférence statistique du modèle <i>ARCH</i> à seuil en puissance basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en deux étapes	18
2.1	Introduction	18
2.2	Estimation des paramètres du modèle δ - <i>TARCH</i> : état de l'art	20
2.2.1	Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (<i>QMLE</i>)	21
2.2.2	Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance non-gaussien (généralisé), <i>GQMLE</i> , dans le cas de stabilité	26
2.2.3	Estimateurs des moindres carrés ordinaires (<i>OLSE</i>) d'un δ - <i>TARCH</i> (q) dans le cas de stabilité	29
2.3	Estimation alternative des moindres carrés pondérés en deux étapes (<i>2SWLS</i>) dans les cas de stabilité et d'instabilité	33
2.3.1	Présentation de l'estimateur <i>2SWLSE</i>	33
2.3.2	Propriétés asymptotiques de l'estimateur <i>2SWLSE</i>	35
2.3.3	Comparaison de l'efficacité asymptotique des estimateurs <i>2SWLSE</i> et <i>QMLE</i> gaussien dans les cas de stabilité et d'instabilité	37
2.3.4	Estimation de la variance asymptotique de $\hat{\beta}_{2WLS}$ lorsque $q = 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$	39
2.4	Tests de stationnarité stricte et de symétrie pour le modèle δ - <i>TARCH</i> basés sur l'estimateur <i>2SWLSE</i>	42
2.4.1	Test de stationnarité stricte pour le modèle δ - <i>TARCH</i>	43
2.4.2	Test de symétrie pour le modèle δ - <i>TARCH</i>	44
2.5	Illustration numérique en échantillons finis	44
2.5.1	Propriétés de l'estimateur <i>2SWLSE</i> en échantillons finis	44
2.5.2	Propriétés des tests de stationnarité et de symétrie en échantillons finis	49

2.5.3	Application réelle : tests de stationnarité stricte et de symétrie pour des rendements d'indices boursiers	51
3	Preuves des résultats du Chapitre 2	59
3.1	Preuve du Théorème 2.3.1	59
3.2	Preuve du Théorème 2.3.2	63
3.3	Preuve du Théorème 2.3.3	77
3.4	Preuve du Corollaire 2.3.1	81
	Conclusion	83
II	Inférence statistique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique (RCA), basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en quatre étapes	86
4	Structure dynamique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique (RCA)	87
4.1	Introduction	87
4.2	Présentation du modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique $RCA(1)$	88
4.3	Relation du modèle RCA avec d'autres modèles de séries chronologiques . .	90
4.3.1	Relation avec le modèle autorégressif (AR)	90
4.3.2	Relation avec le modèle autorégressif double (DAR)	91
4.3.3	Relation avec le modèle $ARCH$	91
4.3.4	Similarités et différences avec le modèle autorégressif à erreur $ARCH$ ($AR-ARCH$)	92
4.3.5	Relation avec le modèle bilinéaire markovien (MBL)	93
4.3.6	Relation avec le modèle autorégressif à changement de régime markovien ($MS-AR$)	93

4.4	Propriétés probabilistes du modèle RCA symétrique	94
4.4.1	Existence de solutions stationnaires	95
4.4.2	Comportement asymptotique du processus RCA en fonction de la condition de stabilité	97
5	Inférence statistique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires (RCA) basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en quatre étapes	98
5.1	Introduction	98
5.2	Estimation du modèle RCA dans les cas de stabilité et d'instabilité : état de l'art	101
5.2.1	Introduction	101
5.2.2	Estimation unifiée basée sur l'estimateur du quasi-maximum de vrai- semblance gaussien ($QMLE$)	102
5.3	Estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes dans les cas de stabilité et d'instabilité	106
5.3.1	Estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes d'un modèle $RCA(1)$: première variante $4SWLSE1$	108
5.3.2	Estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes d'un modèle $RCA(1)$: deuxième variante, $4SWLSE2$, basée sur l'estimateur de Schick (1996)	114
5.4	Propriétés finies des estimateurs $4SWLS1$ et $4SWLS2$	119
5.4.1	Cas d'un $RCA(1)$ gaussien	119
5.4.2	Cas d'un $RCA(1)$ non gaussien	120
5.4.3	Comparaison avec deux variantes de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (QML direct et $QMLKF$)	121
6	Preuves des résultats du Chapitre 5	123
6.1	Preuve du Théorème 5.3.1	123

6.2	Preuve du Théorème 5.3.3	132
Conclusion		137
III Conclusion générale		139
IV Annexes		142
7	Annexe A : Equations aux récurrences stochastiques	143
8	Annexe B : Théorèmes limites	149
9	Annexe C	152
9.1	Glossaire	152
9.2	Liste des Tableaux	154
9.3	Liste des Figures	156

Synopsis

0.1 Introduction

L'analyse des séries chronologiques a connu ces dernières années de multiples développements et extensions. L'objectif fut de pouvoir mettre en œuvre des modèles adéquats permettant de représenter et reproduire les séries chronologiques rencontrées dans le monde réel et qui sont caractérisées par des traits spécifiques. Parmi les traits qu'on trouve particulièrement en économétrie financière (ex. Mandelborot, 1963 ; Fama, 1965), on peut distinguer : la tendance, la saisonnalité, le regroupement de volatilité, la dépendance sans corrélation, la longue mémoire, les changements de régime récurrents, les ruptures, les distributions empiriques asymétriques, les distributions empiriques leptocurtiques, les distributions empiriques à queues épaisses, les distributions empiriques multimodales...etc. En outre, ces régularités empiriques ont été complétées par de nombreux auteurs qui ont notamment enrichi l'ensemble des caractéristiques communes aux séries financières en introduisant notamment l'effet de Levier (Black, 1976) et l'effet de Taylor (Taylor, 1986) (voir aussi Taylor, 2007). Le premier signifie que les variations négatives des rendements financiers tendent à générer plus de variabilité dans le futur que les variations positives de même ampleur tandis que le second exprime le fait que les corrélations des valeurs absolues des rendements sont plus importantes que celles de leur carrés.

La pléthore des modèles de séries chronologiques proposés dans la littérature rend leur classification assez difficile. En effet, ces classifications ont largement évolué dans le temps. Initialement, il y a quelques décennies de cela, on classait les modèles de séries chronologiques sur l'un des critères spécifiques de *linéarité*, de *stationnarité* ou de "*gaussienneté*" (Hannan, 1970 ; Box et Jenkins, 1976 ; Priestley, 1988 ; Brockwell et Davis, 1991 ; Tong, 1990). Cependant, ces dernières années d'autres classifications plus fines ont vu le jour (Cox, 1981 ;

Aknouche, 2014b) et en particulier selon que le modèle en question soit : stable ou non, de moyenne conditionnelle ou/et de volatilité conditionnelle, à volatilité endogène ou à volatilité exogène (Aknouche, 2014b).

Par ailleurs, une dichotomie importante entre modèles de moyenne conditionnelle et modèles de variance conditionnelle (dits aussi modèles de volatilité) a été récemment prise en considération dans l'analyse des modèles de séries chronologiques. Les modèles de moyenne conditionnelle purs, tels les modèles *ARMA* forts, sont les modèles dont la moyenne conditionnelle est stochastique (dépendant généralement du passé du processus observé) et dont la variance conditionnelle n'en est pas. De tels modèles sont préconisés pour la prévision des valeurs d'un phénomène à un horizon donné. À l'encontre, les modèles de variance conditionnels purs, dont figurent les modèles *GARCH*, sont en revanche des modèles dont la moyenne conditionnelle n'est pas stochastique tandis que la variance conditionnelle en est. Cette caractéristique permet entre autres de prévoir non pas les valeurs du phénomène mais leurs variabilités à un horizon donné. Naturellement, il en découlent des modèles qui sont à la fois de moyenne conditionnelle et de variance conditionnelle dont un cas important est celui de la classe de modèle *ARMA* à erreur *GARCH* (*ARMA-GARCH*), les modèles autorégressifs doubles (Double autoregressions, *DAR*) et les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (Random Coefficient Autoregression, *RCA*, Markov switching Autoregressions, *MS-AR*).

La classification des modèles de séries chronologiques selon que la variance conditionnelle dépend explicitement ou non du processus observé conduit à deux catégories de modèles : modèles à volatilité exogène et modèles à volatilité endogène. Un modèle est dit à volatilité exogène si sa variance conditionnelle ne dépend du processus observé qu'à travers le processus d'innovation : processus *ARMA* fort (e.g. généré à partir d'une innovation indépendante et identiquement distribuée), modèle *ARMA* à erreur *GARCH*, modèle *ARMA* à erreur de volatilité stochastique, modèle *ARMA* à erreur bilinéaire, ...etc. Dans le cas où la variance conditionnelle dépend explicitement du processus observé, non à travers l'innovation, le modèle est dit à volatilité endogène (cf, Aknouche, 2014b-2015c). Parmi ces modèles on en distingue : les modèles *GARCH* purs, les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (Random coefficient autoregression, *RCA*), les modèles autorégressifs doubles, ...etc. Si ces deux catégories de modèles se différencient, d'emblée, par leurs structures, elles se différencient

aussi par rapport à deux conséquences importantes émanant de leurs structures. La première conséquence est d'ordre probabiliste et la seconde est plutôt statistique.¹

En effet, à l'exception de certains cas spécifiques, les modèles à volatilité exogène sont caractérisés par : *i*) l'invariance des propriétés probabilistes par rapport au domaine des paramètres de moyenne conditionnelle et *ii*) *l'effet lame de couteau* (cf. Lumsdaine, 1996). La première caractéristique signifie que pour un modèle à volatilité exogène, les domaines de stationnarité stricte, de stationnarité au second ordre et de stationnarité au moment d'ordre supérieur coïncident par rapport aux paramètres de moyenne conditionnelle. L'effet lame de couteau, quant à lui, exprime le fait que les distributions asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (*QMLE*) d'un modèle à volatilité exogène sont différentes selon que les paramètres du modèle soient à l'intérieur, sur la frontière ou à l'extérieur de la région de stationnarité stricte (stabilité). De plus, la vitesse de convergence du *QMLE* est proportionnelle à la racine carrée de la taille de l'observation (n) à l'intérieur de la région de stabilité, elle en est linéaire sur la frontière de stationnarité et en est exponentielle à l'extérieur de la région de stabilité (voir ex. Fuller, 1996 ; Lumsdaine, 1996 ; Jensen et Rahbek, 2004a ; Aknouche, 2014b).

À l'encontre, les modèles à volatilité endogène sont caractérisés par *i*) la non-invariance des propriétés probabilistes par rapport au domaine des paramètres et *ii*) la non existence de l'effet lame de couteau (voir Jensen et Rahbek, 2004a-2004b ; Aknouche, 2014c). Selon la première caractéristique, les domaines de stationnarité stricte, de stationnarité au second ordre et de stationnarité au moment d'ordre supérieur ne coïncident pas et sont en général emboîtés dans le sens où le domaine de stationnarité stricte contient le domaine de stationnarité au second ordre qui lui aussi contient le domaine de stationnarité au 3^{ème} ordre et ainsi de suite (ex. Ling, 2007 ; Francq et Zakoïan, 2010 ; Aknouche et Bentarzi, 2014). Pour la deuxième caractéristique, il a été récemment montré (Jensen et Rahbek, 2004a-2004b ; Ling et Li, 2008 ; Berkes et al, 2009 ; Aue et Horváth, 2011, Francq et Zakoïan, 2012-2013a ; Aknouche, 2014a ; Aknouche, 2015b) que l'estimateur du maximum de vraisemblance d'un modèle à volatilité endogène est toujours $\sqrt{n}$ -gaussien quelle que soit la valeur des paramètres à l'intérieur, sur la frontière ou à l'extérieur de la région de stationnarité (stricte).

¹Largement inspirée de Aknouche (2014b).

Cependant, les paramètres de la loi gaussienne asymptotique sont différents selon qu'on soit à l'intérieur ou non de la région de stationnarité stricte. De plus, en dehors de la région de stationnarité stricte, certains paramètres ne peuvent être estimés de manière consistante (voir Aknouche, 2014b).

Parmi les modèles à volatilité endogène, deux classes ont particulièrement attiré l'attention des chercheurs ces dernières décennies : le modèle *ARCH* à seuil en puissance (appelé aussi *ARCH* asymétrique en puissance, δ -*TARCH*) et le modèle autorégressif à coefficients aléatoires (*RCA*). Le premier est un modèle de volatilité *pur* tandis que le second est à la fois de moyenne et de volatilité conditionnelles.

Spécifiquement, la classe des modèles δ -*TARCH* est préconisée pour la représentation de l'effet de Taylor, de l'effet de levier ainsi que l'épaisseur des queues à une amplitude plus grande que celle reproduite par un (*G*)*ARCH* standard. Une façon naturelle d'introduire l'asymétrie (dans la variabilité) consiste à faire dépendre la volatilité du signe des valeurs passées du processus observé. Ce type de formulation a été considéré par plusieurs auteurs. En particulier, on peut citer le modèle *GJR-GARCH* proposé par Glosten et *al*, (1993) et le modèle *GARCH* à seuil (*TGARCH*) introduit par Rabemananjara et Zakoïan (1993). Ces derniers auteurs ont suggéré la modélisation de l'écart-type conditionnel au lieu de la variance conditionnelle. Certains auteurs ont proposé des familles de modèles *GARCH* regroupant plusieurs modèles prenant en compte l'effet de levier. Parmi les travaux qui ont été menés dans ce sens, nous pouvons citer le modèle *GARCH* en premier-ordre (first-order *GARCH*) introduit par Hentschel (1995). Motivés par les transformations de Box-Cox (1964), Higgins et Bera (1992) ont introduit le modèle *ARCH* en puissance (Power *ARCH*) afin de tenir compte de l'effet de Taylor (voir aussi Bera et *al*, 1992-1996). La nouveauté de ce modèle réside dans l'introduction d'un paramètre puissance δ qui caractérise la dépendance plutôt dans les puissances des valeurs du processus observable. Du point de vue empirique le fait que les valeurs absolues des rendements ont souvent une corrélation plus forte que leurs carrés (Taylor, 1986) a conduit les auteurs à se demander si une modélisation de la volatilité fondée sur les carrés des innovations passées ou ses valeurs absolues peut imiter de façon adéquate la réalité. En se basant sur ce fait empirique, plusieurs auteurs ont justifié l'insertion du paramètre puissance δ pour rendre la modélisation plus flexible. En outre, Ding et *al* (1993)

ont proposé le modèle *ARCH* asymétrique en puissance (*ARCH* asymétrique en puissance : *APARCH*, δ -*TARCH*) comme une extension asymétrique du modèle de Higgins et Bera (1992), tenant ainsi compte à la fois de l'effet de Levier et l'effet de Taylor. Récemment, Hwang et Kim (2004) ont en donné une formulation équivalente (voir aussi Li et Li, 1996 ; Hwang et Woo, 2001 ; Granger, 2005).

Par ailleurs, la classe des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (*RCA*) a connu une résurgence d'intérêt cette dernière décennie. Les premières investigations concernant cette classe de modèles sont dûes à Conlisk (1974-1976), Andel (1976) et Nicholls et Quinn (1982) qui les considéraient en tant que modèles de moyenne conditionnelle purs, les utilisant uniquement pour des fins de représentation et de prévision "des valeurs". Actuellement, le modèle *RCA*, étant considéré également comme modèle de volatilité, est aussi exploité dans la représentation et ainsi la prévision de la variabilité des valeurs. Cependant, comparé aux modèles (*G*)*ARCH*, le modèle *RCA* a relativement reçu moins d'attention en pratique même s'il est étroitement lié au modèle *ARCH* et représente une extension du modèle de mélange d'autorégressions (Wong et Li, 2000) et de l'autorégressif à changement de régime Markovien (Hamilton, 1989-1990) au cas où le coefficient aléatoire n'est pas astreint à être à valeurs finies. En particulier, un modèle *RCA* typique, appelé aussi standard ou symétrique, est une autorégression dans laquelle le coefficient autorégressif est un terme d'un processus aléatoire qui est supposé indépendant ou du moins non corrélé avec le processus d'innovations (Robinson, 1978 ; Nicholls et Quinn, 1980-1982 ; Quinn, 1982 ; Quinn et Nicholls, 1981 ; Schick, 1996 ; Vaněček, 2006 ; Aue et al, 2006 ; Berkes et al, 2009, Aue et Horváth, 2011, Zhaho et Wang, 2012-2013 ; Truquet et Yao, 2012 ; Aknouche et al, 2011 ; Aknouche, 2013a-2015a, etc).

L'inférence statistique des deux classes de modèles mentionnés à savoir le modèle δ -*TARCH* et le modèle *RCA* symétrique a donné lieu à une littérature surabondante. Différentes méthodes ont été développées telles que la méthode des moindres carrés ordinaires, la méthode *M*, la méthode des moindres déviations absolues et les méthodes Bayésiennes (ex. Nicholls et Quinn, 1982 ; Pantula, 1988 ; Hwang et Bassawa, 1998 ; Peng et Yao, 2003 ; Bose et Mukherjee, 2003 ; Janečková et Prášková, 2004 ; Wang et Ghosh, 2008 ; Mukherjee, 2008 ; Preminger et Storti, 2014), mais la méthode du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (*QMLE*) a suscité le plus d'intérêt (voir ex. Straumann, 2004 ; Mikosch et Straumann, 2006 ;

Bardet et Wintenberger, 2009 ; Francq et Zakoïan, 2010 ; Aue et Horváth, 2011) en raison de ses bonnes propriétés statistiques, telles que la consistance et la normalité asymptotique (*CAN*). Cependant, la normalité asymptotique de l'estimateur du *QML* gaussien fut établie sous des conditions très restrictives sur les moments du processus observé et de l'innovation, ce qui réduit considérablement l'espace paramétrique d'une part et exclut d'autre part les distributions à queues lourdes qui caractérisent les séries financières. Dans le but d'alléger ces conditions fortes, plusieurs études ont été effectuées dans ce sens et après une longue série de travaux (voir ex. Francq et Zakoïan, 2010 ; Aknouche, 2012a ; Aknouche, 2014a), des chercheurs ont abouti à établir la convergence et normalité asymptotique de l'estimateur *QMLE* gaussien sans aucune condition sur les moments du processus observé et même en dehors du domaine de stabilité (non existence de l'effet lame de couteau). Cependant, la normalité asymptotique du *QMLE* gaussien nécessite l'existence des moments d'ordre 4 du processus d'innovations, ce qui peut exclure certaines distributions à variances infinies. D'autre part, d'un point de vue purement numérique, l'estimateur du *QML* gaussien pour ces deux classes de modèles (δ -*TARCH* et *RCA* symétrique) souffre du fait que la fonction de vraisemblance n'est pas linéaire par rapport aux paramètres en dépit de la linéarité de la moyenne et de la variance conditionnelle, ce qui nécessite le recours à des procédures d'optimisation numérique assez encombrantes, notamment pour des modèles à ordres assez élevés. Si l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance non-gaussien (généralisé, *GQMLE*) calculé sur la base d'une distribution instrumentale donnée (Laplace, Student, Cauchy...) est préférable au *QMLE* gaussien pour remédier au problème d'existence des moments des innovations, il demeure néanmoins numériquement assez encombrant.

Exploitant la linéarité par rapport aux paramètres des deux premiers moments conditionnels des modèles δ -*TARCH* et *RCA* symétrique, l'objectif de cette thèse est de proposer pour ces deux classes de modèles des procédures d'inférence basées sur le principe des moindres carrés pondérés en "multi-étapes" : deux étapes (*2SWLS*) pour le modèle δ -*TARCH* et quatre étapes (*4SWLS*) pour le modèle *RCA* symétrique. Ces étapes comprennent des étapes préliminaires permettant d'avoir un estimateur convergent sans aucune condition sur les moments du processus observé ainsi que des étapes d'amélioration d'efficacité des estimateurs préliminaires. Les estimateurs proposés : *i*) ont une forme explicite à l'encontre du *QMLE* gaussien et donc sont numériquement nettement plus efficaces, *ii*) sont convergents

et asymptotiquement gaussiens sans aucune condition sur les moments du processus observé (et même en dehors de la région de stabilité), *iii*) ont des propriétés statistiques asymptotiques (dans le sens de variances asymptotiques) meilleures ou égales à celles du *QMLE* gaussien et enfin *iv*) relativement à plusieurs simulations, ont des propriétés finies meilleures que celles du *QMLE* (gaussien ou non). Spécifiquement :

a) Pour le modèle δ -*TARCH*, l'estimateur *2SWLSE* que nous proposons est fortement convergent et asymptotiquement gaussien aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la zone de stationnarité stricte (stabilité). Pour certaines valeurs de la puissance, l'estimateur *2SWLSE* a la même efficacité relative que le *QMLE* gaussien, mais pour d'autres il en est plus efficace. En particulier, il peut être convergent et asymptotiquement gaussien pour des innovations à queues lourdes et même à variance infinie. En outre, nous comparons asymptotiquement et en échantillons finis la méthode *2SWLS* avec d'autres estimateurs proposés dans la littérature : l'estimateur des moindres carrés ordinaires, l'estimateur *QMLE* gaussien et l'estimateur *QMLE* non gaussien (généralisé). Enfin, nous proposons des tests consistants de stationnarité stricte et de symétrie du modèle.

b) Pour le modèle *RCA* symétrique, deux variantes de l'estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes (*4SWLS1* et *4SWLS2*) sont proposées et jouissent d'une forme explicite contrairement à la méthode du *QML* (gaussien et non-gaussien). De plus, les estimateurs *4SWLS1* et *4SWLS2* sont consistants et asymptotiquement gaussiens à l'intérieur et à l'extérieur du domaine de stabilité. Le *4SWLS1* a la même variance asymptotique que l'estimateur *QMLE* gaussien mais le *4SWLSE2* n'a la même efficacité que *4SWLSE1* que sous l'hypothèse de normalité du modèle *RCA*. Les deux estimateurs *4SWLS1* et *4SWLS2* ont été comparés en échantillons finis avec l'estimateur *QMLE* gaussien et ont donné lieu à de meilleures *RMSE* (root mean square error) en des temps de calcul très raisonnables.

0.2 Présentation et apports de la thèse

Notre thèse intitulée : "Inférence statistique sans contrainte de stabilité pour des modèles à volatilité linéaire des paramètres" est composée de deux parties dont chacune contient 3 chapitres et une conclusion.

Partie I : Inférence statistique du modèle $ARCH$ à seuil en puissance basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en deux étapes

Chapitre 1 : Structure dynamique du modèle $ARCH$ à seuil en puissance

Avant d'entamer le problème d'inférence statistique du modèle $\delta-TARCH$ qui fera l'objet du Chapitre 2, nous présentons dans ce Chapitre le modèle $\delta-TARCH$ ainsi que ses différentes relations avec d'autres modèles de séries chronologiques tels que : modèle $ARCH$ classique, modèle $ARCH$ à seuil ($TARCH$) et modèle $ARCH$ en puissance ($\delta-ARCH$). La deuxième Section de ce Chapitre est consacrée essentiellement aux rappels sur les propriétés probabilistes (voir Pan et al, 2008 ; Gonçalves et al, 2012) du modèle telles que : l'existence de solution stationnaire avec ou sans des moments d'ordres supérieurs finis, ainsi que le comportement asymptotique du processus observé par rapport à la condition de stabilité.

Chapitre 2 : Inférence statistique du modèle $ARCH$ à seuil en puissance basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en deux étapes

L'objectif de ce Chapitre est de proposer un estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes ($2SWLSE$) pour le modèle $\delta-TARCH$ et en guise d'application, de développer des tests consistants de stationnarité stricte et de symétrie pour ce modèle. Nous rappelons d'abord les principaux résultats concernant les propriétés asymptotiques des estimateurs OLS (moindres carrés ordinaires) et QML obtenus par Hamadeh et Zakoïan (2011). Nous établissons ensuite les propriétés asymptotiques de $2SWLSE$ indépendamment de la condition de stabilité. Nous proposons de plus, un estimateur consistant de la variance asymptotique de l'estimateur $2SWLS$ dans les deux cas stationnaire et non-stationnaire, ce qui nous permettra par la suite d'appliquer les tests de stationnarité stricte et de symétrie. En dernier lieu, nous comparons l'efficacité de $2SWLSE$ avec celle de $OLSE$ et $QMLE$ gaussien et généralisé asymptotiquement et en échantillons finis en se basant sur une étude de simulation sur plusieurs distributions à queues fines et lourdes.

Chapitre 3 : Preuves des résultats du Chapitre 2

Notre objectif dans ce Chapitre est de donner les détails des démonstrations des différents résultats que nous avons proposés dans le Chapitre 2.

Partie II : Inférence statistique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires (*RCA*) basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en quatre étapes

Chapitre 4 : Structure dynamique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique (*RCA*)

Après avoir décrit le modèle *AR* à coefficients aléatoires symétrique (*RCA*), nous passons en revue ses différentes interactions avec quelques modèles de séries chronologiques, tels que : modèle *AR* classique, modèle autorégressif double (*DAR*), modèle *ARCH*, modèle bilinéaire markovien (*MBL*) et modèle *AR* à changement de régime markovien (*MS-AR*). Dans la dernière Section de ce Chapitre nous rappelons les propriétés probabilistes (voir Nicholls et Quinn, 1982 ; Feigin et Tweedie, 1985 ; Tsay, 1987 ; Bougerol et Picard, 1992a ; Goldie et Maller, 2000 ; Cline et Pu, 2002 ; Aue et *al*, 2006) du modèle telles que : les conditions d'existence de solutions stationnaires (stricte ou avec moments d'ordres supérieurs) et les propriétés de stabilité du modèle, qui nous seront utiles dans le Chapitre 5.

Chapitre 5 : Inférence statistique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires (*RCA*) basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en quatre étapes

Ce Chapitre concerne le problème d'estimation des paramètres du modèle autorégressif à coefficients aléatoires (*RCA*) symétrique. Après avoir rappelés les principaux résultats relatifs à l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (Aue et Horváth, 2011), nous proposons, dans un premier temps, un estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes ainsi que ses propriétés asymptotiques indépendamment de la condition de stationnarité stricte. De plus, nous proposons une autre méthode d'estimation par moindres carrés pondérés en quatre étapes basée sur l'estimateur de Schick (1996). Finalement, nous effectuons une comparaison en échantillons finis de ces deux estimateurs avec la méthode du quasi-maximum de vraisemblance gaussien, en se basant sur une étude de simulation.

Chapitre 6 : Preuves des résultats du Chapitre 5

Ce Chapitre est consacré aux démonstrations des différents résultats que nous avons proposés dans le Chapitre 5.

Première partie

Inférence statistique du modèle
ARCH à seuil en puissance basée sur
l'approche des moindres carrés
pondérés en deux étapes

Chapitre 1

Structure dynamique du modèle *ARCH* à seuil en puissance

1.1 Introduction

Le modèle *ARCH* introduit par Engle (1982) et sa généralisation proposée par Bollerslev (1986), ont connu un grand succès dans la littérature économétrique dès lors qu'ils permettent de reproduire les trajectoires des séries financières caractérisées par des périodes calmes, suivies de périodes agitées. Ils ont également les propriétés de *leptokurticité* des distributions marginales (queues plus épaisses que pour les lois gaussiennes) et la propriété de dépendance sans corrélation. Cependant, diverses limitations de ces modèles ont motivé d'autres auteurs à proposer des généralisations afin d'augmenter leur flexibilité. Une première classe d'extensions a visé la prise en compte d'asymétrie. Nelson (1991) a proposé le modèle *EGARCH* (Exponentiel *GARCH*) où un choc négatif affectait la variabilité différemment d'un choc positif. Indépendamment, Zakoïan (1994) a élaboré le modèle à seuil *TARCH* qui consiste à incorporer une indicatrice auprès des variables qui modélisent la volatilité afin de séparer l'effet positif de l'effet négatif. Glosten et al, (1993) ont aussi proposé le modèle *GJR-GARCH*, tandis que Rabemananjara et Zakoïan (1993) ont introduit le modèle *GARCH* à seuil (*TGARCH*) qui consiste à modéliser l'écart-type conditionnel au lieu de la variance conditionnelle. Parmi d'autres recherches qui ont été dirigées dans ce sens, on trouve le modèle *GARCH* en premier-ordre (first-order *GARCH*) proposé par Hentschel (1995) et le modèle *ARCH* à seuil en puissance (δ -*TARCH*).

Motivés par la transformation de Box-Cox, Higgins et Bera (1992) ont introduit le modèle *ARCH* en puissance (δ -ARCH). Dans ce modèle, l'écart-type conditionnel élevé à une puissance était exprimé comme fonction linéaire de ses valeurs passées et les valeurs passées du processus observé élevées à la même puissance. Ding et *al*, (1993) et Hwang et Kim (2004) ont proposé le modèle *ARCH* à seuil en puissance (δ -TARCH) comme une extension asymétrique du modèle de Higgins et Bera (1992). Le modèle δ -TARCH a connu un intérêt particulier cette dernière décennie en raison de son aptitude à représenter adéquatement certains traits de séries financières, notamment *l'effet de levier* et *l'effet de Taylor* (Taylor, 1986 ; Granger, 2005), la persistance dans la volatilité et distributions marginales à queues lourdes. En effet, la distribution marginale de ce modèle qui peut être considérée comme un mélange spécifique de modèles δ -ARCH, permet la représentation des queues qui sont plus épaisses que celles générées par un modèle *ARCH* standard (voir Kesten, 1973 ; Goldie, 1991 ; de saporta, 2005 ; Zhang et *al*, 2006 ; Linton et *al*, 2010 ; Ghosh et *al*, 2010). En pratique, cette propriété est fortement souhaitable pour un modèle de volatilité.

Du moment que l'objectif de la première partie de cette thèse est d'étudier le problème d'inférence des modèles *ARCH* à seuil en puissance, nous consacrons alors ce présent Chapitre à une présentation générale du modèle δ -TARCH, puis nous donnons la relation de ces modèles avec d'autres classes connues de modèles de séries chronologiques. La dernière Section de ce Chapitre est consacrée à la présentation de la structure probabiliste du modèle δ -TARCH. En effet, nous mettons le modèle sous une forme vectorielle adéquate (voir Pan et *al*, 2008 ; Gonçalves et *al*, 2012) qui permettra ensuite d'établir des conditions d'existence de solution stationnaire avec ou sans des moments d'ordres supérieurs finis. Enfin, le comportement asymptotique du modèle δ -TARCH est étudié en fonction de sa stabilité.

1.2 Certains traits connus des séries financières

La modélisation des séries financières est un problème complexe. Cette complexité tient essentiellement à l'existence de régularités statistiques communes à un très grand nombre de séries financières et difficiles à reproduire à partir de modèles stochastiques.

De nombreuses études empiriques initiées par Mandelbrot (1963) ont souligné que la plu-

part des séries financières ont tendance à exhiber des comportements statistiques caractéristiques. Nous passons en revue les principales propriétés des séries financières de rendements (actions, indice de taux de change) et des prix, ce qui nous permettra au passage d'introduire un certain nombre de définitions essentielles.

- Dépendance sans corrélations

On constate que les termes d'une série (d'un rendement financier) ont tendance à être (empiriquement) non-corrélés tandis que leur carrés ou leurs valeurs absolues sont souvent fortement corrélées. Cette propriété n'est pas incompatible avec l'hypothèse que la série est un bruit blanc fort mais démontre simplement que le bruit blanc n'est pas indépendant. Il y a ainsi une dépendance sans corrélation.

- Distribution marginale à queues lourdes : leptokurticité

Lorsque l'on considère les distributions empiriques de séries de rendements ou de variations de prix, on s'aperçoit généralement que celles-ci ne correspondent pas à une distribution gaussienne. L'hypothèse de normalité est généralement rejetée. Plus précisément, les distributions empiriques de ces séries présentent généralement des queues plus épaisses que celles d'une loi normale et des pics en zéro. On parle alors de distribution *leptokurtique*. Une mesure de cet effet est obtenue à partir du coefficient de *kurtosis*, rapport du moment empirique centré d'ordre 4 et du carré de la variance empirique, qui est asymptotiquement égal à 3 dans le cas gaussien (queue plate), s'il excède 3 (queue épaisse) la distribution est dite *leptokurtique* et s'il est inférieur à 3, la distribution est dite *platikurtique*.

- Regroupement d'extrêmes (volatility clustering)

Une propriété importante observée généralement sur les séries financières est le phénomène de regroupement des extrêmes : le fait qu'il semble y avoir des périodes de forte volatilité et d'autres de volatilité plus faible. Ce regroupement des volatilités par paquets est entièrement dû aux corrélations des séries financières. À cause de celles-ci, un grand mouvement, correspondant à une forte volatilité a des chances d'être suivi par un mouvement de même ampleur (mais pas nécessairement dans le même sens), de même pour un mouvement de faible amplitude.

- Effet de levier

Black (1976) a enrichi l'ensemble des caractéristiques communes aux séries financières, en introduisant un trait dit "effet de levier". Black (1976) a remarqué une asymétrie entre l'effet des valeurs passées négatives et celui des valeurs passées positives de même ampleur sur la volatilité des cours ou de rendements. Les baisses de cours tendent à engendrer une augmentation de la volatilité supérieure à celle induite par une hausse des cours de même ampleur (voir Sentana, 1995 ; Francq et Zakořan, 2010 ; Aknouche, 2012b).

- Effet de Taylor

Taylor (1986) a observé que les autocorrélations empiriques des valeurs absolues des rendements sont souvent plus importantes que celles des rendements aux carrés.

- Persistance de volatilité (longue mémoire)

Ce concept, introduit par Hurst (1951) alors qu'il cherchait à modéliser les crues du Nil, caractérise une persistance à long terme des autocorrélations d'une série temporelle. On parle alors de décroissance hyperbolique de la fonction d'autocorrélation. En finance, les séries de volatilité journalière présentent de la mémoire longue, dite aussi "persistance".

1.3 Présentation générale du modèle ARCH à seuil en puissance

Un processus stochastique $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{N})$ à valeurs réelles est dit admettre une représentation ARCH à seuil en puissance d'ordre q (δ -TARCH(q)) s'il est donné par l'équation stochastique suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t^{\frac{1}{\delta}}(\theta) \eta_t \\ h_t(\theta) = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_{+,j}(\varepsilon_{t-j}^+)^{\delta} + \alpha_{-,j}(\varepsilon_{t-j}^-)^{\delta} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (1.3.1)$$

où $q \in \mathbb{N}^*$, δ est une constante positive connue, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{1-q}$ sont des constantes arbitrairement fixées. $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = -\min(x, 0)$. On suppose également que

(A1) : $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus indépendant et identiquement distribué (*iid*) avec

$$E(|\eta_1|^{\delta}) = 1, P(|\eta_1|^{\delta} = 1) < 1.$$

Dans ce qui suit, tous les processus et variables aléatoires présentés dans ce Chapitre sont définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N})$, $\mathcal{F}_t$ étant la σ -algèbre engendrée par $\{\eta_s, s \leq t\}$.

Le vecteur des paramètres $\theta = (\omega, \alpha_{+,1}, \alpha_{-,1}, \dots, \alpha_{+,q}, \alpha_{-,q})' \in \Theta \subset \mathbb{R}^{2q+1}$ est tel que $\omega > 0$, $\alpha_{+,j} \geq 0$, $\alpha_{-,j} \geq 0$, $(1 \leq j \leq q)$. Pour le cas spécial $q = 1$ que nous considérerons en particulier dans le cas de non stationnarité stricte, le paramètre θ s'écrit tout simplement : $\theta = (\omega, \beta')'$ avec $\beta = (\alpha_+, \alpha_-)'$.

Notons qu'à travers les coefficients $\alpha_{+,j}$ et $\alpha_{-,j}$, la volatilité présente dépend à la fois du module et du signe des innovations passées. De plus, l'asymétrie diffère selon l'écart j entre la $j^{\text{ème}}$ date passée et la date présente. Il est utile de noter que η_1 n'est pas nécessairement centrée.

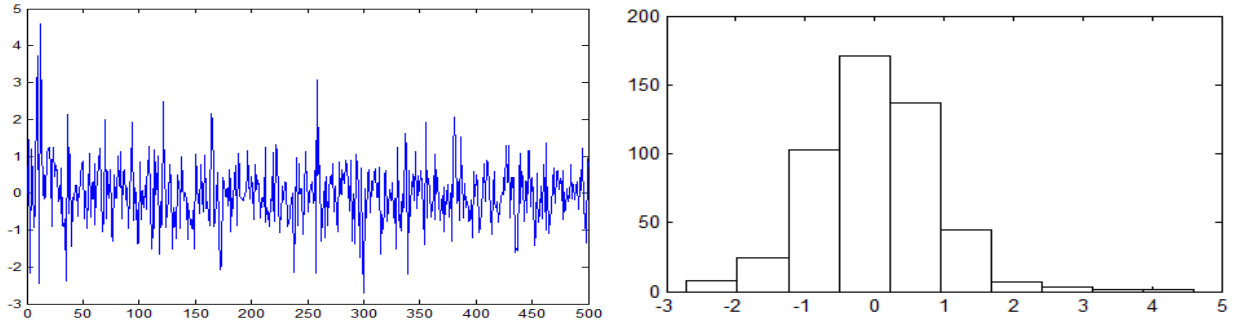


Figure 1.3.1a. Histogramme et trajectoire simulée d'un modèle δ -TARCH(1) généré à partir de $\theta = (0.5, 0.2, 0.3, 2, 500)$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$.

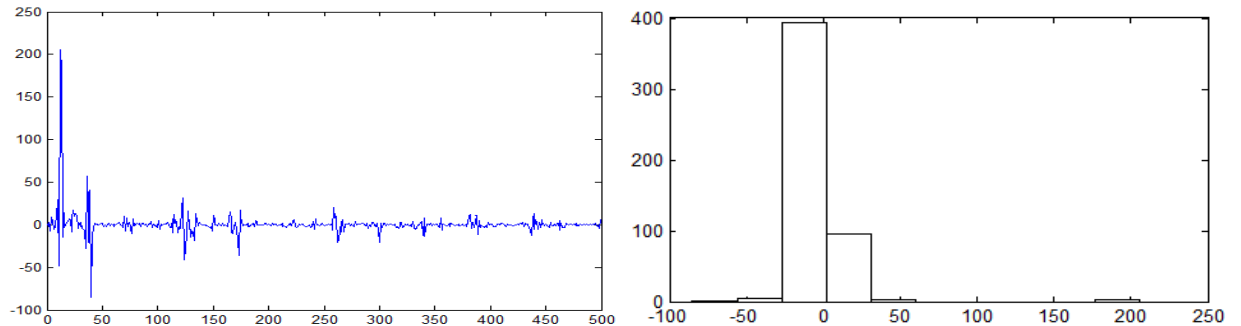


Figure 1.3.1b. Histogramme et trajectoire simulée d'un modèle δ -TARCH(1) généré à partir de $\theta = (1, 1.5, 2, 2, 500)$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$.

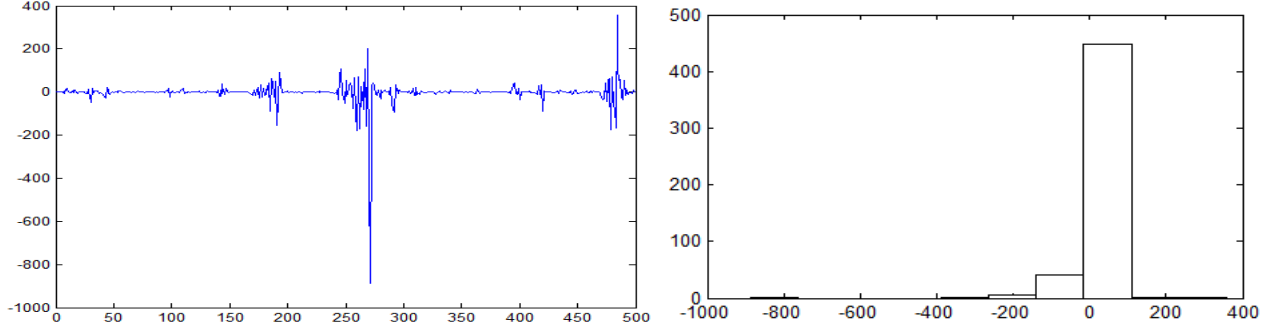


Figure 1.3.1c. Histogramme et trajectoire simulée d'un modèle δ -TARCH(1) généré à partir de $\theta = (1, 1.8, 2.2, 2, 500)$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$.

Les Figures 1.3.1 montrent des trajectoires simulées d'un δ -TARCH(1) avec leurs histogrammes. Il est facile de remarquer que même pour des valeurs α_+ et α_- très éloignées l'une de l'autre, les distributions marginales empiriques ont une allure de symétrie, chose non surprenante puisque le modèle permet une asymétrie seulement dans la variabilité, non dans le niveau. Pour apprécier ce type d'asymétrie, le Tableau 1.3.1 affiche les corrélations croisées empiriques $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ entre y_t^2 et $y_{t-h}^- = -\min(0, y_{t-h})$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ entre y_t^2 et $y_{t-h}^+ = \max(0, y_{t-h})$ pour des séries δ -TARCH(1) simulées. Il est clair que pour la plupart des retards h , $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ est plus important que $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$, ce qui est indicatif de l'effet de Levier.

h	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$
1	-0.6075	-0.1438
2	-0.2039	-0.0657
3	0.0090	0.0003
4	0.0488	-0.0078
5	0.0189	-0.0237
6	0.0214	0.0018

Tableau 1.3.1. Corrélations empiriques croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ pour des séries δ -TARCH(1) avec $\delta = 1$ et $(\omega, \alpha_+, \alpha_-) = (1, 0.01, 0.9)$.

Pour simplifier l'étude d'existence de solutions de (1.3.1), on peut considérer la version bilatérale de (1.3.1) correspondant à $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$. Dans ce cas $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t^{\frac{1}{\delta}}(\theta) \eta_t \\ h_t(\theta) = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_{+,j}(\varepsilon_{t-j}^+)^{\delta} + \alpha_{-,j}(\varepsilon_{t-j}^-)^{\delta} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3.2)$$

où les hypothèses du modèle (1.3.1) en seront adaptées.

1.4 Relation du modèle δ -TARCH avec d'autres modèles de séries chronologiques

Le modèle (1.3.1) est très général et possède plusieurs représentations non linéaires et asymétriques introduites dans la littérature. On cite à titre d'exemples quelques cas.

1.4.1 Relation avec le modèle ARCH

Lorsque $\delta = 2$ et $\alpha_{+,j} = \alpha_{-,j}$, le modèle (1.3.1) se réduit au modèle ARCH introduit par Engle (1982), dont la forme est donnée par :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sqrt{h_t(\theta)} \eta_t, \\ h_t(\theta) = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3.3)$$

où $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires *iid* de variance unité.

1.4.2 Relation avec le modèle ARCH en puissance (δ -ARCH)

Lorsque $\alpha_{+,j} = \alpha_{-,j}$, $j = 1, \dots, q$, le modèle (1.3.1) se réduit au modèle δ -ARCH(q) proposé par Higgins et Berra (1992). Dans ce modèle, l'écart type conditionnel élevé à une puissance δ est exprimé comme fonction linéaire des valeurs passées du processus observé élevées à la même puissance. Ce modèle est donné par l'équation stochastique suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t^{\frac{1}{\delta}}(\theta) \eta_t, \\ h_t(\theta) = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j |\varepsilon_{t-j}|^\delta, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3.4)$$

où $\omega > 0$, $\alpha_j > 0$, $(1 \leq j \leq q)$ et $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires *iid* avec $E |\eta_1|^\delta = 1$.

1.4.3 Relation avec le modèle ARCH à seuil (TARCH)

Lorsque $\delta = 2$, le modèle (1.3.1) se réduit au modèle TARCH (Zakoïan, 1994) donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sqrt{h_t(\theta)} \eta_t, \\ h_t(\theta) = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_{+,j} (\varepsilon_{t-j}^+)^2 + \alpha_{-,j} (\varepsilon_{t-j}^-)^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3.5)$$

où $\omega > 0$, $\alpha_{+,j} \geq 0$, $\alpha_{-,j} \geq 0$, ($1 \leq j \leq q$) et $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires *iid*.

1.5 Structure probabiliste du modèle ARCH à seuil en puissance (δ -TARCH(q))

Avant d'entamer le problème d'inférence statistique du modèle (1.3.2), il convient de rappeler dans cette Section les propriétés probabilistes de ce modèle. En se basant sur le travail de Bougerol et Picard (1992b), Pan et *al* (2008) et Gonçalves et *al* (2012) ont étudié la stationnarité stricte du modèle (1.3.2). En effet, leur étude consiste à écrire le modèle (1.3.2) sous une forme vectorielle adéquate, qui leur permettra ensuite d'établir des conditions d'existence et d'unicité d'une solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique ainsi que les conditions d'existence des moments d'ordre supérieurs (voir aussi Hwang et Basawa, 2004 ; Gonçalves et Mendes-Lopes, 1994-1996-2010 ; Karanasos et Kim, 2006 ; Bellini et Bottolo, 2007).

Gonçalves et *al* (2012) se sont inspirés de l'idée présentée dans Mittinik et *al* (2002), en considérant un processus stochastique vectoriel de $\mathbb{R}^q$; $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$, défini comme suit :

$$\begin{cases} Y_t^{(1)} = h_t^\delta \\ Y_t^{(k)} = \sum_{j=k}^q [\alpha_{+,j} (\varepsilon_{t-j+k-1}^+)^{\delta} + \alpha_{-,j} (\varepsilon_{t-j+k-1}^-)^{\delta}] , \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (1.5.1)$$

Ce processus vérifie l'équation aux récurrences suivante :

$$Y_{t+1} = A_t Y_t + B, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.5.2)$$

où $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite de matrices aléatoires *iid* d'ordre q , définies par

$$A_t = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{q-1} [\alpha_{+,j}(\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_{-,j}(\eta_t^-)^{\delta}] e_j & I_{q-1} \\ \alpha_{+,q}(\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_{-,q}(\eta_t^-)^{\delta} & 0'_{q-1} \end{bmatrix},$$

B est un vecteur déterministe de $\mathbb{R}^q$ défini par :

$$B = \begin{bmatrix} we_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et $e_1, \dots, e_{q-1}$ représente la base canonique de $\mathbb{R}^{q-1}$; I_{q-1} étant la matrice identité d'ordre $q-1$ et 0_{q-1} est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{q-1}$.

1.5.1 Existence de solutions stationnaires (au sens strict et au second-ordre) de l'équation δ -TARCH

La stationnarité stricte du modèle (1.3.2) découle de l'existence d'une solution strictement stationnaire de l'équation (1.5.2). Gonçalves et al, (2012) ont montré que le modèle (1.3.2) possède une solution non-anticipative strictement stationnaire si et seulement si le plus grand exposant de Lyapunov associé à la suite de matrices $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ est strictement négatif. Cette condition est connue aussi sous le nom de condition de stabilité par rapport à la stationnarité stricte.

Rappelons que le plus grand exposant de Lyapunov associé à la suite $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ de matrices aléatoires *iid* tel que $\mathbb{E}(\log^+ \|A_0\|) < \infty$ est défini par :

$$\gamma = \inf_{t \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \log \| A_0 A_{-1} \dots A_{-t} \| \right),$$

$$\stackrel{p.s.}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \| A_0 A_{-1} \dots A_{-t} \|.$$

De plus, d'après Bougerol et Picard (1992a, Lemma 2.1), on sait que si $\lim_{t \rightarrow \infty} \| A_0 A_{-1} \dots A_{-t} \| = 0$ presque sûrement, alors le plus grand exposant de Lyapunov associé à la suite $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ est strictement négatif.

Sous l'hypothèse suivante :

(H2) : La suite $\left(\frac{1}{t} \log \| A_0 A_{-1} \dots A_{-t} \| \right)_{t \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une constante strictement négative γ .

Gonçalves et al, (2012) ont proposé les théorèmes suivants qui proposent une condition nécessaire et suffisante pour la stationnarité stricte du modèle (1.3.2).

Théorème 1.5.1 (Gonçalves et al, 2012)

*Si la suite $(\frac{1}{t} \log \| A_0 \dots A_{-t} \|)_{t \in \mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse **H2** alors il existe une solution $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ non-anticipative unique, strictement stationnaire et ergodique, pour le modèle δ -TARCH donné par (1.3.2). $\square$*

Théorème 1.5.2 (Gonçalves et al, 2012)

Sous $E(\log^+ \| A_0 \|) < +\infty$, s'il existe une solution unique non-anticipative, strictement stationnaire et ergodique $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ pour le modèle δ -TARCH (1.3.2) alors la suite

$$\left(\frac{1}{t} \log \| A_0 \dots A_{-t} \| \right)_{t \in \mathbb{N}},$$

*vérifie l'hypothèse **H2**. $\square$*

Remarque 1.5.1

*Si la suite de matrices $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ en relation avec le modèle δ -TARCH satisfait $E(\log^+ \| A_0 \|) < +\infty$, alors l'hypothèse **H2** est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité d'une solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique pour le modèle (1.3.2).*

Corollaire 1.5.1 (Gonçalves et al, 2012)

Si

$$E\{\log[\alpha_{+,m}(\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_{-,m}(\eta_t^-)^{\delta}]\} < \infty,$$

alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité d'une solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique de l'équation δ -TARCH avec $E(\varepsilon_t^m) < \infty$,

est que

$$E\{\log[\alpha_{+,m}(\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_{-,m}(\eta_t^-)^{\delta}]\} < 0.$$

□

Une condition nécessaire pour l'existence d'une solution strictement stationnaire du modèle (1.3.2) est donnée dans le Théorème suivant, dont la démonstration suit les mêmes étapes que le Corollaire 2.3 de Bougerol et Picard (1992b).

Théorème 1.5.3 (Gonçalves et al, 2012)

Soit $E(\log^+ \|A_0\|) < \infty$; le modèle δ -TARCH présenté par (1.3.2) admet une solution strictement stationnaire si :

$$\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1.$$

□

1.5.2 Existence des moments d'ordre supérieurs du processus δ -TARCH

Pan et al, (2008) et Gonçalves et al, (2012) ont étudié les conditions d'existence des moments d'ordre supérieurs pour le processus solution $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ du modèle (1.3.2).

Théorème 1.5.4 (Gonçalves et al, 2012)

Sous l'hypothèse $E(|\eta_1|^{\delta}) < +\infty$ et $p(\eta_t = 0) \neq 1$; $E(|\varepsilon_1|^{\delta})$ existe et est indépendante de t si et seulement si

$$\sum_{j=1}^q (\alpha_{+,j} E[(\eta_1^+)^{\delta}] + \alpha_{-,j} E[(\eta_1^-)^{\delta}]) < 1.$$

Par ailleurs, l'existence de $E(|\varepsilon_1|^{\delta})$ assure la stationnarité stricte et ainsi l'ergodicité du processus $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$. □

Corollaire 1.5.2 (Gonçalves et al, 2012)

Si $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ satisfait l'hypothèse : $E(|\eta_1|^\delta) < +\infty$ et $p(\eta_t = 0) \neq 1$; et

$$\sum_{j=1}^q (\alpha_{+,j} E[(\eta_1^+)^{\delta}] + \alpha_{-,j} E[(\eta_1^-)^{\delta}]) < 1,$$

alors, $E(|\varepsilon_1|^\delta)$ existe et est indépendante de t et on a :

$$E(|\varepsilon_1|^\delta) = \frac{\omega E((\eta_1)^\delta)}{1 - \sum_{j=1}^q (\alpha_{+,j} E[(\eta_1^+)^{\delta}] + \alpha_{-,j} E[(\eta_1^-)^{\delta}])}. \quad \square$$

1.5.3 Comportement asymptotique du processus δ -TARCH en fonction de la condition de stabilité

Les propriétés statistiques des procédures d'inférence que nous considérons dans le Chapitre suivant dépendent étroitement du comportement asymptotique de h_t ou de manière équivalente de $|\varepsilon_t|^\delta$. Ce comportement dépend à son tour de l'existence d'une solution (asymptotiquement) stationnaire de l'équation (1.3.1).

Spécifiquement, sous la condition de stationnarité stricte ($\gamma < 0$), les comportements asymptotique de $|\varepsilon_t|^\delta$ et de h_t sont caractérisés par (e.g. Vervaat, 1979; Goldie et Maller, 2000; Babillot et al, 1997),

$$h_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \omega \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \left(\alpha_+ (\eta_{i-1}^+)^{\delta} + \alpha_- (\eta_{i-1}^-)^{\delta} \right),$$

et

$$|\varepsilon_t|^\delta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \omega \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^\delta \prod_{i=1}^{j-1} \left(\alpha_+ (\eta_{i-1}^+)^{\delta} + \alpha_- (\eta_{i-1}^-)^{\delta} \right),$$

où les deux dernières séries convergent absolument presque sûrement (p.s.) sous ($\gamma < 0$).

Le comportement asymptotique de $|\varepsilon_t|^\delta$ est donné par Aknouche et Touche (2015), comme extension des résultats montrés par Nelson (1991) dans le cas d'un modèle $GARCH(1,1)$ standard et complétés par Klüppelberg et al, (2004), Tsay (2002), Francq et Zakoïan (2010-2012) (voir aussi Francq et Zakoïan, 2013b dans le cas particulier $\delta = 2$).

La proposition ci-dessous stipule que sous l'hypothèse **A1** et la condition d'instabilité ($\gamma > 0$), $|\varepsilon_t|^\delta$ et h_t divergent exponentiellement vers l'infini *p.s.*, par contre, sous ($\gamma = 0$), la divergence vers l'infini est seulement en probabilité.

Proposition 1.5.1 (Aknouche et Touche, 2015 ; Francq et Zakoïan, 2013a)

Sous A1

i) Lorsque $\gamma > 0$,

$$\rho^t h_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty,$$

où $0 < \rho < e^{-\gamma}$, et, si de plus $E(|\log(|\eta_1|^\delta)|) < \infty$, alors

$$\rho^t |\varepsilon_t|^\delta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty.$$

ii) Lorsque $\gamma = 0$,

$$h_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p} \infty,$$

et si de plus $E(|\log(|\eta_1|^\delta)|) < \infty$, alors

$$|\varepsilon_t|^\delta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p} \infty.$$

□

Exemple 1.5.1

Dans cet exemple, nous illustrons la condition de stationnarité stricte et la condition de stationnarité au second-ordre d'un δ -TARCH(1), donné par l'équation suivante

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^\delta = \omega + \alpha_+ (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_- (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z},$$

(on a pris $\sigma_t = h_t^{1/\delta}$). Donc

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \omega + \alpha_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} \sigma_{t-1}^\delta + \alpha_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta} \sigma_{t-1}^\delta, \\ &= \omega + [\alpha_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta}] \sigma_{t-1}^\delta. \end{aligned}$$

Ce qui représente une forme autorégressive généralisée (Bougerol et Picard, 1992b) de la forme

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où

$$A_t = \alpha_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta},$$

et

$$B = \omega.$$

Ainsi, la condition de stationnarité stricte et la condition de stationnarité au second-ordre dans ce cas sont données respectivement par

$$\gamma = E(\log(\alpha_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta})) < 0,$$

et

$$\alpha_+ E((\eta_1^+)^{\delta}) + \alpha_- E((\eta_1^-)^{\delta}) < 1.$$

Les Figures 1.5.1 ci-après montrent les régions de stationnarité au second ordre (I), de stationnarité stricte (I) $\cup$ (II) et la région de non-stationnarité stricte (III) pour le modèle δ -TARCH(1) pour différentes valeurs de la puissance δ et différentes lois pour η_1 . Il en ressort clairement que le domaine de stationnarité au second-ordre est strictement inclus dans le domaine de stationnarité stricte. Ainsi, comme souligné en introduction, pour ce modèle qui est à volatilité endogène, il n'y a pas invariance des propriétés probabilistes par rapport aux paramètres de moyennes conditionnelles. De plus ces domaines dépendent sensiblement de la puissance δ et de la distribution de probabilité de η_1 .

Notons enfin que d'autres propriétés probabilistes du modèle δ -TGARCH, telles que le comportement des queues de la distribution stationnaire, ont été analysées par Liu (2006).

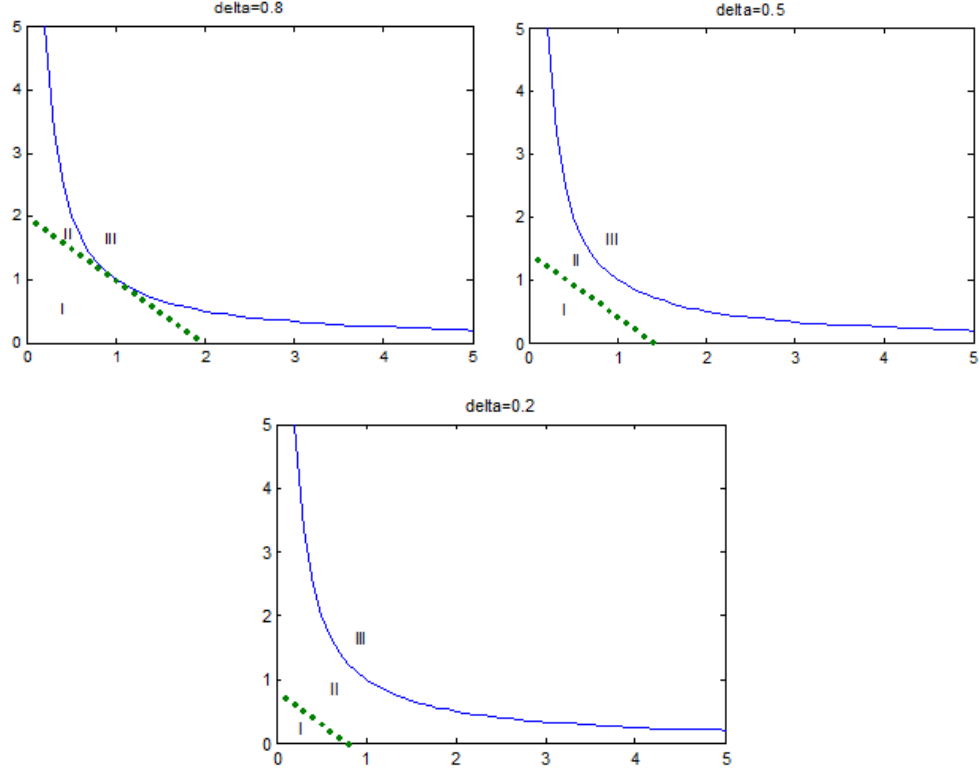


Figure 1.5.1a. Régions de stationnarité et de non-stationnarité du modèle δ -TARCH(1) pour $\delta = 0.2$, $\delta = 0.5$, et $\delta = 0.8$ avec η_1 suivant la loi de Cauchy.

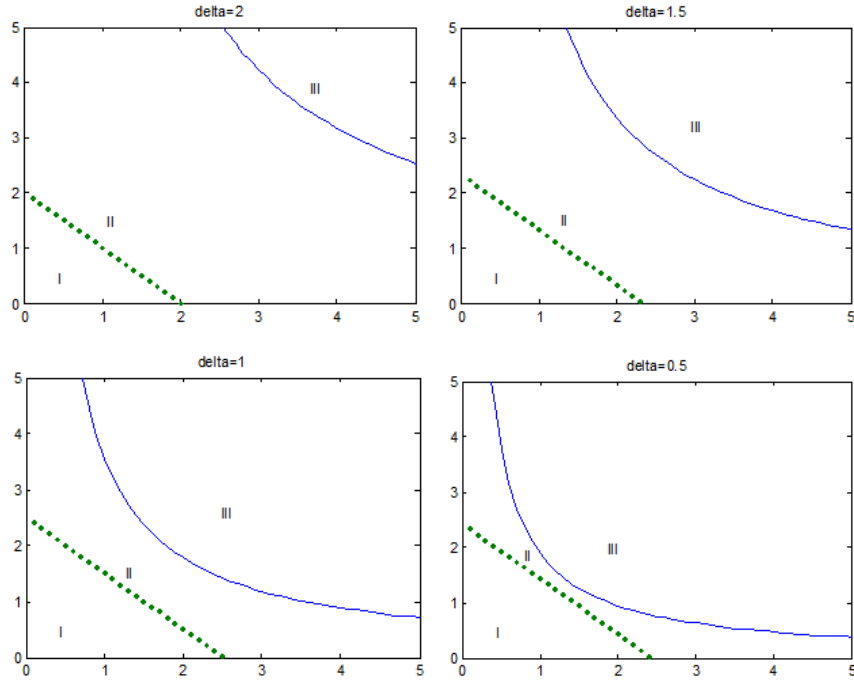


Figure 1.5.1b. Régions de stationnarité et de non-stationnarité du modèle δ -TARCH(1) pour $\delta = 0.5$, $\delta = 1$, $\delta = 1.5$ et $\delta = 2$ avec $\eta_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

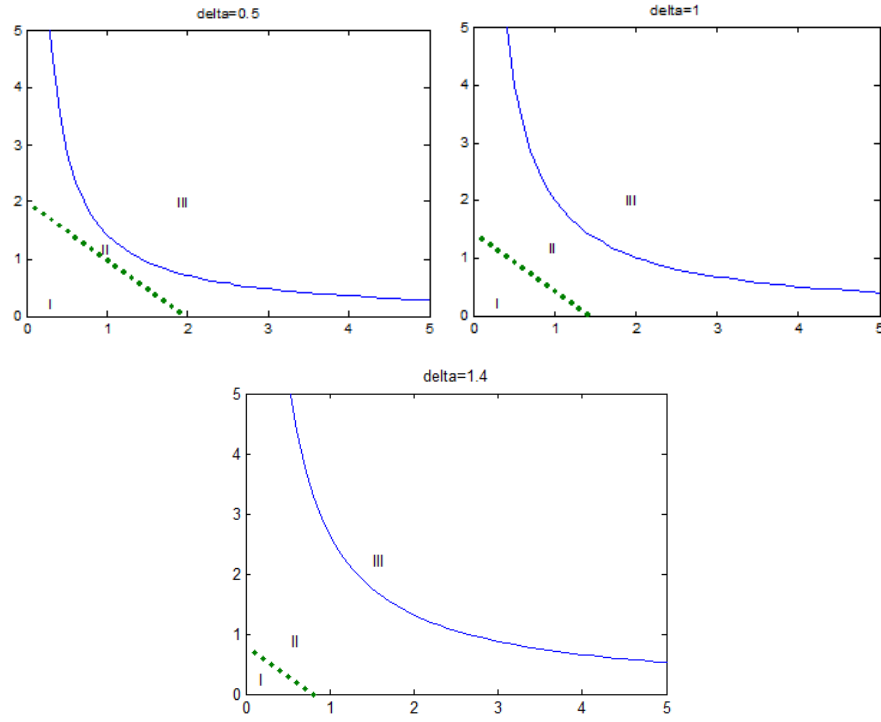


Figure 1.5.1c. Régions de stationnarité et de non-stationnarité du modèle δ -TARCH(1) pour $\delta = 0.5$, $\delta = 1$, et $\delta = 1.4$ avec $\eta_1 \sim t_4$.

Chapitre 2

Inférence statistique du modèle *ARCH* à seuil en puissance basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en deux étapes

2.1 Introduction

Depuis leur introduction, l'estimation des modèles *GARCH* a donné lieu à une littérature abondante. Plusieurs méthodes ont en été proposées. Dans le cas du modèle *ARCH*, Engle (1982) a proposé la méthode d'estimation par moindres carrés ordinaires. Les propriétés théoriques de cet estimateur ont été établies d'abord par Weiss (1984-1986) sous des conditions très restrictives sur les moments. Cette méthode ainsi que la méthode d'estimation par moindres carrés quasi-généralisée, ont été étudiées en détail par Bose et Mukherjee (2003) (voir également Gouriéroux, 1997). Elles ont l'avantage d'être semi-paramétriques : elles ne nécessitent pas la spécification d'une loi sur le processus $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$. Mais elles nécessitent d'imposer l'existence au minimum d'un moment d'ordre 8 au processus $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$. Cette hypothèse est souvent non désirée dans la pratique puisqu'elle réduit sensiblement l'espace paramétrique (voir ex. Figure, 1.5.1). La méthode du quasi-maximum de vraisemblance gaussienne (*QML*) est une méthode alternative qui a beaucoup de succès en raison de ses propriétés théoriques qui sont valides sous des conditions assez faibles. Parmi les premiers travaux ayant considéré l'estimateur du *QML*, on peut citer Weiss (1986), Lumsdaine (1996),

Lee et Hansen (1994). Plus récemment, Berkes et *al*, (2003) et Francq et Zakoïan (2004), (voir aussi Aknouche et Bibi, 2009 ; Aknouche et Al-Eid, 2012) ont établi la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur du QML gaussien sous des hypothèses très faibles. Une extension à des erreurs non-*iid* est considérée dans Escanciano (2009).

Par ailleurs, pour un modèle $ARCH$, Aknouche (2012a-2014) a proposé un estimateur des moindres carrés pondrés à plusieurs étapes, qui consiste à répéter les procédures WLS jusqu'à ce que la variance asymptotique correspondante soit égale à celle de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance.

Cependant, l'estimation du modèle δ - $T(G)ARCH$ est loin d'être une extension évidente de l'estimation du modèle $(G)ARCH$ classique, et cela est principalement dû au problème d'identifiabilité des paramètres de ce modèle (voir Hamadeh et Zakoïan, 2011). L'analyse statistique du modèle δ - $TARCH$ et son extension (δ - $TGARCH$) ont été considérées récemment dans la littérature. Sous la condition de stationnarité stricte, Pan et *al*, (2008) ont établi la consistance et la normalité asymptotique (CAN) de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien ($QMLE$) du modèle δ - $TGARCH$. Hamadeh et Zakoïan (2011) ont obtenu le même résultat sous des hypothèses plus faibles, mais en imposant toujours la stationnarité stricte. En outre, Hamadeh et Zakoïan (2011) ont obtenu la propriété CAN pour deux variantes de l'estimateur des moindres carrés ordinaires ($OLSE$) du modèle δ - $TARCH$ sous l'hypothèse d'existence du $2\delta^{ème}$ moment du processus observé. Plus récemment, Francq et Zakoïan (2013a) ont étendu la théorie du $QMLE$ pour le modèle δ - $TGARCH$ même dans le domaine de non stationnarité stricte.

Bien que le $QMLE$ possède de bonnes propriétés statistiques, il présente toutefois quelques inconvénients qui s'accroissent particulièrement pour des innovations à queues lourdes. En particulier, le $QMLE$ n'est pas convergent pour des innovations à variance infinie et présente de mauvaises performances pour de petites puissances δ (Hamadeh et Zakoïan, 2011). Pour y remédier, nous proposons dans ce Chapitre un estimateur des moindres carrés pondrés en deux étapes ($2SWLSE$) pour le modèle δ - $TARCH(q)$. La pondération est le carré inversé de la variance conditionnelle du processus, arbitrairement évaluée dans la première étape et estimée dans la seconde. Outre sa simplicité, l'estimateur $2SWLSE$ s'avère consistant et asymptotiquement gaussien sous des hypothèses très faibles, en particulier sans aucune

contrainte sur les moments du processus observé et même sans imposer l'hypothèse de stationnarité stricte. De surcroît, nous montrons que les variances asymptotiques des deux estimateurs *2SWLSE* et *QMLE* sont proportionnelles et même égales lorsque $\delta = 2$. En particulier, l'estimateur *2SWLSE* en est plus asymptotiquement efficace pour des innovations dont la distribution est à queues lourdes et peut converger même pour des innovations à variance infinie. Nous montrons également que l'estimateur *2SWLSE* est plus efficace que l'estimateur des moindres carrés ordinaires (*OLSE*) proposé par Hamadeh et Zakoïan (2011).

Le reste de ce Chapitre est organisé comme suit. Dans la deuxième Section, nous présentons d'abord les résultats relatifs aux estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance dans le cas gaussien (*QMLE*), le *QMLE* généralisé (cf. Hamadeh et Zakoïan, 2011 ; Francq et al, 2011 ; Francq et Zakoïan, 2013a ; Fan et al, 2014 ; Zhu et Li, 2014) et l'estimateur des moindres carrés ordinaire (*OLSE*) (Hamadeh et Zakoïan, 2011), puis nous proposons l'estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes (*2SWLSE*), ainsi que ses propriétés asymptotiques dans les deux cas stable et instable. De plus, un estimateur consistant de la variance asymptotique de *2SWLSE* est proposé dans les deux cas stable et instable. La troisième Section est consacrée au développement de tests consistants de stationnarité stricte et de symétrie (conséquences des résultats obtenus dans la Section précédente) pour le modèle. À travers la quatrième Section, les résultats théoriques (propriétés des estimateurs proposés) seront confirmés via une étude de simulation. Nous terminerons le Chapitre par une application aux tests de stationnarité stricte et de symétrie sur des données réelles qui sont les rendements de trois indices boursiers (CAC40, SP500, KV-A) et de deux prix de pétrole (BRENT et WTI).

2.2 Estimation des paramètres du modèle δ -*TARCH* : état de l'art

L'objectif de cette Section est de proposer un estimateur *2SWLSE* du modèle (1.3.1) identifié sous la contrainte $E(|\eta_1|^\delta) = 1$ qui peut être plus efficace que le *QMLE* qui servira de référence. Cette Section est liée aux travaux de Hamadeh et Zakoïan (2011) (voir aussi,

Francq et Zakoïan, 2013b ; Berkes et Horváth, 2004) qui ont également étudié l'estimation des modèles δ -*T(G)ARCH* en utilisant un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien et généralisé ainsi que deux variantes de l'estimateur des moindres carrés ordinaires dans le cas stationnaire. On peut également citer Francq et Zakoïan (2013a) qui ont étendu la théorie du *QMLE* pour le modèle δ -*TGARCH* même dans le domaine de non stationnarité.

La première Sous-section consiste à rappeler les principaux résultats obtenus par Hamadeh et Zakoïan (2011) ainsi que Francq et Zakoïan (2013a), puis d'introduire notre estimateur ainsi que ses propriétés asymptotiques. La deuxième Sous-section est consacrée, d'une part, à la comparaison de l'efficacité asymptotique des deux estimateurs *2SWLSE* et le *QMLE* gaussien et d'autre part à la confirmation des résultats théoriques via une étude de simulation. Enfin, une illustration de nos méthodes (estimation et tests) sur des données réelles représentant certains rendements financiers est donnée.

2.2.1 Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (*QMLE*)

Dans cette Sous-section, nous présentons le comportement asymptotique de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (*QMLE*) gaussien d'un modèle δ -*TGARCH* dans le cas strictement stationnaire (Hamadeh et Zakoïan, 2011) et non-stationnaire (Francq et Zakoïan, 2013a).

2.2.1.1 Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien dans le cas de stabilité (stationnarité stricte)

Hamadeh et Zakoïan (2011) se sont intéressés à l'étude des propriétés asymptotiques de l'estimateur *QMLE* du modèle δ -*TGARCH*(p, q) donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t^{\frac{1}{\delta}}(\theta) \eta_t \\ h_t(\theta) = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_{+,j}(\varepsilon_{t-j}^+)^{\delta} + \alpha_{-,j}(\varepsilon_{t-j}^-)^{\delta} + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.1)$$

qui est soumise à certaines hypothèses (voir **B0-B4** ci-après). Rappelons que γ désigne le plus grand exposant de Lyapunov associé à (2.2.1) (voir ex. Pan et al, 2008 pour l'expression de γ).

Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ une réalisation de longueur n de la solution strictement stationnaire et non-anticipative $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ du modèle (2.2.1). Supposons que les ordres p, q sont connus et notons par $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{p+2q+1})' = (\omega, \alpha_{+,1}, \alpha_{-,1}, \dots, \alpha_{+,q}, \alpha_{-,q}, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ le vecteur des vraies paramètres qui est supposé appartenir à un espace paramétrique $\Theta \subset]0, \infty[\times]0, \infty[^{p+2q}$.

Conditionnellement à des valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{t-q}, \tilde{\sigma}_0 \geq 0, \dots, \tilde{\sigma}_{1-p} \geq 0$, la vraisemblance gaussienne, évaluée en un paramètre générique

$$\bar{\theta} = (\bar{\omega}, \bar{\alpha}_{+,1}, \bar{\alpha}_{-,1}, \dots, \bar{\alpha}_{+,q}, \bar{\alpha}_{-,q}, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_p)' \in \Theta,$$

se donne par

$$L_n(\bar{\theta}) = L_n(\bar{\theta}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}\right), \quad (2.2.2)$$

où les $\tilde{\sigma}_t$ sont définis récursivement, pour $t \geq 1$, par

$$\tilde{\sigma}_t^\delta = \tilde{\sigma}_t^\delta(\bar{\theta}) = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^q \bar{\alpha}_{+,j} (\varepsilon_{t-j}^+)^{\delta} + \bar{\alpha}_{-,j} (\varepsilon_{t-j}^-)^{\delta} + \sum_{i=1}^q \beta_i \tilde{\sigma}_{t-i}^\delta. \quad (2.2.3)$$

Un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (*QMLE*) de θ est défini comme toute solution mesurable du problème suivant

$$\hat{\theta}_{QML} = \arg \max_{\bar{\theta} \in \Theta} (L_n(\bar{\theta})) = \arg \min_{\bar{\theta} \in \Theta} \left(\tilde{I}_n(\bar{\theta}) \right), \quad (2.2.4)$$

où

$$\tilde{I}_n(\bar{\theta}) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t \quad \text{et} \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\bar{\theta}) = \frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\sigma}_t^2(\bar{\theta})} + \ln(\tilde{\sigma}_t^2(\bar{\theta})). \quad (2.2.5)$$

Hamadeh et Zakoïan (2011) ont montré la convergence forte de l'estimateur *QMLE* gaussien, sous les conditions suivantes :

(B0) : $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables *iid* vérifiant $E|\eta_1|^r < \infty$ pour un certain $r > 0$.

(B1) : Θ est compact.

(B2) : $E(\eta_1^2) = 1$ et $P(\eta_t > 0) \in]0, 1[$. De plus, si $P(\eta_t \in \Gamma) = 1$ pour un ensemble Γ alors l'ensemble Γ a un cardinal $|\Gamma| > 2$.

(B3) : $\gamma < 0$ et $\forall \bar{\theta} \in \Theta, \sum_{i=1}^p \bar{\beta}_i < 1$.

(B4) : Si $p > 0$, le polynôme $\beta_{\theta}(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \beta_i(z^i)$ n'a pas de racine commune avec $A_{\theta+}(z) = \sum_{j=1}^q \alpha_{j,+} z^j$ et $A_{\theta-}(z) = \sum_{j=1}^q \alpha_{j,-} z^j$. De plus, $A_{\theta+}(1) + B_{\theta-}(1) \neq 0$.

Le Théorème de convergence forte est donné comme suit :

Théorème 2.2.1 (Hamadeh et Zakoïan, 2011)

Sous les hypothèses B0-B4, soit $(\hat{\theta}_{QML})$ une suite d'estimateurs du QML satisfaisant (2.2.4), avec certaines valeurs initiales,

$$\hat{\theta}_{QML} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta.$$

□

Pour la normalité asymptotique de l'estimateur *QMLE* gaussien, Hamadeh et Zakoïan (2011) ont considéré les hypothèses supplémentaires suivantes :

(B5) : $\theta \in \overset{\circ}{\Theta}$ ou $\overset{\circ}{\Theta}$ est à l'intérieur de Θ .

(B6) : $E(\eta_1^4) < \infty$.

Il convient de noter que (B5) exclut la situation où certaines composantes de θ sont égales à 0. Le Théorème suivant donne le comportement asymptotique de l'estimateur du QML.

Théorème 2.2.2 (Hamadeh et Zakoïan, 2011)

Sous les hypothèses B0-B6

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{QML} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, (E(\eta_1^4) - 1) J^{-1} \right),$$

où

$$J = E_{\theta} \left(\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) = \frac{4}{\delta^2} E_{\theta} \left(\frac{1}{\sigma_t^{2\delta}(\theta)} \frac{\partial \sigma_t^{\delta}(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^{\delta}(\theta)}{\partial \theta'} \right). \quad (2.2.6)$$

□

2.2.1.2 Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien dans le cas d'instabilité (non-stationnarité stricte)

On se place maintenant dans le cas où l'hypothèse **B3** n'est pas vérifiée. Francq et Zakoïan (2013a) ont proposé une extension aux résultats obtenus dans le cas stationnaire (cf. Hamadeh et Zakoïan, 2011). Les auteurs ont considéré le modèle δ -*TGARCH*(1,1) où le paramètre θ s'écrit maintenant $\theta = (\omega, \alpha_+, \alpha_-, \beta)'$ et où l'on suppose que le plus grand exposant de Lyapunov γ associé au modèle est supérieur ou égal à 0 ($\gamma \geq 0$). Ils ont montré alors, que cette hypothèse implique que le modèle est instable dans le sens où (cf. Chapitre 1 et Francq et Zakoïan, 2013a, Proposition 2.1) :

– Lorsque $\gamma > 0$,

$$\rho^t h_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty,$$

et si $E(|\log(|\eta_1|^2)|) < \infty$, alors

$$\rho^t \varepsilon_t^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty, \quad 0 < \rho < e^{-\gamma}.$$

– Lorsque $\gamma = 0$,

$$h_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p} \infty,$$

et si $E(|\log(|\eta_1|^2)|) < \infty$ alors

$$\varepsilon_t^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p} \infty.$$

Ces deux propriétés sont importantes et sont utilisées dans les preuves concernant les propriétés asymptotiques de l'estimateur du *QML* gaussien.

Un estimateur du *QML* gaussien de θ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta}_{QML}$ de

$$\hat{\theta}_{QML} = \arg \min_{\bar{\theta} \in \Theta} \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{\bar{\sigma}_t^2(\bar{\theta})} + \ln(\bar{\sigma}_t^2(\bar{\theta})) \right),$$

où Θ est un compact de $]0, \infty[\times]0, \infty[^3$ qui contient la vraie valeur θ et

$$\bar{\sigma}_t^\delta(\bar{\theta}) = \bar{\omega} + \bar{\alpha}_+ (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \bar{\alpha}_- (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta} + \bar{\beta} \bar{\sigma}_{t-1}^\delta(\bar{\theta}), \quad t \geq 1,$$

pour des valeurs initiales arbitrairement fixées $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\sigma}_0 > 0$.

Afin d'établir les propriétés asymptotiques de l'estimateur du *QML* gaussien, les hypothèses suivantes ont été considérées.

(B7) : $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite *iid*, telle que : $E(\eta_1^2) = 1$ et $P(\eta_1 = 1) < 1$.

(B8) : Le support de $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ contient au moins 3 points et $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ prend des valeurs positives et négatives.

(B9) : Lorsque t tend vers l'infini

$$E \left(1 + \sum_{i=1}^{t-1} a_0(\eta_1) \dots a_0(\eta_i) \right)^{-1} = o \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

Cette dernière hypothèse est seulement nécessaire dans le cas $\gamma = 0$.

Les deux théorèmes suivants donnent le comportement asymptotique de l'estimateur du *QML* à l'extérieur et au bord du domaine de stationnarité stricte.

Théorème 2.2.3 (Francq et Zakoïan, 2013a)

Sous $\gamma > 0$, B7, B8 et $P(\eta_1 = 0) = 0$

$$\hat{\theta}_{QML} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta.$$

Si, de plus, $E(\eta_1^4) \in]1, \infty[$, $E|\log \eta_1^2| < \infty$ et $\theta \in \Theta$,

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{QML} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, (E(\eta_1^4) - 1) \mathcal{I}^{-1} \right), \quad (2.2.7)$$

où $\mathcal{I}$ une matrice définie positive. $\square$

Théorème 2.2.4 (Francq et Zakoïan, 2013a)

Lorsque $\gamma = 0$, $P(\eta_1 = 0) = 0$ et $\forall \theta \in \Theta$, $\|1/a_0(\eta_1)\|_s^{-1}$ pour un certain $s > 1$,

$$\hat{\theta}_{QML} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \theta.$$

Si, de plus, $\theta \in \Theta$, $E(\eta_1^4) \in]1, \infty[$, $E|\log \eta_1^2| < \infty$ et B9 est satisfaite, alors (2.2.7) est vraie. $\square$

2.2.2 Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance non-gaussien (généralisé), *GQMLE*, dans le cas de stabilité

L'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance non gaussien qui sera présenté dans cette Section donne une réponse au problème d'établissement de la normalité asymptotique sans exiger l'existence d'un moment d'ordre 4 pour l'innovation $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$. Hamadeh et Zakoïan (2011) ont étudié l'estimateur du maximum de vraisemblance dans la situation où la vraie densité est mal spécifiée. Ils ont montré que la forte consistance de cette classe d'estimateurs requière une spécification complète de certains moments de $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$. Puisque ces conditions de moments sur $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ peuvent être imposées à la place de la condition d'identifiabilité usuelle $E(\eta_1^2) = 1$, cette classe d'estimateurs peut fournir des alternatives commodées à l'estimateur du *QML* standard, en particulier, lorsque les erreurs ont des queues de distributions épaisses.

Nous maintenons les notations et les hypothèses **B1** et **B3-B5** considérées dans la Section 2.2.1. L'hypothèse d'identifiabilité $E(\eta_1^2) = 1$, supposée dans le cadre du *QML* gaussien sera remplacée par une autre hypothèse plus adaptée à l'hypothèse **B0**. Nous supposons que :

B2' : $E|\eta_1|^\delta = 1$ et $P(\eta_t > 0) \in]0, 1[$. De plus, si $P(\eta_t \in \Gamma) = 1$ pour un ensemble Γ , l'ensemble Γ a un cardinal $|\Gamma| > 2$.

Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ une réalisation de longueur n du processus $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$, solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique du modèle (2.2.1). supposons que la vraie densité f de l'innovation $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est inconnue. Étant données les valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{t-q}, \tilde{\sigma}_0 \geq 0, \dots, \tilde{\sigma}_{1-p} \geq 0$, pour une densité arbitraire g (g étant dite distribution instrumentale), le critère du quasi-maximum de vraisemblance généralisé (voir Berkes et Horváth, 2004 ; Newey et Steigerwald, 1997) est donné par

$$L_{n,g}(\bar{\theta}) = L_{n,g}(\bar{\theta}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\tilde{\sigma}_t(\bar{\theta})} g\left(\frac{\varepsilon_t}{\tilde{\sigma}_t(\bar{\theta})}\right),$$

où les $\tilde{\sigma}_t$ sont définis récursivement via (2.2.3). Hamadeh et Zakoïan (2011) ont étudié le comportement asymptotique de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance généralisé (lequel a été initialement proposé par Berkes et Horváth, 2004) est une solution du problème

suivant :

$$\hat{\theta}_{GQML} = \arg \max_{\bar{\theta} \in \Theta} (L_{n,g}(\bar{\theta})) = \arg \min_{\bar{\theta} \in \Theta} (\tilde{Q}_{n,g}(\bar{\theta})),$$

où

$$\tilde{Q}_{n,g}(\bar{\theta}) = \tilde{Q}_{n,g}(\bar{\theta}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t(\bar{\theta}),$$

et

$$\tilde{l}_t(\bar{\theta}) = \log g\left(\frac{\varepsilon_t}{\tilde{\sigma}_t(\bar{\theta})}\right) - \log \tilde{\sigma}_t(\bar{\theta}).$$

Notons que $GQMLE$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque l'on prend $g = f$. Lorsque g est la densité $N(0, 1)$ l'estimateur $\hat{\theta}_{GQML}$ correspond à l'estimateur du QML gaussien $\hat{\theta}_{QML}$ présenté dans la Section précédente. Plus généralement, la densité g représente une densité instrumentale qui sert à construire $\hat{\theta}_{GQML}$. Hamadeh et Zakoïan (2011) ont montré la convergence et la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}_{GQML}$ sous les conditions suivantes.

En supposant que la fonction g est dérivable, notons $h = \log(g)$ et $s(x) = xh'(x)$. On considère les hypothèses suivantes :

(**C1**) : Il existe un $0 < \mathcal{C}_0 < \infty$ et un $0 \leq v_0 < \infty$ tels que $|s(x)| \leq \mathcal{C}_0(|x|^{v_0} + 1)$ pour tout $x \in]-\infty, \infty[$.

L'existence d'un maximum unique de $L_{n,g}(\theta)$, au moins asymptotiquement, est une condition qui semble nécessaire pour que l'estimateur $\hat{\theta}_{GQML}$ converge (Hamadeh et Zakoïan, 2011). Il faut donc que la fonction $S(y) = E(\log\{yg(y\eta_t)\})$ pour $0 < y < \infty$, ait un unique maximum :

(**C2**) : Il existe une constante $0 < \varrho < \infty$ telle que $S(y) < S(\varrho)$ pour tout $y \neq \varrho$.

(**C3**) : Il existe un $0 < \mathcal{C}_0 < \infty$ tel que $g(x) \leq \mathcal{C}_1(|x|^{v_1} + 1)$ pour un certain $0 \leq v_1 < \infty$. De plus, $E(h^-(\varrho\eta_t)) > -\infty$.

Bien que la première partie de l'hypothèse **C3** soit vérifiée pour une grande variété de densités, par exemple la densité $N(0, 1)$, elle ne permet pas à g d'avoir une densité non bornée dans un voisinage de zéro. Ceci exclut par exemple des densités de la forme $g(x) =$

$\mathcal{C} |x|^{-\alpha} \exp(-b|x|^\gamma)$ avec $0 < \mathcal{C} < \infty$ et $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Une hypothèse alternative, qui peut servir dans une telle situation, est que :

(**C3'**) : Il existe un $0 < v_2 < \infty$ tel que $g(x) \leq \mathcal{C}_1 |x|^{-v_2}$ pour tout $x \neq 0$. De plus, $E(\log |\eta_t|) > -\infty$ et $E(h^-(\varrho\eta_t)) > -\infty$.

Le résultat suivant établit la convergence forte de $\hat{\theta}_{GQML}$.

Théorème 2.2.5 (Hamadeh et Zakoïan, 2011)

Soit $(\hat{\theta}_{GQML})$ une suite d'estimateurs du GQML avec

$$\theta_\varrho = \left(\frac{\varpi_0}{\varrho^\delta}, \frac{\alpha_{01+}}{\varrho^\delta}, \dots, \frac{\alpha_{0q-}}{\varrho^\delta}, \beta_{01}, \dots, \beta_{0p} \right)' \in \Theta.$$

En remplaçant B2 par B2'', supposons que les hypothèses du Théorème 2.2.1 sont vérifiées. Alors sous les hypothèses **C1-C2** et (**C3** ou **C3'**),

$$\hat{\theta}_{GQML} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta_\varrho.$$

De plus, si $\varrho = 1$ alors l'estimateur $(\hat{\theta}_{GQML})$ converge presque sûrement vers θ quand $n \rightarrow \infty$. $\square$

Pour établir la normalité asymptotique de $\sqrt{n} (\hat{\theta}_{GQML} - \theta_\varrho)$, Hamadeh et Zakoïan (2011) ont remplacé l'hypothèse **C1** par l'hypothèse plus forte suivante.

(**C4**) : Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, Il existe un $0 < \mathcal{C}_0 < \infty$ et un $0 \leq v_3 < \infty$ tels que $\forall x \in]-\infty, \infty[$; $|x^k s^{(k)}(x)| \leq \mathcal{C}_0 (|x|^{v_3} + 1)$ avec $E(|\eta_t|^{2v_3}) < \infty$.

On impose également que :

(**C5**) : $Var(s(\varrho\eta_t)) \neq 0$ et $E(\eta_t s'(\varrho\eta_t)) \neq 0$.

Théorème 2.2.6 (Hamadeh et Zakoïan, 2011)

Supposons que $\theta_\varrho \in \Theta$. Sous les hypothèses C4 et C5 et celles du Théorème précédent,

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_{GQML} - \theta_\varrho) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \kappa_g M^{-1} J^{-1} M^{-1}),$$

où

$$\begin{aligned} J &= J(\theta) = \frac{1}{\delta^2} E_\theta \left(\frac{1}{\sigma_t^{2\delta}(\theta)} \frac{\partial \sigma_t^\delta(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^\delta(\theta)}{\partial \theta'} \right), \\ M &= \begin{pmatrix} \varrho^\delta I_{2q+1} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \\ \kappa_g &= \frac{\text{Var}\{s(\varrho\eta_t)\}}{E^2\{d\eta_t s' | (\varrho\eta_t)\}}, \end{aligned}$$

et I_k est la matrice identité d'ordre k . $\square$

Remarque 2.2.1

Notons que les hypothèses supposées sur la densité instrumentale g sont vérifiées pour la plupart des densités standard comme, par exemple, la densité gaussienne $N(0, 1)$ et la densité de Laplace (appelée aussi double-exponentielle)

$$g(x) = 1/2 \exp(-|x|),$$

où $v_0 \geq 1, v_1 \geq 0$ et $v_3 \geq 1$.

Notons également que la contrainte $\varrho = 1$ détermine la convergence forte de $\hat{\theta}_{GQML}$ vers θ . Lorsque $g = f$, on peut facilement montrer que cette condition est toujours vérifiée pour l'estimateur du maximum de vraisemblance (voir Hamadeh, 2010). Si $g \neq f$, cette contrainte implique une condition de moment sur $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$, qui peut être de la forme $E|\eta_1|^r = 1$. Donc le choix de g exige une contrainte naturelle d'identifiabilité portant sur un moment de η_1 , comme par exemple, $r = 2$ lorsque g est $N(0, 1)$ et $r = 1$ lorsque g est la densité de Laplace (voir Hamadeh, 2010 pour plus de détails).

2.2.3 Estimateurs des moindres carrés ordinaires (OLSE) d'un δ -*TARCH* (q) dans le cas de stabilité

Dans cette partie nous présentons les deux variantes de l'estimateur des moindres carrés ordinaires *OLSE* proposées par Hamadeh et Zakoïan (2011) afin d'estimer les paramètres du modèle δ -*TARCH*(q) donné par (1.3.3). Les propriétés statistiques de ces estimateurs seront étudiées seulement dans le cas de stabilité.

Dans la suite de cette Sous-section, nous considérons les notations suivantes.

$$\begin{aligned}\mu_\delta &= E|\eta_t|^\delta, & \mu_{\delta,+} &= E(\eta_t^+)^\delta, & \mu_{\delta,-} &= E(\eta_t^-)^\delta, \\ \sigma_\delta^2 &= \text{var}(|\eta_t|^\delta), & \sigma_{\delta,+}^2 &= \text{var}\{(\eta_t^+)^\delta\}, & \sigma_{\delta,-}^2 &= \text{var}\{(\eta_t^-)^\delta\}.\end{aligned}$$

Pour des besoins de la méthode des moindres carrés, on peut écrire $|\varepsilon_t|^\delta$ sous la forme suivante.

$$|\varepsilon_t|^\delta = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_{j,+} (\varepsilon_{t-j}^+)^\delta + \alpha_{j,-} (\varepsilon_{t-j}^-)^\delta + v_t, \quad (2.2.8)$$

où $v_t = |\varepsilon_t|^\delta - \mu_\delta h_t = (|\eta_t|^\delta - \mu_\delta) h_t$. Lorsque $E|\varepsilon_1|^\delta < \infty$, la suite $(v_t, \mathcal{F}_t)$ constitue une différence de martingale, où $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $(\eta_{t-j}, j \geq 0)$. Il est donc naturel de remplacer la condition d'identifiabilité **B2** par :

(B2') : $E|\eta_1|^\delta = 1$ et $P(\eta_t > 0) \in]0, 1[$. De plus, si $P(\eta_t \in \Gamma) = 1$ pour un ensemble Γ , l'ensemble Γ a un cardinal $|\Gamma| > 2$.

Soit le vecteur $\varepsilon_{t-1} = \left(1, (\varepsilon_{t-1}^+)^\delta, (\varepsilon_{t-1}^-)^\delta, \dots, (\varepsilon_{t-q}^-)^\delta\right)'$. On déduit de (2.2.8) le système

$$Y_1 = X_1 \theta + V_1,$$

où $Y_1 = (|\varepsilon_n|^\delta, \dots, |\varepsilon_1|^\delta)'$, $X_1 = (\varepsilon'_{n-1}, \dots, \varepsilon'_0)'$ et $V_1 = (v_n, \dots, v_1)'$.

Sous l'hypothèse **B2'** et pour n assez grand, on peut montrer que la matrice $X_1' X_1$ est inversible avec probabilité 1. L'estimateur des moindres carrés ordinaires de θ est donc donné par

$$\hat{\theta}_{OLS} = (X_1' X_1)^{-1} X_1' Y_1. \quad (2.2.9)$$

Pour établir la convergence forte de $\hat{\theta}_{OLS}$, l'hypothèse supplémentaire sur les moments du processus observé s'impose :

(B10) : $\gamma < 0$ et $E|\varepsilon_1|^{2\delta} < \infty$.

Théorème 2.2.7 (Hamadeh et Zakoïan, 2011)

Sous les hypothèses **B0**, **B2'** et **B10**, soit $(\hat{\theta}_{OLS})$ une suite d'estimateurs OLSE satisfaisant (2.2.9), avec valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q}$ arbitraires. Alors

$$\hat{\theta}_{OLS} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta.$$

□

Pour obtenir la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_{OLS}$ l'hypothèse suivante sur les moments du processus observé est nécessaire.

(B11) : $E_{\theta} |\varepsilon_1|^{4\delta} < \infty$.

Théorème 2.2.8 (Hamadeh et Zakoïan, 2011)

Sous les hypothèses **B0**, **B2'**, **B10** et **B11**,

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_{OLS} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\delta}^2 \Upsilon^{-1} \Lambda \Upsilon^{-1}),$$

où $\Upsilon = E_{\theta} (\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1})$ et $\Lambda = E_{\theta} (h_t^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1})$. □

Remarque 2.2.2

Dans Bose et Mukherjee (2003), il a été montré que l'estimateur des moindres carrés pour un modèle ARCH standard est consistant sous l'hypothèse que $E(\varepsilon_t^4) < \infty$, et qu'il est asymptotiquement normal sous l'hypothèse que $E(\varepsilon_t^8) < \infty$. Ce qui correspond à la même condition de Hamadeh et Zakoïan (2011) lorsque $\delta = 2$.

Dans la définition de $\hat{\theta}_{OLS}$ et pour des raisons d'identifiabilité, il a été supposé que $\mu_{\delta} = \mu_{\delta,+} + \mu_{\delta,-} = 1$. Un autre estimateur de type moindres carrés ordinaires peut être construit sous l'hypothèse que $\mu_{\delta,+}$ et $\mu_{\delta,-}$ sont connus. Nous avons

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon_t^+)^{\delta} \\ (\varepsilon_t^-)^{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{\delta,+} \\ \mu_{\delta,-} \end{pmatrix} \varepsilon'_{t-1} \theta_0 + \begin{pmatrix} u_{t,+} \\ u_{t,-} \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

où $(u_{t,+}, u_{t,-})' = h_t \left((\eta_t^+)^{\delta} - \mu_{\delta,+}, (\eta_t^-)^{\delta} - \mu_{\delta,-} \right)'$ et $((u_{t,+}, u_{t,-})', \mathcal{F}_t)$ est une différence de

martingale. À partir de (2.2.10), on déduit le système suivant :

$$Y_2 = X_2\theta + U_2,$$

où

$$Y_2 = \begin{pmatrix} (\varepsilon_n^+)^{\delta} \\ (\varepsilon_n^-)^{\delta} \\ \vdots \\ \cdot \\ (\varepsilon_1^-)^{\delta} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \mu_{\delta,+}\varepsilon'_{n-1} \\ \mu_{\delta,-}\varepsilon'_{n-1} \\ \vdots \\ \mu_{\delta,+}\varepsilon'_0 \\ \mu_{\delta,-}\varepsilon'_0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} u_{n,+} \\ u_{n,-} \\ \vdots \\ \cdot \\ u_{1,-} \end{pmatrix}.$$

Un deuxième estimateur $OLSE$, $\widehat{\theta}_{OLS}^*$, est ainsi donné par

$$\widehat{\theta}_{OLS}^* = (X_2'X_2)^{-1} X_2'Y_2. \quad (2.2.11)$$

Le Théorème suivant donne les propriétés asymptotiques de cet estimateur sous les mêmes conditions que celles imposées pour $\widehat{\theta}_{OLS}$.

Théorème 2.2.9 (Hamadeh et Zakoïan, 2011)

Sous les hypothèses du Théorème (2.2.7), soit $(\widehat{\theta}_{OLS}^)$ une suite d'estimateurs du OLS satisfaisant (2.2.11), avec les valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q}$ arbitraires. Alors,*

$$\widehat{\theta}_{OLS}^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta.$$

*Si, de plus, **B11** est vérifiée alors*

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\theta}_{OLS}^* - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \pi_{\delta} \Upsilon^{-1} \Lambda \Upsilon^{-1} \right),$$

$$\text{avec } \pi_{\delta} = \frac{\mu_{\delta,+}^2 \sigma_{\delta,+}^2 + \mu_{\delta,-}^2 \sigma_{\delta,-}^2 - 2\mu_{\delta,+}^2 \mu_{\delta,-}^2}{(\mu_{\delta,+}^2 + \mu_{\delta,-}^2)^2}.$$

Lorsque $\mu_{\delta,+} = \mu_{\delta,-}$, on obtient $\pi_{\delta} = \sigma_{\delta}^2$. $\square$

Remarque 2.2.3

i) *On peut observer que les variances asymptotiques des deux estimateurs $\widehat{\theta}_{OLS}$ et $\widehat{\theta}_{OLS}^*$ sont proportionnelles, avec facteur de proportionnalité dépendant de δ et de la distribution*

de $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$. Si $\mu_{\delta,+} = \mu_{\delta,-}$ et en particulier, si la loi de $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ est symétrique, les deux estimateurs possèdent la même distribution asymptotique.

- ii) Contrairement à l'estimateur du QML gaussien, la normalité asymptotique des deux estimateurs $\hat{\theta}_{OLS}$ et $\hat{\theta}_{OLS}^*$ n'exige pas que les composantes de θ soient différentes de 0. Autrement dit, la normalité asymptotique est assurée même si un ou plusieurs coefficients $\alpha_{j,+}$ ou $\alpha_{j,-}$ sont nuls.
- iii) Les conditions des moments imposés sur la suite $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$, pour établir la normalité asymptotique des estimateurs du QML gaussien et des OLS, sont généralement différentes. Elles diffèrent selon la valeur de δ . En particulier, lorsque la puissance δ est assez petite, la normalité asymptotique des estimateurs des OLS, peut être obtenue même si $E(\eta_1^2) = \infty$. En revanche, si $\delta > 1$, les estimateurs des OLS requièrent des conditions plus fortes sur les moments de $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$, que celles de l'estimateur du QML gaussien.

2.3 Estimation alternative des moindres carrés pondérés en deux étapes (2SWLS) dans les cas de stabilité et d'instabilité

2.3.1 Présentation de l'estimateur 2SWLSE

Pour des besoins de la méthode des moindres carrés pondérés, le modèle (1.3.1) peut être écrit comme dans (2.2.8), sous la forme d'autorégression suivante :

$$|\varepsilon_t|^\delta = \mathcal{Y}'_{t-1} \theta + u_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (2.3.1)$$

où les valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q}$ sont arbitrairement fixées, $u_t = |\varepsilon_t|^\delta - h_t(\theta) = h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)$ et $\mathcal{Y}_{t-1} = (1, (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta-1}, (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta-1}, \dots, (\varepsilon_{t-q}^+)^{\delta-1}, (\varepsilon_{t-q}^-)^{\delta-1})'$ et où l'on peut remarquer que $h_t(\theta) = \theta' \mathcal{Y}_{t-1}$. Le modèle (2.3.1) est régi par la différence de martingale, $(u_t, t \in \mathbb{N})$, associée à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N})$, où $E(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et $Var(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) = (\mathcal{Y}'_{t-1} \theta)^2 Var(|\eta_t|^\delta)$.

Considérons une série $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ générée à partir du modèle (1.3.1). Dans la suite et

afin d'estimer le vecteur des paramètres θ , nous proposons un estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes $(\hat{\theta}_{1WLS}, \hat{\theta}_{2WLS})$, qui, conditionnellement aux valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q}$, est défini par

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1WLS} &= \arg \min_{\tilde{\theta} \in \Theta} \sum_{t=1}^n \frac{(|\varepsilon_t|^\delta - \tilde{\theta}' \mathcal{Y}_{t-1})^2}{h_t^2(\tilde{\theta})}, \\ \hat{\theta}_{2WLS} &= \arg_{\tilde{\theta} \in \Theta} \min \sum_{t=1}^n \frac{(|\varepsilon_t|^\delta - \tilde{\theta}' \mathcal{Y}_{t-1})^2}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})},\end{aligned}$$

où $\hat{\theta}_{1WLS} = (\hat{\omega}_{1WLS}, \hat{\beta}'_{1WLS})'$ et $\tilde{\theta} = (\tilde{\omega}, \tilde{\alpha}_{+,1}, \tilde{\alpha}_{-,1}, \dots, \tilde{\alpha}_{+,q}, \tilde{\alpha}_{-,q})' = (\tilde{\omega}, \tilde{\beta}')'$ est un vecteur de constantes positives connues. Ici, la pondération considérée est l'inverse du carré de la variance conditionnelle $h_t^2(\cdot)$, évaluée en $\tilde{\theta}$ dans la première étape et en $\hat{\theta}_{1WLS}$ dans la seconde.

Exploitant la linéarité de la variance conditionnelle du modèle par rapport aux paramètres, l'estimateur $(\hat{\theta}_{1WLS}, \hat{\theta}_{2WLS})$ a une forme explicite. En effet, à partir de la régression (2.3.1), il s'ensuit que

$$\hat{\theta}_{1WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} |\varepsilon_t|^\delta}{h_t^2(\tilde{\theta})}. \quad (2.3.2)$$

$$\hat{\theta}_{2WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} |\varepsilon_t|^\delta}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})}. \quad (2.3.3)$$

Remarque 2.3.1

- Il est à noter que l'estimateur $\hat{\theta}_{1WLS}$ dépend du vecteur $\tilde{\theta}$ et est asymptotiquement moins efficace que le QMLE, à moins que $\tilde{\theta}$ coïncide avec la vraie valeur θ .
- Dans le but d'améliorer l'efficacité asymptotique de cet estimateur, nous remplaçons $\tilde{\theta}$ dans les pondérations dans (2.3.2) par $\hat{\theta}_{1WLS} = (\hat{\omega}_{1WLS}, \hat{\beta}'_{1WLS})'$.
- Des estimateurs similaires à (2.3.2) et (2.3.3) ont été proposés par Aknouche (2012-2014) dans le cadre d'un modèle ARCH.

2.3.2 Propriétés asymptotiques de l'estimateur $2SWLSE$

Les Théorèmes ci-dessous établissent les propriétés asymptotiques de l'estimateur $2SWLSE$ pour le modèle δ - $TARCH(q)$, pour q quelconque sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$) et pour $q = 1$ sous la condition d'instabilité ($\gamma \geq 0$). Ces théorèmes montrent que pour tout $\tilde{\theta}$ arbitrairement fixé, l'estimateur $2SWLSE$ est consistant et asymptotiquement gaussien sans aucune hypothèse sur les moments du processus observé. Pour un processus asymptotiquement stationnaire $(x_t, t \in \mathbb{N})$, on note par $E_\infty(x_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t)$. Considérons d'abord le cas de stabilité $\gamma < 0$.

Théorème 2.3.1 (Aknouche et Touche, 2015a)

Lorsque $\gamma < 0$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$) et sous l'hypothèse **A1**,

$$a) \hat{\theta}_{1WLS} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta \quad \text{et} \quad b) \hat{\theta}_{2WLS} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta. \quad (2.3.4)$$

Si, de plus on a, $E(|\eta_1|)^{2\delta} < \infty$ alors,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1WLS} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \text{Var}(|\eta_1|^\delta) H^{-1}(\tilde{\theta}, \theta) \Gamma(\tilde{\theta}, \theta) H^{-1}(\tilde{\theta}, \theta)\right). \quad (2.3.5)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{2WLS} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \text{Var}(|\eta_1|^\delta) \Pi^{-1}(\theta)\right). \quad (2.3.6)$$

où,

$$H(\tilde{\theta}, \theta) = E_\infty\left(\frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}\right), \quad \Gamma(\tilde{\theta}, \theta) = E_\infty\left(\frac{h_t^2(\theta)}{h_t^4(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}\right), \quad \Pi(\theta) = E_\infty\left(\frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}\right). \quad (2.3.7)$$

□

À partir de (2.3.7), il est clair que, pour $\tilde{\theta} = \theta$, nous avons $H(\theta, \theta) = \Gamma(\theta, \theta) = \Pi(\theta)$.

À présent, nous considérons les propriétés asymptotiques de l'estimateur $(\hat{\theta}_{1WLS}, \hat{\theta}_{2WLS})$ sous la condition d'instabilité $\gamma \geq 0$. En fait, nous établissons la convergence forte et la normalité asymptotique pour les estimateurs $\hat{\alpha}_{+,iWLS}$ et $\hat{\alpha}_{-,iWLS}$, $i = 1, 2$ uniquement. Le modèle étant instable, il n'est pas possible d'obtenir un résultat de convergence pour $\hat{\omega}_{1WLS}$ et $\hat{\omega}_{2WLS}$. Partitionnant le vecteur $\theta = (\omega, \beta)'$ avec $\beta = (\alpha_+, \alpha_-)'$ et soient $\hat{\beta}_{1WLS} =$

$(\hat{\alpha}_{-,1WLS}, \hat{\alpha}_{+,1WLS})'$ et $\hat{\beta}_{2WLS} = (\hat{\alpha}_{-,2WLS}, \hat{\alpha}_{+,2WLS})'$ les composantes de $\hat{\theta}_{1WLS}$ et $\hat{\theta}_{2WLS}$ respectivement correspondant à $\beta = (\alpha_+, \alpha_-)'$. Dans le cas où $\gamma = 0$, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire qui est due à Francq et Zakoïan, (2010-2012-2013a).

(A2) : $E \left((1 + X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_1 \dots X_{t-1})^{-1} \right) = o \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ lorsque $t \rightarrow \infty$,

où $X_t = \alpha_+(\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_t^-)^{\delta}$.

Théorème 2.3.2 (Aknouche et Touche, 2015a)

i) Cas strictement instable (avec $q = 1$) : Sous $\gamma > 0$, **A1** et $E(|\log(|\eta_1|^{\delta})|) < \infty$,

$$a) \hat{\beta}_{1WLS} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \beta, \quad \text{et} \quad b) \hat{\beta}_{2WLS} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \beta, \quad (2.3.8)$$

où $\hat{\beta}_{1WLS}$ et $\hat{\beta}_{2WLS}$ sont les composantes de $\hat{\theta}_{1WLS}$ et $\hat{\theta}_{2WLS}$ correspondantes à $\beta = (\alpha_+, \alpha_-)'$ respectivement.

Si, de plus $E(|\eta_1|)^{2\delta} < \infty$, alors

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{1WLS} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \text{Var}(|\eta_1|^{\delta}) \Delta^{-1}(\tilde{\beta}, \beta) \Omega(\tilde{\beta}, \beta) \Delta^{-1}(\tilde{\beta}, \beta) \right). \quad (2.3.9)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2WLS} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \text{Var}(|\eta_1|^{\delta}) \Sigma^{-1}(\beta) \right), \quad (2.3.10)$$

où $\zeta_{t-1} = ((\eta_{t-1}^+)^{\delta}, (\eta_{t-1}^-)^{\delta})'$ et

$$\Delta(\tilde{\beta}, \beta) = E \left(\frac{1}{(\zeta_{t-1} \tilde{\beta})^2} \zeta_{t-1} \zeta_{t-1}' \right), \quad \Omega(\tilde{\beta}, \beta) = E \left(\frac{(\zeta_{t-1} \beta)^2}{(\zeta_{t-1} \tilde{\beta})^4} \zeta_{t-1} \zeta_{t-1}' \right), \quad (2.3.11)$$

$$\Sigma(\beta) = E \left(\frac{1}{(\zeta_{t-1} \beta)^2} \zeta_{t-1} \zeta_{t-1}' \right).$$

ii) Cas instable (avec $q = 1$) : sous $\gamma = 0$ **A1** et $E(|\log(|\eta_1|^{\delta})|) < \infty$,

$$a) \hat{\beta}_{1WLS} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \beta \quad \text{et} \quad b) \hat{\beta}_{2WLS} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \beta. \quad (2.3.12)$$

Si, de plus $E(|\eta_1|)^{2\delta} < \infty$ et **A2** est vérifiée alors les résultats (2.3.9) et (2.3.10) restent vrais. $\square$

À partir de (2.3.11) on peut observer que lorsque $\tilde{\theta} = \theta$ il s'ensuit que $\Omega(\tilde{\beta}, \beta) = \Delta(\tilde{\beta}, \beta) = \Sigma(\beta)$.

Remarque 2.3.2

- i) Contrairement au cas d'un modèle ARCH classique (voir Aknouche, 2012) où une seule étape de la méthode des moindres carrés pondérés suffit pour atteindre l'efficacité du QMLE, pour le modèle δ -TARCH deux étapes sont nécessaires.
- ii) À l'exception du cas particulier ARCH(1), correspondant à $\delta = 2$, $\alpha_+ = \alpha_-$ et $\gamma = 0$, où il est facile de remarquer que les deux estimateurs $\hat{\beta}_{1WLS}$ et $\hat{\beta}_{2WLS}$ ont la même variance asymptotique (voir aussi Aknouche 2012a-2014a), les théorèmes précédents montrent que dans les deux cas stable ($\gamma < 0$) et instable ($\gamma \geq 0$), l'estimateur de la deuxième étape $\hat{\theta}_{2WLS}$ (resp. $\hat{\beta}_{2WLS}$) est asymptotiquement plus efficace que l'estimateur de la première étape $\hat{\theta}_{1WLS}$ (resp. $\hat{\beta}_{1WLS}$).

2.3.3 Comparaison de l'efficacité asymptotique des estimateurs 2SWLSE et QMLE gaussien dans les cas de stabilité et d'instabilité

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à la comparaison de l'estimateur $\hat{\theta}_{2WLS}$ (resp. $\hat{\beta}_{2WLS}$) avec le QMLE gaussien, $\hat{\theta}_{QML}$ (resp. $\hat{\beta}_{QML}$). Sous les hypothèses des Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 et en supposant que $E(\eta_1^2) = 1$ et $E(\eta_1^4) < \infty$ au lieu de $E(|\eta_1|^\delta) = 1$ et $E(|\eta_1|^{2\delta}) < \infty$, respectivement, il est montré dans le cas de stabilité, $\gamma < 0$ (voir Pan et al, 2008; Hamadeh et Zakoïan, 2011), que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{QML} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{\delta^2}{4} \text{Var}(|\eta_1|^2) \Pi^{-1}(\theta)\right),$$

et dans le cas d'instabilité $\gamma > 0$ (voir Francq et Zakoïan, 2013a),

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{QML} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{\delta^2}{4} \text{Var}(|\eta_1|^2) \Sigma^{-1}(\beta)\right).$$

Par conséquent, les variances asymptotiques de $\widehat{\theta}_{2WLS}$ et $\widehat{\theta}_{QML}$ sont proportionnelles et sont égales pour $\delta = 2$. En dehors du cas où $\delta = 2$, il n'est pas possible de comparer $\widehat{\theta}_{2WLS}$ et $\widehat{\theta}_{QML}$ directement, et ce, parce qu'ils sont basés sur des hypothèses d'identifiabilité différentes. Cependant, en considérant les estimateurs des moindres carrés pondérés (*WLS*) normalisés suivant $\widehat{\theta}_{2WLS}^* = \frac{\widehat{\theta}_{2WLS}}{E(|\eta_1|^\delta)}$ et $\widehat{\beta}_{2WLS}^* = \frac{\widehat{\beta}_{2WLS}}{E(|\eta_1|^\delta)}$, le Corollaire suivant nous donne les résultats sur l'efficacité relative entre $\widehat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\widehat{\theta}_{QML}$.

Corollaire 2.3.1 (Aknouche et Touche, 2015a)

Sous les hypothèses des Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 avec $E(\eta_1^2) = 1$ et $E(\eta_1^4) < \infty$,

$$i) \sqrt{n}(\widehat{\theta}_{2WLS}^* - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{Var(|\eta_1|^\delta)}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} \Pi^{-1}(\theta)\right) \text{ si } \gamma < 0.$$

$$ii) \sqrt{n}(\widehat{\beta}_{2WLS}^* - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{Var(|\eta_1|^\delta)}{(E(|\eta_1|^\delta))^4} \Sigma^{-1}(\beta)\right) \text{ si } \gamma \geq 0 \text{ et } q = 1.$$

Donc une condition nécessaire et suffisante pour que $\widehat{\theta}_{2WLS}^$ (resp. $\widehat{\beta}_{2WLS}^*$) soit plus efficace que $\widehat{\theta}_{QML}$ (resp. $\widehat{\beta}_{QML}$) est que $\frac{Var(|\eta_1|^\delta)}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} < \frac{\delta^2}{4} E(|\eta_1|^4 - 1)$ (resp. $\frac{Var(|\eta_1|^\delta)}{(E(|\eta_1|^\delta))^4} < \frac{\delta^2}{4} E(|\eta_1|^4 - 1)$). $\square$*

Notons que pour des innovations à distribution gaussienne standard ($\eta_1 \sim N(0, 1)$), le *QMLE* est plus efficace que l'estimateur *2SWLSE* lorsque $\delta \neq 2$. Le tableau ci-dessous illustre les résultats de la comparaison entre les variances asymptotiques de $\widehat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\widehat{\theta}_{QML}$, pour différentes valeurs de la puissance δ et sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$).

δ	0.1	0.5	0.8	1	1.3	1.6	1.9	2	2.1	2.5
$\widehat{\theta}_{QML}$ $\frac{\delta^2}{4} Var(\eta_1 ^2)$	0.005	0.125	0.320	0.500	0.845	1.280	1.805	2	2.205	3.125
$\widehat{\theta}_{2WLS}^*$ $\frac{Var(\eta_1 ^\delta)}{(E(\eta_1 ^\delta))^2}$	0.010	0.180	0.392	0.570	0.896	1.302	1.806	2	2.206	3.196

Tableau 2.3.1. Comparaison entre les variances asymptotiques de $\widehat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\widehat{\theta}_{QML}$ pour $\eta_1 \sim N(0, 1)$ et différentes valeurs de δ sous $\gamma < 0$.

Dans le cas instable ($\gamma \geq 0$) les résultats sont résumés dans le tableau suivant

δ	0.1	0.5	0.8	1	1.3	1.6	1.9	2	2.1	2.5
$\widehat{\beta}_{QML}$ $\frac{\delta^2}{4} Var(\eta_1 ^2)$	0.005	0.125	0.320	0.500	0.845	1.280	1.805	2	2.205	3.125
$\widehat{\beta}_{2WLS}^*$ $\frac{Var(\eta_1 ^\delta)}{(E(\eta_1 ^\delta))^4}$	0.009	0.121	0.248	0.363	0.611	1.012	1.683	2	2.379	4.862

Tableau 2.3.2. Comparaison entre les variances asymptotiques de $\widehat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\widehat{\theta}_{QML}$ pour $\eta_1 \sim N(0, 1)$ et différentes valeurs de δ sous $\gamma \geq 0$.

Néanmoins, la supériorité de l'estimateur $2SWLSE$ est de plus en plus évidente que l'innovation η_1 est à queue lourde et la puissance δ est plus petite que 2. Par exemple, dans le tableau ci-dessous, l'innovation η_1 est supposée suivre un mélange de deux lois gaussiennes

$$\eta_1 \sim 0.1N(-2, 2) + 0.9N(2, 0.16)$$

centrées et normalisées de sorte que $E(\eta_1^2) = 1$.

À partir du Tableau 2.3.3, on peut remarquer que l'estimateur $2SWLSE$ est plus efficace lorsque $\delta \leq 1$. Les résultats de $\hat{\theta}_{QML}$ sont pris de Hamadeh et Zakoïan (2011). Le même résultat peut être observé pour $\eta_1 \sim t_v$ ($v = 2, 4$), où t_v représente la distribution de Student avec degré de liberté v . En outre, lorsque $\delta < 1$, l'estimateur $2SWLSE$ possède la propriété de consistance et normalité asymptotique (*CAN*) même dans le cas où $E(\eta_1^2) = \infty$.

Finalement, il est important de noter que l'estimateur $2SWLSE$ est toujours plus efficace que l'estimateur des moindres carrés ordinaires $\hat{\theta}_{OLS}$ proposé par Hamadeh et Zakoïan (2011).

δ	0.2	0.8	1	1.6	2
$\hat{\theta}_{QML}$	0.0953	1.5248	2.3825	6.0992	9.5300
$\hat{\theta}_{2WLS}^*$	0.0050	1.1030	1.9400	6.1150	9.6150

Tableau 2.3.3. Comparaison entre les variances asymptotiques de $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}$ pour $\eta_1 \sim 0.1N(-2, 2) + 0.9N(2, 0.16)$ et pour différentes valeurs de δ sous $\gamma < 0$. Les résultats relatifs à $\hat{\theta}_{QML}$ ont été obtenus à partir de Hamadeh et Zakoïan (2011).

2.3.4 Estimation de la variance asymptotique de $\hat{\beta}_{2WLS}$ lorsque $q = 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

À partir des Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 précédents, on peut constater que la variance asymptotique de $\hat{\beta}_{2WLS}$ n'est pas la même selon qu'on soit dans le cas de stabilité ou d'instabilité. Cependant, nous suivons une approche similaire à celle de Francq et Zakoïan (2013a) utilisée dans le cas du *QMLE* gaussien. Nous proposons alors un estimateur (unifié) de la variance asymptotique (notée Λ) de $\hat{\beta}_{2WLS}$, estimateur qui est consistant dans les deux cas

de stabilité et d'instabilité. Dans la suite, nous considérons uniquement le cas d'un modèle δ - $TARCH$ (1).

Dans un premier temps, nous écrivons la matrice $\Pi(\theta)$ sous forme de blocs matriciels comme suit :

$$\Pi(\theta) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où, $A = E_{\infty}(h_t^{-2}(\theta))$, $B = C' = E_{\infty}(h_t^{-2}(\theta)\xi'_{t-1})$, $D = E_{\infty}(h_t^{-2}(\theta)\xi_{t-1}\xi'_{t-1})$,

et $\xi_{t-1} = ((\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta}, (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})'$.

La variance asymptotique de $\hat{\beta}_{2WLS}$ dans le cas stable ($\gamma < 0$) est alors donnée par

$$H^{-1}(\theta) := (D - CA^{-1}B)^{-1}.$$

Donc, en combinant (2.3.6) et (2.3.10) et ii) du Corollaire 2.3.1, la variance asymptotique de $\hat{\beta}_{2WLS}$ peut être écrite dans les deux cas de stabilité et d'instabilité comme suit

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2WLS} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Lambda(\theta)), \quad (2.3.13)$$

où

$$\Lambda(\theta) = \begin{cases} \text{Var}(|\eta_1|^{\delta})H^{-1}(\theta) & \text{si } \gamma < 0 \\ \text{Var}(|\eta_1|^{\delta})\Sigma^{-1}(\theta) & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.3.14)$$

Définissons les estimateurs $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n, \hat{D}_n$ et $\hat{H}_n$ de A, B, C, D et H respectivement comme suit

$$\begin{aligned} \hat{A}_n &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_t^{-2}(\hat{\theta}_{2WLS}), \\ \hat{B}_n &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_t^{-2}(\hat{\theta}_{2WLS})\xi'_{t-1}, \\ \hat{C}_n &= \hat{B}_n', \\ \hat{D}_n &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(h_t^{-2}(\hat{\theta}_{2WLS})\xi_{t-1}\xi'_{t-1} \right), \\ \hat{H}_n &= \hat{D}_n - \hat{C}_n\hat{A}_n^{-1}\hat{B}_n. \end{aligned}$$

Pour estimer la variance asymptotique Λ , il nous reste à estimer

$$Var(|\eta_1|^\delta) = E(|\eta_1|^{2\delta}) - 1.$$

Soit

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_t &= h_t^{-\frac{1}{\delta}}(\widehat{\theta}_{2WLS})\varepsilon_t \\ \widehat{Var}(|\eta_1|^\delta) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (|\widehat{\eta}_t|^{2\delta} - 1).\end{aligned}$$

Alors

$$\widehat{\Lambda}_n = \widehat{Var}(|\eta_1|^\delta)\widehat{H}_n.$$

La consistance de l'estimateur $\widehat{\Lambda}_n$ est donnée comme dans Francq et Zakoïan (2013a, Théorème 3.2), indépendamment de l'hypothèse de stabilité.

Théorème 2.3.3 (Aknouche et Touche, 2015a)

*Supposons que les hypothèses **A1**, $E(|\log(|\eta_1|^\delta)|) < \infty$, $P(\eta_1 = 0) = 0$ et $E(|\eta_1|^{2\delta}) < \infty$ soient vérifiées.*

i) Lorsque $\gamma \neq 0$

$$a) \widehat{Var}(|\eta_1|^\delta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} Var(|\eta_1|^\delta).$$

$$b) \widehat{\Lambda}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \Lambda.$$

ii) Lorsque $\gamma = 0$

$$a) \widehat{Var}(|\eta_1|^\delta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} Var(|\eta_1|^\delta).$$

$$b) \text{ et si } \mathbf{A2} \text{ est vérifiée alors } \widehat{\Lambda}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \Lambda.$$

□

Comme conséquence directe du Théorème 2.3.3, nous avons le corollaire suivant qui offre une théorie de l'estimation unifiée pour l'estimateur de la deuxième étape $\widehat{\beta}_{2WLS}$ dans les

deux cas de stabilité et d'instabilité. Ce dernier résultat permet aussi de considérer des tests (de stationnarité stricte et de symétrie) consistants.

Corollaire 2.3.2 (Aknouche et Touche, 2015a)

Sous A1, A2, $E(|\log(|\eta_1|^\delta)|) < \infty$ et $E(|\eta_1|^{2\delta}) < \infty$,

$$\sqrt{n}\widehat{\Lambda}_n^{1/2} \left(\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

□

2.4 Tests de stationnarité stricte et de symétrie pour le modèle δ -TARCH basés sur l'estimateur $2SWLSE$

En guise d'application de la théorie de l'estimation unifiée (Corollaire 2.3.2) dans les cas stable et instable, cette Section est consacrée aux tests de stationnarité stricte et de symétrie du modèle δ -TARCH (1). Un estimateur du plus grand exposant de Lyapunov, γ , fondé sur le Théorème ergodique est donnée par

$$\widehat{\gamma}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log \left(\widehat{\alpha}_{+2WLS} (\widehat{\eta}_t^+)^{\delta} + \widehat{\alpha}_{-2WLS} (\widehat{\eta}_t^-)^{\delta} \right), \quad (2.4.1)$$

où $\widehat{\eta}_t = \frac{\varepsilon_t}{h_t^{\frac{1}{\delta}}(\widehat{\beta}_{2WLS})}$. Soit $u_t = \log \left(\alpha_+ (\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_- (\eta_t^-)^{\delta} \right) - E \left(\log \left(\alpha_+ (\eta_1^+)^{\delta} + \alpha_- (\eta_1^-)^{\delta} \right) \right)$ et $\sigma_u^2 = E(u_1^2)$.

En suivant la même démarche que celle entreprise par Francq et Zakoïan (2013a, Theorem 4.1) et sous les hypothèses du Corollaire 2.3.2, la propriété de consistance et normalité asymptotique pour $\widehat{\gamma}_n$ peut être énoncée

$$\sqrt{n}(\widehat{\gamma}_n - \gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \sigma_{\gamma}^2), \quad (2.4.2)$$

où

$$\begin{cases} \sigma_{\gamma}^2 = \sigma_u^2 & \text{si } \gamma \geq 0, \\ \sigma_{\gamma}^2 = \sigma_u^2 + Var(|\eta_1|^{\delta}) (a' \Pi^{-1}(\theta) a - 1) & \text{si } \gamma < 0, \end{cases}, \quad (2.4.3)$$

et $a = \left(0, E \left(\frac{(\eta_1^+)^{\delta}}{\alpha_+(\eta_1^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_1^-)^{\delta}} \right), E \left(\frac{(\eta_1^-)^{\delta}}{\alpha_+(\eta_1^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_1^-)^{\delta}} \right) \right)'$.

2.4.1 Test de stationnarité stricte pour le modèle δ -*TARCH*

Considérons maintenant les problèmes de test de stationnarité stricte

$$H_0 : \gamma < 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \gamma \geq 0, \quad (2.4.4)$$

$$H_0 : \gamma \geq 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \gamma < 0, \quad (2.4.5)$$

pour lesquels la statistique correspondante est donnée par

$$T_n = \frac{\sqrt{n}\hat{\gamma}_n}{\hat{\sigma}_u},$$

où $\hat{\sigma}_u^2$ est la variance empirique de $(\log(\hat{\alpha}_{+2WLS}(\hat{\eta}_t^+)^{\delta} + \hat{\alpha}_{-2WLS}(\hat{\eta}_t^-)^{\delta}))_{t=1,\dots,n}$, (voir Francq et Zakoïan, 2013a).

Sous les mêmes hypothèses du Corollaire 2.3.2, il est simple de montrer de la même façon que Francq et Zakoïan (2013a), que la statistique T_n suit asymptotiquement une loi normale $N(0, 1)$, lorsque $\gamma = 0$. En outre, pour le problème (2.4.4) de test de stationnarité stricte (*SS*) défini par la région critique

$$C^{SS} = \{T_n > \Phi^{-1}(1 - \underline{\alpha})\},$$

le niveau de signification asymptotique du test est $\underline{\alpha} \in]0, 1[$, Φ étant la fonction de répartition de la loi normale standard.

De même, pour le problème de test de non-stationnarité (*NS*) (2.4.5) donné par la région critique

$$C^{NS} = \{T_n < \Phi^{-1}(\underline{\alpha})\},$$

le niveau de signification asymptotique du test est $\underline{\alpha} \in]0, 1[$.

2.4.2 Test de symétrie pour le modèle δ -*TARCH*

À partir du Corollaire 2.3.2 et de Francq et Zakoïan (2013a, Section 4.2), le problème de test de symétrie relatif au modèle δ -*TARCH* (1) peut être donné sous la forme suivante

$$H_0 : \alpha_+ = \alpha_- \quad \text{contre} \quad H_1 : \alpha_+ \neq \alpha_-. \quad (2.4.6)$$

Soit

$$T_n^S = \frac{\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{+2WLS} - \hat{\alpha}_{-2WLS})}{\hat{\sigma}_{TS}},$$

la statistique du test, où $\hat{\sigma}_{TS} = \sqrt{\widehat{Var}(|\eta_1|^\delta) e' \hat{H}^{-1} e}$, et $e = (1, 1)'$.

Sous les conditions des Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, le problème de test (2.4.6) défini par la région critique

$$C^{AS} = \{|T_n^S| > \Phi^{-1}(1 - \underline{\alpha}/2)\},$$

est consistant et possède le niveau significatif asymptotique $\underline{\alpha} \in]0, 1[$.

2.5 Illustration numérique en échantillons finis

2.5.1 Propriétés de l'estimateur *2SWLSE* en échantillons finis

Dans la première partie de cette Section, nous examinons les performances de l'estimateur *2SWLSE* à travers plusieurs répliques de simulations de séries chronologiques générées à partir du modèle δ -*TARCH*(1) avec différentes valeurs et différentes tailles d'échantillons $n \in \{200, 500, 1000\}$, la puissance δ , étant fixée à 1.6. Dans le but d'être dans les différentes sous-régions des domaines de stabilité et d'instabilité, nous avons choisi trois ensembles de paramètres : à l'intérieur ($\gamma = -1.3629$), sur les bords ($\gamma = 2.677 \times 10^{-5} \simeq 0$), et à l'extérieur ($\gamma = 0.2425$) du domaine de stabilité représenté par $\gamma < 0$. Les paramètres de pondération sont fixés à $(\tilde{\omega}, \tilde{\alpha}_+, \tilde{\alpha}_-)' = (0.8, 0.5, 0.5)'$. Pour chacune des instances considérées, nous avons évalué le *2SWLSE* sur 1000 séries δ -*TARCH*(1) simulées. La moyenne (M) et l'écart type (Std) des estimations $\hat{\theta}_{2WLS}$ ont été obtenus et sont affichés dans le tableau ci-dessous (Tableau 2.5.1).

$\tilde{\omega} = 0.8$ $\tilde{\alpha}_+ = 0.5, \tilde{\alpha}_- = 0.5$	$\gamma = -1.3629$ $(\omega = 0.5, \alpha_+ = 0.5, \alpha_- = 1)$	$\gamma = 2.677 \times 10^{-5} \simeq 0$ $(\omega = 1, \alpha_+ = 2.763, \alpha_- = 2.763)$	$\gamma = 0.2425$ $(\omega = 2, \alpha_+ = 3.1, \alpha_- = 4)$
$n = 200$			
$M(\hat{\theta}_{2WLS})$	(0.5198, 0.4759, 0.9559)	(1.7555, 2.7300, 2.7190)	(4.0368, 3.0775, 3.9975)
$Std(\hat{\theta}_{2WLS})$	(0.0617, 0.1359, 0.2082)	(1.6605, 0.2605, 0.2512)	(3.7047, 0.2612, 0.3413)
$n = 500$			
$M(\hat{\theta}_{2WLS})$	(0.5067, 0.4918, 0.9852)	(1.5681, 2.7459, 2.7464)	(4.0653, 3.0899, 4.0006)
$Std(\hat{\theta}_{2WLS})$	(0.0391, 0.0868, 0.1298)	(1.5074, 0.1500, 0.1503)	(4.1274, 0.1574, 0.2051)
$n = 1000$			
$M(\hat{\theta}_{2WLS})$	(0.5027, 0.4956, 0.9965)	(1.4384, 2.7527, 2.7570)	(3.9197, 3.0916, 4.0029)
$Std(\hat{\theta}_{2WLS})$	(0.0269, 0.0613, 0.0900)	(1.0645, 0.1047, 0.1037)	(4.0902, 0.1418, 0.1828)

 Tableau 2.5.1. Biais et Std du $2SWLSE$ pour un δ -*TARCH* gaussien sous $\gamma < 0$, $\gamma \simeq 0$ et $\gamma > 0$.

Les résultats des simulations reportés dans le Tableau 2.5.1 montre que les paramètres du modèle sont bien estimés et que les résultats sont totalement compatibles avec la théorie asymptotique. En effet, l'estimateur $\hat{\beta}_{2WLS}$ pour les paramètres α_+ et α_- possède un biais et une erreur (Std) très petits dans les deux cas stable et instable. De plus, le biais et Std du $\hat{\theta}_{2WLS}$ deviennent de plus en plus petits lorsque n augmente. Cependant, dans le cas instable, la composante $\hat{\omega}_{2WLS}$ est arbitrairement éloignée de la vraie valeur ω , ce qui confirme les résultats théoriques de non consistance de ce paramètre.

2.5.1.1 Comparaison entre le $2SWLSE$ normalisé et le $QMLE$ (gaussien)

Dans cette Sous-section, nous avons comparé l'efficacité asymptotique des estimateurs $2SWLSE$, $QMLE$ et $OLSE$ via 1000 répliquions de Monte Carlo, sous l'hypothèse $E(\eta_1^2) = 1$ plutôt que $E(|\eta_1|^\delta) = 1$. Cette comparaison est valide dans le cas où $\delta = 2$, car les conditions d'identifiabilité de ces estimateurs sont différentes. Cependant, dans le cas où $\delta \neq 2$ une forme normalisée de $2SWLSE$ est donnée par :

$$\hat{\theta}_{2WLS}^* = \hat{\theta}_{2WLS} / E|\eta_1|^\delta.$$

De même pour l'estimateur $OLSE$, sa normalisation est donnée par :

$$\hat{\theta}_{OLS}^* = \hat{\theta}_{OLS} / E|\eta_1|^\delta,$$

(voir Hamadeh et Zakoïan, 2011). Deux cas de distributions de l'innovation ont été considérés, à savoir :

a) Le mélange de deux lois gaussiennes, $0.1N(-2, 2) + 0.9N(2, 0.16)$, centré et normalisé et pour lequel nous avons pris $\delta \in \{0.8, 1, 1.6\}$.

b) La distribution de Student normalisée $t_4(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ avec degré de liberté égal à 4, de paramètre de position 0 et de paramètre d'échelle $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous avons pris dans ce cas $\delta \in \{0.8, 1\}$.

Nous avons comparé la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error), finie ($RMSE_n$) et asymptotique ($RMSE_\infty$) pour les trois estimateurs en question. Ces mesures sont définies par :

$$RMSE_n(\hat{\theta}) = \sqrt{\left(Biais(\hat{\theta})\right)^2 + Variance(\hat{\theta})}$$

$$RMSE_\infty(\hat{\theta}) = \sqrt{Variance(\hat{\theta})}.$$

Les résultats, reportés dans les Tableaux 2.5.2 et 2.5.3, montrent clairement que pour toutes les distributions de l'innovation η_1 considérées et pour toutes les valeurs de la puissance δ , l'estimateur $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ a toujours une meilleure performance que celle de $\hat{\theta}_{QML}$ et $\hat{\theta}_{OLS}^*$. En effet, les $RMSE$ (fini et asymptotique) de l'estimateur $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ sont toujours plus petits que leurs correspondants à $\hat{\theta}_{QML}$ et $\hat{\theta}_{OLS}^*$. De plus, les $RMSE$ des estimateurs diminuent de plus en plus que la taille de la série augmente. D'autre part, on peut clairement remarquer à partir du Tableau 2.5.3 que dans le cas de loi de Student ($\eta_1 \sim t_4(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$), le $RMSE$ asymptotique correspondant au $QMLE$ gaussien n'existe pas, puisque $E(\eta_1^4) = \infty$, et par conséquent, nous avons mis "-" dans les cases correspondantes.

θ	n	$\delta = 0.8$			$\delta = 1$			$\delta = 1.6$		
		$\hat{\theta}_{2WLS}^*$	$\hat{\theta}_{QML}^*$	$\hat{\theta}_{OLS}^*$	$\hat{\theta}_{2WLS}^*$	$\hat{\theta}_{QML}^*$	$\hat{\theta}_{OLS}^*$	$\hat{\theta}_{2WLS}^*$	$\hat{\theta}_{QML}^*$	$\hat{\theta}_{OLS}^*$
$\omega = 0.2$	100	0.023	0.041	0.038	0.023	0.042	0.043	0.025	0.053	0.054
	1000	0.007	0.015	0.012	0.007	0.016	0.014	0.008	0.018	0.019
	∞	0.004	0.016	0.013	0.004	0.017	0.016	0.004	0.023	0.024
$\alpha_+ = 0.4$	100	0.163	0.369	0.429	0.179	0.407	0.598	0.224	0.448	1.233
	1000	0.053	0.160	0.137	0.054	0.202	0.191	0.070	0.320	0.393
	∞	0.029	0.161	0.134	0.032	0.196	0.185	0.041	0.355	0.370
$\alpha_- = 0.1$	100	0.129	0.180	0.171	0.134	0.181	0.178	0.138	0.195	0.156
	1000	0.040	0.064	0.056	0.043	0.066	0.064	0.046	0.065	0.071
	∞	0.023	0.073	0.060	0.025	0.068	0.063	0.026	0.064	0.071

 Tableau 2.5.2. RMSE empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}^*$, $\hat{\theta}_{OLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}^*$ pour δ -TARCH(1) avec $\eta_1 \sim 0.1N(-2, 2) + 0.9N(2, 0.16)$.

θ	n	$\delta = 0.8$			$\delta = 1$		
		$\hat{\theta}_{2WLS}^*$	$\hat{\theta}_{QML}^*$	$\hat{\theta}_{OLS}^*$	$\hat{\theta}_{2WLS}^*$	$\hat{\theta}_{QML}^*$	$\hat{\theta}_{OLS}^*$
$\omega = 0.2$	100	0.026	0.030	0.033	0.026	0.040	0.033
	1000	0.007	0.015	0.011	0.007	0.017	0.015
	∞	0.010	—	0.007	0.010	—	0.017
$\alpha_+ = 0.4$	100	0.178	0.292	0.191	0.195	0.389	0.213
	1000	0.050	0.114	0.067	0.055	0.161	0.101
	∞	0.056	—	0.050	0.061	—	0.075
$\alpha_- = 0.1$	100	0.133	0.169	0.125	0.143	0.219	0.135
	1000	0.040	0.075	0.041	0.042	0.086	0.049
	∞	0.036	—	0.042	0.040	—	0.066

 Tableau 2.5.3. RMSE empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}^*$, $\hat{\theta}_{OLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}^*$ de δ -TARCH(1) avec $\eta_1 \sim t_4(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

2.5.1.2 Comparaison des estimateurs 2SWLSE, OLSE et GQMLE

Les estimateurs $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\hat{\theta}_{OLS}^*$ dépendent de $E|\eta_1|^\delta$ ce qui rend la comparaison de ces estimateurs avec le $QMLE$ gaussien non réalisable dans la pratique à moins que l'on estime $E|\eta_1|^\delta$. Donc, il est plutôt intéressant de comparer $\hat{\theta}_{2WLS}$ et $\hat{\theta}_{OLS}$ avec le $QMLE$ généralisé, $\hat{\theta}_{GQML}$ (Aue et Horváth, 2004 ; Francq et Zakoïan, 2013b) qui est basé sur l'hypothèse $E(|\eta_1|^\delta) = 1$ et qui est calculé sur la base de la distribution gaussienne généralisée suivante

$$f(x) = \frac{\delta^{(1-\frac{1}{\delta})}}{2\Gamma(\frac{1}{\delta})} \exp\left(-|x|^\delta/\delta\right) \quad (x \in \mathbb{R}, \delta > 0).$$

Une telle distribution (voir Hamadeh, 2010 ; Francq et Zakoïan, 2013b) se réduit à la distribution gaussienne standard lorsque $\delta = 2$ et à la distribution de Laplace lorsque $\delta = 1$.

Le *QMLE* généralisé calculé sur la base de la distribution de Laplace est noté par $\hat{\theta}_{LQML}$. Le Tableau 2.5.4 montre le *RMSE* empirique et asymptotique des estimateurs $\hat{\theta}_{2WLS}$, $\hat{\theta}_{OLS}$ et $\hat{\theta}_{GQML}$ obtenus à partir de 1000 simulations de Monte Carlo de séries δ -*TARCH*(1) avec différentes tailles. Ces séries sont générées à partir de la distribution gaussienne $\eta_1 \sim N(0, 1.5708)$ lorsque $\delta = 1$ (donc, $E(|\eta_1|) = 1$) et de la distribution gaussienne centrée réduite $\eta_1 \sim N(0, 1)$ lorsque $\delta = 2$.

θ	n	$\delta = 1$			$\delta = 2$		
		$\hat{\theta}_{2WLS}$	$\hat{\theta}_{LQML}$	$\hat{\theta}_{OLS}$	$\hat{\theta}_{2WLS}$	$\hat{\theta}_{QML}$	$\hat{\theta}_{OLS}$
$\omega = 0.2$	100	0.024	0.024	0.034	0.049	0.040	0.049
	1000	0.007	0.008	0.011	0.012	0.014	0.019
	∞	0.007	0.008	0.010	0.014	0.014	0.050
$\alpha_+ = 0.4$	100	0.163	0.177	0.174	0.305	0.279	0.316
	1000	0.056	0.056	0.061	0.084	0.082	0.136
	∞	0.040	0.053	0.050	0.080	0.081	0.100
$\alpha_- = 0.1$	100	0.102	0.103	0.119	0.154	0.139	0.159
	1000	0.039	0.039	0.045	0.047	0.049	0.057
	∞	0.030	0.039	0.046	0.051	0.051	0.065

Tableau 2.5.4. *RMSE* empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}$, $\hat{\theta}_{OLS}$ et *QMLE* généralisé ($\hat{\theta}_{GQML}$) de δ -*TARCH*(1) avec $\eta_1 \sim N(0, 1.5708)$ lorsque $\delta = 1$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$ lorsque $\delta = 2$. Ici, $\hat{\theta}_{GQML}$ est le *QMLE* gaussien pour $\delta = 2$ et est le *QMLE* de Laplace ($\hat{\theta}_{LQML}$) pour $\delta = 1$.

D'après les résultats du Tableau 2.5.4 on remarque que $\hat{\theta}_{2WLS}$ possède le plus petit *RMSE* lorsque $\delta = 1$ et que sa performance est proche de celle du *QMLE* gaussien lorsque $\delta = 2$. Ce résultat est bien prévisible, car comme il a été déjà montré dans la partie théorique, sous l'hypothèse de normalité, l'estimateur des moindres carrés pondrés est asymptotiquement équivalent à l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque $\delta = 2$.

Finalement, nous avons comparé aussi le *RMSE* empirique et asymptotique des estimateurs $\hat{\theta}_{2WLS}$, $\hat{\theta}_{OLS}$ et $\hat{\theta}_{LQML}$ du modèle δ -*TARCH*(1) pour des séries de tailles différentes, générées à partir de la distribution de Student $t_4(0, a)$ avec $a = 1.4513$ lorsque $\delta = 0.2$ et $a = 1.0834$ lorsque $\delta = 0.8$. Les résultats sont résumés dans le Tableau 2.5.5. Il est à noter que le *RMSE* correspondant au $\hat{\theta}_{LQML}$ est obtenu à partir de Hamadeh (2010). Les résultats du Tableau 2.5.5 montrent que $\hat{\theta}_{2WLS}$ et $\hat{\theta}_{LQML}$ sont très proches, avec une légère supériorité

du $\hat{\theta}_{2WLS}$. De plus leurs performances sont meilleures que celles de l'estimateur $\hat{\theta}_{OLS}$.

θ	n	$\delta = 0.2$			$\delta = 0.8$		
		$\hat{\theta}_{2WLS}$	$\hat{\theta}_{LQML}$	$\hat{\theta}_{OLS}$	$\hat{\theta}_{2WLS}$	$\hat{\theta}_{LQML}$	$\hat{\theta}_{OLS}$
$\omega = 0.2$	100	0.017	0.017	0.020	0.025	0.026	0.028
	1000	0.006	0.006	0.007	0.007	0.009	0.011
	∞	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.011
$\alpha_+ = 0.4$	100	0.077	0.078	0.096	0.164	0.168	0.185
	1000	0.028	0.026	0.031	0.051	0.056	0.067
	∞	0.022	0.026	0.029	0.050	0.051	0.061
$\alpha_- = 0.1$	100	0.077	0.071	0.088	0.132	0.106	0.126
	1000	0.026	0.025	0.028	0.040	0.039	0.042
	∞	0.021	0.025	0.027	0.036	0.038	0.041

Tableau 2.5.5. *RMSE* empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}$, $\hat{\theta}_{OLS}$ et $\hat{\theta}_{LQML}$ de δ -TARCH(1) avec $\eta_1 \sim t_4(0, 1.4513)$ lorsque $\delta = 0.2$ et $\eta_1 \sim t_4(0, 1.0834)$ lorsque $\delta = 0.8$.

2.5.2 Propriétés des tests de stationnarité et de symétrie en échantillons finis

Dans cette Sous-section, nous nous intéressons à l'étude de deux tests : de stationnarité stricte (*SS*) et de symétrie (*AS*) pour le modèle δ -TARCH(1).

En premier lieu, nous avons exécuté 1000 réplifications du test de stationnarité stricte (*SS*) ainsi que le test de non stationnarité (*NS*) sur des séries δ -TARCH(1) gaussiennes avec différentes tailles : 100, 500 et 1000 et ce pour plusieurs valeurs des paramètres, à l'intérieur ($\gamma < 0$), sur les bords ($\gamma \simeq 0$) et à l'extérieur du domaine de stationnarité ($\gamma > 0$). Pour toutes les instances, nous avons obtenu les fréquences relatives de rejet pour le test de stationnarité stricte (Tableau 2.5.6) et de non stationnarité (Tableau 2.5.7) avec niveau de signification $\underline{\alpha} = 0.05$.

(α_+, α_-)	(1, 1)	(2.5, 2.5)	(2.762, 2.762)	(2.7630, 2.7630)	(2.9, 2.9)	(3.1, 3.1)	(3.5, 3.5)
γ	-1.0163	-0.1000	-0.0003	0.00002	0.0484	0.1151	0.2364
n							
100	0.0	1.2	4.8	4.5	6.1	11.3	29.1
500	0.0	0.0	4.2	4.1	13.1	39.6	88.0
1000	0.0	0.0	3.5	4.0	18.2	63.1	96.4

Tableau 2.5.6. Fréquences relatives (%) de rejet pour le test de stationnarité stricte *SS* hypothèse $H_0 : \gamma < 0$ du modèle δ -TARCH(1) gaussien avec $\omega = 2$ et $\delta = 1.6$.

(α_+, α_-)	(1, 1)	(2.5, 2.5)	(2.762, 2.762)	(2.7630, 2.7630)	(2.9, 2.9)	(3.1, 3.1)	(3.5, 3.5)
γ	-1.0163	-0.1000	-0.0003	0.00002	0.0484	0.1151	0.2364
n							
100	100.0	21.1	8.9	7.6	5.6	1.9	0.4
500	100.0	41.2	5.8	6.2	1.8	0.3	0.0
1000	100.0	59.3	5.3	6.0	1.3	0.0	0.0

Table 2.5.7. Fréquences relatives (%) de rejet pour le test de non stationnarité stricte NS hypothèse $H_0 : \gamma \geq 0$ du modèle $\delta-TARCH(1)$ gaussien avec $\omega = 2$ et $\delta = 1.6$.

D'après les résultats des Tableaux 2.5.6 et 2.5.7 les tests SS et NS sont consistants et les fréquences de rejet au voisinage de $\gamma = 0$ sont proches du niveau de signification $\underline{\alpha} = 0.05$.

En deuxième lieu, quelques simulations sont exécutées pour étudier le test de symétrie du modèle $\delta-TARCH(1)$, avec des paramètres de la forme $\theta_0 = (0.5, \alpha_+, \alpha_-)$ et de puissance $\delta = 1.6$. avec de tels paramètres, nous avons $\gamma = 0$ pour $\alpha_+ = \alpha_- = 2.7630$ ou pour $\alpha_+ = 2.674$ et $\alpha_- = 2.855$. Le Tableau 2.5.8 résume les résultats du test appliqué sur le modèle $\delta-TARCH(1)$ symétrique ($\alpha_+ = \alpha_-$) et le Tableau 2.5.9 concerne les résultats relatifs au modèle asymétrique ($\alpha_+ < \alpha_-$).

Modèle avec $\alpha_+ = \alpha_-$				α_+			
	1	2.5	2.762	2.7630	2.9	3.1	3.5
n							
100	4.0	5.0	4.4	5.2	5	4.0	3.6
500	2.9	4.9	5.0	5.0	4.4	3.7	3.9
1000	2.2	4.6	4	3.9	3.7	1.9	0

Tableau 2.5.8. Fréquences relatives (%) de rejet pour le test d'asymétrie AS hypothèse $H_0 : \alpha_+ = \alpha_-$ pour $\delta-TARCH(1)$ symétrique ($\alpha_+ = \alpha_- = 2.7630$ au voisinage de $\gamma = 0$) avec $\omega = 0.5$ et $\delta = 1.6$.

Modèle avec $\alpha_+ < \alpha_-$				α_-			
	0.900	2.590	2.762	2.855	2.900	3.200	3.600
n							
100	7.2	9.9	10.1	11.2	13.4	14.8	21.6
500	9.1	19.2	20.9	26.0	29.6	36.6	56.6
1000	9.9	29.8	32.0	41.9	48.1	56.5	82.2

Tableau 2.5.9. Fréquences relatives (%) de rejet pour le test d'asymétrie AS hypothèse $H_0 : \alpha_+ = \alpha_-$ pour $\delta-TARCH(1)$ asymétrique ($\alpha_+ = 2.674$ et $\alpha_- = 2.855$ au voisinage de $\gamma = 0$) avec $\omega = 0.5$ et $\delta = 1.6$.

Les résultats reportés dans le Tableau 2.5.8 montrent que la fréquence relative de rejet de l'hypothèse de symétrie est proche du niveau de signification $\underline{\alpha}$ du test au voisinage de $\gamma = 0$. On peut remarquer aussi à partir des résultats du Tableau 2.5.9 que la fréquence de

rejet de l'hypothèse de symétrie augmente lorsque la valeur de α_- s'éloigne de la valeur de α_+ et lorsque la taille de la série augmente.

2.5.3 Application réelle : tests de stationnarité stricte et de symétrie pour des rendements d'indices boursiers

Dans cette Section, nous considérons une application des tests de stationnarité stricte et de symétrie sur des rendements quotidiens de trois indices boursiers et deux prix de pétrole :

- *SP500* du 10/04/1997 au 20/03/2000.
- *CAC40* du 11/06/2010 au 06/10/2013.
- *KV Pharmaceutique (NYSE : KV-A)* du 18/09/2008 au 07/02/2011.
- Prix du pétrole *BRENT* du 02/01/2008 au 14/03/2013.
- Prix du pétrole *WTI* du 11/01/2010 au 14/03/2013.

La présence d'effets *GARCH* dans ce genre de séries a été montré dans la littérature par de nombreuses études empiriques. En supposant que les séries suivent un modèle δ -*TARCH*(1), nous cherchons à tester si le modèle symétrique peut fournir une description adéquate des données.

Avant de passer à l'application des tests de stationnarité stricte et de symétrie sur ces séries, nous représentons d'abord les graphes ainsi que les histogrammes des séries centrées et réduites.

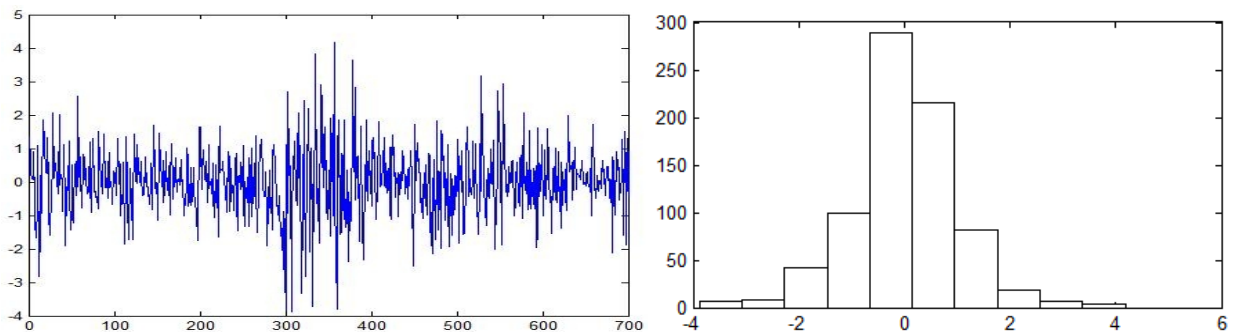


Figure 2.5.1a. Graphe et histogramme de la série transformée CAC40 centrée et réduite.

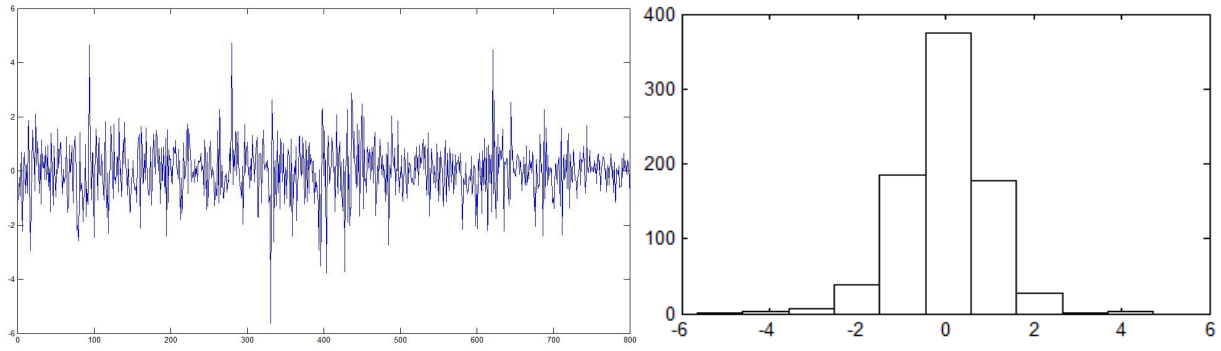


Figure 2.5.1b. Graphe et histogramme de la série transformée *WTI* centrée et réduite.

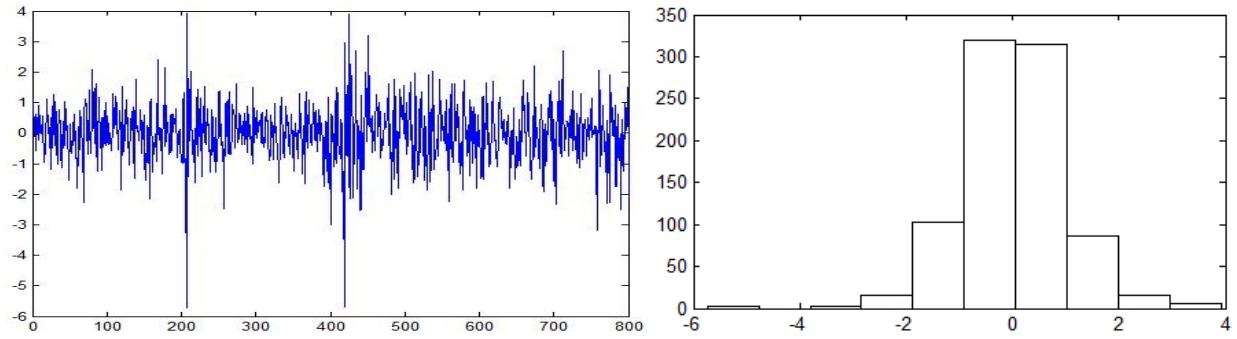


Figure 2.5.1c. Graphe et histogramme de la série transformée *SP500* centrée et réduite.

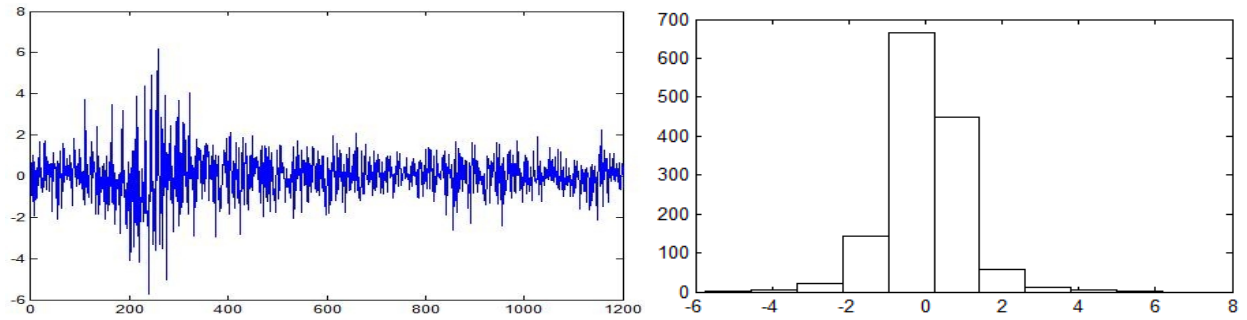


Figure 2.5.1d. Graphe et histogramme de la série transformée *BRENT* centrée et réduite.

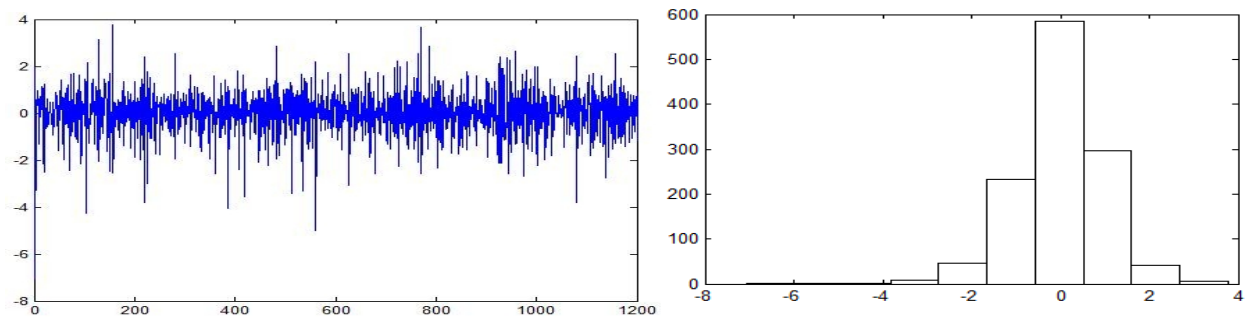


Figure 2.5.1e. Graphe et histogramme de la série transformée *KV-A* centrée et réduite.

Afin de suspecter, a priori, la présence d'effet de levier et d'effet de Taylor dans les séries réelles précédentes, nous avons dressé le corrélogramme des carrés et le corrélogramme des valeurs absolues pour chaque série. Les Figures 2.5.2 montrent que les corrélogrammes des valeurs absolues sont légèrement plus importants que les corrélogrammes des carrés, ce qui est indicatif de la présence d'effet de Taylor dans ces séries. De même, les Tableaux 2.5.10 affichent les corrélations croisées entre y_t^2 et y_{t-h}^- et entre y_t^2 et y_{t-h}^+ . On peut observer que pour les séries *CAC40* et le prix du pétrole *WTI*, les corrélations empiriques croisées entre y_t^2 et y_{t-h}^- sont plus importantes que celles entre y_t^2 et y_{t-h}^+ ce qui suggère une présence d'effet de levier dans ces séries. Cependant, il n'en est pas de même pour la série *KV-A* où les corrélations croisées y_t^2 et y_{t-h}^+ sont en revanche plus importantes que celles entre y_t^2 et y_{t-h}^- (effet de Levier inversé).

h	CAC40	
	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$
1	0.1029	-0.0137
2	0.2089	0.0185
3	0.1749	0.0567
4	0.1615	-0.0060
5	0.1653	0.0653
6	0.1416	0.0607
7	0.0460	0.0623
8	0.1481	0.0468
9	0.1306	-0.0136
10	0.1059	-0.0137
11	0.1171	0.0849
12	0.1082	-0.0034
13	0.0787	0.0409
14	0.0458	0.0757
15	0.0401	0.0398

Tableau 2.5.10a. Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série CAC40.

h	KV-A	
	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$
1	-0.0099	0.2448
2	-0.0128	0.0284
3	-0.0470	0.0443
4	-0.0002	-0.0050
5	0.0108	-0.0110
6	0.0024	0.0582
7	-0.0083	0.0231
8	0.0142	-0.0147
9	-0.0169	0.0189
10	-0.0111	0.0101
11	0.0279	0.0021
12	0.0248	-0.0212
13	-0.0135	0.0449
14	0.0084	0.0385
15	0.0245	0.0368

Tableau 2.5.10b. Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série KV-A.

h	WTI	
	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$
1	0.0742	-0.0138
2	0.1451	0.0189
3	0.0785	-0.0223
4	0.0663	-0.0238
5	-0.0258	0.0160
6	0.0781	0.0027
7	0.0689	-0.0294
8	0.0588	-0.0311
9	0.0542	-0.0528
10	0.0509	-0.0020
11	0.0133	0.0103
12	0.0459	-0.0178
13	0.0395	0.0091
14	0.0763	-0.0151
15	0.0141	0.0305

Tableau 2.5.10c. Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série WTI.

h	SP500	
	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$
1	0.2047	-0.0594
2	0.2314	-0.0902
3	0.0776	-0.0609
4	0.0105	0.0649
5	0.1013	0.0222
6	0.0592	-0.0049
7	0.1135	-0.0253
8	0.0484	-0.0302
9	0.0013	0.0277
10	0.0089	0.0311
11	0.0629	-0.0087
12	0.0381	-0.0308
13	0.0054	-0.0087
14	0.0366	-0.0034
15	0.0125	-0.0119

Tableau 2.5.10d. Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de série SP500.

h	BRENT	
	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$	$\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$
1	0.1031	0.1472
2	0.0848	0.0493
3	0.1686	0.0642
4	0.2252	0.0816
5	0.1985	0.0653
6	0.1975	0.0891
7	0.1690	0.0626
8	0.1569	0.0276
9	0.2144	0.0824
10	0.1343	0.1542
11	0.1879	0.0506
12	0.1923	0.0402
13	0.1795	0.0906
14	0.1433	0.1652
15	0.1538	0.0539

Tableau 2.5.10e. Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série BRENT.

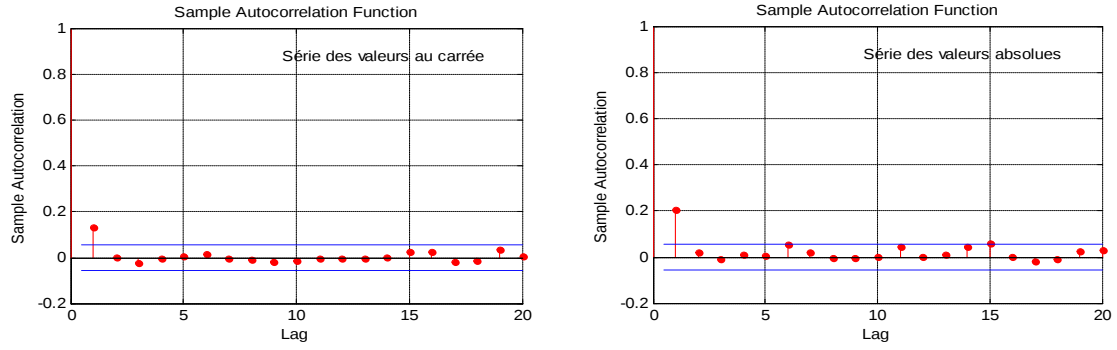


Figure 2.5.2a. Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite *KV-A*.

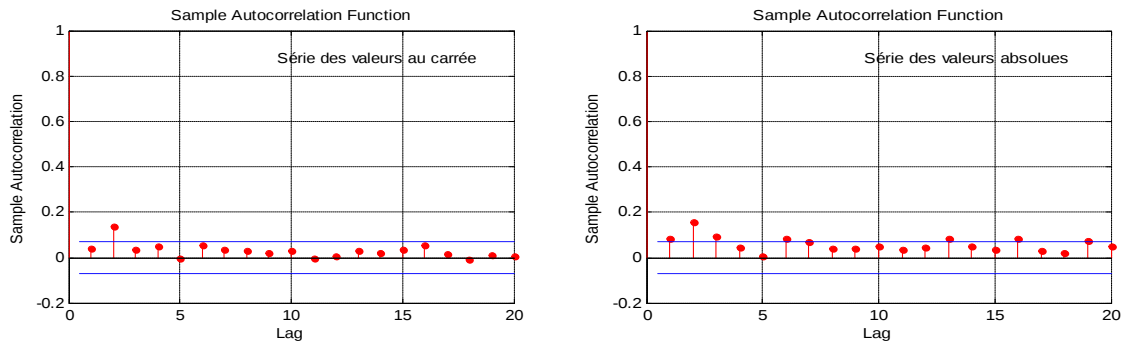


Figure 2.5.2b. Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite *WTI*.

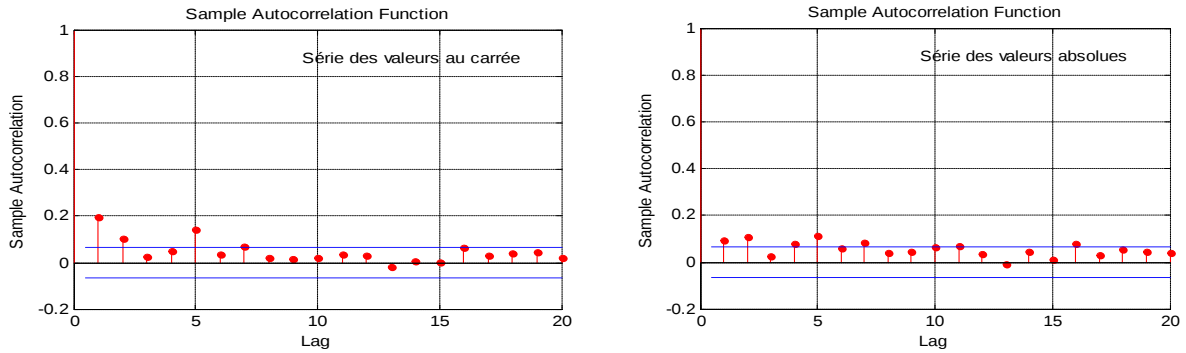


Figure 2.5.2c. Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite *SP500*.

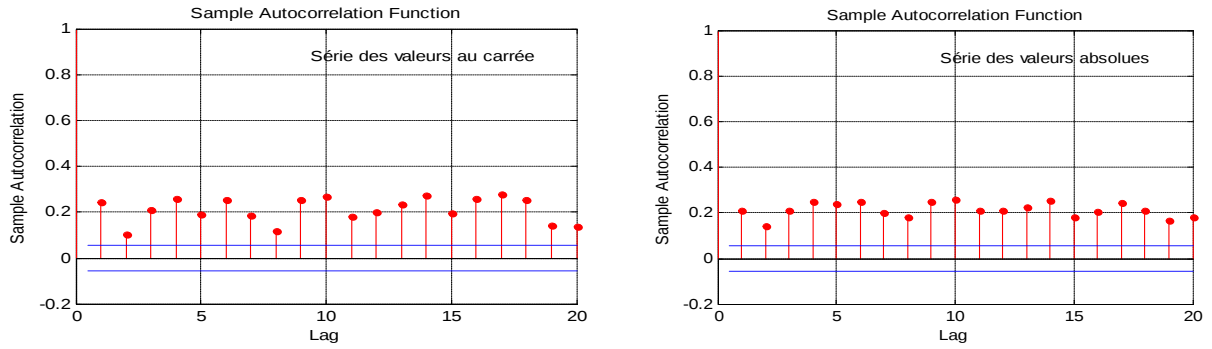


Figure 2.5.2d. Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite *BRENT*.

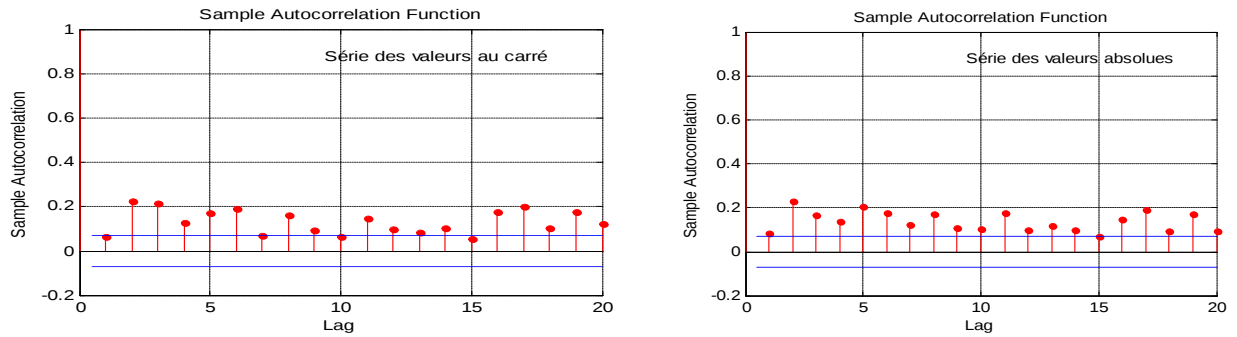


Figure 2.5.2e. Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite *CAC40*.

Indice	δ	δ - <i>TARCH</i> (1)		
		$\hat{\theta}_{2WLS}$	T_n	T_n^S
SP500	0.75	(0.0271, 0.0261, 0.1086)	-90.2275	2.7827
	1	(0.0088, 0.0197, 0.1438)	-70.0283	1.8320
	2	(0.0001, 0.0050, 0.2392)	-50.5357	1.4388
CAC40	0.75	(0.0283, 0.0386, 0.1207)	-77.2263	1.3611
	1	(0.0098, 0.0254, 0.1299)	-63.9010	0.9080
	2	(0.0001, 0.0063, 0.1731)	-47.7589	-0.9324
BRENT	0.75	(0.0345, 0.1185, 0.1871)	-88.5585	1.6183
	1	(0.0131, 0.1192, 0.2008)	-72.0733	0.5478
	2	(0.0003, 0.1183, 0.2308)	-53.5948	-2.8093
KV-A	0.75	(0.4583, 0.2489, 0.1304)	-74.2405	-3.1837
	1	(0.4064, 0.2929, 0.1266)	-58.9959	-2.5942
	2	(0.3338, 0.5344, 0.1298)	-39.8059	3.7200
WTI	0.75	(0.0338, 0.0520, 0.1290)	-82.7698	1.4911
	1	(0.0123, 0.0514, 0.1353)	-68.7270	0.8546
	2	(0.0003, 0.0167, 0.0661)	-59.7845	-0.6192

Tableau 2.5.11. $\hat{\theta}_{2WLS}$ et la statistique T_n du test de stationnarité stricte et la statistique T_n^S du test de symétrie de δ -*TARCH*(1) pour les rendements des indices boursiers du marché.

Le Tableau 2.5.11 présente les paramètres estimés du modèle δ -*TARCH*(1) ainsi que les

valeurs des statistiques T_n et T_n^S correspondantes respectivement aux tests de stationnarité stricte et de symétrie. On peut remarquer à partir du Tableau 2.5.11 que l'hypothèse de stationnarité stricte ne peut être rejetée à des seuil de signification raisonnables. De plus, une telle hypothèse est d'autant plus acceptable que la puissance δ décroît, ce qui est naturellement en concordance avec l'effet de Taylor. On peut aussi remarquer que l'hypothèse de symétrie du modèle est rejetée dans le cas du *CAC40* et du prix de pétrole *WTI* de même pour *SP500* lorsque $\delta > 0.75$ et pour le *BRENT* lorsque $\delta < 2$, ce qui n'est pas le cas pour le *KV-A* où cette hypothèse est rejetée quelque que soit la puissance δ . Ces résultats semblent être en concordance avec les résultats de la Sous-section 2.5.3 (autocorrélations croisées).

Chapitre 3

Preuves des résultats du Chapitre 2

Dans ce Chapitre nous donnons les démonstrations détaillées des différents résultats obtenus dans le Chapitre précédent. Les notations suivantes sont utilisées : $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.}$, $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p}$, $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}}$ et représentent respectivement, la convergence presque sûre, la convergence en probabilité et la convergence en loi, quand $n \rightarrow \infty$. Tandis que $o_p(1)$, $o_{p.s.}(1)$, indiquent respectivement, un terme convergent en probabilité vers 0, un terme convergent $p.s.$ vers 0.

3.1 Preuve du Théorème 2.3.1

Preuve de (2.3.4)

En combinant les relations (2.3.1),(2.3.2) et (2.3.3), nous obtenons

$$\hat{\theta}_{1WLS} - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\hat{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\hat{\theta})}, \quad (3.1.1)$$

$$\hat{\theta}_{2WLS} - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})}. \quad (3.1.2)$$

Sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$), $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{N})$ est asymptotiquement stationnaire.

D'où le théorème ergodique et l'indépendance entre η_t et $|\varepsilon_{t-1}|^\delta$ donnent

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \left(\frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \left(\mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right) = E_\infty \left(\mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right) E(|\eta_t|^\delta - 1) = 0,$$

desquels ainsi que de (3.1.1) découle la première partie de (2.3.4).

Pour la deuxième partie de (2.3.4), si l'on peut montrer que :

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right) \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} = o_{p.s.}(1), \quad (3.1.3a)$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right) h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1) = o_{p.s.}(1), \quad (3.1.3b)$$

alors (3.1.2) devient

$$\hat{\theta}_{2WLS} - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} + o_{p.s.}(1). \quad (3.1.4)$$

La deuxième partie de (2.3.4) sera alors démontrée de la même façon que la première partie. Pour montrer (3.1.3), notons d'abord que la formule de Taylor, appliquée à la fonction

$g(\hat{\theta}_{1WLS}) = \frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})}$ au voisinage de θ , nous donne

$$\begin{aligned} g(\hat{\theta}_{1WLS}) - g(\theta) &= (\hat{\theta}_{1WLS} - \theta)' \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta^*), \\ &= -\frac{2L'(\hat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{h_t^3(\theta^*)}, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

où $\theta^* = (\omega^*, \alpha_{+1}^*, \alpha_{-1}^*, \dots, \alpha_{+q}^*, \alpha_{-q}^*)'$ est compris entre θ et $\hat{\theta}_{1WLS}$, et où

$$L' = (1, \alpha_{+1}^*, \alpha_{-1}^*, \dots, \alpha_{+q}^*, \alpha_{-q}^*).$$

Par conséquent, les membres gauches de (3.1.3a) et (3.1.3b) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} &= -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS}-\theta)}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) &= -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS}-\theta)}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)}{h_t^3(\theta^*)}. \end{aligned}$$

Donc (3.1.3a) et (3.1.3b) découlent de la consistance forte de $\widehat{\theta}_{1WLS}$, du théorème ergodique et de la finitude des moments

$$E_\infty \left(\frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) \text{ et } E_\infty \left(\frac{h_t(\theta)}{h_t^3(\theta^*)} \mathcal{Y}_{t-1} \right).$$

Preuve de (2.3.5)

En réécrivant (3.1.1) sous la forme suivante

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta \right) = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)}{h_t^2(\widetilde{\theta})}, \quad (3.1.6)$$

le théorème ergodique donne

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \left(\frac{1}{h_t^2(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) := H(\widetilde{\theta}, \theta). \quad (3.1.7a)$$

D'autre part, la suite $(W_t, t \in \mathbb{N}^*)$ donnée par $W_t = Y_{t-1} \frac{h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)}{h_t^2(\widetilde{\theta})}$ est une différence de martingales bornée par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}^*)$. Puisque, par le théorème ergodique, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(W_t W'_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t^2(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)^2}{h_t^4(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}, \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} Var(|\eta_1|^\delta) E_\infty \left(\frac{h_t^2(\theta)}{h_t^4(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) &:= Var(|\eta_1|^\delta) \Gamma(\widetilde{\theta}, \theta), \end{aligned}$$

le théorème central limite des martingales (*TCL*) nous donne alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)^2}{h_t^2(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \text{Var} (|\eta_1|^\delta) \Gamma \left(\tilde{\theta}, \theta \right) \right). \quad (3.1.7b)$$

Ainsi, (2.3.5) découle de (3.1.6), (3.1.7a) et (3.1.7b).

Preuve de (2.3.6)

Réécrivons (3.1.2) sous la forme suivante

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{2WLS} - \theta \right) = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})}. \quad (3.1.8)$$

Si l'on montre que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} = o_p(1), \quad (3.1.9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1) \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) = o_p(1), \quad (3.1.10)$$

alors (2.47) devient

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{2WLS} - \theta \right) = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\theta)} + o_p(1), \quad (3.1.11)$$

et la preuve de (2.3.6) sera basée sur (3.1.11). Notons que (3.1.9) est une conséquence de (3.1.3a). Pour démontrer (3.1.10), en utilisant : i) le developpement de Taylor de $\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})}$

au voisinage de θ , et ii) la normalité asymptotique de $\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{2WLS} - \theta \right)$ nous aurons

$$\hat{\theta}_{2WLS} - \theta = n^{-1/2} O_p(1).$$

En utilisant, de plus, le théorème ergodique, le membre gauche de (3.1.10) devient

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) &= -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)}{h_t^3(\theta^*)} \\
 &= \frac{2L'O_p(1)}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)}{h_t^3(\theta^*)} \\
 &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 2L'O_p(1) E_\infty \left(\mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)}{h_t^3(\theta^*)} \right) \\
 &= 2L'O_p(1) E_\infty \left(\mathcal{Y}_{t-1} \frac{h_t(\theta)}{h_t^3(\theta^*)} \right) E \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Passant à présent à la relation (3.1.11). En utilisant le théorème ergodique, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \left(\frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) := \Pi(\theta). \quad (3.1.12)$$

Le théorème central limite des martingales *TCL* nous donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, Var(|\eta_1|^\delta) \Pi(\theta)). \quad (3.1.13)$$

D'où, (2.3.6) se démontre en combinant les relations (3.1.11), (3.1.12) et (3.1.13). ■

3.2 Preuve du Théorème 2.3.2

Preuve de (2.3.8)

Sous la condition d'instabilité ($\gamma > 0$) (avec $q = 1$), la relation (2.2.19) est obtenue. Pour la première partie de (2.3.8), l'écriture de la deuxième et de la troisième composantes de (2.3.2) et (2.3.3), tout en utilisant (2.3.1), nous donne

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega)}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xi_{t-1} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\widehat{\theta})} \left(\widehat{\beta}_{1WLS} - \beta \right) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right)}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xi_{t-1}. \quad (3.2.1)$$

À partir de (2.2.19) et en utilisant le fait que $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$ et $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$ nous avons

$$\frac{\xi_{t-1}}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Donc, en utilisant le lemme de Césaro et la compacité de Θ , laquelle implique que $|\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega|$ est borné *p.s.*, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega)}{(\tilde{\omega} + \tilde{\alpha}_+(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^2} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Par conséquent (3.2.1) devient

$$\widehat{\beta}_{1WLS} - \beta = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^{\delta} - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xi_{t-1} + o_{p.s.}(1). \quad (3.2.2)$$

En utilisant à nouveau (2.2.19) nous avons $\frac{\tilde{\omega}}{(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta}} = o_{p.s.}(1)$ et $\frac{\tilde{\omega}}{(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}} = o_{p.s.}(1)$.

D'où

$$\frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{(\tilde{\omega} + \tilde{\alpha}_+(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} & \frac{\frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}}{\left(\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} \\ \frac{\frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}}{\left(\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} & \frac{1}{\left(\tilde{\alpha}_+ \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} + \tilde{\alpha}_- \right)^2} \end{pmatrix} + o_{p.s.}(1).$$

Par conséquent, par la loi des grands nombres et le lemme de Césaro on en déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{(\tilde{\omega} + \tilde{\alpha}_+(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E \left(\begin{pmatrix} \frac{(\eta_{t-1}^+)^{2\delta}}{\left(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta} \right)^2} & \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{\left(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta} \right)^2} \\ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{\left(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta} \right)^2} & \frac{(\eta_{t-1}^-)^{2\delta}}{\left(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta} \right)^2} \end{pmatrix} \right). \quad (3.2.3)$$

D'autre part, en utilisant la même démarche que pour (3.2.3), il s'ensuit que :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(\omega + \alpha_+ (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_- (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}) (|\eta_t|^{\delta} - 1)}{(\tilde{\omega} + \tilde{\alpha}_+ (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^2} \xi_{t-1} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\left(\alpha_+ + \alpha_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)}{\left(\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} \frac{\left(\alpha_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \alpha_- \right)}{\left(\tilde{\alpha}_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \tilde{\alpha}_- \right)^2} \right) (|\eta_t|^{\delta} - 1) + o_{p.s.}(1).$$

Ainsi, par la loi forte des grands nombres, le lemme de Césaro et le fait que $E(|\eta_1|^{\delta}) = 1$, il vient que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^{\delta} - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (3.2.4)$$

D'où, la première partie de (2.3.8) découle de (3.2.2), (3.2.3) et (3.2.4).

Pour montrer la deuxième partie de (2.3.8), l'écriture de la deuxième et de la troisième composantes de (2.3.2) et (2.3.3), tout en exploitant (2.3.1), nous donne

$$\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(h_t(\theta) (|\eta_t|^{\delta} - 1) - (\widehat{\omega}_{2WLS} - \omega))}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} \xi_{t-1}. \quad (3.2.5)$$

Si l'on montre que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_{p.s.}(1) \quad (3.2.6a)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) (|\eta_t|^{\delta} - 1) \xi_{t-1} = o_{p.s.}(1) \quad (3.2.6b)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} = o_{p.s.}(1), \quad (3.2.6c)$$

alors (3.2.5) devient

$$\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(h_t(\theta) (|\eta_t|^{\delta} - 1) - (\widehat{\omega}_{2WLS} - \omega))}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} + o_{p.s.}(1). \quad (3.2.7)$$

Donc en utilisant la relation (2.2.19) on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

et (3.2.7) sera écrite comme suit

$$\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|\eta_t|^\delta - 1}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} + o_{p.s.}(1). \quad (3.2.8)$$

Par conséquent, la deuxième partie de (2.3.8) découle de (3.2.8) en observant qu'à partir de (3.2.3), nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} E \left(\begin{array}{cc} \frac{(\eta_{t-1}^+)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \\ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^-)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \end{array} \right), \quad (3.2.9)$$

et par la loi forte des grands nombres il vient que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} E \left(\frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \right) E \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) = 0.$$

Ainsi, il reste à démontrer (3.2.6). En utilisant le développement de Taylor de la fonction $g(\widehat{\theta}_{1WLS}) = \frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})}$ au voisinage de θ , comme dans (3.1.5), avec $q = 1$, les membres gauches de (3.2.6) deviennent

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = - \frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{n} \times \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{(\omega^* + \alpha_+^* (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-^* (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^3} \quad (3.2.10a)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) \xi_{t-1} = - \frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{n} \times \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \quad (3.2.10b)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} = - \frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{n} \times \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1}}{h_t^3(\theta^*)}. \quad (3.2.10c)$$

D'où, à partir de (3.2.10) les égalités (3.2.6) découlent de (2.2.19), de la consistance de $\widehat{\beta}_{1WLS} - \beta$, de la "bornitude" *p.s* de $|\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega|$ et enfin de la compacité de l'ensemble Θ .

Ainsi, la preuve de (2.3.8) est achevée.

Preuve de (2.3.9)

Réécrivons (3.2.1) comme suit

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega)}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xi_{t-1} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{1WLS} - \beta)}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xi_{t-1}. \quad (3.2.11)$$

À partir de (2.2.19) $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} \infty$ et $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} \infty$, l'on peut écrire

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\xi_{t-1}}{h_t^2(\widehat{\theta})} < \infty, \quad p.s.,$$

et en utilisant la bornitude *p.s.* de $|\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega|$, il s'ensuit que

$$\frac{(\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega)}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1}}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (3.2.12)$$

Ainsi, (3.2.11) devient

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{1WLS} - \beta) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\widehat{\theta})} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xi_{t-1} + o_{p.s.}(1). \quad (3.2.13)$$

À présent, la suite définie par $V_t = \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\widehat{\theta})} \xi_{t-1}$ est une différence de martingales par

rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}^*)$. Puisque, en utilisant (2.2.19) et (3.2.3) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(V_t V'_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= Var(|\eta_1|^\delta) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t^2(\theta)}{h_t^4(\tilde{\theta})} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \\ &= Var(|\eta_1|^\delta) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(\omega + \alpha_+(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^2}{(\tilde{\omega} + \tilde{\alpha}_+(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^4} \begin{pmatrix} (\varepsilon_{t-1}^+)^{2\delta} & (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta} \\ (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta} & (\varepsilon_{t-1}^-)^{2\delta} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} Var(|\eta_1|^\delta) E \left(\begin{pmatrix} (\eta_{t-1}^+)^{2\delta} \frac{(\alpha_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^4} & \frac{((\alpha_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2)(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^4} \\ \frac{((\alpha_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2)(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^4} & (\eta_{t-1}^-)^{2\delta} \frac{(\alpha_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^4} \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} Var(|\eta_1|^\delta) E \left(\frac{(\zeta_{t-1}\beta)^2}{(\zeta_{t-1}\tilde{\beta})^4} \zeta_{t-1} \zeta'_{t-1} \right), \end{aligned}$$

alors le théorème central limite des Martingales de (Billingsley 1995 ; Brown, 1971) implique que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} \frac{h_t(\theta)}{h_t^2(\tilde{\theta})} (\eta_t^\delta - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, Var(|\eta_1|^\delta) \Omega(\tilde{\beta}, \beta) \right). \quad (3.2.14)$$

Par conséquent, le résultat (2.3.9) découle de (3.2.13), (3.2.3) et (3.2.14).

Preuve de (2.3.10)

À partir de (3.2.5), la formule suivante

$$\sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{2WLS} - \beta \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1) - (\hat{\omega}_{2WLS} - \omega))}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \xi_{t-1},$$

est vraie et peut être écrit comme suit

$$\sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{2WLS} - \beta \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1) - (\hat{\omega}_{2WLS} - \omega))}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} + o_p(1), \quad (3.2.15)$$

à condition que l'on puisse démontrer

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.16a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.16b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) \xi_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.16c)$$

Cependant, (3.2.16a) est vérifiée puisque c'est une conséquence de (3.2.6a). Pour montrer (3.2.16b) et (3.2.16c), en utilisant le développement de Taylor comme pour (3.2.10b) et (3.2.10c), on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} = -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS}-\theta)}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1}}{h_t^3(\theta^*)}. \quad (3.2.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) \xi_{t-1} &= -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS}-\theta)}{\sqrt{n}} \times \\ &\quad \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1}. \end{aligned} \quad (3.2.17b)$$

À partir de (2.2.19), qui implique que $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^+)^\delta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$ et $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^-)^\delta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$, on a

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\xi_{t-1}}{h_t^3(\theta^*)} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{t=1}^{\infty} \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} < \infty \quad p.s.$$

Donc, à partir de (3.2.17a) et (3.2.17b), les égalités (3.2.17b) et (3.2.17c) découlent de la consistance de $\widehat{\beta}_{1WLS}$ et la bornitude *p.s.* de $|\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega|$.

Maintenant, en utilisant le même argument pour (3.2.10), nous avons à partir de (2.2.19),

$$\frac{(\widehat{\omega}_{2WLS}-\omega)}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

Ainsi, (3.2.15) devient

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{|\eta_t|^\delta - 1}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} + o_p(1). \quad (3.2.18)$$

D'autre part, la suite $(X_t, t \in \mathbb{N}^*)$ définie par $X_t = \frac{|\eta_t|^\delta - 1}{h_t(\theta)} \xi_{t-1}$ est une différence de martingales bornée par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}^*)$. En utilisant à nouveau (2.2.19)

et $\rho^t (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$ et $\rho^t (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$, nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E (X_t X_t' / \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{Var(|\eta_1|^{\delta})}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xi_{t-1}' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} N(0, Var(|\eta_1^{\delta}|) \Sigma(\beta)).$$

Donc, le théorème central limite des martingales stipule que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{|\eta_t|^{\delta} - 1}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, Var(|\eta_1^{\delta}|) \Sigma(\beta)). \quad (3.2.19)$$

Finalement, (2.3.10) découle de (3.2.18), (3.2.9) et (3.2.19).

Preuve de (2.3.12)

Lorsque $\gamma = 0$, la relation (2.2.20) est vérifiée. Gardant en vue (3.2.1), pour montrer la première partie de (2.3.12), il suffit de prouver que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.20a)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xi_{t-1}' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} E \left(\begin{array}{cc} \frac{(\eta_{t-1}^+)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \\ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^-)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+ (\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_- (\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \end{array} \right). \quad (3.2.20b)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^{\delta} - 1)}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\left(\alpha_+ + \alpha_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)}{\left(\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} (|\eta_t|^{\delta} - 1) \right) \xi_{t-1} + o_p(1). \quad (3.2.20c)$$

Puisque, par compacité de Θ , $|\widehat{\omega}_{1WLS} - \omega|$ est borné *p.s.*, la relation (3.2.20a) est vérifiée si l'on montre

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0. \quad (3.2.21)$$

Maintenant, à partir de (2.2.20) il s'ensuit que

$$\frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \xi_{t-1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p} 0.$$

Par le théorème de convergence dominée il en découle que

$$E \left(\frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \xi_{t-1} \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

et par le lemme de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \xi_{t-1} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par conséquent

$$E \left(\left\| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \xi_{t-1} \right\| \right) \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\| \frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \xi_{t-1} \right\| \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui signifie que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0,$$

montrant (3.2.21) et par là même (3.2.20a).

On procède de la même manière pour démontrer (3.2.20b). Exploitant (2.2.20), le théorème de convergence dominée et la loi forte des grands nombres, il s'ensuit que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\| \frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} - E \begin{pmatrix} \frac{(\eta_{t-1}^+)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \\ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^-)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

($\|A\|$ représente la norme euclidienne de la matrice A) ou de manière équivalente

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} E \begin{pmatrix} \frac{(\eta_{t-1}^+)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \\ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^-)^{2\delta}}{(\tilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \tilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \end{pmatrix},$$

ce qui montre (3.2.20b).

Concernant (3.2.20c), à partir de (2.2.20), le théorème de convergence dominée et la loi forte des grands nombres donnent

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\| \left(\frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta}}{h_t^2(\tilde{\theta})} - \frac{\left(\frac{\alpha_+ + \alpha_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right) (|\eta_t|^\delta - 1)}{\left(\frac{\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} \right) \right\| = \\
 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) \left\| \left(\frac{h_t(\theta)(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta}}{h_t^2(\tilde{\theta})} - \frac{h_t(\theta)(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right) - \left(\frac{\left(\frac{\alpha_+ + \alpha_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)}{\left(\frac{\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} \right)}{\left(\frac{\alpha_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \alpha_- \right)}{\left(\frac{\tilde{\alpha}_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \tilde{\alpha}_- \right)^2} \right) \right\| \\
 & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) E \left(\left\| \left(\frac{h_t(\theta)(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta}}{h_t^2(\tilde{\theta})} - \frac{h_t(\theta)(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right) - \left(\frac{\left(\frac{\alpha_+ + \alpha_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)}{\left(\frac{\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} \right)}{\left(\frac{\alpha_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \alpha_- \right)}{\left(\frac{\tilde{\alpha}_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \tilde{\alpha}_- \right)^2} \right) \right\| \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta}}{h_t^2(\tilde{\theta})} - \frac{h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}}{h_t^2(\tilde{\theta})} - \frac{\left(\frac{\alpha_+ + \alpha_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)}{\left(\frac{\tilde{\alpha}_+ + \tilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}} \right)^2} \right) \left(\frac{\alpha_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \alpha_- \right)}{\left(\frac{\tilde{\alpha}_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \tilde{\alpha}_- \right)^2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0,$$

ce qui prouve (3.2.20c). Par conséquent, la première partie de (2.3.12) est achevée.

Passons maintenant à la deuxième partie de (2.3.12). Si l'on montre que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_p(1) \quad (3.2.22a)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} = o_p(1) \quad (3.2.22b)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) \xi_{t-1} = o_p(1), \quad (3.2.22c)$$

alors (3.2.5) pourrait être écrite comme suit

$$\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} + o_p(1), \quad (3.2.23)$$

et la deuxième partie de (2.3.12) découlerait des relations suivantes

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} E \left(\begin{array}{cc} \frac{(\eta_{t-1}^+)^{2\delta}}{(\widetilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \widetilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\widetilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \widetilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \\ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta} (\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\widetilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \widetilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} & \frac{(\eta_{t-1}^-)^{2\delta}}{(\widetilde{\alpha}_+(\eta_{t-1}^+)^{\delta} + \widetilde{\alpha}_-(\eta_{t-1}^-)^{\delta})^2} \end{array} \right), \quad (3.2.24)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\begin{array}{c} \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{\widetilde{\alpha}_+ + \widetilde{\alpha}_- \frac{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}} \\ \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{\widetilde{\alpha}_+ \frac{(\eta_{t-1}^+)^{\delta}}{(\eta_{t-1}^-)^{\delta}} + \widetilde{\alpha}_-} \end{array} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^1} 0, \quad (3.2.25)$$

ce qui s'avère vrai en utilisant le même argument pour démontrer (3.2.20b) et (3.2.20c).

En utilisant de nouveau la formule de Taylor, (3.2.10) est vraie dans le cas où $\gamma = 0$. Donc, à partir de la bornitude *p.s.* de $\left\| \widehat{\theta}_{1WLS} - \theta \right\|$, montrer (3.2.22) revient à montrer les égalités suivantes

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{(\omega^* + \alpha_+^* (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-^* (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^3} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.26a)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{(\omega^* + \alpha_+^* (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-^* (\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^3} \xi_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.26b)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.26c)$$

Cependant, (2.2.20), le théorème de convergence dominée et la loi forte des grands nombres donnent

$$\begin{aligned} E \left\| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \right\| &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\| \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ E \left(\left\| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \right\| \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\| \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ E \left(\left\| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \right\| \right) &\leq E \frac{|\eta_t|^\delta - 1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\| \frac{h_t(\theta)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.2.26) et donc la deuxième partie de (2.3.12).

Preuve de (2.3.9) sous $\gamma = 0$

Pour montrer (2.3.9) sous la condition $\gamma = 0$, montrons d'abord que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0. \quad (3.2.27)$$

Par des manipulations algébriques élémentaires on a

$$\begin{aligned} E \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \right\| \right) &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\left\| \frac{h_t(\theta)}{h_t^2(\theta) h_t(\theta)} \xi_{t-1} \right\| \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{1}{h_t(\theta)} \right), \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

où C est une constante positive générique non nécessairement la même lorsqu'elle apparaît dans différents termes. Cependant, des remplacements successifs dans (1.3.1) donnent

$$\begin{aligned} (\omega + \alpha_+(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}) &= h_t(\theta) \\ &= \omega(1 + X_{t-1} + X_{t-1}X_{t-2} + \dots + X_{t-1}\dots X_1) + X_{t-1}\dots X_1 h_0, \end{aligned}$$

où $X_t = \alpha_+(\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_-(\eta_t^-)^{\delta}$. Donc (3.2.28) devient

$$E \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \right\| \right) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{1}{1 + X_{t-1} + X_{t-1}X_{t-2} + \dots + X_{t-1}\dots X_1} \right). \quad (3.2.29)$$

D'où, (3.2.27) découle de (3.2.29) et de l'hypothèse **A2**.

Maintenant, grâce à (3.2.27), l'égalité (3.2.11) devient

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\tilde{\theta})} \sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{WLS} - \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xi_{t-1} + o_p(1). \quad (3.2.30)$$

Pour la martingale $(V_t, t \in \mathbb{N}^*)$ définie par $V_t = \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xi_{t-1}$, en utilisant le même argument que pour (2.3.9), et sous la condition d'instabilité ($\gamma > 0$), on a

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(V_t V'_t / \mathcal{F}_{t-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \text{Var}(|\eta_1^\delta|) \Omega(\tilde{\beta}, \beta).$$

Donc, le résultat (3.2.14), conséquence du théorème central limite des martingales demeure vrai sous la condition $\gamma = 0$ et on l'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \text{Var}(|\eta_1^\delta|) \Omega(\tilde{\beta}, \beta)\right). \quad (3.2.31)$$

Ainsi, sous la condition $\gamma = 0$, (2.3.9) découle de (3.2.20b), (3.2.30) et (3.2.31).

Preuve de (2.3.10) sous $\gamma = 0$

Comme pour la preuve de (2.3.10) sous la condition d'instabilité ($\gamma > 0$), en utilisant (3.2.5), on obtient

$$\sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{2WLS} - \beta \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1) - (\hat{\omega}_{2WLS} - \omega))}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \xi_{t-1}.$$

La dernière égalité entraîne que

$$\sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{2WLS} - \beta \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(h_t(\theta) (|\eta_t|^\delta - 1) - (\hat{\omega}_{2WLS} - \omega))}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xi_{t-1} + o_p(1), \quad (3.2.32)$$

à condition que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_p(1), \quad (3.2.33a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} = o_p(1), \quad (3.2.33b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \left(|\eta_t|^\delta - 1 \right) \xi_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.33c)$$

Il est clair que (3.2.33a) est une conséquence de (3.2.22a). Pour montrer (3.2.22b) et (3.2.22c), en utilisant le développement de Taylor comme pour (3.2.10b) et (3.2.10c), on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} = -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS}-\theta)}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{1}{(\omega^* + \alpha_+^*(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-^*(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^3} \xi_{t-1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) h_t(\theta) \xi_{t-1} = -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS}-\theta)}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1}.$$

Donc, la bornitude *p.s.* de $\|\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta\|$ entraîne (3.2.33b) et (3.2.33c) pourvu que l'on montre que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{|\eta_t|^\delta - 1}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.35)$$

En utilisant la même démarche que dans la preuve de (3.2.29), on a

$$\begin{aligned} E \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \right\| \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{h_t^2(\theta)}{h_t^3(\theta^*) h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{1}{(\omega + \alpha_+(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} + \alpha_-(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta})^2} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{1}{(1 + X_{t-1} + X_{t-1} X_{t-2} + \dots + X_{t-1} \dots X_1)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

D'où, (3.2.34) découle de (3.2.36) sous l'hypothèse **A2**.

De même

$$\begin{aligned}
 E \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \right\| \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{h_t(\theta)}{h_t^3(\theta^*)} \xi_{t-1} \right) E \left(\left| |\eta_t|^\delta - 1 \right| \right) \\
 &\leq \frac{E(|\eta_t|^\delta - 1)}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n E \left(\frac{h_t^2(\theta)}{h_t^3(\theta^*) h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \right) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.2.35) découle de l'hypothèse **A2**.

D'autre part, sous l'hypothèse **A2** il s'ensuit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0,$$

et à partir de la bornitude de $|\widehat{\omega}_{2WLS} - \omega|$, (3.2.32) devient

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\xi_{t-1} \xi'_{t-1}}{h_t^2(\theta)} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} + o_p(1), \quad (3.2.37)$$

Sous l'hypothèse $\gamma = 0$, le résultat (2.3.10) découle de (3.2.37), (3.2.24) et

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{(|\eta_t|^\delta - 1)}{h_t(\theta)} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, Var(|\eta_1|^\delta) \Sigma(\beta) \right),$$

qui est une conséquence de l'application du théorème central limite des martingales. ■

3.3 Preuve du Théorème 2.3.3

Preuve de (i)

D'abord, nous avons

$$\begin{aligned}
 \widehat{Var}(|\widehat{\eta}_1|^\delta) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (|\widehat{\eta}_t|^{2\delta} - 1) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\widehat{\eta}_t|^{2\delta} - 1 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (|\widehat{\eta}_t|^{2\delta} - |\eta_t|^{2\delta}).
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, la première partie de (i) découle de la loi forte des grands nombres à condition que nous puissions démontrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (|\hat{\eta}_t|^{2\delta} - |\eta_t|^{2\delta}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{2WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_{p.s.}(1). \quad (3.2.38)$$

Or, (3.2.38) a été établie dans la preuve du Théorème 2.3.1 sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$) (voir (3.1.3a)) et sous $\gamma > 0$ (voir (3.2.6a)). Ainsi, la première partie de (i) est démontrée.

Concernant la deuxième partie de (i), sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$), le développement de Taylor de $\hat{H}_n = H_n(\hat{\theta}_{2WLS})$ au voisinage de θ donne

$$\hat{H}_n = H_n(\hat{\theta}_{2WLS}) = H_n(\theta) + (\hat{\theta}_{2WLS} - \theta)' \frac{\partial H_n(\theta^*)}{\partial \theta}, \quad (3.2.39)$$

où θ^* est entre $\hat{\theta}_{2WLS}$ et θ . De plus, par le théorème ergodique on a

$$H_n(\theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} H,$$

et ainsi (3.2.39) devient

$$\hat{H}_n = H_n(\hat{\theta}_{2WLS}) = H + (\hat{\theta}_{2WLS} - \theta)' \frac{\partial H_n(\theta^*)}{\partial \theta} + o_{p.s.}(1). \quad (3.2.40)$$

D'autre part, un calcul assez fastidieux mais routinier de $\frac{\partial H_n(\theta^*)}{\partial \theta_i}$ montre que

$$E \left(\left\| \frac{\partial H_n(\theta^*)}{\partial \theta_i} \right\| \right) < \infty \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.41)$$

Donc (3.2.41) et la consistance forte de $\hat{\theta}_{2WLS} - \theta$ impliquent que

$$(\hat{\theta}_{2WLS} - \theta)' \frac{\partial H_n(\theta^*)}{\partial \theta} = o_{p.s.}(1),$$

ce qui prouve la deuxième partie de (i) sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$).

Lorsque $\gamma > 0$, la deuxième partie de (i) est vraie si l'on montre que

$$\hat{H}_n = \hat{D}_n - \hat{C}_n \hat{A}_n^{-1} \hat{B}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \Sigma. \quad (3.2.42)$$

Puisque, par le développement de Taylor (voir (3.2.6a)) et (2.2.19), on a

$$\begin{aligned}\widehat{B}_n &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{2WLS})} \xi_{t-1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} + o_{p.s.}(1).\end{aligned}$$

Donc, à partir de (2.2.19) et en utilisant la fait que $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$ et $\rho^t(\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$, on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

ce qui implique que $\widehat{B}_n = o_{p.s.}(1)$ et de la même manière $\widehat{C}_n = o_{p.s.}(1)$.

Maintenant, à partir de (2.2.19) on a

$$\begin{aligned}n\widehat{A}_n &= \sum_{t=1}^n \frac{h_t^2(\theta)}{h_t^2(\widehat{\theta}_{2WLS})} \frac{1}{h_t^2(\theta)} \\ &\leq C \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \\ &\leq C \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{h_t^2(\theta)} < \infty.\end{aligned}$$

Donc $\widehat{A}_n = o_{p.s.}(1)$ et par conséquent, nous avons démontré que $\widehat{C}_n \widehat{A}_n^{-1} \widehat{B}_n = o_{p.s.}(1)$. D'autre part,

$$\widehat{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{2WLS})} \xi_{t-1} \xi'_{t-1},$$

et par le développement de Taylor (voir (3.2.6a)) et (2.2.19) on a

$$\widehat{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} + o_{p.s.}(1),$$

En utilisant (2.2.19) à nouveau et le théorème ergodique, on obtient finalement

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \xi_{t-1} \xi'_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \Sigma.$$

Ainsi, (3.2.42) est vérifiée et la preuve de (i) est enfin achevée.

Preuve de (ii)

Nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{Var}(|\eta_1|^\delta) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (|\hat{\eta}_t|^{2\delta} - 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\hat{\eta}_t|^{2\delta} - 1 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (|\hat{\eta}_t|^{2\delta} - |\eta_t|^{2\delta}). \end{aligned}$$

La première partie de (ii) découle de la loi faible des grands nombres à condition de montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (|\hat{\eta}_t|^{2\delta} - |\eta_t|^{2\delta}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{2WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \xi_{t-1} \xi'_{t-1} = o_p(1). \quad (3.2.43)$$

Cependant, (3.2.43) a été établie dans la preuve du Théorème 2.3.2 lorsque $\gamma = 0$ (voir (3.2.22a)). Donc, nous avons la première partie de (ii). Pour la deuxième partie de (ii), supposons que **A1**, **A2**, $\gamma = 0$ et $E(|\eta_1|^{2\delta}) < \infty$ sont vérifiées. Alors, (ii) s'établie si l'on montre que

$$\hat{H}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \Sigma. \quad (3.2.44)$$

Or, le même argument utilisé pour prouver (i) nous conduit à

$$\hat{C}_n \hat{A}_n^{-1} \hat{B}_n = o_p(1),$$

et ainsi

$$\hat{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \Sigma.$$

■

3.4 Preuve du Corollaire 2.3.1

Preuve de (i)

Suivant Hamadeh et Zakoïan (2011), en posant $\eta_t^* = \frac{\eta_t}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{1}{\delta}}}$, $\theta^* = E(|\eta_1|^\delta) \theta$, et $h_t^*(\theta^*) = h_t(\theta) E(|\eta_1|^\delta)$, le modèle (1.3.1) peut être réécrit comme suit

$$\begin{cases} \varepsilon_t = (h_t^*(\theta^*))^{\frac{1}{\delta}} \eta_t^* \\ h_t^*(\theta^*) = \omega^* + \sum_{j=1}^q \alpha_{+,j}^* (\varepsilon_{t-j}^+)^{\delta} + \alpha_{-,j}^* (\varepsilon_{t-j}^-)^{\delta} \end{cases}, t \in \mathbb{N}^*, \quad (3.2.45)$$

où

$$\begin{aligned} E(\eta_1^*) &= E\left(\frac{\eta_t}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{1}{\delta}}}\right) = \frac{1}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{1}{\delta}}} E(\eta_t) = 0, \\ E(|\eta_1^*|^\delta) &= \frac{1}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{\delta}{\delta}}} E(|\eta_t|^\delta) = 1, \\ E(|\eta_1^*|^{2\delta}) &= \frac{1}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} E(|\eta_t|^{2\delta}) < \infty. \end{aligned}$$

D'où, le modèle (3.2.45) vérifie les hypothèses des Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 et alors sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$), l'estimateur $\widehat{\theta}_{2WLS}^*$, donné par

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{2WLS}^* &= \left(\sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{h_t^{*2}(\widehat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} |\varepsilon_t|^\delta}{h_t^{*2}(\widehat{\theta}_{1WLS})} \\ &= \left(\frac{1}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} \frac{1}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} |\varepsilon_t|^\delta}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} \\ &= \left(\sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} |\varepsilon_t|^\delta}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} \\ &= \widehat{\theta}_{2WLS}, \end{aligned}$$

possède la propriété de consistance et de normalité asymptotique

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{2WLS} - \theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, Var \left(|\eta_1^*|^\delta \right) \left(E_\infty \left(\frac{1}{h_t^{*2}(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right) \right)^{-1} \right),$$

où

$$\begin{aligned} Var \left(|\eta_1^*|^\delta \right) \left(E_\infty \left(\frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}'}{h_t^{*2}(\theta)} \right) \right)^{-1} &= Var \left(\left| \frac{\eta_t}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{1}{\delta}}} \right|^\delta \right) \left(E_\infty \left(\frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}'}{(E(|\eta_1|^\delta))^2 h_t^2(\theta)} \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{2\delta}{\delta}}} Var \left(|\eta_1|^\delta \right) \left(\frac{1}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} E_\infty \left(\frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}'}{h_t^2(\theta)} \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{(E(|\eta_1|^\delta))^2}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} Var \left(|\eta_1|^\delta \right) \left(E_\infty \left(\frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}'}{h_t^2(\theta)} \right) \right)^{-1} \\ &= Var \left(|\eta_1|^\delta \right) \left(E_\infty \left(\frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}'}{h_t^2(\theta)} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{2WLS} - \theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, Var \left(|\eta_1|^\delta \right) \left(E_\infty \left(\frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right) \right)^{-1} \right),$$

où

$$\sqrt{n}E \left(|\eta_1|^\delta \right) \left(\frac{1}{E \left(|\eta_1|^\delta \right)} \widehat{\theta}_{2WLS} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, Var \left(|\eta_1|^\delta \right) \left(E_\infty \left(\frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right) \right)^{-1} \right),$$

démontrant (i).

Preuve de (ii)

Pour établir (ii) sous la condition d'instabilité ($\gamma \geq 0$), l'application du Théorème 2.3.2 avec $\widehat{\beta}_{2WLS}^* = \widehat{\beta}_{2WLS}$, donne

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{2WLS} - \beta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, Var \left(|\eta_1^*|^\delta \right) \left(E \left(\frac{1}{(\zeta_{t-1}^{*'})^2} \zeta_{t-1}^* \zeta_{t-1}^{*'} \right) \right)^{-1} \right),$$

où

$$\begin{aligned} Var(|\eta_1^*|^\delta) \left(E_\infty \left(\frac{1}{h_t^{*2}(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) \right)^{-1} &= Var \left(\left| \frac{\eta_t}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{1}{\delta}}} \right|^\delta \right) \left(E \left(\frac{1}{(\zeta_{t-1}^* \beta)^2} \zeta_{t-1}^* \zeta_{t-1}^{*'} \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{Var(|\eta_t|^\delta)}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} \left(E \left(\frac{1}{(\zeta_{t-1}' \beta)^2} \zeta_{t-1} \zeta_{t-1}' \right) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta_{t-1}^* &= ((\eta_{t-1}^{*+})^\delta, (\eta_{t-1}^{*-})^\delta)' \\ &= \left(\left(\frac{\eta_{t-1}^+}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{1}{\delta}}} \right)^\delta, \left(\frac{\eta_{t-1}^-}{(E(|\eta_1|^\delta))^{\frac{1}{\delta}}} \right)^\delta \right)' \\ &= \frac{1}{E(|\eta_1|^\delta)} ((\eta_{t-1}^+)^\delta, (\eta_{t-1}^-)^\delta)' \\ &= \frac{1}{E(|\eta_1|^\delta)} \zeta_{t-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{2WLS} - E(|\eta_1|^\delta) \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \frac{Var(|\eta_1|^\delta)}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} \left(E \left(\frac{1}{(\zeta_{t-1}' \beta)^2} \zeta_{t-1} \zeta_{t-1}' \right) \right)^{-1} \right),$$

où

$$\sqrt{n}E(|\eta_1|^\delta) \left(\frac{\hat{\beta}_{2WLS}}{E(|\eta_1|^\delta)} - \beta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \frac{Var(|\eta_1|^\delta)}{(E(|\eta_1|^\delta))^2} \left(E \left(\frac{1}{(\zeta_{t-1}' \beta)^2} \zeta_{t-1} \zeta_{t-1}' \right) \right)^{-1} \right),$$

ce qui démontre (ii). ■

Conclusion de la première partie et perspectives

Dans cette première partie de la thèse, nous avons étudié l'inférence statistique du modèle *ARCH* à seuil en puissance (noté ici δ -*TARCH* et appelé aussi *ARCH* asymétrique en puissance, "Asymmetric Power *ARCH*", *APARCH*) qui est un modèle :

- à volatilité pure ;
- à volatilité endogène ;
- à volatilité linéaire des paramètres.

Exploitant la propriété de linéarité de la variance conditionnelle du modèle δ -*TARCH* par rapport aux paramètres, nous avons proposé une méthode d'estimation des moindres carrés pondérés en deux étapes (*2SWLS*) qui a une forme explicite obtenue en résolvant deux systèmes d'équations linéaires. Sous l'hypothèse que la puissance δ du modèle soit connue, nous avons étudié le comportement asymptotique de l'estimateur *2SWLSE* indépendamment de la condition de stationnarité stricte (dite aussi de stabilité). Nous avons en outre montré que l'estimateur *2SWLSE* pourrait être plus efficace que l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (*QMLE*) gaussien, notamment pour de petites puissances et qu'il peut avoir la propriété de convergence et de normalité asymptotique même pour des innovations à queues lourdes, notamment à variance infinie. Nous avons également vu que les estimateurs *2SWLSE* et *QMLE* généralisé (avec un choix approprié de la fonction instrumentale) sont asymptotiquement équivalents dans le sens qu'ils aient la même variance asymptotique. De plus, nous avons montré que notre estimateur est toujours asymptotiquement plus efficace que toutes les variantes des moindres carrés ordinaires proposés par Hamadeh et Zakoïan (2011), et ce, sous des hypothèses beaucoup plus faibles. Nous avons par ailleurs proposé un

estimateur consistant de la variance asymptotique de l'estimateur $2SWLSE$ dans les deux cas de stabilité et d'instabilité, ce qui nous a permis d'en proposer des tests de stationnarité stricte et de symétrie consistants. Des exemples numériques, sur des séries simulées et sur des données financières réelles ont été utilisés afin d'illustrer ces tests. En dernier lieu, nous avons comparé la rapidité et l'efficacité numérique (en échantillons finis) de $2SWLSE$ avec d'autres estimateurs ($QMLE$ gaussien, $QMLE$ Laplacien, $OLSE$, une variante de l' $OLSE$) via une étude de simulation intensive et il en ressort que l'estimateur $2SWLSE$ proposé en est le meilleur.

Une généralisation de la méthode $2SWLS$ au modèle $GARCH$ à seuil en puissance (δ - $TGARCH$) en est nécessaire afin de prendre en compte la persistance dans la volatilité, trait connu des séries financières. Hélas, dans ce cas la volatilité n'est plus linéaire en paramètres et la méthode $2SWLS$ perd son avantage de forme explicite par rapport aux méthodes du quasi-maximum de vraisemblance (gaussien et non gaussien). Cependant, en principe, les propriétés asymptotiques de cette méthode restent équivalentes à celles du $QMLE$ généralisé calculée avec une densité instrumentale appropriée (dite omnibus par Francq et Zakoïan, 2013b).

Par ailleurs, nous avons considéré uniquement le cas où la puissance δ est connue. Cependant, en pratique, la connaissance de cette puissance n'est pas évidente et ainsi, le problème non linéaire où la puissance δ est inconnue demeure important.

Enfin, une extension de la méthode du $2SWLS$ au cas d'un δ - $T(G)ARCH$ à coefficients périodiques s'avère importante.

Deuxième partie

Inférence statistique du modèle
autorégressif à coefficients aléatoires
symétrique (RCA), basée sur
l'approche des moindres carrés
pondérés en quatre étapes

Chapitre 4

Structure dynamique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique (RCA)

4.1 Introduction

Depuis la fin des années 1970, un intérêt sans cesse croissant a été prêté aux modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (Random Coefficient Autoregression, RCA) en raison de leur importante place dans l'analyse non linéaire des séries chronologiques. Comme bien connu, le modèle RCA est étroitement lié aux modèles de type $ARCH$ et à certaines classes de modèles bilinéaires. Il peut être également vu comme une extension du mélange *iid* d'autorégressions, de l'autorégression à changement de régime markovien et de l'autorégression à seuil, au cas où les coefficients aléatoires ne sont pas astreints à être à valeurs finies. Les premières investigations concernant le modèle RCA ont été dues à Conlisk (1974-1976) et Andel (1976). D'autres applications importantes de ces modèles aux problèmes financiers et à l'analyse des données écologiques et longitudinales ont été explorées par la suite (voir Liu et Tiao, 1980 ; Li et Hui 1983 ; Stenseth et *al*, 1999 ; Rahiala 1999 ; Wang et Ghosh, 2008 ; Aue et Horváth, 2011). Cependant, comparés aux modèles $(G)ARCH$, les modèles RCA ont reçu moins d'attention en pratique quoiqu'une resurgence d'intérêt en a été observée au courant de la dernière décennie.

Les propriétés probabilistes du modèle RCA ont été analysées d'abord dans les travaux séminaux de Andel (1976), Nicholls et Quinn (1982) et Tong (1990). En effet, des conditions

nécessaires et/ou suffisantes pour la stationnarité stricte et la stationnarité au second ordre ont été proposées. Plusieurs améliorations concernant ces conditions ont été obtenues par la suite (voir Feigin et Tweedie, 1985 ; Tsay, 1987 ; Bougerol et Picard, 1992a ; Goldie et Maller, 2000 ; Cline et Pu, 2002 ; Aue et *al*, 2006 ; Babillot et *al*, 1997). En particulier, Aue et *al* (2006) ont donné la plus faible condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation *RCA* ait une solution non-anticipative strictement stationnaire. Cette condition est connue aussi sous le nom de *stabilité par rapport à la stationnarité stricte*.

Le reste de ce Chapitre est organisé comme suit. Dans la deuxième Section, une présentation générale du modèle *RCA* est donnée. La troisième Section est consacrée aux différentes interactions entre le modèle *RCA* et quelques modèles de séries chronologiques. Dans la quatrième Section, les conditions de stationnarité stricte ainsi que les conditions d'existence des moments d'ordre supérieurs seront présentées.

4.2 Présentation du modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique *RCA*(1)

Les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires ont été introduits par Andel (1976) et étudiés en détail par Nicholls et Quinn (1980-1982). On dit que le processus $(y_t, t \in \mathbb{N})$ est un processus autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre un, noté *RCA*(1), s'il est défini par une équation du type :

$$y_t = (\phi + \xi_t)y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (4.2.1)$$

où ϕ est un nombre réel et y_0 est une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dans la suite de ce Chapitre, on suppose que le modèle (4.2.1) est soumis à l'hypothèse suivante :

(H1) : $((\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{N})$ est un processus *iid*, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec $E(\xi_1) = 0$, $E(\varepsilon_1) = 0$, $E(\xi_1^2) = \rho^2 > 0$ et $E(\varepsilon_1^2) = \sigma^2 > 0$.

La suite $(y_t, t \in \mathbb{N})$ définit un modèle non-linéaire de séries temporelles. Initialement à son introduction, ce modèle a été utilisé pour modéliser les valeurs d'une série chronologique, mais, actuellement, il peut également être vu comme un modèle de volatilité (i.e. de repré-

sentation et prévision de la variabilité des valeurs), où cette dernière est exprimée comme une fonction quadratique symétrique des observations passées. En effet, le modèle (4.2.1) est caractérisé par une moyenne conditionnelle stochastique, telle que :

$$E(y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \phi y_{t-1}, \quad (4.2.2a)$$

et une variance conditionnelle stochastique

$$Var(y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2, \quad (4.2.2b)$$

dépendant explicitement du processus observé ; $\mathcal{F}_t$ étant la σ -algèbre générée par $((\varepsilon_s, \xi_s), s \leq t)$. Ainsi, l'équation (4.2.1) est un modèle à volatilité endogène.

Comme pour le modèle δ -*TARCH*, l'étude d'existence de solutions (asymptotiquement) stationnaires du modèle unilatéral (4.2.1) est rendue plus simple en considérant la version bilatérale suivante

$$y_t = (\phi + \xi_t)y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.3)$$

correspondant au domaine d'évolution $\mathbb{Z}$ et pour laquelle l'hypothèse **H1** sera adaptée.

Les Figures 4.2.1 ci-dessous montrent les trajectoires simulées d'un *RCA*(1) symétrique, avec différentes valeurs du vecteur de paramètres λ .

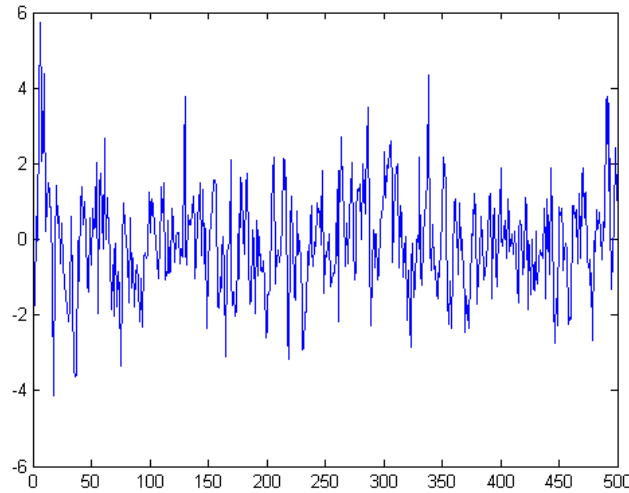


Figure 4.2.1a. Trajectoire Simulée d'un modèle *RCA*(1) généré à partir de $\lambda = (0.5, 0.25, 1)$ sous l'hypothèse **H1**

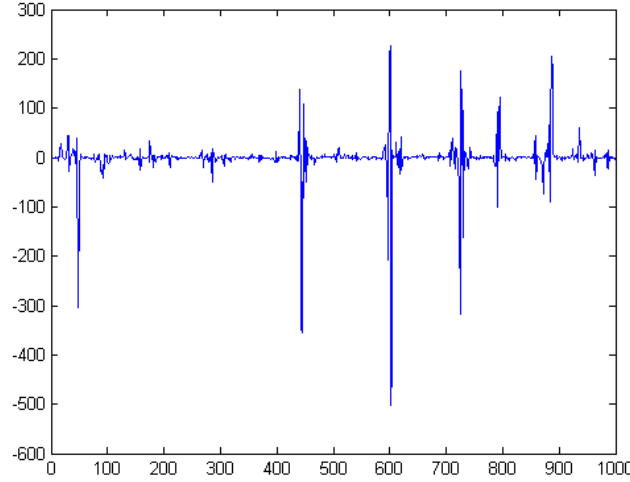


Figure 4.2.1b. Trajectoire Simulée d'un modèle *RCA*(1) généré à partir de $\lambda = (0.5, 1.5, 1)$ sous l'hypothèse **H1**

4.3 Relation du modèle *RCA* avec d'autres modèles de séries chronologiques

Le modèle *RCA* est étroitement lié aux modèles de type *ARCH* et à certaines classes de modèles bilinéaires. Il peut être également vu comme une extension du mélange *iid* d'autorégressions et de l'autorégression à seuil au cas où les coefficients aléatoires ne sont pas astreints à être discrets. Dans la suite, nous citons quelques cas importants.

4.3.1 Relation avec le modèle autorégressif (*AR*)

Dans le cas où ξ_t est dégénérée (i.e. $E(\xi_1^2) = \rho^2 = 0$), le modèle (4.2.3) se réduit à un processus autorégressif $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ d'ordre un défini par une équation aux différences stochastique de la forme

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus *iid* vérifiant **H1**.

4.3.2 Relation avec le modèle autorégressif double (*DAR*)

Un modèle autorégressif double est défini par l'équation suivante

$$y_t = \phi y_{t-1} + \sqrt{\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2} \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.1)$$

où $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus *iid* avec $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t^2) = 1$. Il est clair que les modèles (4.2.3) et (4.3.1) sont équivalents au second-ordre dans le sens qu'ils ont la même moyenne et variance conditionnelles (cf. Tsay, 1987). En effet, pour le modèle (4.3.1), on a

$$E(y_t / \mathcal{F}'_{t-1}) = \phi y_{t-1}, \quad (4.3.2a)$$

$$Var(y_t / \mathcal{F}'_{t-1}) = \rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2, \quad (4.3.2b)$$

$\mathcal{F}'_t$ étant la σ -algèbre générée par $(\eta_s, s \leq t)$. En comparant (4.2.2) et (4.3.2) on voit bien que les modèles (4.2.3) et (4.2.4) sont équivalents au second-ordre. Pour que les modèles soient équivalents aux ordres supérieurs et donc en distribution conditionnelle, il suffit de supposer que les innovations des deux modèles sont gaussiennes. C'est d'ailleurs ce que Ling (2007) a établi. En effet, d'après Ling (2007), le modèle (4.2.3) tel que $((\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{Z})$ est un processus *iid* gaussien bivarié de moyenne 0 et de matrice de covariance $diag(\sigma^2, \rho^2)$, a la même distribution conditionnelle que celle du modèle *DAR* (4.3.1) généré par une innovation $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ gaussienne de moyenne nulle et de variance unité (voir aussi Chen et al, 2014).

4.3.3 Relation avec le modèle *ARCH*

Dans le cas particulier où $\phi = 0$, il s'avère qu'un modèle *ARCH* conditionnellement gaussien

$$y_t = \sqrt{\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2} \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.3)$$

a la même distribution conditionnelle que le modèle *RCA* gaussien suivant

$$y_t = \xi_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.4)$$

où $((\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{Z})$ est un processus *iid* gaussien bivarié de moyenne 0 et de matrice de covariance $diag(\sigma^2, \rho^2)$. Si les hypothèses de normalité ne sont pas valables alors les modèles

(4.3.3) et (4.3.4) sont seulement équivalents au second-ordre dans le sens où ils ont la même espérance et variance conditionnelles.

4.3.4 Similarités et différences avec le modèle autorégressif à erreur *ARCH* (*AR-ARCH*)

On a vu qu'un modèle *RCA* symétrique est équivalent au moins au second-ordre (conditionnel) au modèle autorégressif double (*DAR*). Ce modèle *DAR* a cependant une forme très similaire au modèle autorégressif à erreur *ARCH* (*AR-ARCH*), mais il a une structure tout à fait différente qu'il convient de présenter ici. Considérons un modèle *AR-ARCH* (1) (Weiss, 1984 ; Pantula, 1988) et un modèle *DAR* (1) donnés respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{AR-ARCH (1)} \quad & \begin{cases} y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t(\lambda) \\ \varepsilon_t(\lambda) = \sqrt{h_t(\lambda)} \eta_t \\ h_t(\lambda) = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2(\lambda) \\ \lambda = (\phi, \omega, \alpha)' \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}, \\
 \text{DAR (1)} \quad & \begin{cases} y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t(\lambda) \\ \varepsilon_t(\lambda) = \sqrt{h'_t(\theta)} \eta_t \\ h'_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2 \\ \theta = (\omega, \alpha)' \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Bien que les deux modèles semblent avoir une forme similaire, ils présentent une différence fondamentale qui est que la variance conditionnelle $h'_t(\theta) = \omega + \alpha y_{t-1}^2$ dans le modèle *DAR* dépend directement du processus observé ($y_t, t \in \mathbb{Z}$) et des paramètres $\theta = (\omega, \alpha)'$ de variance conditionnelle. À l'encontre, la variance conditionnelle $h_t(\lambda) = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2(\lambda)$ dans le modèle *AR-ARCH* dépend plutôt de l'innovation ($\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$) et de tous les paramètres du modèle, i.e. de $\lambda = (\phi, \omega, \alpha)'$. De plus, $h_t(\lambda)$ ne dépend de ($y_t, t \in \mathbb{Z}$) qu'à travers l'innovation puisque l'on peut écrire tout de même

$$\begin{aligned}
 h_t(\lambda) &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2(\lambda) \\
 &= \omega + \alpha (y_{t-1} - \phi y_{t-2})^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi, une autre différence fondamentale entre ces deux modèles, laquelle en découle de la

première, est que la variance conditionnelle est linéaire des paramètres pour le modèle *DAR* alors qu'elle est non-linéaire des paramètres pour le modèle *AR-ARCH*. Enfin, il s'avère que le modèle *DAR* est à volatilité endogène tandis que le modèle *AR-ARCH* est à volatilité exogène. En conclusion, si le modèle *RCA* est étroitement lié au modèle *DAR*, il présente une structure tout à fait différente du modèle *AR-ARCH*, à part qu'ils sont tous deux des modèles à la fois de moyenne et de volatilité conditionnelles.

4.3.5 Relation avec le modèle bilinéaire markovien (*MBL*)

Le modèle bilinéaire markovien (*MBL*) introduit initialement par Tong (1981) est défini par l'équation suivante

$$y_t = (\phi + \beta\varepsilon_t)y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite *iid* de moyenne nulle et de variance σ^2 . Ainsi, un modèle *MBL* est un cas spécifique d'un modèle autorégressif à coefficients aléatoires dans lequel le coefficient aléatoire, $\xi_t = \beta\varepsilon_t$, est pleinement corrélé avec le terme d'innovation ε_t (voir Aknouche, 2015a, 2015c; Tong, 1981). À l'encontre, dans le modèle *RCA* (symétrique) les termes du coefficient aléatoire ξ_t et de l'innovation ε_t sont non-corrélés.

4.3.6 Relation avec le modèle autorégressif à changement de régime markovien (*MS-AR*)

On peut définir un modèle autorégressif à changement de régime markovien (*MS-AR*) comme un processus bivarié (S_k, y_k) dans lequel S_k , variable indicatrice des changements de régimes, est modélisée par une chaîne de markov à espace d'états fini, homogène et ergodique et l'évolution de la variable observée y_k suit un modèle autorégressif linéaire.

Un processus stochastique $(y_t, t \in \mathbb{Z})$ à valeurs réelles, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, est dit admettre une représentation autoregressive à changement de régime markovien (*MS-AR*) s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante (Hamilton,

1998-1990-1994)

$$y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i(S_t) y_{t-i} + \sigma(S_t) \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.5)$$

où $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite *iid* de moyenne nulle et de variance unité, et où $(S_t, t \in \mathbb{Z})$ est une chaîne de markov à espace d'états fini $E = \{1, \dots, K\}$, homogène, de matrice de probabilité de transition $P = (P_{ij})_{i,j \in E}$ avec $p_{ij} = P(S_{t+1} = j / S_t = i)$. On suppose qu'elle est irréductible, apériodique et récurrente, donc elle est stable. On suppose également que la loi marginale de la chaîne $(S_t, t \in \mathbb{Z})$ est initialisée à partir de sa loi de probabilité invariante, i.e. $(S_t, t \in \mathbb{Z})$ est strictement stationnaire avec $P(S_t = j) = \pi_j$ où $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)$ est solution du système $\pi P = \pi$ et $\pi 1 = 1$ avec $1 = (1, \dots, 1)_{K \times 1}$. Ainsi, les paramètres du modèle $\phi_i(S_t)$ ($i = 1, \dots, p$) et $\sigma(S_t)$ dépendent des états de la chaîne $(S_t, t \in \mathbb{Z})$.

Ainsi, un modèle *MS-AR* n'est rien d'autre qu'un cas particulier du modèle autorégressif à coefficients aléatoires généralisé dans lequel le coefficient aléatoire est Markovien à valeurs dans un espace d'états fini (voir Aknouche et Rabehi, 2010 ; Aknouche, 2013b). Le mélange d'autorégressions (*MAR*) correspondant à un *MS-AR* avec transition *iid* est évidemment un cas particulier d'un *RCA* (p) avec coefficients *iid*.

4.4 Propriétés probabilistes du modèle *RCA* symétrique

Les propriétés probabilistes des modèles *RCA* ont été analysées initialement par Nicholls et Quinn (1982). En effet, les conditions nécessaires et suffisantes pour la stationnarité stricte et la stationnarité au second ordre ont été proposées. Plusieurs améliorations concernant ces conditions ont été obtenues par la suite (eg. Feigin et Tweedie, 1985 ; Tsay, 1987 ; Bougerol et Picard, 1992a ; Goldie et Maller, 2000 ; Cline et Pu, 2002 ; Aue et *al*, 2006 ; Meyn et Tweedie, 2009).

4.4.1 Existence de solutions stationnaires

Stationnarité stricte du modèle RCA

Le modèle (4.2.3) peut être exprimé sous forme d'un autorégressif généralisé

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $A_t = \phi_t + \xi_t$, $B_t = \varepsilon_t$ et $((A_t, B_t), t \in \mathbb{Z})$ est une suite *iid*. De plus, $E[\log^+ |\phi + \xi_1|] < \infty$ et $E[\log^+ |\varepsilon_1|] < \infty$, ($\log^+ x = \max\{\log(x), 0\}$).

En se basant sur le travail de Bougerol et Picard (1992a) et sous l'hypothèse **H1**, Aue et al, (2006) ont proposé une plus faible condition nécessaire et suffisante exprimée en terme de l'exposant de Lyapunov ($\gamma = E \log |\phi + \xi_1|$) pour que l'équation (4.2.1) possède une solution strictement stationnaire non-anticipative et ergodique de la forme

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} (\phi + \xi_{t-i}) \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.4.1)$$

où la série en (4.4.1) converge presque sûrement, pourvu que

$$-\infty \leq E \log |\phi + \xi_1| < 0. \quad (4.4.2)$$

Stationnarité au second-ordre

Nicholls et Quinn (1982) ont montré que le modèle $RCA(1)$ donné par l'équation (4.2.1) sous **H1**, admet une solution faiblement stationnaire si et seulement si,

$$\phi^2 + \rho^2 < 1.$$

La figure suivante montre les régions de stationnarité au second-ordre (région A), de stationnarité stricte (région A $\cup$ B) et de non-stationnarité stricte du modèle $RCA(1)$ avec $\eta \sim N(0, 1)$. Il est clair que, comme cité dans l'introduction, les différents domaines de

stationnarité sont emboîtés, ce qui est caractéristique des modèles à volatilité endogène.

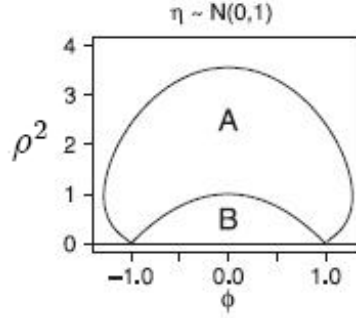


Figure 4.4.1. $E \log |\phi + \xi| < 0$ pour $(\phi, \rho^2) \in A \cup B$ et $\phi^2 + \rho^2 < 1$ pour $(\phi, \rho^2) \in B$.

Théorème 4.4.1 (Aue et al, 2006)

Supposons que $E \log^+ |\phi + \xi_1| < \infty$ et $E \log^+ |\varepsilon_1| < \infty$

i) Si (4.4.2) est vérifiée, alors la série $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\phi_0 + \xi_{t-j})$ converge presque sûrement. De plus, l'équation (4.2.3) admet une solution non-anticipative stationnaire de la forme

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\phi_0 + \xi_{t-j}). \text{ Une telle solution est unique et ergodique.}$$

ii) Si $P \{c_1 \xi_0 + c_2 \varepsilon_0 = c_3\} < 1$ pour tous réels c_1, c_2, c_3 avec $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ et l'équation (4.2.3) possède une solution non-anticipative, alors (4.4.2) est vérifiée. $\square$

Existence des moments d'ordre supérieurs pour le modèle *RCA*

Aue et al, (2006) ont étudié aussi des conditions d'existence des moments d'ordre supérieurs pour le processus solution (Y_t) du modèle (4.2.1).

Le résultat suivant donne des conditions d'existence du moment $E |Y|^v$, avec $v \geq 1$.

Proposition 4.4.1 (Aue et al, 2006)

Sous l'hypothèse **H1** et en supposant que (4.4.2) est vérifiée et pour un $v \geq 1$, $E |\varepsilon_1|^v < \infty$, $E |\xi_1|^v < \infty$, et $E |\phi + \xi_1|^v < 1$. Alors $E |Y|^v < \infty$. $\square$

4.4.2 Comportement asymptotique du processus RCA en fonction de la condition de stabilité

Le comportement asymptotique du processus RCA donné par l'équation unilatérale (4.2.1) est étudié dans cette Sous-section en fonction de la stabilité du modèle (4.2.1). Dans ce qui suit, les hypothèses suivantes seront considérées.

$$\mathbf{H2} : Cov(\varepsilon_1, \xi_1) = 0.$$

$$\mathbf{H2}' : (\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}) \text{ et } (\xi_t, t \in \mathbb{N}) \text{ sont indépendants.}$$

$$\mathbf{H3} : E(\varepsilon_1^4) < \infty \text{ et } E(\xi_1^4) < \infty.$$

$$\mathbf{H4} : \{(\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{N}\} \text{ est gaussien.}$$

Dans le domaine d'instabilité (i.e. $\gamma \geq 0$) et sous $\mathbf{H1}$, $\mathbf{H2}$ Berkes et al, (2009, Lemma 1) ont montré que

$$|y_t| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p} \infty. \quad (4.4.3)$$

De plus, ils ont montré que sous les hypothèses $\mathbf{H1}$, $\mathbf{H2}'$ et $\gamma > 0$, il existe $0 < \mu < 1$ tel que

$$\mu^t |y_t| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty, \quad (4.4.4)$$

ce qui implique que le processus $(y_t, t \in \mathbb{N})$ diverge vers l'infini exponentiellement presque sûrement quand $t \rightarrow \infty$.

Bien entendu, il est bien connu que lorsque $\gamma < 0$ (cf. Vervaat, 1979), il existe une v.a. y_∞ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, telle que

$$|y_t| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} y_\infty. \quad (4.4.5)$$

Chapitre 5

Inférence statistique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires (RCA) basée sur l'approche des moindres carrés pondérés en quatre étapes

5.1 Introduction

Les propriétés statistiques du modèle RCA ont été analysées d'abord dans les travaux séminaux de Andel (1976) et Nicholls et Quinn (1980-1982). Nicholls et Quinn (1982) ont montré que l'estimateur du maximum de vraisemblance ($QMLE$) d'un $RCA(p)$ est convergent et asymptotiquement normal. Les hypothèses sous lesquelles ce résultat a été obtenu sont restrictives, portant sur les moments du processus observé, induisant ainsi une limitation indésirable sur l'espace des paramètres. Bien plus tard, Aue et al (2006) ont assoupli la restriction des moments en établissant la propriété de convergence et de normalité asymptotique du $QMLE$ sous seulement la condition de stationnarité stricte. Des résultats similaires ont été parallèlement obtenus pour des modèles de type $GARCH$ par Berkes et al, (2003) et Francq et Zakoïan (2004). Une autre relaxation importante a été d'établir la convergence et normalité asymptotique du $QMLE$ en dehors de la région de stationnarité stricte, ce qui a été réalisé par Berkes et al, (2009). Enfin, une théorie asymptotique unifiée pour le $QMLE$ indépendamment de la région de stationnarité a été développée par Aue et Horváth (2011).

Une conséquence importante de cette théorie unifiée est que l'on peut construire des tests de stationnarité stricte et des tests de stationnarité au second ordre qui diffèrent des tests de racines unitaires et des tests de stationnarité dans le cas des modèles *ARMA* linéaires.

Bien que l'estimateur du quasi maximum de vraisemblance des modèles *RCA* ait de bonnes qualités statistiques, il n'a cependant pas de forme explicite. D'autres méthodes alternatives basées sur le principe des moindres carrés ordinaires et pondérés qui, elles, permettent des estimateurs explicites ont également été considérées. D'abord, la méthode des moindres carrés en deux étapes (*2SLS*) a été proposée par Nicholls et Quinn (1982). Cette méthode consiste à estimer, en première étape, les paramètres autorégressifs par la méthode des moindres carrés ordinaires, ignorant momentanément les coefficients aléatoires. Puis, dans une seconde étape, les variances des coefficients aléatoires sont estimées via toujours la méthode des moindres carrés ordinaires mais en considérant une autre régression basée sur les résidus obtenus des estimations des paramètres autorégressifs. La méthode *2SLS* a l'avantage de simplicité numérique par rapport à la méthode *QML* puisqu'elle consiste en la résolution de deux systèmes d'équations linéaires contrairement à l'estimateur *QMLE* qui exige des routines d'optimisation itératives compte tenu de la non-linéarité de la fonction du quasi-vraisemblance. Cependant, la méthode *2SLS* souffre de deux inconvénients majeurs : d'abord elle est moins efficace que la méthode du *QML* et ensuite elle converge sous des conditions de moments exorbitantes réduisant considérablement l'espace des paramètres. En particulier la méthode *2SLS* n'est pas consistante dans le domaine d'instabilité (non stationnarité). Schick (1996) a remédié au premier inconvénient en proposant la méthode des moindres carrés pondérés (*WLS*) mais seulement pour le paramètre autorégressif. Il a montré que le *WLSE* correspondant a la même variance asymptotique que le *QMLE* sous la condition de stationnarité au second ordre. Hwang et Basawa (2005) ont étendu ce résultat au cas où les paramètres sont dans la région de non stationnarité. D'autre part, Aknouche (2013) a proposé une méthode des moindres carrés pondérés en deux étapes pour estimer le paramètre autorégressif et la variance du coefficient aléatoire d'un *RCA*(1) dans le cas instable. La méthode a la même simplicité numérique que *2SLS* tout en jouissant de la même efficacité du *QMLE* sous les mêmes hypothèses. Cependant, la méthode proposée n'est pas convergente dans le domaine de stationnarité stricte et a donc peu d'intérêt pratique.

Dans ce Chapitre, nous proposons un estimateur des moindres carrés pondérés en quatre

étapes (*4SWLS*), de forme explicite et d'une efficacité asymptotique relative égalant celle de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (*QMLE*) pour l'estimation d'un modèle *RCA* indépendamment de l'hypothèse de stationnarité stricte. Dans la première étape, le paramètre autorégressif est estimé sur la base de la régression de la moyenne conditionnelle par la méthode des moindres carrés pondérés (*WLS*). La pondération est la variance conditionnelle arbitrairement évaluée. Dans la deuxième étape, les variances des coefficients aléatoires sont estimées en utilisant toujours la méthode (*WLS*) mais dont la pondération est le carré de la variance conditionnelle. Dans la troisième étape, le paramètre autorégressif est de nouveau estimé par la méthode *WLS* mais dont la pondération est la variance conditionnelle estimée à la deuxième étape. Enfin, dans la quatrième étape, les paramètres variances sont de nouveau estimés par la méthode *WLS* en se basant sur les estimations obtenues dans la deuxième et troisième étapes. Nous montrons que l'estimateur *4SWLSE* est asymptotiquement gaussien et possède la même variance asymptotique que l'estimateur *QMLE* sous des conditions très faibles.

Dans la deuxième partie de ce Chapitre, nous proposons un autre estimateur des moindres carrés pondérés, généralisant l'estimateur de Schick (1996) au cas où tous les paramètres du modèle sont à estimer. Cette méthode repose sur le même principe que la précédente mais avec des pondérations différentes. Nous montrons dans les deux cas stable et instable que cette méthode est asymptotiquement gaussienne. Elle possède la même variance asymptotique que le *QMLE* sous la normalité du modèle mais peut être plus efficace pour d'autres distributions non gaussiennes.

Le reste de ce Chapitre est organisé comme suit. Dans la deuxième Section, nous rappelons d'abord les principaux résultats relatifs à l'estimateur du maximum de vraisemblance (Aue et Horváth, 2011), puis, nous proposons l'estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes *4SWLSE*. Nous donnons ensuite les propriétés asymptotiques de cet estimateur indépendamment de la condition de stationnarité stricte. De plus, nous proposons une autre méthode d'estimation par moindres carrés pondérés en quatre étapes basée sur l'estimateur de Schick (1996). Dans la troisième Section, nous présentons quelques résultats de simulation avec quelques commentaires.

5.2 Estimation du modèle *RCA* dans les cas de stabilité et d'instabilité : état de l'art

5.2.1 Introduction

Cette Section est liée aux travaux de Aue et Horváth (2011) qui ont également étudié l'estimation des modèles *RCA* en utilisant l'estimateur du *QML* dans les deux cas stationnaire et non stationnaire. Dans la première partie de cette Section nous donnons un aperçu sur les principaux résultats obtenus dans la littérature concernant l'estimation des paramètres du modèle *RCA*.

L'inférence statistique des modèles *RCA* concerne le vecteur des paramètres $\lambda = (\phi, \rho^2, \sigma^2)'$. Nicholls et Quinn (1982) ont montré que l'estimateur du *QML* d'un *RCA*(p) est convergent et asymptotiquement normal, mais sous des hypothèses restrictives, portant sur les moments du processus $(y_t, t \in \mathbb{N})$, induisant ainsi une limitation indésirable sur l'espace des paramètres. Bien plus tard, Aue et al, (2006) ont relaxé la restriction des moments en établissant consistance et normalité asymptotique du *QMLE* sous seulement la condition de stationnarité stricte ($\gamma = E \log |\phi + \xi_1| < 0$) et les hypothèses **H1**, **H3** et **H4**. Berkes et al, (2009) ont proposé une autre relaxation importante en établissant la convergence et normalité asymptotique du *QMLE* en dehors du domaine de stationnarité ($\gamma = E \log |\phi + \xi_1| > 0$).

En se basant sur (4.4.3) et (4.4.4), Berkes et al, (2009) ont montré aussi que le *QMLE* pour $(\phi, \rho^2)'$ est consistant et asymptotiquement normal sous la condition de non stationnarité ($\gamma = E \log |\phi + \xi_1| > 0$) et les hypothèses **H2**, **H2'** et **H3**, alors que le *QMLE* de σ^2 n'est pas consistant. Récemment, une théorie asymptotique unifiée pour le *QMLE* indépendamment de la région de stationnarité a été développée par Aue et Horváth (2011).

Sous les mêmes hypothèses de Berkes et al, (2009), Aknouche (2013) a proposé une méthode des moindres carrés pondérés en deux étapes afin d'estimer $(\phi, \rho^2)'$ dans le cas non stationnaire. L'estimateur proposé a la même efficacité que le *QMLE* et les résultats obtenus sont relativement équivalents à ceux du *QMLE*.

5.2.2 Estimation unifiée basée sur l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (*QMLE*)

Les procédures basées sur la méthode *QML* ne peuvent être utilisées pour l'inférence statistique sur le vecteur des paramètres $\lambda = (\phi, \rho^2, \sigma^2)'$ sans aucune connaissance sur la structure probabiliste du processus $(y_t, t \in \mathbb{N})$. Cependant, il est souvent difficile de distinguer entre la stationnarité et la non stationnarité d'une série temporelle. Ceci est particulièrement vrai dans le cas où $E \log |\phi + \xi_1|$ prend une valeur au voisinage de 0. Donc, il paraît important de concevoir des procédures d'estimation qui fonctionnent indépendamment de la forme probabiliste de $(y_t, t \in \mathbb{N})$, stationnaire ou non stationnaire. Dans ce qui suit, nous présentons le comportement asymptotique de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien d'un modèle *RCA*(1) dans le cas stationnaire et non stationnaire (voir Aue et al, 2006 ; Berkes et al, 2009 ; Aue et Horváth, 2011).

Soit

$$\begin{aligned} \lambda &= (\phi, \rho^2, \sigma^2)' \\ &= (\phi, \theta')', \theta = (\rho^2, \sigma^2)' \\ &= (\psi', \sigma^2)', \psi = (\phi, \rho^2)', \end{aligned}$$

le vecteur des vrais paramètres du modèle (4.2.1) à estimer sous l'hypothèse **H1**. La fonction de log-vraisemblance gaussienne est donnée par

$$L_n(\bar{\lambda}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\bar{\lambda}), \quad l_t(\bar{\lambda}) = -\frac{(y_t - \bar{\phi}y_{t-1})^2}{\bar{\rho}^2 y_{t-1}^2 + \bar{\sigma}^2} - \ln(\bar{\rho}^2 y_{t-1}^2 + \bar{\sigma}^2), \quad (5.2.1)$$

où $\bar{\lambda} = (\bar{\phi}, \bar{\rho}^2, \bar{\sigma}^2)$ est un vecteur de paramètres génériques (utilisé uniquement dans la définition de l'estimateur *QMLE*). Avec un choix convenable de l'espace Γ paramétrique (compact) qui peut être défini par

$$\Gamma = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^3 : -\phi_0 \leq \bar{\phi} \leq \phi_0, \frac{1}{\rho_0^2} \leq \bar{\rho}^2 \leq \rho_0^2, \frac{1}{\sigma_0^2} \leq \bar{\sigma}^2 \leq \sigma_0^2\},$$

($\phi_0 > 0, \rho_0^2 > 1, \sigma_0^2 > 1$ étant des constantes connues) un estimateur du quasi-maximum de

vraisemblance $\widehat{\lambda}_{QML}$ de λ est défini comme toute solution mesurable du problème suivant

$$\widehat{\lambda}_{QML} = \arg \max_{\bar{\lambda} \in \Gamma} L_n(\bar{\lambda}).$$

Avant d'exposer les résultats de la théorie unifiée de l'estimateur *QMLE* gaussien dû à Aue et Horváth (2011), nous présentons d'abord le résultat qui stipule la normalité asymptotique de l'estimateur *QMLE* gaussien dans le cas stable ($\gamma < 0$). Ces auteurs se sont basés sur Pfanzal (1969).

Théorème 5.2.1 (Aue et al, 2006)

Si **H1**, **H2**, **H3**, (4.4.2) et $P\{(\phi + \xi_1)\varepsilon_1 = 0\} < 1$ sont vérifiées,

et $P(c_1\xi_1 + \varepsilon_1 \in \{c_2, c_3\}) < 1$ pour tous réels c_1, c_2, c_3 avec $c_1 \neq 0$,

alors

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\lambda}_{QML} - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, M^{-1}QM),$$

où

$$Q = E(l'_1(\lambda))' l'_1(\lambda),$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 2\alpha(2, 1) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(4, 2) & \alpha(2, 2) \\ 0 & \alpha(2, 2) & \alpha(0, 2) \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \alpha(a, b) = E \left(\frac{y_0^a}{(\rho^2 y_0^2 + \sigma^2)^b} \right) < \infty, \quad a = 0, 1, \dots, 2b, \quad b \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Du moment que le paramètre σ^2 ne peut être estimé dans le cas non stationnaire, dans la suite, nous présentons le comportement asymptotique de $\widehat{\lambda}_{QML} = \left(\widehat{\phi}_{QML}, \widehat{\rho}_{QML}^2 \right)'$. Le premier résultat établit la consistance faible de l'estimateur.

Théorème 5.2.2 (Aue et Horváth, 2011)

Soit $(y_t, t \in \mathbb{N})$ une solution de (4.2.1) telle que $E \log^+ |\phi + \xi_1| < \infty$. Alors, l'estimateur *QMLE*, $\widehat{\lambda}_{QML}$ est faiblement consistant pour λ , à savoir,

$$\widehat{\lambda}_{QML} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.} \lambda. \quad \square \tag{5.2.2}$$

Remarque 5.2.1

i) Les contributions concernant l'estimation de λ dans le cas non stationnaire ($E \log |\phi + \xi_1| \geq 0$) sont rares, à l'exception du travail de Hwang et Basawa (2005) qui ont discuté la méthode des moindres carrés pour le paramètre ϕ .

ii) Dans le cas d'instabilité $E \log |\phi + \xi_1| \geq 0$, le QMLE de σ^2 ne semble pas consistant. Cela est en concordance avec les résultats obtenus pour les modèles ARCH et GARCH (voir Jensen et Rahbek, 2004a).

À présent, nous présentons un autre résultat de Aue et Horváth (2011) qui établit la normalité asymptotique de $\hat{\lambda}_{QML}$ indépendamment de l'hypothèse de stabilité sur le modèle. Nous commençons d'abord par la première composante $\hat{\phi}_{QML}$.

Théorème 5.2.3 (Aue et Horváth, 2011)

Soit $(y_t, t \in \mathbb{N})$ une solution de (4.2.1) telle que $E \log^+ |\phi + \xi_1| < \infty$. Alors,

$$\sqrt{n} \left(\hat{\phi}_{QML} - \phi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^2), \quad (5.2.3)$$

où

$$\begin{cases} \tau^2 = \rho^2 & \text{si } E \log |\phi + \xi_1| \geq 0, \\ \tau^2 = \frac{4}{\alpha^2(2,1)} [\rho^2 \alpha(4,2) + \sigma^2 \alpha(2,2)] & \text{si } E \log |\phi + \xi_1| < 0, \end{cases}, \quad (5.2.4)$$

$$\text{où } \alpha(\kappa, \varkappa) = E \left[\frac{y_1^\kappa}{(\rho^2 y_1^2 + \sigma^2)^\varkappa} \right], \quad \kappa = 0, 1, \dots, 2\varkappa, \quad \varkappa \in N. \quad \square$$

À partir du Théorème 5.2.3, on peut observer que la normalité asymptotique de $\hat{\phi}_{QML} - \phi$ est valable sans aucune restriction sur la stationnarité du modèle (4.2.1). On remarque également que la variance asymptotique τ^2 est différente selon que le modèle soit stable ou instable. Donc, pour utiliser les résultats du Théorème 5.2.3 dans l'inférence statistique du modèle (4.2.1), Aue et Horváth (2011) ont proposé l'estimateur $\hat{\tau}^2$ de τ^2 qui est consistant dans les deux cas (stable et instable).

$$\text{Soit } \hat{\alpha}(\kappa, \varkappa) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_t^\kappa}{(\hat{\rho}_{QML}^2 y_t^2 + \hat{\sigma}_{QML}^2)^\varkappa} \quad \kappa = 0, 1, \dots, 2\varkappa, \quad \varkappa \in N.$$

On donne maintenant le Corollaire suivant.

Corollaire 5.2.1 (Aue et Horváth, 2011)

Supposons que les hypothèses du Théorème 5.2.3 sont satisfaites, alors

$$\sqrt{n} \left(\frac{\hat{\phi}_{QML} - \phi}{\hat{\tau}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (5.2.5)$$

$$\text{où } \hat{\tau}^2 = \frac{4}{\hat{\alpha}^2(2,1)} [\hat{\rho}_{QML}^2 \hat{\alpha}_{QML}(4,2) + \hat{\sigma}_{QML}^2 \hat{\alpha}_{QML}(2,2)] . \quad \square$$

Ce Corollaire stipule que l'inférence statistique sur le paramètre ϕ peut être effectuée sans aucune condition sur la stationnarité stricte (stabilité). Nous présentons, maintenant, la procédure proposée par Aue et Horváth (2011) pour estimer conjointement les valeurs de $\psi = (\phi, \rho^2)'$. Notons par $\hat{\psi}_{QML}$ la composante de $\hat{\lambda}_{QML}$ correspondant à ψ .

Théorème 5.2.4 (Aue et Horváth, 2011)

Soit $(y_t, t \in \mathbb{N})$ une solution de (4.2.1) telle que $E \log |\phi + \xi_1| \neq 0$. Alors,

$$\sqrt{n} (\hat{\psi}_{QML} - \psi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad (5.2.6)$$

où

$$\begin{cases} \Sigma = \begin{pmatrix} \rho^2 & E(\xi_1^3) \\ E(\xi_1^3) & Var(\xi_1^2) \end{pmatrix} & \text{si } E \log |\phi + \xi_1| \geq 0, \\ = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} & \text{si } E \log |\phi + \xi_1| < 0, \end{cases}, \quad (5.2.7)$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,1} &= \frac{4}{\alpha^2(2,1)} [\rho^2 \alpha(4,2) + \sigma^2 \alpha(2,2)], \\ \Sigma_{1,2} &= \frac{4}{2D\alpha(2,1)} [A_{1,2} \alpha(0,2) + A_{1,3} \alpha(2,2)] = \Sigma_{2,1}, \\ \Sigma_{2,2} &= \frac{1}{D^2} [A_{2,2} \alpha^2(0,2) - 2A_{2,3} \alpha(0,2) \alpha(2,2) + A_{3,3} \alpha^2(2,2)], \end{aligned}$$

et $D = \alpha(4,2)\alpha(0,2) - \alpha^2(2,2)$. $\square$

Finalement, la matrice des covariances Σ est estimée par $\widehat{\Sigma}_n$, obtenue en remplaçant les valeurs théoriques $\alpha(\kappa, \varkappa)$, $A_{i,j}$, ρ^2 et ρ^2 par leurs estimations $\widehat{\alpha}(\kappa, \varkappa)$, $\widehat{A}_{i,j}$, $\widehat{\rho}_{QML}^2$ et $\widehat{\sigma}_{QML}^2$ respectivement. Cela conduit au Corollaire suivant

Corollaire 5.2.2 (Aue et Horváth, 2011)

Supposons que les hypothèses du Théorème 5.2.3 sont satisfaites, alors

$$\sqrt{n}\widehat{\Sigma}_n^{-1/2} \left(\widehat{\psi}_{QML} - \psi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I), \quad (5.2.8)$$

où I est une matrice d'identité 2×2 . $\square$

5.3 Estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes dans les cas de stabilité et d'instabilité

Dans cette Sous-section, nous proposons deux variantes de l'estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes (*4SWLSE*) pour les coefficients d'un modèle *RCA*(1) dans les deux cas de stabilité et d'instabilité. Nous montrons que les estimateurs *4SWLSE* sont consistants et asymptotiquement normaux indépendamment de la condition de stationnarité

Rappelons (cf. Chapitre 4) que si l'on suppose que le processus $((\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{N})$ est gaussien, alors d'après Ling (2007) le modèle (4.2.1) est équivalent en distribution conditionnelle au modèle autorégressif double (Double autoregression, *DAR*) donné par

$$y_t = \phi y_{t-1} + \sqrt{\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2} \eta_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (5.3.1)$$

où y_0 est définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\eta_t, t \in \mathbb{N})$ est un processus *iid* gaussien avec $E(\eta_1) = 0$ et $E(\eta_1^2) = 1$. L'équivalence entre les modèles (4.2.1) et (5.3.1) s'entend en ce sens que les solutions respectives ont la même distribution conditionnelle pourvu que y_0 ait la même distribution que les distributions invariantes de (4.2.1) et (5.3.1).

Pour les besoins de la méthode des moindres carrés pondérés présentée plus bas, le modèle (4.2.1) peut être mis sous forme de régressions. En effet, pour $u_t = \xi_t y_{t-1} + \varepsilon_t$, le modèle (4.2.1) s'écrit comme une autorégression standard

$$y_t = \phi y_{t-1} + u_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (5.3.2)$$

avec $E(u_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0 = E(y_t/\mathcal{F}_{t-1}) - \phi y_{t-1}$ et $Var(u_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2 = Var(y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = h_t(\theta)$, $\mathcal{F}_t$ étant la σ -algèbre générée par $\{y_0, (\varepsilon_s, \xi_s), s \leq t\}$. Soit également

$$\begin{aligned} e_t &= u_t^2 - E(u_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= u_t^2 - (\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2) \\ &= (\xi_t y_{t-1} + \varepsilon_t)^2 - (\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2) \\ &= (y_t - \phi y_{t-1})^2 - (\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2), \end{aligned}$$

alors le processus des carrés des innovations de (5.3.2), $(u_t^2, t \in \mathbb{N}^*)$, vérifie lui-même la régression suivante

$$u_t^2 = \mathcal{Y}_{t-1} \theta' + e_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (5.3.3)$$

où $\mathcal{Y}_{t-1} = (1, y_{t-1}^2)'$. Ce processus étant inobservable, peut être estimé. Sous **H1**, $E(e_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ et si de plus **H3** est satisfaite alors

$$\begin{aligned} E(e_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) &= E\left(\left((\xi_t y_{t-1} + \varepsilon_t)^2 - \rho^2 y_{t-1}^2 - \sigma^2\right)^2 / \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= (E(\xi_t^4) - \rho^4) y_{t-1}^4 + 4(\rho^2 E(\xi_t \varepsilon_t) + E(\xi_t^3 \varepsilon_t)) y_{t-1}^3 \\ &\quad + 2(3E(\xi_t^2 \varepsilon_t^2) - \sigma^2 \rho^2) y_{t-1}^2 + 4E(\xi_t \varepsilon_t^3) y_{t-1} + (E(\varepsilon_t^4) - \sigma^4). \end{aligned}$$

Si on admet encore **H2** alors l'expression de $E(e_t^2/\mathcal{F}_{t-1})$ se simplifie

$$\begin{aligned} E(e_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) &= (E(\xi_t^4) - \rho^4) y_{t-1}^4 + 4E(\xi_t^3 \varepsilon_t) y_{t-1}^3 \\ &\quad + 2(3E(\xi_t^2 \varepsilon_t^2) - \sigma^2 \rho^2) y_{t-1}^2 + 4E(\xi_t \varepsilon_t^3) y_{t-1} + (E(\varepsilon_t^4) - \sigma^4), \end{aligned} \quad (5.3.4a)$$

et se simplifie davantage sous **H2'** comme suit

$$E(e_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) = Var(\xi_t^2) y_{t-1}^4 + 4\sigma^2 \rho^2 y_{t-1}^2 + Var(\varepsilon_t^2). \quad (5.3.4b)$$

Dans le cas où $((\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{N})$ est gaussien, l'expression de $E(e_t^2/\mathcal{F}_{t-1})$ se simplifie encore. En effet, l'équivalence en distribution conditionnelle entre les modèles (4.2.1) et (5.3.1) donne

$$(u'_t, t \in \mathbb{N}^*) \stackrel{cd}{=} (u_t, t \in \mathbb{N}^*),$$

où u'_t est défini à partir de (5.3.1)

$$\begin{aligned} u'_t &= y_t - \phi y_{t-1} \\ &= \sqrt{\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2} \eta_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

avec $(\eta_t, t \in \mathbb{N})$ est gaussien standard. Donc, pour

$$\begin{aligned} e'_t &= u_t'^2 - E(u_t'^2 / \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= (\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2) (\eta_t^2 - 1), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} E(e_t'^2 / \mathcal{F}_{t-1}) &= E(e_t'^2 / \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= (\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2)^2 E(\eta_t^2 - 1)^2 \\ &= h_t^2(\theta) (E(\eta_1^4) - 1) \\ &= 2h_t^2(\theta). \end{aligned} \tag{5.3.4c}$$

5.3.1 Estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes d'un modèle *RCA*(1) : première variante *4SWLSE1*

Présentation de l'estimateur *4SWLSE1*

Considérons une série $y_1, y_2, \dots, y_n$ générée à partir du modèle (4.2.1). Dans le but d'estimer le vecteur des paramètres $\lambda = (\phi, \rho^2, \sigma^2)'$, nous proposons un estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{1WLS} &= \left(\hat{\phi}_{1WLS}, \hat{\rho}_{1WLS}^2, \hat{\sigma}_{1WLS}^2 \right)' = \left(\hat{\phi}_{1WLS}, \hat{\theta}_{1WLS}' \right)', \\ \hat{\lambda}_{2WLS} &= \left(\hat{\phi}_{2WLS}, \hat{\rho}_{2WLS}^2, \hat{\sigma}_{2WLS}^2 \right)' = \left(\hat{\phi}_{2WLS}, \hat{\theta}_{2WLS}' \right)', \end{aligned}$$

où conditionnellement à la valeur initiale y_0 , $\hat{\phi}_{1WLS}$, $\hat{\theta}'_{1WLS}$, $\hat{\phi}_{2WLS}$ et $\hat{\theta}'_{2WLS}$ sont solutions des problèmes des moindres carrés pondérés suivants

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{1WLS} &= \arg \min_{\bar{\phi} \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \bar{\phi} y_{t-1})^2}{h_t(\bar{\theta})}, \\ \hat{\theta}_{1WLS} &= \arg \min_{\bar{\theta} \in]0, \infty[^2} \sum_{t=1}^n \frac{((y_t - \hat{\phi}_{1WLS} y_{t-1})^2 - \bar{\theta}' \mathcal{Y}_{t-1})^2}{h_t^2(\bar{\theta})}, \\ \hat{\phi}_{2WLS} &= \arg \min_{\bar{\phi} \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^n \frac{(y_t - \bar{\phi} y_{t-1})^2}{h_t(\hat{\theta}_{1WLS})}, \\ \hat{\theta}_{2WLS} &= \arg \min_{\bar{\theta} \in]0, \infty[^2} \sum_{t=1}^n \frac{((y_t - \hat{\phi}_{2WLS} y_{t-1})^2 - \bar{\theta}' \mathcal{Y}_{t-1})^2}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})}.\end{aligned}$$

Plus précisément, dans la première étape et à partir de la régression (5.3.1) on estime le paramètre autorégressif ϕ au moyen de $\hat{\phi}_{1WLS}$ qui est conditionnellement à y_0 défini par

$$\hat{\phi}_{1WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} y_t}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2}, \quad (5.3.5)$$

où $\tilde{\theta} = (\tilde{\sigma}^2, \tilde{\rho}^2)'$ est un vecteur de constantes de pondération positives arbitrairement connues.

La pondération considérée est l'inverse de la variance conditionnelle, $h_t(\tilde{\theta}) = \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2$ évaluée en $h_t(\tilde{\theta})$. Dans la deuxième étape, le vecteur θ sera estimé. En effet, l'estimateur $\hat{\phi}_{1WLS}$ obtenu de l'étape précédente est utilisé afin d'obtenir les résidus de la régression (5.3.3), $\tilde{u}_t$, donnés conditionnellement à y_0 par

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(\hat{\phi}_{1WLS}) = y_t - \hat{\phi}_{1WLS} y_{t-1}, \quad 1 \leq t \leq n, \quad (5.3.6)$$

puis, nous construisons la régression (artificielle), suivante :

$$\tilde{u}_t^2 = \mathcal{Y}_{t-1}' \theta + \tilde{e}_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (5.3.7)$$

à partir de laquelle l'estimateur des moindres carrés, $\hat{\theta}_{1WLS}$, pondéré par l'inverse du carré

de la variance conditionnelle évaluée en $\tilde{\theta}$, $h_t(\tilde{\theta}) = \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2$, est donné par

$$\hat{\theta}_{1WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\tilde{u}_t^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2}. \quad (5.3.8)$$

Dans la troisième étape, et dans le but d'améliorer l'efficacité asymptotique de $\hat{\phi}_{1WLS}$, nous remplaçons $\tilde{\theta}$ dans la pondération dans (5.3.7) par $\hat{\theta}_{1WLS} = (\hat{\sigma}_{1WLS}^2, \hat{\rho}_{1WLS}^2)'$, ce qui donne

$$\hat{\phi}_{2WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{\hat{\sigma}_{1WLS}^2 + \hat{\rho}_{1WLS}^2 y_{t-1}^2} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} y_t}{\hat{\sigma}_{1WLS}^2 + \hat{\rho}_{1WLS}^2 y_{t-1}^2}. \quad (5.3.9)$$

Enfin dans la quatrième étape, nous exploitons $\hat{\phi}_{2WLS}$ pour obtenir les résidus, $\hat{u}_t$ de la régression (5.3.3) comme suit,

$$\hat{u}_t = \hat{u}_t(\hat{\phi}_{2WLS}) = y_t - \hat{\phi}_{2WLS} y_{t-1}, \quad 1 \leq t \leq n, \quad (5.3.10)$$

puis, nous introduisons la régression suivante :

$$\hat{u}_t = \mathcal{Y}_{t-1}' \theta + \hat{e}_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (5.3.11)$$

à partir de laquelle $\hat{\theta}_{2WLS}$, pondéré plutôt par l'inverse du carré de la variance conditionnelle estimée, $h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})$, est donné par

$$\hat{\theta}_{2WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{(\hat{\sigma}_{1WLS}^2 + \hat{\rho}_{1WLS}^2 y_{t-1}^2)^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{\sigma}_{1WLS}^2 + \hat{\rho}_{1WLS}^2 y_{t-1}^2)^2}. \quad (5.3.12)$$

Remarque 5.3.1

La méthode en quatre étapes proposée ressemble quelque peu à la procédure introduite par Rosenberg (1973) dans le cadre de la régression linéaire à coefficients aléatoires, laquelle fut adaptée par Pantula (1988) pour l'estimation d'un modèle autorégressif à innovation ARCH (AR-ARCH), à la différence que dans la 1^{ère} et 2^{ème} étapes de la présente méthode, on utilise plutôt la variante des moindres carrés pondérée et non ordinaire. L'injection de la pondération dans la 1^{ère} et 2^{ème} étapes assure la convergence des estimateurs sans aucune restriction

sur les moments et même indépendamment de l'hypothèse de stationnarité stricte. Quant à la 3^{ème} et 4^{ème} étapes, elles sont introduites pour améliorer l'efficacité des estimateurs obtenus à la 1^{ère} et 2^{ème} étapes, respectivement. En particulier, on remarquera plus bas (Théorème 5.3.1) que les distributions asymptotiques des estimateurs de la 3^{ème} et 4^{ème} étapes ne dépendent pas de $\tilde{\theta}$.

Propriétés asymptotiques de l'estimateur 4SWLSE1

Considérons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \psi &= (\phi, \rho^2)', \quad \hat{\psi}_{1WLS} = (\hat{\phi}_{1WLS}, \hat{\rho}_{1WLS}^2)', \quad \hat{\psi}_{2WLS} = (\hat{\phi}_{2WLS}, \hat{\rho}_{2WLS}^2)' \\
 A(\lambda, \tilde{\theta}) &= E_{\infty} \begin{pmatrix} \frac{y_1^2}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \end{pmatrix}, \\
 B(\lambda, \tilde{\theta}) &= E_{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2) y_{t-1}^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2} & \frac{y_{t-1} E(e_t u_t / \mathcal{F}_{t-1}) \mathcal{Y}_{t-1}'}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^3} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} E(e_t u_t / \mathcal{F}_{t-1})}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^3} & \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^4} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \end{pmatrix}, \\
 \Sigma &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\rho}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\rho}^4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho^2 & \frac{E(\xi_1^3)}{\tilde{\rho}^6} \\ \frac{E(\xi_1^3)}{\tilde{\rho}^6} & \frac{Var(\xi_1^2)}{\tilde{\rho}^8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\rho}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\rho}^4} \end{pmatrix}^{-1}, \\
 &= \begin{pmatrix} \rho^2 & E(\xi_1^3) \\ E(\xi_1^3) & Var(\xi_1^2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

En utilisant les notations précédentes, on peut formuler le théorème suivant qui établit la consistance et normalité asymptotique de $\hat{\lambda}_{1WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}$ indépendamment de l'hypothèse de stationnarité stricte et du vecteur de pondération $\tilde{\theta}$.

Théorème 5.3.1 (Aknouche et Touche, 2015b)

Considérons le modèle (4.2.1) soumis aux hypothèses **H1**, **H2** et **H3**.

i) Stationnarité stricte (stabilité) : lorsque $\gamma < 0$, pour tout $\tilde{\theta} > 0$,

$$\begin{aligned}
 i) \quad \hat{\lambda}_{1WLS} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda, & ii) \quad \hat{\lambda}_{2WLS} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda.
 \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_{1WLS} - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, A^{-1}(\lambda, \tilde{\theta}) B(\lambda, \tilde{\theta}) A^{-1}(\lambda, \tilde{\theta}) \right). \quad (5.3.15)$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_{2WLS} - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, A^{-1}(\lambda, \theta) B(\lambda, \theta) A^{-1}(\lambda, \theta) \right). \quad (5.3.16)$$

ii) *Instabilité stricte* : lorsque $\gamma > 0$, pour tout $\tilde{\theta} > 0$, (5.3.13) se vérifie encore et

$$\sqrt{n} \left(\hat{\psi}_{1WLS} - \psi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Sigma), \quad (5.3.17)$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\psi}_{2WLS} - \psi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Sigma). \quad (5.3.18)$$

□

À partir de ce théorème, on peut observer que dans le cas stable ($\gamma < 0$) l'estimateur $\hat{\lambda}_{2WLS}$ a la même distribution limite que l'estimateur *QMLE* de λ (Aue et Horváth, 2011), et ce, indépendamment du choix de $\tilde{\theta}$. On remarque aussi que la matrice de covariance de la relation (5.3.16) est identique à celle de l'estimateur *QMLE*, $(M^{-1}QM^{-1})$ donnée dans le Théorème 5.2.1, ce qui implique que les deux estimateurs ($\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{QML}$) ont la même variance asymptotique. De même, dans le cas instable ($\gamma > 0$), $\hat{\psi}_{1WLS}$ et $\hat{\psi}_{2WLS}$ ont la même distribution que le *QMLE* de ψ . Cependant, il paraît que $\hat{\sigma}_{1WLS}^2$ et $\hat{\sigma}_{2WLS}^2$ sont inconsistants lorsque $\gamma > 0$. Notons que les distributions des estimateurs de ϕ et de θ peuvent être explicitées.

En considérant les notations suivantes

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tilde{\theta}) &= \left(E_{\infty} \left(\frac{y_{t-1}^2}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2} \right) \right)^{-2} E_{\infty} \left(\frac{(\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2) y_{t-1}^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2} \right), \quad \Delta(\lambda, \theta) = \left(E_{\infty} \left(\frac{y_{t-1}^2}{\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2} \right) \right)^{-1} \\ I(\lambda, \tilde{\theta}) &= E_{\infty} \left(\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \frac{1}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2} \right), \quad J(\lambda, \tilde{\theta}) = E_{\infty} \left(\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^4} \right), \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

alors lorsque $\gamma < 0$, on a

$$\sqrt{n} \left(\hat{\phi}_{1WLS} - \phi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \Delta(\lambda, \tilde{\theta}) \right), \quad (5.3.20)$$

et

$$\sqrt{n} \left(\hat{\phi}_{2WLS} - \phi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Delta(\lambda, \theta)). \quad (5.3.21)$$

Ainsi, l'estimateur $\widehat{\phi}_{2WLS}$ est plus efficace que $\widehat{\phi}_{1WLS}$.

De même, on a

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, I^{-1}(\lambda, \widetilde{\theta}) J(\lambda, \widetilde{\theta}) I^{-1}(\lambda, \widetilde{\theta}) \right), \quad (5.3.22)$$

et

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\theta}_{2WLS} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, I^{-1}(\lambda, \theta) J(\lambda, \theta) I^{-1}(\lambda, \theta) \right). \quad (5.3.23)$$

Si de plus le modèle est gaussien, alors en exploitant (5.3.4c), les résultats se simplifient comme suit.

Corollaire 5.3.1 (Aknouche et Touche, 2015b)

*Sous **H1**, **H2**, **H3**, **H4** et $\gamma < 0$,*

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\lambda}_{1WLS} - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Omega), \quad (5.3.24)$$

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\lambda}_{2WLS} - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Pi), \quad (5.3.25)$$

où

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Delta(\lambda, \widetilde{\theta}) & 0 \\ 0 & I^{-1}(\lambda, \widetilde{\theta}) J(\lambda, \widetilde{\theta}) I^{-1}(\lambda, \widetilde{\theta}) \end{pmatrix} \text{ et } \Pi = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}(\lambda, \theta) & 0 \\ 0 & 2I^{-1}(\lambda, \theta) \end{pmatrix}. \quad (5.3.26)$$

□

Ainsi, sous la normalité du modèle *RCA*, $\widehat{\lambda}_{2WLS}$ a la même distribution asymptotique que le *QMLE* du modèle *DAR* gaussien (Ling et Li, 2008). De plus, $\widehat{\phi}_{2WLS}$ et $\widehat{\theta}_{2WLS}$ (resp. $\widehat{\phi}_{1WLS}$ et $\widehat{\theta}_{1WLS}$) sont asymptotiquement indépendants, ce qui est le cas aussi pour $\widehat{\phi}_{2WLS}$ et $\widehat{\rho}_{2WLS}^2$ (resp. $\widehat{\phi}_{1WLS}$ et $\widehat{\rho}_{1WLS}^2$) lorsque $\gamma > 0$ puisque $E(\xi_1^3) = 0$.

Remarque 5.3.2

*Les résultats obtenus dans cette Sous-section concernent le modèle *RCA*(1), mais dans le cas stable ($\gamma < 0$), la généralisation au modèle *RCA*(p) est triviale.*

5.3.2 Estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes d'un modèle *RCA*(1) : deuxième variante, *4SWLSE2*, basée sur l'estimateur de Schick (1996)

Présentation de l'estimateur *4SWLSE2*

Dans cette Sous-section nous proposons une deuxième méthode des moindres carrés pondérés en quatre étapes basée sur l'estimateur de Schick (1996). Le principe de la méthode est le même que la précédente, à part que dans la 2^{ème} et 4^{ème} étapes, au lieu d'une pondération par le carré de la variance conditionnelle $(\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2)$, on utilise plutôt $e_t^2 = e_t^2(\phi, \theta) = (u_t^2(\phi) - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2$. Un tel choix de pondération se justifie comme suit :

Schick (1996) (voir aussi Koul et Schick, 1996) a proposé une classe d'estimateurs de ϕ paramétrée par une fonctionnelle, dont l'estimateur des moindres carrés ordinaires se réduit pour le cas particulier d'une fonction identité. Soit H_p l'ensemble des fonctions bornées et mesurables non nulles de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour $h \in H_1$, l'estimateur fonctionnel $\hat{\phi}_h$ de ϕ , basé sur la régression (5.3.2) est donné par (Schick, 1996)

$$\hat{\phi}_h = \left(\sum_{t=1}^n h(y_{t-1}) y_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n h(y_{t-1}) y_t. \quad (5.3.27)$$

Dans le théorème suivant, Schick (1996) a montré que $\sqrt{n} (\hat{\phi}_h - \phi)$ converge en distribution vers une loi normale de moyenne nulle et de variance Ω_h .

Théorème 5.3.2 (Schick, 1996)

Sous (A1), $E_\infty(h(y_{t-1}) y_{t-1}) < \infty$ et $E_\infty(h^2(y_{t-1}) (\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2)) < \infty$,

$$\sqrt{n} (\hat{\phi}_h - \phi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Omega_h), \quad (5.3.28)$$

où

$$\Omega_h = (E_\infty(h(y_{t-1}) y_{t-1}))^{-2} E_\infty(h^2(y_{t-1}) (\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2)). \quad (5.3.29)$$

□

En minimisant Ω_h par rapport à h , Schick (1996) trouva que la fonction h pour laquelle $\widehat{\phi}_h$ est de variance minimum dans la classe des estimateurs $\{\widehat{\phi}_h, h \in \mathcal{H}_1\}$ est la fonction $h^*(y_{t-1}) = \frac{y_{t-1}}{\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2}$, avec une variance asymptotique minimale donnée par

$$\Omega_{h^*} = \left(E \left(\frac{y_{t-1}^2}{\rho^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2} \right) \right)^{-1} = \Delta^{-1}(\lambda, \theta). \quad (5.3.30)$$

Schick (1996) proposa alors pour ϕ un estimateur $\widehat{\phi}_{h^*}$ de même forme que $\widehat{\phi}_{1WLS}$, à part qu'au lieu de $\tilde{\sigma}^2$ et $\tilde{\rho}^2$, il utilise n'importe quels estimateurs consistants $\widehat{\sigma}^2$ et $\widehat{\rho}^2$ pour σ^2 et ρ^2 respectivement. Enfin, Schick (1996) a montré qu'entre autres sous $E_\infty(y_t^2) < \infty$, l'estimateur $\widehat{\phi}_{h^*}$ est asymptotiquement gaussien avec variance asymptotique $\Delta^{-1}(\lambda, \theta)$.

Nous adoptons la même approche pour l'estimation des autres paramètres σ^2 et ρ^2 en se basant sur la régression (5.3.3). Pour $g \in H_2$, l'estimateur fonctionnel $\widehat{\theta}_g$ de θ , par analogie à (5.3.8), est donné par

$$\widehat{\theta}_g = \left(\sum_{t=1}^n g(\mathcal{Y}_{t-1}) \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=1}^n g(\mathcal{Y}_{t-1}) u_t^2, \quad (5.3.31)$$

Sous **H1-H3**, $E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) \mathcal{Y}'_{t-1}) < \infty$ et $E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) g(\mathcal{Y}_{t-1})' e_t^2) < \infty$, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \sqrt{n} (\widehat{\theta}_g - \theta) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Sigma_g) \\ \text{où } \Sigma_g &= \left(E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) \mathcal{Y}'_{t-1}) \right)^{-1} E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) g(\mathcal{Y}_{t-1})' e_t^2) \times \\ &\quad \left(E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) \mathcal{Y}'_{t-1}) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Pour trouver la fonction g minimisant Σ_g , l'inégalité de Cauchy-Schwarz multivariée,

$$(E(XX'))^{-1} \leq (E(ZX'))^{-1} E(ZZ') (E(ZX'))^{-1},$$

appliquée à (5.3.30) avec $X = \frac{1}{e_t} Y_{t-1}$ et $Z = g(\mathcal{Y}_{t-1}) e_t$, donne

$$\left(E_\infty \left(\frac{1}{e_t^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) \right)^{-1} \leq E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) \mathcal{Y}'_{t-1})^{-1} E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) g(\mathcal{Y}_{t-1})' e_t^2) E_\infty(g(\mathcal{Y}_{t-1}) \mathcal{Y}'_{t-1})^{-1},$$

montrant que la fonction $g^*(.) \in H_2$ minimisant Σ_g est $g^*(\mathcal{Y}_{t-1}) = \frac{1}{e_t^2} Y_{t-1}$. Donc l'estimateur $\hat{\theta}_{g^*}$ de variance minimum dans la classe $\{\hat{\theta}_g, g \in \mathcal{H}_2\}$ est

$$\hat{\theta}_{g^*} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{e_t^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{e_t^2} \mathcal{Y}_{t-1} u_t^2. \quad (5.3.33)$$

Cependant, $\hat{\theta}_{g^*}$ ne peut être utilisé directement puisqu'il dépend de u_t^2 qui n'est pas observé et dépend en plus de θ . Donc, dans ce qui suit, nous proposons l'estimateur *WLS* en quatre étapes $\hat{\lambda}_{1WLS}^* = (\hat{\phi}_{1WLS}^*, \hat{\theta}_{1WLS}^{*'})'$, $\hat{\lambda}_{2WLS}^* = (\hat{\phi}_{2WLS}^*, \hat{\theta}_{2WLS}^{*'})'$.

La première étape de la méthode consiste à calculer $\hat{\phi}_{1WLS}^* = \hat{\phi}_{1WLS}$ à partir de (5.3.5), avec $\tilde{\theta}$ est un vecteur des constantes de pondération positives arbitrairement connues.

Dans la deuxième étape, l'estimateur $\hat{\theta}_{1WLS}^*$ est calculé tout en injectant $\hat{\phi}_{1WLS}^*$ obtenu dans l'étape précédente dans la régression

$$\tilde{u}_t^* = y_t - \hat{\phi}_{1WLS}^* y_{t-1}, \quad 1 \leq t \leq n, \quad (5.3.34)$$

donc $\hat{\theta}_{1WLS}^*$ est donné par

$$\hat{\theta}_{1WLS}^* = \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\tilde{u}_t^{*2}}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2}. \quad (5.3.35)$$

La troisième étape consiste à calculer $\hat{\phi}_{2WLS}^* = \hat{\phi}_{2WLS}(\hat{\theta}_{1WLS}^*)$ à partir de (5.3.9) tout en remplaçant $\hat{\theta}_{1WLS}$ par $\hat{\theta}_{1WLS}^*$.

Finalement, l'estimateur $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ est obtenu dans la quatrième étape à partir de la régression

$$\hat{u}_t^* = \hat{u}_t(\hat{\phi}_{2WLS}^*) = y_t - \hat{\phi}_{2WLS}^* y_{t-1}, \quad 1 \leq t \leq n, \quad (5.3.36)$$

donc,

$$\hat{\theta}_{2WLS}^* = \left(\sum_{t=1}^n \frac{1}{(\hat{u}_t^{*2} - (\hat{\sigma}_{WLS}^{*2} + \hat{\rho}_{WLS}^{*2} y_{t-1}^2))^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\hat{u}_t^{*2}}{(\hat{u}_t^{*2} - (\hat{\sigma}_{WLS}^{*2} + \hat{\rho}_{WLS}^{*2} y_{t-1}^2))^2}. \quad (5.3.37)$$

Propriétés asymptotiques de l'estimateur *4SWLSE2*

Avant de donner les résultats concernant les propriétés asymptotiques de $(\hat{\lambda}_{1WLS}^*, \hat{\lambda}_{2WLS}^*)$, nous considérons d'abord les notations suivantes.

Soit $\hat{\psi}_{1WLS}^* = (\hat{\phi}_{1WLS}^*, \hat{\rho}_{1WLS}^{*2})'$, $\hat{\psi}_{2WLS}^* = (\hat{\phi}_{2WLS}^*, \hat{\rho}_{2WLS}^{*2})'$ et

$$\begin{aligned}
 C(\lambda, \tilde{\theta}) &= E_{\infty} \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(u_t^2 - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2)^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \end{pmatrix}, \\
 \Gamma(\lambda, \tilde{\theta}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\rho}^2} & 0 \\ 0 & E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\tilde{\rho}^4} & \frac{1}{\tilde{\rho}^2} E \left(\frac{\xi_1 (\xi_1^2 - \rho^2)}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) \\ \frac{1}{\tilde{\rho}^2} E \left(\frac{\xi_1 (\xi_1^2 - \rho^2)}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) & E \left(\frac{(\xi_1^2 - \rho^2)^2}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^4} \right) \end{pmatrix} \times \\
 &\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\rho}^2} & 0 \\ 0 & E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho^2 & \left(E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) \right)^{-1} E \left(\frac{\xi_1 (\xi_1^2 - \rho^2)}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) \\ \left(E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) \right)^{-1} E \left(\frac{\xi_1 (\xi_1^2 - \rho^2)}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) & \left(E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2} \right) \right)^{-2} E \left(\frac{(\xi_1^2 - \rho^2)^2}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^4} \right) \end{pmatrix}, \\
 &\hspace{25em} (5.3.38)
 \end{aligned}$$

$$D(\lambda, \tilde{\theta}) = E_{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2) y_{t-1}^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2} & \frac{y_{t-1} e_t u_t}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2) (u_t^2 - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2)^2} \mathcal{Y}_{t-1}' \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} e_t u_t}{(\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2) (u_t^2 - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2)^2} & \frac{e_t^2}{(u_t^2 - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2)^2)^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \end{pmatrix}.$$

Si de plus, on a $\tilde{\theta} = \theta$ les matrices $C(\lambda, \theta)$, $D(\lambda, \theta)$ et $\Gamma(\lambda, \theta)$ se simplifient comme suit

$$\begin{aligned}
 C(\lambda, \theta) &= E_{\infty} \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2}{\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{e_t^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix}, \\
 D(\lambda, \theta) &= E_{\infty} \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2}{\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2} & \frac{y_{t-1} u_t}{(\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2) e_t} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} u_t}{(\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2) e_t} & \frac{1}{e_t^2} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix}. \\
 \Gamma(\lambda, \theta) &= \begin{pmatrix} \rho^2 & \left(E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \rho^2)^2} \right) \right)^{-1} E \left(\frac{\xi_1}{\xi_1^2 - \rho^2} \right) \\ \left(E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \rho^2)^2} \right) \right)^{-1} E \left(\frac{\xi_1}{\xi_1^2 - \rho^2} \right) & \left(E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \rho^2)^2} \right) \right)^{-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Théorème 5.3.3 (Aknouche et Touche, 2015b)

Considérons le modèle (4.2.1) soumis aux hypothèses **H1**, **H2** et **H3**.

i) *Stabilité* : Lorsque $\gamma < 0$, pour tout $\tilde{\theta} > 0$,

$$i) \hat{\lambda}_{1WLS}^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda, \quad ii) \hat{\lambda}_{2WLS}^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda. \quad (5.3.39)$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_{1WLS}^* - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, C^{-1}(\lambda, \tilde{\theta}) D(\lambda, \tilde{\theta}) C^{-1}(\lambda, \tilde{\theta}) \right). \quad (5.3.40)$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_{2WLS}^* - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, C^{-1}(\lambda, \theta) D(\lambda, \theta) C^{-1}(\lambda, \theta) \right). \quad (5.3.41)$$

ii) *Instabilité stricte* : Lorsque $\gamma > 0$, pour tout $\tilde{\theta} > 0$, (5.3.39) se vérifie encore et

$$\sqrt{n} \left(\hat{\psi}_{1WLS}^* - \psi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \Gamma(\lambda, \tilde{\theta}) \right), \quad (5.3.42)$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\psi}_{2WLS}^* - \psi \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \Gamma(\lambda, \theta) \right). \quad (5.3.43)$$

□

Lorsque le modèle (4.2.1) est gaussien, les resultats se simplifient, montrant que $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ a la même distribution que $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et le *QMLE* $\hat{\lambda}_{QML}$.

Corollaire 5.3.2 (Aknouche et Touche, 2015b)

Sous **H1**, **H2**, **H3**, **H4** et $\gamma < 0$,

$$\sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_{1WLS}^* - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Omega). \quad (5.3.44)$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_{2WLS}^* - \lambda \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Pi). \quad (5.3.45)$$

où Ω et Π sont données par (5.3.26). $\square$

5.4 Propriétés finies des estimateurs *4SWLS1* et *4SWLS2*

Cette section évalue les performances des deux estimateurs $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ en échantillons finis via des simulations de Monte Carlo. Nous avons considéré des séries chronologiques générées de deux modèles : i) un *RCA*(1) gaussien, ii) *RCA*(1) non gaussien avec des innovations suivant une loi de Student normalisée et dont les coefficients aléatoires sont gaussiens. Pour chacune des instances, nous avons exécuté 1000 simulations. La moyenne (*Mean*) et l'erreur standard (*Std*) des estimations $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ ont été obtenues.

5.4.1 Cas d'un *RCA*(1) gaussien

Pour la première instance, les séries sont générées d'un modèle *RCA*(1) gaussien avec taille d'échantillon $n = 1000$. Les paramètres du modèle sont choisis à l'intérieur $(0.5, 0.25, 1)$ et à l'extérieur $(1.5, 1, 1)$ et $(1, 3, 1)$ du domaine de stationnarité stricte. Le Tableau 5.4.1 montre les moyennes (*Mean*) des deux estimations $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ et l'erreur standard (*Std*). Ces deux estimations sont comparées dans le même tableau avec le *QMLE* ($\hat{\lambda}_{QML}$),

obtenus dans Aue et Horváth (2011).

	$\hat{\lambda}_{2WLS}$			$\hat{\lambda}_{2WLS}^*$		$\hat{\lambda}_{QML}$	
	<i>True</i>	<i>Mean</i>	<i>Std</i>	<i>Mean</i>	<i>Std</i>	<i>Mean</i>	<i>Std</i>
ϕ	0.5	0.4968	0.0326	0.4980	0.0338	0.4985	0.0344
ρ^2	0.25	0.2479	0.0127	0.2464	0.0420	0.2483	0.0516
σ^2	1	0.9971	0.0464	1.0004	0.0670	0.9991	0.0865
ϕ	1.5	1.5015	0.0443	1.5029	0.0611	1.4991	0.0318
ρ^2	1	0.9940	0.0576	1.0000	0.0823	0.9954	0.0448
σ^2	1	0.5821	1.4290	1.1326	2.2729	1.3283	1.4056
ϕ	1	1.0014	0.0571	0.9996	0.0764	0.9998	0.0572
ρ^2	3	2.9930	0.1436	2.9975	0.1603	2.9965	0.1379
σ^2	1	0.9425	2.0652	1.7077	3.8882	1.4067	1.9154

Tableau 5.4.1. Comparaison entre $\hat{\lambda}_{2WLS}$, $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ et $\hat{\lambda}_{QML}$ pour un modèle $RCA(1)$ gaussien avec $n = 1000$.

On peut observer que les estimations QML et les deux versions du $4SWLS$ sont semblables avec une légère supériorité du $4SWLS$. En effet, dans la plupart des cas les biais de $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ sont plus petits que ceux du $\hat{\lambda}_{QML}$.

5.4.2 Cas d'un $RCA(1)$ non gaussien

Nous avons exécuté les deux estimateurs $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ sur des séries générées à partir d'un $RCA(1)$ non gaussien avec des innovations suivant une loi de Student (5) normalisée et des coefficients aléatoires gaussiens choisis tels que le modèle soit dans la région de stabilité $(0.85, 0.16, 0.5)$ et dans la région d'instabilité $(1, 3, 1)$. On peut observer que les résultats obtenus sont presque similaires à ceux du $RCA(1)$ gaussien (voir le Tableau 5.4.2) : les deux versions du $4SWLS$ donnent de bonnes estimations avec un biais petit ; nous pouvons observer aussi que la précision des estimations augmente lorsque la taille de l'échantillon

augmente ce qui est compatible avec la théorie asymptotique.

		$\hat{\lambda}_{2WLS}$			$\hat{\lambda}_{2WLS}^*$	
		True	Mean	Std	Mean	Std
$n = 50$	ϕ	0.85	0.8223	0.1249	0.8233	0.1933
	ρ^2	0.16	0.1390	0.0596	0.1712	0.0433
	σ^2	0.5	0.7530	0.2771	0.8456	0.6304
$n = 150$	ϕ	0.85	0.8383	0.0651	0.8404	0.0654
	ρ^2	0.16	0.1528	0.0271	0.1594	0.0654
	σ^2	0.5	0.7990	0.1763	0.8340	0.2211
$n = 50$	ϕ	1	0.9882	0.2696	0.9846	0.2722
	ρ^2	3	2.8328	0.6293	2.8806	0.6586
	σ^2	1	1.4266	5.3068	3.3923	11.9347
$n = 150$	ϕ	1	0.9991	0.1504	1.0042	0.1979
	ρ^2	3	2.9503	0.3644	2.9797	0.5973
	σ^2	1	1.4785	6.4183	2.5895	6.8690

Tableau 5.4.2. Comparaison entre $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ pour un $RCA(1)$ non gaussien avec $(\phi, \rho^2, \sigma^2) = (0.85, 0.16, 0.5)$, $(1, 3, 1)$, $\frac{\varepsilon_1}{\sigma} \sim t_{(5)}$, $\frac{\xi_1}{\rho} \sim N(0, 1)$ sous **H2'**.

5.4.3 Comparaison avec deux variantes de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (QML direct et $QMLKF$)

Nous avons comparé nos deux estimateurs ($\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$) du $4SWLS$ avec deux variantes de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien ($QMLE$) :

- La première, notée $\hat{\lambda}_{QML}$, est calculée par optimisation directe de la fonction du quasi-vraisemblance (5.2.1) (cf. Nicholls et Quinn, 1992 ; Aue et al, 2006 ; Berkes et al, 2009 ; Aue et Horváth, 2011).

- La seconde variante, notée $QMLKF$ (Quasi-Maximum Likelihood and Kalman Filter, $\hat{\lambda}_{QMLKF}$), est calculée sur la base de l'approche de décomposition de l'erreur de prédiction où les prédictions nécessaires sont obtenues via le filtre de Kalman (cf. Allal et Benmoumen, 2013).

Nous avons réalisé 1000 réplifications de séries $RCA(1)$, gaussiennes et ce pour différentes tailles d'échantillons $n \in \{50, 100, 150\}$ avec $(\phi, \rho^2, \sigma^2)' = (0.85, 0.16, 0.5)'$ qui se trouve dans

la région de stabilité du modèle $RCA(1)$.

			$\hat{\lambda}_{2WLS}^*$		$\hat{\lambda}_{2WLS}$		$\hat{\lambda}_{QML}$		$\hat{\lambda}_{QMLKF}$	
True			<i>Mean</i>	<i>Std</i>	<i>Mean</i>	<i>Std</i>	<i>Mean</i>	<i>Std</i>	<i>Mean</i>	<i>Std</i>
$n = 50$	ϕ	0.85	0.8188	0.1457	0.8203	0.1122	0.7861	0.0055	0.7968	0.0034
	ρ^2	0.16	0.1381	0.1381	0.1410	0.0585	0.1022	0.0034	0.1050	0.0030
	σ^2	0.50	0.5253	0.1837	0.4682	0.1135	0.5952	0.0146	0.5902	0.0087
$n = 100$	ϕ	0.85	0.8312	0.0818	0.8358	0.0775	0.7984	0.0026	0.8020	0.0024
	ρ^2	0.16	0.1492	0.0708	0.1489	0.0342	0.1234	0.0014	0.1243	0.0013
	σ^2	0.50	0.5083	0.1084	0.4869	0.0791	0.5710	0.0104	0.5511	0.0080
$n = 150$	ϕ	0.85	0.8408	0.0614	0.8404	0.0616	0.8198	0.0016	0.8269	0.0015
	ρ^2	0.16	0.1523	0.0558	0.1519	0.0256	0.1398	0.0009	0.1430	0.0008
	σ^2	0.50	0.5048	0.0860	0.4900	0.0622	0.5441	0.0084	0.5320	0.0067

Tableau 5.4.3. Comparaison entre $\hat{\lambda}_{2WLS}$, $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$, $\hat{\lambda}_{QML}$ et $\hat{\lambda}_{QMLKF}$ pour un $RCA(1)$ gaussien avec $(\phi, \rho^2, \sigma^2) = (0.85, 0.16, 0.5)$.

On remarque aisément à partir du Tableau 5.4.3 que les paramètres du modèle sont bien estimés et que les résultats sont totalement compatibles avec la théorie asymptotique. De plus, les estimateurs $\hat{\lambda}_{2WLS}$ et $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ possèdent des biais plus petits que ceux des deux variantes ($\hat{\lambda}_{QML}$ et $\hat{\lambda}_{QMLKF}$) du $QMLE$.

Chapitre 6

Preuves des résultats du Chapitre 5

Dans ce Chapitre, nous résumons les démonstrations détaillées des différents résultats obtenus dans le Chapitre précédent.

6.1 Preuve du Théorème 5.3.1

Preuve de (5.3.14)

En combinant (5.3.5) et (5.3.7) d'une part et (5.3.9) avec (5.3.10) d'autre part, nous avons

$$\widehat{\phi}_{1WLS} - \phi = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)}, \quad (6.1.1)$$

$$\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}_{t-1}' \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\tilde{e}_t}{h_t^2(\theta)}. \quad (6.1.2)$$

Sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$) et l'hypothèse **H1**, le théorème ergodique donne

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_{\infty} \left(\frac{y_1^2}{h_1(\theta)} \right), \quad (6.1.3a)$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_{\infty} \left(\frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \right) = E_{\infty} \left(\frac{y_{t-1}}{h_t(\theta)} E(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) \right) = 0,$$

et

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_{\infty} \left(\frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) \quad (6.1.3b)$$

$$\begin{aligned} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\tilde{e}_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{(\tilde{e}_t - e_t)}{h_t^2(\tilde{\theta})} + n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \\ &= o_{p.s.}(1) + n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_{\infty} \left(\mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi découle la partie *i*) de (4.4.3). Pour la partie *ii*) de (4.4.3), en combinant (5.2.12), (5.3.11), (5.2.21) et (5.2.22) nous avons

$$\hat{\phi}_{2WLS} - \phi = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\hat{\theta}_{1WLS})} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\hat{\theta}_{1WLS})}, \quad (6.1.4)$$

$$\hat{\theta}_{2WLS} - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\hat{e}_t}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})}. \quad (6.1.5)$$

Si l'on peut montrer que

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t(\theta)} \right) y_{t-1}^2 = o_{p.s.}(1) \quad (6.1.6a)$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t(\theta)} \right) y_{t-1} u_t = o_{p.s.}(1), \quad (6.1.6b)$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} = o_{p.s.}(1) \quad (6.1.6c)$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \left(\frac{1}{h_t^2(\hat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \hat{e}_t = o_{p.s.}(1), \quad (6.1.6d)$$

alors (6.1.4) et (6.1.5) deviendront respectivement

$$\hat{\phi}_{2WLS} - \phi = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} + o_{p.s.}(1), \quad (6.1.7)$$

et

$$\widehat{\theta}_{2WLS} - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\widehat{e}_t}{h_t^2(\theta)} + o_{p.s.}(1). \quad (6.1.8)$$

À partir de (5.3.5) et (5.3.8) et sous l'hypothèse **H1**, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{e}_t &= e_t + (\widehat{u}_t^2 - u_t^2) \\ &= e_t + \left(u_t + \left(\phi - \widehat{\phi}_{1WLS} \right) y_{t-1} \right)^2 - u_t^2 \\ &= e_t + 2u_t y_{t-1} \left(\phi - \widehat{\phi}_{1WLS} \right) + \left(\phi - \widehat{\phi}_{1WLS} \right)^2 y_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{\widehat{e}_t}{h_t^2(\theta)} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\theta)} + \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(\phi - \widehat{\phi}_{1WLS}) y_{t-1} u_t}{h_t^2(\theta)} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(\phi - \widehat{\phi}_{1WLS})^2 y_{t-1}^2}{h_t^2(\theta)}. \end{aligned} \quad (6.1.9a)$$

Partant du fait que $\widehat{\phi}_{1WLS}$ converge presque sûrement vers ϕ (résultat *i*) de (4.4.3)), on peut remarquer que le second terme du membre droit de l'égalité (6.1.9a) est $o_{p.s.}(1)$. Donc (6.1.8) devient

$$\widehat{\theta}_{2WLS} - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\theta)} + o_{p.s.}(1). \quad (6.1.10)$$

Pour montrer (6.1.6a) et (6.1.6b), notons que la formule de Taylor appliquée à la fonction $g(\bar{\theta}) = \frac{1}{h_t^2(\bar{\theta})}$ au voisinage de θ , donne

$$\begin{aligned} g(\widehat{\theta}_{1WLS}) - g(\theta) &= (\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)' \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta^*) \\ &= - \frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{h_t^3(\theta^*)}, \end{aligned}$$

où $\theta^* = (\sigma^{*2}, \rho^{*2})$ est entre θ et $\widehat{\theta}_{1WLS}$ et $L' = (\sigma^{*2}, \rho^{*2})$. Par conséquent, les membres

gauches de (6.1.6c) et (6.1.6d) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} &= -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \left(\frac{1}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})} - \frac{1}{h_t^2(\theta)} \right) e_t &= -\frac{2L'(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta)}{n} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^3(\theta^*)}, \end{aligned}$$

et ainsi les relations (6.1.6c) et (6.1.6d) s'avèrent vraies à partir de la consistance de $\widehat{\theta}_{1WLS}$, le théorème ergodique et la finitude des moments

$$E_\infty \left(\frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \right) \text{ et } E_\infty \left(\frac{1}{h_t^3(\theta^*)} \mathcal{Y}_{t-1} \right).$$

En appliquant la formule de Taylor à la fonction $\frac{1}{h_t(\theta)}$ au voisinage de θ et en suivant le même raisonnement que précédemment, on obtient (6.1.6c) et (6.1.6d).

Preuve de (5.3.15)

Réarrangeons (6.1.1) et (6.1.2) comme suit

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\widehat{\lambda}_{1WLS} - \lambda \right) &= \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\widetilde{\theta})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{array} \right)^{-1} &\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\begin{array}{c} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\widetilde{\theta})} \\ \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\widetilde{\theta})} \end{array} \right) + o_p(1). \end{aligned}$$

Sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$) et l'hypothèse **H1**, le théorème ergodique donne

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\widetilde{\theta})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{array} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \left(\begin{array}{cc} \frac{y_1^2}{h_1(\widetilde{\theta})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_1^2(\widetilde{\theta})} \mathcal{Y}_0 \mathcal{Y}'_0 \end{array} \right). \quad (6.1.11)$$

D'autre part, la suite $(W_t, t \in \mathbb{N}^*)$ définie par

$$W_t = \left(\frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\widetilde{\theta})}, \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\widetilde{\theta})} \right)',$$

est une différence de Martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}^*)$. De plus le théorème ergodique implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(W_t W'_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\tilde{\theta})} & \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} & \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\tilde{\theta})} & \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} & \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Par conséquent, le théorème central limite des martingales (*CLT*) donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\tilde{\theta})} \\ \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\tilde{\theta})} & \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} & \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix} \right), \quad (6.1.13)$$

et le résultat (5.3.15) s'obtient en combinant (6.1.11) et (6.1.12).

Preuve de (5.3.16)

Ecrivons (6.1.7) et (6.1.10) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_{2WLS} - \lambda \right) &= \\ &\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\tilde{\theta})} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \\ \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \end{pmatrix} + o_p(1). \end{aligned}$$

Sous la condition de stabilité ($\gamma < 0$) et l'hypothèse **H1**, le théorème ergodique implique

que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{h_t^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \begin{pmatrix} \frac{y_1^2}{h_1(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_1^2(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix}. \quad (6.1.14)$$

Or, la suite $(Q_t, t \in \mathbb{N}^*)$ donnée par

$$Q_t = \left(\frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)}, \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\theta)} \right)',$$

est une différence de Martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}^*)$, et est telle que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(Q_t Q'_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\theta)} & \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} & \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\theta)} & \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} & \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Par conséquent, par le théorème central limite des martingales nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \\ \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \frac{e_t}{h_t^2(\theta)} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\theta)} & \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} \mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1} \frac{y_{t-1} E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} & \frac{E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\theta)} \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} \end{pmatrix} \right), \quad (6.1.16)$$

et donc le résultat (5.3.16) est obtenu en combinant (6.1.14) et (6.1.16).

Preuve de (5.3.17)

En utilisant (4.4.4) et sous la condition $\gamma = E(\log |\phi + \xi_1|) > 0$, exprimons la seconde composante du vecteur de l'équation (5.3.5) sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t^2(\tilde{\theta})} (\hat{\sigma}_{1WLS}^2 - \sigma^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\tilde{\theta})} \sqrt{n} (\hat{\rho}_{1WLS}^2 - \rho^2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 \tilde{e}_t}{h_t^2(\tilde{\theta})}. \quad (6.1.17)$$

À partir de (4.4.4) nous avons

$$\frac{y_{t-1}^2}{h_t^2(\tilde{\theta})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

et en utilisant le lemme de Césaro et la compacité de l'ensemble des paramètres, qui implique que $|\hat{\sigma}_{1WLS}^2 - \sigma^2|$ est *p.s.* borné, il s'ensuit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t^2(\tilde{\theta})} (\hat{\sigma}_{1WLS}^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Donc, (6.1.17) devient

$$\sqrt{n} (\hat{\rho}_{1WLS}^2 - \rho^2) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} + o_p(1). \quad (6.1.18)$$

À partir de (6.1.1) et (6.1.18), nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{n} (\hat{\psi}_{1WLS} - \psi) = & \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\tilde{\theta})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\tilde{\theta})} \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\tilde{\theta})} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \end{pmatrix} + o_p(1). \end{aligned}$$

On sait que sous $\gamma > 0$, (4.4.4) implique

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\tilde{\theta})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\tilde{\theta})} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\rho}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\rho}^4} \end{pmatrix}. \quad (6.1.19)$$

D'autre part la suite $(L_t, t \in \mathbb{N}^*)$ donnée par

$$L_t = \left(\frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\tilde{\theta})}, \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \right)',$$

est une différence de Martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}^*)$. En outre, par le théorème ergodique nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(L_t L'_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\tilde{\theta})} & \frac{y_{t-1}^3 E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} \\ \frac{y_{t-1}^3 E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\tilde{\theta})} & \frac{y_{t-1}^4 E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\tilde{\theta})} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\tilde{\rho}^4} & \frac{E(\xi_1^3)}{\tilde{\rho}^6} \\ \frac{E(\xi_1^3)}{\tilde{\rho}^6} & \frac{Var(\xi_1^2)}{\tilde{\rho}^8} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Par conséquent, le théorème central limite des martingales donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\tilde{\theta})} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\tilde{\rho}^4} & \frac{E(\xi_1^3)}{\tilde{\rho}^6} \\ \frac{E(\xi_1^3)}{\tilde{\rho}^6} & \frac{Var(\xi_1^2)}{\tilde{\rho}^8} \end{pmatrix} \right). \quad (6.1.21)$$

D'où, le résultat (5.3.17) est obtenu en combinant (6.1.19) et (6.1.21).

Preuve de (5.3.18)

En utilisant (4.4.4) et sous la condition $\gamma = E(\log |\phi + \xi_1|) > 0$, écrivant la seconde composante du vecteur de l'équation (5.2.21) sous la forme suivante

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t^2(\theta)} (\hat{\sigma}_{2WLS}^2 - \sigma^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\theta)} \sqrt{n} (\hat{\rho}_{2WLS}^2 - \rho^2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 \hat{e}_t}{h_t^2(\theta)}. \quad (6.1.22)$$

À partir de (4.4.4) nous avons

$$\frac{y_{t-1}^2}{h_t^2(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

et en utilisant le lemme de Césaro et la compacité de l'ensemble des paramètres, qui implique que $|\hat{\sigma}_{2WLS}^2 - \sigma^2|$ est *p.s.* borné, il s'ensuit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t^2(\theta)} (\hat{\sigma}_{2WLS}^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Donc (6.1.17) devient

$$\sqrt{n} (\hat{\rho}_{2WLS}^2 - \rho^2) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\theta)} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\theta)} + o_p(1). \quad (6.1.23)$$

Maintenant écrivons (6.1.7) et (6.1.23) comme suit

$$\begin{aligned} \sqrt{n} (\hat{\psi}_{2WLS} - \psi) = \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\theta)} \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\theta)} \end{pmatrix} + o_p(1). \end{aligned}$$

On sait que, sous $\gamma > 0$, (4.4.4) implique

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{h_t^2(\theta)} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^4} \end{pmatrix}. \quad (6.1.24)$$

De même, la suite $(V_t, t \in \mathbb{N}^*)$ donnée par

$$V_t = \left(\frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)}, \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\theta)} \right)',$$

est une différence de Martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N}^*)$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(V_t V_t' / \mathcal{F}_{t-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \frac{y_{t-1}^2 h_t(\theta)}{h_t^2(\theta)} & \frac{y_{t-1}^3 E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} \\ \frac{y_{t-1}^3 E(u_t e_t / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^3(\theta)} & \frac{y_{t-1}^4 E(e_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})}{h_t^4(\theta)} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} & \frac{E(\xi_1^3)}{\rho^6} \\ \frac{E(\xi_1^3)}{\rho^6} & \frac{Var(\xi_1^2)}{\rho^8} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

Par conséquent, le théorème central limite des martingales donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\tilde{\theta})} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t}{h_t^2(\tilde{\theta})} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} & \frac{E(\xi_1^3)}{\rho^6} \\ \frac{E(\xi_1^3)}{\rho^6} & \frac{Var(\xi_1^2)}{\rho^8} \end{pmatrix} \right). \quad (6.1.26)$$

Ainsi, le résultat (5.3.18) est obtenu en combinant (6.1.24) et (6.1.26). ■

6.2 Preuve du Théorème 5.3.3

Preuve de (5.3.39)

En combinant (5.2.12) et (5.3.7) on obtient

$$\hat{\phi}_{1WLS}^* - \phi = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\tilde{\theta})} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t^*}{h_t(\tilde{\theta})}, \quad (6.2.1)$$

donc, la consistance de $\hat{\phi}_{1WLS}^*$ est obtenue de la même manière que celle de $\hat{\phi}_{1WLS}$ (5.3.14 *i*) (Théorème 5.3.1). D'autre part, en combinant (5.3.34) et (5.3.35), à partir de la consistance de $\hat{\phi}_{1WLS}^*$ et en suivant la même démarche utilisée pour montrer (5.3.14 *ii*) du Théorème 5.3.1, on a

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{1WLS}^* - \theta &= \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \right)^{-1} \times \\ &\quad \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} e_t^*}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} + n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} (\tilde{e}_t^* - e_t^*)}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \right) \\ &= \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} e_t^*}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} + o_{p.s.}(1). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

D'où, la consistance forte de $\hat{\theta}_{1WLS}^*$ est obtenue de la même façon que pour $\hat{\theta}_{1WLS}$. Ainsi découle la partie *i*) de (5.3.39). Pour la partie *ii*) de (5.3.39), en remplaçant (5.2.12) dans (5.3.11) et (5.3.36) dans (5.3.37), nous obtenons

$$\widehat{\phi}_{2WLS}^* - \phi = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\widehat{\theta}_{1WLS}^*)} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t^*}{h_t(\widehat{\theta}_{1WLS}^*)}, \quad (6.2.3)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_{2WLS}^* - \theta &= \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{(\widehat{u}_t^{*2} - (\widehat{\sigma}_{WLS}^{*2} + \widehat{\rho}_{WLS}^{*2} y_{t-1}^2))^2} \right)^{-1} \times \\ &\quad n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \widehat{e}_t^*}{(\widehat{u}_t^{*2} - (\widehat{\sigma}_{WLS}^{*2} + \widehat{\rho}_{WLS}^{*2} y_{t-1}^2))^2}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

En procédant de la même manière que dans (5.3.14 *ii*) (Théorème 5.3.1), on a

$$\widehat{\phi}_{2WLS}^* - \phi = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t^*}{h_t(\theta)} + o_{p.s.}(1), \quad (6.2.5)$$

$$\widehat{\theta}_{2WLS}^* - \theta = \left(n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} \right)^{-1} n^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} e_t^*}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} + o_{p.s.}(1). \quad (6.2.6)$$

Par conséquent, la partie *ii*) de (5.3.39) est obtenue à partir de (6.2.5) et (6.2.6) en utilisant les mêmes arguments que pour (5.3.14 *i*) (Théorème 5.3.1).

Preuve de (5.3.40)

Réécrivons (6.2.1) et (6.2.2) comme suit

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\widehat{\lambda}_{1WLS}^* - \lambda \right) &= \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{(\widetilde{u}_t^{*2} - (\widetilde{\sigma}^2 + \widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \end{array} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\begin{array}{cc} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t^*}{h_t(\theta)} & \\ \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} e_t^*}{(\widetilde{u}_t^{*2} - (\widetilde{\sigma}^2 + \widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} & \end{array} \right) + o_p(1). \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Sous la condition de stabilité $\gamma < 0$ et l'hypothèse **(H1)**, le théorème ergodique donne

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1}}{(\widetilde{u}_t^{*2} - (\widetilde{\sigma}^2 + \widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \end{array} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E_\infty \left(\begin{array}{cc} \frac{y_1^2}{h_1(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}'_1}{(\widetilde{u}_1^{*2} - (\widetilde{\sigma}^2 + \widetilde{\rho}^2 y_1^2))^2} \end{array} \right), \quad (6.2.8)$$

et à partir du théorème central limite des martingales de Brown (1971), nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\begin{array}{c} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t^*}{h_t(\tilde{\theta})} \\ \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1} e_t^*}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \end{array} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, D(\lambda, \tilde{\theta})), \quad (6.2.9)$$

et le résultat (5.3.40) s'obtient en combinant (6.2.8) et (6.2.9).

La preuve de (5.3.41) est établie de la même manière que dans (5.3.40), en écrivant $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_{2WLS}^* - \lambda)$ comme dans (6.2.7), $\tilde{\theta}$ est remplacé par θ .

Preuve de (5.3.42)

En utilisant (4.4.4) et sous $\gamma = E(\log|\phi + \xi_1|) > 0$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 (\hat{\sigma}_{1WLS}^{*2} - \sigma^2)}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\sqrt{n} y_{t-1}^4 (\hat{\rho}_{1WLS}^{*2} - \rho^2)}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 \tilde{e}_t^*}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \quad (6.2.10)$$

À partir de (4.4.4) et en utilisant le lemme de Césaro et la compacité de l'ensemble des paramètres, qui implique que $|\hat{\sigma}_{1WLS}^{*2} - \sigma^2|$ est *p.s.* borné, il s'ensuit que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} (\hat{\sigma}_{1WLS}^{*2} - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Donc, (6.2.10) devient

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_{1WLS}^{*2} - \rho^2) = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 \tilde{e}_t^*}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} + o_p(1). \quad (6.2.11)$$

À partir de (6.1.1) et (6.2.11), nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\psi}_{1WLS}^* - \psi) = & \quad (6.2.12) \\ & \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\tilde{\theta})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \end{array} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\begin{array}{c} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\tilde{\theta})} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 \tilde{e}_t^*}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \end{array} \right) + o_p(1). \end{aligned}$$

On sait que sous la condition d'instabilité ($\gamma > 0$), (4.4.4) implique

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\rho}^2} & 0 \\ 0 & E\left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (6.2.13)$$

D'autre part, en utilisant le théorème central limite des Martingales de Brown (1971), nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t^*}{(\tilde{u}_t^{*2} - (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\rho}^2 y_{t-1}^2))^2} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\tilde{\rho}^4} & \frac{1}{\tilde{\rho}^2} E\left(\frac{\xi_1(\xi_1^2 - \rho^2)}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2}\right) \\ \frac{1}{\tilde{\rho}^2} E\left(\frac{\xi_1(\xi_1^2 - \rho^2)}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^2}\right) & E\left(\frac{(\xi_1^2 - \rho^2)^2}{(\xi_1^2 - \tilde{\rho}^2)^4}\right) \end{pmatrix} \right). \quad (6.2.14)$$

Donc, le résultat (5.3.42) est obtenu en combinant (6.2.13) et (6.2.14).

Preuve de (5.3.43)

En utilisant les mêmes arguments que pour la preuve de (5.3.42), on peut facilement obtenir à partir de (6.1.4) et du fait que

$$\begin{aligned} n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{(\hat{u}_t^{*2} - (\hat{\sigma}_{WLS}^{*2} + \hat{\rho}_{WLS}^{*2} y_{t-1}^2))^2} - \frac{1}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} \right) \mathcal{Y}_{t-1} \mathcal{Y}'_{t-1} &= o_{p.s.}(1) \\ n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{Y}_{t-1} \left(\frac{1}{(\hat{u}_t^{*2} - (\hat{\sigma}_{WLS}^{*2} + \hat{\rho}_{WLS}^{*2} y_{t-1}^2))^2} - \frac{1}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} \right) \hat{e}_t^* &= o_{p.s.}(1), \end{aligned}$$

le résultat suivant

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\hat{\psi}_{2WLS}^* - \psi \right) &= \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t^*}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} \end{pmatrix} &+ o_p(1). \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Donc, sous la condition d'instabilité ($\gamma > 0$) et en utilisant (4.4.4) on obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2}{h_t(\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^4}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \rho^2)^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (6.2.16)$$

D'autre part, le théorème central limite des Martingales de Brown (1971) conduit à

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1} u_t}{h_t(\theta)} \\ \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^2 e_t^*}{(u_t^{*2} - (\sigma^2 + \rho^2 y_{t-1}^2))^2} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N \left(0, \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2} E \left(\frac{\xi_1}{(\xi_1^2 - \rho^2)} \right) \\ \frac{1}{\rho^2} E \left(\frac{\xi_1}{(\xi_1^2 - \rho^2)} \right) & E \left(\frac{1}{(\xi_1^2 - \rho^2)^2} \right) \end{pmatrix} \right). \quad (6.2.17)$$

Ainsi, le résultat (5.3.43) est obtenu en combinant (6.2.16) et (6.2.17). ■

Conclusion de la deuxième partie et perspectives

Dans cette deuxième partie de la thèse, nous avons considéré le problème d'inférence statistique du modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique (*RCA*) qui est :

- de moyenne et de volatilité conditionnelles ;
- à volatilité endogène ;
- à volatilité linéaire des paramètres.

Pour ce modèle, nous avons proposé deux méthodes d'estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes (*4SWLS1* et *4SWLS2*) qui ont une forme explicite contrairement au *QMLE* gaussien. La méthode *4SWLS2* étant une généralisation de l'estimateur de Schick (1996). Pour ces deux estimateurs nous avons établi la propriété de consistance et de normalité asymptotique aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du domaine de stabilité (stationnarité stricte). En outre, nous avons montré que la première variante *4SWLS1* a la même variance asymptotique que le *QMLE* gaussien alors que la deuxième (*4SWLS2*) en a la même uniquement sous l'hypothèse de normalité du modèle. Enfin, relativement à une étude de simulation, les deux méthodes proposées ont des propriétés numériques et finies meilleures que celles du *QMLE* gaussien.

Nous avons vu qu'un modèle *RCA* symétrique a les mêmes deux premiers moments conditionnels que le modèle autorégressif double (*DAR*) et même dans le cas d'innovation et de coefficient conjointement gaussien, il en est équivalent en distribution conditionnelle. Ainsi, les méthodes *4SWLS* proposées sont trivialement adaptables au modèle *DAR* et constituent par conséquent de meilleures alternatives numériques à l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance gaussien (Ling, 2007 ; Ling et Li, 2008).

En outre, Aknouche (2015a) a proposé une méthode du type $4SWLS1$ sur une nouvelle classe de modèles RCA asymétriques ($QRCA$), généralisation du modèle $RCA(1)$ symétrique et qui est un cas particulier du modèle RCA généralisé. Dans cette nouvelle classe, Aknouche (2015a) a considéré le coefficient aléatoire comme étant une régression linéaire de l'innovation. Aussi, l'application de la variante $4SWLS2$ au modèle $QRCA$ est envisageable.

Notons que pour simplifier la présentation, les variantes $4SWLS1$ et $4SWLS2$ ont été définies sur un $RCA(1)$. En fait, ces deux méthodes sont trivialement adaptables au cas d'un $RCA(p)$ d'ordre supérieur et en principe, dans le cas de stabilité du modèle, elles auraient la propriété de consistance et de normalité asymptotique. Le problème dans le cas d'instabilité demeure ouvert.

Par ailleurs, il est important de considérer la méthode $4SWLS$ dans le cas d'un modèle RCA généralisé (dit aussi asymétrique, quadratique), i.e. là où le coefficient aléatoire et l'innovation ne sont pas astreints à être non-corrélés. Une autre question importante serait de relâcher la contrainte sur le processus d'innovation : $E(\eta_1^4) < \infty$ (ex. Zhu et Ling, 2013) qui n'est pas simple à vérifier en pratique. Enfin, des extensions de ces méthodes au cas d'un modèle RCA (symétrique ou non) multivarié (Prášková et Vaněček, 2011) et/ou à coefficients périodiquement distribués (cf. Franses et Paap, 2011 ; Ziel, 2015) seraient souhaitables.

Troisième partie

Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons étudié le problème d'inférence statistique concernant deux classes de modèles de séries chronologiques à savoir : le modèle *ARCH* asymétrique en puissance et le modèle autorégressif à coefficients aléatoires symétrique (*RCA*). Le premier est un modèle de volatilité pure tandis que le second est un modèle qui est à la fois de moyenne et de volatilité conditionnelles. Les propriétés communes à ces deux classes de modèles est que toutes les deux sont :

- à volatilité endogène,
- et à volatilité linéaire des paramètres.

Pour ces deux classes de modèles, nous avons proposé plusieurs méthodes d'estimation basées sur le principe des moindres carrés pondérés en multi-étapes : deux étapes (*2SWLS*) pour le δ -*TARCH* et quatre étapes (*4SWLS*) pour le *RCA* symétrique. Ces méthodes exploitent la linéarité de la variance conditionnelle des deux modèles par rapport aux paramètres pour être données sous forme explicite, ce qui n'est pas pris en charge par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (*QML*) gaussien qui, elle, est itérative et ainsi trop encombrante pour des modèles d'ordres assez grands. De plus, nous avons montré que les méthodes proposées ont un niveau d'efficacité asymptotique égal ou supérieur à l'estimateur du *QMLE* gaussien et aux variantes des moindres carrés ordinaires (*OLS*), et ce tant dans le domaine de stabilité que dans le domaine d'instabilité. Nous avons également proposé des estimateurs pour les variances asymptotiques des estimateurs proposés, estimateurs qui sont consistants à l'intérieur et à l'extérieur du domaine de stabilité. En outre, nous avons vu, relativement à certaines expériences de simulation, que les méthodes proposées ont des propriétés finies meilleures que celles des méthodes du *QML* et du *OLS*. Enfin, en se basant sur ces méthodes *WLS* développées, nous avons proposé des tests consistants de stationnarité stricte et de symétrie.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à un seul volet des modèles de volatilité : les modèles à volatilité endogène, i.e. ceux dont la variance conditionnelle dépend explicitement (non à travers l'innovation) du processus observé. Des modèles à *volatilité exogène* à l'instar du modèle autoregressif à erreur *ARCH* (ou aussi le modèle bilinéaire avec racine unitaire, Francq et al, 2008), n'ont pas été considérés dans notre travail puisque leur variance conditionnelle n'est généralement pas linéaire des paramètres. Pourtant, si nos

méthodes *4SWLS* s'adaptent facilement au cas de modèles *AR-ARCH* et pourraient conserver l'avantage de la forme explicite par rapport à l'estimateur du *QMLE* gaussien, l'étude de leurs propriétés asymptotiques serait en revanche différente de celle des modèles à volatilité endogène et ce pour plusieurs raisons :

- D'abord, en raison de la non-linéarité de la variance conditionnelle par rapport aux paramètres (cf. Chapitre 4), il n'est pas sûr que l'adaptation de la méthode *4SWLS* au modèle *AR-ARCH* ait la même efficacité asymptotique que le *QMLE* gaussien (ex. Pantula, 1988) comme ce qui est le cas pour le modèle *DAR* et le modèle *RCA* symétrique.

- Ensuite, dans le cas du modèle *AR-ARCH*, nous serons confrontés au problème de racine unitaire (inexistence de l'effet lame de couteau) qui est inexistant pour le modèle *DAR* et le modèle *RCA* symétrique. En effet, comme souligné dans l'introduction générale, les modèles à volatilité exogène sont caractérisés par l'effet lame de couteau qui signifie que la vitesse de convergence ainsi que la distribution asymptotique du *QMLE* sont différents que l'on soit à l'intérieur, sur la frontière ou à l'extérieur du domaine de stabilité (stationnarité stricte). L'analyse des propriétés des estimateurs sera donc basée sur des outils plus ou moins différents (ex. théorème central limite fonctionnel dans le cas de paramètres sur la frontière de stabilité).

- Enfin, une autre raison plus pratique est que pour les modèles à volatilité exogène, on ne peut avoir des solutions stationnaires à variance infinie générées par des innovations à variance finie, chose qui est tout à fait possible avec les modèles à volatilité endogène, notamment le modèle δ -*TARCH* et le modèle *RCA* symétrique (cf. Aknouche, 2015a), ce qui répond bien aux exigences des praticiens.

Quatrième partie

Annexes

Chapitre 7

Annexe A : Equations aux récurrences stochastiques

Nombre de modèles de séries chronologiques peuvent s'exprimer au moyen d'équations aux récurrences stochastiques du type

$$Y_{n+1} = A_{n+1}Y_n + B_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (A.1)$$

(pour d'autres formes voir Doukhan et Wintenberger, 2008). Notre premier objectif dans cette annexe est d'illustrer les conditions d'existence d'une unique solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (A.1), et ce dans le cas où la suite $((A_n, B_n), n \in \mathbb{Z})$ est strictement stationnaire et ergodique.

Brandt (1986) a établi un théorème dans lequel il donne des conditions d'existence d'une solution non-anticipative strictement stationnaire pour (A.1). Il l'a utilisé pour le cas unidimensionnel ($d = 1$), mais la démonstration est valable pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Théorème A.1 (Brandt, 1986)

Soit $((A_n, B_n), n \in \mathbb{Z})$ un processus strictement stationnaire et ergodique tel que $E(\log^+(A_0))$ et $E(\log^+(B_0))$ sont toutes les deux finies. Supposons que le plus grand exposant de Lyapounov γ défini par

$$\gamma = \inf \left\{ E \left(\frac{1}{n+1} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\| \right), n \in \mathbb{N} \right\},$$

est strictement négatif. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série

$$Y_n = \sum_{k=0}^{+\infty} A_n A_{n-1} \dots A_{n-k+1} B_{n-k},$$

converge absolument presque sûrement et le processus $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$ est l'unique solution strictement stationnaire de (A.1). $\square$

On se place dans le cas où $((A_n, B_n), n \in \mathbb{Z})$ est iid avec $d \geq 1$. On présente quelques définitions relatives à l'équation (A.1) (cf. Bougerol et Picard, 1992a).

Définition A.1

Un modèle autorégressif généralisé avec coefficients iid est une équation

$$Y_{n+1} = A_{n+1}Y_n + B_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où $((A_n, B_n), n \in \mathbb{Z})$ est une suite iid définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prenant leurs valeurs dans $M(d) \times \mathbb{R}^d$.

Une solution de cette équation est une suite $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$ de $\mathbb{R}^d$ pour laquelle (A.1) est vérifiée.

Dans ce qui suit, une solution strictement stationnaire qui ne dépend pas du futur est définie.

Définition A.2 (Solution non-anticipative, Bougerol et Picard, 1992a)

Une solution strictement stationnaire non-anticipative de (A.1) est un processus strictement stationnaire $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$, solution de (A.1), tel que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, Y_p est indépendante des variables aléatoires $\{(A_n, B_n), n > p\}$.

Passant à la définition suivante qui introduit un type d'irréductibilité de (A.1).

Définition A.3 (Bougerol et Picard, 1992a)

- Une sous-espace affine H de $\mathbb{R}^d$ est dit invariant sous le modèle (A.1) si $\{A_0 y + B_0; y \in H\}$ est contenue dans H presque sûrement.
- Le modèle (A.1) est dit irréductible si $\mathbb{R}^d$ est le seul sous-espace affine invariant de $\mathbb{R}^d$.

Théorème A.2 (Bougerol et Picard, 1992a)

Considérons le modèle (A.1) avec des coefficients iid. Supposons qu'il est irréductible et qu'il a une solution non-anticipative strictement stationnaire $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$. Alors :

- i) $A_0 A_{-1} \dots A_{-k}$ converge presque sûrement vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$.
- ii) Pour tout entier n ,

$$Y_n = \sum_{k=0}^{+\infty} A_n A_{n-1} \dots A_{n-k+1} B_{n-k},$$

où la dernière série converge absolument presque sûrement.

- iii) $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$ est l'unique solution strictement stationnaire non-anticipative de (A.1). $\square$

Le Théorème que nous présentons dans ce qui suit stipule que, sous la condition d'irréductibilité, s'il existe une solution strictement stationnaire non-anticipative de (A.1) alors le plus grand exposant de Lyapounov γ est strictement négatif.

Théorème A.3 (Bougerol et Picard, 1992a)

Supposons que le modèle (A.1) avec entrées iid est irréductible et que $E(\log^+ \|A_0\|)$ et $E(\log^+ \|B_0\|)$ sont toutes les deux finies. Alors (A.1) a une solution non-anticipative strictement stationnaire si et seulement si le plus grand exposant de Lyapounov est strictement négatif. $\square$

Proposition A.1 (Bougerol et Picard, 1992a)

Supposons que le modèle (A.1) a une solution non-anticipative strictement stationnaire $(Y_n, n \in \mathbb{Z})$. Soit H le sous-espace affine minimal de $\mathbb{R}^d$ tel que $P(Y_0 \in H) = 1$. Alors H est invariant sous le modèle (A.1) et tout sous-espace invariant de H porte une solution non-anticipative strictement stationnaire. $\square$

Le Corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème A.1, Théorème A.3 et de la Proposition A.1.

Corollaire A.1 (Bougerol et Picard, 1992a)

Considérons le modèle (A.1) avec $E(\log^+ \|A_0\|)$ et $E(\log^+ \|B_0\|)$ finies. Supposons qu'il existe une solution non-anticipative strictement stationnaire qui n'est pas portée par un hyperplan affine. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) *Le plus grand exposant de Lyapounov est strictement négatif.*
- ii) *Le modèle (A.1) est irréductible.*
- iii) *Il existe une unique solution non-anticipative strictement stationnaire. $\square$*

Dans la deuxième partie de cette Section, nous considérons la version unilatérale (voir Vervaat, 1979) de l'équation (A.1). En effet, soit l'équation aux récurrences stochastique suivante

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{A.2})$$

où $((A_n, B_n), n \in \mathbb{N})$ est *iid* et Y_0 est une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Notre objectif est de présenter les conditions sous lesquelles Y_n converge en distribution quand $n \rightarrow \infty$. Cette convergence est liée à l'existence de solution de

$$Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_1 Y + B_1,$$

(point fixe distributionnel) telle que Y et (A_1, B_1) sont indépendants et

$$Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} A_1 A_2 \dots A_{n-1} B_n,$$

où la dernière série converge absolument presque sûrement.

Nous commençons par une simple observation concernant la distribution limite Y .

Lemme A.1 (Vervaat, 1979)

Si $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ pour une certaine variable aléatoire Y alors Y est un point fixe distributionnel de (A.2), i.e. solution de l'équation

$$Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_1 Y + B_1, \quad (\text{A.3})$$

où Y et (A_1, B_1) sont indépendants. $\square$

Le lemme suivant résume le comportement limite de la série $(\sum_{k=1}^n \log |A_k|, n \in \mathbb{N})$.

Lemme A.2 (Vervaat, 1979)

Un et un seul des cas suivants se produit :

Cas 1 $\sum_{k=1}^n \log |A_k| \xrightarrow{\mathcal{L}} -\infty$.

Cas 2 $\log(|A_1|) = 0$ p.s.

Cas 3 $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\sum_{k=1}^n \log |A_k| > 0) > 0$. $\square$

Lemme A.3 (Vervaat, 1979)

- Si $-\infty \leq E(\log |A_1|) < 0$ alors le cas 1 sera vérifié.
- Si $0 < E(\log |A_1|) \leq \infty$ alors le cas 3 sera vérifié.
- Si $E(\log |A_1|) = 0$ alors les trois cas seront vérifiés.
- Si $E(\log |A_1|)$ n'existe pas alors les cas 1 et 3 seront vérifiés. $\square$

À partir des résultats précédents, nous avons les théorèmes suivants :

Théorème A.4 (Vervaat, 1979)

Supposons que l'équation (A.3) possède une solution alors nous avons les résultats suivants :

- Cas 1 du Lemme A.2. La solution de (A.3) est unique en distribution et $Y_n(Y_0)$ converge en distribution pour tout Y_0 .
- Cas 2 du Lemme A.2. Il existe un réel c tel que $B_1 = 1 - A_1$ p.s. Si $A_1 \neq 1$, donc toutes les solutions de (A.3) sont celles de Y , avec $Y - c \stackrel{\mathcal{L}}{=} -(Y - c)$. Si $A = 1$ p.s., où $(A_1, B_1) = (1, 0)$ p.s. alors tout Y satisfait (A.3). Si $A \neq 1$ alors $Y_n(Y_0)$ converge en distribution pour tout Y_0 . Sinon, Y_0 est une solution de (A.3).
- Cas 3 du Lemme A.2. Il existe un réel c tel que $B_1 = c(1 - A_1)$ p.s. et $Y = c$ p.s. est la seule solution de (A.3). Par ailleurs, $Y_n(Y_0)$ converge en distribution si et seulement si $Y_0 = c$ p.s. $\square$

Théorème A.5 (Vervaat, 1979)

- a) Si $0 \leq E(\log |A_1|) < \infty$ alors (A.3) possède une solution si et seulement si $B_1 = c(1 - A_1)$ p.s. pour un certain réel c .
- b) Si $-\infty \leq E(\log |A_1|) < 0$ alors (A.3) possède une solution si et seulement si $E(\log^+ |B_1|) < \infty$.
- c) Si $E \log |A| = -\infty$ alors (A.3) possède une solution si $E(\log^+ |B_1|) < \infty$ ou $A = 0$.

Dans les cas b) et c) la série $\sum_{k=1}^{\infty} A_1 A_2 \dots A_{k-1} B_k$ converge et est une solution de l'équation (A.3). $\square$

Le Corollaire suivant donne des conditions sous lesquelles $|Y_n|$ diverge en probabilité vers l'infini quand $n \rightarrow \infty$. Le point crucial ici est, que sous une condition dite de non-dégénérescence ($P(B_1 + A_1 c = c) < 1$), nous avons deux cas extrêmes dichotomiques : convergence en distribution ou divergence en probabilité.

- Soit $Y_n(Y_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y_{\infty}$, pour une certaine v.a. Y_{∞} définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour tout Y_0 .
- Soit $|Y_n| \xrightarrow{P} +\infty$.

Corollaire A.2 (Goldie et Maller, 2000)

Sous $P(A_1 = 0) = 0$ et $P(B_1 + A_1 c = c) < 1$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a :

- a) $0 \leq E(\log |A_1|) \leq \infty$. La convergence ne se produit pas (i.e. $|Y_n| \xrightarrow{P} +\infty$).
- b) $-\infty \leq E(\log |A_1|) \leq 0$. La convergence aura lieu si et seulement si $E(\log^+ |B_1|) < \infty$.
- c) $E(\log |A_1|) = -\infty$. La convergence aura lieu si et seulement si $E \log^+ |B_1| < \infty$.
- d) $E(\log |A_1|)$ n'existe pas, à savoir, $E(\log^+ |A_1|) = \infty = E(\log^- |A_1|)$.

i) $E\left(\frac{\log^+ |A_1|}{M_{A_1}(\log^+ |A_1|)}\right) < \infty$. La convergence aura lieu si $E(\log^+ |B_1|) < \infty$.

ii) $E\left(\frac{\log^+ |A_1|}{M_{A_1}(\log^+ |A_1|)}\right) = \infty$. La convergence ne se produit pas,

où $M_{A_1}(y) = \int_0^y P(X > x) dx$, $y > 0$. $\square$

Chapitre 8

Annexe B : Théorèmes limites

Nous donnons dans cette annexe les principaux théorèmes limites utilisés dans cette thèse (ex. Breiman, 1968 ; Hall et Heyde, 1980 ; Sen et Singer, 1993 ; Billingsley, 1995).

Le théorème central limite dans le cas *iid*.

Théorème B.1

Soit $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ une suite iid définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\mu := E(Y_n) < \infty$ et que $\sigma^2 := E(Y_n^2) < \infty$. Alors

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

□

Théorème ergodique pour un processus stationnaire et ergodique.

Théorème B.2 (Karlin et Taylor, 1975)

Soit $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ un processus strictement stationnaire et ergodique de moyenne finie μ . Alors

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \mu\right) = 1.$$

□

Théorèmes centraux limites des martingales dans les cas stationnaire et non stationnaire.

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de martingales définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $S_n = X_n - X_{n-1}$ le terme général de la différence de martingales correspondante.

Théorème B.3 (Brown, 1971)

Soit $\{S_{n,t}, 1 \leq n \leq t, t \geq 1\}$ une matrice triangulaire de variables aléatoires définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $\{\mathcal{F}_{n,t}, 0 \leq n \leq t, t \geq 1\}$ une matrice triangulaire de σ -algèbres de $\mathcal{F}$, telle que pour chaque t et $1 \leq n \leq t$, $S_{n,t}$ est $\mathcal{F}_{n,t}$ -mesurable et $\mathcal{F}_{n-1,t} \subseteq \mathcal{F}_{n,t}$ pour $1 \leq k \leq t, 1 \leq j \leq t$ et $t \geq 1$ (filtration). Soit

$$Z_{kt} = \sum_{n=1}^k S_{n,t},$$

$$\delta_{nt}^2 = E(S_{n,t}^2 / \mathcal{F}_{n-1,t}),$$

$$V_{j,t}^2 = \sum_{n=1}^j \delta_{nt}^2,$$

et

$$s_{t,t}^2 = E(V_{t,t}^2).$$

On suppose que :

- $E(S_{n,t} / \mathcal{F}_{n-1,t}) = 0$ p.s. pour $1 \leq k \leq t$,
- $V_{t,t}^2 s_{t,t}^{-2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 1$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{t,t}^{-2} \sum_{j=1}^n E[S_{j,t}^2 I(|S_{j,t}| \geq \epsilon s_{t,t}) / \mathcal{F}_{n-1,t}] = 0$ pour tout $\epsilon > 0$, où $I(A)$ est la fonction indicatrice d'un ensemble A . Alors,

$$s_{t,t}^{-1} Z_{tt} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

□

Théorème B.4 (Hall et Heyde, 1980)

Soit $\{X_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ une matrice triangulaire de carré intégrable, de moyenne nulle et soit η^2 une variable aléatoire finie p.s. Supposons que

$$\max_i |S_{ni}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0,$$

$$\sum_i S_{ni}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \eta^2,$$

$$E\left(\max_i S_{ni}^2\right) \quad \text{est bornée en } n,$$

et $\mathcal{F}_{n,i} \subseteq \mathcal{F}_{n+1,i}$ pour $1 \leq i \leq k_n, n \geq 1$.

Alors $S_{n,k_n} = \sum_i^n X_{ni} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, où la variable aléatoire Y a une fonction caractéristique définie par $E \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2 t^2\right)$. $\square$

Corollaire B.1 (Hall et Heyde, 1980)

Sous les conditions suivantes :

$$\text{Pour tout } \epsilon > 0, \quad \sum_{i=1}^n E[S_{ni}^2 I(|S_{ni}| \geq \epsilon) / \mathcal{F}_{n,i-1}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0,$$

$$V_{n,k_n}^2 = \sum_{i=1}^n E(S_{ni}^2 / \mathcal{F}_{n,i-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \eta^2,$$

et si $\mathcal{F}_{n,i} \subseteq \mathcal{F}_{n+1,i}$ pour $1 \leq i \leq k_n, n \geq 1$ alors les conclusions du Théorème précédent restent vraies. $\square$

Chapitre 9

Annexe C

9.1 Glossaire

$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.}$	Convergence presque sûre quand $n \rightarrow \infty$.
$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}}$	Convergence en loi quand $n \rightarrow \infty$.
$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p}$	Convergence en probabilité quand $n \rightarrow \infty$.
$o_p(1)$	Terme convergent en probabilité vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.
$o_{p.s.}(1)$	Terme convergent presque sûrement vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.
$O_p(1)$	Terme borné en probabilité quand $n \rightarrow \infty$.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres entiers positifs.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers.
δ -ARCH	Power ARCH - ARCH en puissance.
δ -TARCH	Threshold power ARCH - ARCH à seuil en puissance.
δ -TGARCH	Threshold power GARCH - GARCH à seuil en puissance.
2SWLS	Two-Stage Weighted Least Squares - Moindres carrés pondérés en deux étapes.
2SWLSE	Two-Stage Weighted Least Squares Estimate - Estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes.
4SWLS	Four-Stage Weighted Least Squares.
4SWLSE	Four-Stage Weighted Least Squares Estimate - Estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes.
APARCH	Asymmetric Power ARCH - ARCH asymétrique en puissance.
AR	AutoRegressive - AutoRégressif.
AR-ARCH	AR with ARCH innovation (error) - Autorégressif à erreur ARCH.
ARCH	Autoregressive Conditionally Heteroskedastic - AR Conditionnellement Hétéroscedastique.

<i>ARMA</i>	AutoRegressive Moving Average - Autorégressif Moyenne mobile.
<i>ARMA-GARCH</i>	<i>ARMA</i> with <i>GARCH</i> innovation (error) - <i>ARMA</i> à erreur <i>GARCH</i> .
<i>AS</i>	Asymétrie.
<i>CAN</i>	Consistency and Asymptotic Normality - Consistance et Normalité Asymptotique.
<i>DAR</i>	Double Autoregression - Autorégressif Double.
<i>EGARCH</i>	Exponential <i>GARCH</i> - <i>GARCH</i> Exponentiel.
<i>GARCH</i>	Generalized <i>ARCH</i> - <i>ARCH</i> Généralisé.
<i>GJR-GARCH</i>	Glosten-Jagannathan-Runkle <i>GARCH</i> .
<i>GRCA</i>	Generalized <i>RCA</i> - <i>RCA</i> généralisé.
<i>GQMLE</i>	Generalized Quasi-Maximum Likelihood Estimate - Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance généralisé.
<i>iid</i>	Indépendant et identiquement distribué.
<i>M</i>	Mean - Moyenne.
<i>MAR</i>	Mixture autoregression - Mélange d'autorégressions.
<i>MBL</i>	Markov Bilinear - Bilinéaire Markovien.
<i>MS-AR</i>	Markov Switching <i>AR</i> - <i>AR</i> à changement de régime Markovien.
<i>NS</i>	Non-stationnarité.
<i>OLS</i>	Ordinary Least Squares - Moindres carrés ordinaires.
<i>OLSE</i>	Ordinary Least Squares Estimate - Estimateur des moindres carrés ordinaires.
<i>p.s.</i>	Presque sûre (sûrement).
<i>QML</i>	Quasi-Maximum Likelihood - Quasi-maximum de vraisemblance.
<i>QMLE</i>	Quasi-Maximum Likelihood Estimate - Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance.
<i>QMLKFE</i>	Quasi-Maximum Likelihood and Kalman Filter Estimate - Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance et Filtre de Kalman.
<i>QRCA</i>	Quadratic <i>RCA</i> - <i>RCA</i> quadratique.
<i>RCA</i>	Random Coefficient Autoregression - <i>AR</i> à coefficients aléatoires.
<i>RMSE</i>	Root Mean Square Error - Racine de l'erreur quadratique moyenne.
<i>SS</i>	Stationnarité stricte.
<i>Std</i>	Standard deviation - Ecart type.
<i>T-ARCH</i>	Threshold <i>ARCH</i> - <i>ARCH</i> à seuil.
<i>WLS</i>	Weighted Least Squares - Moindres carrés pondérés.

9.2 Liste des Tableaux

1.3.1	Corrélations empiriques croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ pour des séries $\delta-TARCH(1)$ avec $\delta = 1$ et $(\omega, \alpha_+, \alpha_-) = (1, 0.01, 0.9)$	07
2.3.1	Comparison entre les variances asymptotiques de $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}$ pour $\eta_1 \sim N(0, 1)$ et différentes valeurs de δ sous $\gamma < 0$	37
2.3.2	Comparison entre les variances asymptotiques de $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}$ pour $\eta_1 \sim N(0, 1)$ et différentes valeurs de δ sous $\gamma \geq 0$	37
2.3.3	Comparison entre les variances asymptotiques de $\hat{\theta}_{2WLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}$ pour $\eta_1 \sim 0.1N(-2, 2) + 0.9N(2, 0.16)$ et pour différentes valeurs de δ sous $\gamma < 0$. Les résultats relatifs à $\hat{\theta}_{QML}$ ont été obtenus à partir de Hamadeh et Zakořan (2011).....	38
2.5.1	Biais et <i>Std</i> du <i>2SWLSE</i> pour un $\delta-TARCH$ gaussien sous $\gamma < 0, \gamma \simeq 0$ et $\gamma > 0$	44
2.5.2	<i>RMSE</i> empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}^*, \hat{\theta}_{OLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}$ pour $\delta-TARCH(1)$ avec $\eta_1 \sim 0.1N(-2, 2) + 0.9N(2, 0.16)$	46
2.5.3	<i>RMSE</i> empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}^*, \hat{\theta}_{OLS}^*$ et $\hat{\theta}_{QML}$ pour $\delta-TARCH(1)$ avec $\eta_1 \sim t_4(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	46
2.5.4	<i>RMSE</i> empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}, \hat{\theta}_{OLS}$ et <i>QMLE</i> généralisé ($\hat{\theta}_{GQML}$) de $\delta-TARCH(1)$ avec $\eta_1 \sim N(0, 1.5708)$ lorsque $\delta = 1$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$ lorsque $\delta = 2$. Ici, $\hat{\theta}_{GQML}$ est le <i>QMLE</i> gaussien pour $\delta = 2$ et est le <i>QMLE</i> de Laplace ($\hat{\theta}_{LQML}$) pour $\delta = 1$	47
2.5.5	<i>RMSE</i> empirique et asymptotique pour $\hat{\theta}_{2WLS}, \hat{\theta}_{OLS}$ et $\hat{\theta}_{LQML}$ de $\delta-TARCH(1)$ avec $\eta_1 \sim t_4(0, 1.4513)$ lorsque $\delta = 0.2$ et $\eta_1 \sim t_4(0, 1.0834)$ lorsque $\delta = 0.8$	48
2.5.6	Fréquences relatives (%) de rejet pour le test de stationnarité stricte <i>SS</i> hypothèse $H_0 : \gamma < 0$ du modèle $\delta-TARCH(1)$ gaussien avec $\omega = 2$ et $\delta = 1.6$	48
2.5.7	Fréquences relatives (%) de rejet pour le test de non-stationnarité stricte <i>NS</i> hypothèse $H_0 : \gamma \geq 0$ du modèle $\delta-TARCH(1)$ gaussien avec $\omega = 2$ et $\delta = 1.6$	49

2.5.8	Fréquences relatives (%) de rejet pour le test d'asymétrie AS hypothèse $H_0 : \alpha_+ = \alpha_-$ pour $\delta-TARCH(1)$ symétrique ($\alpha_+ = \alpha_- = 2.7630$ au voisinage de $\gamma = 0$) avec $\omega = 0.5$ et $\delta = 1.6$	49
2.5.9	Fréquences relatives (%) de rejet pour le test d'asymétrie AS hypothèse $H_0 : \alpha_+ = \alpha_-$ pour $\delta-TARCH(1)$ asymétrique ($\alpha_+ = 2.674$ et $\alpha_- = 2.855$ au voisinage de $\gamma = 0$) avec $\omega = 0.5$ et $\delta = 1.6$	49
2.4.10a	Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série $CAC40$	52
2.4.10b	Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série $KV-A$	53
2.4.10c	Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série WTI	53
2.4.10d	Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série $SP500$	54
2.4.10e	Fonctions d'autocorrélations croisées $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^-)$ et $\hat{\tau}(y_t^2, y_{t-h}^+)$ de la série $BRENT$	54
2.4.11	$\hat{\theta}_{2WLS}$, et la statistique T_n du test de stationnarité stricte et la statistique T_n^S du test de symétrie de $\delta-TARCH(1)$ pour les rendements.....	56
5.4.1	Comparaison entre $\hat{\lambda}_{2WLS}$, $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ et $\hat{\lambda}_{QML}$ pour un modèle $RCA(1)$ gaussien avec $n = 1000$	119
5.4.2	Comparaison entre $\hat{\lambda}_{2WLS}$, $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$ pour un $RCA(1)$ non gaussien avec $(\phi, \rho^2, \sigma^2) = (0.85, 0.16, 0.5)$, $(1, 3, 1)$, $\frac{\varepsilon_1}{\sigma} \sim t_{(5)}$, $\frac{\xi_1}{\rho} \sim N(0, 1)$ sous (H2')	120
5.4.3	Comparaison entre $\hat{\lambda}_{2WLS}$, $\hat{\lambda}_{2WLS}^*$, $\hat{\lambda}_{QML}$ et $\hat{\lambda}_{QMLKF}$ pour un $RCA(1)$ gaussien avec $(\phi, \rho^2, \sigma^2) = (0.85, 0.16, 0.5)$	121

9.3 Liste des Figures

1.3.1a	Histogramme et trajectoire simulée d'un modèle $\delta-TARCH(1)$ généralisé à partir de $\theta = (0.5, 0.2, 0.3, 2, 500)$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$	06
1.3.1b	Histogramme et trajectoire simulée d'un modèle $\delta-TARCH(1)$ généralisé à partir de $\theta = (1, 1.5, 2, 2, 500)$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$	06
1.3.1c	Histogramme et trajectoire simulée d'un modèle $\delta-TARCH(1)$ généralisé à partir de $\theta = (1, 1.8, 2.2, 2, 500)$ et $\eta_1 \sim N(0, 1)$	07
1.5.1a	Régions de stationnarité et de non-stationnarité du $\delta-TARCH(1)$ pour $\delta = 0.2$, $\delta = 0.5$, et $\delta = 0.8$ avec η_1 suivant la loi de Cauchy	15
1.5.1b	Régions de stationnarité et de non-stationnarité du $\delta-TARCH(1)$ pour $\delta = 0.5$, $\delta = 1$, $\delta = 1.5$ et $\delta = 2$ avec $\eta_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$	16
1.5.1c	Régions de stationnarité et de non-stationnarité du $\delta-TARCH(1)$ pour $\delta = 0.5$, $\delta = 1$, et $\delta = 1.4$ avec $\eta_1 \sim t_4$	16
2.5.1a	Graphe et histogramme de la série transformée CAC40 centrée et réduite...	50
2.5.1b	Graphe et histogramme de la série transformée WTI centrée et réduite.....	51
2.5.1c	Graphe et histogramme de la série transformée SP500 centrée et réduite....	51
2.5.1d	Graphe et histogramme de la série transformée BRENT centrée et réduite....	51
2.5.1e	Graphe et histogramme de la série transformée KV-A centrée et réduite.....	51
2.5.2a	Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite KV-A.....	55
2.5.2b	Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite WTI.....	55
2.5.2c	Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite SP500.....	55
2.5.2d	Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite BRENT.....	56
2.5.2e	Corrélogramme des carrés et corrélogramme des valeurs absolues de la série centrée et réduite CAC40.....	56
4.2.1a	Trajectoire Simulée d'un modèle $RCA(1)$ généralisé à partir de $\lambda = (0.5, 0.25, 1)$ sous l'hypothèse H1	88
4.2.1b	Trajectoire Simulée d'un modèle $RCA(1)$ généralisé à partir de $\lambda = (0.5, 1.5, 1)$ sous l'hypothèse H1	89
4.4.1	$E \log \phi + \xi < 0$ pour $(\phi, \rho^2) \in A \cup B$ et $\phi^2 + \rho^2 < 1$ pour $(\phi, \rho^2) \in B$	94

Bibliographie

- [1] Aknouche, A. (2012a). Multi-stage weighted least squares estimation of *ARCH* processes in the stable and unstable cases. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **15**, 241-256.
- [2] Aknouche, A. (2012b). *Implication of instability on econometric and financial time series modeling*. Book-Chapter *In Econometrics : New research*, editors : Mendez, S.A. et Vega, A.M., Nova Publishers, New York, pp. 149-186.
- [3] Aknouche, A. (2013a). Two-stage weighted least squares estimation of nonstationary random coefficient autoregressions. *Journal of Time Series Econometrics*, **5**, 25-47.
- [4] Aknouche, A. (2013b). Recursive online *EM* estimation of mixture autoregressions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**, 370-383.
- [5] Aknouche, A. (2014a). Estimation and strict stationarity testing of *ARCH* processes based on weighted least squares. *Mathematical Methods of Statistics*, **23**, 81-102.
- [6] Aknouche, A. (2014b). *Modèles de séries chronologiques homogènes et périodiquement homogènes : stabilité, inférence et applications*. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches (HDR) - Mathématiques appliquées, Section 26, Université de Lille 3, France.
- [7] Aknouche, A. (2015a). Quadratic random coefficient autoregression with linear in parameters volatility. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, forthcoming.
- [8] Aknouche, A. (2015b). Explosive strong periodic autoregression with multiplicity one. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **161**, 50-72.
- [9] Aknouche, A. (2015c). *Unified quasi-maximum likelihood estimation theory for stable and unstable Markov bilinear processes*. Book-Chapter in *Progress in economics research*, Nova Publishers, New York, à paraître.

- [10] Aknouche, A. et Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic *GARCH* and periodic *ARMA-GARCH* processes. *Journal of Time Series Analysis*, **28**, 19-46.
- [11] Aknouche, A. et Rabehi, N. (2010). On an independent and identically distributed mixture bilinear time series model. *Journal of Time Series Analysis*, **31**, 113-131.
- [12] Aknouche, A. et Al-Eid, E. (2012). Asymptotic inference of unstable periodic *ARCH* processes. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **15**, 61-79.
- [13] Aknouche, A. et Bentarzi, W. (2014). Stability analysis of the first-order periodic autoregressive bilinear time series model. *Random Operators and Stochastic Equations*, **22**, 139-150.
- [14] Aknouche, A. et Touche, N. (2015a). Weighted least squares based inference for stable and unstable threshold power *ARCH* processes. *Statistics & Probability Letters*, **97**, 108-115.
- [15] Aknouche, A. et Touche, N. (2015b). Asymptotic weighted least squares inference for stable and unstable random coefficient autoregressions. Preprint.
- [16] Aknouche, A., Al-Eid, E. et Hmeid, A.M. (2011). Offline and online weighted least squares estimation of nonstationary power *ARCH* processes. *Statistics & Probability Letters*, **81**, 1535-1540.
- [17] Allal, J. et Benmoumen, M. (2013). Parameter Estimation for First-Order Random Coefficient Autoregressive (*RCA*) Models Based on Kalman Filter. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **42(8)**, 1750-1762.
- [18] Andel, J. (1976). Autoregressive series with random parameters. *Mathematische Operationen for Schung und Statistik. Series Statistics*, **7**, 735-741.
- [19] Aue, A. et Horváth, L. (2011). Quasi-likelihood estimation in stationary and nonstationary autoregressive models with random coefficients. *Statistica Sinica*, **21**, 973-999.
- [20] Aue, A., Horváth, L. et Steinebach, J. (2006). Estimation in random coefficient autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **27**, 61-76.
- [21] Babillot, M., Bougerol, P. et Elie, L. (1997). The random difference equation $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ in the critical case. *Annals of Probability*, **25**, 478-493.

- [22] Bardet, J.M. et Wintenberger, O. (2009). Asymptotic normality of the Quasi-maximum likelihood estimator for multidimensional causal processes. *The Annals of Statistics*, **37**, 2730-2759.
- [23] Bellini, F. et Bottolo, L. (2007). Stationarity domains for δ -power *GARCH* processes with heavy tails. *Statistics & Probability Letters*, **77**, 1418-1427.
- [24] Bera, A.K., Higgins, M.L. et Lee, S. (1992). Interaction between autocorrelation and conditional conditional heteroskedasticity : a random coefficient approach. *Journal of Business and Economic Statistics*, **10**, 133-142.
- [25] Bera, A.K., Higgins, M.L. et Lee, S. (1996). Random coefficients formulation of conditional heteroskedasticity and augmented *ARCH* models. *Sankhya*, **58**, 199-220.
- [26] Berkes, I., Horváth, L. et Kokoszka, P. (2003). *GARCH* processes : structure and estimation. *Bernoulli*, **9**, 201-227.
- [27] Berkes, I., Horváth, L. et Ling, S. (2009). Estimation in nonstationary random coefficient autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **30**, 395-416.
- [28] Berkes, I. et Horváth, L. (2004). The efficiency of the estimators of the parameters in *GARCH* processes. *Annals of Statistics*, **32**, 633-655.
- [29] Billingsley, P. (1995). *Probability and measure*. John Wiley, New York.
- [30] Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, **3**, 167-179.
- [31] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- [32] Bougerol, P. et Picard, N. (1992a). Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *Annals of Probability*, **20**, 1714-1730.
- [33] Bougerol, P. et Picard, N. (1992b). Stationarity of *GARCH* processes and some non-negative time series. *Journal of Econometrics*, **52**, 115-127.
- [34] Bose, A. et Mukherjee, K. (2003). Estimating the *ARCH* Parameters by Solving Linear Equations. *Journal of Time Series Analysis*, **24**, 127-136.
- [35] Box, G.E.P. et Cox, D.R. (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B26**, 211-252.

- [36] Box, G.E.P. et Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 2nd edition, Holden-Day San Francisco, CA.
- [37] Brandt, A. (1986). The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients. *Advanced in Applied Probability*, **18**, 211-220.
- [38] Breiman, L. (1968). *Probability*. Addison Wesley, California.
- [39] Brockwell, P.J. et Davis, R.A. (1991). *Time Series : Theory and methods*. Springer-Verlag. New York.
- [40] Brown, B.M. (1971). Martingale central limit theorems. *Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 59-66.
- [41] Chen, M., Li, D. et Ling, S. (2014). Nonstationarity and quasi-maximum likelihood estimation on a double autoregressive model. *Journal of Time Series Analysis*, **35**, 189-202.
- [42] Conlisk, J. (1974), Stability in a Random Coefficient. *International Economic Review*, **15**, 529-533.
- [43] Conlisk, J. (1976), Another note on stability in a Random Coefficient. *International Economic Review*, **17**, 759-764.
- [44] Cox, D.R. (1981). Statistical analysis of time series : some recent developments. *Scandinavian Journal of Statistics*, **8**, 93-115.
- [45] Cline, D.B.H. et Pu, H.M.H. (2002). A note on a simple Markov bilinear stochastic process. *Statistics & Probability Letters*, **56**, 283-288.
- [46] de Saporta, B. (2005). Tail of the stationary solution of the stochastic equation $Y(n+1) = a(n)Y(n) + b(n)$ with Markovian coefficients. *Stochastic Processes and their Applications*, **115**, 1954-1978.
- [47] Ding, Z., Granger, C.W.J. et Engle, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106.
- [48] Doukhan, P. et Wintenberger, O. (2008). Weakly dependent chains with infinite memory. *Stochastic Processes and their Applications*, **118**, 1997-2013.
- [49] Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1008.

- [50] Escanciano, J.C. (2009). Quasi-Maximum Likelihood Estimation Of Semi Strong *GARCH* Models. *Econometric Theory*, **25**, 561-570.
- [51] Fama, E.F. (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, **38**, 34-105.
- [52] Fan, J., Qi, L. et Xiu, D. (2014). Quasi Maximum Likelihood Estimation of *GARCH* Models with Heavy-Tailed Likelihoods. *Journal of Business and Economic Statistics*, **32**, 178-191.
- [53] Feigin, P.D. et Tweedie, R.L. (1985). Random coefficient autoregressive processes : a Markov chain analysis of stationarity and finiteness of moments. *Journal of Time Series Analysis*, **6**, 1-14.
- [54] Francq, C. et Zakoïan, J.M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure *GARCH* and *ARMA-GARCH* processes. *Bernoulli*, **10**, 605-637.
- [55] Francq, C. et Zakoïan, J.M. (2010). *GARCH models : structure, statistical inference and financial applications*. Wiley, New York.
- [56] Francq, C. et Zakoïan, J.M. (2012). Strict stationarity testing and estimation of stationary and explosive *GARCH* models. *Econometrica*, **80**, 821-861.
- [57] Francq, C. et Zakoïan, J.M. (2013a). Inference in nonstationary asymmetric *GARCH* models. *Annals of Statistics*, **41**, 1970-1998.
- [58] Francq, C. et Zakoïan, J.M. (2013b). Optimal predictions of powers of conditionally heteroskedastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B75**, 345-367.
- [59] Francq, C., Lepage, G. et Zakoïan J.M. (2011). Two-stage non Gaussian *QML* estimation of *GARCH* Models and testing the efficiency of the Gaussian *QMLE*. *Journal of Econometrics*, **165**, 246-257.
- [60] Francq, C., Makarova, S. et Zakoïan, J.M. (2008). A class of stochastic unit-root bilinear processes : Mixing properties and unit-root test. *Journal of Econometrics*, **142**, 312-326.
- [61] Franses, P.H. et Paap, R. (2011). *Random coefficient periodic autoregression*. *Statistica Neerlandica*, **65**, 101-115.
- [62] Fuller, W.A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition.

- [63] Glosten, L.R., Jaganathan, R. et Runkle, D. (1993). On the relation between the expected values and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.
- [64] Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and financial applications*, Springer Verlag, New-York.
- [65] Goldie, C.M. (1991). Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Annals of Applied Probability*, **1**, 126-166.
- [66] Goldie, C. et Maller, R. (2000). Stability of Perpetuities. *Annals of Probability*, **28**, 1195-1218.
- [67] Gonçalves, E. et Mendes-Lopes, N. (1994). The generalized threshold *ARCH* model : wide sense stationarity and asymptotic normality of the temporal aggregate. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris, XXXVIII*, **2**, 19-35.
- [68] Gonçalves, E. et Mendes-Lopes, N. (1996). Stationarity of *TGARCH* processes. *Statistics*, **28**, 171-178.
- [69] Gonçalves, E. et Mendes-Lopes, N. (2010). On the structure of generalized threshold *ARCH* processes. *Statistics & Probability Letters*, **80**, 573-580.
- [70] Gonçalves, E., Leite, J. et Mendes-Lopes, N. (2012). On the probabilistic structure of power Threshold Generalized *ARCH* stochastic processes. *Statistics & Probability Letters*, **82**, 1597-1609.
- [71] Ghosh, A.P., Haya, D., Hirparaa, V., Rastegara, R., Roitershteina, A. et Schulteis, A. (2010). Random linear recursions with dependent coefficients. *Statistics & Probability Letters*, **80**, 1597-1605.
- [72] Granger, C.W.J. (2005). The past and future of empirical finance : Some personal comments. *Journal of Econometrics*, **129**, 35-40.
- [73] Hall, P. et Heyde, C.C. (1980). *Martingale Limit Theory and its Applications*. Academic Press, New York.
- [74] Hamadeh, T. (2010). *Inférence statistique de modèles GARCH non linéaires*. PhD thesis, University of Lille 3, France.

- [75] Hamadeh, T. et Zakoïan, J.M. (2011). Asymptotic properties of *LS* and *QML* estimators for a class of nonlinear *GARCH* processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 488-507.
- [76] Hamilton, J.D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, **7**, 357-384.
- [77] Hamilton, J.D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics*, **45**, 39-70.
- [78] Hamilton, J.D. (1994). *Time series analysis*. Princeton university press.
- [79] Hamman, E.J. (1970). *Multiple time series*. John Wiley, New York.
- [80] Hentschel, L. (1995). All in the Family. Nesting Symmetric and Asymmetric *GARCH* Models. *Journal of Financial Economics*, **39**, 71-104.
- [81] Higgins, M.L. et Bera, A.K. (1992). *A classe of non linear ARCH models*, International Economic Review.
- [82] Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 770-808.
- [83] Hwang, S.Y. et Basawa, I.V. (1998). Parameter estimation for generalized random coefficient autoregressive processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **68**, 323-337.
- [84] Hwang, S.Y. et Basawa, I.V. (2004). Stationarity and moment structure for Box-Cox transformed threshold *GARCH*(1, 1) processes. *Statistics & Probability Letters*, **68**, 209-220.
- [85] Hwang, S.Y. et Basawa, I.V. (2005). Explosive random-coefficient *AR*(1) processes and related asymptotics for least squares estimation. *Journal of Time Series Analysis*, **26**, 807-824.
- [86] Hwang, S.Y. et Kim, T.Y. (2004). Power transformation and threshold modeling for *ARCH* innovations with applications to test for *ARCH* structure. *Stochastic Processes and Their Applications*, **110**, 295-314.
- [87] Hwang, S.Y. et Woo, M.J. (2001). Threshold *ARCH*(1) processes : asymptotic inference. *Statistics & Probability Letters*, **53**, 11-20.

- [88] Janečková, H. et Prášková, Z. (2004). *CWLS* and *ML* estimates in a heteroscedastic *RCA(1)* model. *Statistics and Decisions*, **22**, 245-259.
- [89] Jensen, S.T. et Rahbek, A. (2004a). Asymptotic normality of the *QML* estimator of *ARCH* in the nonstationary case. *Econometrica*, **72**, 641-646.
- [90] Jensen, S.T. et Rahbek, A. (2004b). Asymptotic inference for nonstationary *GARCH*. *Econometric Theory*, **20**, 1203-1226.
- [91] Karanasos, M. et Kim, J. (2006). A re-examination of the asymmetric power *ARCH* model. *Journal of Empirical Finance*, **13**, 113-128.
- [92] Karlin, S. et Taylor, H.M. (1975). *A first course in stochastic processes*. Academic Press, USA.
- [93] Kesten, H. (1973). Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Mathematica*, **131**, 207-248.
- [94] Klüppelberg, C., Lindner, A. et Maller, R. (2004). A continuous time *GARCH* Process driven by a Lévy process : stationarity and second order behavior. *Journal of Applied Probability*, **41**, 601-622.
- [95] Koul, H. L. et Schick, A. (1996). Adaptive estimation in a random coefficient autoregressive model. *Annals of Statistics*, **24**, 1025-1052.
- [96] Lee, S. et Hansen, B. (1994). Asymptotic theory for the *GARCH(1, 1)* quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory*, **10**, 29-52.
- [97] Li, W.K. et Hui, Y.V. (1983). Estimation of random coefficient autoregressive process : An empirical Bayes approach. *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 89-94.
- [98] Li, C.W. et Li, W.K. (1996). On a double-threshold autoregressive heteroscedastic time series model. *Journal of Applied Econometrics*, **11**, 253-274.
- [99] Ling, S. (2007). A double *AR(p)* model : Structure and estimation. *Statistica Sinica*, **17**, 161-175.
- [100] Ling, S. et Li, D. (2008). Asymptotic inference for a nonstationary double *AR(1)* model. *Biometrika*, **95**, 257-263.
- [101] Linton, O., Pan, J. et Wang, H. (2010). Estimation for a non-stationary semi-strong *GARCH(1, 1)* model with heavy-tailed errors. *Econometric Theory*, **26**, 1-28.

- [102] Liu, J. (2006). On the tail behaviors of Box-Cox transformed threshold $GARCH(1, 1)$ processes. *Statistics & Probability Letters*, **76**, 1323-1330.
- [103] Liu, L.M. et Tiao, G.C. (1980). Random coefficient first-order autoregressive models. *Journal of Econometrics*, **13**, 305-325.
- [104] Lumsdaine, R.L. (1996) Consistency and Asymptotic Normality of the Quasi-Maximum Likelihood Estimator in $IGARCH(1, 1)$ and Covariance Stationary $GARCH(1, 1)$ Models. *Econometrica*, **64**, 575-596.
- [105] Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, **36**, 394-419.
- [106] Meyn, S. et Tweedie, R. (2009). *Markov chains and stochastic stability*. 2nd Edt., Springer Verlag, New York.
- [107] Mikosch, T. et Straumann, D. (2006). Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series : A stochastic recurrence equations approach. *Annals of Statistics*, **34**, 2449-2495.
- [108] Mittink, S., Paolleta, M.S. et Rachev, S.T. (2002). Stationnary of Stable Power $GARCH$ Processes. *Journal of Econometrics*, **106**, 97-107.
- [109] Mukherjee, K. (2008). M -estimation in $GARCH$ models. *Econometric Theory*, **24**, 1530-1553.
- [110] Nelson, D.B. (1991) Stationarity and persistence in the $GARCH(1, 1)$ model. *Econometric Theory*, **6**, 318-334.
- [111] Newey, W.K. et Steigerwald, D.G. (1997). Asymptotic bias for quasi-maximum likelihood estimators in conditional heteroskedasticity models. *Econometrica*, **65**, 587-599.
- [112] Nicholls, D.F. et Quinn, B.G. (1980). The estimation of random coefficient autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **1**, 37-46.
- [113] Nicholls, D.F. et Quinn, B.G. (1982). *Random coefficient autoregressive model : An introduction*. Springer Verlag, New York.
- [114] Pan, J., Wang, H. et Tong, H. (2008). Estimation and tests for power-transformed and threshold $GARCH$ models. *Journal of Econometrics*, **142**, 352-378.

- [115] Pantula, S.D. (1988). Estimation of autoregressive models with *ARCH* errors. *Sankhya*, **50**, 119-138.
- [116] Peng, L. et Yao, Q. (2003). Least absolute deviations estimation for *ARCH* and *GARCH* models. *Biometrika*, **90**, 967-975.
- [117] Pfanzagl, J. (1969). On the mesurability and consistency of minimum contrast estimates. *Metrika*, **14**, 249-272.
- [118] Prášková, Z. et Vaněček, P. (2011). On a class of estimators in a multivariate *RCA*(1) model. *Kybernetika*, **47**, 501-518.
- [119] Preminger A. et Storti, G. (2014). Least squares estimation for *GARCH*(1,1) model with heavy tailed errors. *MPRA document*, N° 59082.
- [120] Priestley, M.B. (1988). *Non-linear and non-stationary time series analysis*. Academic Press, New York.
- [121] Quinn, B.G. (1982). Stationarity and invertibility of simple bilinear models. *Stochastic Processes and Their Applications*, **12**, 225-230.
- [122] Quinn, B.G. et Nicholls, D.F. (1981). The estimation of random coefficient autoregressive models II. *Journal of Time Series Analysis*, **2**, 185-203.
- [123] Rahiala, M. (1999), random coefficient autoregressive models for longitudinal data. *Biometrika*, **86**, 718-722.
- [124] Rabemananjara, R. et Zakoïan, J.M. (1993). On the threshold *ARCH* models and asymetries in volatility, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 31-49.
- [125] Robinson, P.M. (1978). Statistical inference for a random coefficient autoregressive model. *Scandinavian Journal of Statistics*, **5**, 163-168.
- [126] Rosenberg, B. (1973). A survey of stochastic parameter regression. *Annals of Economic and Social Measurement*, **2**, 381-398.
- [127] Schick, A. (1996). $\sqrt{n}$ -consistent estimation in a random coefficient autoregressive model. *Australian Journal of Statistics*, **38**, 55-60.
- [128] Sen, P.K. et Singer, J.M. (1993). *Large sample methods in statistics : an introduction with applications*. Chapman & Hall, London.

- [129] Sentana, E. (1995). Quadratic *ARCH* models. *Review of Economics Studies*, **62**, 639-661.
- [130] Stenseth, N.C. Chan, K.S., Tong, H., Boonstra, R., Boutin, R., Krebs, C.J., Post, E., O'Donoghue, M., Yoccoz, N.G., Forchhammer, M.C. et Hurrell, J.W. (1999). Common dynamic structure of Canada lynx populations within three climatic regions. *Science*, **285**, 1071-1073.
- [131] Straumann, D. (2004). *Estimation in conditionally heteroscedastic time series models*. Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag.
- [132] Taylor, S.J. (1986). *Financial time series analysis*. Wiley.
- [133] Taylor, S.J. (2007). *Asset price dynamics, volatility and prediction*. Princeton University Press.
- [134] Tong, H. (1981). A note on a Markov bilinear stochastic process in discrete time. *Journal of Time Series Analysis*, **2**, 279-284.
- [135] Tong, H. (1990). *Nonlinear time series : A dynamical system approach*. Oxford University Press, Oxford.
- [136] Truquet, L. et Yao, J. (2012). On the quasi-likelihood estimation for random coefficient autoregressions. *Statistics*, **46**, 505-521.
- [137] Tsay, R.S. (1987). Conditional Heteroscedastic Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 590-604.
- [138] Tsay, R.S. (2002). *Analysis of financial time series : Financial Econometrics*. Wiley.
- [139] Vaněček, P. (2006). Rate of convergence for a class of *RCA* estimators. *Kybernetika*, **6**, 698-709.
- [140] Vervaat, W. (1979). On a stochastic difference equation and a representation of non negative infinitely divisible random variables. *Advances in Applied Probability*, **11**, 750-783.
- [141] Wang, D. et Ghosh, S.K. (2008). Bayesian estimation and unit root tests for random coefficient autoregressive models. *Model Assisted Statistics and Applications*, **3**, 281-295.
- [142] Wong, C.S. et Li, W.K. (2000). On a mixture autoregressive model. *Journal of the Royal Statistical Society*, **B62**, 95-115.

- [143] Weiss, A.A. (1984). *ARMA* models with *ARCH* errors. *Journal of Time Series Analysis*, **5**, 129-143.
- [144] Weiss, A.A. (1986). Asymptotic Theory for *ARCH* Models. *Estimation and Testing Econometric Theory*, **2**, 107-131.
- [145] Zakořan, J.M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economics and Control*, **18**(5), 931-955.
- [146] Zhang, Z., Li, W.K. et Yuen, K.C. (2006). On a mixture *GARCH* time-series model. *Journal Time Series Analysis*, **27**, 577-597.
- [147] Zhao, Z.W. et Wang, D.H. (2012). Statistical inference for generalized random coefficient autoregressive model. *Mathematical and Computer Modelling*, **56**, 152-166.
- [148] Zhao, Z.W., Wang, D.H. et Peng, C.X. (2013). Coefficient constancy test in generalized random coefficient autoregressive model. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 10283-10292.
- [149] Zhu, K. et Li, W.K. (2014). A new Pearson-type *QMLE* for conditionally heteroskedastic models. *MPRA document*, N° 52732.
- [150] Zhu, K. et Ling, S. (2013). Quasi-maximum exponential likelihood estimators for a double *AR(p)* model. *Statistica Sinica*, **23**, 251-270.
- [151] Ziel, F. (2015). *Quasi-maximum likelihood estimation of periodic autoregressive, conditionally heteroscedastic time series*. In *Stochastic Models, Statistics and Their Applications*, pp. 207-214. Springer.