

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR
En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : Probabilités Statistiques

Par : **LARDJANE Tayeb**

Thème

Régime Stationnaire des grands systèmes

Soutenue publiquement le 14 Décembre 2013, devant le jury composé de :

| | | | |
|--------------------|---------------|---------------------|--------------------|
| A. BERRACHEDI | Professeur, à | l' U. S. T. H. B | Président |
| O. ANES | MC/ A , à | l'E. N. S. S. E. A | Directeur de thèse |
| A. AISSANI | Professeur, à | l'U. S. T. H. B | Examinateur |
| F. CHARLOT | Professeur, à | l'U. Rouen (France) | Examinateur |
| K. KHALDI | Professeur, à | l'U. Boumerdes | Examinateur |
| D. SEDDIKI (MERAD) | MC/ A , à | l'U. S. T. H. B | Examinatrice |

REGIME STATIONNAIRE DES GRANDS
SYSTEMES

LARDJANE TAYEB

14 DECEMBRE 2013

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Processus de Markov et Files d'attente | 4 |
| 1.1 | Introduction | 4 |
| 1.2 | Technique d'uniformisation pour la recherche de solution transitoire | 6 |
| 1.3 | Méthode matrice géométrique pour le calcul de solutions stationnaires [11] | 7 |
| 1.4 | Processus de naissance et de mort et files markoviennes | 10 |
| 1.5 | File non markovienne M/G/1 | 10 |
| 1.6 | Réseaux de files d'attente | 11 |
| 2 | Etude de deux files d'attente M/M/1 parallèles avec discipline JSQ : approche par la file M/G/1 | 13 |
| 2.1 | Présentation du système | 13 |
| 2.2 | Etude du régime stationnaire | 13 |
| 3 | Etude générale de deux files d'attente M/M/1 parallèles avec discipline JSQ | 18 |
| 3.1 | Méthode des fonctions génératrices (Flatto et MeKean)[9] | 18 |
| 3.2 | Solution numérique (Zhao et Grassman)[18] | 21 |
| 3.3 | Nouvelle formulation de la solution numérique (T. Lardjane, R. Messaci)[17] | 22 |
| 3.3.1 | Analyse de la solution stationnaire du système | 22 |
| 3.4 | Méthodologie calculatoire | 30 |
| 3.4.1 | Calcul de $y_i^{(N)}$ $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ | 31 |
| 3.4.2 | Algorithme | 33 |
| 3.5 | Résultats numériques et analyse d'erreurs | 34 |
| 3.5.1 | Résultats numériques | 36 |
| 3.5.2 | Commentaires des résultats | 41 |

| | |
|--|-----------|
| 4 Etude de deux files d'attente M/M/∞ parallèles avec discipline JSQ | 43 |
| 4.1 Introduction (H. Yao ; C. Knessl) | 43 |
| 4.2 Position du problème et équations d'équilibre(H. Yao ; C. Knessl)[4] | 43 |
| 4.3 Nouvelle approche numérique de la solution stationnaire(T. Lardjane et R. Messaci) | 48 |
| 4.4 Calculs des probabilités d'état et résultats numériques | 56 |
| 4.4.1 Calcul de $p(i, i) 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil$ | 56 |
| 4.4.2 Algorithme | 57 |
| 4.4.3 Résultats numériques | 58 |
| 5 Commentaires, comparaisons avec les autres méthodes et conclusion générale | 62 |
| 5.1 Commentaires des résultats | 62 |
| 5.2 Comparaison avec l'ensemble des autres méthodes | 63 |
| 5.3 Conclusion générale et perspectives | 63 |

Résumé

Dans cette thèse est introduit une nouvelle méthode de calcul numérique du régime stationnaire de systèmes complexes de files d'attente markoviennes. En effet le régime stationnaire d'un réseau de files d'attente où les arrivées vers les stations se font selon la discipline JSQ (Joining the Shortest Queue : se diriger vers la file la plus courte) est souvent considéré comme un problème complexe. Plusieurs méthodes ont été proposées pour chacune des variantes du problème. La méthode exposée consiste en une présentation spéciale des équations stationnaires et l'utilisation d'une méthode d'optimisation convexe pour l'encadrement d'une partie génératrice de la solution. C'est donc une méthode unique pour pratiquement toutes les variantes de ce type de problème.

Mots clés : Modèle JSQ, équations d'équilibre, formulation matricielle, méthode du simplexe.

Remerciements

Je remercie vivement mon Directeur de thèse Monsieur Anes Ouali, Maitre de conférences à l'ENSSEA pour ses conseils et son soutien qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de la réalisation de ce travail.

Je remercie Monsieur Berrachedi Abdelhafid Professeur au département de recherche opérationnelle de la faculté de Mathématiques U. S. T. H. B pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse ; mes remerciements sont également adressés à :

- Madame Seddiki Nadjat Maitre de conférences au département de probabilités statistiques, Faculté de Mathématiques U. S. T. H. B

Et Messieurs :

- Aissani Amar Professeur au département d'informatique de la Faculté d'électronique de l'U. S. T. H. B

- Charlot François Professeur à l'université de Rouen (France)

- Khaldi Khaled Professeur à l'université de Boumerdès.

Je remercie très sincèrement Monsieur Messaci Rabah pour l'aide combien précieuse qu'il m'a apportée dans la réalisation technique de cette thèse et les longs moments que nous avons passé ensemble dans la confection des articles de recherche.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs Belbachir Hacène Professeur et Hamdi Fayçal Maitre de conférences au département de recherche opérationnelle pour l'aide technique qu'ils m'ont apportée pour la réalisation des articles de recherche.

Je remercie enfin toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Introduction

L'étude du régime stationnaire des systèmes de files d'attente markoviens a donné lieu à plusieurs développements de méthodes d'approximation. La résolution des systèmes linéaires en dimension infinie a naturellement conduit des auteurs à envisager des solutions sous forme de transformées et de fonctions génératrices. Les formes trouvées donnent quelques paramètres intéressants pour le système mais bien souvent le passage à l'inverse pose des problèmes techniques. La solution stationnaire peut alors être cherchée sur une partie de l'espace d'états du processus considéré, ce qui engendre une première erreur liée à la troncature. C'est généralement le contrôle des erreurs de calcul qui devient un problème dans les différentes méthodes numériques. Le système étudié dans cette thèse est constitué de deux files d'attente parallèles soumises à une discipline d'arrivée JSQ (Joining the Shortest Queue), c'est à dire qu'un client qui arrive se dirige vers la file la moins chargée (ou file la plus courte). Ce problème a été initialement proposé par Haight [2] (1958). Un modèle a été construit avec succès pour le cas symétrique et possibilité de transfert de clients entre les deux files. Kingman [7] (1961) a obtenu quelques propriétés asymptotiques pour la distribution stationnaire conjointe du nombre de clients dans chacune des deux files. Flatto et McKean [9] (1977) ont utilisé une technique basée sur les fonctions génératrices pour donner des propriétés limites de la distribution stationnaire. Une approche numérique basée sur la technique matrix geometric [11] (1980) a été développée par Gertsbakh [5] (1984). Halfin [13] (1985) a utilisé une méthode basée sur la programmation linéaire pour donner une borne inférieure et une borne supérieure de la probabilité stationnaire du nombre total de clients dans les deux files. Zhao et Grassmann [18] (1991) ont utilisé les résultats de Flatto et McKean [9] pour développer une solution numérique à l'aide d'un algorithme stable. Adan, Wessels et Zijm [6] (1990) ont montré que la distribution stationnaire est un mélange de distributions ayant des formes produits. Pour faciliter le problème, Wang et Locker [12] (2001) ont présenté un modèle où l'espace d'états du processus est tronqué sous forme de bandes et ont donc déduit numériquement la distribution stationnaire et le temps

de séjour des clients. Yao et Knessl [4] (2005) ont considéré le problème avec deux files $M/M/\infty$ avec la discipline JSQ et ont donné deux formes pour la distribution stationnaire ; une forme numérique et une forme asymptotique. Mais le problème reste posé en termes de coût pour ces différentes méthodes et la complexité des solutions proposées. Dans cette thèse, le souci majeur est de présenter une méthode unique pour l'ensemble des questions liées à cette discipline des arrivées. En effet les équations de balance locale sont présentées d'une façon très spéciale de telle sorte que la probabilité stationnaire de chaque état soit une fonction affine d'un ensemble d'autres probabilités. Ce dernier ensemble sera alors présenté comme partie génératrice de la solution stationnaire et sera ainsi cherché comme racine principale de la solution stationnaire. Cette racine sera alors trouvée par une méthode d'optimisation convexe directement liée à la méthode du simplexe. Cette méthode est très avantageuse par rapport à toutes celles qui sont exposées jusqu'à maintenant. D'abord par sa simplicité et ensuite par son coût car il est bien connu que l'algorithme du simplexe est très rapide pour la résolution des grands systèmes d'inéquations linéaires. On relèvera aussi la grande précision avec laquelle les différents calculs peuvent être faits. Cette méthode a donc fait l'objet de deux publications [16] (2011), [17] (2012) portant sur des cas largement étudiés dans la littérature spécialisée.

La thèse sera alors composée de différents chapitres dont :

le chapitre 1 consacré à une présentation simple et rapide des systèmes markoviens discrets et quelques modélisations de files d'attente par de tels systèmes. Le chapitre 2 concerne un résumé du problème de deux files $M/M/1$ parallèles avec discipline d'arrivée JSQ. Une amorce de solution personnelle et basée sur une similitude des travaux faits sur le régime stationnaire de la file $M/G/1$ sera décrite sans toutefois arriver à des résultats probants mais qui peuvent donner des idées pour une solution analytique. Dans le chapitre 3 sera étudié le cas de deux files $M/M/1$ parallèles avec en premier l'essentiel des travaux effectués et ensuite une adaptation de notre méthode. Au chapitre 4, on aborde le problème de deux files $M/M/\infty$ parallèles et qui est d'une importance particulière pour son utilisation dans les systèmes de communication à canaux multiples ou ce qui est couramment appelé réseaux CDMA (Code Division Multiple Access). On commence par un exposé des travaux de Yao et Knessl [2] et ensuite un développement de la solution stationnaire par notre méthode de calcul. Le chapitre 5 sera consacré aux commentaires des différents résultats, une comparaison de la méthode exposée dans cette thèse avec l'ensemble des autres méthodes existantes et d'une conclusion générale avec perspectives.

Chapitre 1

Processus de Markov et Files d'attente

1.1 Introduction

Les processus de Markov ont toujours été un outil important de modélisation des réseaux de files d'attente. Il est donc nécessaire de faire une présentation simple et concise des éléments de cet outil qui seront utilisés tout au long de cette thèse

Notation 1. Dans toute la suite on notera $(X_t)_t$ le processus de Markov homogène modélisant les états d'une file d'attente et E son espace d'états. On notera aussi $p_{e,e'}(t) = p(X_{s+t} = e' / X_s = e)$, $\pi_e(t) = p(X_t = e)$, $P(t) = (p_{e,e'}(t))_{(e,e') \in E \times E}$ et $\Pi(t) = (\pi_e(t))_{t \in E}$ avec $p(e) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_e(t)$ et $P = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t)$, on a alors $\Pi(t) = \Pi(0) P(t)$.

On supposera que le processus est ergodique au sens où il admet une et une seule distribution stationnaire qui est aussi une distribution limite.

Définition 1.1.1. La matrice du générateur infinitésimal du processus $(X_t)_t$ notée Q de dimension $\text{card}E \times \text{card}E$ est définie par ses éléments :

$$q(e, e') = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{prob}(X_{t+h} = e' / X_t = e)}{h} & \text{si } e' \neq e \\ - \sum_{f \neq e} q(e, f) & \text{si } e' = e \end{cases}$$

Définition 1.1.2. La distribution stationnaire du processus est notée $P = (p(e))_{e \in E}$ où $p(e) = \lim_{t \rightarrow \infty} p\{X_t = e\}$, alors P est solution du système linéaire $PQ = 0$ ou de façon équivalente :

$$p(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} p(e') q(e', e).$$

Remarque 1. $-\Pi(t)$ est solution du système différentiel $\frac{d}{dt}\Pi(t) = \Pi(t)Q$ et qui a pour solution $\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt}$

- Pour tout sous ensemble A de E on l'équation des flots de probabilités qui s'écrit :

$$\sum_{e \in A, e' \in \bar{A}} p(e') q(e', e) = \sum_{e \in A, e' \in \bar{A}} p(e) q(e, e')$$

cette dernière relation a été beaucoup utilisée dans l'article de Halfin[13] .

Définition 1.1.3. Soit $(T_n)_n$ la suite des instants de saut du processus $(X_t)_t$ (suite des instants de changement d'états) et $(Y_n)_n$ la suite de variables aléatoires définie par : pour tout n $Y_n = X_{T_n^+}$. $(Y_n)_n$ est alors une chaîne de Markov à espace d'états E et de matrice de transition donnée par :

$$p(e, e') = \begin{cases} \frac{q(e, e')}{\sum_{f \neq e} q(e, f)} & \text{si } e' \neq e \\ 0 & \text{si } e' = e \end{cases}$$

La chaîne de Markov $(Y_n)_n$ est appelée chaîne incluse du processus $(X_t)_t$. Elle est souvent utilisée pour l'étude du régime stationnaire du processus $(X_t)_t$.

Définition 1.1.4. Le processus de Markov $(X_t)_t$ est dit réversible si pour toute suite $t_1, t_2, \dots, t_n, \tau$ d'instantes les vecteurs $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1-\tau}, X_{t_2-\tau}, \dots, X_{t_n-\tau})$ ont même distribution de probabilité. De cette définition il s'en suivra que tout processus réversible est stationnaire.

Théorème 1.1.5 ([3]). Un processus de Markov d'éléments notés i, j, \dots est réversible si et seulement si il existe une suite d'éléments $p(j) \quad j \in E$ de somme égale à 1 tels que $p(j) q(j, k) = p(k) q(k, j)$ pour $j, k \in E$. La suite $(p(j))_j$ est alors la distribution stationnaire du processus $(X_t)_t$.

Théorème 1.1.6 ([3]). Un processus de Markov stationnaire est réversible si et seulement si ses taux de transition vérifient :

$$q(j_1, j_2) q(j_2, j_3) \dots \dots \dots q(j_n, j_1) = q(j_1, j_n) q(j_n, j_{n-1}) \dots \dots \dots q(j_2, j_1)$$

pour toute suite d'états $j_1, \dots \dots \dots, j_n$.

Théorème 1.1.7 ([3]). S'il existe un état j_0 tel que $q(j, j_0) \neq 0 \quad \forall j \in E$, alors le processus est réversible si et seulement si pour tout couple (j_1, j_2) tel que

$$q(j_0, j_1) q(j_1, j_2) q(j_2, j_0) = q(j_0, j_2) q(j_2, j_1) q(j_1, j_0)$$

Théorème 1.1.8 ([15]). *On suppose qu'il n'existe pas de quadruples d'états (j_0, j_1, j_2, j_3) tel que $q(j_i, j_{i+1}) \neq 0$ et $q(j_i, j_{i+2}) = 0$; le processus $(X_t)_t$ est alors réversible si $\forall (j_1, j_2, j_3) \in E \times E \times E$*

$$q(j_1, j_2) q(j_2, j_3) q(j_3, j_1) = q(j_1, j_3) q(j_3, j_2) q(j_2, j_1).$$

La distribution stationnaire est alors donnée par :

$$p(j) = \prod_{i=1}^n \frac{q(e_{i-1}, e_i)}{q(e_i, e_{i-1})} p(j_0)$$

où j_0 est un état choisi dans E et (j_0, j_1, \dots, j_n) est une suite d'états tels que $j_i \neq j_k$ et $q(j_i, j_{i+1}) \neq 0$

1.2 Technique d'uniformisation pour la recherche de solution transitoire

Définition 1.2.1. *La solution transitoire d'un processus de Markov est donnée par la formule : $\Pi(t) = \Pi(0) e^{Qt}$*

Remarque 2. Cette formule est souvent difficile à exploiter pour cause des exponentielles de matrices. Une alternative pour éventuellement pallier à cette difficulté est d'introduire la chaîne incluse du processus et le processus de Poisson comptabilisant le nombre de transitions du processus.

Théorème 1.2.2 (S.M.Ross [14]). *On suppose que $\forall i, q_i = \nu_i = -q(i, i) = \nu$. On a alors : le nombre $N(t)$ de transitions du processus $(X_t)_t$ à partir de l'état i sur une période de temps t est tel que : $(N(t))_t$ est un processus de Poisson de taux ν . D'où*

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t) &= P(X_t = j / X_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = j / X_0 = i, N(t) = n) P(N(t) = n / X_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = j / X_0 = i, N(t) = n) \exp(-\nu t) \frac{(\nu t)^n}{n!} \end{aligned}$$

et

$$P(X_t = j / X_0 = i, N(t) = n) = P_{i,j}^{(n)}$$

où $P_{i,j}^{(n)}$ est la probabilité de transition de i vers j d'ordre n pour la chaîne incluse définie précédemment.

Remarque 3. Dans le cas où l'hypothèse $\forall i, q_i = -q(i, i) = \nu$ n'a pas nécessairement lieu, on définit le taux de transition uniformisé du processus $\nu = \sup q_i$ et on définit

$$p_{i,j}^* = \begin{cases} 1 - \frac{\nu_i}{\nu} & \text{si } j = i \\ \frac{\nu_i}{\nu} p_{i,j} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

on a alors $p_{i,j}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{i,j}^{*n} \exp(-\nu t) \frac{(\nu t)^n}{n!}$.

1.3 Méthode matrice géométrique pour le calcul de solutions stationnaires [11]

On considère un processus de Markov de générateur de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B_1 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B_2 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B_3 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & \dots & \dots & \dots \\ B_4 & A_4 & A_3 & A_2 & A_1 & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

On supposera que le processus est irréductible dont une condition nécessaire et suffisante est que les $m \times m$ matrices B_0 et A_1 ne soient pas singulières. Les inverses B_0^{-1} et A_1^{-1} sont définies négatives. La matrice $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ a une diagonale constituée d'éléments négatifs et des éléments extra diagonaux positifs. On se limitera alors au cas $Ae = 0$ où e est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1.

Définition 1.3.1. La matrice A est alors appelée une matrice semi-stable conservative. (a conservative semi-stable matrix).

Remarque 4. La récurrence positive du processus de Markov est équivalente à l'existence d'une distribution de probabilité $x = (x_0, x_1, \dots)$ $x_i > 0$ satisfaisant les équations :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x_{\nu} B_{\nu} = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x_{k+\nu-1} A_{\nu} = 0 \text{ pour } k \geq 1.$$

Soit alors τ un nombre réel satisfaisant $\max_j \max [-(B_0)_{jj}, -(A_1)_{jj}] > 0$, les équations précédentes peuvent être réécrites sous la forme :

$$x_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{\nu} B'_{\nu}$$

et

$$x_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{k+\nu-1} A'_{\nu} = 0 \text{ pour } k \geq 1.$$

où $B'_{\nu} = \delta_{\nu 0} I + \tau^{-1} B_{\nu}$ et $A'_{\nu} = \delta_{\nu 1} I + \tau^{-1} A_{\nu}$ pour $\nu \geq 0$.

Les propriétés de récurrence du processus de Markov sont alors déduites de celles de la chaîne de Markov ayant pour matrice de transition :

$$P' = \begin{pmatrix} B'_0 & A'_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B'_1 & A'_1 & A'_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B'_2 & A'_2 & A'_1 & A'_0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B'_3 & A'_3 & A'_2 & A'_1 & A'_0 & \dots & \dots & \dots \\ B'_4 & A'_4 & A'_3 & A'_2 & A'_1 & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Théorème 1.3.2. *Le processus de Markov irréductible de générateur Q est récurrent positif si la solution minimale non négative R de l'équation $\sum_{k=0}^{\infty} R^k A_k = 0$ a un rayon spectral $sp(R) < 1$ (le rayon spectral est la valeur propre de R de plus grand module) et s'il existe un vecteur x_0 à composantes positives tel que $x_0 B[R] = 0$. la matrice $B[R] = \sum R^k B_k$ est un générateur.*

Le vecteur des probabilités stationnaires x satisfaisant $xQ = 0$ et $xe = 1$ est alors donné par $x_k = x_0 R^k$, pour $k \geq 0$ et x_0 est obtenu par normalisation $x_0 (I - R)^{-1} e = 1$

Remarque 5. Pour donner une interprétation probabiliste de la matrice R ,

on définit la matrice de transition P^0 par :

$$P^0 = \begin{pmatrix} B_0^0 & A_0^0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B_1^0 & A_1^0 & A_0^0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B_2^0 & A_2^0 & A_1^0 & A_0^0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ B_3^0 & A_3^0 & A_2^0 & A_1^0 & A_0^0 & \dots & \dots & \dots \\ B_4^0 & A_4^0 & A_3^0 & A_2^0 & A_1^0 & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} B_0^0 &= \Delta_0^{-1} B_0 + I \\ A_0^0 &= \Delta_0^{-1} A_0 \\ B_\nu^0 &= \Delta^{-1} B_\nu \text{ pour } \nu \geq 1 \\ A_\nu^0 &= \Delta^{-1} A_\nu + \delta_{1,\nu} I \text{ pour } \nu \geq 0 \\ \Delta &= -diag(A_1) \\ \Delta_0 &= -diag(B_0) \end{aligned}$$

La matrice P^0 est la matrice de transition de la chaîne de Markov obtenue en considérant le processus de générateur Q juste après ses successives transitions.

La matrice $A^0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^0$ est donnée par $A^0 = I + \Delta^{-1} A$ et est stochastique si et seulement si $Ae = 0$.

Soit maintenant R^0 la solution minimale non négative de l'équation matricielle $R^0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (R_0)^\nu A_\nu^0$, les matrices R et R^0 sont liés par :

Théorème 1.3.3. *On a $sp(R) = sp(R^0)$. Dans le cas d'une récurrence positive, le vecteur probabilité invariante $x^0 = [x_0^0, x_1^0, x_2^0, \dots]$ de P^0 est liée à la solution stationnaire du processus de générateur Q par :*

$$x_0^0 = hx_0 \Delta_0$$

$$x_k^0 = hx_0 R^k \Delta = x_1^0 (R_0)^{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

où $h^{-1} = x_0 \Delta_0 e + x_0 R (I - R)^{-1} \Delta e$.

1.4 Processus de naissance et de mort et files markoviennes

Définition 1.4.1. *Le processus de Markov $(X_t)_t$ est dit processus de naissance et de mort si l'espace d'états $E=\mathbb{N}$ et $\forall i \in \mathbb{N} q(i, i+1) = \lambda_i$ et $q(i, i-1) = \mu_i$. Les taux λ_i et μ_i sont appelés taux de naissance et de mort respectivement.*

Théorème 1.4.2. *La probabilité stationnaire du processus est alors donnée par :*

$$p(i) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \pi_0, \quad i \geq 1$$

où π_0 sera déterminé par normalisation.

Remarque 6. Cette formulation donnera donc le régime stationnaire des files M/M/C avec C éventuellement infini : cas pour lequel on obtient une distribution de Poisson pour le nombre de clients dans le système en régime stationnaire.

1.5 File non markovienne M/G/1

Il suffit que la loi des inter-arrivées ou de service ne soit plus exponentielle pour perdre la qualité de processus de Markov pour le processus décrivant le nombre de clients dans le système. Pour cela, on expose très brièvement l'étude de la file M/G/1 au moyen de la chaîne incluse du processus initial. On suppose que le processus des arrivées est poissonnien de taux λ et que la durée de service d'un client quelconque est générale de transformée de Laplace $B^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} b(x) dx$ où $b(\cdot)$ est la densité de probabilité du temps de service. On note aussi :

- C_n : le $n^{\text{ième}}$ client qui arrive dans le système.
- T_n : instant d'arrivée de C_n
- $S_n = T_n - T_{n-1}$
- x_n : durée de service de C_n .
- q_n : nombre de clients laissés dans le système après le départ de C_n .

Théorème 1.5.1. *Soit $X_n =$ le nombre de clients dans le système après le départ de C_n ; $(X_n)_n$ est alors une chaîne de Markov de matrice de probabilités*

de transition $P = (p_{i,j})$ où $(p_{i,j} = P(q_{n+1} = j/q_n = i))$ est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \alpha_0 & \alpha_1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \alpha_0 & \alpha_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} b(x) dx$

Remarque 7. Pour $Q_n(z) = \sum_{k=0}^\infty P(q_n = k) z^k$, alors

$$Q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z) = B^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}$$

Cette dernière formule est appelée forme de Pollaczek-Khinchin.

1.6 Réseaux de files d'attente

Définition 1.6.1. *Un réseau de files d'attente est un système composé de N stations de service devant lesquelles se forment des files d'attente et avec possibilité de transfert entre différentes stations.*

Définition 1.6.2. *Le réseau est dit de Jackson si les clients arrivent de l'extérieur selon un processus de Poisson de taux λ . Un client quelconque arrivant de l'extérieur se dirige vers la $i^{\text{ème}}$ station avec la probabilité $p_{0,i}$. Le taux d'arrivée dans chaque station est alors $\lambda p_{0,i}$. Soit alors $p_{i,j}$ la probabilité qu'un client ayant terminé son service dans la station i ($1 \leq i \leq N$) se dirige vers la station j ($1 \leq j \leq N + 1$). La station portant le numéro $N+1$ désigne l'extérieur du réseau. La durée de service dans la station i lorsque k_i clients s'y trouvent est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\mu_i(k_i)$. on pose $k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_N(t))$ le vecteur aléatoire où $k_i(t)$ est le nombre de clients (y compris celui en service) dans la station i à l'instant t et soit $p(k, t) = p(k(t) = k/k(0) = k^0)$ avec $k = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ et k^0 l'état initial du réseau. On note $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ le vecteur correspondant à toutes les stations vides.*

Théorème 1.6.3 (Jackson). *La probabilité stationnaire du processus $(k(t))_t$ est alors donnée par :*

$$p(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(k, t) = p\left(\underset{-}{0}\right) \prod_{i=1}^N \prod_{m=1}^{k_i} \frac{\lambda e_i}{\mu_i(m)}$$

où les éléments $(e_i)_i$ sont solution du système d'équations :

$$e_i = p_{0,i} + \sum_{j=1}^N e_j p_{j,i} \quad i = 1, \dots, N$$

et

$$p\left(\underset{-}{0}\right) = \left(\sum_k \prod_{i=1}^N \prod_{m=1}^{k_i} \frac{\lambda e_i}{\mu_i(m)} \right)^{-1}$$

la condition nécessaire et suffisante d'existence de la solution étant $p\left(\underset{-}{0}\right) > 0$.

Chapitre 2

Etude de deux files d'attente M/M/1 parallèles avec discipline JSQ : approche par la file M/G/1

2.1 Présentation du système

On considère un système de deux files d'attente parallèles ayant un flux d'arrivée poissonien commun de taux λ et dans lequel les clients se dirigent vers la file la plus courte (discipline JSQ : Joining the Shortest Queue). On suppose que la durée de service dans chacune des deux files est exponentielle de taux μ et qu'il n'y a pas de transfert d'une file vers l'autre. On utilise alors une file M/G/1 pour faire une approximation du régime stationnaire du processus décrivant le nombre total de clients dans le système. Soit X_t le nombre total de clients dans les deux files à l'instant t . L'objectif de cette partie est de présenter une approche de la solution stationnaire du processus non markovien $(X_t)_t$. On utilise alors la chaîne de Markov induite à partir du processus $(X_t)_t$. Soit alors X_n le nombre de clients dans le système après le départ du $n^{\text{ème}}$ client.

2.2 Etude du régime stationnaire

Théorème 2.2.1. $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov récurrente positive si $\lambda < 2\mu$

Proposition 2.2.2. Soit X la variable aléatoire telle que : $p_k = P(X = k) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k)$ et $Q(z) = E(z^X)$, alors $Q(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$
avec

$$\begin{aligned} A(z) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) z(p_0 + p_1) \\ &\quad - (p_0 + p_1 z) \theta \left(\frac{2\mu}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) \\ &\quad - (p_0 + p_1 z) (1 - \theta) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(z) &= z - \theta \left(\frac{2\mu}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) \\ &\quad - (1 - \theta) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) \end{aligned}$$

où $\theta = \sum P(X = k)$ avec $k = m + n$ $m > 0, n > 0$ où m et n sont les nombres de clients dans les stations 1 et 2 respectivement.

Démonstration. Pour calculer p_k , on procède de la même façon que pour une file M/G/1 classique. Soit $X_{n+1} = X_n - 1_{\{X_n \geq 1\}} + A_{n+1}$ où A_{n+1} est le nombre de clients qui arrivent dans le système entre le $n^{\text{ème}}$ et le $(n+1)^{\text{ème}}$ départ (contrairement à la file M/G/1 A_{n+1} n'est pas le nombre de clients qui arrivent durant un service). On note $Q_n(z) = E(z^{X_n})$ la fonction génératrice de X_n donc :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= E(z^{X_n - 1_{\{X_n \geq 1\}} + A_{n+1}}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(z^{X_n - 1_{\{X_n \geq 1\}} + A_{n+1}} / X_n = k) P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(z^{k-1 + A_{n+1}} / X_n = k) P(X_n = k) \end{aligned}$$

$$E(z^A / X = 0)p_0 + E(z^A / X = 1)p_1 + \sum_{k=2}^{\infty} z^{k-1} E(z^A / X = k)p_k$$

Avec la notation $Q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z)$ on obtient :

$$Q(z) = E(z^A / X = 0)p_0 + E(z^A / X = 1)p_1 + \frac{1}{z} \sum_{k=2}^{\infty} z^k E(z^A / X = k)p_k$$

Comme A est le nombre de clients arrivant entre deux départs, il est donc indépendant de k mais dépend de la forme dont s'écrit k

Si $k = m + n$ (m et n sont les tailles des files 1 et 2) avec $m > 0$ et $n > 0$ alors A est le nombre de clients qui arrivent durant $Z = \inf(U, V)$ où U et V sont deux variables aléatoires de taux μ .

Si $k = k + 0 = 0 + k$ alors :

$$A = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ 1 + B & \text{avec probabilité } \frac{\mu}{\lambda + \mu} \end{cases}$$

où B est le nombre de clients arrivant durant Z

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E(z^{A/X} = 0) &= E(z^A/X = 1) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + 2 \frac{\mu^2}{\lambda + \mu} \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} \int_0^{+\infty} P(B = k/X = 0, Z = x) f_Z(x) dx \end{aligned}$$

f_Z est la densité de probabilité de Z qui est exponentielle de taux 2μ . D'où

$$\begin{aligned} E(z^{A/X} = 0) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + 2 \frac{\mu^2}{\lambda + \mu} \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \exp(-\lambda x) \exp(-2\mu x) dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + 2z \frac{\mu^2}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} \exp(-2\mu x) dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + 2z \frac{\mu^2}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x (1 - z)) \exp(-2\mu x) dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + z \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{2\mu}{\lambda(1 - z) + 2\mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1 - z) + 2\mu} \end{aligned}$$

Pour évaluer $E(z^{A/X} = k)$ for $k \geq 2$ on assigne une probabilité θ pour la forme the $k = m + n$ $m > 0, n > 0$ et qui est notée k^+ et $(1 - \theta)$ pour les autres cas notés k^- .

Donc $E(z^{A/X} = k) = \theta E(z^{A/X} = k^+) + (1 - \theta) E(z^{A/X} = k^-)$

mais on a aussi :

$$\begin{aligned} E(z^{A/X} = k^+) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i P(A = i/X = k^+, Z = x) f_Z(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \exp(-\lambda x) (2\mu) \exp(-2\mu x) dx \\ &= 2\mu \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x (1 - z)) \exp(-2\mu x) dx = \frac{2\mu}{\lambda(1 - z) + 2\mu} \end{aligned}$$

et $E(z^A/X = k^-) = E(z^A/X = 0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu}$
et qui donne :

$$\begin{aligned}
Q(z) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) (p_0 + p_1) \\
&\quad + \frac{1}{z} \theta \left(\frac{2\mu}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) \sum_{k=2}^{\infty} z^k p_k \\
&\quad + \frac{1}{z} (1 - \theta) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) \sum_{k=2}^{\infty} z^k p_k \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) (p_0 + p_1) \\
&\quad + \frac{1}{z} \theta \left(\frac{2\mu}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) (Q(z) - p_0 - p_1 z) \\
&\quad + \frac{1}{z} (1 - \theta) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{2\mu^2 z}{\lambda(1-z) + 2\mu} \right) (Q(z) - p_0 - p_1 z) \\
&= \frac{A(z)}{B(z)}
\end{aligned}$$

□

Remarque 8. Si on note $p(i, j)$ la probabilité en régime stationnaire d'avoir i clients dans la file 1 et j clients dans la file 2 alors :

$$p_k = \sum_{i+j=k} p(i, j)$$

Les équations d'équilibre impliquent :

$$\lambda p(0, 0) = 2\mu p(0, 1) = 2\mu p(1, 0)$$

et ceci pour des raisons de symétrie du système. D'où $p_1 = 2p(0, 1) = \frac{\lambda}{\mu} p_0$.

De l'égalité $X = X - 1_{\{X \geq 1\}} + A$ on obtient

$$\begin{aligned}
E(A) &= P(X \geq 1) = 1 - p_0 \\
&= E(A/X = 0)p_0 + E(A/X = 1) \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \sum_{k=2}^{\infty} E(A/X = k)p_k
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
E(A/X = 0) &= E(A/X = 1) \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{+\infty} P(B = k/X = 0, Z = x) f_Z(x) dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} (\lambda x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda x) (2\mu) \exp(-2\mu x) dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\lambda}{2\mu} \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

on a aussi pour $k \geq 2$

$$E(A/X = k) = \theta E(A/X = k^+) + (1 - \theta) E(A/X = k^-)$$

où :

$$E(A/X = k^-) = E(A/X = 0) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

et

$$E(A/X = k^+) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(A = i/X = k^+, Z = x) f_Z(x) dx = \frac{\lambda}{2\mu}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E(A) &= 1 - p_0 \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) p_0 + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) p_0 \\
&\quad + \left(\frac{\lambda\theta}{2\mu} + (1 - \theta) \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \right) (1 - p_0 - p_1)
\end{aligned}$$

Cette dernière relation permet donc d'avoir la fonction génératrice $Q(z)$ en fonction de θ .

Chapitre 3

Etude générale de deux files d'attente M/M/1 parallèles avec discipline JSQ

3.1 Méthode des fonctions génératrices (Flatto et MeKean)[9]

On définit le processus $(X_t, Y_t)_t$ a valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ où X_t et Y_t représentent le nombre de clients dans les files 1 et 2 respectivement. Soit alors $p(i, j)(t) = p(X_t = i, Y_t = j)$. et $p(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{prob}(X_t = i, Y_t = j)$. Pour des raisons de symétrie on a : $p(i, j) = p(j, i)$; on définit : $P(x, y) = \sum_{0 \leq i \leq j} p(i, j) x^i y^{j-1}$ où $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$, $P(x, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} p(i, 0) x^i$, $P(0, y) = \sum_{j=0}^{\infty} p(0, j) y^j$.

Théorème 3.1.1. *Le processus précédent admet un régime stationnaire si $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} < 1$.* [7]

Théorème 3.1.2. *La fonction P est lors donnée par : $P(x, y) = \frac{J(x, y)}{K(x, y)}$ où*

$$J(x, y) = x [2\rho x + 1 - (1 + \rho)y - \rho y^2] P(x, 0) + y(y - x) P(0, y)$$

et

$$K(x, y) = x(2\rho x + 1) - 2(1 + \rho)xy + y^2.$$

Remarque 9. La fonction P est analytique si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, les fonctions J et K ont donc des zéros communs sur ce disque unité. Pour utiliser ces zéros est introduit alors le paramétrage suivant pour x et y . $x(u) = \frac{a}{4} \left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{a}{2}$;
 $y(u) = \frac{1}{4}(c-b)u + \frac{1}{4}(c+b)\frac{1}{u} + \frac{c}{2}$ où u est tel que : $|x(u)| < 1$ et $|y(u)| < 1$
et $a = \frac{1}{1+\rho^2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}$ et $c = \frac{1+\rho}{1+\rho^2}$

Ce paramétrage possède alors les propriétés :

$$(1) \quad x(u) = x\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$(2) \quad y(u) = y\left(\frac{1}{\nu u}\right) \quad \text{où} \quad \nu = \frac{1+\rho-\sqrt{1+\rho^2}}{1+\rho+\sqrt{1+\rho^2}}$$

Il permet aussi de déterminer de façon explicite $P(x(u), y(u))$ en fonction de u et à partir des théorèmes suivants :

Théorème 3.1.3. *En posant :*

$$D(u) = \frac{\prod_{n \geq 2} (1 + \nu^n u) \left(1 + \nu^n \frac{1}{u}\right)}{\prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{\nu^n u}{\eta}\right) \left(1 - \frac{\nu^n}{\eta u}\right)}$$

$$C(u) = \frac{(1 - \rho\sqrt{1+\rho^2})(u - \eta)(u + \nu)}{4\rho(1 + \rho)}$$

Alors :

$$P(x(u), 0) = \frac{1}{1 + 2\rho} \frac{D(u)}{D(u_0)}$$

et

$$P(0, y(u)) = C(u) P(x(u), 0)$$

où :

$$\eta = 1 + \frac{2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2}}$$

et

$$u_0 = 2\rho^2 \left(1 + \frac{1}{2\rho^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2}}\right)$$

Théorème 3.1.4. *Les pôles de la fonction en u $P(x(u), 0)$ sont les points :*

$$u = \frac{\eta}{\nu^n} \quad \text{et} \quad u = \frac{\nu^n}{\eta}.$$

Le résidu R_n au point $u = \frac{\eta}{\nu^n}$ est donné par :

$$R_n = R_0 \left[\nu^n \prod_{j=1}^n e\left(\frac{\eta}{\nu^j}\right) \right]^{-1}$$

avec

$$R_0 = \frac{8\eta^2 (1 + \rho^2) (2 - \rho) (\rho - 1)}{(\eta^2 - 1) \rho^2 (2 + \rho)}$$

et

$$e(u) = \frac{\nu(u - \eta)(u + \nu)}{(1 - \nu\eta u)(1 + \nu^2 u)}$$

Les résidus R_n de la fonction $P(x, 0)$ aux pôles $x_n = \left(\frac{a}{4}\right) \left(\frac{\eta}{\nu^n} + \frac{\nu^n}{\eta}\right) + \frac{a}{2}$ sont donnés par Flatto et McKean et sont de la forme :

$$R_0 = \frac{2(2 - \rho)(\rho - 1)}{\rho^2(2 + \rho)}$$

et pour $n \geq 1$

$$R_n = (-1)^n \frac{2(2 - \rho)(\rho - 1)(\eta^2 - \nu^{2n})}{\rho^2(2 + \rho)(\eta^2 - 1)} (\nu\eta)^n \prod_{j=1}^n \frac{\left(1 + \frac{\nu^{j-2}}{\eta}\right) \left(1 - \frac{\nu^{j-1}}{\eta^2}\right)}{(1 - \nu^j) \left(1 + \frac{\nu^{j+1}}{\eta}\right)}$$

Remarque 10. En posant $y_n = \frac{c - b}{4} \frac{\eta}{\nu^n} + \frac{c + b\nu^n}{4} \frac{1}{\eta} + \frac{c}{2}$; $n \geq 0$ Flatto et McKean ont alors donné une expression de $P(x, y)$ comme fonction méromorphe et cette expression est

$$P(x, y) = 2\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n x_n \left(x_n + \frac{1}{2\rho} - \frac{1 + \rho}{2\rho} y + \frac{y^2}{2}\right)}{(x - x_n)(y - y_n)(y - y_{n+1})};$$

La décomposition de cette forme donne alors les expressions des probabilités stationnaires recherchées mais qui ne sont pas du tout simples à exploiter. En particulier les probabilités diagonales sont de la forme :

$$p(i, i) = 2\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{(y_{n+1} - y_n)} \frac{(1 + 2\rho x_n)}{2\rho x_n^i} \left(\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n}\right)$$

avec $i \geq 0$

3.2 Solution numérique (Zhao et Grassman)[18]

Zhao et Grassmann ont proposé une méthode numérique pour évaluer les probabilités diagonales et résumée dans la suite.

Théorème 3.2.1. *La forme de $p(i, i)$ donnée précédemment peut aussi s'écrire :*

$$p(i, i) = G_0 \sum_{m=0}^{\infty} D_m \left(\frac{\eta - \nu^m}{\eta + \nu^m} \right) \left[\frac{4(1 + \rho^2) \nu^m}{\eta \left(1 + \frac{\nu^m}{\eta}\right)^2} \right]^i =$$

$$G_0 \left\{ \left(\frac{1 - \frac{1}{\eta}}{1 + \frac{1}{\eta}} \right) \left[\frac{4(1 + \rho^2)}{\eta \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)^2} \right]^i + \left[\frac{2(1 + \rho^2)}{\eta} \right]^i \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left(\frac{1 - \frac{\nu^m}{\eta}}{1 + \frac{\nu^m}{\eta}} \right) \left[\frac{2\nu^m}{\left(1 + \frac{\nu^m}{\eta}\right)^2} \right]^i \right\}$$

$i \geq 0$ avec

$$G_0 = \frac{(1 + \nu^2 \eta) (1 + \nu^3 \eta) \left(1 - \frac{1}{\nu^2 \eta^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\nu \eta^2}\right)}{(1 + 2\rho) \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \left(1 + \frac{\nu}{\eta}\right) (1 - \nu)}$$

et

$$D_0 = 1, D_m = -\nu^2 \eta \frac{\left(1 - \frac{\nu^{m-1}}{\eta^2}\right) \left(1 + \frac{\nu^{m-2}}{\eta}\right)}{(1 - \nu^m) \left(1 + \frac{\nu^{m+1}}{\eta}\right)} D_{m-1}$$

avec $m \geq 1$

Remarque 11. En posant $p^M(i, i) = G_0 \sum_{m=0}^M D_m \left(\frac{\eta - \nu^m}{\eta + \nu^m} \right) \left[\frac{4(1 + \rho^2) \nu^m}{\eta \left(1 + \frac{\nu^m}{\eta}\right)^2} \right]^i$

On obtient :

$$|p(i, i) - p^M(i, i)| \leq G_0 S_0 (\nu^2 \eta)^M$$

où

$$S_0 = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\nu^{m-1}}{\eta^2}\right) \left(1 + \frac{\nu^{m-2}}{\eta}\right)}{(1 - \nu^m) \left(1 + \frac{\nu^{m+1}}{\eta}\right)}$$

et ceci donne donc une première approximation de $p(i, i)$ par la somme tronquée et dans le cas où l'on veuille obtenir une erreur de l'ordre de 10^{-n} M

doit être de l'ordre de $\frac{9n}{\rho}$ ce qui engendrerait un grand nombre d'opérations dans le cas où ρ est petit. Il y'a lieu aussi de signaler que tout ce calcul ne concerne qu'une seule valeur $p(i, i)$. Il en faut donc calculer tout un ensemble de valeurs de probabilités diagonales pour déduire les probabilités demandées. Ces difficultés des calculs sont la raison essentielle de l'introduction d'autres méthodes plus simples de présentation et donnant une approximation très satisfaisante des probabilités stationnaires du système.

3.3 Nouvelle formulation de la solution numérique (T. Lardjane, R. Messaci)[17]

3.3.1 Analyse de la solution stationnaire du système

Notation 2. En plus des notations introduites dans la section 1 précédente, on a aussi : pour $k \geq 1$ on définit les vecteurs de dimension $(k + 1) \times 1$ et les $(k + 1) \times (k + 1)$ matrices :

$$X_{2k} = \begin{pmatrix} p(2k, 0) \\ p(2k - 1, 1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p(k + 1, k - 1) \\ p(k, k) \end{pmatrix} \quad X_{2k+1} = \begin{pmatrix} p(2k + 1, 0) \\ p(2k, 1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p(k + 2, k - 1) \\ p(k + 1, k) \end{pmatrix}$$

$$A_{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les $(k+1) \times 1$ vecteurs B_{2k} et B_{2k+1} sont aussi définis de la façon suivante :

pour $k = 1$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \left((1 + \rho) \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2} \right) p(0, 0) \\ p(1, 1) \end{pmatrix}$$

pour $k \geq 2$

$$B_{2k} = \begin{pmatrix} (1 + \rho) p(2k - 1, 0) \\ (2 + \rho) p(2k - 2, 1) - \rho p(2k - 2, 0) \\ (2 + \rho) p(2k - 3, 2) - \rho p(2k - 3, 1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (2 + \rho) p(k + 1, k - 2) - \rho p(k + 1, k - 3) \\ (2 + \rho) p(k, k - 1) - \rho p(k, k - 2) - \frac{\rho}{2} p(k - 1, k - 1) \\ p(k, k) \end{pmatrix}$$

pour $k \geq 1$

$$B_{2k+1} = \begin{pmatrix} (1 + \rho) p(2k, 0) \\ (2 + \rho) p(2k - 1, 1) - \rho p(2k - 1, 0) \\ (2 + \rho) p(2k - 2, 2) - \rho p(2k - 2, 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ (2 + \rho) p(k + 1, k - 1) - \rho p(k + 1, k - 2) \\ (2 + \rho) p(k, k) - 2\rho p(k, k - 1) \end{pmatrix}$$

Théorème 3.3.1. *Les équations en régime stationnaire peuvent être écrites sous la forme suivante :*

$$A_{2k} X_{2k} = B_{2k} \quad \text{et} \quad A_{2k+1} X_{2k+1} = B_{2k+1} \quad \text{pour} \quad k \geq 1$$

Démonstration. Les deux premières équations donnent :

$$p(0, 1) = p(1, 0) = \frac{\lambda}{2\mu} p(0, 0) = \frac{\rho}{2} p(0, 0) \quad (3.1)$$

$$(\rho + 1) p(1, 0) = \frac{\rho}{2} p(0, 0) + p(1, 1) + p(2, 0) \quad (3.2)$$

et qui peuvent être écrites sous la forme :

$$A_2 X_2 = B_2$$

où $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} p(2, 0) \\ p(1, 1) \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} (\rho + 1) \frac{\rho}{2} p(0, 0) - \frac{\rho}{2} p(0, 0) \\ p(1, 1) \end{pmatrix}$

Pour tout $n \geq 1$, comme c'est montré dans le diagramme de transition de la figure 1 ; le système des équations stationnaires exprime les probabilités $\{p(i, j) / i + j = n + 1\}$ en termes des probabilités $\{p(i, j) / i + j = n\}$ et $\{p(i, j) / i + j = n - 1\}$.

On distingue alors deux cas :

Cas 1 : $n = 2k \quad k \geq 2$

Pour des raisons de symétrie le système des équations stationnaires est réduit à :

$$(\lambda + \mu) p(2k - 1, 0) = \mu p(2k, 0) + \mu p(2k - 1, 1) \quad (3.3)$$

pour $0 < i < k - 1 :$

$$(\lambda + 2\mu) p(2k - 1 - i, i) = \lambda p(2k - 1 - i, i - 1) + \mu p(2k - i, i) + \mu p(2k - 1 - i, i + 1) \quad (3.4)$$

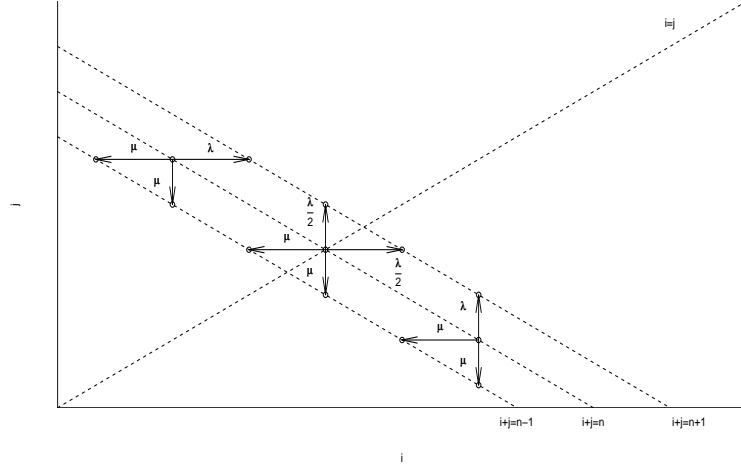


FIGURE 3.1 – Diagramme de transition

et

$$(\lambda + 2\mu) p(k, k-1) = \frac{\lambda}{2} p(k-1, k-1) + \lambda p(k, k-2) + \mu p(k, k) + \mu p(k+1, k-1) \quad (3.5)$$

On réécrit ces expressions avec les notations matricielles et en isolant les termes $\{p(i, j) / i + j = 2k\}$, la formulation désirée est obtenue.

Cas 2 : $n = 2k + 1$ $k \geq 1$

Aussi, pour des raisons de symétrie le système s'écrit à nouveau :

$$(\lambda + 2\mu) p(k, k) = 2\lambda p(k, k-1) + 2\mu p(k+1, k) \quad (3.6)$$

pour $0 < i < k$

$$(\lambda + 2\mu) p(k+i, k-i) = \lambda p(k+i, k-i-1) + \mu p(k+i+1, k-i) + \mu p(k+i, k-i+1) \quad (3.7)$$

et

$$(\lambda + \mu) p(2k, 0) = \mu p(2k+1, 0) + \mu p(2k, 1) \quad (3.8)$$

De même que pour le cas $n = 2k$, on isole dans le premier membre les termes $\{p(i, j) / i + j = 2k + 1\}$ et on obtient la formule désirée. \square

Proposition 3.3.2. *Pour $j = 1, 2, \dots, k + 1$ la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur*

X_{2k} (resp. X_{2k+1}) est de la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_{i,j}^{(2k)} x_i + \alpha_{0,j}^{(2k)} \right) x_0, \\ & \text{(resp. } \left(\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_{i,j}^{(2k+1)} x_i + \alpha_{0,j}^{(2k+1)} \right) x_0) \end{aligned}$$

où $\alpha_{i,j}^{(2k)}, \alpha_{i,j}^{(2k+1)} \in \mathbb{R}$, $x_i x_0 = p(i, i)$ pour $i \geq 1$ et $p(0, 0) = x_0 > 0$.

Démonstration. On utilise un argument de récurrence ; pour $k = 1$, on obtient à partir des formules du théorème 1 :

$$\begin{aligned} X_2 &= \begin{pmatrix} p(2, 0) \\ p(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((1 + \rho) \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2}) x_0 \\ x_1 x_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_0 (\rho^2 - 2x_1) \\ x_1 x_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= \begin{pmatrix} p(3, 0) \\ p(2, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \rho^2 (\rho + 1) x_0 \\ x_0 (2x_1 + \rho x_1 - \rho^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_0 (\rho + 2) (\rho^2 - x_1) \\ (-\frac{1}{2}) (\rho^2 - \rho x_1 - 2x_1) x_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $x_1 x_0 = p(1, 1)$. On note aussi que les expressions de X_2 et X_3 donnent les coefficients $\alpha_{1,j}^{(2)}, \alpha_{1,j}^{(3)}$ pour $j = 1, 2$.

On suppose maintenant que X_{2k-1} satisfait la proposition, donc à cause des expressions donnant les vecteurs X_{2k} et X_{2k+1} (B_{2k} est donné en termes des composantes de X_{2k-2} et X_{2k-1} , B_{2k+1} est donné en termes des composantes de X_{2k} and X_{2k-1}), les expressions désirées de X_{2k} et X_{2k+1} sont alors obtenues. Ainsi, les coefficients $\alpha_{i,j}^{(n)}$ sont calculés par récurrence. \square

Remarque 12. Cette dernière proposition montre que si $i + j = n$ alors $p(i, j)$ est donnée en termes de : $p(0, 0), p(1, 1), p(2, 2), \dots, p\left(\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ où $[x]$ est la partie entière de x .

Notation 3. Dans les sections suivantes, pour tout entier n , on introduit les nombres réels $\{r_n(i, j), i + j \leq n\}$ satisfaisant le système des équations d'équilibre : $r_n(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} r_n(e') q(e', e)$ où $(e) = (i, j); i + j \leq$

$n - 1$. On pose alors :

$$r_n(0, 0) = y_0^{(n)}, \quad r_n(0, 1) = r_n(1, 0) = \frac{\rho}{2} r_n(0, 0), \quad r_n(i, i) = y_i^{(n)} y_0^{(n)} \text{ pour } i \geq 1$$

$$Y_{2k}^{(n)} = \begin{pmatrix} r_n(2k, 0) \\ r_n(2k-1, 1) \\ \vdots \\ r_n(k+1, k-1) \\ r_n(k, k) \end{pmatrix} \quad Y_{2k+1}^{(n)} = \begin{pmatrix} r_n(2k+1, 0) \\ r_n(2k, 1) \\ \vdots \\ r_n(k+2, k-1) \\ r_n(k+1, k) \end{pmatrix}$$

$$D_2^{(n)} = \begin{pmatrix} \left((1 + \rho) \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2} \right) r_n(0, 0) \\ r_n(1, 1) \end{pmatrix}$$

pour $k \geq 2$ et $2k \leq n$

$$D_{2k}^{(n)} = \begin{pmatrix} (1 + \rho) r_n(2k-1, 0) \\ (2 + \rho) r_n(2k-2, 1) - \rho r_n(2k-2, 0) \\ (2 + \rho) r_n(2k-3, 2) - \rho r_n(2k-3, 1) \\ \vdots \\ (2 + \rho) r_n(k+1, k-2) - \rho r_n(k+1, k-3) \\ (2 + \rho) r_n(k, k-1) - \rho r_n(k, k-2) - \beta_k \\ r_n(k, k) \end{pmatrix}$$

où $\beta_k = \frac{\rho}{2} r_n(k-1, k-1)$

Pour $k \geq 1$ et $2k+1 \leq n$

$$D_{2k+1}^{(n)} = \begin{pmatrix} (1 + \rho) r_n(2k, 0) \\ (2 + \rho) r_n(2k-1, 1) - \rho r_n(2k-1, 0) \\ (2 + \rho) r_n(2k-2, 2) - \rho r_n(2k-2, 1) \\ \vdots \\ (2 + \rho) r_n(k+1, k-1) - \rho r_n(k+1, k-2) \\ (2 + \rho) r_n(k, k) - 2\rho r_n(k, k-1) \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $Y_{2k}^{(n)}$ et $Y_{2k+1}^{(n)}$ sont alors définis par les formules de récurrence : $A_{2k} Y_{2k}^{(n)} = D_{2k}^{(n)}$ et $A_{2k+1} Y_{2k+1}^{(n)} = D_{2k+1}^{(n)}$ pour $k \geq 1$ on a aussi : les $(k+1)$ composantes du vecteur $Y_{2k}^{(n)}$ (resp $Y_{2k+1}^{(n)}$) sont de la

forme :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_{i,j}^{(2k)} y_i^{(n)} + \alpha_{0,j}^{(2k)} \right) y_0^{(n)} \\ & \text{(resp. } \left(\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_{i,j}^{(2k+1)} y_i^{(n)} + \alpha_{0,j}^{(2k+1)} \right) y_0^{(n)}) \end{aligned}$$

où $\alpha_{i,j}^{(2k)}, \alpha_{i,j}^{(2k+1)} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq (k+1)$

Proposition 3.3.3. *Pour $n \geq 2$, soit le sous ensemble C_n de $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ défini comme suit :*

$$C_n = \left\{ \left(y_1, y_2, \dots, y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) / \begin{array}{l} y_l > 0 \text{ pour } l = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ r_n(i, j) > 0 \text{ si } i + j = n \end{array} \right\}$$

Donc pour $Y^{(n)} = \left(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{(n)} \right) \in C_n$; l'ensemble de nombres

reels $\{r_n(i, j); i + j \leq n\}$ (obtenus en termes de composantes des vecteurs $Y^{(n)}$ dans C_n) est une solution positive pour le système d'équations d'équilibre : $r_n(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} r_n(e') q(e', e)$

Démonstration. C_n est non vide car il contient le vecteur $(p(1, 1), p(2, 2), \dots, p(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$ à une constante multiplicative près. Si $y_i^{(n)} = \frac{p(i, i)}{p(0, 0)}$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $y_0^{(n)} = p(0, 0)$ les éléments correspondant $r_n(i, j), i + j = n$ sont exactement les probabilités $p(i, j); i + j = n$.

La condition $r_n(i, j) > 0$ si $i + j = n$ donne pour ces nombres reels les propriétés des probabilités stationnaires $p(i, j); i + j = n$. Donc $\{r_n(i, j); i + j \leq n - 1\}$ (à partir desquels on construit $\{r_n(i, j); i + j = n\}$ à partir des équations d'équilibre $r_n(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} r_n(e') q(e', e)$; avec $y_i^{(n)}$ ayant le rôle de $p(i, i), 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) ont les mêmes propriétés que $\{p(i, j); i + j \leq n - 1\}$.

D'où si $y_0^{(n)} > 0$ et $\left(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{(n)} \right) \in C_n$ le système construit de

nombres reels $\{r_n(i, j); i + j \leq n\}$ est une solution positive pour les équations d'équilibre : $r_n(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} r_n(e') q(e', e)$. \square

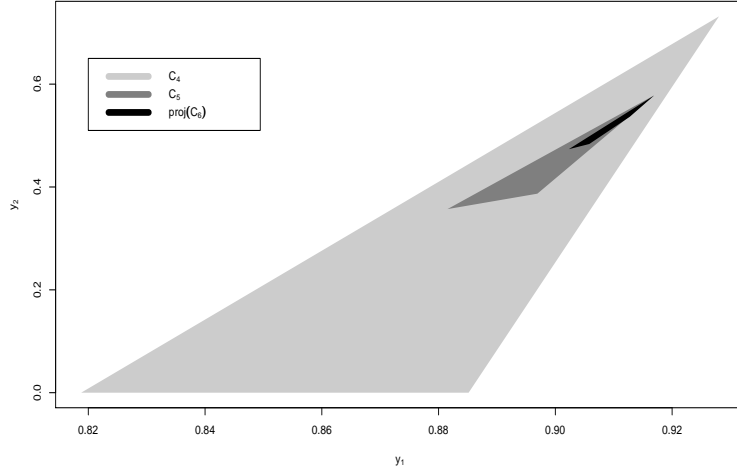


FIGURE 3.2 – Evolution de l'ensemble solution

Corollaire 3.3.4. *Si on note :*

$$S_n = \left\{ \left(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{(n)}, \dots \right) \text{ de telle sorte que } y_l > 0 \right. \\ \left. \forall l \geq 1, r_n(i, j) > 0 \text{ pour } i + j = n \right\}$$

$(S_n)_n$ est donc une suite d'ensemble décroissante ($S_n \subset S_{n-1}$) et la limite $\cap S_n$ est telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_i^{(n)} y_0^{(n)})_{i \geq 1}$ est exactement la suite des probabilités $p(i, i)$ $i \geq 1$.

Démonstration. Soit $\left(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{(n)}, \dots \right) \in S_n$, il faut d'abord remarquer que $y_l^{(n)}$ pour $l > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sont libres des contraintes $r_n(i, j) > 0$ pour $i + j = n$, ces composantes sont alors identiques pour les ensembles S_n et S_{n-1} . Mais les composantes $\left(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{(n)} \right)$ doivent aussi satisfaire les contraintes $\{r_n(i, j) > 0; i + j = n - 1\}$ (proposition précédente) donc $S_n \subset S_{n-1}$. D'où si n tend vers l'infini et à cause de l'ergodicité du processus de Markov correspondant, le système infini d'équations linéaires admet

une et une seule solution et qui est $(p(i, i))_{i \geq 1}$ à une constante multiplicative près. \square

Remarque 13. Tout élément de C_n peut être considéré comme une approximation du vecteur $(p(1, 1), \dots, p\left(\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]\right))$ à une constante multiplicative près.

Remarque 14. Comme pour tout n , $p(i, j)$; $i + j = n$ est exprimé en termes de $p(0, 0), p(1, 1), p(2, 2), \dots, p\left(\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]\right)$, donc la première étape des calculs est d'obtenir une approximation de ces dernières probabilités par $y_0^{(n)}, y_0^{(n)} y_1^{(n)}, \dots, y_0^{(n)} y_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{(n)}$ respectivement, $y_0^{(n)}$ est un facteur multiplicatif et $y_1^{(n)}, \dots, y_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{(n)}$ sont calculées sous les contraintes données dans la définition de C_n . On choisit alors n suffisamment grand de telle sorte à obtenir une bonne approximation. En d'autres termes $y_1^{(n)} y_0^{(n)}, y_2^{(n)} y_0^{(n)}, \dots, y_n^{(n)} y_0^{(n)}$ sont presque les probabilités diagonales : $p(1, 1), \dots, p(n, n)$. Pour montrer le comportement géométrique de l'ensemble C_n dans le plan on choisit $\rho = 1.5$ et on trace C_4, C_5 et la projection de C_6 sur le plan contenant les deux premières coordonnées (y_1, y_2) (Figure 4.2)

3.4 Méthodologie calculatoire

En pratique il est demandé de calculer un nombre fini de probabilités $p(i, i)$. La suite $\{p(i, i)\}_i$ est décroissante après un entier K [8] et a pour limite 0 (voir Figure 3). Le problème est donc de déterminer un entier N assez grand de telle sorte que $\sum_{\{(i,j)/i+j \leq N\}} p(i, j)$ soit très proche de 1. Pour ce faire,

on utilise les bornes des restes de séries $\sum_{n=N}^{\infty} \pi_n$ où $\pi_n = \sum_{\{(i,j)/i+j=n\}} p(i, j)$ donnés dans Halfin [7]. On a alors :

Théorème 3.4.1. Pour $\sigma = \frac{\ln \frac{2+\rho}{(2-\rho)(1+\rho)}}{\ln(1+\rho)}$ et :

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{2} \leq \rho < 2, \quad N \geq \sigma + 1 & \quad \sum_{n=N}^{\infty} \pi_n \leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^{N-\sigma} \\ 1 \leq \rho < \sqrt[2]{2}, \quad N \geq 2 & \quad \sum_{n=N}^{\infty} \pi_n \leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^N \frac{2+\rho}{1+\rho} \end{aligned}$$

pour $0 < \rho < 1$, on a :

$$\pi_n \leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \frac{1}{2(1+\rho)} \left(2 + \rho - \frac{\rho^2(1+\rho)^n}{(1+\rho)^n - 1}\right) + \frac{\rho^2}{2(1+\rho)} \frac{1}{(1+\rho)^n - 1}$$

et qui implique :

$$\pi_n \leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^n + \frac{1}{(1+\rho)^n}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=N}^{\infty} \pi_n \leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^N \frac{1}{1-\frac{\rho}{2}} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{N-1} \frac{1}{\rho}$$

Remarque 15. Cette dernière borne n'est pas intéressante si ρ est proche de 0. Dans ce cas on considère les flux pour les processus de Markov en régime stationnaire et tels qu'ils sont invoqués dans Halfin [7] et présentés sous la forme :

$$\lambda\pi_{n-1} = \mu\pi_n^- + 2\mu\pi_n^+$$

où $\pi_n^- = 2p(n, 0)$ et

$$\pi_n^+ = \sum_{\{i+j=n, i>0, j>0\}} p(i, j) \quad (\pi_n = \pi_n^- + \pi_n^+),$$

on obtient alors :

$$\pi_n = \frac{\lambda}{\mu\pi_n^- + 2\mu\pi_n^+} \pi_{n-1} = \frac{\lambda}{\mu \left(1 + \frac{\pi_n^+}{\pi_n}\right)} \pi_{n-1} \quad \text{d'où, } \pi_n \leq \rho^n \text{ et qui est une}$$

borne intéressante si $0 < \rho < 1$, plus spécialement si ρ est proche de 0. On déduit alors : $\sum_{n=N}^{\infty} \pi_n \leq \frac{\rho^N}{1-\rho}$.

Remarque 16. Pour une précision ϵ , la détermination d'un entier N satisfaisant $\sum_{n=N+1}^{\infty} \pi_n \leq \epsilon$ est faite de façon très simple. Comme exemple, pour $\rho = 1$ et $\epsilon = 10^{-10}$ on trouve $N = 34$. Ceci nous permet donc de nous limiter au calcul des $p(i, i)$ $1 \leq i \leq 17$. La détermination de N peut aussi

être considérée comme une règle d'arrêt d'un algorithme qui sera cité dans la suite. Il y'a lieu de signaler que ϵ est la probabilité négligée dans la somme totale des probabilités et on montrera de façon empirique que c'est aussi le maximum de l'erreur commise sur les probabilités stationnaires.

3.4.1 Calcul de $y_i^{(N)}$ $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$

Il y'a lieu de rappeler que N est telles que les probabilités ($p(i, j)/i + j \geq N + 1$), ayant une somme totale plus petite que ϵ , sont négligées.

Comme les $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1$ composantes du vecteur $Y_{2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil}$ sont de la forme :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} \alpha_{i,j}^{(N)} y_i^{(N)} + \alpha_{0,j}^{(N)} \right) y_0^{(N)}; \quad 1 \leq j \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1$$

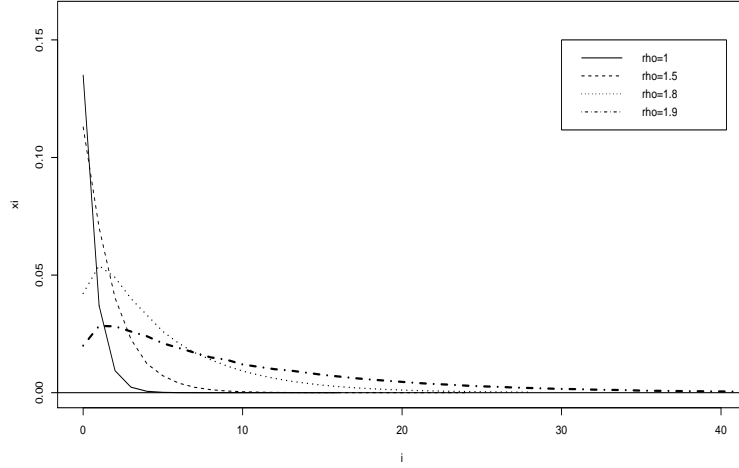


FIGURE 3.3 – Evolution des probabilités diagonales

les inconnues $\left\{ y_i^{(N)} ; 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right\}$ sont donc l'ensemble solution du système d'inéquations linéaires :

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} \alpha_{i,j}^{(N)} y_i^{(N)} + \alpha_{0,j}^{(N)} > 0 \text{ et } y_i^{(N)} > 0$$

pour $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$ et $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$.

On utilise l'algorithme du simplexe pour borner chaque $y_i^{(N)}$. Les bornes inférieures et supérieures seront alors notées $y_{i,\min}^{(N)}$ et $y_{i,\max}^{(N)}$ respectivement. A cause de l'unicité de la solution ces bornes seront très proches l'une de l'autre comme on le verra dans la suite. (voire table 1). puisque $y_i^{(N)} > 0$, on peut prendre comme fonction objective $\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} y_i^{(N)}$ (ou toute fonction linéaire de $\left\{ y_i^{(N)} ; 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right\}$) et les contraintes précédentes. Comme $\sum p(i, i) = \frac{1}{1 + \rho}$, on calcule $y_0^{(N)}$ comme constante de normalisation par la formule : $y_0^{(N)} \left(1 + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} y_i^{(N)} \right) = \frac{1}{1 + \rho}$ ou $y_0^{(N)} = \frac{1}{(1+\rho) \left(1 + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} y_i^{(N)} \right)}$ où $(y_i^{(N)})_{1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor}$ est toute solution satisfaisant les contraintes précédentes et $y_i^{(N)} = \frac{1}{2} (y_{i,\min}^{(N)} + y_{i,\max}^{(N)})$

3.4.2 Algorithme

L'algorithme se déroule suivant les étapes suivantes ;

Etape 1 : Fixer une valeur de ρ .

Etape 2 : Fixer une valeur de la précision ϵ et calculer la valeur correspondante de N .

Etape 3 : Poser $y_i^{(N)} \cdot y_0^{(N)} = r_N(i, i)$ $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ et obtenir (en utilisant un calcul formel) les $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1$ composantes du vecteur $Y_{2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil}^{(N)}$ notées par $\sum_{i=1}^{j=\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} \alpha_{i,j}^{(2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil)} y_i^{(N)} + \alpha_0^{(2\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil)}$ $1 \leq j \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 1$. Ceci peut être fait sans la résolution du système formel d'équations linéaires $A_n Y_n^{(N)} = D_n^{(N)}$ pour $n = 2k$ et $n = 2k + 1$. Ceci est dû au fait que l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a l'une des deux formes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cdot & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \cdot & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

possède l'une des deux formes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \cdot & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \cdot & 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On pose donc dans le programme de calcul : $Y_n^{(N)} = A_n^{-1} D_n^{(N)}$ pour $n = 2k$ ou $2k + 1$.

Etape 4 : Utiliser la méthode du simplexe avec la fonction objective $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_i^{(N)}$ et les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \alpha_{i,j}^{(m)} y_i^{(N)} + \alpha_{0,j}^{(m)} \geq 0 \quad 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$$

$$y_i^{(N)} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor.$$

Etape 5 : Obtenir les bornes inférieure et supérieure pour $y_i^{(N)}$ notées respectivement par $y_{i,\min}^{(N)}$ et $y_{i,\max}^{(N)}$ et poser $y_i^{(N)} = \frac{1}{2} (y_{i,\max}^{(N)} + y_{i,\min}^{(N)})$. Ainsi,

l'ensemble solution est un ensemble convexe noté C'_N .

Etape 6 : Retourner à la formulation matricielle pour le calcul de $p(i, j)$ $i + j \leq N$.

3.5 Résultats numériques et analyse d'erreurs

Proposition 3.5.1. Si on note e_0 et e_i les erreurs de calcul faites sur $p(0, 0)$ et $\frac{p(i, i)}{p(0, 0)}$ respectivement, alors :

$$e_0 \leq \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (y_{i,\max}^{(N)} - y_{i,\min}^{(N)})}{(1 + \rho) \left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,\min}^{(N)}\right)^2} + \frac{\epsilon \left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,\max}^{(N)}\right)}{\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,\min}^{(N)}\right)^2} = \epsilon_0 \text{ et } e_i \leq$$

$$(y_{i,\max}^{(N)} - y_{i,\min}^{(N)}) = \epsilon_{1,i}$$

Démonstration. On sait que $p(0, 0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \rho) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} y_{i,0}^{(N)}\right)}$ où $(y_{i,0}^{(N)})_{i \geq 1}$

est une suite de nombres positifs ayant la propriété : $y_{i,\min}^{(N)} \leq y_{i,0}^{(N)} \leq y_{i,\max}^{(N)}$ $1 \leq i \leq N$ for $(y_1^{(N)}, y_2^{(N)}, \dots, y_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{(N)}) \in C_n$. alors $p(0, 0) \left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,0}^{(N)}\right) =$

$$\frac{1}{1+\rho} - \alpha_1 \text{ et qui conduit à : } p(0,0) = \frac{1 - (1+\rho)\alpha_1}{(1+\rho)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,0}^{(N)}\right)} \text{ avec } 0 <$$

$\alpha_1 < \epsilon$ et l'entier N satisfaisant : $\sum_{n=N+1}^{\infty} \pi_n \leq \epsilon$. Donc la valeur calculée de $p(0,0)$ est $y_0^{(N)} = \frac{1}{(1+\rho)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_i^{(N)}\right)}$ où la suite $(y_i^{(N)})_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$ est

choisie dans l'ensemble C_n .

On a donc :

$$\begin{aligned} |p(0,0) - y_0| &= \\ &= \left| \frac{1 - (1+\rho)\alpha_1}{(1+\rho)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,0}^{(N)}\right)} - \frac{1}{(1+\rho)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_i^{(N)}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{(1 - (1+\rho)\alpha_1)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_i^{(N)}\right) - \left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,0}^{(N)}\right)}{(1+\rho)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,0}^{(N)}\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_i^{(N)}\right)} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (y_{i,\max}^{(N)} - y_{i,\min}^{(N)})}{(1+\rho)\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,\min}^{(N)}\right)^2} + \frac{\epsilon\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,\max}^{(N)}\right)}{\left(1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} y_{i,\min}^{(N)}\right)^2} \end{aligned}$$

Comme la vraie valeur de $p(i,i)$ est donnée par : $p(i,i) = p(0,0)\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} y_i^{(N)}\right)$ où : $y_{i,\min}^{(N)} \leq y_i^{(N)} \leq y_{i,\max}^{(N)}$ pour tout i et N tels que $1 \leq i \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, donc $y_{i,\min}^{(N)} \leq \frac{p(i,i)}{p(0,0)} \leq y_{i,\max}^{(N)}$ \square

Remarque 17. Il est bien connu que la convergence vers la solution est rapide pour les petites valeurs de ρ ($\rho < 1$). Plus ρ est proche 2, plus la convergence est lente. Ceci peut être vu sur la figure 3. On donne alors un ensemble de résultats pour différentes valeurs de ρ . Après chaque calcul d'un système de probabilités $p(i,j)$ on ajoute sur une table les différentes valeurs de :

- ϵ l'erreur faite sur la somme totale des probabilités
- ϵ_0 la valeur maximale d'erreur faite sur $p(0,0)$
- ϵ_1 la valeur maximale d'erreur faite sur $\frac{p(i,i)}{p(0,0)}$ $i \geq 1$
- L'entier N ayant la propriété : $\sum_{i+j \geq N+1} p(i,j) \leq \epsilon$

- La somme calculée $\sum_{i+j \leq N} p(i, j)$
 Les probabilités diagonales sont d'un intérêt spécial, on les donne pour $\rho = 0.2$ et $\rho = 1.9$. D'autres calculs seront donnés aussi pour des valeurs de ρ proches de 2.

3.5.1 Résultats numériques

| $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil = 60$ | | |
|---|-----------------------------------|-----------------------------------|
| i | $y_{i,\max}^{(N)}$ | $y_{i,\min}^{(N)}$ |
| 1 | 0.91576961624328916380 | 0.91576961624328916379 |
| 5 | 0.10321629580299967044 | 0.10321629580299967038 |
| 10 | 0.00581353037003270174 | 0.00581353037003270100 |
| 15 | 0.00032738034629781662 | 0.00032738034629781261 |
| 20 | 0.00001843593794715056 | 0.00001843593794713455 |
| 25 | 0.10381924627697937337 10^{-5} | 0.10381924627186542869 10^{-5} |
| 30 | 0.58464266523450423613 10^{-7} | 0.58464266389157826824 10^{-7} |
| 35 | 0.32923283328468679792 10^{-8} | 0.32923280412468599289 10^{-8} |
| 40 | 0.18540258000034771549 10^{-9} | 0.18540205570576079581 10^{-9} |
| 45 | 0.10440670918257260761 10^{-10} | 0.10439885888225427408 10^{-10} |
| 50 | 0.58795091077701311566 10^{-12} | 0.58695403207873375878 10^{-12} |
| 55 | 0.33110344680062496678 10^{-13} | 0.31994875854522418005 10^{-13} |
| 60 | 0.19227829860516430820 10^{-14} | 0.64269894149493612264 10^{-15} |

Table 1 : Evolution des pavés $\prod_{i=1}^{\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} [y_{i,\min}^{(N)}, y_{i,\max}^{(N)}]$ for $\rho = 1.5$

| | | | | | | | |
|-----------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|
| $j \setminus i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | $8.17 \cdot 10^{-1}$ | | | | | | |
| 1 | $8.17 \cdot 10^{-2}$ | $1.5 \cdot 10^{-2}$ | | | | | |
| 2 | $7.12 \cdot 10^{-4}$ | $8.5 \cdot 10^{-4}$ | $1.6 \cdot 10^{-4}$ | | | | |
| 3 | $3.52 \cdot 10^{-6}$ | $4.2 \cdot 10^{-6}$ | $8.5 \cdot 10^{-6}$ | $1.6 \cdot 10^{-6}$ | | | |
| 4 | $1.68 \cdot 10^{-8}$ | $2.0 \cdot 10^{-8}$ | $4.0 \cdot 10^{-8}$ | $8.5 \cdot 10^{-8}$ | $1.6 \cdot 10^{-8}$ | | |
| 5 | $7.99 \cdot 10^{-11}$ | $9.5 \cdot 10^{-11}$ | $1.9 \cdot 10^{-10}$ | $4.0 \cdot 10^{-10}$ | $8.5 \cdot 10^{-10}$ | $1.6 \cdot 10^{-10}$ | |
| 6 | $3.81 \cdot 10^{-13}$ | $4.5 \cdot 10^{-13}$ | $9.2 \cdot 10^{-13}$ | $1.9 \cdot 10^{-12}$ | $4.0 \cdot 10^{-12}$ | $8.5 \cdot 10^{-12}$ | 10^{-12} |
| 7 | $1.82 \cdot 10^{-15}$ | $2.1 \cdot 10^{-15}$ | $4.3 \cdot 10^{-15}$ | $9.2 \cdot 10^{-15}$ | $1.9 \cdot 10^{-14}$ | $4.0 \cdot 10^{-14}$ | $8 \cdot 10^{-14}$ |
| 8 | $2.08 \cdot 10^{-17}$ | $1.2 \cdot 10^{-17}$ | $2.1 \cdot 10^{-16}$ | $4.3 \cdot 10^{-17}$ | $9.0 \cdot 10^{-17}$ | $1.9 \cdot 10^{-16}$ | $4 \cdot 10^{-16}$ |
| 9 | $1.24 \cdot 10^{-17}$ | $2.4 \cdot 10^{-18}$ | $4.5 \cdot 10^{-19}$ | $8.0 \cdot 10^{-20}$ | $1.3 \cdot 10^{-20}$ | $1.9 \cdot 10^{-21}$ | $2 \cdot 10^{-22}$ |
| 10 | $1.24 \cdot 10^{-17}$ | $2.4 \cdot 10^{-18}$ | $4.3 \cdot 10^{-19}$ | $7.2 \cdot 10^{-20}$ | $1.0 \cdot 10^{-20}$ | $1.3 \cdot 10^{-21}$ | $1 \cdot 10^{-22}$ |
| 11 | $1.25 \cdot 10^{-17}$ | $2.3 \cdot 10^{-18}$ | $4.0 \cdot 10^{-19}$ | $6.1 \cdot 10^{-20}$ | $7.8 \cdot 10^{-21}$ | $7.1 \cdot 10^{-22}$ | |
| 12 | $1.27 \cdot 10^{-17}$ | $2.3 \cdot 10^{-18}$ | $3.4 \cdot 10^{-19}$ | $4.6 \cdot 10^{-20}$ | $4.2 \cdot 10^{-21}$ | | |
| 13 | $1.29 \cdot 10^{-17}$ | $2.1 \cdot 10^{-18}$ | $2.8 \cdot 10^{-19}$ | $2.6 \cdot 10^{-20}$ | | | |
| 14 | $1.33 \cdot 10^{-17}$ | $1.8 \cdot 10^{-18}$ | $1.7 \cdot 10^{-19}$ | | | | |
| 15 | $1.41 \cdot 10^{-17}$ | $1.2 \cdot 10^{-18}$ | | | | | |
| 16 | $1.57 \cdot 10^{-17}$ | | | | | | |

| | | | | |
|------------|------------------------|------------------------|-----|-----------------------|
| ϵ | ϵ_0 | ϵ_1 | N | <i>Somme calculée</i> |
| 10^{-12} | $0.981 \cdot 10^{-12}$ | $0.109 \cdot 10^{-20}$ | 20 | 1.000000000000 |

Table 2 : Les probabilités $p(i, j)$ pour $\rho = 0.2$

| i | $p(i, i)$ | i | $p(i, i)$ |
|-----|-----------------------------|-----|------------------------|
| 0 | $3.159674979 \cdot 10^{-1}$ | 9 | $2.2888 \cdot 10^{-6}$ |
| 1 | $1.347035010 \cdot 10^{-1}$ | 10 | $5.722 \cdot 10^{-7}$ |
| 2 | $3.68560425 \cdot 10^{-2}$ | 11 | $1.430 \cdot 10^{-7}$ |
| 3 | $9.3490412 \cdot 10^{-3}$ | 12 | $3.57 \cdot 10^{-8}$ |
| 4 | $2.3427104 \cdot 10^{-3}$ | 13 | $8.9 \cdot 10^{-9}$ |
| 5 | $5.858959 \cdot 10^{-4}$ | 14 | $2.2 \cdot 10^{-9}$ |
| 6 | $1.464827 \cdot 10^{-4}$ | 15 | $5 \cdot 10^{-10}$ |
| 7 | $3.66210 \cdot 10^{-5}$ | 16 | $1 \cdot 10^{-10}$ |
| 8 | $9.1552 \cdot 10^{-6}$ | 17 | $3 \cdot 10^{-11}$ |

Table 3 : Les probabilités diagonales pour $\rho = 1$

| | | | | | | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| $j \setminus i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | $1.24 \cdot 10^{-1}$ | | | | | | |
| 1 | $9.30 \cdot 10^{-2}$ | $1.14 \cdot 10^{-1}$ | | | | | |
| 2 | $2.59 \cdot 10^{-2}$ | $5.92 \cdot 10^{-2}$ | $7.02 \cdot 10^{-2}$ | | | | |
| 3 | $5.64 \cdot 10^{-3}$ | $1.29 \cdot 10^{-2}$ | $3.41 \cdot 10^{-2}$ | $4.03 \cdot 10^{-2}$ | | | |
| 4 | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | $2.68 \cdot 10^{-3}$ | $7.07 \cdot 10^{-3}$ | $1.93 \cdot 10^{-2}$ | $2.27 \cdot 10^{-2}$ | | |
| 5 | $2.39 \cdot 10^{-4}$ | $5.49 \cdot 10^{-4}$ | $1.45 \cdot 10^{-3}$ | $3.95 \cdot 10^{-3}$ | $1.08 \cdot 10^{-2}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | |
| 6 | $4.89 \cdot 10^{-5}$ | $1.12 \cdot 10^{-4}$ | $2.97 \cdot 10^{-4}$ | $8.09 \cdot 10^{-4}$ | $2.22 \cdot 10^{-3}$ | $6.1 \cdot 10^{-3}$ | $7.2 \cdot 10^{-3}$ |
| 7 | $1.00 \cdot 10^{-5}$ | $2.30 \cdot 10^{-5}$ | $6.07 \cdot 10^{-5}$ | $1.65 \cdot 10^{-4}$ | $4.54 \cdot 10^{-4}$ | $1.2 \cdot 10^{-3}$ | $3.4 \cdot 10^{-3}$ |
| 8 | $2.05 \cdot 10^{-6}$ | $4.70 \cdot 10^{-6}$ | $1.24 \cdot 10^{-5}$ | $3.39 \cdot 10^{-5}$ | $9.30 \cdot 10^{-5}$ | $2.5 \cdot 10^{-4}$ | $7.0 \cdot 10^{-4}$ |
| 9 | $4.19 \cdot 10^{-7}$ | $9.61 \cdot 10^{-7}$ | $2.54 \cdot 10^{-6}$ | $6.93 \cdot 10^{-6}$ | $1.90 \cdot 10^{-5}$ | $5.2 \cdot 10^{-5}$ | $1.4 \cdot 10^{-4}$ |
| 10 | $8.56 \cdot 10^{-8}$ | $1.97 \cdot 10^{-7}$ | $5.19 \cdot 10^{-7}$ | $1.42 \cdot 10^{-6}$ | $3.89 \cdot 10^{-6}$ | $1.0 \cdot 10^{-5}$ | $2.9 \cdot 10^{-5}$ |
| 11 | $1.75 \cdot 10^{-8}$ | $4.02 \cdot 10^{-8}$ | $1.06 \cdot 10^{-7}$ | $2.90 \cdot 10^{-7}$ | $7.96 \cdot 10^{-7}$ | $2.1 \cdot 10^{-6}$ | |
| 12 | $3.58 \cdot 10^{-9}$ | $8.23 \cdot 10^{-9}$ | $2.17 \cdot 10^{-8}$ | $5.92 \cdot 10^{-8}$ | $1.63 \cdot 10^{-7}$ | | |
| 13 | $7.33 \cdot 10^{-10}$ | $1.68 \cdot 10^{-9}$ | $4.45 \cdot 10^{-9}$ | $1.21 \cdot 10^{-8}$ | | | |
| 14 | $1.50 \cdot 10^{-10}$ | $3.44 \cdot 10^{-10}$ | $9.09 \cdot 10^{-10}$ | | | | |
| 15 | $3.07 \cdot 10^{-11}$ | $7.04 \cdot 10^{-11}$ | | | | | |
| 16 | $6.27 \cdot 10^{-12}$ | | | | | | |

| | | | | |
|------------|------------------------|------------------------|-----|-----------------------|
| ϵ | ϵ_0 | ϵ_1 | N | <i>Somme calculée</i> |
| 10^{-12} | $0.102 \cdot 10^{-11}$ | $0.127 \cdot 10^{-11}$ | 96 | 1.000000000000 |

Table 4 : Un échantillon des probabilités $p(i, j)$ pour $\rho = 1.5$

| $n = i + j \setminus i$ | $\frac{n}{2} - 3$ | $\frac{n}{2} - 2$ | $\frac{n}{2} - 1$ | $\frac{n}{2}$ |
|-------------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0 | | | | $4.22 \cdot 10^{-2}$ |
| 4 | | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | $1.04 \cdot 10^{-2}$ | $4.85 \cdot 10^{-2}$ |
| 8 | $6.42 \cdot 10^{-5}$ | $6.45 \cdot 10^{-4}$ | $6.65 \cdot 10^{-3}$ | $3.26 \cdot 10^{-2}$ |
| 10 | $5.03 \cdot 10^{-5}$ | $5.19 \cdot 10^{-4}$ | $5.38 \cdot 10^{-3}$ | $2.64 \cdot 10^{-2}$ |
| 12 | $4.05 \cdot 10^{-5}$ | $4.20 \cdot 10^{-4}$ | $4.36 \cdot 10^{-3}$ | $2.14 \cdot 10^{-2}$ |
| 16 | $2.65 \cdot 10^{-5}$ | $2.75 \cdot 10^{-4}$ | $2.86 \cdot 10^{-3}$ | $1.41 \cdot 10^{-2}$ |
| 20 | $1.74 \cdot 10^{-5}$ | $1.81 \cdot 10^{-4}$ | $1.87 \cdot 10^{-3}$ | $9.22 \cdot 10^{-3}$ |
| 30 | $6.06 \cdot 10^{-6}$ | $6.30 \cdot 10^{-5}$ | $6.54 \cdot 10^{-4}$ | $3.21 \cdot 10^{-3}$ |
| 40 | $2.12 \cdot 10^{-6}$ | $2.19 \cdot 10^{-5}$ | $2.27 \cdot 10^{-4}$ | $1.12 \cdot 10^{-3}$ |
| 50 | $7.37 \cdot 10^{-7}$ | $7.66 \cdot 10^{-6}$ | $7.95 \cdot 10^{-5}$ | $3.91 \cdot 10^{-4}$ |
| 60 | $2.57 \cdot 10^{-7}$ | $2.67 \cdot 10^{-6}$ | $2.77 \cdot 10^{-5}$ | $1.36 \cdot 10^{-4}$ |
| 70 | $9.02 \cdot 10^{-8}$ | $9.30 \cdot 10^{-7}$ | $9.66 \cdot 10^{-6}$ | $4.75 \cdot 10^{-5}$ |
| 80 | $3.25 \cdot 10^{-8}$ | $3.24 \cdot 10^{-7}$ | $3.36 \cdot 10^{-6}$ | $1.65 \cdot 10^{-5}$ |
| 90 | $1.26 \cdot 10^{-8}$ | $1.11 \cdot 10^{-7}$ | $1.15 \cdot 10^{-6}$ | $5.67 \cdot 10^{-6}$ |
| 100 | $4.82 \cdot 10^{-9}$ | $3.31 \cdot 10^{-8}$ | $3.53 \cdot 10^{-7}$ | $1.79 \cdot 10^{-6}$ |
| 110 | $7.59 \cdot 10^{-10}$ | $3.14 \cdot 10^{-9}$ | $5.75 \cdot 10^{-8}$ | $3.64 \cdot 10^{-7}$ |

| ϵ | ϵ_0 | ϵ_1 | N | <i>Somme calculée</i> |
|------------|------------------------|------------------------|-----|-----------------------|
| 10^{-10} | $0.155 \cdot 10^{-10}$ | $0.480 \cdot 10^{-10}$ | 230 | 1.0000000000 |

Table 5 : Un échantillon des probabilités $p(i, j)$ pour $\rho = 1.8$

| $0 \leq i \leq 22$ | $23 \leq i \leq 45$ | $46 \leq i \leq 64$ | $65 \leq i \leq 87$ | $88 \leq i \leq 110$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| $1.99 \cdot 10^{-2}$ | $3.36 \cdot 10^{-3}$ | $2.87 \cdot 10^{-4}$ | $271 \cdot 10^{-5}$ | $2.53 \cdot 10^{-6}$ |
| $2.85 \cdot 10^{-2}$ | $3.03 \cdot 10^{-3}$ | $2.58 \cdot 10^{-4}$ | $2.44 \cdot 10^{-5}$ | $2.28 \cdot 10^{-6}$ |
| $2.82 \cdot 10^{-2}$ | $2.74 \cdot 10^{-3}$ | $2.33 \cdot 10^{-4}$ | $2.20 \cdot 10^{-5}$ | $2.05 \cdot 10^{-6}$ |
| $2.60 \cdot 10^{-2}$ | $2.47 \cdot 10^{-3}$ | $2.11 \cdot 10^{-4}$ | $1.99 \cdot 10^{-5}$ | $1.84 \cdot 10^{-6}$ |
| $2.36 \cdot 10^{-2}$ | $2.23 \cdot 10^{-3}$ | $1.90 \cdot 10^{-4}$ | $1.79 \cdot 10^{-5}$ | $1.65 \cdot 10^{-6}$ |
| $2.13 \cdot 10^{-2}$ | $2.01 \cdot 10^{-3}$ | $1.72 \cdot 10^{-4}$ | $1.62 \cdot 10^{-5}$ | $1.48 \cdot 10^{-6}$ |
| $1.92 \cdot 10^{-2}$ | $1.82 \cdot 10^{-3}$ | $1.55 \cdot 10^{-4}$ | $1.46 \cdot 10^{-5}$ | $1.32 \cdot 10^{-6}$ |
| $1.73 \cdot 10^{-2}$ | $1.64 \cdot 10^{-3}$ | $1.40 \cdot 10^{-4}$ | $1.32 \cdot 10^{-5}$ | $1.17 \cdot 10^{-6}$ |
| $1.57 \cdot 10^{-2}$ | $1.48 \cdot 10^{-3}$ | $1.26 \cdot 10^{-4}$ | $1.19 \cdot 10^{-5}$ | $1.04 \cdot 10^{-6}$ |
| $1.41 \cdot 10^{-2}$ | $1.34 \cdot 10^{-3}$ | $1.14 \cdot 10^{-4}$ | $1.07 \cdot 10^{-5}$ | $9.25 \cdot 10^{-7}$ |
| $1.27 \cdot 10^{-2}$ | $1.20 \cdot 10^{-3}$ | $1.03 \cdot 10^{-4}$ | $9.71 \cdot 10^{-6}$ | $8.16 \cdot 10^{-7}$ |
| $1.15 \cdot 10^{-2}$ | $1.09 \cdot 10^{-3}$ | $9.27 \cdot 10^{-5}$ | $8.76 \cdot 10^{-6}$ | $7.16 \cdot 10^{-7}$ |
| $1.04 \cdot 10^{-2}$ | $8.86 \cdot 10^{-4}$ | $8.37 \cdot 10^{-5}$ | $07.90 \cdot 10^{-6}$ | $6.24 \cdot 10^{-7}$ |
| $9.38 \cdot 10^{-3}$ | $7.99 \cdot 10^{-4}$ | $7.55 \cdot 10^{-5}$ | $7.13 \cdot 10^{-6}$ | $5.40 \cdot 10^{-7}$ |
| $8.46 \cdot 10^{-3}$ | $7.22 \cdot 10^{-4}$ | $6.81 \cdot 10^{-5}$ | $6.43 \cdot 10^{-6}$ | $4.61 \cdot 10^{-7}$ |
| $7.64 \cdot 10^{-3}$ | $6.51 \cdot 10^{-4}$ | $6.15 \cdot 10^{-5}$ | $5.81 \cdot 10^{-6}$ | $3.90 \cdot 10^{-7}$ |
| $6.89 \cdot 10^{-3}$ | $5.88 \cdot 10^{-4}$ | $5.55 \cdot 10^{-5}$ | $5.24 \cdot 10^{-6}$ | $3.24 \cdot 10^{-7}$ |
| $6.22 \cdot 10^{-3}$ | $5.30 \cdot 10^{-4}$ | $5.01 \cdot 10^{-5}$ | $4.73 \cdot 10^{-6}$ | $2.64 \cdot 10^{-7}$ |
| $5.62 \cdot 10^{-3}$ | $4.79 \cdot 10^{-4}$ | $4.52 \cdot 10^{-5}$ | $4.26 \cdot 10^{-6}$ | $2.08 \cdot 10^{-7}$ |
| $5.07 \cdot 10^{-3}$ | $4.32 \cdot 10^{-4}$ | $4.08 \cdot 10^{-5}$ | $3.84 \cdot 10^{-6}$ | $1.57 \cdot 10^{-7}$ |
| $4.57 \cdot 10^{-3}$ | $3.90 \cdot 10^{-4}$ | $3.68 \cdot 10^{-5}$ | $3.46 \cdot 10^{-6}$ | $1.11 \cdot 10^{-7}$ |
| $4.13 \cdot 10^{-3}$ | $3.18 \cdot 10^{-4}$ | $3.32 \cdot 10^{-5}$ | $3.12 \cdot 10^{-6}$ | $6.74 \cdot 10^{-8}$ |
| $3.73 \cdot 10^{-3}$ | $3.52 \cdot 10^{-4}$ | $3.00 \cdot 10^{-5}$ | $2.81 \cdot 10^{-6}$ | $2.66 \cdot 10^{-8}$ |

Table 6 : Les probabilités diagonales pour $\rho = 1.9$

| | | | | | | | |
|-----------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $i \setminus j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | $1.99 \cdot 10^{-2}$ | | | | | | |
| 1 | $1.89 \cdot 10^{-2}$ | $2.85 \cdot 10^{-2}$ | | | | | |
| 2 | $7.56 \cdot 10^{-3}$ | $1.95 \cdot 10^{-2}$ | $2.82 \cdot 10^{-2}$ | | | | |
| 3 | $2.44 \cdot 10^{-3}$ | $6.32 \cdot 10^{-3}$ | $1.81 \cdot 10^{-2}$ | $2.60 \cdot 10^{-2}$ | | | |
| 4 | $7.55 \cdot 10^{-4}$ | $1.96 \cdot 10^{-3}$ | $5.60 \cdot 10^{-3}$ | $1.64 \cdot 10^{-2}$ | $2.36 \cdot 10^{-2}$ | | |
| 5 | $2.31 \cdot 10^{-4}$ | $6.00 \cdot 10^{-4}$ | $1.72 \cdot 10^{-3}$ | $5.03 \cdot 10^{-3}$ | $1.48 \cdot 10^{-2}$ | $2.13 \cdot 10^{-2}$ | |
| 6 | $7.08 \cdot 10^{-5}$ | $1.84 \cdot 10^{-4}$ | $5.26 \cdot 10^{-4}$ | $1.54 \cdot 10^{-3}$ | $4.54 \cdot 10^{-3}$ | $1.34 \cdot 10^{-2}$ | $1.92 \cdot 10^{-2}$ |
| 7 | $2.17 \cdot 10^{-5}$ | $5.62 \cdot 10^{-5}$ | $1.61 \cdot 10^{-4}$ | $4.71 \cdot 10^{-4}$ | $1.39 \cdot 10^{-3}$ | $4.09 \cdot 10^{-3}$ | $1.21 \cdot 10^{-5}$ |
| 8 | $6.63 \cdot 10^{-6}$ | $1.72 \cdot 10^{-5}$ | $4.92 \cdot 10^{-5}$ | $1.44 \cdot 10^{-4}$ | $4.24 \cdot 10^{-4}$ | $1.25 \cdot 10^{-3}$ | $3.69 \cdot 10^{-3}$ |
| 9 | $2.03 \cdot 10^{-6}$ | $5.26 \cdot 10^{-6}$ | $1.51 \cdot 10^{-5}$ | $4.41 \cdot 10^{-5}$ | $1.30 \cdot 10^{-4}$ | $3.83 \cdot 10^{-4}$ | $1.13 \cdot 10^{-3}$ |
| 10 | $6.21 \cdot 10^{-7}$ | $1.61 \cdot 10^{-6}$ | $4.61 \cdot 10^{-6}$ | $1.35 \cdot 10^{-5}$ | $3.98 \cdot 10^{-5}$ | $1.17 \cdot 10^{-4}$ | $3.46 \cdot 10^{-4}$ |
| 11 | $1.90 \cdot 10^{-7}$ | $4.92 \cdot 10^{-7}$ | $1.41 \cdot 10^{-6}$ | $4.13 \cdot 10^{-6}$ | $1.22 \cdot 10^{-5}$ | $3.59 \cdot 10^{-5}$ | |
| 12 | $5.81 \cdot 10^{-8}$ | $1.51 \cdot 10^{-7}$ | $4.31 \cdot 10^{-7}$ | $1.26 \cdot 10^{-6}$ | $3.72 \cdot 10^{-6}$ | | |
| 13 | $1.78 \cdot 10^{-8}$ | $4.61 \cdot 10^{-8}$ | $1.32 \cdot 10^{-7}$ | $3.86 \cdot 10^{-7}$ | | | |
| 14 | $5.44 \cdot 10^{-9}$ | $1.41 \cdot 10^{-8}$ | $4.03 \cdot 10^{-8}$ | | | | |
| 15 | $1.66 \cdot 10^{-9}$ | $4.31 \cdot 10^{-9}$ | | | | | |
| 16 | $5.09 \cdot 10^{-10}$ | | | | | | |

| | | | | |
|------------|---------------------|---------------------|-----|--------------------------|
| ϵ | ϵ_0 | ϵ_1 | N | <i>la somme calculée</i> |
| 10^{-5} | $0.2 \cdot 10^{-6}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ | 226 | 1.00000 |

Table 7 : Un échantillon des probabilités $p(i, j)$ pour $\rho = 1.9$

3.5.2 Commentaires des résultats

Il faut d'abord noter que les probabilités $p(i, j)$ sont calculées de telle sorte que la différence de leur somme $\sum p(i, j)$ et sa vraie valeur est plus petite qu'une valeur choisie pour ϵ . Les résultats obtenus par cette méthode sont en accord avec ceux de Zhao-Grassmann [8] pour $\frac{\lambda}{2\mu} = 0.9$ (on a ici

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1.8$). Cependant, cette méthode est beaucoup plus précise pour différentes valeurs de ρ comme :

- $\rho = 0.2$ (qui correspond à $\rho = 0.1$ dans [8]) on a :

pour une erreur de l'ordre 10^{-30} on obtient par la présente méthode $p(2, 2) = 0.0001625530804694$ et dans la table 1 de [8] on voit que $I = 2$ où I est le premier entier vérifiant $p(I, I) \leq \epsilon_2 = 10^{-5}$, la valeur donc calculée de $p(2, 2)$ dans cette thèse et celle calculée dans [8] sont différentes.

- $\rho = 0.4$ (qui correspond à $\rho = 0.2$ dans [8]) on a :

pour une erreur de l'ordre 10^{-30} on obtient par la présente méthode: $p(3, 3) = 0.000083742363$, et dans la table 1 de [8] on lit $I = 3$ qui signifie que

$p(I, I) \leq \epsilon_2 = 10^{-5}$, donc les valeurs de $p(3, 3)$ calculées dans cette thèse et dans [8] sont différentes.

- $\rho = 1.6$ (qui correspond à $\rho = 0.8$ dans [8]) on a :

pour une erreur de l'ordre 10^{-11} la présente méthode donne : $p(22, 22) = 0.93334 \times 10^{-5}$ qui signifie que le premier entier I vérifiant la propriété $p(I, I) \leq \epsilon_2 = 10^{-5}$ est 22 et non 25 comme reporté dans la table 1 de [8]. On obtient aussi : $p(48, 48) = 0.85166 \times 10^{-10}$ et dans [8] $p(51, 51)$ est supposée être la première probabilité plus petite que $\epsilon_2 = 10^{-10}$.

Beaucoup de différences sont alors observées pour plusieurs valeurs de ρ .

La puissance de la méthode présentée dans cette thèse est aussi révélée par la possibilité de faire des calculs pour de grandes valeurs de ρ et ceci est par exemple fait pour $\rho = 1.9$ or $\left(\frac{\lambda}{2\mu} = 0.95\right)$. Comme noté précédemment, l'erreur faite sur la somme totale des probabilités est facilement contrôlable au moyen de ses bornes supérieures données dans Halfin [7]. Il est clair aussi que l'erreur faite sur les probabilités d'état est bornée par l'erreur faite sur leur somme. On remarque aussi que pour presque toutes les valeurs de ρ pour lesquels les calculs sont faits, la précision sur le calcul de la somme des probabilités est meilleure que celle donnée dans la table 1 de [8].

Chapitre 4

Etude de deux files d'attente $M/M/\infty$ parallèles avec discipline JSQ

4.1 Introduction (H. Yao ; C. Knessl)

On considère un système de deux files d'attente parallèles ayant un flux d'arrivée poissonien commun de taux λ . Chacune des deux files a un nombre de serveurs infini. Les clients se dirigent vers alors vers la file la plus courte. On suppose chaque durée de service est exponentielle de taux μ et qu'il n'y a pas de transfert d'une file vers l'autre. A présent, seuls H. Yao et C. Knessl ont consacré des travaux sur ce sujet. Ce type de file d'attente est beaucoup utilisé dans les réseaux à canaux multiples plus connus sous le nom de réseaux CDMA (Code Division Multiple Access). On exposera dans un premier temps les travaux des deux auteurs suivis d'une méthode de résolution du problème avec les outils contenus dans cette thèse.

4.2 Position du problème et équations d'équilibre (H. Yao ; C. Knessl) [4]

Soit $X_j(t)$: le nombre de clients dans la file j pour $j=1, 2$ à l'instant t . On note alors $X_j = \lim_{t \rightarrow \infty} X_j(t)$ et $p(m, n) = p[X_1 = m, N_2 = n]$. On pose

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Proposition 4.2.1. *Les équations d'équilibre s'écrivent alors :*

$$(\rho + m + n)p(m, n) = \rho p(m, n - 1) + (m + 1)p(m + 1, n) + (n + 1)p(m, n + 1)$$

avec $m > n + 1$, $n > 0$.

Les équations aux bords de la diagonale s'écrivent :

$$(\rho + 2n + 1)p(n + 1, n) = \frac{\rho}{2}p(n, n) + \rho p(n + 1, n - 1) + (n + 2)p(n + 2, n) + (n + 1)p(n + 1, n + 1)$$

$n > 0$

$$\begin{aligned} (\rho + 2n)p(n, n) &= \rho p(n, n - 1) + \rho p(n - 1, n) + (n + 1)p(n + 1, n) \\ &\quad + (n + 1)p(n, n + 1) \\ &= 2\rho p(n, n - 1) + 2(n + 1)p(n + 1, n), \end{aligned}$$

Remarque 18. Pour des raisons de symétrie on a $p(m, n) = p(n, m)$. On ne considérera que le calcul de $p(m, n)$ pour $m \geq n$ et on conviendra $p(m, -1) = 0$ dans les équations précédentes. Les équations de normalisation de la probabilité stationnaire s'écriront alors :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(m, n) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, n) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} p(m, n) = 1.$$

Proposition 4.2.2. *Pour $l = m - n$, on posera dans la suite : $p(m, n) = q(m - n, n) = q(l, n)$.*

Les équations s'écriront de nouveau :

$$(\rho + 2n + l)q(l, n) = \rho q(l + 1, n - 1) + (n + l + 1)q(l + 1, n) + (n + 1)q(n - 1, n + 1)$$

et $l \geq 2$

$$(\rho + 2n + 1)q(1, n) = \frac{\rho}{2}q(0, n) + \rho q(2, n - 1) + (n + 2)q(2, n) + (n + 1)q(0, n + 1)$$

et :

$$(\rho + 2n)q(0, n) = 2\rho q(1, n-1) + 2(n+1)q(1, n)$$

et les équations de normalisation deviennent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(0, n) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} q(l, n) = 1.$$

Théorème 4.2.3. Soit $G(z, w) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^l w^n q(l, n)$, alors G est solution d'une équation aux dérivées partielles dont le développement de WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) donne pour de grandes valeurs de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ les approximations des probabilités stationnaires par :

$$p(n, n) = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{\pi\rho}(1+4y)} e^{\phi(y)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \text{ où } \phi(y) = 2y - 1 - 2y \log(2y).$$

Pour $m > n$, on pose $(x, y) = \frac{1}{\rho}(m, n)$ et on obtient :

$$p(m, n) = P(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} K(x, y) e^{\rho\Phi(x, y)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= 2s - 1 + \frac{2s+1}{4s+1} (1 - e^t) \\ &+ \left[\frac{1 - e^{-t}}{2(4s+1)} - s \right] \log \left[1 - (1 - 4s)(1 + 2s)e^t \right] \\ &+ \left(\frac{4s-1}{2} e^{-t} + 1 \right) \left(\frac{1+2s}{1+4s} e^t - 1 \right) \log \left[1 - \frac{1+2s}{1+4s} e^t \right] \end{aligned}$$

et

$$K(x, y) = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s^2(2s+1)e^t}{(4s+1)[\Delta(s, t)]^{\frac{1}{2}}} \left[1 - (1 - 2s - 8s^2)e^t \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1+2s}{1+4s} e^t \right]^{-\frac{1}{2}}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta(s, t) &= -\frac{8s}{(4s+1)^2} e^{-2t} + \frac{8s^2(16s^2+8s+3)}{(4s+1)^3} e^{-t} \\ &- \frac{(4s+3)}{(4s+1)^3} + \frac{(2s+1)(16s^2+8s+3)e^t}{(4s+1)^3} \end{aligned}$$

où (x, y) est la transformée du couple (s, t) par :

$$x = \frac{1}{2(1+4s)} (e^{-t} - 1 + 2s + 8s^2) \text{ et } y = \left(e^{-t} - \frac{1+2s}{1+4s} \right) \left(e^t + \frac{4s-1}{2} \right).$$

Remarque 19. Au lieu de considérer deux files MM/ ∞ , on considère deux files M/M/ N_0/N_0 ou un client rejoint une file avec la discipline JSQ. Un client est perdu dès que le système est plein. Pour ρ fixé, ce modèle de perte de clients approchera alors le système considéré si $N_0 \rightarrow \infty$. Le système des probabilités conjointes sera alors ramené à un système récurrent unidimensionnel.

Notation 4. On pose

$$A(m, L) = \frac{(-1)^m}{m!(L-m)!} \text{ pour } L \geq m$$

et

$$B(L, n) = \sum_{i=0}^n \frac{(L+i-1)!}{(L-1)!} \frac{\rho^{n-i}}{(n-i)!i!}$$

avec $B(L, 0) = 1$ et $B(L, -1) = 0$ pour tout $L \geq 0$.

Proposition 4.2.4. $A(m, L)$ et $B(L, n)$ satisfont les équations de récurrence suivantes :

$$A(m+1, L)(m+1) = (m-L)A(m, L)$$

$$(\rho + n + L)B(L, n) = \rho B(L, n-1) + (n+1)B(L, n+1)$$

Donc $A(m, L)B(L, n)$ satisfait les équations stationnaires pour $L \geq 0$.

Remarque 20. On cherche alors une solution du système de la forme :

$$p(m, n) = \sum_{L=m}^{\infty} d_L A(m, L) B(L, n) \text{ pour } m \geq n + 1.$$

Les coefficients d_L sont choisis de telle sorte que les équations aux bords de la diagonale soient aussi satisfaites. Ces dernières sont d'ailleurs utilisées pour éliminer les probabilités diagonales $p(m, m)$

Proposition 4.2.5. On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{2m(m+1)}{\rho+2m} p(m+1, m) + (m+1) p(m+1, m-1) \\
& + \left[\frac{2m\rho}{\rho+2m} - (\rho+2m-1) + \frac{m\rho}{\rho+2m-2} \right] p(m, m-1) \\
& + \rho p(m, m-2) + \frac{\rho^2}{\rho+2m-2} p(m-1, m-2)
\end{aligned}$$

$m \geq 2$.

Les d_L sont alors solution du système linéaire infini $\sum_{j=i}^{\infty} k(i, j) d_j = 0, i \geq 1$
où :

$$k(i, i) = a_4(i+1) A(i, i) B(i, i-1)$$

$$\begin{aligned}
k(i, i+1) &= a_4(i+1) A(i, i+1) B(i+1, i-1) \\
&+ \rho A(i+1, i+1) B(i+1, i-1) \\
&+ a_3(i+1) A(i+1, i+1) B(i+1, i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(i, j) &= a_4(i+1) A(i, j) B(j, i-1) + \rho A(i+1, j) B(j, i-1) \\
&+ a_3(i+1) A(i+1, j) B(j, i) + a_2(i+1) A(i+2, j) B(j, i) \\
&+ a_1(i+1) A(i+2, j) B(j, i+1)
\end{aligned}$$

$j \geq i+2$
avec

$$a_1(i) = \frac{2i(i+1)}{\rho+2i},$$

$$a_2(i) = i+1,$$

$$a_3(i) = \frac{2i\rho}{\rho+2i} - (\rho+2i-1) + \frac{i\rho}{\rho+2i-2}$$

et

$$a_4(i) = \frac{\rho^2}{\rho+2i-2}.$$

Remarque 21. Pour résoudre le système linéaire infini $\sum_{j=i}^{\infty} k(i, j) d_j = 0, i \geq 1$, on fait une troncature à $i = N$ et on résoud le système pour $1 \leq i \leq N-1$ et

on pose $d_N = T$. Les d_L sont alors calculés par une récurrence descendante, d'où l'on obtient :

$$d_{N-J} = \frac{1}{k(N-J, N-J)} \left[\sum_{l=0}^{j-1} k(N-J, N-l) d_{N-L} \right]; \quad j = 1, \dots, N-1.$$

En notant $\sum_{L=m}^N d_L A(m, L) B(L, n) = Q(m, n, N)$, $Q(m, n, N)$ peut alors être calculé à partir des équations précédentes en termes de d_L . Soit alors $M = \sum_{n=0}^N Q(n, n, N) + 2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=n+1}^N Q(m, n, N)$.

La probabilité stationnaire $p(m, n)$ est alors approché par : $p(m, n) \approx \frac{Q(m, n, N)}{M}$.

Remarque 22. En plus des erreurs de double troncature (sur le nombre de serveurs et le nombre de clients) engendrée , cette méthode adaptée à ce cas est difficilement généralisable à des cas complexes vu la structure de la solution de base (les $A(m, L)$ et les $B(L, n)$ ne seront pas simples à construire).

4.3 Nouvelle approche numérique de la solution stationnaire(T. Lardjane et R. Messaci)

Proposition 4.3.1. *Le processus $(X_1(t), X_2(t))_t$ est un processus de Markov recurrent positif. En notant $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$, la distribution stationnaire de $Z(t)$ est donnée par $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z(t) = i) = \frac{\exp(-\rho)}{i!} \rho^i$ avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$*

Notation 5. Pour $k \geq 1$ on définit les $(k+1) \times 1$ vecteurs et $(k+1) \times (k+1)$ matrices

$$X_{2k} = \begin{pmatrix} p(2k, 0) \\ p(2k-1, 1) \\ \vdots \\ p(k+1, k-1) \\ p(k, k) \end{pmatrix}, \quad X_{2k+1} = \begin{pmatrix} p(2k+1, 0) \\ p(2k, 1) \\ \vdots \\ p(k+2, k-1) \\ p(k+1, k) \end{pmatrix},$$

$$A_{2k} = \begin{pmatrix} 2k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2k-1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{2k+1} = \begin{pmatrix} 2k+1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2k & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k \\ 0 & & \cdots & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} (1+\rho)p(1,0) - \frac{\rho}{2}p(0,0) \\ p(1,1) \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} (2+\rho)p(2,0) \\ (2+\rho)p(1,1) - 2\rho p(1,0) \end{pmatrix},$$

et pour $k \geq 2$,

$$B_{2k} = \begin{pmatrix} (\rho + (2k-1))p(2k-1,0) \\ (\rho + (2k-1))p(2k-2,1) - \rho p(2k-2,0) \\ \vdots \\ (\rho + (2k-1))p(k, k-1) - \rho p(k, k-2) - \frac{\rho}{2}p(k-1, k-1) \\ p(k, k) \end{pmatrix},$$

$$B_{2k+1} = \begin{pmatrix} (2k+\rho)p(2k,0) \\ (2k+\rho)p(2k-1,1) - \rho p(2k-1,0) \\ (2k+\rho)p(2k-2,2) - \rho p(2k-2,1) \\ \vdots \\ (2k+\rho)p(k+1, k-1) - \rho p(k+1, k-2) \\ (2k+\rho)p(k, k) - 2\rho p(k, k-1) \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.3.2. *Le système d'équations en régime stationnaire du processus $(X_t, Y_t)_t$ peut alors s'écrire :*

$$A_{2k}X_{2k} = B_{2k} \text{ et } A_{2k+1}X_{2k+1} = B_{2k+1}, \text{ pour } k \geq 1.$$

Démonstration. Les deux premières équation s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} p(0,1) &= p(1,0) = \frac{\lambda}{2\mu}p(0,0) = \frac{\rho}{2}p(0,0) \\ (1+\rho)p(1,0) &= \frac{\rho}{2}p(0,0) + 2p(2,0) + p(1,1), \end{aligned}$$

et qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A_2 X_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(2,0) \\ p(1,1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+\rho)p(1,0) - \frac{\rho}{2}p(0,0) \\ p(1,1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $p(0,0) = \exp(-\rho)$.

pour tout $n \geq 1$, comme montré dans le diagramme de transition de la figure 4; le système des équations stationnaires exprime les probabilités $\{p(i,j) : i+j = n+1\}$ en terme des probabilités $(p(i,j) : i+j = n)$ et $(p(i,j) : i+j = n-1)$. On distingue alors deux cas :

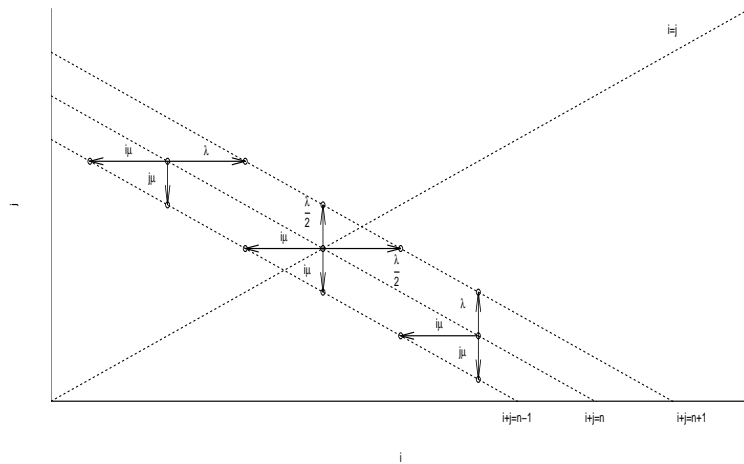


FIGURE 4.1 – Le diagramme de transition

A cause de la symétrie, le système des $(k+1)$ équations d'équilibre est réduit à :

$$(\lambda + (2k-1)\mu)p(2k-1,0) = (2k)\mu p(2k,0) + \mu p(2k-1,1),$$

pour $0 < i < k-1$,

Ce système est équivalent à ;

$$(2k)p(2k,0) + p(2k-1,1) = (\rho + (2k-1))p(2k-1,0),$$

pour $0 < i < k - 1$,

$$kp(k, k) + (k + 1)p(k + 1, k - 1) = (\rho + (2k - 1))p(k, k - 1) - \frac{\rho}{2}p(k - 1, k - 1) - \rho p(k, k - 2),$$

et qui est de la forme :

$$A_{2k}X_{2k} = B_{2k}.$$

Cas 2 : $n = 2k + 1$ et $k \geq 1$.

Aussi, pour des raisons de symétrie, le système d'équations stationnaires peut s'écrire :

$$(\lambda + 2k\mu)p(2k, 0) = (2k + 1)\mu p(2k + 1, 0) + \mu p(2k, 1),$$

pour $0 < i < k$ et

$$(\lambda + 2k\mu)p(k, k) = 2\lambda p(k, k - 1) + 2(k + 1)\mu p(k + 1, k).$$

Comme c'est déjà fait pour le cas $n = 2k$, on isole dans les premiers membres des équations $\{p(i, j) : i + j = 2k + 1\}$ ce qui conduit donc à la forme :

$$A_{2k+1}X_{2k+1} = B_{2k+1}.$$

□

Proposition 4.3.3. *Les composantes des vecteurs X_{2k} sont de la forme :*

$$\sum_{i=1}^k \alpha_{i,j}^{(2k)} p(i, i) + \alpha_{0,j}^{(2k)},$$

$1 \leq j \leq k + 1$; $\alpha_{i,j}^{(2k)} \in \mathbb{R}$,

et celles des vecteurs X_{2k+1} sont de la forme :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_{i,j}^{(2k+1)} p(i, i) + \alpha_{0,j}^{(2k+1)},$$

$1 \leq j \leq k + 1$; $\alpha_{i,j}^{(2k+1)} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On utilise un raisonnement par récurrence, la proposition est vraie pour $k = 1$. Le système des équations stationnaires devient :

$$A_2X_2 = B_2,$$

où :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} p(2,0) \\ p(1,1) \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} (1+\rho)p(1,0) - \frac{\rho}{2}p(0,0) \\ p(1,1) \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} X_2 &= \begin{pmatrix} p(2,0) \\ p(1,1) \end{pmatrix} = A_2^{-1}B_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\rho+1)\frac{\rho}{2}\exp(-\rho) - \frac{\rho}{2}\exp(-\rho) \\ p(1,1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho} - \frac{1}{2}p(1,1) \\ p(1,1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\alpha_{1,1}^{(2)} = -\frac{1}{2}$, $\alpha_{0,1}^{(2)} = \frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho}$, $\alpha_{1,2}^{(2)} = 1$ et $\alpha_{0,2}^{(2)} = 0$.

on a aussi :

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} (2+\rho)p(2,0) \\ (2+\rho)p(1,1) - 2\rho p(1,0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p(1,1) - \frac{1}{2}\rho p(1,1) + \frac{1}{2}\rho^2e^{-\rho} + \frac{1}{4}\rho^3e^{-\rho} \\ 2p(1,1) + \rho p(1,1) - \rho^2e^{-\rho} \end{pmatrix}, \\ X_3 &= \begin{pmatrix} p(3,0) \\ p(2,1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p(1,1) - \frac{1}{2}\rho p(1,1) + \frac{1}{2}\rho^2e^{-\rho} + \frac{1}{4}\rho^3e^{-\rho} \\ 2p(1,1) + \rho p(1,1) - \rho^2e^{-\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho} - \frac{1}{2}p(1,1) + \frac{1}{12}\rho^3e^{-\rho} - \frac{1}{4}\rho p(1,1) \\ \frac{1}{2}p(1,1) - \frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho} + \frac{1}{4}\rho p(1,1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\rho\right)p(1,1) + \frac{1}{12}\rho^3e^{-\rho} + \frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\rho\right)p(1,1) - \frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d'où : $\alpha_{1,1}^{(3)} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\rho\right)$, $\alpha_{0,1}^{(3)} = \frac{1}{12}\rho^3e^{-\rho} + \frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho}$, $\alpha_{1,2}^{(3)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\rho\right)$ et $\alpha_{0,2}^{(3)} = -\frac{1}{4}\rho^2e^{-\rho}$.

Si on suppose donc la proposition vraie jusqu'à l'ordre $(2k-1)$ la relation $A_{2k}X_{2k} = B_{2k}$ ou $X_{2k} = A_{2k}^{-1}B_{2k}$ donne les composantes du vecteur X_{2k} comme combinaisons linéaires des composantes du vecteur B_{2k} qui sont elles mêmes de la forme désirée (B_{2k} est donnée en termes des composantes de X_{2k-2} et X_{2k-1}). La même preuve est valide si on suppose que la proposition est vraie jusqu'à l'ordre $(2k)$.

Cette proposition montre aussi que les coefficients $\alpha_{i,j}^{(n)}$ sont obtenus de façon recursive à partir de $\alpha_{i,j}^{(n-1)}$ $\alpha_{i,j}^{(n-2)}$ pour $n \geq 4$. \square

Notation 6. On introduit dans les sections suivantes les nombres reels notés $r(i, j)$ en posant :

$$r(0, 0) = p(0, 0) = \exp(-\rho) \text{ et } r(0, 1) = r(1, 0) = p(0, 1) = \frac{\rho}{2} \exp(-\rho).$$

pour $i + j \geq 2$, on pose : $r(i, i) = x_i \in]0, 1[$ et $r(i, j)$ est défini de la même façon que $p(i, j)$; on introduit donc les notations suivantes :

$$Y_{2k} = \begin{pmatrix} r(2k, 0) \\ r(2k-1, 1) \\ \vdots \\ r(k+1, k-1) \\ r(k, k) \end{pmatrix}, \quad Y_{2k+1} = \begin{pmatrix} r(2k+1, 0) \\ r(2k, 1) \\ \vdots \\ r(k+2, k-1) \\ r(k+1, k) \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} (1+\rho)r(1,0) - \frac{\rho}{2}r(0,0) \\ r(1,1) \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} (2+\rho)r(2,0) \\ (2+\rho)r(1,1) - 2\rho r(1,0) \end{pmatrix},$$

$$D_{2k} = \begin{pmatrix} (\rho + (2k-1))r(2k-1,0) \\ (\rho + (2k-1))r(2k-2,1) - \rho r(2k-2,0) \\ \vdots \\ (\rho + (2k-1))r(k, k-1) - \rho r(k, k-2) - \frac{\rho}{2}r(k-1, k-1) \\ r(k, k) \end{pmatrix},$$

$$D_{2k+1} = \begin{pmatrix} (2k+\rho)r(2k,0) \\ (2k+\rho)r(2k-1,1) - \rho r(2k-1,0) \\ (2k+\rho)r(2k-2,2) - \rho r(2k-2,1) \\ \vdots \\ (2k+\rho)r(k+1, k-1) - \rho r(k+1, k-2) \\ (2k+\rho)r(k, k) - 2\rho r(k, k-1) \end{pmatrix}.$$

les vecteurs Y_{2k} et Y_{2k+1} sont alors définis par les formules récursives suivantes :

$$A_{2k}Y_{2k} = D_{2k} \text{ et } A_{2k+1}Y_{2k+1} = D_{2k+1}, \text{ pour } k \geq 1.$$

les composantes des vecteurs Y_{2k} et Y_{2k+1} sont alors de la forme :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_{i,j}^{(2k)} r(i, i) + \alpha_{0,j}^{(2k)} \quad (\text{resp. } \sum_{i=1}^k \alpha_{i,j}^{(2k+1)} r(i, i) + \alpha_{0,j}^{(2k+1)}),$$

ou

$$\sum_{i=1}^k \alpha_{i,j}^{(2k)} x_i + \alpha_{0,j}^{(2k)} \quad (\text{resp.} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_{i,j}^{(2k+1)} x_i + \alpha_{0,j}^{(2k+1)}),$$

où : $(\alpha_{i,j}^{(2k)}, \alpha_{i,j}^{(2k+1)}) \in \mathbb{R}^2$, pour $1 \leq j \leq k+1$ et $1 \leq i \leq k$.

Remarque 23. L'objectif de la méthode est alors de construire un algorithme donnant $x_i = r(i, i)$.

Proposition 4.3.4. *Pour $n \geq 2$, soit le sous ensemble C_n de $\mathbb{R}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ défini par :*

$$C_n = \left\{ \left(x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) : x_l \in]0, 1[, \text{ pour } l = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \right. \\ \left. \text{et } r(i, j) > 0, \text{ si } i + j = n \text{ et } i \neq j \right\},$$

donc pour $X^{(n)} = \left(x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \in C_n$; l'ensemble des nombres réels $\{r(i, j); i + j \leq n\}$ (obtenus en termes de composantes de $X^{(n)}$) est une solution positive du système d'équations d'équilibre :

$$x(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} x(e') q(e', e),$$

où $e = (i, j)$, $i + j \leq n - 1$.

Démonstration. C_n est non vide car il contient le vecteur $(p(1, 1), p(2, 2), \dots, p(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$, et si $x_i = p(i, i)$, pour $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, les $r(i, j)$, $i + j = n$ correspondants sont exactement $p(i, j)$, $i + j = n$.

La condition $r(i, j) > 0$ pour $i + j = n$ donne pour ces nombres réels les propriétés des probabilités stationnaires $p(i, j); i + j = n$. d'où $\{r(i, j); i + j \leq n - 1\}$ (à partir desquels sont construits les $\{r(i, j); i + j = n\}$ à partir du système d'équations d'équilibre :

$$r(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} r(e') q(e', e),$$

où $e = (i, j)$, $i + j \leq n - 1$, avec $(x_i)_{i \geq 0}$ ayant le rôle $(p(i, i))_{i \geq 0}$ ont les mêmes propriétés que $\{p(i, j); i + j \leq n - 1\}$. D'où : si $\left(x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \in C_n$ le système construit de nombres réels $\{r(i, j); i + j \leq n\}$ est une solution positive pour le système d'équations d'équilibre :

$$r(e) \sum_{e' \neq e} q(e, e') = \sum_{e' \neq e} r(e') q(e', e),$$

avec $e = (i, j)$, $i + j \leq n - 1$. □

Corollaire 4.3.5. *Si on note :*

$$S_n = \left\{ \left(x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \dots \right) : x_i \in]0, 1[, \forall i \geq 1, \right. \\ \left. \text{et } r(i, j) > 0, \text{ pour } i + j = n \right\},$$

donc $(S_n)_n$ est une suite décroissante d'ensembles ($S_n \subset S_{n-1}$) et la limite $\cap S_n$ est telle que $(x_i)_{i \geq 1}$ est exactement la diagonale formée des probabilités $p(i, i)$ $i \geq 1$.

Démonstration. Soit $\left(x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \dots \right) \in S_n$. On note en premier lieu que les composantes x_l pour $l > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, sont libres des contraintes $r(i, j) > 0$ pour $i + j = n$, ces composantes sont alors identiques pour les deux ensembles S_n et S_{n-1} . Les composantes $\left(x_1, x_2, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right)$ doivent aussi satisfaire les contraintes $\{r(i, j) > 0; i + j = n - 1\}$ (proposition précédente) donc $S_n \subset S_{n-1}$. Ainsi, pour n tendant vers l'infini et à cause de l'ergodicité, la solution positive du système infini d'équations d'équilibre est unique (le processus de markov sous jacent est ergodique), l'ensemble S_n a pour limite le point de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est la diagonale des probabilités $(p(i, i))_{i \geq 1}$. \square

Remarque 24. Afin d'illustrer géométriquement comment $(p(i, i))_{i \geq 1}$ est obtenu en tant que suite décroissante de sous ensembles $(S_n)_n$, on trace sur un plan le comportement des ensembles convexes C_4, C_5 et la projection de C_6 sur ses deux premières composantes pour $\rho = 4$ (Voir Figure 2)

Remarque 25. Dans la pratique on a souvent besoin d'un nombre fini de probabilités $p(i, i)$. Le problème est donc réduit à évaluer un nombre entier M assez grand de telle sorte que la somme : $\sum_{\{(i,j)/i+j \leq M\}} p(i, j)$ est proche de 1. On utilise le fait que :

$$\pi_n = \sum_{\{(i,j)/i+j=n\}} p(i, j) = \exp(-\rho) \frac{\rho^n}{n!}.$$

D'où, pour une précision ϵ donnée, le calcul de l'entier M satisfaisant

$\left(1 - \sum_{n=0}^M \pi_n \right) < \epsilon$, se fait facilement. On note aussi que le système des probabilités calculées $\{r(i, j); i + j \leq M\}$ satisfait :

$$\sum_{n=0}^M \pi'_n = \sum_{n=0}^M \pi_n,$$

où :

$$\pi'_n = \sum_{\{(i,j)/i+j=n\}} r(i, j) = \exp(-\rho) \frac{\rho^n}{n!}.$$

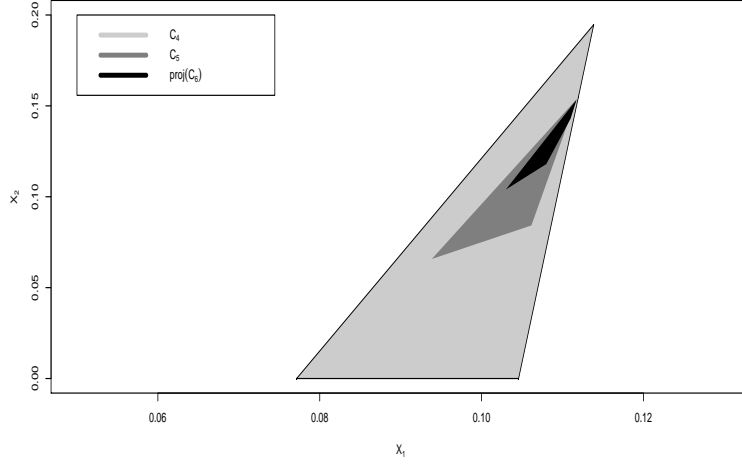


FIGURE 4.2 – Evolution de l'ensemble solution

Donc pour tout $\epsilon > 0$; les probabilités calculées $\{r(i, j); i + j \leq M\}$ ont les mêmes propriétés que les probabilités stationnaires $\{p(i, j); i + j \leq M\}$, ceci est donc une très bonne amélioration de l'erreur de calcul si on compare aux autres méthodes numériques nécessitant une équation de normalisation qui est complètement écartée ici. La détermination de M est plutôt considérée comme règle d'arrêt pour l'algorithme de calcul et non comme niveau de troncature de l'espace d'états.

Ainsi comme exemple pour $\rho = 4$ et $\epsilon = 10^{-10}$ on trouve $M = 22$. On calcule alors $p(i, i)$ $1 \leq i \leq 11$. Comme la suite $(p(i, i))_i$ est d'un certain intérêt, on trace son comportement dans la figure 3 pour certaines valeurs de ρ et on voit que $p(i, i)$ atteint son maximum quand i est proche de $\frac{\rho}{2}$.

4.4 Calculs des probabilités d'état et résultats numériques

4.4.1 Calcul de $p(i, i)$ $1 \leq i \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$

Comme les $\lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1$ composantes du vecteur Y_M sont de la forme :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \alpha_{i,j}^{(M)} x_i + \alpha_{0,j}^{(M)}, \quad 1 \leq j \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1,$$

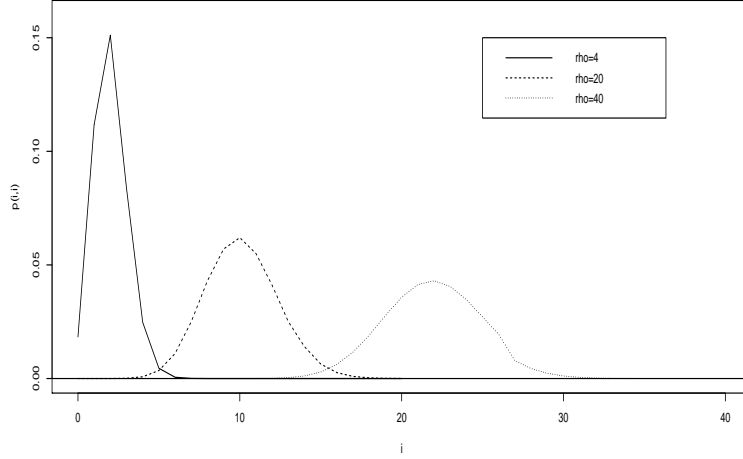


FIGURE 4.3 – Evolution des probabilités diagonales pour différentes valeurs de ρ

donc les probabilités diagonales $p(i, i)$ sont dans l'ensemble solution du système d'inéquations linéaires :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \alpha_{i,j}^{(M)} x_i + \alpha_{0,j}^{(M)} \geq 0, \text{ pour } 1 \leq j \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1, \text{ et } x_i \geq 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor.$$

On utilise l'algorithme du simplexe pour obtenir une borne inf et une borne sup pour chaque x_i . A cause de l'unicité due à l'ergodicité du processus de Markov modélisant ce système, ces bornes sont presque égales pour une grande valeur de M , comme il sera vu dans les prochains calculs. Comme $x_i \geq 0$, on peut prendre pour fonction objective $\sum_1^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} x_i$.

4.4.2 Algorithme

L'algorithme se déroule suivant les étapes suivantes ;

Étape 1 : Fixer une valeur de ρ .

Étape 2 : pour une précision ϵ désirée, on évalue l'entier M satisfaisant $(1 - \sum_{n=0}^M \exp(-\rho) \frac{\rho^n}{n!}) < \epsilon$ (ou $\sum_{n=0}^M \exp(-\rho) \frac{\rho^n}{n!} > 1 - \epsilon$).

Étape 3 : Utiliser les matrices A_i and les vecteurs D_i définis dans les notations précédentes pour obtenir par des formules récursives le vecteur Y_M

ayant pour composantes :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \alpha_{i,j}^{(M)} x_i + \alpha_{0,j}^{(M)}, \quad 1 \leq j \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1$$

Etape 4 : Utiliser la méthode du simplexe avec la fonction objective $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} x_i$ et les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \alpha_{i,j}^{(M)} x_i + \alpha_{0,j}^{(M)} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor + 1 \text{ et } x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor.$$

Etape 5 : Obtenir une borne supérieure et une borne inférieure x_i notées respectivement $\max x_i$ et $\min x_i$ et poser $x_i = \frac{1}{2} (\max x_i + \min x_i)$.

Etape 6 : Retour à la formulation matricielle pour le calcul de $r(i, j)$, $i + j \leq M$.

4.4.3 Résultats numériques

On commence le calcul des probabilités $r(i, j)$ pour des petites valeurs de ρ . pour $\rho = 1$ et $\epsilon = 10^{-10}$, on obtient $M = 12$. les probabilités calculées $r(i, j)$, pour $i + j \leq 12$ sont données dans la table 1 (pour des raisons de bonne présentation, on donne les résultats à deux décimales près).

| $j \setminus i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|
| 0 | $3.68e - 01$ | | | | | | |
| 1 | $1.84e - 01$ | $1.63e - 01$ | | | | | |
| 2 | $1.03e - 02$ | $3.05e - 02$ | $1.40e - 02$ | | | | |
| 3 | $1.63e - 04$ | $6.48e - 04$ | $1.53e - 03$ | $4.78e - 04$ | | | |
| 4 | $1.15e - 06$ | $5.71e - 06$ | $1.65e - 05$ | $3.64e - 05$ | $8.65e - 06$ | | |
| 5 | $4.5e - 09$ | $2.70e - 08$ | $9.2e - 09$ | $2.36e - 07$ | $5.06e - 07$ | $9.7e - 08$ | |
| 6 | $1e - 10$ | $7.9e - 11$ | $3.1e - 10$ | $9e - 10$ | $2.2e - 09$ | $4.6e - 09$ | $7.4e - 10$ |
| 7 | $2e - 14$ | $1.5e - 13$ | $7e - 13$ | $2.3e - 12$ | $0.6e - 11$ | $0.14e - 10$ | |
| 8 | $2.5e - 17$ | $2.3e - 16$ | $1.1e - 15$ | $0.4e - 14$ | $0.12e - 13$ | | |
| 9 | $2.5e - 20$ | $2.5e - 19$ | $1.3e - 18$ | $0.52e - 17$ | | | |
| 10 | $1.9e - 23$ | $2.1e - 22$ | $0.12e - 20$ | | | | |
| 11 | $1.2e - 26$ | $0.14e - 24$ | | | | | |
| 12 | $0.6e - 29$ | | | | | | |

Table 1 : Probabilités $r(i, j)$ pour $\rho = 1$, $\epsilon = 10^{-10}$, $M = 12$

Un autre cas d'intérêt est le calcul de ces probabilités pour une grande valeur d'intensité du trafic, on prend alors $\rho = 40$, mais pour une présentation simple on reporte uniquement certaines valeurs de $r(i, j)$ données dans la table 2. Dans ce cas, pour des calculs à dix décimales près, on obtient $M = 85$. La méthode nous permet donc le calcul des probabilités $\{r(i, j) : i + j \leq 85\}$.

On donne alors $r(i, j)$ pour $N = i + j = 10, 20, 30, 40, 50$ et 60

| $i \setminus N$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0 | 3.44×10^{-14} | 1.27×10^{-18} | 4.88×10^{-27} | 5.49×10^{-38} | 1.60×10^{-36} | 1.03×10^{-34} |
| 1 | 1.93×10^{-12} | 3.12×10^{-16} | 3.06×10^{-24} | 4.31×10^{-35} | 1.32×10^{-35} | 5.82×10^{-34} |
| 2 | 4.12×10^{-11} | 3.35×10^{-14} | 8.73×10^{-22} | 2.56×10^{-32} | 6.07×10^{-35} | 1.89×10^{-33} |
| 3 | 4.52×10^{-10} | 2.08×10^{-12} | 1.51×10^{-19} | 9.36×10^{-30} | 2.11×10^{-34} | 4.56×10^{-33} |
| 4 | 2.58×10^{-9} | 8.29×10^{-11} | 1.78×10^{-17} | 2.38×10^{-27} | 6.46×10^{-34} | 9.41×10^{-33} |
| 5 | 6.13×10^{-9} | 2.25×10^{-9} | 1.50×10^{-15} | 4.46×10^{-25} | 1.88×10^{-33} | 1.89×10^{-32} |
| 6 | | 4.28×10^{-8} | 9.52×10^{-14} | 6.45×10^{-23} | 5.26×10^{-33} | 4.07×10^{-32} |
| 7 | | 5.74×10^{-7} | 4.61×10^{-12} | 7.36×10^{-21} | 2.28×10^{-32} | 9.39×10^{-32} |
| 8 | | 5.43×10^{-6} | 1.73×10^{-10} | 6.75×10^{-18} | 3.52×10^{-30} | 2.15×10^{-31} |
| 9 | | 3.58×10^{-5} | 5.11×10^{-9} | 5.04×10^{-17} | 6.91×10^{-28} | 4.59×10^{-31} |
| 10 | | 1.09×10^{-4} | 1.19×10^{-7} | 3.09×10^{-15} | 9.55×10^{-26} | 8.87×10^{-31} |
| 11 | | | 2.17×10^{-6} | 1.57×10^{-13} | 1.04×10^{-23} | 1.55×10^{-30} |
| 12 | | | 3.11×10^{-5} | 6.63×10^{-12} | 9.48×10^{-22} | 2.45×10^{-30} |
| 13 | | | 3.49×10^{-4} | 2.33×10^{-10} | 7.34×10^{-20} | 2.45×10^{-30} |
| 14 | | | 3.03×10^{-3} | 6.83×10^{-9} | 4.87×10^{-18} | 4.78×10^{-30} |
| 15 | | | 1.16×10^{-2} | 1.67×10^{-7} | 2.78×10^{-16} | 6.09×10^{-30} |
| 16 | | | | 3.39×10^{-6} | 1.7×10^{-14} | 7.25×10^{-30} |
| 17 | | | | 5.73×10^{-5} | 5.85×10^{-13} | 4.06×10^{-24} |
| 18 | | | | 7.98×10^{-4} | 2.15×10^{-11} | 5.71×10^{-22} |
| 19 | | | | 9.11×10^{-3} | 6.83×10^{-10} | 4.55×10^{-20} |
| 20 | | | | 4.30×10^{-2} | 1.87×10^{-8} | 2.78×10^{-18} |
| 25 | | | | | 1.28×10^{-2} | 2.95×10^{-10} |
| 30 | | | | | | 5.14×10^{-4} |

Table 2 : Probabilités $r(i, j)$ pour $\rho = 40$, $M = 85$

Dans la suite, dans les tables 3 et 4, on fait une comparaison entre les probabilités théoriques

$$\pi_k = \frac{\rho^k}{k!} \exp(-\rho),$$

et les probabilités calculées $\pi'_k = \sum_{i+j=k} r(i, j)$ dans les deux cas : $\rho = 1$ et $\rho = 40$.

| k | $\pi_k = \frac{e^{-1}}{k!}$ | $\sum_{(i,j)/i+j=k} r(i, j)$ | k | $\pi_k = \frac{e^{-1}}{k!}$ | $\sum_{(i,j)/i+j=k} r(i, j)$ |
|-----|-----------------------------|------------------------------|-----|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 0.3678794412 | 0.36787944 | 7 | $7.299195261 \times 10^{-5}$ | $7.299195261 \times 10^{-5}$ |
| 2 | 0.1839397206 | 0.183939720 | 8 | $9.123994077 \times 10^{-6}$ | $9.1239940766 \times 10^{-6}$ |
| 3 | 0.06131324020 | 0.0613132400 | 9 | $1.013777120 \times 10^{-6}$ | $1.0137771196 \times 10^{-6}$ |
| 4 | 0.01532831005 | 0.0153283100 | 10 | $1.013777120 \times 10^{-7}$ | $1.0137771196 \times 10^{-7}$ |
| 5 | 0.003065662010 | 0.0030656620 | 11 | $9.216155633 \times 10^{-9}$ | $9.216155633 \times 10^{-9}$ |
| 6 | 0.0005109436683 | 0.0005109436683 | 12 | $7.680129694 \times 10^{-10}$ | $7680129694 \times 10^{-10}$ |

Table 3 : Comparaison entre π_k et π'_k pour $\rho = 1$

| k | $\frac{e^{-40}40^k}{k!}$ | $\sum_{(i,j)/i+j=k} r(i, j)$ | k | $\frac{e^{-40}40^k}{k!}$ | $\sum_{(i,j)/i+j=k} r(i, j)$ |
|-----|--------------------------|------------------------------|-----|--------------------------|------------------------------|
| 5 | $3.625262298e - 12$ | $3.625262298e - 12$ | 41 | $6.141174578e - 02$ | $6.141174578e - 02$ |
| 10 | $1.227602048e - 08$ | $1.227602048e - 08$ | 42 | $5.848737693e - 02$ | $5.848737693e - 02$ |
| 15 | $3.488357468e - 06$ | $3.488357468e - 06$ | 43 | $5.440686226e - 02$ | $5.440686226e - 02$ |
| 20 | $1.919976590e - 04$ | $1.919976590e - 04$ | 44 | $4.946078388e - 02$ | $4.946078388e - 02$ |
| 21 | $3.657098268e - 04$ | $3.657098268e - 04$ | 45 | $4.396514122e - 02$ | $4.396514122e - 02$ |
| 22 | $6.649269577e - 04$ | $6.649269577e - 04$ | 46 | $3.823055758e - 02$ | $3.823055758e - 02$ |
| 23 | $1.156394709e - 03$ | $1.156394709e - 03$ | 47 | $3.253664475e - 02$ | $3.253664475e - 02$ |
| 24 | $1.927324515e - 03$ | $1.927324515e - 03$ | 48 | $2.711387063e - 02$ | $2.711387063e - 02$ |
| 25 | $3.083719224e - 03$ | $3.083719224e - 03$ | 49 | $2.213377194e - 02$ | $2.213377194e - 02$ |
| 26 | $4.744183422e - 03$ | $4.744183422e - 03$ | 50 | $1.770701755e - 02$ | $1.770701755e - 02$ |
| 27 | $7.028419884e - 03$ | $7.028419884e - 03$ | 51 | $1.388785690e - 02$ | $1.388785690e - 02$ |
| 28 | $1.004059983e - 02$ | $1.004059983e - 02$ | 52 | $1.068296685e - 02$ | $1.068296685e - 02$ |
| 29 | $1.384910322e - 02$ | $1.384910322e - 02$ | 53 | $8.062616490e - 03$ | $8.062616490e - 03$ |
| 30 | $1.846547096e - 02$ | $1.846547096e - 02$ | 54 | $5.972308511e - 03$ | $5.972308511e - 03$ |
| 31 | $2.382641414e - 02$ | $2.382641414e - 02$ | 55 | $4.343497099e - 03$ | $4.343497099e - 03$ |
| 32 | $2.978301768e - 02$ | $2.978301768e - 02$ | 56 | $3.102497928e - 03$ | $3.102497928e - 03$ |
| 33 | $3.610062749e - 02$ | $3.610062749e - 02$ | 57 | $2.17719152e - 03$ | $2.17719152e - 03$ |
| 34 | $4.247132646e - 02$ | $4.247132646e - 02$ | 58 | $1.501511399e - 03$ | $1.501511399e - 03$ |
| 35 | $4.853865881e - 02$ | $4.853865881e - 02$ | 59 | $1.017973830e - 03$ | $1.017973830e - 03$ |
| 36 | $5.393184312e - 02$ | $5.393184312e - 02$ | 60 | $6.786492198e - 04$ | $6.786492198e - 04$ |
| 37 | $5.830469527e - 02$ | $5.830469527e - 02$ | 65 | $7.011160453e - 05$ | $7.011160453e - 05$ |
| 38 | $6.137336344e - 02$ | $6.137336344e - 02$ | 70 | $4.943278525e - 06$ | $4.943278525e - 06$ |

Table 4 : Comparaison entre π_k et π'_k pour $\rho = 40$

Dans les deux cas, ces valeurs sont égales et ceci est du à la haute précision avec laquelle sont faits les calculs des probabilités $\{r(i, j); i + j = n\}$. On donne aussi des bornes pour certains x_i données par la méthode du simplexe pour $\rho = 1$ et $\rho = 40$.

| $\rho = 1$ | |
|---------------|---|
| $\min x_1$ | 0.16328443070905508503672032044000922189295 |
| $\max x_1$ | 0.16328443070905508503672032044000922189295 |
| $\min x_5$ | $0.97017465928403972300912856099958805441058e - 07$ |
| $\max x_5$ | $0.97017465928403972300912856099958805445255e - 07$ |
| $\min x_{12}$ | $0.58132007277538691906756103192909749773896e - 24$ |
| $\max x_{12}$ | $0.58132007277538691906866873406199264901973e - 24$ |
| $\rho = 40$ | |
| $\min x_1$ | $0.20110647637112425846e - 14$ |
| $\max x_1$ | $0.20110647637112436542e - 14$ |
| $\min x_{15}$ | 0.01164145095269965967 |
| $\max x_{15}$ | 0.01164145095271687431 |
| $\min x_{20}$ | 0.04301571448467805229 |
| $\max x_{20}$ | 0.04301571448628082649 |

Table 5 : Bornes pour certaines valeurs calculées des x_i pour $\rho = 1$ et $\rho = 40$

Remarque 26. De cette dernière table, on remarque que si on note $\epsilon_{1,i} = \max x_i - \min x_i$ alors $\epsilon_1 = \max_i \epsilon_{1,i}$ est autour de la précision ϵ déjà citée et ceci est valable pour toutes les valeurs de ρ .

Chapitre 5

Commentaires, comparaisons avec les autres méthodes et conclusion générale

5.1 Commentaires des résultats

Pour les deux cas étudiés, la méthode consiste par un calcul en premier lieu des probabilités diagonales. Pour deux files $M/M/\infty$ parallèles, les intervalles dans lesquels doivent se trouver ces probabilités ont été donnés pour certaines valeurs de ρ . Il apparaît alors une très bonne précision des calculs. La règle d'arrêt est basée sur la recherche de l'entier N de telle sorte que $\sum_0^N \pi_n$ soit proche de 1, ceci nous permet alors d'approcher la solution avec la qualité désirée. Il est aussi important de signaler que le fait que π_n égal à $\frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!}$ est pratiquement vérifié pour tous les cas considérés est un indice de confiance aux résultats donnés, c'est d'ailleurs une bonne façon de vérifier la qualité des calculs comme signalé dans la littérature. Il faut tout de même signaler que plus la valeur de ρ est importante plus le temps de calcul est important mais la qualité des résultats est toujours conservée pour cause d'efficacité de l'algorithme du simplexe pour de grands systèmes d'inéquations linéaires. Pour deux files $M/M/1$ parallèles, c'est à une constante multiplicative près que les bornes ont été données et la précision des calculs est aussi révélée par ces résultats. Par contre dans ce cas ce sont plutôt les résultats de Halfin [13] qui permettent de se fixer une règle d'arrêt pour l'algorithme de calculs. L'évaluation de l'erreur est basée sur les bords du convexe donnant les probabilités diagonales et comme signalé dans le premier cas, une valeur de ρ proche de 2 demandera plus de temps de calcul sans toutefois influencer sur la

qualité de la précision.

5.2 Comparaison avec l'ensemble des autres méthodes

Pour deux files $M/M/\infty$ parallèles, seuls Yao et Knessl [4] ont traité ce cas. La partie analytique de cet article traite le comportement asymptotique (pour de grandes valeurs de ρ) de la solution stationnaire. Pour la partie numérique, il n'a pas été fait mention du contrôle des erreurs, Il apparait clairement que notre méthode se distingue par sa simplicité d'implémentation et la qualité des résultats.

Pour deux files $M/M/1$ parallèles, le seul papier à notre connaissance qui donne un algorithme de calcul des probabilités stationnaires est celui de Zhao et Grassmann [18] et dans lequel ont été relevées des différences dans les résultats en termes de précision. La méthode présentée dans cette thèse a été plus fine comme montré dans la comparaison des résultats mentionnée plus haut. Paradoxalement pour les plus petites valeurs de ρ , le calcul dans [18] est long comme le montre le nombre d'opérations qui est inversement proportionnel à ρ ; ce qui n'est pas du tout le cas pour notre méthode où justement le calcul est très rapide et précis.

5.3 Conclusion générale et perspectives

Cette nouvelle méthode numérique de calcul des probabilités stationnaires est de grand intérêt. D'abord pour sa simplicité d'écriture (algèbre linéaire classique) et d'implémentation, ensuite pour la qualité des résultats qu'elle fournit. L'algorithme du simplexe qui est largement utilisé dans la méthode est aussi connu pour la qualité de sa complexité pour la résolutions de grands systèmes d'inéquations linéaires. Les matrices utilisées sont des matrices creuses ce qui influence énormément la place mémoire occupée et engendre alors un temps de calcul très réduit. Elle est testée dans cette thèse sur deux modèles de réseaux de file d'attente (modèles JSQ : Joining the Shortest Queue) qui ont été considérés pendant très longtemps comme durs à étudier. L'avantage incontestable est aussi le fait de pouvoir adapter la méthode pour ces modèles avec plus de complexité comme des réseaux constitués de files non symétriques à flux d'arrivée propres auxquels seront rajoutés des flux extérieurs soumis à la discipline JSQ, ces derniers n'ont pratiquement jamais été abordés dans la littérature vue la limitation des méthodes existantes jusqu'à maintenant. En dehors du domaine des files d'attente, c'est surtout

son utilisation pour la recherche des solutions stationnaires de processus de Markov en général qui pourra ainsi assurer sa diffusion dans la littérature.

Bibliographie

- [1] E. Gelenbe, G. Pujolle, Introduction aux réseaux de files d'attente, Eyrolles 1982.
- [2] F.A. Haight, Two queues in parallel, *Biometrika* 45 : 401–410 (1958).
- [3] F. P. Kelly, Reversibility and stochastic networks, Cambridge mathematical library 2011.
- [4] Haishen Yao and Charles Knessl. On the infinite server shortest queue problem : symmetric case. *Stochastic Models* 21 :101–132 (2005).
- [5] I. Gertsbakh. The shorter queue problem : A numerical study using the matrix geometric solution. *European J. Operation Research*15 :374–381 (1984)
- [6] I.J.B.F. Adan, J. Wessels, W.H.M. Zijm, Analysis of the symmetric shortest queueing problem, *Stoch. Models* 6 : 691–713 (1990).
- [7] J.F.C. Kingman, Two similar queues in parallel, *Ann. Math. Stat.* 32 : 1314–1323 (1961).
- [8] J. Pellaumail. Probabilités stationnaires pour des systèmes markoviens discrets. INRIA Unité de recherche INRIA-Rennes France : Rapport de recherche n°633 (1987)
- [9] L. Flatto, H.P. McKean, Two queues in parallel, *Comm. Pure. Appl. Math.* 30 : 255 –263 (1977).
- [10] L. Kleinrock *Queueing Systems Volumes I et II* John Wiley & Sons 1975
- [11] M. F. Neuts. *Matrix geometric Solutions in Stochastic Models*. John Hopkins University Press, Baltimore, 1980
- [12] P. Patrick Wang and Vicky F. Locker. Steady state distributions of parallel queues. *INFOR* 39 : 89–105 (2001).
- [13] S. Halfin, The shortest queue problem, *J. Appl. Probab.* 22 : 865–878 (1985).
- [14] S. M. Ross, *Stochastic processes*. John Wiley & Sons 1983
- [15] T. Lardjane, Conditions suffisantes de réversibilité et de composition de réseaux de files d'attente. Thèse de magister 1985.
- [16] T. Lardjane et R. Messaci, On a new numerical computation of the

steady state solution for two infinite server parallel queues, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, no 78, 3875 - 3891.

[17] T. Lardjane et R. Messaci, On a new numerical analysis for the symmetric shortest queue problem, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, 144 - 152, waset journal issue 0068 August 2012.

[18] Y. Zhao and W.K. Grassman. A numerically stable algorithm for two server queue model. Queueing Systems. 8 :59–79 (1991).