N°$d'ordre$: $11/2019 - D/MT$

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des Mathématiques

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour obtenir le grade de Docteur

EN : Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : **Slimane HADJ BRAHIM**

Intitulé

Aspects combinatoires et analytiques liés aux polynômes d'Appell

Soutenue publiquement le 12/06/2019, devant le jury composé de :

M. Mohand Ouamar HERNANE	Professeur à l'USTHB	Président
M. Hacène BELBACHIR	Professeur à l'USTHB	Directeur de Thèse
M. Lyes AIT AMRANE	Maître de Conferences /A, à l'ESI	Examinateur
M. Ahmed AIT MOKHTAR	Maître de Conferences /A, à l'ENS Kouba	Examinateur
M. Abdelkader BOUYAKOUB	Professeur à l'Université Oran1	Examinateur
M. Miloud MIHOUBI	Professeur à l'USTHB	Examinateur

“La connaissance est une navigation dans un océan d’incertitudes à travers des archipels de certitudes.”

Edgar Morin

Remerciements

Cette thèse doit beaucoup aux différentes personnes qui m'ont entouré et accompagné au long de ces quatre dernières années. Je tiens à leur exprimer ici mes sincères remerciements. Ma gratitude va en tout premier lieu vers mon directeur de thèse, Hacène Belbachir, qui m'a fait découvrir le monde de la recherche au travers de sujets originaux et intéressants. Je dois beaucoup à sa patience, au temps qu'il a pu me consacrer et aux conseils judicieux qu'il a su me procurer. Son encadrement sans faille m'aura permis de m'épanouir pleinement dans mes travaux et je l'en remercie mille fois.

Je tiens également à remercier les professeurs et chercheurs qui ont accepté également de faire partie de mon jury de thèse : Mr. Mohand Oumar Hernane, Mr. Lyes Ait Amrane, Mr. Ahmed Ait Mokhtar, Mr. Abdelkader Bouyakoub et Mr. Miloud Mihoubi.

L'équipe du laboraoire RECITS plus précisement le groupe de recherche CATI, qui a su m'intégrer au sein de son séminaire et de son groupe de travail, m'a toujours laissé l'occasion de discuter de mes recherches et je les en remercie essentiellement : Mr. Amine Belkhir et Mr. Yahia Djemmada.

Également, mes collègues doctorants et post-doctorants de combinatoire avec qui j'ai eu du plaisir à discuter de nos travaux et de nos expériences mutuelles : Mr. Rahim Arabi et Mr. Abdennour Azerine. Ce dernier a également apporté une pierre importante à l'édifice de mes recherches et je l'en remercie grandement.

Les différents chercheurs ou doctorants que j'ai pu rencontrer lors de séminaires et aux JSL à l'USTHB, et avec qui j'ai pu échanger de brillantes discussions, ont eu leur part dans la réussite de cette thèse.

Je tiens à remercier mon père, mes frères, mes soeurs qui m'ont soutenu tout au long de ces quatre ans, mais surtout ma chère maman et mon épouse.

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction générale

Avant-propos La combinatoire est l'étude des ensembles dénombrables ou finis d'objets et comporte divers branches. Parmi ces branches, on cite la combinatoire énumérative, qui s'intéresse à l'étude des suites et polynômes obtenus par l'énumération. On cite par exemple Stirling comme l'un des précurseurs de cette discipline. Sa suite est considérée comme l'exemple de base d'un problème de combinatoire énumérative. Plusieurs mathématiciens se sont intéressés à la combinatoire énumérative comme Bernoulli, Appell ou Euler. Certains considèrent que la combinatoire énumérative a commencé avec le concept de permutation et que l'un de ses premiers résultats pourrait être le fait qu'il y a $n!$ permutations de n éléments.

Polynômes d'Appell Plusieurs familles de polynômes jouent un rôle fondamental dans divers domaines mathématiques et sciences appliquées. Surtout après les travaux d'Appell [5]. Les polynômes d'Appell font l'objet de beaucoup d'attention et leur théorie fait l'objet de nombreuses études (voir par exemple [29, 54, 67, 69]). En effet, la recherche active sur cette famille de polynômes est motivée par ses nombreuses applications dans les divers domaines mathématiques et sciences appliquées en particulier la combinatoire, la théorie analytique des nombres et la théorie de l'approximation asymptotique. Parmi les diverses méthodes et techniques utilisées dans la littérature pour étudier les polynômes d'Appell et leurs généralisations, on trouve celles développées par Srivastava [63] en termes d'intégrales de Stieltjes. Costabile et *al.* [27] ont proposé une forme déterminentale pour les polynômes de Bernoulli, quelques années après Costabile et Longo [28] ont étendu cette représentation pour les polynômes d'Appell. Dans [69], Verde-Star et Srivastava visent à donner certaines formules binomiales pour les polynômes d'Appell généralisés en utilisant l'approche de la fonction génératrice. Par le calcul ombral, Mihoubi [51] a donné la formule symétrique pour les polynômes d'Appell avec paramètre α. D'autre part, certaines familles d'équations différentielles associées aux polynômes d'Appell dans la base d'Hermite ont été étudiées récemment dans [66]. De plus, les résultats correspondants pour les polynômes de Genocchi dans la base d'Hermite et ceux impliquant les polynômes d'Euler dans la base d'Hermite sont déduits.

Plusieurs caractérisations de la famille des polynômes d'Appell $\{A_n(x)\}_{n\geq 0}$, où $\deg(A_n) = n$, ont été données dans diverses études (voir par exemple [56, 60, 61]). Principalement, il a été montré dans [61] que

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = nA_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

est équivalent à l'existence d'une série formelle $f(t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$ avec $\alpha_0 \neq 0$, vérifiant l'équation,

$$f(t)e^{xt} = \sum_{n\geq 0} A_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Unificatrices et généralisations Apostol [6] a introduit et a étudié la forme étendue des polynômes et nombres classiques de Bernoulli, qui sont maintenant connus sous le nom de polynômes et nombres d'Apostol-Bernoulli. Une autre extension pour les polynômes de type Apostol comme Apostol-Euler et Apostol-Genocchi a été introduite par Luo [40, 41]. De nombreuses propriétés des polynômes de type Apostol et leurs liens avec les fonctions symétriques élémentaires, la théorie des matrices et les polynômes spéciaux, les identités combinatoires et les généralisations sont établies, voir [9, 10, 40, 41].

Plan du manuscrit Cette thèse se veut une contribution à cette théorie fondée sur les idées des auteurs suivants : Pintèr et Srivastava (2004-2013), Merca (2015), Raabe (1851), Costabil (2006-2010) et Luo (2003-2011).

Ce manuscrit est composé de six chapitres.

Le premier chapitre introductif vise à présenter les définitions et notions de base de quelques structures combinatoires dans la première partie. Les polynômes d'Appell et de Sheffer dans la deuxième partie.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à l'étude des polynômes d'Euler-Genocchi, qui a été introduite par Belbachir et *al.* [18]. Nous établissons quelques propriétés en utilisant l'approche déterminentale.

Le chapitre 3 est dédié à l'étude de quelques propriétés combinatoires liées aux polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r comme ; l'extension du théorème de Raabe, les sommes de Faulhaber et les liens avec les nombres de Stirling et les nombres de Jacobi-Stirling.

Au quatrième chapitre, on étend les polynômes de Bernoulli et d'Euler de type Apostol sous forme unificatrice et on étudie certaines propriétés.

Dans le chapitre 5, on établit quelques identités combinatoires pour les polynômes unifiés de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol, en utilisant différentes approches : la fonction génératrice, la convolution, la dérivation et l'intégration, leur lien avec la fonction zêta d'Hurwitz-Lerch généralisée. Aussi, nous utilisons l'approche ombrale pour déduire des identités symétriques.

Le chapitre 6 est consacré à exprimer les monômes x^n en termes des polynômes de Bernoulli-Euler généralisés en utilisant l'approche déterminentale. De plus, en utilisant le petit théorème de Fermat, on démontre de nouvelles identitées de congruences sous formes déterminentales. On donne des formules explicites liées aux nombres de Stirling.

Chapitre 1

$\mathscr{P}$réliminaires sur les suites de nombres et polynômes combinatoires

Ce chapitre est subdivisé en deux parties. La première partie est relative aux définitions et notions de base de quelques structures combinatoires. La deuxième partie, concerne une étude sur les polynômes d'Appell et de Sheffer. Nous énumérons quelques relations reliant ces deux importants concepts. De plus, les résultats obtenus dans cette partie seront exploités en utilisant diffèrentes approches : la fonction génératrice, l'approche déterminentale et le calcul ombral. On présente ainsi plusieurs identités combinatoires. Pour des notions plus précises et détaillées, le lecteur pourra consulter la réference de Comtet [26].

1.1 Factorielles montante et descendante

Soient x un nombre réel et r un entier naturel. La factorielle montante de x d'ordre r est définie par :

$$\langle x \rangle_r := \begin{cases} 1, & r = 0, \\ x(x+1)\cdots(x+r-1), & r > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

D'une manière équivalente, la factorielle descendante de x d'ordre r est définie par :

$$(x)_r := \begin{cases} 1, & r = 0, \\ x(x-1)\cdots(x-r+1), & r > 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Pour $x = 1$ dans l'équation (1.1) ou pour $x = n$ dans (1.2), on obtient la factorielle classique :

$$\langle 1\rangle_r = (r)_r = r!.$$

Propriétés : Soient r, n deux entiers naturels et x un nombre réel. Alors :

$$\langle x\rangle_{r+n} = \langle x\rangle_r \langle x+r\rangle_n,$$
$$\langle x\rangle_r = (-1)^r \langle 1-r-x\rangle_r,$$
$$(x)_r (x)_n = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{n}{k} k!(x)_{r+n-k}.$$

1.2 Coefficients binomiaux et multinomiaux

Soient x un nombre réel et k un entier naturel. Le coefficient binomial noté $\binom{x}{k}$, est donné par la formule explicite :

$$\binom{x}{k} := \frac{(x)_k}{k!}.$$

Pour $x = n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a+b)^n$ appelée relation du binôme de Newton, où a et b sont des nombres réels

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

et satisfont la formule de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

On conviendra que, si k est strictement négatif ou strictement supérieur à n, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est nul.

Plus généralement, $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_p}$ est le coefficient multinomial, donné par :

$$\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_p!}, & \text{pour} \quad k_1+k_2+\cdots+k_p=n; \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a_1+a_2+\cdots+a_p)^n$, où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des nombres réels

$$(a_1+a_2+\cdots+a_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_p} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_p^{k_p}.$$

Pour les propriétés générales concernant les coefficients multinomiaux (voir par exemple Belbachir [12]).

1.3 Fonctions génératrices

1.3.1 Fonction génératrice ordinaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle fonction génératrice ordinaire d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}$, et en une indéterminée t, toute expression formelle du type

$$F(t) := \sum_{n\geq 0} a_n t^n,$$

où les a_n sont les coefficients de F.

Le produit de Cauchy de deux fonctions génératrices $\sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum\limits_{k\geq 0} b_k t^k$ d'éléments de $\mathbb{K}$, est la série de terme général :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

telle que,

$$\sum_{n\geq 0} c_n t^n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)\left(\sum_{k\geq 0} b_k t^k\right).$$

1.3.2 Fonction génératrice exponentielle

La fonction génératrice exponentielle d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}$, est définie par le développement en série entière suivante :

$$F(t) := \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}.$$

Le produit de Cauchy de deux fonctions génératrices exponentielles $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{k\geq 0} b_k \frac{t^k}{k!}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, est la série de terme général :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k},$$

telle que,

$$\sum_{n\geq 0} c_n \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{k\geq 0} b_k \frac{t^k}{k!}\right).$$

1.4 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Un opérateur $\mathbf{O}$ est une application de E dans F, autrement dit, $\mathbf{O} : E \longrightarrow F$

Un opérateur $\mathbf{O} : E \longrightarrow F$ est dit linéaire, si et seulement si,

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(x_1,x_2)\in E^2,\quad \mathbf{O}(\lambda x_1+\mu x_2) \ = \ \lambda\mathbf{O}(x_1)+\mu\mathbf{O}(x_2),$$

où $\mathbb{K}$ est le corps des scalaires de E et F.

On appelle opérateur de translation (ou opérateur du shift), noté τ, tout opérateur linéaire défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ P(x) &\longmapsto \tau(P(x)) := P(x+1). \end{aligned}$$

On appelle opérateur de différence, noté Δ, tout opérateur linéaire défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ P(x) &\longmapsto \Delta(P)(x) := P(x+1) - P(x). \end{aligned}$$

Quelques propriétés : En désignant par I l'opérateur identité sur $\mathbb{R}[x]$, on a

$$\Delta = \tau - I.$$

Comme les deux opérateurs τ et I commutent, la formule du binôme de Newton est applicable pour le développement de $\Delta^n = (\tau - I)^n$ et l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \Delta^n = (\tau - I)^n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \tau^{n-j} I^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \tau^{n-j}, \text{ en tant qu'opérateur.} \end{aligned}$$

En l'appliquant sur un polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, on obtient l'identité polynomiale :

$$(\Delta^n P)(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} P(x+n-j).$$

1.5 Les nombres de Stirling de seconde espèce

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ $(k \leq n)$. Les nombres de Stirling de seconde espèce sont les nombres réels notés $S(n,k)$, répertoriée $A008277$ dans [62], qui figurent dans l'écriture de x^n comme combinaison linéaire des polynômes $(x)_k$ $(0 \leq k \leq n)$. On a précisément pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$S(n,0) = 0 \quad et \quad S(n,1) = S(n,n) = 1.$$
$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1.$$
$$S(n,n-1) = \binom{n}{2}.$$

Relation de récurrence : Les nombres de Stirling de seconde espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.2 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leq n-1$, on a :*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k). \tag{1.4}$$

Le triangle des nombres de Stirling de seconde espèce : En se servant de la relation (1.4) et de la proposition 1.2, on peut dresser un triangle (infini) dont chaque ligne d'ordre $n \in \mathbb{N}$ donnée est composée des nombres $S(n,k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$. Le sommet de ce triangle est $S(0,0) = 1$ et en vertu du premier point de la proposition 1.1, chaque ligne d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ commence par un 0 et se termine par 1.

Les premières valeurs du triangle sont :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE 1.1 – Premières valeurs des nombres de Stirling

Formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce :

Théorème 1.1 [26, p. 206] *Pour tout* $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, *on a :*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n. \tag{1.5}$$

Fonction génératrice : La série génératrice exponentielle associée aux nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2 [26] *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\sum_{n \geq k} S(n,k) \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t - 1)^k}{k!}.$$

Interprétation combinatoire : Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, l'entier positif ou nul $S(n,k)$ représente le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parts (sous-ensembles non vides et deux à deux disjoints). En d'autres termes, $S(n,k)$ représente le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments qui fournissent exactement k classes d'équivalence.

1.6 Les nombres de Worpitzky

Soient n, k deux entiers naturels tels que $k \leq n$, les nombres non signés de Worpitzky, sont les nombres réels notés $W_{n,k}$, répertoriée $A028246$ dans [62], donnés par la formule explicite suivante :

$$W_{n,k} = k!S\left(n, k\right).$$

Propriétés

1. **Relation de récurrence :** la suite $\left(W_{n,k}\right)_{n,k\in\mathbb{N}}$ satisfait à la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$W_{n,k} = (k+1)W_{n-1,k} + W_{n-1,k-1}.$$

2. **Formule explicite :** la formule explicite des nombres de Worpitzky est donnée par :

$$W_{n,k} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

1.7 Polynômes d'Appell

Soit n un entier naturel, les polynômes d'Appell $A_n(x)$ de variable réelle x, ont été introduits pour la première fois par Paul Emile Appell *[5]* en 1880. Ils sont donnés par leur fonction génératrice (exponentielle) :

$$G_A(x;t) := f(t)e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{1.6}$$

où

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \tag{1.7}$$

est une fonction analytique non nulle en zéro.

Cette famille a été caractérisée de plusieurs manières (voir par exemple [56, 60, 61]). En particulier, il a été montré dans [61] que, $A_n(x)$ satisfait à la relation différentielle :

$$A_n'(x) = \frac{dA_n}{dx}(x) = nA_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.8}$$

Par conséquent, l'expression (1.6) permet d'obtenir la relation de convolution binomiale :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_{n-k} x^k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.9}$$

Premières propriétés

1. **Formule de translation :** Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x) y^{n-k}.$$

   Pour $y = (m-1)x$, on trouve :

$$A_n(mx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x)(m-1)^{n-k} x^{n-k}.$$

2. **Formule de différence :** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\Delta A_n(x) = A_n(x+1) - A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k(x).$$

3. **Formule intégrale :** Soient $x, z \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\int_0^x A_n(z)dz = \frac{1}{n+1}[A_{n+1}(x) - A_{n+1}(0)]$$

   et

$$\int_0^1 A_n(z)dz = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} A_k(0).$$

4. **Equation différentielle via la méthode de factorisation :**

Théorème 1.3 [34] *Pour tout entier naturel n, $A_n(x)$ est solution de l'équation différentielle d'ordre n :*

$$\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}y^{(n)} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!}y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_1}{1!}y'' + (x+a_0)y' - ny = 0, \tag{1.10}$$

où les coefficients réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ apparaissent dans le développement de la fonction génératrice :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!},$$

et $f(t)$ est donnée par l'équation (1.7).

1.7.1 Quelques exemples de polynômes d'Appell

Nous présentons quelques exemples classiques de polynômes d'Appell, en particulier les polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi.

Polynômes de Bernoulli : Les polynômes de Bernoulli sont des polynômes de degré n, notés $B_n(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle [31] :

$$\frac{t}{e^t - 1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < 2\pi). \tag{1.11}$$

On note $B_n := B_n(0)$ le $n-ième$ nombre de Bernoulli ($A103233$ dans [62]).

En 1890, A. Hürwitz [36] a donné le développement en série de Fourier pour les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$,

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^{-n}e^{2\pi ikx}, \qquad 0 < x < 1.$$

En 1891, Lucas [38] a proposé l'identité suivante en utilisant le calcul ombral,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}.$$

Le théorème de multiplication a été obtenu en 1851 par Raabe [55],

$$\sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(\frac{x+k}{m}\right) = m^{1-n}B_n(x), \qquad m \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Propriétés élémentaires Les polynômes de Bernoulli vérifient les identités suivantes :

1. $B_n^{'}(x) = nB_{n-1}(x)$.
2. **Représentation intégrale :** Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_y^z B_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\left[B_{n+1}(z) - B_{n+1}(y)\right].$$

   En particulier, pour $y = 0$ et $z = 1$,

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

3. $(\tau - I)B_n(x) = nx^{n-1}$ avec $B_0(x) = 1$, tel que, τ est l'opérateur de translation.
4. $\forall n > 1, \quad B_n(0) = B_n(1)$.
5. $\forall n \geq 1, \quad B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$.
6. $\forall n \geq 1, \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.
7. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$.
8. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$.

Voici les premières valeurs des polynômes de Bernoulli

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1,\\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2},\\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6},\\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,\\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},\\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

Les premières valeurs de B_n sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$1/30$	0	$5/66$	0	$-691/2730$

Jacques Bernoulli, le premier mentor d'Euler, avait déjà introduit ses fameux nombres de Bernoulli B_n $(n \geq 1)$, pour donner une expression pour la somme $S_m(n)$ des $m-ièmes$ puissances des $n+1$ premiers entiers. Dans son mémoire, on trouve sa célèbre formule que nous reproduisons sous la forme :

$$S_m(n) := \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k},$$

où $\quad S_m(n) := \sum_{k=0}^{n} k^m.$

La formule explicite de $B_n(x)$, est donnée par [58, p. 537]

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{v=0}^{k}(-1)^v \binom{k}{v}\frac{(x+v)^n}{k+1}.$$

Pour $x = 0$, l'équation devient,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}\frac{j^n}{k+1}. \tag{1.12}$$

La représentation de Worpitzky : Un nombre de Bernoulli est ensuite introduit en tant qu'une somme des nombres de Worpitzky présenté comme suit : [58, p. 461]

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{W_{n,k}}{k+1}.$$

Polynômes d'Euler : Les polynômes d'Euler sont les polynômes réels de degré n, notés $E_n(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle [31] :

$$\frac{2}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n\geq 0} E_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi). \tag{1.13}$$

Voici les premières valeurs des polynômes d'Euler :

$$E_0(x) = 1,$$
$$E_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$E_2(x) = x^2 - x,$$
$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4},$$
$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x.$$

Dans la littérature, on trouve deux suites de nombres, dites d'Euler, notées e_n et E_n respectivement, et définis par leurs fonctions génératrices suivantes :

$$\frac{2}{e^t+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi), \tag{1.14}$$

$$\frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi). \tag{1.15}$$

Ainsi, on peut définir d'une manière plus simple les e_n et E_n comme suit :

$$e_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad E_n = E_n(0).$$

En fait, on peut déduire une formule explicite pour les polynômes d'Euler directement à partir de (1.14) et (1.15) respectivement

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\frac{e_k}{2^k} \qquad (n \geq 0),$$

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k x^{n-k} \qquad (n \geq 0).$$

Les premières valeurs de e_n et E_n sont :

n	0	1	2	3	4	5	6
e_n	1	0	-1	0	5	0	-61
E_n	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

A. Hürwitz [36], a donné le développement en série de Fourier pour les polynômes d'Euler $E_n(x)$,

$$E_n(x) = \frac{2(n!)}{(2\pi i)^{n+1}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}, \qquad 0 < x < 1.$$

Le théorème de multiplication a été obtenu en 1851 par Raabe [55]. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E_n(x) = \begin{cases} m^n \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right), & m \text{ impair;} \\ \frac{-2}{n+1} m^n \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right), & m \text{ pair.} \end{cases}$$

On déduit ainsi une forme explicite pour les polynômes d'Euler en fonction de ceux de Bernoulli, en particulier, pour $m = 2$, on obtient :

$$E_n(x) = \frac{2^{n+1}}{n+1}\left[B_{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Polynômes de Genocchi : Les polynômes de Genocchi sont les polynômes réels de degré n, notés $G_n(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{2t}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi).$$

Voici les premières valeurs des polynômes de Genocchi :

$$
\begin{aligned}
G_0(x) &= 1,\\
G_1(x) &= x+1,\\
G_2(x) &= x^2+2x-1,\\
G_3(x) &= x^3+3x^2-3x,\\
G_4(x) &= x^4+4x^3-6x^2+1,\\
G_5(x) &= x^5+5x^4-10x^3+5x.
\end{aligned}
$$

On note $G_n := G_n(0)$ le $n-ième$ nombre de Genocchi ($A036968$ dans [62]). Les premières valeurs de G_n sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_n	1	1	-1	0	1	0	-3	0	17	0	-155	0	2073

Les monômes x^n peuvent être représentés en termes des polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi par le :

Théorème 1.4 [54] *Soient $B_n(x)$, $E_n(x)$ et $G_n(x)$ les polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi, respectivement. Alors :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k+1)!} B_k(x) \tag{1.16}$$

$$x^n = \frac{1}{2}\left[E_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x)\right] \tag{1.17}$$

$$x^n = \frac{1}{2(n+1)}\left[G_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} G_{k+1}(x)\right]. \tag{1.18}$$

Polynômes d'Apostol-Bernoulli : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, les polynômes d'Apostol-Bernoulli sont les polynômes de degré n, notés $\mathfrak{B}_n(x;\lambda)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{t}{\lambda e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{B}_n(x;\lambda) \frac{t^n}{n!} \qquad (|t + \ln \lambda| < 2\pi). \tag{1.19}$$

On note $\mathfrak{B}_n(\lambda) := \mathfrak{B}_n(0;\lambda)$ le $n-ième$ nombre d'Apostol-Bernoulli.

Par conséquent, l'expression (1.19) permet d'obtenir la convolution binomiale suivante :

$$\mathfrak{B}_n(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \mathfrak{B}_{n-k}(\lambda).$$

Remarque 1.1 *Posons $\lambda = 1$ dans la formule (1.19), on trouve les polynômes de Bernoulli,* i.e., $B_n(x) = \mathfrak{B}_n(x;1)$.

Polynômes d'Apostol-Euler : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, les polynômes d'Apostol-Euler sont les polynômes de degré n, notés $\mathfrak{E}_n(x;\lambda)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{2}{\lambda e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{E}_n(x;\lambda) \frac{t^n}{n!} \qquad (|t + \ln \lambda| < \pi). \tag{1.20}$$

On note $\mathfrak{E}_n(\lambda) := \mathfrak{E}_n(0;\lambda)$ le $n-ième$ nombre d'Apostol-Euler. Par conséquent, l'expression (1.20) permet d'obtenir la convolution binomiale suivante :

$$\mathfrak{E}_n(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \mathfrak{E}_{n-k}(\lambda).$$

Remarque 1.2 *Posons $\lambda = 1$ dans la formule (1.20), on trouve les polynômes d'Euler,* i.e., $E_n(x) = \mathfrak{E}_n(x;1)$.

Polynômes d'Apostol-Genocchi : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, les polynômes d'Apostol-Genocchi sont les polynômes de degré n, notés $\mathfrak{G}_n(x;\lambda)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{2t}{\lambda e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{G}_n(x;\lambda) \frac{t^n}{n!} \qquad (|t + \ln \lambda| < \pi). \tag{1.21}$$

On note $\mathfrak{G}_n(\lambda) := \mathfrak{G}_n(0;\lambda)$ le $n-$*ième* nombre d'Apostol-Genocchi. Par conséquent, l'expression (1.21) permet d'obtenir la convolution binomiale suivante :

$$\mathfrak{G}_n(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \mathfrak{G}_{n-k}(\lambda).$$

Remarque 1.3 *Posons $\lambda = 1$ dans la formule (1.21), on trouve les polynômes de Genocchi,* i.e., $G_n(x) = \mathfrak{G}_n(x;1)$.

1.8 Représentations ombrales

Le calcul ombral est le nom d'un ensemble de techniques de calcul formel qui, avant les années 1970, était plutôt appelé calcul symbolique. Il s'agit de l'étude des similarités surprenantes entre certaines formules polynomiales à priori non reliées entre elles. Ces techniques furent introduites en 1861 par John Blissard [20]. Elles sont parfois connues sous le nom de méthode symbolique de Blissard. Dans les années $1930-1940$, Eric Temple Bell donna des bases rigoureuses au calcul ombral.

Dans cette partie, nous donnons quelques identités combinatoires qui ont été prouvées en utilisant l'approche ombrale sur les polynômes d'Appell. Le lecteur pourra consulter [51] pour plus de détails.

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ la suite des nombres réels donnée par (1.7) et notons $\mathbf{A}^n := \alpha_n$, le nombre ombral défini par sa fonction génératrice (exponentielle) :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} = e^{\mathbf{A}t}. \tag{1.22}$$

Soient $(A_n(x))_{n\geq 0}$ les polynômes d'Appell donnés par (1.6). On appelle représentation ombrale, toute représentation donné par l'identité suivante :

$$A_n(x) := (\mathbf{A} + x)^n.$$

Donc,

$$\sum_{n\geq 0} A_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{(\mathbf{A}+x)t}. \tag{1.23}$$

Le théorème suivant donne une identité symétrique générale aux polynômes d'Appell et généralise le théorème 1.1 de He et *al.* [35].

Théorème 1.5 [51] *Soient n et m deux entiers naturels. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}A_{m+k}(x) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-y)^{m-k}A_{n+k}(x+y).$$

Par définition de la suite $(A_n(x))_{n\geq 0}$, on a $D_x^p A_n(x) = (n)_p A_{n-p}(x)$, où, $D_x^p = \frac{d^p}{dx^p}$, $(x)_p := x(x-1)\cdots(x-p+1)$ si $p\geq 1$ et $(x)_0 := 1$.

En dérivant p fois des deux membres de l'identité du théorème 1.5 par rapport à x, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.1 [51] *Soient n, m, p des entiers naturels, tels que $p \leq \min(n, m)$. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+k}{p}y^{n-k}A_{m-p+k}(x) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{p}(-y)^{m-k}A_{n-p+k}(x+y).$$

1.9 Approche déterminentale pour les polynômes d'Appell

Nous présentons dans cette partie une approche pour les polynômes d'Appell au moyen d'une forme déterminentale due à F. A. Costabile et E. Longo [28].

Théorème 1.6 *Soit $A_n(x)$ un polynôme d'Appell de degré n. Alors :*

$$A_0(x) = \frac{1}{\beta_0};$$

$$A_n(x) = \frac{(-1)^n}{\beta_0^{n+1}} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & \dots & x^{n-1} & x^n \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ 0 & \beta_0 & \binom{2}{1}\beta_1 & \binom{3}{1}\beta_2 & \dots & \dots & \binom{n-1}{1}\beta_{n-2} & \binom{n}{1}\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \beta_0 & \binom{3}{2}\beta_1 & \dots & \dots & \binom{n-1}{2}\beta_{n-3} & \binom{n}{2}\beta_{n-2} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \dots & \dots & 0 & \beta_0 & \binom{n}{n-1}\beta_1 \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où $\alpha_0 = \dfrac{1}{\beta_0}$ *avec* $\beta_0 \neq 0$ *et* $\alpha_k = -\dfrac{1}{\beta_0}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\beta_{k-i}\alpha_i, \quad k = 1, 2, \dots, n,$
ou, en d'autres termes, les β_n sont définis par leur fonction génératrice :

$$\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{t^n}{n!},$$

tels que, $f(t)\beta(t) = 1$ et $f(t)$ est donné dans (1.7).

1.9.1 Application du théorème 1.6

Nous donnons quelques exemples classiques de polynômes d'Appell, en particulier les polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi qui sont étudiés dans la littérature.
Polynômes de Bernoulli : La représentation polynômiale de Bernoulli au moyen d'une forme déterminentale, est donnée par F. A. Costabile, F. Dell'Accio et M. I. Gualtieri en 2006 [27].

Pour $\beta_0 = 1$ et $\beta_k = \dfrac{1}{k+1}$, $1 \leq k \leq n$. On obtient alors :

$$B_0(x) = 1;$$

$$B_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \cdots & \frac{n-1}{2} & \frac{n}{2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2}\binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Polynômes d'Euler : La représentation polynômiale d'Euler au moyen d'une forme déterminentale est donnée par $\beta_0 = 1$ et $\beta_k = \dfrac{1}{2}$, pour $1 \leq k \leq n$. On obtient alors :

$$E_0(x) = 1;$$

$$E_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\binom{2}{1} & \cdots & \frac{1}{2}\binom{n-1}{1} & \frac{1}{2}\binom{n}{1} \\ \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\binom{n-1}{2} & \frac{1}{2}\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2}\binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

1.10 Polynômes d'Appell d'ordre α

Soit α un nombre réel, les polynômes d'Appell d'ordre α sont les polynômes dans $\mathbb{R}[x]$ de degré n, notés $A_n^{(\alpha)}(x)$, définis par leur fonction génératrice (exponentielle) :

$$(f(t))^{\alpha}\, e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.24}$$

Remarque 1.4

Pour $\alpha = 1$, on retrouve la fonction génératrice des polynômes d'Appell définis dans (1.6).

Pour $\alpha = 0$, on retrouve la fonction génératrice de la suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

1.10.1 Quelques exemples

Dans cette partie, nous donnons quelques exemples pour les polynômes d'Appell $A_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre α.

Polynômes de Bernoulli d'ordre α : Les polynômes de Bernoulli d'ordre α sont les polynômes réels de degré n introduits par Nőrland [53], notés $B_n^{(\alpha)}(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < 2\pi). \tag{1.25}$$

Polynômes d'Euler d'ordre α : Les polynômes d'Euler d'ordre α sont les polynômes réels de degré n introduits par Nőrland [53], notés $E_n^{(\alpha)}(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi).$$

Polynômes de Genocchi d'ordre α : Les polynômes de Genocchi d'ordre α sont les polynômes réels de degré n introduits par Nőrland [53], notés $G_n^{(\alpha)}(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi).$$

Pour $\alpha = l,\ \ l \in \mathbb{N}$, on peut exprimer explicitement les polynômes de Genocchi d'ordre l en termes de polynômes de Genocchi d'ordre l (voir par exemple, [44, p. 5707, Lemme 1]) :

$$G_n^{(l)}(x) = \frac{n!}{(n-l)!}E_{n-l}^{(l)}(x), \qquad (0 \leq l \leq n). \tag{1.26}$$

Polynômes d'Apostol-Bernoulli d'ordre α : Les polynômes d'Apostol-Bernoulli d'ordre α sont les polynômes de degré n introduits par Luo [40], notés $\mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t+\ln\lambda| < 2\pi).$$

Cas particuliers :

– Pour $\alpha = 0$, on retrouve la suite des monômes x^n,

– Pour $\alpha = 1$, on retrouve les polynômes d'Apostol-Bernoulli $\mathfrak{B}_n(x;\lambda)$,

– Pour $\lambda = 1$, on retrouve les polynômes de Bernoulli $B_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre α,

– Pour $(\alpha,\lambda) = (1,1)$, on retrouve les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$.

Polynômes d'Apostol-Euler d'ordre α : Les polynômes d'Apostol-Euler d'ordre α sont les polynômes de degré n introduits par Luo [40], notés $\mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t+\ln\lambda| < \pi).$$

Cas particuliers :

– Pour $\alpha = 0$, on retrouve la suite des monômes x^n,

– Pour $\alpha = 1$, on retrouve les polynômes d'Apostol-Euler $\mathfrak{E}_n(x;\lambda)$,

– Pour $\lambda = 1$, on retrouve les polynômes d'Euler $E_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre α,

– Pour $(\alpha, \lambda) = (1, 1)$, on retrouve les polynômes d'Euler $E_n(x)$.

Nous présentons l'identité de convolution pour les polynômes d'Appell $A_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre α de degré n par le théorème suivant.

Théorème 1.7 [54] *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A_n^{(\alpha)}(x)$ un polynôme d'Appell d'ordre α. Alors :*

$$A_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k^{(\alpha)}(x) A_{n-k}^{(\beta)}(y). \tag{1.27}$$

Conséquence 1 :

Posons $\beta = 0$ et $y = 1$ dans la formule (1.27), on obtient :

$$A_n^{(\alpha)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k^{(\alpha)}(x). \tag{1.28}$$

Le résultat suivant donne une forme explicite pour les polynômes d'Appell d'ordre α de degré n, en termes des polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi.

Théorème 1.8 [54] *Soit $A_n^{(\alpha)}(x)$ un polynôme d'Appell d'ordre α. Alors :*

La formule de convolution en termes de polynômes de Bernoulli d'ordre α est donnée par :

$$A_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j+1} \binom{n}{j} \binom{j+1}{k} A_{n-j}^{(\alpha)}(y) \right] B_k(x), \tag{1.29}$$

la formule de convolution en termes de polynômes d'Euler d'ordre α est donnée par :

$$A_n^{(\alpha)}(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} A_{n-k}^{(\alpha)}(y) + \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \binom{j}{k} A_{n-j}^{(\alpha)}(y) \right] E_k(x), \tag{1.30}$$

la formule de convolution en termes de polynômes de Genocchi d'ordre α est donnée par :

$$A_n^{(\alpha)}(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} A_{n-k}^{(\alpha)}(y) + \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \binom{j}{k} A_{n-j}^{(\alpha)}(y) \right] G_{k+1}(x). \tag{1.31}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$ on trouve une formule explicite pour les polynômes d'Appell $A_n(x)$ en termes des polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi.

Corollaire 1.2 *Soit $A_n(x)$ un polynôme d'Appell. Alors :*

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j+1} \binom{n}{j} \binom{j+1}{k} A_{n-j}(y) \right] B_k(x) \tag{1.32}$$

$$A_n(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} A_{n-k}(y) + \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \binom{j}{k} A_{n-j}(y) \right] E_k(x) \tag{1.33}$$

$$A_n(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} A_{n-k}(y) + \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \binom{j}{k} A_{n-j}(y) \right] G_{k+1}(x). \tag{1.34}$$

1.11 Polynômes de Sheffer

Il existe différentes méthodes pour définir les polynômes de Sheffer [60], par leur fonction génératrice et par une relation de récurrence différentielle sont les plus courantes.

Les polynômes de Sheffer sont les polynômes réels de degré n, notés $s_n(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\mathscr{A}(t)e^{xH(t)} = \sum_{n\geq 0} s_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{1.35}$$

où $\mathscr{A}(t)$ et $H(t)$ sont définis par leurs fonctions génératrices, respectivement,

$$\mathscr{A}(t) = \sum_{n\geq 0} \mathscr{A}_n \frac{t^n}{n!}, \quad \mathscr{A}_0 \neq 0$$

et

$$H(t) = \sum_{n\geq 1} H_n \frac{t^n}{n!}, \quad H_1 \neq 0.$$

1.12 Quelques exemples sur les polynômes de Sheffer

Polynômes de Laguerre : Les polynômes de Laguerre, nommés d'après Edmond Laguerre $(1834-1886)$, sont les solutions de l'équation différentielle de Laguerre :

$$xy^{''}+(1-x)\,y^{'}+ny=0.$$

Les polynômes de Laguerre sont les polynômes réels de degré n, notés $L_n(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{1}{1-t}e^{\frac{xt}{t-1}}=\sum_{n\geq 0}L_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

tels que $\mathscr{A}(t)=\dfrac{1}{1-t}$ et $H(t)=\dfrac{t}{t-1}$.

Les premières polynômes de Laguerre sont les suivants :

$$\begin{aligned}
L_0(x)&=1,\\
L_1(x)&=-x+1,\\
L_2(x)&=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right),\\
L_3(x)&=\frac{1}{6}\left(-x^3+9x^2-18x+6\right),\\
L_4(x)&=\frac{1}{24}\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right),\\
L_5(x)&=\frac{1}{120}\left(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120\right).
\end{aligned}$$

Polynômes de Hermite : Les polynômes de Hermite sont des polynômes, nommés ainsi en l'honneur de Charles Hermite, ont été surtout étudiés par Joseph-Louis Lagrange lors de ses travaux sur les probabilités.

Les polynômes de Hermite sont les polynômes réels de degré n, notés $H_n(x)$, et définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < +\infty). \tag{1.36}$$

tels que $\mathscr{A}(t) = e^{-t^2}$ et $H(t) = 2t$.

Les premières polynômes de Hermite sont les suivants :

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Propriétés

1. **Relations de récurrences :**

   ◇ $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$

   ◇ $H_n^{'}(x) = 2nH_{n-1}(x),$

   ◇ $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n^{'}(x) = 0.$

2. **Equation différentielle :** $H_n(x)$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y^{''} - 2xy^{'} + 2ny = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

3. **Représentation intégrale :**

$$H_n(x) = \frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^{2+2ixt}} dt.$$

4. **Orthogonalité :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{m,n},$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker.

fonctions génératrices	**polynômes**
$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes Hermite
$e^{vxt-t^m}=\sum_{n=0}^{\infty}H_{n,m,v}(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes Hermite généralisés
$\frac{1}{1-t}e^{\frac{xt}{t-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes de Laguerre
$\frac{t}{1-t}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes de Pidduck
$e^{\beta t+x(1-e^t)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(\beta)}(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes actuariels
$e^{-t}\left(1+\frac{t}{a}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x;a)\frac{t^n}{n!}$	polynômes de Poisson-Charlier
$\left(1+(1+t)^{\lambda}\right)^{-\mu}(1+t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes de Peters
$\frac{t}{\ln(1+t)}(1+t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes de Bernoulli de deuxième espèce
$\frac{2}{2+t}(1+t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes relatifs
$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}e^{x\arctan t}=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(x)\frac{t^n}{n!}$	polynômes de Hahn

TABLE 1.2 – Exemples de polynômes de Sheffer

Chapitre 2

$\mathscr{P}$olynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r

Ce chapitre concerne l'étude des polynômes d'Euler-Genocchi, qui ont été introduits par Belbachir et *al.* [18]. Nous établissons quelques relations en utilisant l'approche déterminentale. Ce chapitre a fait l'objet de la référence [18].

2.1 Base déterminentale associée aux monômes x^n

Dans cette partie, nous nous intéressons à exprimer les monômes x^n par les différentes classes de polynômes d'Appell $A_n(x)$ qu'on a présentées dans le premier chapitre.

Tout d'abord, nous exprimons les monômes x^n par une représentation déterminentale en termes des polynômes de Bernoulli-Euler et de Bernoulli-Genocchi.

Proposition 2.1 *Soient x un nombre réel et n un entier naturel. Alors les identités suivantes sont vérifiées :*

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \begin{vmatrix} B_{n-(k-1)}(x+1) & E_k(x) \\ B_{n-(k-1)}(x) & E_k(x+1) \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

et

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} \begin{vmatrix} B_{n-(k-2)}(x+1) & G_k(x) \\ B_{n-(k-2)}(x) & G_k(x+1) \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Preuve. Posons, pour tout nombre réel t

$$T(x,t) := \frac{te^{xt}}{e^t-1} \times \frac{2e^{xt}}{e^t+1} \qquad (|t|<\pi).$$

En tenant compte des seconds membres de (1.11) et (1.13), un calcul direct nous permet d'obtenir :

$$T(x+1,t)-T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(B_{n-k}(x+1)E_k(x+1)-B_{n-k}(x)E_k(x)\right)\right\}\frac{t^n}{n!}.$$

D'autre part, nous avons :

$$T(x+1,t)-T(x,t) = 2t\exp(2xt) = \sum_{n=1}^{+\infty} n2^n x^{n-1}\frac{t^n}{n!}.$$

La comparaison des deux développements de la série $T(x+1,t)-T(x,t)$, nous permet d'obtenir l'identité (2.1).

La preuve de l'identité (2.2), est semblable à la preuve de (2.1). □

Comme première conséquence de la proposition 2.1, on peut montrer que les polynômes d'Appell $(A_n(x))_{n\geq 0}$ donnés par (1.6), peuvent être exprimés en termes des polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi. En effet, rappelant que la formule explicite d'Appell (1.9) est donnée par :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}x^k, \qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{2.3}$$

la substitution de x^k de (2.3) dans les deux expressions (2.1) et (2.2), nous permet d'obtenir les formules suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k}\sum_{j=0}^{k+1}\Lambda_{j,k,n}\times\begin{vmatrix} B_{k-(j-1)}(x+1) & E_j(x) \\ B_{k-(j-1)}(x) & E_j(x+1) \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

et

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k} \sum_{j=0}^{k+2} \Delta_{j,k,n} \times \begin{vmatrix} B_{k-(j-2)}(x+1) & G_j(x) \\ B_{k-(j-2)}(x) & G_j(x+1) \end{vmatrix}, \tag{2.5}$$

où $\Lambda_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1}(k+1)} \dbinom{n}{k} \dbinom{k+1}{j}$ et $\Delta_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1}(k+1)(k+2)} \dbinom{n}{k} \dbinom{k+2}{j}$.

Récemment, plusieurs formules d'addition ont été obtenues dans [54] pour une grande classe de polynômes d'Appell. Comme conséquence de la proposition 2.1, nous déduisons deux nouvelles formules d'addition déterminentales, pour les polynômes d'Appell en termes des polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi.

Théorème 2.1 *Soit $\{A_n(x)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes d'Appell. Alors les formules d'addition suivantes sont vérifiées :*

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(y) \sum_{j=0}^{k+1} \Lambda_{j,k,n} \times \begin{vmatrix} B_{k-(j-1)}(x+1) & E_j(x) \\ B_{k-(j-1)}(x) & E_j(x+1) \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

et

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(y) \sum_{j=0}^{k+2} \Delta_{j,k,n} \times \begin{vmatrix} B_{k-(j-2)}(x+1) & G_j(x) \\ B_{k-(j-2)}(x) & G_j(x+1) \end{vmatrix}, \tag{2.7}$$

où $\Lambda_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1}(k+1)} \dbinom{n}{k} \dbinom{k+1}{j}$ *et* $\Delta_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1}(k+1)(k+2)} \dbinom{n}{k} \dbinom{k+2}{j}$.

Preuve. Soient $(A_n(x))_{n\geq 0}$ les polynômes d'Appell donnés par (1.6). En remplaçant le facteur x^k dans (2.3) par son expression donnée par (2.1), puis en intervertissant l'ordre de la double somme résultante, nous obtenons la formule (2.6).
Avec le même raisonnement, l'expression (2.7) peut être prouvée à l'aide des deux formules (2.2) et (2.3). □

Le développement déterminental (2.1) de x^n et l'expression (2.6) de $A_n(x+y)$ s'expriment en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler. Cependant, ces formules peuvent être exprimées en termes des polynômes de Bernoulli seulement. En effet, pour tout n, un entier naturel, il est établi dans [29, 67] que

$$E_n(x) = \frac{2}{n+1}\left[B_{n+1}(x) - 2^{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{2.8}$$

Par conséquent, la formule d'expansion déterminentale de x^n donnée par l'expression (2.1) ne peut contenir que les polynômes de Bernoulli. En considérant (2.8), pour tous s et k deux entiers naturels et x un nombre réel, on note

$$\mathbb{E}_{s,k}(x) := \frac{2}{k+1}\begin{vmatrix} B_s(x+1) & B_k(x) \\ & \\ B_s(x) & B_k(x+1) \end{vmatrix} - \frac{2^{k+2}}{k+1}\begin{vmatrix} B_s(x+1) & B_k\left(x/2\right) \\ & \\ B_s(x) & B_k\left((x+1)/2\right) \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

De même, il est établi que, [2, 8],

$$G_n(x) = 2B_n(x) - 2^{n+1}B_n\left(\frac{x}{2}\right). \tag{2.10}$$

Aussi, la formule d'expansion déterminentale de x^n donnée par l'expression (2.2) ne peut contenir que les polynômes de Bernoulli. En considérant (2.10), pour tous s, k deux entiers naturels, et x un nombre réel, on note

$$\mathbb{G}_{s,k}(x) := 2\begin{vmatrix} B_s(x+1) & B_k(x) \\ & \\ B_s(x) & B_k(x+1) \end{vmatrix} - 2^{k+1}\begin{vmatrix} B_s(x+1) & B_k\left(x/2\right) \\ & \\ B_s(x) & B_k\left((x+1)/2\right) \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Proposition 2.2 *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathbb{E}_{n-k+1,k+1}(x) \tag{2.12}$$

et

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}\mathbb{G}_{n-k+2,k}(x), \tag{2.13}$$

où $\mathbb{E}_{n,k}(x)$ et $\mathbb{G}_{n,k}(x)$ sont respectivement donnés par (2.9) et (2.11).

Preuve. Pour $s = n-(k-1)$, la substitution de (2.8) de la proposition 2.1 conduit à la relation suivante : pour tous k, n deux entiers naturels, tels que

$$\begin{vmatrix} B_{n-(k-1)}(x+1) & E_k(x) \\ B_{n-(k-1)}(x) & E_k(x+1) \end{vmatrix} = \mathbb{E}_{n-k+1,k+1}(x), \qquad (0 \leq k \leq n+1).$$

Ceci achève la preuve de la première assertion. Pour la seconde identité (2.13), on procède de manière similaire à ce qui précède. $\square$

L'expression (2.12) peut être utilisée pour établir une nouvelle formule d'addition, pour les polynômes d'Appell. Autrement dit, la substitution de (2.12) dans (2.3), implique la relation suivante :

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k+1} \Lambda_{j,k,n} A_{n-k}(y) \times \mathbb{E}_{k-j+1,j+1}(x),$$

où $\quad \Lambda_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1}(k+1)}\dbinom{n}{k}\dbinom{k+1}{j}$.

Le même raisonnement reste valable pour l'expression (2.13). Par conséquent, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Soit $\{A_n(x)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes d'Appell. Alors :*

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(y) \sum_{j=k}^{n+1} \Lambda_{j,k,n} \times \mathbb{E}_{k-j+1,j+1}(x) \tag{2.14}$$

et

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(y) \sum_{j=k}^{n+2} \Delta_{j,k,n} \times \mathbb{G}_{k-j+2,j}(x), \tag{2.15}$$

où $\Lambda_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1}(k+1)}\dbinom{n}{k}\dbinom{k+1}{j}$ *et* $\Delta_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1}(k+1)(k+2)}\dbinom{n}{k}\dbinom{k+2}{j}$.

Les expressions (2.14)- (2.15), peuvent être généralisées en utilisant les sommes emboitées. Pour plus de détails consulter [46, 24, 59].

Posons,

$$\mathbb{W}_{k,n}(x) = \sum_{j=k}^{n+1} \Lambda_{j,k,n} \times \mathbb{E}_{k-j+1,j+1}(x)$$

et

$$\mathbb{U}_{k,n}(x) = \sum_{j=k}^{n+2} \Delta_{j,k,n} \times \mathbb{G}_{k-j+2,j}(x),$$

où $\mathbb{E}_{k,j}(x)$ et $\mathbb{G}_{k,j}(x)$ sont donnés dans (2.9) et (2.11), respectivement. Il s'ensuit que, les expressions (2.14) et (2.15) prennent les formes suivantes :

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(y)\mathbb{W}_{k,n}(x)$$

et

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(y)\mathbb{U}_{k,n}(x).$$

Par conséquent, les formules (2.14) et (2.15), peuvent être étendues comme suit :

Proposition 2.3 *Soient $x_1,\ldots,x_s$, y des nombres réels et $n \geq 1$. Alors :*

$$A(x_1 + \cdots + x_s + y) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_s=0}^{n-\sum_{i=1}^{s-1} k_i} A_{n-\sum_{i=1}^{s} k_i}(y)\mathbb{Y}_{k_1,\ldots,k_s;n}(x_1,\ldots,x_s) \tag{2.16}$$

et

$$A(x_1 + \cdots + x_s + y) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_s=0}^{n-\sum_{i=1}^{s-1} k_i} A_{n-\sum_{i=1}^{s} k_i}(y)\mathbb{V}_{k_1,\ldots,k_s;n}(x_1,\ldots,x_s), \tag{2.17}$$

où

$$\mathbb{Y}_{k_1,\ldots,k_s;n}(x_1,\ldots,x_s) = \mathbb{W}_{k_1,n}(x_1)\mathbb{W}_{k_2,n-k_1}(x_2)\cdots\mathbb{W}_{k_s,n-\sum_{i=1}^{s-1} k_i}(x_s), \tag{2.18}$$

$$\mathbb{V}_{k_1,\ldots,k_s;n}(x_1,\ldots,x_s) = \mathbb{U}_{k_1,n}(x_1)\mathbb{U}_{k_2,n-k_1}(x_2)\cdots\mathbb{U}_{k_s,n-\sum_{i=1}^{s-1} k_i}(x_s). \tag{2.19}$$

En fait, les expressions (2.16)-(2.19) représentent une formule de sommes emboitées. Pour $s = 1$, nous pouvons montrer facilement que (2.14) et (2.15) représentent un cas particulier de (2.16) et (2.19).

De même pour (2.4) et (2.5), la proposition 2.2 peut être utilisée pour établir que les polynômes d'Appell $\{A_n(x)\}_{n\geq 0}$, peuvent être exprimés en termes de polynômes de Bernoulli. En effet, un calcul simple, utilisant la substitution de x^n donnée sous la forme (2.12) et (2.13) dans (1.9), nous permet de montrer que :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k} \sum_{j=0}^{k+1} \Lambda_{j,k,n} \times \mathbb{E}_{k-j+1,j+1}(x),$$

où $\Lambda_{j,k,n} = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)}\binom{n}{k}\binom{k+1}{j}$ et $\mathbb{E}_{k,j}(x)$ est donné par (2.9), et

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k} \sum_{j=0}^{k+2} \Delta_{j,k,n} \times \mathbb{G}_{k-j+2,j}(x),$$

où $\Delta_{j,k,n} = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}\binom{k+2}{j}$ et $\mathbb{G}_{k,j}(x)$ est donné par (2.11).

Remarque 2.1 *L'expression* (2.8) *montre que l'on peut également établir un développement de x^n en termes de polynômes de Bernoulli. Toutefois, l'expression de x^n en termes de polynômes d'Euler et de Genocchi peut également être établie, en tenant compte des formules suivantes :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0,k\neq 1}^{n} \binom{n}{k} B_k E_{n-k}(x) = \sum_{k=0,k\neq n-1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} E_k(x), \tag{2.20}$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli (voir [25, 39]*).*

De plus, en utilisant une relation liant les polynômes de Genocchi et d'Euler, (voir, par exemple, [44, Lemme 1]*), on a :*

$$E_n(x) = \frac{1}{n+1} G_{n+1}(x) \quad \textit{et} \quad G_n(x) = nE_{n-1}(x). \tag{2.21}$$

Ainsi, en combinant (2.20) et (2.21), nous avons le développement suivant :

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0,k\neq 1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n-(k-1)} B_k G_{n-(k-1)}(x) \\ &= \sum_{k=0,k\neq n-1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} B_{n-k} G_{k+1}(x). \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.2 Polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r

Dans cette partie, nous étudions les polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r, qui généralisent les polynômes classiques d'Euler $E_n(x)$ et de Genocchi $G_n(x)$. Pour cette classe, quelques résultats sont établis en utilisant les deux approches déterminentale et la fonction génératrice.

Définition 2.1 *Soient n et r deux entiers naturels, les polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r sont les polynômes réels de degré n, notés $A_n^{(r)}(x)$, et définis par leur fontion génératrice exponentielle :*

$$\frac{2t^r}{e^t+1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x) \frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi). \tag{2.23}$$

On note $A_n^{(r)} := A_n^{(r)}(0)$, le nombre d'Euler-Genocchi d'ordre r.

Pour $r \geq 2$ la sommation commence à partir de r *i.e.*, $A_j^{(r)}(x) = 0$ for $0 \leq j \leq r-1$.

Ce type de généralisation a été envisagé pour les polynômes de Bernoulli dans [52]. Les polynômes d'Euler et de Genocchi sont des cas particuliers $E_n(x) = A_n^{(0)}(x)$ et $G_n(x) = A_n^{(1)}(x)$, respectivement.

Les monômes x^n, $n \in \mathbb{N}$, peuvent s'exprimer en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler-Genocchi d'ordre r sous forme déterminentale par la proposition suivante :

Proposition 2.4 *Soient $B_n(x)$ un polynôme de Bernoulli et $A_n^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-*

Genocchi d'ordre r. Alors, pour tous n et r deux entiers naturels on a :

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+r+1)_{r+1}} \sum_{k=0}^{n+r+1} \binom{n+r+1}{k} \begin{vmatrix} B_{n+r+1-k}(x+1) & A_k^{(r)}(x) \\ B_{n+r+1-k}(x) & A_k^{(r)}(x+1) \end{vmatrix}, \qquad (0 \leq r \leq n). \tag{2.24}$$

Preuve. La preuve est basée sur le processus similaire de la proposition 2.1. En effet, posons :

$$T(x,t) = \frac{2t^r}{e^t+1} e^{xt} \frac{t}{e^t-1} e^{xt}.$$

En utilisant le produit de Cauchy, on obtient :

$$T(x+1,t) - T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{vmatrix} B_{n-k}(x+1) & A_k^{(r)}(x) \\ B_{n-k}(x) & A_k^{(r)}(x+1) \end{vmatrix} \frac{t^n}{n!}.$$

D'autre part, nous avons :

$$T(x+1,t) - T(x,t) = 2t^{r+1}e^{2xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} x^n \frac{t^{n+r+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-r} x^{n-r-1} \frac{t^n}{(n-r-1)!}.$$

En égalisant les deux séries précédentes, nous obtenons le résultat. □

En combinant (2.3) et (2.24), on a une formule d'addition liée aux polynômes d'Appell.

Théorème 2.3 *Soit $A_n(x)$ un polynôme d'Appell, alors, la formule de convolution en termes de polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ et de polynômes d'Euler-Genocchi $A_n^{(r)}(x)$ d'ordre r est donnée par :*

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}(y) \sum_{j=0}^{k+r+1} \Omega_{j,k,n} \times \begin{vmatrix} B_{k+r-j+1}(x+1) & A_j^{(r)}(x) \\ B_{k+r-j+1}(x) & A_j^{(r)}(x+1) \end{vmatrix} \qquad (0 \leq r \leq k), \tag{2.25}$$

où $\Omega_{j,k,n} = \dfrac{1}{2^{k+1} \prod_{i=1}^{r+1}(k+i)} \dbinom{n}{k} \dbinom{k+r+1}{j}.$

On note que $A_j^{(r)}(y) \equiv 0$, pour $0 \leq j \leq r-1$, nous avons donc, $A_{n-k}(y) \equiv 0$ pour $0 \leq n-k \leq r-1$.

Pour $r=0$ et $r=1$ respectivement, la formula (2.25) donnent (2.6) et (2.7) respectivement. L'expression (2.25) se généralise aux sommes emboitées (voir [46, 24, 59]).

Posons :

$$\mathbb{W}_{k,n}^{(r)}(x)=\sum_{j=k}^{n+1}\Omega_{j,k,n}\times\begin{vmatrix} B_{k-j+1}(x+1) & A_j^{(r)}(x) \\ B_{k-j+1}(x) & A_j^{(r)}(x+1)\end{vmatrix},$$

où $\Omega_{j,k,n}=\dfrac{1}{2^{k+1}\prod_{i=1}^{r+1}(k+i)}\dbinom{n}{k}\dbinom{k+r+1}{j}$.

Par conséquent, l'expression (2.25) devient :

$$A_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}(y)\mathbb{W}_{k,n}^{(r)}(x).$$

On procède d'une manière analogue à celle de l'expression (2.14). La généralisation de (2.25) est, pour tout entier $n\geq 1$ et nombres réels $x_1,\ldots,x_s$, y, donnée par

$$A_n(x_1+\cdots+x_s+y)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\cdots\sum_{k_s==0}^{n-\sum_{i=1}^{s-1}k_i}A_{n-\sum_{i=1}^{s}k_i}(y)\mathbb{Y}_{k_1,\ldots,k_s;n}^{(r)}(x_1,\ldots,x_s),\quad(2.26)$$

où

$$\mathbb{Y}_{k_1,\ldots,k_s;n}^{(r)}(x_1,\ldots,x_s)\quad=\quad\mathbb{W}_{k_1,n}^{(r)}(x_1)\mathbb{W}_{k_2,n-k_1}^{(r)}(x_2)\cdots\mathbb{W}_{k_s,n-\sum_{i=1}^{s-1}k_i}^{(r)}(x_s),\qquad(2.27)$$

Pour $r=1$, on remarque que les relations (2.26) et (2.27) se réduisent des relations (2.16) et (2.18).

Pour $s=1$ dans (2.26)-(2.27), on récupère la formule (2.25).

Par ailleurs, la substitution de (2.24) par (2.8), nous amène par un calcul directe au résultat général suivant :

Théorème 2.4 *Soient $A_n(x)$ un polynôme d'Appell et $A_n^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-Genocchi d'ordre r. Alors, pour tous n et r deux entiers naturels, tels que $n\geq r$, on a :*

$$A_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k}\sum_{j=0}^{k+r+1}\Omega_{j,k,n}\times\begin{vmatrix} B_{k+r-j+1}(x+1) & A_j^{(r)}(x) \\ B_{k+r-j+1}(x) & A_j^{(r)}(x+1)\end{vmatrix}.$$

Posons :

$$\Theta_{m,k}^{(r)}(x,y) = \begin{vmatrix} B_m(x+1) & A_k^{(r)}(y) \\ B_m(x) & A_k^{(r)}(y+1) \end{vmatrix}.$$

La famille de déterminants $\{\Theta_{m,k}(x,y)\}_{m,k\geq 0}$, apparaissant dans les résultats des sections précédentes, vérifie certaines identités intéressantes. En effet, comme $A_n^{(r)}(x)$ est un polynôme d'Appell, ce qui implique que, $A_n^{(r)}(x)$ satisfait à l'identité convoluée suivante :

$$A_k^{(r)}(y+z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^j A_{k-j}^{(r)}(z).$$

Par conséquent, on peut formuler la propriété suivante :

Proposition 2.5 *Soient $A_k^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-Genocchi d'ordre r et $B_m(x)$ un polynôme de Bernoulli. Alors, pour tous x, y, z des nombres réels et m, k deux entiers naturels, on a :*

$$\begin{vmatrix} B_m(x+1) & A_k^{(r)}(z+y) \\ B_m(x) & A_k^{(r)}(z+y+1) \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^j \begin{vmatrix} B_m(x+1) & A_{k-j}^{(r)}(z) \\ B_m(x) & A_{k-j}^{(r)}(z+1) \end{vmatrix}.$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\Theta_{m,k}^{(r)}(x,z+y) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^j \Theta_{m,k-j}^{(r)}(x,z).$$

En particulier, pour $y=(s-1)x$ et $z=x$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.1 *Soient $A_k^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-Genocchi d'ordre r et $B_m(x)$ un polynôme de Bernoulli. Alors, pour tous x un nombre réel et m, k, s des entiers naturels, on a :*

$$\begin{vmatrix} B_m(x+1) & A_k^{(r)}(sx) \\ B_m(x) & A_k^{(r)}(sx+1) \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (s-1)^{k-j} x^{k-j} \begin{vmatrix} B_m(x+1) & A_j^{(r)}(x) \\ B_m(x) & A_j^{(r)}(x+1) \end{vmatrix}. \quad (2.28)$$

C'est-à-dire

$$\Theta_{m,k}^{(r)}(x, sx) = \sum_{j=0}^{k}(s-1)^{k-j}\binom{k}{j}x^{k-j}\Theta_{m,j}^{(r)}(x, x).$$

Pour $y = (s-t)x$ et $z = tx$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *Soient $A_k^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-Genocchi d'ordre r et $B_m(x)$ un polynôme de Bernoulli. Alors, pour tous x un nombre réel et m, k, t, s des entiers naturels, tels que $s \geq t$, on a :*

$$\begin{vmatrix} B_m(x+1) & A_k^{(r)}(sx) \\ B_m(x) & A_k^{(r)}(sx+1) \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(s-t)^{k-j}x^{k-j}\begin{vmatrix} B_m(x+1) & A_j^{(r)}(tx) \\ B_m(x) & A_j^{(r)}(tx+1) \end{vmatrix}. \quad (2.29)$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\Theta_{m,k}^{(r)}(x, sx) = \sum_{j=0}^{k}(s-t)^{k-j}\binom{k}{j}x^{k-j}\Theta_{m,j}^{(r)}(x, tx).$$

Corollaire 2.3 *Soit $A_n^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-Genocchi d'ordre r. Alors, pour tous x, x_1, $\ldots$, x_p $(p \geq 1)$, y des nombres réels et m, n deux entiers naturels, on a :*

$$\Theta_{m,n}^{(r)}(x, \sum_{i=1}^{p}x_i + y) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_p=j}\binom{j}{i_1, i_2, \ldots, i_p}x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}\Theta_{m,n-\sum_{s=1}^{p}i_s}^{(r)}(x, y). \quad (2.30)$$

Preuve. En utilisant la proposition 2.5 pour $\Theta_{m,n}^{(r)}(x, \sum_{i=1}^{p}x_i + y)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Theta_{m,n}^{(r)}(x, \sum_{i=1}^{p}x_i + y) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^{j}\Theta_{m,n-j}^{(r)}(x, y) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_p=j}\binom{j}{i_1, i_2, \ldots, i_p}x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}\Theta_{m,n-\sum_{s=1}^{p}i_s}^{(r)}(x, y).\end{aligned}$$

$\square$

Pour $s = 1$, la relation (2.30) se réduit de la formule de la proposition 2.5. Maintenant pour $p = s-1$ et $x = x_1 = \cdots = x_p = y$, on peut déduire l'identité combinatoire suivante :

$$\Theta_{m,n}^{(r)}(x, sx) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}} x^{\sum_{i=1}^{s-1} j_i} \Theta_{m,n-\sum_{i=1}^{s-1} j_i}^{(r)}(x, x), \tag{2.31}$$

En comparant les deux expressions (2.28) et (2.31), on obtient l'identité :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (s-1)^{k-j} x^{k-j} \Theta_{m,j}^{(r)}(x, x) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}} x^{\sum_{i=1}^{s-1} j_i} \Theta_{m,n-\sum_{i=1}^{s-1} j_i}^{(r)}(x, x).$$

En utilisant (2.30) pour $p = s - t$, $x = x_1 = \cdots = x_p$ et $y = tx$, on déduit l'identité combinatoire suivante :

$$\Theta_{m,n}^{(r)}(x, sx) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-t}} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{s-t}} x^{\sum_{i=1}^{s-t} j_i} \Theta_{m,n-\sum_{i=1}^{s-t} j_i}^{(r)}(x, tx). \tag{2.32}$$

En comparant les deux expressions (2.29) et (2.32), on obtient l'identité,

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (s-t)^{k-j} x^{k-j} \Theta_{m,j}^{(r)}(x, tx) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-t}} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_{s-t}} x^{\sum_{i=1}^{s-t} j_i} \Theta_{m,n-\sum_{i=1}^{s-t} j_i}^{(r)}(x, tx).$$

Chapitre 3

$\mathscr{I}$dentités combinatoires pour les polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r

Ce chapitre est dédié à l'étude de quelques propriétés combinatoires liées aux polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r comme l'extension du théorème de Raabe, les sommes de Faulhaber et les liens avec les nombres de Stirling et les nombres de Jacobi-Stirling. Il fait essentiellement référence à [16].

Nous utiliserons essentiellement les polynômes d'Euler-Genocchi $A_n^{(r)}(x)$ d'ordre r qui sont définis dans le chapitre 2.
Par le théorème suivant, on exprime les monômes x^n en termes des polynômes d'Euler-Genocchi $A_n^{(r)}(x)$ d'ordre r.

Théorème 3.1 *Soient n et r deux entiers naturels, tels que, $r \leq n$. Alors :*

$$x^n = \frac{1}{2(n+r)_r} \left[A_{n+r}^{(r)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+r}{k+r} A_{k+r}^{(r)}(x) \right]. \tag{3.1}$$

Preuve. De (2.23), il en résulte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x+1) \frac{t^n}{n!} = \frac{2t^r}{e^t+1} e^{xt} e^t = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \right),$$

en utilisant le produit de Cauchy, nous obtenons la formule convolée suivante :

$$A_n^{(r)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k^{(r)}(x). \tag{3.2}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\left(A_n^{(r)}(x+1)+A_n^{(r)}(x)\right)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2t^r}{e^t+1}e^{(x+1)t}+\frac{2t^r}{e^t+1}e^{xt}\\ &= 2t^r e^{xt}\\ &= 2t^r\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}2x^n\frac{t^{n+r}}{n!}\\ &= \sum_{n=r}^{\infty}2(n)_r x^{n-r}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

En égalisant les deux séries et en utilisant (3.2), ce qui induit l'identité (3.1). □

Corollaire 3.1 [54, 67] *Soient $E_n(x)$ un polynôme d'Euler et $G_n(x)$ un polynôme de Genocchi. Alors :*

$$x^n = \frac{1}{2}\left[E_n(x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)\right] \tag{3.3}$$

et

$$x^n = \frac{1}{2(n+1)}\left[G_{n+1}(x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}G_{k+1}(x)\right]. \tag{3.4}$$

Remarque 3.1 *Ces formules sont prouvées par Pintér et Srivastava, pour* (3.3) *voir* [67, Eq (29)] *et pour* (3.4) *voir* [54, Eq (18)].

La formule correspondante pour les polynômes de Bernoulli est, (voir par exemple [67, Eq (27)])

$$x^n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(x).$$

Classiquement, le théorème de multiplication pour les polynômes d'Euler et de Bernoulli est prouvé par Raabe [55], pour tout m un entier, on a :

$$\sum_{k=0}^{m-1}B_n\left(\frac{x+k}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}}B_n(x)$$

et

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right) = \frac{1}{m^n}E_n(x), \quad m \text{ impair}.$$

La formule correspondante pour les polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit $A_n^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-Genocchi d'ordre r. Pour tout entier naturel m impair, on a :*

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k A_n^{(r)}\left(\frac{x+k}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-r}}A_n^{(r)}(x).$$

Preuve. De (2.23), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k A_n^{(r)}\left(\frac{x+k}{m}\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}\left(\frac{x+k}{m}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{2t^r}{e^t+1}\exp\left((x+k)t/m\right) \\
&= \frac{2t^r}{\exp(t)+1}\exp(xt/m)\frac{[1-(-\exp(t/m))^m]}{1+\exp(t/m)} \\
&= \frac{2t^r}{\exp(t/m)+1}\exp(xt/m) \\
&= m^r\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(r)}(x)\frac{(t/m)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m^{n-r}}A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t^n dans les deux membres, nous obtenons le résultat. □

Théorème 3.3 *Les polynômes d'Euler-Genocchi $A_n^{(r)}(x)$ d'ordre r vérifient la relation de récurrence linéaire suivante :*

$$\left(1-\frac{r}{n+1}\right)A_{n+1}^{(r)}(x) + (2-x)A_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{A_{k+r}^{(r)}}{(k+r)_r}A_{n-k}^{(r)}(x). \tag{3.5}$$

Preuve. En dérivant les deux membres de (2.23) par rapport à t, on trouve,

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2xt^r}{e^t+1}e^{xt} + \frac{2rt^{r-1}(e^t+1)-2t^r e^t}{(e^t+1)^2}e^{xt}\\
&= r\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^{n-1}}{n!} + (x-2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} + \frac{1}{e^t+1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}\\
&= r\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}A_{n+1}^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} + (x-2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}\\
&+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}\frac{t^{n-r}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}\right),\\
&= r\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}A_{n+1}^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} + (x-2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(k+r)_r}A_{k+r}^{(r)}A_{n-k}^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t^n dans les deux membres, nous obtenons le résultat.

□

Une première conséquence du théorème 3.3 à l'aide d'utilisation d'opérateurs linèaires, est de présenter $A_n^{(r)}(x)$ comme une solution de l'équation différentielle suivante :

Théorème 3.4 *Pour tous n, r deux entiers naturels. On a :*

$$\frac{A_{r+n-1}^{(r)}}{(n-1)!(r+n-1)_r}y^{(n)} + \cdots + \frac{A_{r+1}^{(r)}}{(r+1)_r}y^{(2)} + \left(\frac{A_r^{(r)}}{(r)_r} + (x-2)\right)y' + (r-n)y = 0.$$

Preuve. Comme $A_n^{(r)}(x)$ est une famille de polynômes d'Appell, on a

$$D_x^k A_n^{(r)}(x) = (n)_k A_{n-k}^{(r)}(x), \quad \text{où} \quad D_x^k := \frac{d^k}{dx^k}.$$

La relation de récurrence (3.5) peut être reformulée comme suit :

$$A_{n+1}^{(r)}(x) = \frac{n+1}{n-r+1}\left[(x-2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{k+r}^{(r)}}{k!(k+r)_r} D_x^k\right] A_n^{(r)}(x).$$

Soient E et $\widehat{E}$ les deux opérateurs linéaires

$$E := \frac{n+1}{n-r+1}\left[(x-2)I + \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{k+r}^{(r)}}{k!(k+r)_r} D_x^k\right] \qquad \text{et} \qquad \widehat{E} = \frac{1}{n+1} D_x.$$

En appliquant ces deux opérateurs $\widehat{E}$ et E à $A_n^{(r)}(x)$, on trouve la relation suivante :

$$\widehat{E} E A_n^{(r)}(x) = A_n^{(r)}(x). \tag{3.6}$$

Un calcul immédiat en utilisant les deux expressions (3.5) et (3.6), nous permet d'obtenir le résultat. □

3.1 Sommes de Faulhaber et sommes de Faulhaber alternées

Les sommes de Faulhaber et de Faulhaber alternées sont définies par, voir par exemple [39],

$$S_k(n) := \sum_{i=0}^{n} i^k \qquad \text{et} \quad T_k(n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^k. \tag{3.7}$$

Les fonctions génératrices exponentielles de $(S_k(n))_k$ et $(T_k(n))_k$ sont données par

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(n) \frac{t^k}{k!} = \frac{1-e^{(n+1)t}}{1-e^t}, \qquad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} T_k(n) \frac{t^k}{k!} = \frac{1-(-1)^{n+1}e^{(n+1)t}}{1+e^t}. \tag{3.8}$$

Les sommes de Faulhaber $(S_k(n))_k$ et de Faulhaber alternée $(T_k(n))_k$ sont, respectivement, liées aux polynômes de Bernoulli et d'Euler (voir [1, Eq. (23.1.4)]),

$$S_k(n) = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$$

et

$$T_k(n) = \frac{(-1)^n E_k(n+1) + E_k}{2}. \tag{3.9}$$

Pour la somme de Faulhaber alternée, nous avons une extension aux polynômes d'Euler-Genocchi d'ordre r.

Théorème 3.5 *Soient n et k deux entiers naturels. Alors :*

$$T_k(n) = \frac{(-1)^n A_{k+r}^{(r)}(n+1) + A_{k+r}^{(r)}}{2(k+r)_r}, \qquad k \geq r. \tag{3.10}$$

Preuve. De (3.8), nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} T_k(n)\frac{t^k}{k!} &= \frac{1-(-1)^{n+1}e^{(n+1)t}}{e^t+1} \\ &= \frac{2}{2(e^t+1)} - \frac{2(-1)^{n+1}e^{(n+1)t}}{2(e^t+1)}.\end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par t^r, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(n)\frac{t^{k+r}}{k!} = \frac{2t^r}{2(e^t+1)} - \frac{2t^r(-1)^{n+1}e^{(n+1)t}}{2(e^t+1)}.$$

Ainsi, une simple manipulation en utilsant (2.23), donne :

$$\sum_{k=r}^{\infty} (k)_r T_{k-r}(n)\frac{t^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(r)}\frac{t^k}{k!} - \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(r)}(n+1)\frac{t^k}{k!},$$

en identifiant les coefficients de t^k dans les deux membres, on trouve le résultat. $\square$

Remarque 3.2 *Pour $r = 0$, l'expression (3.10) donne la somme de Faulhaber alternée* *en termes de polynômes d'Euler* (3.9).

Pour $r=1$, cette somme s'écrit en termes de polynômes de Genocchi comme suit :

$$T_k(n) = \frac{(-1)^n G_{k+1}(n+1) + G_{k+1}}{2(k+1)}.$$

3.2 Sommes relatives aux nombres de Stirling de seconde espèce

Nous donnons un lien entre les nombres d'Euler-Genocchi d'ordre r, les nombres de Bernoulli et les nombres de Stirling de seconde espèce.

Théorème 3.6 *Soient $S(n,k)$ les nombres de Stirling de seconde espèce, alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}^{(r)} B_k = 2^{n-r}(n)_r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k+1} k! S(n-r,k). \tag{3.11}$$

Preuve. Posons, pour tout t un nombre réel, tel que $|t| < \pi$

$$\mathbb{T}(r,t) := \frac{2t^r}{e^t+1} \times \frac{t}{e^t-1}.$$

Compte tenu des membres de droites de (1.11) et (2.23) pour $x=0$, et utilisant le produit de Cauchy, on obtient alors :

$$\mathbb{T}(r,t) = \sum_{n\geq 0} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}^{(r)} B_k \right\} \frac{t^n}{n!}.$$

D'autre part,

$$\mathbb{T}(r,t) = \frac{2t^{r+1}}{e^{2t}-1} = \frac{t^r \ln\left((e^{2t}-1)+1\right)}{e^{2t}-1} = t^r \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}(e^{2t}-1)^k, \qquad (|t| < \ln\sqrt{2}).$$

En développant les fonctions $(e^{2t}-1)^k$ et e^{2t} en séries entières, on trouve,

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}(r,t) &= t^r \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} e^{2jt} \\
&= t^r \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{n\geq 0} 2^n j^n \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{t^{n+r}}{n!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule explicite de Stirling (1.5), on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}(r,t) &= \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{t^{n+r}}{n!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} k! S(n,k) \\
&= \sum_{n\geq 0} 2^{n-r} \frac{t^n}{(n-r)!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} k! S(n-r,k) \\
&= \sum_{n\geq 0} 2^{n-r} (n)_r \frac{t^n}{n!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} k! S(n-r,k).
\end{aligned}$$

Comme $S(n-r,k)=0$ quand $k>n-r$, donc

$$\mathbb{T}(r,t) = \sum_{n\geq 0} 2^{n-r} (n)_r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k+1} k! S(n-r,k) \frac{t^n}{n!},$$

ce qui achève la démonstration par identification. □

En particulier, pour $r=0$ et $r=1$ on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2 *Soient $S(n,k)$ les nombres de Stirling de seconde espèce. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k} B_k = 2^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} k! S(n,k)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n-k} B_k = 2^{n-1} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} k! S(n-1,k).$$

3.3 Approche déterminentale pour les polynômes d'Euler-Genocchi

Belbachir et *al.* [18] ont proposé une forme déterminentale pour exprimer le monôme x^n en termes de polynômes d'Euler-Genocchi et de polynômes de Bernoulli. Nous nous intéressons dans cette partie à donner une forme explicite de la somme de Faulhaber en termes d'une représentation déterminentale de polynômes de Bernoulli et de polynômes d'Euler-Genocchi. Pour cela nous allons rappeler l'énoncé de la proposition 2.4 du chapitre précédent par le théorème suivant.

Théorème 3.7 *Soient $B_n(x)$ un polynôme de Bernoulli et $A_n^{(r)}(x)$ un polynôme d'Euler-Genocchi d'ordre r. Alors, pour tous n, r et k des entiers naturels, tels que $n \geq r$, on a :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n+r+1} \Lambda_{n,k}^{(r)} \times \nabla_{n+r+1-k,k}^{(r)}(x+1, x), \tag{3.12}$$

où $\nabla_{n,k}^{(r)}(x,y) = \begin{vmatrix} B_n(x) & A_k^{(r)}(y) \\ B_n(y) & A_k^{(r)}(x) \end{vmatrix}$ *et* $\Lambda_{n,k}^{(r)} = \dfrac{1}{2^{n+1}(n+r+1)_{r+1}} \dbinom{n+r+1}{k}$.

Proposition 3.1 *Soient n, k et r des entiers naturels. Alors :*

$$\sum_{s=0}^{m} \nabla_{n,k}^{(r)}(s+1, s) = \nabla_{n,k}^{(r)}(m+1, 0).$$

Preuve. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{m} \nabla_{n,k}^{(r)}(s+1,s) &= \sum_{s=0}^{m} \begin{vmatrix} B_n(s+1) & A_k^{(r)}(s) \\ B_n(s) & A_k^{(r)}(s+1) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{s=0}^{m} \left[B_n(s+1)A_k^{(r)}(s+1) - B_n(s)A_k^{(r)}(s) \right] \\
&= \left[B_n(m+1)A_k^{(r)}(m+1) - B_n(0)A_k^{(r)}(0) \right] \\
&= \begin{vmatrix} B_n(m+1) & A_k^{(r)}(0) \\ B_n(0) & A_k^{(r)}(m+1) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.8 *Pour tous n, m et r des entiers naturels, on a :*

$$S_n(m) = \sum_{k=0}^{n+r+1} \Lambda_{n,k}^{(r)} \times \nabla_{n+r+1-k,k}^{(r)}(m+1,0). \tag{3.13}$$

Preuve. En utilisant la formule (3.12) pour $x = s$, on obtient :

$$s^n = \sum_{k=0}^{n+r+1} \Lambda_{n,k}^{(r)} \times \nabla_{n+r+1-k,k}^{(r)}(s+1,s). \tag{3.14}$$

En combinant les deux relations (3.14) et (3.7), on a le résultat. □

3.4 Représentation des nombres de Jacobi-Stirling sous forme déterminentale

Soient n, k deux entiers naturels et γ un nombre réel positif. Les nombres de Jacobi-Stirling de première espèce $J_\gamma^s(n,k)$ et de seconde espèce $J_\gamma^S(n,k)$ sont donnés, respectivement, par leurs fonctions génératrices :

$$F_n(t) := \prod_{k=1}^{n}(1 + k(k + 2\gamma - 1)t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_\gamma^s\,(n + 1, n + 1 - k)\, t^k \tag{3.15}$$

et

$$H_n(t) := \prod_{k=1}^{n}(1 - k(k + 2\gamma - 1)t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} J_\gamma^S\,(n + k, n)\, t^k \quad \left(|t| < \frac{1}{n(n + 2\gamma - 1)}\right), \tag{3.16}$$

qui satisfont les relations de récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned} J_\gamma^s\,(n, k) &= J_\gamma^s\,(n - 1, k - 1) + (n - 1)(n + 2\gamma - 2)J_\gamma^s\,(n - 1, k)\,, \\ J_\gamma^S\,(n, k) &= J_\gamma^S\,(n - 1, k - 1) + k(k + 2\gamma - 1)J_\gamma^S\,(n - 1, k)\,, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales :

$$J_\gamma^s\,(n, 0) = J_\gamma^S\,(n, 0) = \delta_{n,0} \quad \text{et} \quad J_\gamma^s\,(0, k) = J_\gamma^S\,(0, k) = \delta_{k,0},$$

où, $\delta_{n,k}$ est le symbole de Kronecker.

En 2015, Merca [47] a relié la somme de convolution alternée des nombres de Jacobi-Stirling aux polynômes de Bernoulli comme suit :

Théorème 3.9 [47] *Soient γ un nombre réel positif et n, k deux entiers naturels. Alors :*

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} j J_\gamma^s\,(n + 1, n + 1 - j)\, J_\gamma^S\,(n + k - j, n) = \sum_{j=0}^{k} \frac{B_{k+j+1}(n + 1) - B_{k+j+1}}{k + j + 1}\binom{k}{j}(2\gamma - 1)^{k-j}.$$

Nous proposons dans la suite une autre version de la somme de convolution alternée des nombres de Jacobi-Stirling en termes d'une représentation déterminentale des polynômes de Bernoulli et d'Euler-Genocchi d'ordre r.

Théorème 3.10 *Soient γ un nombre réel positif et n, k deux entiers naturels. Alors :*

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} j J_{\gamma}^{s}(n+1, n+1-j) J_{\gamma}^{S}(n+k-j, n)$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2\gamma-1)^{k-j} \frac{1}{2^{k+j+1}(k+j+r+1)_{r+1}} \sum_{t=0}^{k+j+r+1}\binom{k+j+r+1}{t}\left|\begin{array}{cc} B_{k+j+r+1-t}(n) & A_{t}^{(r)}(0) \\ B_{k+j+r+1-t} & A_{t}^{(r)}(n) \end{array}\right| .$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} j J_{\gamma}^{s}(n+1, n+1-j) J_{\gamma}^{S}(n+k-j, n)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2\gamma-1)^{k-j} \sum_{t=0}^{k+j+r+1} \Lambda_{k+j, t}^{(r)}$$
$$\times \nabla_{k+j+1-(t-r), t}^{(r)}(n, 0).$$

Preuve. Il est facile de vérifier que, pour $|t|<\frac{1}{n(n+2\gamma-1)}$,

$$\frac{d}{dt} \ln H_{n}(t)=F_{n}^{'}(-t) H_{n}(t).$$

En remplaçant t par $-t$ dans la série génératrice (3.15) et en calculant sa dérivée par rapport à t, on obtient :

$$F_{n}^{'}(-t)=\sum_{k=0}^{\infty} k J_{\gamma}^{s}(n+1, n+1-k)(-t)^{k-1}.$$

D'autre part, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \ln H_{n}(t)=\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+2\gamma-1)}{1-k(k+2\gamma-1) t}=\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} k^{j}(k+2\gamma-1)^{j} t^{j-1}.$$

on intervertit l'ordre de la double somme résultante, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} j^{k}(j+2\gamma-1)^{k} t^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{\infty} k J_{\gamma}^{s}(n+1, n+1-k)(-t)^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} J_{\gamma}^{S}(n+k, n) t^{k}\right),$$

en identifiant les coefficients t^{k-1} dans les deux membres, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} j^k (j+2\gamma-1)^k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} j J_\gamma^s (n+1, n+1-j)\, J_\gamma^S (n+k-j, n)\,. \tag{3.17}$$

D'autre part, en tenant compte de membre gauche de (3.17), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j^k (j+2\gamma-1)^k &= \sum_{j=1}^{n} j^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} j^i (2\gamma-1)^{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} j^{k+i} (2\gamma-1)^{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (2\gamma-1)^{k-j} \sum_{i=0}^{n-1} i^{k+j}.\end{aligned}$$

il s'ensuit de (3.13) que :

$$\sum_{j=1}^{n} j^k (j+2\gamma-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (2\gamma-1)^{k-j} \sum_{t=0}^{k+j+r+1} \Lambda_{k+j,t}^{(r)} \times \nabla_{k+j+1-(t-r),t}^{(r)}(n,0). \tag{3.18}$$

La comparaisons des deux expressions (3.17) et (3.18), cela nous permet d'obtenir le résultat. □

Dans le cas où $\gamma = 1$, on a les nombres de Legendre-Stirling introduits en 2002 par Everitt et *al.* [30]. On peut trouver d'autres propriétés dans [3, 4, 47].

Nous proposons une autre propriété dans le corollaire suivant :

Corollaire 3.3 *Soient $J_1^s(n,k)$ et $J_1^S(n,k)$ les nombres de Legendre-Stirling de première et de seconde espèce, respectivement, nous avons :*

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} j J_\gamma^s (n+1, n+1-j)\, J_\gamma^S (n+k-j, n)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{1}{2^{k+j+1}(k+j+r+1)_{r+1}} \sum_{t=0}^{k+j+r+1} \binom{k+j+r+1}{t} \begin{vmatrix} B_{k+j+r+1-t}(n) & A_t^{(r)}(0) \\ B_{k+j+r+1-t} & A_t^{(r)}(n) \end{vmatrix}.$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}jJ_{1}^{s}\left(n+1,n+1-j\right)J_{1}^{S}\left(n+k-j,n\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{t=0}^{k+j+r+1}\Lambda_{k+j,t}^{(r)}$$
$$\times\nabla_{k+j+1-(t-r),t}^{(r)}(n,0).$$

En remplaçant γ par $1/2$ dans la formule (3.17) et en utilisant un processus similaire à la preuve du théorème 3.10, on peut exprimer les nombres de Chebyshev-Stirling, [32] en termes de représentation déterminentale par le corollaire suivant :

Corollaire 3.4 *Soient $J_{1/2}^{s}\left(n,k\right)$ et $J_{1/2}^{S}\left(n,k\right)$ les nombres de Chebyshev-Stirling de première et de seconde espèce, respectivement. Alors :*

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}jJ_{\gamma}^{s}\left(n+1,n+1-j\right)J_{\gamma}^{S}\left(n+k-j,n\right)$$
$$=\frac{1}{2^{2k+1}(2k+r+1)_{r+1}}\sum_{t=0}^{2k+r+1}\binom{2k+r+1}{t}\begin{vmatrix}B_{2k+r+1-t}(n+1) & A_{t}^{(r)}(0)\\ B_{2k+r+1-t} & A_{t}^{(r)}(n+1)\end{vmatrix}.$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}jJ_{1/2}^{s}\left(n+1,n+1-j\right)J_{1/2}^{S}\left(n+k-j,n\right)=\sum_{t=0}^{2k+r+1}\Lambda_{2k,t}^{(r)}\times\nabla_{2k+1-(t-r),t}^{(r)}(n+1,1).$$

Pour $r=0$ et $r=1$ dans le théorème 3.10, nous avons la représentation déterminentale de Jacobi-Stirling en termes de nombres de Bernoulli-Euler et Bernoulli-Genocchi respectivement donnée dans le :

Corollaire 3.5 *Soient γ un nombre réel positive et n,k deux entiers naturels. Alors :*

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}jJ_{\gamma}^{s}\left(n+1,n+1-j\right)J_{\gamma}^{S}\left(n+k-j,n\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2\gamma-1)^{k-j}$$
$$\times\sum_{t=0}^{k+j+1}\frac{1}{2^{k+j+1}(k+j+1)}\binom{k+j+1}{t}\begin{vmatrix}B_{k+j-(t-1)}(n) & E_{t}\\ B_{t} & E_{k+j-(t-1)}(n)\end{vmatrix}\tag{3.19}$$

et

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}jJ_{\gamma}^{s}\left(n+1,n+1-j\right)J_{\gamma}^{S}\left(n+k-j,n\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2\gamma-1)^{k-j}$$
$$\times\sum_{t=0}^{k+j+2}\frac{1}{2^{k+j+1}(k+j+1)(k+j+2)}\binom{k+j+2}{t}\begin{vmatrix} B_{k+j-(t-2)}(n) & G_t \\ B_t & G_{k+j-(t-2)}(n)\end{vmatrix}.$$

La représentation déterminentale (3.19) des nombres de Jacobi-Stirling, s'exprime en termes de polynômes de Bernoulli et d'Euler. Cependant, ces formules peuvent être élargies en termes de polynômes de Bernoulli. En effet, en combinant les formules (2.8) et (3.19), on obtient :

$$\nabla_{m,k}^{(0)}(n,0)=\frac{2}{k+1}\begin{vmatrix} B_m(n) & \left(1-2^{k+1}\right)B_{k+1} \\ B_m & B_{k+1}(n)-2^{k+1}B_{k+1}(\frac{n}{2})\end{vmatrix}.$$

Il résulte de (2.9) que :

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}jJ_{\gamma}^{s}\left(n+1,n+1-j\right)J_{\gamma}^{S}\left(n+k-j,n\right)$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2\gamma-1)^{k-j}\sum_{t=0}^{k+j+1}\frac{2}{t+2}\Lambda_{k+j,t}^{(0)}\times\mathbb{E}_{k+j-(t-1),t+1}(n).$$

Chapitre 4

$\mathscr{P}$olynômes unifiés de Bernoulli et d'Euler de type Apostol

Apostol [6] a introduit et a étudié la forme étendue des polynômes et nombres classiques de Bernoulli, qui sont maintenant connus sous le nom de polynômes et nombres Apostol-Bernoulli. Les extensions pour les polynômes de type Apostol comme Apostol-Euler et Apostol-Genocchi ont été introduites par Srivastava [64]. Dans ce chapitre, nous présentons, dans une première partie, l'approche déterminentale pour exprimer les monômes x^n en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés. Dans la deuxième partie, nous proposons une famille unificatrice des polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés et on étudie quelques propriétés combinatoires en utilisant les différentes approches. Ce chapitre a fait l'objet de la référence [15].

4.1 Base déterminentale associée aux monômes x^n

Dans cette partie, nous exprimons les monômes x^n en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler de type d'Apostol sous forme d'une représentation déterminentale. Tout d'abord, nous rappelons que les polynômes d'Apostol-Bernoulli d'ordre α sont les polynômes de degré n, notés $\mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t+\ln\lambda| < 2\pi,\ \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}_+^*). \tag{4.1}$$

Aussi, les polynômes d'Apostol-Euler d'ordre α sont-ils les polynômes de degré n, notés $\mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^\alpha e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t+\ln\lambda|<\pi,\ \alpha\in\mathbb{R}_+, \lambda\in\mathbb{R}_+^*). \tag{4.2}$$

Posons, pour tout t un nombre réel, tel que $|t+\ln\lambda|<\pi$

$$T(x,\lambda,t) = \frac{2}{\lambda e^t+1}e^{xt}\times\frac{t}{\lambda e^t-1}e^{xt} = \frac{2t}{\lambda^2e^{2t}-1}e^{2xt}.$$

tenant compte des seconds membres de (4.1) et (4.2), un calcul direct nous permet d'obtenir :

$$\lambda^2T(x+1,\lambda,t)-T(x,\lambda,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\lambda^2\mathfrak{B}_{n-k}(x,\lambda)\mathfrak{E}_k(x,\lambda)-\mathfrak{B}_{n-k}(x,\lambda)\mathfrak{E}_k(x,\lambda)\right]\right\}\frac{t^n}{n!}.$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}\lambda^2T(x+1,\lambda,t)-T(x,\lambda,t) &= \lambda^2\frac{2t}{\lambda^2e^{2t}-1}e^{2(x+1)t}-\frac{2t}{\lambda^2e^{2t}-1}e^{2xt}\\ &= 2te^{2xt}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n2^nx^{n-1}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

En comparant les deux développements de la série $\lambda^2T(x+1,\lambda,t)-T(x,\lambda,t)$, nous pouvons formuler le :

Théorème 4.1 *Soient x un nombre réel et n un entier naturel. Alors :*

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\begin{vmatrix}\lambda\mathfrak{B}_{n-(k-1)}(x+1,\lambda) & \mathfrak{E}_k(x,\lambda)\\ \mathfrak{B}_{n-(k-1)}(x,\lambda) & \lambda\mathfrak{E}_k(x+1,\lambda)\end{vmatrix}. \tag{4.3}$$

En particulier, prennant $\lambda=1$ dans la formule (4.3), nous avons le résultat suivant qui exprime les monômes x^n en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler.

Corollaire 4.1 *Soient x un nombre réel et n un entier naturel. Alors :*

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \begin{vmatrix} B_{n-(k-1)}(x+1) & E_k(x) \\ B_{n-(k-1)}(x) & E_k(x+1) \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

4.2 Polynômes unifiés de Bernoulli et d'Euler de type Apostol

Dans cette section, nous donnons la définition des polynômes unifiés de Bernoulli et d'Euler de type Apostol et étudions certaines propriétés combinatoires en utilisant l'approche de la fonction génératrice. Nous les appellerons polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol.

Définition 4.1 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ et n un entier naturel. Les polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol sont les polynômes de degré n, notés $\mathfrak{V}_\mathfrak{n}(x; \lambda, \mu)$, définis par leur fonction génératrice exponentielle :*

$$\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda e^t + (1-\mu)} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_\mathfrak{n}(x; \lambda, \mu) \frac{t^n}{n!}, \tag{4.5}$$

où le rayon de convergence de la série génératrice (4.5) est donné par :

$$\begin{cases} \left| \ln\left(\frac{\lambda}{1-\mu}\right) + t \right| < 2\pi, & \textit{pour } 0 \leq \mu < 1; \\ \\ \left| \ln\left(\frac{\lambda}{\mu-1}\right) + t \right| < \pi, & \textit{pour } \mu > 1. \end{cases}$$

De plus, les nombres de Bernoulli-Euler de type Apostol, notés $\mathfrak{V}_\mathfrak{n}(\lambda, \mu)$, sont donnés par :

$$\mathfrak{V}_\mathfrak{n}(\lambda, \mu) := \mathfrak{V}_\mathfrak{n}(0; \lambda, \mu). \tag{4.6}$$

Quelques polynômes classiques :

- ◇ les polynômes d'Euler : $\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}(x;1,0) = E_n(x)$,
- ◇ les polynômes de Bernoulli : $\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}(x;1,2) = B_n(x)$,
- ◇ les polynômes d'Apostol-Euler : $\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}(x;\lambda,0) = \mathfrak{E}_n(x;\lambda)$,
- ◇ les polynômes d'Apostol-Bernoulli : $\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}(x;\lambda,2) = \mathfrak{B}_n(x;\lambda)$.

Par la définition 4.1, nous proposons plusieurs propriétés de base sur les polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol en utilisant l'approche de la fonction génératrice.

Théorème 4.2 *Pour tout n un entier naturel, on a :*

$$\mathfrak{V}_n(x+y;\lambda,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{V}_k(x;\lambda,\mu) y^{n-k}. \tag{4.7}$$

En particulier, pour $x = 0$ et $y = x$, il vient

$$\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{V}_k(\lambda,\mu) x^{n-k}. \tag{4.8}$$

Preuve. En utilisant la fonction génératrice (4.5) pour exprimer $\mathfrak{V}_n(x+y;\lambda,\mu)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \mathfrak{V}_n(x+y;\lambda;\mu)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda e^t + (1-\mu)}\right) e^{(x+y)t} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \mathfrak{V}_n(x;\lambda;\mu) y^k \frac{t^{n+k}}{n!k!}.\end{aligned}$$

En appliquant le produit de Cauchy et en identifiant les coefficients de t^n dans les deux membres, on obtient l'identité (4.7). □

Comme une conséquence du théorème 4.1, nous montrons que les polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol, $\{\mathfrak{V}_n(x,\lambda;\mu)\}_{n\geq 0}$ donnés par la fonction génératrice en (4.5), peuvent être exprimés en termes les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés. En effet, la substitution de x^n, donnée par (4.3), dans l'expression (4.8) nous permet d'obtenir la formule suivante :

$$\mathfrak{V}_n(x;\lambda;\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{V}_{n-k}(\lambda;\mu) \sum_{j=0}^{k+1} \Lambda_{j,k,n} \times \Delta_{k+1-j,j}(x,\lambda),$$

où

$$\Lambda_{j,k,n} = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)} \binom{n}{k} \binom{k+1}{j} \quad \text{et} \quad \Delta_{n,k}(x,\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda\mathfrak{B}_n(x+1,\lambda) & \mathfrak{E}_k(x,\lambda) \\ \\ \mathfrak{B}_n(x,\lambda) & \lambda\mathfrak{E}_k(x+1,\lambda) \end{vmatrix}.$$

La formule correspondante pour les polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol est une extension du théorème de Raabe [55].

Théorème 4.3 *Pour tous n et m deux entiers naturels avec m impair, si $\lambda = 1-\mu$, alors :*

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \mathfrak{V}_n\left(\frac{x+k}{m}; 1-\mu; \mu\right) = \frac{1-m}{m^n} \left(\frac{\mu-2}{2(\mu-1)}\right) E_n(x) + \frac{1}{m^{n-1}} \mathfrak{V}_n(x; 1-\mu; \mu). \quad (4.9)$$

Preuve. Il s'ensuit de (4.5) que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \mathfrak{V}_n\left(\frac{x+k}{m}; 1-\mu; \mu\right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_n\left(\frac{x+k}{m}; 1-\mu; \mu\right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{(1-\mu)e^t + (1-\mu)} e^{(x+k)t/m} \\
&= \frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{(1-\mu)(e^t+1)} e^{xt/m} \frac{\left[1-(-e^{t/m})^m\right]}{1+e^{t/m}} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)} \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{e^{t/m}+1}\right) e^{xt/m} \\
&= \frac{1-m}{2} \left(\frac{2-\mu}{1-\mu}\right) \left(\frac{2}{e^{t/m}+1}\right) e^{xt/m} + \frac{m}{1-\mu} \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu t}{2m}}{e^{t/m}+1}\right) e^{xt/m} \\
&= \frac{1-m}{2} \left(\frac{2-\mu}{1-\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{(t/m)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{n-1}} \mathfrak{V}_n(x; 1-\mu; \mu) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1-m}{m^n} \left(\frac{\mu-2}{2(\mu-1)}\right) E_n(x) + \frac{1}{m^{n-1}} \mathfrak{V}_n(x; 1-\mu; \mu)\right] \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t^n, on obtient le résultat. □

Nous donnons par le théorème suivant une formule explicite pour les polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol.

Conséquence 4.1 *Pour $\mu = 0$, il s'ensuit de (4.9) que,*

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right) = \frac{1-m}{m^n} E_n(x) + \frac{1}{m^{n-1}} E_n(x),$$

qui donne,

$$E_n(x) = m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right),$$

prouvée par Raabe dans [55].

4.3 Quelques formules explicites

Théorème 4.4 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$. Alors :*

$$\mathfrak{V}_n(x;\lambda;\mu) = \frac{1}{2(\mu-1)}\left[(\mu-2)\mathfrak{E}_n\left(x;\frac{\lambda}{1-\mu}\right) - \frac{\mu n}{2}\mathfrak{E}_{n-1}\left(x;\frac{\lambda}{1-\mu}\right)\right], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.10}$$

Preuve. On peut réécrire (4.5) comme suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}(x;\lambda;\mu)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{1}{2(\mu-1)}\right)\left((\mu-2) - \frac{\mu}{2}t\right)\left(\frac{2}{1+\frac{\lambda}{1-\mu}e^t}\right)e^{xt} \\
&= \frac{1}{2(\mu-1)}\left[(\mu-2)\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{E}_n\left(x;\frac{\lambda}{1-\mu}\right)\frac{t^n}{n!} - \frac{\mu}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{E}_n\left(x;\frac{\lambda}{1-\mu}\right)\frac{t^{n+1}}{n!}\right] \\
&= \frac{1}{2(\mu-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\mu-2)\mathfrak{E}_n\left(x;\frac{\lambda}{1-\mu}\right) - \frac{\mu n}{2}\mathfrak{E}_{n-1}\left(x;\frac{\lambda}{1-\mu}\right)\right]\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de t^n dans les deux membres, nous obtenons l'identité (4.10). $\square$

Théorème 4.5 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ et n un entier naturel. Alors :*

$$\mathfrak{V}_n(x;\lambda;\mu) = \frac{1}{2(1-\mu)}\left[(2-\mu)\mathfrak{E}_n\left(x;\frac{\lambda}{1-\mu}\right) - \mu\mathfrak{B}_n\left(x;\frac{\lambda}{\mu-1}\right)\right]. \tag{4.11}$$

Preuve. De (4.5), nous avons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}(x;\lambda;\mu)\frac{t^n}{n!} = \frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda e^t+(1-\mu)}e^{xt}$$
$$= \frac{2-\mu}{2(1-\mu)}\frac{2}{\frac{\lambda}{1-\mu}e^t+1}e^{xt} + \frac{\mu}{2(\mu-1)}\frac{t}{\frac{\lambda}{\mu-1}e^t-1}e^{xt}.$$

En utilisant les formules (4.1) et (4.2), cela permet nous d'obtenir l'identité (4.11). □

4.4 Formule de dérivation et d'intégration

Dans cette section, nous présentons des formules de dérivation et d'intégration pour les polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol $\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu)$.

Théorème 4.6 *Pour tous l,n deux entiers naturels, on a :*

$$\frac{d^l}{dx^l}\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu) = (n)_l\mathfrak{V}_{n-l}(x;\lambda,\mu) \tag{4.12}$$

et

$$\int_x^y \mathfrak{V}_n(z;\lambda,\mu)dz = \frac{1}{(n+1)}\left[\mathfrak{V}_{n+1}(y;\lambda,\mu) - \mathfrak{V}_{n+1}(x;\lambda,\mu)\right]. \tag{4.13}$$

Preuve. L'assertion (4.12) découle de (4.5) par dérivations successives par rapport à x. On utilise ensuite le principe d'induction sur l. En prenant $l = 1$ dans (4.12) et en intégrant les deux membres de l'équation résultante par rapport à z sur l'intervalle $[x,y],(y>x)$, on obtient la formule intégrale (4.13). □

Remarque 4.1 *Pour $(\lambda,\mu) = (1,2)$, le théorème 4.6 est prouvé par Luo et* al. *[44].*

Corollaire 4.2 *Pour tout n un entier, on a :*

$$\int_x^{x+y} \mathfrak{V}_n(z;\lambda,\mu)dz = \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{V}_k(x;\lambda,\mu)y^{n-(k-1)}. \tag{4.14}$$

Preuve. En remplaçant y par $x+y$ dans la formule intégrale (4.13) et en utilisant la formule (4.7), un calcul nous donne la formule intégrale (4.14). $\square$

Théorème 4.7 *Soient n un entier naturel et $\mu \in \mathbb{R}_+^* - \{1,2\}$, alors la formule suivante est vérifiée pour $|t| < \frac{2}{\mu}|2-\mu|$:*

$$\mathfrak{V}_{n+1}(x;\lambda,\mu) - x\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu) = \frac{1}{2-\mu}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-i)!$$
$$\times\left(\frac{\mu}{2(\mu-2)}\right)^{n-i}\left[\frac{\mu}{2}\mathfrak{V}_i(x;\lambda,\mu) - \lambda\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\mathfrak{V}_k(\lambda,\mu)\mathfrak{V}_{i-k}(x+1;\lambda,\mu)\right]. \tag{4.15}$$

Preuve. En dérivant les deux membres de (4.5) par rapport à t, on développe le facteur $\left(1+\frac{\mu}{2(2-\mu)}t\right)^{-1}$ sous forme d'une série pour $|t| < \frac{2}{\mu}|2-\mu|$, et en utilisant les formules (4.5) et (4.6), nous obtenons :

$$\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{n+1}(x;\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!} = x\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!} + \frac{1}{(2-\mu)}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\mu^n}{2^n(\mu-2)^n}t^n\right)$$
$$\times\left[\frac{\mu}{2}\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!} - \lambda\left(\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_n(\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_n(x+1;\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}\right)\right]. \tag{4.16}$$

Ensuite, en identifiant les coefficients de t^n dans les deux membres, on obtient l'identié (4.15). $\square$

4.5 Identités combinatoires inspirées par le calcul ombral

Dans cette section, nous suggérons l'identité symétrique pour les polynômes de Bernoulli-Euler de type Apostol $\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu)$ en utilisant le calcul ombral. Nous aurons encore besoin de quelques notions supplémentaires.

Soit $(\mathfrak{V}_n(\lambda,\mu))_{n\geq 0}$ la suite des nombres de Bernoulli- Euler de type Apostol donnée par (4.6). On note $\mathbf{B}^n(\lambda,\mu) := \mathfrak{V}_n(\lambda,\mu)$, le nombre ombral défini par sa fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{B}^n(\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}=\exp\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu)t\right). \tag{4.17}$$

Soit $(\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu))_{n\geq 0}$ la suite des polynômes de Bernoulli- Euler de type Apostol donnée par (4.5). On appelle représentation ombrale, toute représentation donnée par l'identité suivante :

$$\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu)=(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+x)^n.$$

Donc,

$$\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}=\exp\left(\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+x\right)t\right).$$

Théorème 4.8 *Pour tous n,m deux entiers naturels, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\mathfrak{V}_{m+k}(x;\lambda,\mu)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-y)^{m-k}\mathfrak{V}_{n+k}(x+y;\lambda,\mu).$$

Preuve. Par la représentation ombrale $\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu)=(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+x)^n$ on a :

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+(x+y))^n(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+x)^m\\
&\qquad=(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+(x+y))^n\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+(x+y)-y\right)^m\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-y)^{m-k}\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+(x+y)\right)^{n+k}\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-y)^{m-k}\mathfrak{V}_{n+k}(x+y;\lambda,\mu),
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+(x+y))^n(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+x)^m&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu)+x\right)^{m+k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\mathfrak{V}_{m+k}(x;\lambda,\mu).
\end{aligned}$$

Par conséquent, les deux expressions donnent l'identité souhaitée. □

Quelques exemples du Théorème 4.8 :

- Pour $\mu = 0$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \mathfrak{E}_{m+k}(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-y)^{m-k} \mathfrak{E}_{n+k}(x+y;\lambda).$$

- Pour $(\mu,\lambda) = (0,1)$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} E_{m+k}(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-y)^{m-k} E_{n+k}(x+y;\lambda).$$

- Pour $\mu = 2$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \mathfrak{B}_{m+k}(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-y)^{m-k} \mathfrak{B}_{n+k}(x+y;\lambda).$$

- Pour $(\mu,\lambda) = (2,1)$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} B_{m+k}(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-y)^{m-k} B_{n+k}(x+y;\lambda).$$

Chapitre 5

$\mathscr{P}$olynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre α

Dans ce chapitre, on établit quelques identités combinatoires pour les polynômes unifiés de Bernoulli et d'Euler généralisés de type Apostol, en utilisant différentes approches : la fonction génératrice, la convolution, la dérivation et l'intégration, leur lien avec la fonction zêta d'Hurwitz-Lerch généralisée. Nous utilisons l'approche ombrale pour déduire des identités symétriques. Enfin, on se donne une représentation déterminentale pour cette classe de polynômes. Ce chapitre a fait l'objet de la référence [14].

Définition 5.1 *Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq b$ et $\mu \neq 1$, les polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre α, sont les polynômes de degré n, notés $\mathfrak{V}_\mathfrak{n}^\alpha(x; \lambda, \mu, a, b, c)$, définis par leur fonction génératrice (exponentielle) :*

$$F_{a,b,c}^{(\alpha)}(x; \lambda, \mu) := \left(\frac{2 - \mu + \frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t + (1-\mu)a^t} \right)^\alpha c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_\mathfrak{n}^{(\alpha)}(x; \lambda, \mu, a, b, c) \frac{t^n}{n!}, \tag{5.1}$$

où le rayon de convergence de la série génératrice (5.1) est donné par :

$$\begin{cases} \left| \ln\left(\frac{\lambda}{1-\mu}\right) + t \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right| < 2\pi, & \textit{pour } 0 \leq \mu < 1; \\ \\ \left| \ln\left(\frac{\lambda}{\mu-1}\right) + t \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right| < \pi, & \textit{pour } \mu > 1. \end{cases}$$

Aussi, les nombres de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre α, notés

$\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b,c)$, *sont donnés par :*

$$\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) := \mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(0;\lambda,\mu,a,b,c). \tag{5.2}$$

Remarque 5.1

- *En prenant* $\mu = 2$ *et* $\mu = 0$, *on retrouve les polynômes d'Apostol-Bernoulli généralisés d'ordre* α *et d'Apostol-Euler généralisés d'ordre* α, *respectivement.*
- *Pour* $\alpha = 1$, *on retrouve les polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol donnés par :*

$$\left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t+(1-\mu)a^t}\right)c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!},$$

où le rayon de convergence est donné par :

$$\begin{cases} \left|\ln\left(\frac{\lambda}{1-\mu}\right)+t\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right| < 2\pi, & \textit{pour } 0 \le \mu < 1; \\ \\ \left|\ln\left(\frac{\lambda}{\mu-1}\right)+t\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right| < \pi, & \textit{pour } \mu > 1. \end{cases}$$

Nous donnons quelques exemples des polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre α.

$$\mathfrak{V}_n(x;1,0,1,e,e) = E_n(x), \text{ les polynômes d'Euler,}$$

$$\mathfrak{V}_n(x;1,2,1,e,e) = B_n(x), \text{ les polynômes de Bernoulli,}$$

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;1,0,1,e,e) = E_n^{(\alpha)}(x), \text{ les polynômes d'Euler d'ordre } \alpha,$$

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;1,2,1,e,e) = B_n^{(\alpha)}(x), \text{ les polynômes de Bernoulli d'ordre } \alpha,$$

$$\mathfrak{V}_n(x;\lambda,0,1,e,e) = \mathfrak{E}_n(x;\lambda), \text{ les polynômes d'Apostol-Euler,}$$

$$\mathfrak{V}_n(x;\lambda,2,1,e,e) = \mathfrak{B}_n(x;\lambda), \text{ les polynômes d'Apostol-Bernoulli,}$$

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,0,1,e,e) = \mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda), \text{ les polynômes d'Apostol-Euler d'ordre } \alpha,$$

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,2,1,e,e) = \mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda), \text{ les polynômes d'Apostol-Bernoulli d'ordre } \alpha.$$

5.1 Premières propriétés via l'approche de la fonction génératrice

On applique l'approche de la fonction génératrice pour étudier certaines propriétés des polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre α.

Théorème 5.1 *Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$ et $c_i \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq b$ et $\mu \neq 1$. Alors, pour tout naturel $m \geq 1$, on a :*

$$F^{(m\alpha)}_{a,b,\prod_{i=1}^m c_i}(x;\lambda;\mu) = \prod_{i=1}^m F^{(\alpha)}_{a,b,c_i}(x;\lambda;\mu) \tag{5.3}$$

et

$$F^{(\alpha)}_{da,db,c}(x;\lambda,\mu) = \begin{cases} F^{(\alpha)}_{a,b,d}(-\alpha;\lambda,\mu).F^{(0)}_{a,b,c}(x;\lambda,\mu), & pour \quad c \neq d, \\ \\ F^{(\alpha)}_{a,b,c}(x-\alpha;\lambda,\mu), & pour \quad c = d. \end{cases} \tag{5.4}$$

Preuve. En établissant la fonction génératrice de type (5.1) pour $\prod_{i=1}^m F^{(\alpha)}_{a,b,c_i}(x;\lambda,\mu)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m F^{(\alpha)}_{a,b,c_i}(x;\lambda,\mu) &= \prod_{i=1}^m \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t + (1-\mu)a^t}\right)^\alpha c_i^{xt} \\ &= \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t + (1-\mu)a^t}\right)^{m\alpha} \prod_{i=1}^m c_i^{xt} \\ &= F^{(m\alpha)}_{a,b,\prod_{i=1}^m c_i}(x;\lambda,\mu). \end{aligned}$$

De même, pour l'identité (5.4). □

Corollaire 5.1 *Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$ et $c_i \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq b$ et $\mu \neq 1$. Alors :*

$$\mathfrak{V}^{(\mathfrak{m}\alpha)}_{\mathfrak{n}}\left(x;\lambda,\mu,a,b,\prod_{i=1}^m c_i\right) = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_m} \prod_{i=1}^m \mathfrak{V}^{(\alpha)}_{k_i}(x;\lambda,\mu,a,b,c_i). \tag{5.5}$$

Preuve. Comme première conséquence du théorème 5.1, nous avons :

$$\prod_{i=1}^{m} F^{(\alpha)}_{a,b,c_i}(x;\lambda,\mu) = F^{(m\alpha)}_{a,b,c_1c_2\cdots c_m}(x;\lambda,\mu),$$

en écrivant la fonction génératrice de type (5.1), on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\mathfrak{m}\alpha)}\left(x;\lambda,\mu,a,b,\prod_{i=1}^{m} c_i\right)\frac{t^n}{n!} = \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c_i)\frac{t^n}{n!}\right). \tag{5.6}$$

Compte tenu du produit de Cauchy, nous obtenons la formule (5.5). □

Théorème 5.2 *Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}^*_+$, $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq b$ et $\mu \neq 1$. Alors :*

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda,\mu,a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\,(\ln c)^{n-k}.$$

Preuve. En utilisant la génératrice (5.1) pour $\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x+1;\lambda,\mu,a,b,c)$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t+(1-\mu)a^t}\right)^{\alpha} c^{(x+1)t}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}(\ln c)^n\,\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda;\mu;a,b,c)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\,(\ln c)^{n-k}\,\frac{t^n}{n!}.$$

En comparant les coefficients de t^n dans les deux membres, on obtient le résultat. □

Théorème 5.3 *Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}^*_+$, $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq b$ et $\mu \neq 1$. Alors :*

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda,\mu,a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\mathfrak{V}_{n-k}^{(\beta)}(y;\lambda,\mu,a,b,c) \tag{5.7}$$

et

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda,\mu,a,b,c)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)y^{n-k}\left(\ln c\right)^{n-k}. \tag{5.8}$$

En prenant $x=0$ et $y=x$ dans la relation (5.8), on obtient :

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b)x^{n-k}\left(\ln c\right)^{n-k}.$$

Preuve. En utilisant la génératrice (5.1) pour $\mathfrak{V}_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda,\mu,a,b,c)$, on a :

$$\left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t+(1-\mu)a^t}\right)^{\alpha}c^{xt}\left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t+(1-\mu)a^t}\right)^{\beta}c^{yt},$$

Ce qui implique que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\mathfrak{V}_k^{(\beta)}(y;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^{n+k}}{n!k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{V}_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}. \tag{5.9}$$

En appliquant le produit de Cauchy à l'identité (5.9) et en comparant les coefficients de t^n dans les deux membres, on obtient l'identité (5.7).

La preuve de l'identité (5.8) est similaire à celle de l'identité (5.7). $\square$

Remarque 5.2 *L'expression* (5.8) *permet d'exprimer* $\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b)$ *en termes de polynômes unifiés de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre* α*. En effet, il suffit de remplacer* y *par* $-x$ *dans la formule* (5.8)*, on obtient l'expression suivante :*

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)x^{n-k}\left(\ln c\right)^{n-k}.$$

Nous obtenons l'identité de convolution généralisée comme suit.

Corollaire 5.2 *Soient* $a,b,\lambda\in\mathbb{R}_+^*$*,* $\mu,\alpha_i\in\mathbb{R}^+$ $i=1,2,\ldots,m$ *et* $c\in\mathbb{R}$*, tels que* $a\neq b$ *et* $\mu\neq 1$*. Alors :*

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)}(x_1+\cdots+x_m;\lambda,\mu,a,b,c)=$$
$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}\mathfrak{V}_{k_1}^{(\alpha_1)}(x_1;\lambda,\mu,a,b,c)\cdots\mathfrak{V}_{k_m}^{(\alpha_m)}(x_m;\lambda,\mu,a,b,c).$$

5.2 Formules de dérivation et d'intégration

Nous présentons dans cette partie, la formule de dérivation et d'intégration pour les polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol $\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)$ d'ordre α.

Théorème 5.4 *Soient $a,b,c,\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha,\mu\in\mathbb{R}^+$, tels que $a\neq b$, alors pour tous n,l deux entiers naturels, on a :*

$$\frac{d^l}{dx^l}\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)=(\ln c)^l\,(n)_l\mathfrak{V}_{n-l}^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu,a,b,c)\qquad(0\leq l\leq n)\tag{5.10}$$

et

$$\int_x^y\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(z;\lambda;\mu;a,b,c)dz=\frac{\mathfrak{V}_{n+1}^{(\alpha)}(y;\lambda;\mu;a,b,c)-\mathfrak{V}_{n+1}^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)}{(n+1)\ln c}.\tag{5.11}$$

Preuve. L'assertion (5.10) découle de (5.1) par dérivations successives par rapport à x et une induction sur l. Pour l'identité (5.11), il suffit de prendre $l=1$ dans l'identité (5.10) et d'intégrer les deux membres de l'équation résultante par rapport à z sur l'intervalle $[x,y]$. □

Remarque 5.3 *Pour $\mu=0$ et $\mu=2$, le théorème avait été prouvé par Srivastava et* al. [65].

Corollaire 5.3 *Soient $a,b,c,\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha,\mu\in\mathbb{R}^+$, tels que $a\neq b$, alors pour tout n un entier naturel, on a :*

$$\int_x^{x+y}\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(z;\lambda,\mu,a,b,c)dz=\frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)y^{n-(k-1)}\,(\ln c)^{n-k}.\tag{5.12}$$

Preuve. En remplaçant y par $x+y$ dans la formule integral (5.11) et utilisant la formule (5.8), un calcul direct donne la formule integrale (5.12). □

Théorème 5.5 *Soient $a, b, c, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $(a \neq b)$ et $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$. Alors, pour $\mu \neq 2$ on a :*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{V}_{n+1}^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c) \qquad (5.13)\\
&= \ln\left(\frac{c^x}{a^\alpha}\right)\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c) + \alpha\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i!\left(\frac{\mu}{2(\mu-2)}\right)^{i+1}\mathfrak{V}_{n-i}^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\\
&-\frac{\alpha\lambda\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2-\mu}\sum_{i+j=n}\binom{n}{i,j,n-i-j} i!\left(\frac{\mu}{2(\mu-2)}\right)^{i}\ln^j b\,\mathfrak{V}_{n-i-j}^{(\alpha+1)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)
\end{aligned}$$

et pour $\mu = 2$ on a :

$$\begin{aligned}
&\alpha\lambda\left(\frac{b}{a}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln b)^k\,\mathfrak{V}_{n-k}^{(\alpha+1)}(x;\lambda;\mu;a,b,c) \qquad (5.14)\\
&= (\alpha-n)\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c) + n(x\ln c - \alpha\ln a)\mathfrak{V}_{n-1}^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c).
\end{aligned}$$

Preuve. Il suit de (5.1) que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t + (1-\mu)a^t}\right)^\alpha c^{xt}\\
&= \left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda e^{t\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + (1-\mu)}\right)^\alpha e^{t(x\ln c-\alpha\ln a)}, \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

en dérivant les deux membres de (5.15) par rapport à t, en développant les facteurs $\left(1+\frac{\mu}{2(2-\mu)}t\right)^{-1}$ et $e^{t\ln b}$ en séries entières et en utilisant la formule (5.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}+1}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!} = \ln\left(\frac{c^x}{a^\alpha}\right)\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}\\
&+\frac{\alpha\mu}{2(2-\mu)}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\mu^n}{2^n(\mu-2)^n}t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}\right)\\
&-\frac{\alpha\lambda\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{(2-\mu)}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\mu^n}{2^n(\mu-2)^n}t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}(\ln b)^n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}{}^{(\alpha+1)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}\right). \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Compte tenu du produit de Cauchy, en identifiant les coefficients de t^n, on obtient l'identité (5.13).

La formule (5.14) a été prouvé par Srivastava et *al.* [65, p. 255, Eq. (29)]. $\square$

5.3 Lien avec la fonction zêta d'Hurwitz-Lerch généralisée

La fonction zêta d'Hurwitz-Lerch généralisée, notée $\Psi_\omega(x,t,a)$, définie par Goyal et Laddha [33], est donnée par :

$$\Psi_\omega(x,t,a) := \sum_{n\geq 0} \frac{\langle\omega\rangle_n}{(n+a)^t}\frac{x^n}{n!}. \tag{5.17}$$

Nous donnons un lien entre les polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre α, $\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(z;\lambda,\mu,a,b,c)$, et la fonction zêta d'Hurwitz-Lerch generalisée $\Psi_\omega(x,t,a)$ par le :

Théorème 5.6 *Soient $a,b,c,\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, tels que $a \neq b$ et $\mu \neq 1,2$. Alors, pour tous n,l deux entiers naturels, on a :*

$$\mathfrak{V}_n^{(l)}(z;\lambda,\mu,a,b,c) = (-1)^{-l}\left(\frac{2-\mu}{\mu-1}\right)^l \sum_{k\geq 0}\Theta_{k,n}(\mu,a,b)\Psi_l\left(\frac{\lambda}{\mu-1},k-n,\frac{x\ln c - l\ln a}{\ln b-\ln a}\right), \tag{5.18}$$

où

$$\Theta_{k,n}(\mu;a,b) = (l)_k\left(\frac{\mu}{2(2-\mu)}\right)^k\binom{n}{k}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^{n-k}. \tag{5.19}$$

Preuve. On peut réécrire (5.1) pour $\alpha = l$ comme suit :

$$\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!} = (-1)^{-l}\left(\frac{2-\mu}{\mu-1}\right)^l\left(1+\frac{\mu}{2(2-\mu)}t\right)^l$$

$$\times\left(1-\frac{\lambda}{(\mu-1)}\left(\frac{b}{a}\right)^t\right)^{-l} e^{t(x\ln c - l\ln a)}. \tag{5.20}$$

On développe les facteurs $\left(1+\frac{\mu}{2(2-\mu)}t\right)^l$ et $\left(1-\frac{\lambda}{(\mu-1)}\left(\frac{b}{a}\right)^t\right)^{-l}$ sous forme de séries :

$$\left(1+\frac{\mu}{2(2-\mu)}t\right)^l = \sum_{k\geq 0}(l)_k\left(\frac{\mu}{2(2-\mu)}\right)^k\frac{t^k}{k!},$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{(\mu-1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{t}\right)^{-l}=\sum_{s\geq 0}\frac{\langle l\rangle_s}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu-1}\right)^{s}e^{st\ln(b/a)}.$$

Il suit de (5.20) que :

$$\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}=(-1)^{-l}\left(\frac{2-\mu}{\mu-1}\right)^{l}\sum_{k\geq 0}(l)_k\left(\frac{\mu}{2(2-\mu)}\right)^{k}\sum_{s\geq 0}\frac{\langle l\rangle_s}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu-1}\right)^{s}$$
$$\times\sum_{n\geq 0}\left(s\ln\left(\frac{b}{a}\right)+x\ln c-l\ln a\right)^{n}\frac{t^{n+k}}{k!n!},\tag{5.21}$$

en remplaçant n par $n-k$ pour $(n\geq k)$ et en échangeant l'ordre de sommation de la relation (5.21), on obtient :

$$\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}=(-1)^{-l}\left(\frac{2-\mu}{\mu-1}\right)^{l}\sum_{k\geq 0}(l)_k\left(\frac{\mu}{2(2-\mu)}\right)^{k}\sum_{s\geq 0}\frac{\langle l\rangle_s}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu-1}\right)^{s}$$
$$\times\sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}\left(s\ln\left(\frac{b}{a}\right)+x\ln c-l\ln a\right)^{n}\frac{t^{n}}{n!},$$

en utilisant les relations (5.17) et (5.19), puis en comparant les coefficients de t^n, on obtient l'identité (5.18). □

5.4 Identités inspirées par le calcul ombral

Dans cette partie, on démontre une identité dite symétrique pour les polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol d'ordre α en utilisant le calcul ombral.

Soit $(\mathfrak{V}_n(\lambda,\mu,a,b))_{n\geq 0}$ la suite des nombres de Bernoulli- Euler généralisés de type Apostol donnée par (5.2). On note $\mathbf{B}^n(\lambda,\mu,a,b):=\mathfrak{V}_n(\lambda,\mu,a,b)$, le nombre ombral défini par sa fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{B}^n(\lambda,\mu,a,b)\frac{t^n}{n!}=\exp\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)t\right).\tag{5.22}$$

Soit $(\mathfrak{V}_n(x;\lambda,\mu,a,b,c))_{n\geq 0}$ la suite des polynômes de Bernoulli- Euler généralisés de type Apostol donné par (5.1). On appelle représentation ombrale, toute représentation donnée par l'identité suivante :

$$\mathfrak{V}_n\left(x;\lambda,\mu,a,b,c\right)=\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+x\ln c\right)^n.$$

D'où,

$$\sum_{n\geq 0}\mathfrak{V}_n\left(x;\lambda,\mu,a,b\right)\frac{t^n}{n!}=\exp\left(\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+x\ln c\right)t\right).$$

Théorème 5.7 *Pour tous n,m deux entiers naturels, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}(\ln c)^{n-k}\mathfrak{V}_{m+k}\left(x;\lambda,\mu,a,b,c\right)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(-y\right)^{m-k}(\ln c)^{m-k}\mathfrak{V}_{n+k}\left(x+y;\lambda,\mu,a,b,c\right).$$

Preuve. Par la représentation ombrale $\mathfrak{V}_n\left(x;\lambda,\mu,a,b,c\right)=\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+x\ln c\right)^n$, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{B}(\lambda;\mu;a,b)+(x+y)\ln c)^n(\mathbf{B}(\lambda;\mu;a,b)+x\ln c)^m\\
&\qquad=\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+(x+y)\ln c\right)^n\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+(x+y)\ln c-y\ln c\right)^m\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(-y\right)^{m-k}(\ln c)^{m-k}\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+(x+y)\ln c\right)^{n+k}\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(-y\right)^{m-k}(\ln c)^{m-k}\mathfrak{V}_{n+k}\left(x+y;\lambda,\mu,a,b,c\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+(x+y)\ln c)^n(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+x\ln c)^m\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}(\ln c)^{n-k}\left(\mathbf{B}(\lambda,\mu,a,b)+x\ln c\right)^{m+k}\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}(\ln c)^{n-k}\mathfrak{V}_{m+k}(x;\lambda,\mu,a,b,c).
\end{aligned}$$

Par conséquent, les deux expressions donnent l'identité souhaitée. □

5.5 Approche déterminentale

Le but de cette section est de donner une représentation déterminentale pour les polynômes de Bernoulli-Euler généralisés de type Apostol $\mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{\alpha}(x;\lambda,\mu,a,b,c)$ d'ordre α.

Théorème 5.8 *Soient $a,b,c,\lambda \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ $(a \neq b)$ et $\alpha,\mu \in \mathbb{R}^{+}$, tels que $\mu \neq 1$. Alors :*

$$\mathfrak{V}_{0}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c) = \frac{1}{\mathcal{S}_0};$$

$$\mathfrak{V}_{n}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c) = \frac{(-1)^n}{\mathcal{S}_0^{n+1}} \begin{vmatrix} 1 & x\ln c & x^2\ln^2 c & \dots & x^{n-1}\ln^{n-1} c & x^n \ln^n c \\ \mathcal{S}_0 & \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \dots & \mathcal{S}_{n-1} & \mathcal{S}_n \\ 0 & \mathcal{S}_0 & \binom{2}{1}\mathcal{S}_1 & \dots & \binom{n-1}{1}\mathcal{S}_{n-2} & \binom{n}{1}\mathcal{S}_{n-1} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_0 & \dots & \binom{n-1}{2}\mathcal{S}_{n-3} & \binom{n}{2}\mathcal{S}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & \mathcal{S}_0 & \binom{n}{n-1}\mathcal{S}_1 \end{vmatrix},$$

où $\mathcal{S}_n := \mathfrak{S}_n^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b)$ est la suite polynômiale donnée par la fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{\lambda b^t + (1-\mu)a^t}{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b)\frac{t^n}{n!}. \tag{5.23}$$

Preuve. De (5.1), nous avons :

$$\left(\frac{2-\mu+\frac{\mu}{2}t}{\lambda b^t + (1-\mu)a^t}\right)^{\alpha} c^{xt} = \sum_{n\geq 0} \mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}. \tag{5.24}$$

D'une manière équivalente, nous pouvons réécrire l'expression (5.24) comme suit :

$$e^{xt\ln c} = \left(\sum_{k\geq 0} \mathfrak{S}_k^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b)\frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \mathfrak{V}_{\mathfrak{n}}^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c)\frac{t^n}{n!}\right), \tag{5.25}$$

En utilisant le produit de Cauchy et en identifiant les coefficients de t^n, on a alors, pour $0 \leq l \leq n$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}
\mathfrak{V}_{\mathfrak{o}}^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & = 1, \\
\mathfrak{V}_0^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\mathfrak{S}_1^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) + \mathfrak{V}_1^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & = x\ln c, \\
\qquad\vdots & \quad\vdots \\
\sum\limits_{k=0}^{l} \binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\mathfrak{S}_{l-k}^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & = x^l \ln^l c, \\
\qquad\vdots & \quad\vdots \\
\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(x;\lambda;\mu;a,b,c)\mathfrak{S}_{n-k}^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & = x^n \ln^n c.
\end{cases}$$

En appliquant la méthode de Cramer, nous obtenons :

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c) = \frac{1}{(\mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b))^{n+1}}$$
$$\times \begin{vmatrix}
\mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
\mathfrak{S}_1^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & \mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & 0 & \ldots & x\ln c \\
\mathfrak{S}_2^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & \binom{2}{1}\mathfrak{S}_1^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & \mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & \ldots & x^2\ln^2 c \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
\mathfrak{S}_n^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & \binom{n}{1}\mathfrak{S}_{n-1}^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & \binom{n}{2}\mathfrak{S}_{n-2}^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b) & \ldots & x^n\ln^n c
\end{vmatrix}.$$

Par transposition, nous avons :

$$\mathfrak{V}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\mu,a,b,c) = \frac{1}{(\mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda,\mu,a,b))^{n+1}}$$
$$\times \begin{vmatrix}
\mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & \mathfrak{S}_1^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & \mathfrak{S}_2^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & \ldots & \mathfrak{S}_n^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) \\
0 & \mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & \binom{2}{1}\mathfrak{S}_1^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & \ldots & \binom{n}{1}\mathfrak{S}_{n-1}^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) \\
0 & 0 & \mathfrak{S}_0^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) & \ldots & \binom{n}{2}\mathfrak{S}_{n-2}^{(\alpha)}(\lambda;\mu;a,b) \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
1 & x\ln c & x^2\ln^2 c & \ldots & x^n\ln^n c
\end{vmatrix}.$$

Si nous échangeons la $(n+1)^{ime}$ ligne avec la première, nous obtenons le résultat. $\square$

Applications du théorème 5.8

• **Polynômes de Bernoulli, voir [28]**

Pour $(\alpha;\lambda;\mu;a,b,c)=(1,1,2,1,e,e)$, on a :

$$\mathfrak{S}_0^{(1)}(1;2;1,e)=1,\quad \mathfrak{S}_n^{(1)}(1;2;1,e)=\frac{1}{n+1}.$$

Il s'ensuit que, $B_0(x)=1$;

$$B_n(x)=(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \cdots & \frac{n-1}{2} & \frac{n}{2} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2}\binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

• **Polynômes d'Euler, voir [28]**

Pour $(\alpha;\lambda;\mu;a,b,c)=(1,1,2,1,e,e)$, on a :

$$\mathfrak{S}_0^{(1)}(1;0;1,e)=1,\quad \mathfrak{S}_n^{(1)}(1;0;1,e)=\frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que, $E_0(x)=1$;

$$E_n(x)=(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\binom{2}{1} & \cdots & \frac{1}{2}\binom{n-1}{1} & \frac{1}{2}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\binom{n-1}{2} & \frac{1}{2}\binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2}\binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

• **Polynômes de Bernoulli d'ordre m**

Posons, $(\alpha;\lambda;\mu;a,b,c)=(m,1,2,1,e,e)$ et $\mathbb{S}_n^{(m)}:=\mathfrak{S}_n^{(m)}(1;2;1,e)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\mathbb{S}_n^{(m)}\frac{t^n}{n!}&=\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^m\\
&=\sum_{nn\geq 0}\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_m=n}\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_m}\frac{1}{(j_1+1)(j_2+1)\cdots(j_m+1)}\frac{t^n}{n!}\\
&=\sum_{n\geq 0}\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_m=n}\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_m}\frac{(n+m)_m}{(j_1+1)(j_2+1)\cdots(j_m+1)(n+m)_m}\frac{t^n}{n!}\\
&=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+m)_m}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n+m}\binom{n+m}{k_1,k_2,\ldots,k_m}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{m^{n+m}}{(n+m)_m}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{S}_n^{(m)}=\frac{m^{n+m}}{(n+m)_m}$.
Il s'ensuit que, $B_0^{(m)}(x)=\frac{m!}{m^m}$;

$$B_n^{(m)}(x)=(-1)^n\left(\frac{m!}{m^m}\right)^{n+1}\begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n\\
\frac{m^m}{m!} & \frac{m^{m+1}}{(m+1)_m} & \frac{m^{m+2}}{(m+2)_m} & \cdots & \frac{m^{n+m}}{(n+m)_m} & \frac{m^{m+n-1}}{(m+n-1)_m}\\
0 & \frac{m^m}{m!} & \frac{2!m^{m+1}}{(m+1)!} & \cdots & \frac{(n-1)!m^{m+n-2}}{(m+n-2)!} & \frac{n!m^{m+n-1}}{(m+n-1)!}\\
0 & 0 & \frac{m^m}{m!} & \cdots & \binom{n-1}{2}\frac{m^{m+n-3}}{(m+n-3)_m} & \binom{n}{2}\frac{m^{m+n-2}}{(m+n-2)_m}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m^m}{m!} & \frac{nm^{m+1}}{(m+1)!}
\end{vmatrix}.$$

• Polynômes d'Euler d'ordre m

Posons $(\alpha;\lambda;\mu;a,b,c)=(m,1,0,1,e,e)$ et $\mathbb{T}_n^{(m)}:=\mathfrak{S}_n^{(m)}(1;0;1,e)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\mathbb{T}_n^{(m)}\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{e^t+1}{2}\right)^m&=1+\sum_{n\geq 1}\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_m=n}\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_m}\frac{1}{2^m}\frac{t^n}{n!}\\
&=1+\sum_{n\geq 1}\frac{m^n}{2^m}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{T}_0^{(m)} = 1, \mathbb{T}_n^{(m)} = \frac{m^n}{2^m}$.

Il s'ensuit que, $E_0^{(m)}(x) = 1$;

$$E_n^{(m)}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & \frac{m}{2^m} & \frac{m^2}{2^m} & \cdots & \frac{m^{n-1}}{2^m} & \frac{m^n}{2^m} \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\frac{m}{2^m} & \cdots & \binom{n-1}{1}\frac{m^{n-2}}{2^m} & \binom{n}{1}\frac{m^{n-1}}{2^m} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{2}\frac{m^{n-3}}{2^m} & \binom{n}{2}\frac{m^{n-2}}{2^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \binom{n}{n-1}\frac{m}{2^m} \end{vmatrix}.$$

Chapitre 6

$\mathscr{P}$olynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés et nombres de Stirling

Dans ce chapitre, on établit quelques identités combinatoires pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés, en utilisant la fonction génératrice et l'approche déterminentale. Ce chapitre a fait l'objet de la référence [17].

6.1 Introduction

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \neq b$. Les polynômes de Bernoulli $\mathfrak{B}_n(x; a, b, c)$ et d'Euler $\mathfrak{E}_n(x; a, b, c)$ généralisés, ont été introduits pour la première fois par Luo et *al.* [42, 43], ils sont donnés par leurs fonctions génératrices :

$$\frac{t}{b^t - a^t} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n(x; a, b, c) \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \frac{2\pi}{|\ln b - \ln a|} \tag{6.1}$$

et

$$\frac{2}{b^t + a^t} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_n(x; a, b, c) \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \left| \frac{\pi}{\ln b - \ln a} \right|. \tag{6.2}$$

Lorsque $b = c = e$ et $a = 1$, les expressions (6.1) et (6.2) se ramènent aux polynômes classiques de Bernoulli $B_n(x)$ et d'Euler $E_n(x)$ respectivement, *i.e.*, $B_n(x) := \mathfrak{B}_n(x; 1, e, e)$ et $E_n(x) := \mathfrak{E}_n(x; 1, e, e)$.

En particulier, les nombres $B_n = B_n(0)$ et $E_n = E_n(0)$ sont respectivement, les nombres classiques de Bernoulli et d'Euler.

Le théorème suivant donne une formule de convolution aux polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés.

Théorème 6.1 [42, 43] *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \neq b$ et n un entier naturel, alors :*

$$\mathfrak{B}_n(x+y;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{B}_k(x;a,b,c) y^{n-k} (\ln c)^{n-k} \tag{6.3}$$

et

$$\mathfrak{E}_n(x+y;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{E}_k(x;a,b,c) y^{n-k} (\ln c)^{n-k} . \tag{6.4}$$

En particulier, si $x = 0$ et $y = u$ dans (6.3) et (6.4), alors :

$$\mathfrak{B}_n(u;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{B}_k(a,b) u^{n-k} (\ln c)^{n-k} \tag{6.5}$$

et

$$\mathfrak{E}_n(u;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{E}_k(a,b) u^{n-k} (\ln c)^{n-k} . \tag{6.6}$$

6.2 Représentation déterminentale des polynômes d'Euler-Bernoulli généralisés

Nous donnons une formulation pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés en termes de polynômes classiques.

Théorème 6.2 *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $a \neq b$ et $a \neq 1$, alors, les identités suivantes sont vérifiées :*

$$\mathfrak{B}_n(x;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \ln^k \left(\frac{b}{a}\right) \ln^{n-k} a B_k \left(x \ln_{\ b/a} c\right) \tag{6.7}$$

et

$$\mathfrak{E}_n(x;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \ln^k \left(\frac{b}{a}\right) \ln^{n-k} a E_k \left(x \ln_{\ b/a} c\right) , \tag{6.8}$$

où $\ln_\alpha x = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$.

Preuve. On peut reformuler (6.2) comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{b^t+a^t}c^{xt} &= \frac{2}{e^{t\ln(b/a)}+1}e^{t\ln(c^x/a)} \\
&= \frac{2}{e^{t\ln(b/a)}+1}e^{xt\ln(b/a)\ln_{\,b/a} c}e^{-t\ln a} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n\left(\frac{b}{a}\right)E_n\left(x\ln_{\,b/a} c\right)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ln^n a\frac{t^n}{n!}\right). \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Compte tenu des seconds membres de (6.9) et (6.2), un calcul direct permet d'avoir la formule (6.8). La preuve de l'identité (6.7) est similaire. □

Théorème 6.3 *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $a \neq b$ et n un entier naturel, alors, les identités suivantes sont vérifiées :*

$$\mathfrak{B}_n(x;a,b,c) = \ln^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)B_n\left(x\ln_{\,b/a} c - \ln_{\,b/a} a\right) \qquad (6.10)$$

et

$$\mathfrak{E}_n(x;a,b,c) = \ln^{n}\left(\frac{b}{a}\right)E_n\left(x\ln_{\,b/a} c - \ln_{\,b/a} a\right), \qquad (6.11)$$

où $\ln_\alpha x = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$.

Preuve. On peut reformuler (6.2) comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{b^t+a^t}c^{xt} &= \frac{2}{e^{t\ln(b/a)}+1}e^{t\ln(c^x/a)} \\
&= \frac{2}{e^{t\ln(b/a)}+1}e^{t(x\ln c-\ln a)} \\
&= \frac{2}{e^{t\ln(b/a)}+1}e^{t\ln(b/a)\left(x\ln_{\,b/a} c-\ln_{\,b/a} a\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\ln^n\left(\frac{b}{a}\right)E_n\left(x\ln_{\,b/a} c - \ln_{\,b/a} a\right)\frac{t^n}{n!}. \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

Compte tenu des seconds membres de (6.12) et (6.2), un calcul direct permet d'avoir la formule (6.11). La preuve de l'identité (6.10) est similaire. □

Conséquence 6.1 *A l'aide du théorème 6.3, nous pouvons donner les premiers polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés par le tableau suivant :*

n	0	1	2	3
$B_n(x)$	1	$x - \frac{1}{2}$	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
$E_n(x)$	1	$x - \frac{1}{2}$	$x^2 - x$	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$
$\mathfrak{B}_n(x; a, b, c)$	$\dfrac{1}{\ln(b/a)}$	$x \ln_{b/a} c - \ln_{b/a} a - \frac{1}{2}$	$x^2 \ln \frac{b}{a} \ln^2_{b/a} c - x \left(2 \ln_{b/a} a + 1\right) \ln c$ $+\frac{1}{6} \ln a^5 b + \ln \frac{b}{a} \ln^2_{b/a} a$	$x^3 \ln^2 \frac{b}{a} \ln^3_{b/a} c - 3x^2 \ln^2 c \left(\ln_{b/a} a + \frac{1}{2}\right)$ $+x \ln c \left(3 \ln \frac{b}{a} \ln^2_{b/a} a + \ln \sqrt{a^5 b}\right) - \left(\ln_{b/a} a \ln a + \ln a\sqrt{b}\right) \ln a$
$\mathfrak{E}_n(x; a, b, c)$	1	$x \ln c - \frac{1}{2} \ln ab$	$x^2 \ln^2 c - x \ln ab \ln c$ $+ \ln a \ln b$	$x^3 \ln^3 c - \frac{3}{2}x^2 \ln^2 c \ln ab + 3x \ln a \ln b \ln c$ $+\frac{1}{4} \ln^3 \frac{b}{a} - \frac{3}{2} \ln \frac{b}{a} \ln a - \ln^3 a$

Table 6.1 – Quelques cas particuliers de $\mathfrak{B}_n(x; a, b, c)$ et $\mathfrak{E}_n(x; a, b, c)$.

Posons :

$$T(x,a,b,c,t) = \frac{2}{b^t+a^t}c^{xt} \times \frac{t}{b^t-a^t}c^{xt} = \frac{2t}{b^{2t}-a^{2t}}c^{2xt}.$$

Compte tenu du second membre de (6.1) et (6.2), pour $a \neq 0$ on a

$$T(x+1,a,b,b,t) - T(x,1,b/a,b,t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[B_{n-k}(x+1;a,b,b)E_k(x+1;a,b,b) - B_{n-k}(x;1,b/a,b)E_k(x;1,b/a,b)\right]\right\}\frac{t^n}{n!}.$$

D'autre part, pour $a \neq 0$ on a :

$$T(x+1,a,b,b,t) - T(x,1,b/a,b,t) = 2tb^{2xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^n \left(x \ln b\right)^{n-1}\frac{t^n}{n!}.$$

En comparant les deux expressions de $T(x+1,a,b,b,t)-T(x,1,b/a,b,t)$, nous formulons le résultat suivant.

Théorème 6.4 *Soient x un nombre réel et n un entier naturel, alors, pour $(a,b) \neq (0,1)$ on a :*

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)\ln^n b}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\begin{vmatrix} B_{n-(k-1)}(x+1,a,b,b) & E_k(x,1,b/a,b) \\ B_{n-(k-1)}(x,1,b/a,b) & E_k(x+1,a,b,b)\end{vmatrix}. \tag{6.13}$$

En particulier, pour $a=1$ et $b=e$, on retrouve l'expression explicite des monômes x^n en termes des polynômes de Bernoulli et d'Euler qu'on a degagé dans la proposition 2.1.

Corollaire 6.1 *Soient x un nombre réel et n un entier naturel. Alors :*

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\begin{vmatrix} B_{n-(k-1)}(x+1) & E_k(x) \\ B_{n-(k-1)}(x) & E_k(x+1)\end{vmatrix}. \tag{6.14}$$

Les expressions (6.5) et (6.6) nous permettent d'obtenir $\mathfrak{B}_n(x;a,b,c)$ et $\mathfrak{E}_n(x;a,b,c)$ en termes d'une représentation déterminentale. En effet, il suffit de remplacer le facteur

x^n du théorème 6.4 dans les formules (6.5) et (6.6) pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_n(x;a,b,c) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{B}_{n-k}(a,b)\frac{1}{2^{k+1}(k+1)}\ln_b^k c \\ &\times \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\begin{vmatrix} B_{k-(j-1)}(x+1,a,b,b) & E_j(x,1,b/a,b) \\ \\ B_{k-(j-1)}(x,1,b/a,b) & E_j(x+1,a,b,b)\end{vmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_n(x;a,b,c) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}(a,b)\frac{1}{2^{k+1}(k+1)}\ln_b^k c \\ &\times \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\begin{vmatrix} B_{k-(j-1)}(x+1,a,b,b) & E_j(x,1,b/a,b) \\ \\ B_{k-(j-1)}(x,1,b/a,b) & E_j(x+1,a,b,b)\end{vmatrix},\end{aligned}$$

où $\ln_b c = \frac{\ln_c}{\ln_b}$.

6.2.1 Congruence déterminentale

Dans cette partie, nous déduisons une nouvelle formule déterminentale comme conséquence du corollaire 6.1. Pour démontrer notre résultat, nous aurons besoin du théorème suivant :

Théorème 6.5 [7] *(Petit théorème de Fermat) Soit p un nombre premier et a un entier naturel, alors :*

$$a^p \equiv a \left(\mod p\right). \tag{6.15}$$

Théorème 6.6 *Soient p un nombre premier et a un entier naturel, alors :*

$$\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}\Delta_{p+1-k,k}(a) \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\Delta_{2-k,k}(a) \left(\mod p\right), \tag{6.16}$$

$$où \quad \Delta_{n,s}(v) := \begin{vmatrix} B_n(v+1) & E_s(v) \\ B_n(v) & E_s(v+1) \end{vmatrix}.$$

Preuve. En prenant $x = a$ et $n = p$ dans la formule (6.14) et utilisant la formule (6.15), on a alors :

$$\frac{1}{2^{p+1}(p+1)} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} \Delta_{p+1-k,k}(a) \equiv \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \Delta_{2-k,k}(a) \pmod p .$$

En multipliant les deux membres par $2^{p+1}(p+1)$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} \Delta_{p+1-k,k}(a) \equiv \frac{2^{p+1}(p+1)}{8} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \Delta_{2-k,k}(a) \pmod p .$$

En utilisant $2^p \equiv 2 \pmod p$ et $p+1 \equiv 1 \pmod p$, on obtient l'identité (6.16). $\square$

6.3 Formule explicite pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés en termes des nombres de Stirling de seconde espèce

Dans cette section, on exprime les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés à l'aide d'une formule sommatoire explicite des nombres de Stirling de seconde espèce.

6.3.1 Polynômes partiels de Bell

Les polynômes de Bell englobent la plupart des suites de type binomial. Ils ont été introduits par E. T. Bell [20].

Définition 6.1 *Les polynômes partiels de Bell sont les polynômes $B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}$, définis par leur fonction génératrice (exponen-*

tielle) :

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1})\frac{t^n}{n!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

en d'autres termes, ils sont définis par la forme explicite suivante :

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}) = \sum_{\sigma(n,k)} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n-k+1} m_i!} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left(\frac{x_i}{i!}\right)^{m_i},$$

où $\sigma(n,k)$ est l'ensemble de toutes les solutions entières du système

$$\begin{cases} m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n = n; \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k. \end{cases}$$

Quelques cas particuliers :

$B_{n,k}(1!, 2!, \ldots, n!) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$ sont les nombres de Lah,

$B_{n,k}(0!, -1!, 2!, \ldots, (-1)^n n!) = s\,(n,k)$ sont les nombres de Stirling de première espèce,

$B_{n,k}(0!, 1!, 2!, \ldots, n!) = |s\,(n,k)\,|$ sont les nombres de Stirling absolus de première espèce,

$B_{n,k}(1, 1, \ldots, 1) = S\,(n,k)$ sont les nombres de Stirling de seconde espèce,

$B_{n,k}(1, 2, \ldots, n) = \binom{n}{k} k^{n-k}$ sont les nombres idempotents.

Théorème 6.7 *Soient $\mathfrak{B}_n(x; a, b, c)$ les polynômes de Bernoulli généralisés et $S(n,k)$ les nombres de Stirling de seconde espèce. Alors :*

$$\mathfrak{B}_n(x; a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k}{n}^{-1} \sum_{\substack{s+t=k \\ i+j=n}} \sum_{r,m} (-1)^{t-(m+r)} \binom{n+k}{s-r, t-m, i+r, j+m}$$
$$\times C_{i,j}(x; a, b, c) S(i+r, r) S(j+m, m), \tag{6.17}$$

où $\quad C_{i,j}(x; a, b, c) := \dfrac{\ln^j (a/c^x) \ln^i (b/c^x)}{\ln^{k+1} (b/a)}.$

Avant de prouver le théorème 6.7, nous aurons besoin des trois lemmes et du théorème qui suivent :

Lemme 6.1 [26, p. 135] *Pour $n \geq k \geq 1$, on a, pour $a, b \in \mathbb{C}$:*

$$B_{n,k}(abx_1, ab^2x_2, \ldots, ab^{n-k+1}x_{n-k+1}) = a^k b^n B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}).$$

Lemme 6.2 [26, p. 136] *Pour $n \geq k \geq 1$, on a :*

$$B_{n,k}(x_1 + y_1, \ldots, x_{n-k+1} + y_{n-k+1}) = \sum_{\substack{s+t=k \\ i+j=n}} \binom{n}{i, j} B_{i,s}(x_1, \ldots, x_{i-s+1}) B_{j,t}(y_1, \ldots, y_{j-t+1}).$$

Lemme 6.3 [70] *Pour $n \geq k \geq 1$, on a :*

$$B_{n,k}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-k+2}\right) = \frac{n!}{(n+k)!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n+k}{k-i} S(n+i, i).$$

Soient maintenant f et g deux fonctions dérivables, la formule de Faà di Bruno donne une forme explicite des dérivées d'ordre n de la fonction composée $g \circ f$, en termes de polynômes partiels de Bell $B_{n,k}$ par le théorème suivant.

Théorème 6.8 [26, p. 137] *Pour $n \geq k \geq 1$, on a :*

$$\frac{d^n}{dt^n} (g \circ f)(t) = \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(f(t)) B_{n,k}(f^{'}(t), f^{''}(t), \ldots, f^{(n-k+1)}(t)). \tag{6.18}$$

Preuve. Nous pouvons reformuler (6.1) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{t}{b^t - a^t} c^{xt} &= \frac{t}{e^{t\ln(b/c^x)} - e^{t\ln(a/c^x)}} \\ &= \left[\int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} e^{tu} du\right]^{-1} = \frac{1}{\int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} e^{tu} du}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Posons,

$$g(y) = \frac{1}{y} \qquad \text{et} \qquad f(t) = \int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} e^{tu} du.$$

On utilise la formule de Faà di Bruno (6.18) sur le second membre (6.19). Nous obtenons :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t}{b^t-a^t}\right)c^{xt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k!}{\left(\int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} e^{tu}du\right)^{k+1}}$$
$$\times B_{n,k}\left(\int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} ue^{tu}du,\ldots,\int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} u^{n-k+1}e^{tu}du\right).$$

Lorsque $t\mapsto 0$ et en utilisant le développement en série de Taylor-Maclaurin dans (6.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_n(x;a,b,c)&=\left[\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t}{b^t-a^t}\right)c^{xt}\right]_{t=0}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k!}{(\ln\frac{b}{c^x}-\ln\frac{a}{c^x})^{k+1}}B_{n,k}\left(\int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} udu,\ldots,\int_{\ln(a/c^x)}^{\ln(b/c^x)} u^{n-k+1}du\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k!}{\ln^{k+1}(b/a)}B_{n,k}\left(\frac{1}{2}\left[\ln^2\frac{b}{c^x}-\ln^2\frac{a}{c^x}\right],\ldots,\frac{1}{n-k+2}\left[\ln^{n-k+2}\frac{b}{c^x}-\ln^{n-k+2}\frac{a}{c^x}\right]\right).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit du lemme 6.2 que :

$$\mathfrak{B}_n(x;a,b,c)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k!}{\ln^{k+1}(b/a)}\sum_{\substack{s+t=k\\ i+j=n}}\binom{n}{i,j}B_{i,s}\left(\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{b}{c^x}\right),\ldots,\frac{1}{i-s+2}\ln^{i-s+2}\left(\frac{b}{c^x}\right)\right)$$
$$\times B_{j,t}\left(-\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{a}{c^x}\right),\ldots,-\frac{1}{j-t+2}\ln^{j-t+2}\left(\frac{a}{c^x}\right)\right).$$

En utilisant les lemmes 6.1 et 6.3, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_n(x;a,b,c)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k!}{\ln^{k+1}(b/a)}\sum_{\substack{s+t=k\\ i+j=n}}\binom{n}{i,j}\ln^i\left(\frac{b}{c^x}\right)\\
&\times B_{i,s}\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{i-s+2}\right)(-1)^t\ln^j\left(\frac{a}{c^x}\right)B_{j,t}\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{j-t+2}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{s+t=k\\ i+j=n}}\sum_{r=0}^{s}\sum_{m=0}^{t}(-1)^{t-(m+r)}\binom{n}{i,j}\binom{i+s}{s-r}\binom{j+t}{t-m}\\
&\times\frac{k!i!j!}{(i+s)!(j+t)!}\frac{1}{\ln^{k+1}(b/a)}\ln^j\left(\frac{a}{c^x}\right)\ln^i\left(\frac{b}{c^x}\right)S(i+r,r)S(j+m,m)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{s+t=k\\ i+j=n}}\sum_{r=0}^{s}\sum_{m=0}^{t}(-1)^{t-(m+r)}\frac{\binom{n+k}{s-r,t-m,i+r,j+m}}{\binom{n+k}{n}}\\
&\times\frac{\ln^j(a/c^x)\ln^i(b/c^x)}{\ln^{k+1}(b/a)}S(i+r,r)S(j+m,m).
\end{aligned}$$

$\square$

Par conséquent, pour $b = c = e$ et $a = 1$, on exprime les polynômes de Bernoulli à l'aide d'une formule sommatoire explicite en termes des nombres de Stirling de seconde espèce.

Corollaire 6.2 *Soient $B_n(x)$ les polynômes de Bernoulli et $S(n,k)$ les nombres de Stirling de seconde espèce, on a pour $1 \leq k \leq n$:*

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k}{n}^{-1} \sum_{\substack{s+t=k \\ i+j=n}} \sum_{r,m} (-1)^{t+j-(m+r)} \binom{n+k}{s-r, t-m, i+r, j+m}$$
$$\times x^j (1-x)^i S(i+r,r) S(j+m,m). \tag{6.20}$$

Kargin et Kurt [37] ont proposé une formule explicite pour les polynômes d'Euler généralisés en termes des polynômes de Bernoulli généralisés. Pour tout entier h pair, on a :

$$\mathfrak{E}_n(hx; a, b, c) = \frac{(-2)h^n}{n+1} \sum_{j=0}^{h-1} \mathfrak{B}_{n+1}\left(x + \frac{j(\ln b - \ln a) + (h-1)\ln a}{h \ln c}; a, b, c\right).$$

Pour $h = 2$, on a

$$\mathfrak{E}_n(2x; a, b, c) = \frac{-2^{n+1}}{n+1}\left[\mathfrak{B}_{n+1}\left(x + \frac{1}{2}\ln_c a; a, b, c\right) - \mathfrak{B}_{n+1}\left(x + \frac{1}{2}\ln_c b; a, b, c\right)\right],$$

où $\quad \ln_c \alpha = \frac{\ln \alpha}{\ln c}$.

Nous pouvons trouver un résultat similaire pour les polynômes d'Euler généralisés en termes des nombres de Stirling de seconde espèce. Il suffit de combiner la relation précédente et le théorème 6.7, on trouve alors le :

Théorème 6.9 *Soient $\mathfrak{E}_n(x;a,b,c)$ les polynômes d'Euler généralisés et $S(n,k)$ les nombres de Stirling de seconde espèce, alors :*

$$\mathfrak{E}_n(x;a,b,c) = \frac{-2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k+1}{n+1}^{-1}\sum_{\substack{s+t=k\\ i+j=n+1}}\sum_{r,m}(-1)^{t-(m+r)}\binom{n+k+1}{s-r,t-m,i+r,j+m}$$
$$\times S(i+r,r)S(j+m,m)\left[C_{i,j}\left(\frac{2x+\ln_c a}{2};a,b,c\right) - C_{i,j}\left(\frac{2x+\ln_c b}{2};a,b,c\right)\right], \tag{6.21}$$

où, $C_{i,j}(x;a,b,c) := \dfrac{\ln^j(a/c^x)\ln^i(b/c^x)}{\ln^{k+1}(b/a)}$.

En particulier, pour $b = c = e$ et $a = 1$, on retrouve une forme explicite pour les polynômes d'Euler en termes des nombres de Stirling de seconde espèce.

Corollaire 6.3 *Soient $\mathfrak{E}_n(x)$ les polynômes d'Euler et $S(n,k)$ les nombres de Stirling de seconde espèce, alors :*

$$E_n(x) = \frac{-2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k+1}{n+1}^{-1}\sum_{\substack{s+t=k\\ i+j=n+1}}\sum_{r,m}(-1)^{t+j-(m+r)}\binom{n+k+1}{s-r,t-m,i+r,j+m}$$
$$\times S(i+r,r)S(j+m,m)\left[x^j(1-x)^i - \left(\frac{1}{2}+x\right)^j\left(\frac{1}{2}-x\right)^i\right]. \tag{6.22}$$

6.4 Les nombres r-Whitney et les nombres translatés de Whitney de seconde espèce

Les nombres de Whitney de seconde espèce ont été introduits par Benoumhani [21]. Ce sont les coefficients des polynômes $(mx+1)^n$ dans la base $(m^k(x)_k)_{k\geq 0}$, *i.e.*,

$$(mx+1)^n = \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)m^k(x)_k. \tag{6.23}$$

Les nombres r-Whitney de seconde espèce ont été introduits par Mező [48] comme étant les coefficients qui lient $(mx+1)^n$ en les $(x)_k$: pour n, k, m et r des entiers naturels avec $n \geq k \geq r$,

$$(mx + r)^n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n, k) m^k (x)_k. \tag{6.24}$$

De plus, les nombres r-Whitney de seconde espèce admettent comme fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n, k) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{e^{mt} - 1}{m} \right)^k \frac{e^{rt}}{k!}. \tag{6.25}$$

Cas particuliers :

- Pour $(m, r) = (1, 0)$ nous obtenons les nombres de Stirling de seconde espèce donnés dans (1.3).
- Pour $m = 1$ nous obtenons les nombres r-Stirling de seconde espèce [23].
- Pour $r = 1$ nous obtenons les nombres de Whitney de seconde espèce (6.23).

De nombreuses propriétés des nombres r-Whitney et leurs liens avec les fonctions symétriques élémentaires, les fonctions spéciales, les identités combinatoires et leurs généralisations se trouvent dans [45, 48, 49].

6.4.1 Identité de convolution

Théorème 6.10 *Les nombres r-Whitney de seconde espèce satisfont la relation de convolution, pour $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$ et $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_s$*

$$W_{m,r}(n, k) = \frac{1}{\binom{k}{k_1, \ldots, k_s}} \sum_{n_1 + \cdots + n_s = n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_s} \prod_{i=1}^{s} W_{m,r_i}(n_i, k_i),$$

Preuve. Nous appliquons la fonction génératrice définie dans (6.25) sur les nombres r-Whitney de seconde espèce $W_{m,r_1+\cdots+r_s}(n, k_1 + \cdots + k_s)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq k} W_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n\geq k_1+\cdots+k_s} W_{m,r_1+\cdots+r_s}(n,k_1+\cdots+k_s)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_s} \frac{e^{(r_1+r_2+\cdots+r_s)t}}{(k_1+\ldots+k_s)!} \\
&= \frac{1}{(k_1+\cdots+k_s)!}\left(\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^{k_1} e^{r_1 t}\cdots\left(\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^{k_s} e^{r_s t} \\
&= \frac{1}{\binom{k}{k_1,\ldots,k_s}}\left(\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^{k_1}\frac{e^{r_1 t}}{k_1!}\cdots\left(\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^{k_s}\frac{e^{r_s t}}{k_s!} \\
&= \frac{1}{\binom{k}{k_1,\ldots,k_s}}\left(\sum_{n_1=k_1}^{\infty} W_{m,r_1}(n_1,k_1)\frac{t^{n_1}}{n_1!}\right)\cdots\left(\sum_{n_s=k_s}^{\infty} W_{m,r_s}(n_s,k_s)\frac{t^{n_s}}{n_s!}\right) \\
&= \frac{1}{\binom{k}{k_1,\ldots,k_s}}\left(\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{W_{m,r_1}(n_1+k_1,k_1)}{(n_1+k_1)_{k_1}}\frac{t^{n_1+k_1}}{n_1!}\right)\cdots\left(\sum_{n_s=0}^{\infty}\frac{W_{m,r_s}(n_s+k_s,k_s)}{(n_s+k_s)_{k_s}}\frac{t^{n_s+k_s}}{n_s!}\right) \\
&= \frac{1}{\binom{k}{k_1,\ldots,k_s}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+\cdots+n_s=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_s}\prod_{i=1}^{s}\frac{W_{m,r_i}(n_i+k_i,k_i)}{(n_i+k_i)_{k_i}}\frac{t^{n+k}}{n!} \\
&= \frac{1}{\binom{k}{k_1,\ldots,k_s}}\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{(n_1+k_1)+\cdots+(n_s+k_s)=n}\binom{n-k}{n_1,\ldots,n_s}(n)_k\prod_{i=1}^{s}\frac{W_{m,r_i}(n_i+k_i,k_i)}{(n_i+k_i)_{k_i}}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{\binom{k}{k_1,\ldots,k_s}}\sum_{n_1+\cdots+n_s=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_s}\prod_{i=1}^{s}W_{m,r_i}(n_i,k_i)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

En comparant les coefficients de t^n dans les deux membres, nous obtenons le résultat.

□

Théorème 6.11 *Soient x un nombre réel et p un entier naturel, alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$, on a :*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{p}(mk+r)^n \mathbb{D}_{k,s_1}(x,a,b) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j)\mathbb{D}_{j,s_2}(x,a,b)\sum_{t=0}^{p-j}\binom{t+j}{j}\mathbb{D}_{t,s_3}(x,a,b), \qquad (6.26)
\end{aligned}
$$

où

$$
\mathbb{D}_{n,k}(x,a,b) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\begin{vmatrix} B_{n-(k-1)}(x+1,a,b,b) & E_k(x,1,b/a,b) \\ & \\ B_{n-(k-1)}(x,1,b/a,b) & E_k(x+1,a,b,b)\end{vmatrix}.
$$

Avant de prouver notre résultat, nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème 6.12 [19] *Pour tout entier naturel p, l'identité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{k=0}^{p}(mk+r)^n x^k = \sum_{j=0}^{p} j! m^j W_{m,r}(n,j) x^j \sum_{t=0}^{p-j} \binom{t+j}{j} x^t. \tag{6.27}$$

Preuve du Théorème 6.10. Il s'ensuit du théorème 6.4 que

$$x^n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)\ln^n b} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \begin{vmatrix} B_{n-(k-1)}(x+1,a,b,b) & E_k(x,1,b/a,b) \\ \\ B_{n-(k-1)}(x,1,b/a,b) & E_k(x+1,a,b,b) \end{vmatrix}.$$

On peut reformuler l'expression comme suit :

$$(2x\ln b)^n = \frac{1}{2}\mathbb{D}_{n,k}(x,a,b).$$

En remplaçant le facteur x^n dans la formule (6.27), nous obtenons l'identité (6.26). □

6.4.2 Identité matricielle pour les nombres de Whitney translatés

Les nombres de Whitney translatés de seconde espèce [13], notée $\left\{ {n \atop k} \right\}^{(\alpha)}$, comptent le nombre de partitions de n éléments en k sous-ensembles non vides disjoints (ou parts), chaque élément lui est affecté un poids $\alpha \in \mathbb{R}$ (qui peut représenter une intensité lumineuse).

De plus, les Whitney translatés de seconde espèce satisfont la relation suivante :

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}^{(\alpha)} (x|-\alpha)_k, \tag{6.28}$$

où, $\quad (x|\alpha)_n = x(x+\alpha)\cdots(x+\alpha(n-1)) \quad$ et $\quad (x|\alpha)_0 = 1.$

Théorème 6.13 *Soit α un entier naturel non nul, alors, les nombres de Whitney translatés de seconde espèce satisfont la relation suivante :*

$$LC =$$

$$\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {n \brace k}^{(\alpha)} - {n-m \brace k-m}^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {n \brace k+1}^{(\alpha)} - {n-m \brace k-m+1}^{(\alpha)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {n \brace k+m-1}^{(\alpha)} - {n-m \brace k-1}^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} {n-j \brace k-j+1}^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{m} {n-j \brace k-j+2}^{(\alpha)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{m} {n-j \brace k-j+m}^{(\alpha)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & \cdots & -(m-1) \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -(m-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m-1) & (m-2) & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

avec ${0 \brace k}^{(\alpha)} = \delta_{0,k}$ *and* ${n \brace 0}^{(\alpha)} = \delta_{n,0}$, *tels que* $\delta_{n,k}$ *est le symbole de Kronecker.*

où

$$L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq m}, \ \textit{avec } l_{ij} = \begin{cases} k+(j-i) & \textit{si } i<j; \\ k & \textit{si } i=j; \\ k+(i-j) & \textit{sinon}, \end{cases}$$

et

$$C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq m}, \ \textit{avec } c_{ij} = {n-i \brace k+(j-i)}^{(\alpha)}.$$

Pour faire la preuve du théorème 6.13, nous avons besoin d'utiliser le résultat suivant.

Théorème 6.14 [13] *Soient* ${n \brace k}^{(\alpha)}$ *les nombres de Whitney translatés. Alors :*

$${n \brace k}^{(\alpha)} = {n-1 \brace k-1}^{(\alpha)} + \alpha k {n-1 \brace k}^{(\alpha)}.$$

Preuve du Théorème 6.12. En utilisant le théorème 6.14 et une récurrence sur m, on a :

$${n \brace k}^{(\alpha)} = {n-m \brace k-m}^{(\alpha)} + \alpha\sum_{j=1}^{m}(k-j+1){n-j \brace k-j+1}^{(\alpha)}.$$

Soient $\{L_i\}_{1\leq i\leq m}$ et $\{C_j\}_{1\leq j\leq m}$ la ligne et la colonne des matrices L et C respectivement, nous avons :

$$\begin{aligned}
L_iC_s &= \sum_{j=1}^{m}(k-j+i)\left\{ {n-j \atop k-j+s} \right\}^{(\alpha)} \\
&= \sum_{j=1}^{m}(k-j+i)\left\{ {n-j \atop k-j+s} \right\}^{(\alpha)} \\
&= \frac{\left\{ {n \atop k+s-1} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n-m \atop (k+s)-(m+1)} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} + (i-s)\sum_{j=1}^{m}\left\{ {n-j \atop k-j+s} \right\}^{(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$LC = \begin{pmatrix}
\frac{\left\{ {n \atop k} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n-m \atop k-m} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} & \frac{\left\{ {n \atop k+1} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n-m \atop k-m+1} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} & \cdots & \frac{\left\{ {n \atop k+m-1} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n+m-1 \atop k-1} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} \\
\frac{\left\{ {n \atop k} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n-m \atop k-m} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} & \frac{\left\{ {n \atop k+1} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n-m \atop k-m+1} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} & \cdots & \frac{\left\{ {n \atop k+m-1} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n+m-1 \atop k-1} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\left\{ {n \atop k} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n-m \atop k-m} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} & \frac{\left\{ {n \atop k+1} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n-m \atop k-m+1} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha} & \cdots & \frac{\left\{ {n \atop k+m-1} \right\}^{(\alpha)} - \left\{ {n+m-1 \atop k-1} \right\}^{(\alpha)}}{\alpha}
\end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix}
0 & -\sum_{j=1}^{m}\left\{ {n-j \atop k-j+2} \right\}^{(\alpha)} & \cdots & -(m-1)\sum_{j=1}^{m}\left\{ {n-j \atop k-j+m} \right\}^{(\alpha)} \\
\sum_{j=1}^{m}\left\{ {n-j \atop k-j+1} \right\}^{(\alpha)} & 0 & \cdots & -(m-2)\sum_{j=1}^{m}\left\{ {n-j \atop k-j+m} \right\}^{(\alpha)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(m-1)\sum_{j=1}^{m}\left\{ {n-j \atop k-j+1} \right\}^{(\alpha)} & (m-2)\sum_{j=1}^{m}\left\{ {n-j \atop k-j+2} \right\}^{(\alpha)} & \cdots & 0
\end{pmatrix}.$$

L'utilisation de simples manipulations conduit au résultat. $\square$

6.4.3 Lien entre la fonction bêta et les nombres de Whitney translatés

Théorème 6.15 *Soient $\mathfrak{B}_n(x;a,b,c)$ et $\mathfrak{E}_n(x;a,b,c)$ les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés respectivement. Alors, pour tous α, n deux entiers naturels avec*

$\alpha \geq 1$ et $n \geq 2$, on a

$$\mathfrak{B}_n(x;a,b,c) - \mathfrak{B}_n(a,b) - \mathfrak{B}_{n-1}(a,b)\ln c = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\ln^k c\ \mathfrak{B}_{n-k}(a,b)\left[\left\{ k \atop 1 \right\}^{(\alpha)} x+1\right]$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\binom{n}{k}\ln^k c\ \mathfrak{B}_{n-k}(a,b)\left\{ k \atop j \right\}^{(\alpha)}\binom{x}{(j-1)\alpha+1}\binom{(j-1)\alpha+1}{\underbrace{\alpha-1,\ldots,\alpha-1}_{(j-1)\ fois}}$$
$$\times\prod_{i=2}^{j}(x-(i-2)\alpha)B(\alpha,x-(i-1)\alpha+1) \tag{6.29}$$

et

$$\mathfrak{E}_n(x;a,b,c) - \mathfrak{E}_n(a,b) - \mathfrak{E}_{n-1}(a,b)\ln c = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\ln^k c\ \mathfrak{E}_{n-k}(a,b)\left[\left\{ k \atop 1 \right\}^{(\alpha)} x+1\right]$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\binom{n}{k}\ln^k c\ \mathfrak{E}_{n-k}(a,b)\left\{ k \atop j \right\}^{(\alpha)}\binom{x}{(j-1)\alpha+1}\binom{(j-1)\alpha+1}{\underbrace{\alpha-1,\ldots,\alpha-1}_{(j-1)\ fois}}$$
$$\times\prod_{i=2}^{j}(x-(i-2)\alpha)B(\alpha,x-(i-1)\alpha+1). \tag{6.30}$$

où, $B(a,b)$ est la fonction béta d'Euler.

Avant de prouver notre résultat, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.4 *Soit $B(a,b)$ la fonction béta, alors, pour tous α, j deux entiers naturels avec $\alpha \geq 1$ et $j \geq 2$, on a*

$$(x|-\alpha)_j = \binom{x}{(j-1)\alpha+1}\binom{(j-1)\alpha+1}{\underbrace{\alpha-1,\alpha-1,\ldots,\alpha-1}_{(j-1)\ fois}}\prod_{i=2}^{j}(x-(i-2)\alpha)B(\alpha,x-(i-1)\alpha+1).$$

Preuve. Il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned}(x|-\alpha)_j &= x\,(x-\alpha)\,(x-2\alpha)\cdots(x-(j-1)\alpha)\\ &= \frac{(x)_{(j-1)\alpha+1}}{(x-1)_{\alpha-1}(x-(\alpha+1))_{\alpha-1}\cdots(x-(j-2)\alpha-1)_{\alpha-1}}\\ &= \binom{(j-1)\alpha+1}{\underbrace{\alpha-1,\alpha-1,\ldots,\alpha-1}_{(j-1)\ fois}}\frac{\binom{x}{(j-1)\alpha+1}}{\prod_{i=2}^{j}\binom{x-(i-2)\alpha-1}{\alpha-1}}.\end{aligned}\tag{6.31}$$

Sury [68] a connecté l'inverse des coefficients binomiaux à la fonction bêta comme suit.

$$\binom{n}{k}^{-1} = (n+1)\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}dt.\tag{6.32}$$

Si nous appliquons (6.32) dans la formule (6.31), nous obtenons le résultat. $\square$

Preuve du Théorème 6.14. Il s'ensuit de (6.5) que

$$\mathfrak{B}_n(x;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\ln^k c\ \mathfrak{B}_{n-k}(a,b).\tag{6.33}$$

Pour prouver l'identité (6.29), il suffit de combiner les formules (6.33) et (6.28). Nous avons :

$$\begin{aligned}&\mathfrak{B}_n(x;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ln^k c\ \mathfrak{B}_{n-k}(a,b)\sum_{j=0}^{k}\left\{{k\atop j}\right\}^{(\alpha)}(x|-\alpha)_j\\ &= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\ln^k c\ \mathfrak{B}_{n-k}(a,b)\left[\left\{{k\atop 0}\right\}^{(\alpha)}(x|-\alpha)_0+\left\{{k\atop 1}\right\}^{(\alpha)}(x|-\alpha)_1+\sum_{j=2}^{k}\left\{{k\atop j}\right\}^{(\alpha)}(x|-\alpha)_j\right]\\ &+\mathfrak{B}_n(a,b)+\mathfrak{B}_{n-1}(a,b)\ln c\\ &= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\ln^k c\ \mathfrak{B}_{n-k}(a,b)\left[1+\left\{{k\atop 1}\right\}^{(\alpha)}x+\sum_{j=2}^{k}\left\{{k\atop j}\right\}^{(\alpha)}(x|-\alpha)_j\right]+\mathfrak{B}_n(a,b)+\mathfrak{B}_{n-1}(a,b)\ln c.\end{aligned}\tag{6.34}$$

En utilisant le lemme 6.4 et la formule (6.34), nous obtenons le résultat.

La preuve de l'identité (6.30) est semblable à la preuve de (6.29). $\square$

Lorsque $b = c = e$ et $a = 1$, on obtient un résultat similaire pour les polynômes de

Bernoulli $B_n(x)$ et d'Euler $E_n(x)$:

Corollaire 6.4 *Soient $B_n(x)$ et $E_n(x)$ les polynômes de Bernoulli et d'Euler respectivement. Alors, pour tous α, n deux entiers naturels avec $\alpha \geq 1$ et $n \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned}
B_n(x) - B_n - B_{n-1} &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \left[\left\{ {k \atop 1} \right\}^{(\alpha)} x + 1 \right] \\
&+ \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=2}^{k} \binom{n}{k} B_{n-k} \left\{ {k \atop j} \right\}^{(\alpha)} \binom{x}{(j-1)\alpha+1} \binom{(j-1)\alpha+1}{\underbrace{\alpha-1, \ldots, \alpha-1}_{(j-1)\ fois}} \\
&\times \prod_{i=2}^{j} (x-(i-2)\alpha) B(\alpha, x-(i-1)\alpha+1)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
E_n(x) - E_n - E_{n-1} &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k} \left[\left\{ {k \atop 1} \right\}^{(\alpha)} x + 1 \right] \\
&+ \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=2}^{k} \binom{n}{k} E_{n-k} \left\{ {k \atop j} \right\}^{(\alpha)} \binom{x}{(j-1)\alpha+1} \binom{(j-1)\alpha+1}{\underbrace{\alpha-1, \ldots, \alpha-1}_{(j-1)\ fois}} \\
&\times \prod_{i=2}^{j} (x-(i-2)\alpha) B(\alpha, x-(i-1)\alpha+1).
\end{aligned}$$

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié les différentes approches pour établir des propriétés combinatoires des suites polynomiales d'Appell comme des relations récurrentes, des combinaisons entres les polynômes et des liaisons avec des suites classiques. De plus, nous avons trouvé de nouvelles identités combinatoires intéressantes.

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons développé une série d'identités impliquant une forme déterminentale et des expressions en termes de nombres de Jacobi-Stirling de première et de seconde espèce. Cette forme, élaborée à partir de processus de calculs simples, nous a permis d'exprimer les polynômes d'Appell à l'aide des polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi. De plus, certaines formules d'addition ont été établies. A notre connaissance, ces formules ne sont pas connues dans la littérature.

Dans les chapitres 4 et 5, nous avons proposé une famille unificatrice et généralisée des polynômes d'Apostol-Bernoulli et d'Apostol-Euler. Nous avons établi quelques identités combinatoires en utilisant les différentes approches : la fonction génératrice, la convolution, la dérivation et l'intégration, leur lien avec la fonction zêta d'Hurwitz-Lerch généralisée. Nous avons utilisé l'approche ombrale pour déduire des identités symétriques.

Le chapitre 6 a fait l'objet d'une étude liée aux polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés, nous avons donné une formulation explicite en termes de polynômes de Bernoulli et d'Euler classiques, ainsi que l'expression de x^n dans la base déterminentale, en exprimant ces polynômes à l'aide d'une formule sommatoire explicite des nombres de Stirling de seconde espèce.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas,* Graphs, and Mathematical Tables, Reprint of the 1972 edition, Dover Publications, Inc., New York, 1992. 49

[2] T. Agoh, K. Dilcher, *Convolution identities and lacunary recurrences for Bernoulli numbers*, J. Number Theory **124** (2007) 105–122. 34

[3] G. E. Andrews, L. L. Littlejohn, *A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers,* Proc. Amer. Math. Soc. **137**, no. 8, (2009) 2581–2590. 56

[4] G. E. Andrews, W. Gawronski and L. L. Littlejohn, *The Legendre-Stirling numbers,* Discrete Math. **311** (2011) 1255–1272. 56

[5] P. Appell, *Sur une classe de polynômes*, *Ann. Sci. École Norm. (Sér. 2)*, **9** (1880), 119–144. 1, 11

[6] T. M. Apostol, *On the Lerch zeta function*, *Pacific J. Math.* **1** (1951) 161–167. 2, 59

[7] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, (Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1976). 89

[8] S. Araci, *Novel identities involving Genocchi numbers and polynomials arising from applications of umbral calculus*, *Appl. Math. Comput.* **233** (2014) 599–607. 34

[9] A. Bayad, *Fourier expansions for Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials*, *Math. Comp.* **80** (2011) 2219–2221. 2

[10] A. Bayad, T. Kim, *Identities for the Bernoulli, the Euler and the Genocchi numbers and polynomials*, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)* **20** (2010) 247–253. 2

[11] A. Bayad, T. Komatsu, *New characterization of Appell polynomials,* Integral Transforms Spec. Funct. **28** (2017), no. 3, 212–222.

[12] H. Belbachir, *A combinatorial contribution to the multinomial Chu-Vandermonde convolution*, Annales RECITS, (2014), 27–32. 6

[13] H. Belbachir, I. Bousbaa, *Translated Whitney and r-Whitney numbers a combinatorial approach*, Journal of Integer Sequences **16** (2013). 98, 99

[14] H. Belbachir, Y. Djemmada, S. Hadj-Brahim, *Unified Bernoulli-Euler polynomials of Apostol type and generalizations, submitted.* 69

[15] H. Belbachir, Y. Djemmada, S. Hadj-Brahim, *Unified Bernoulli-Euler polynomials of Apostol type, submitted.* 59

[16] H. Belbachir, S. Hadj-Brahim, *Some explicit formulas for Euler-Genocchi polynomials*, *Integers* **19** (2019), Paper No. A28, 14 pp.

[17] H. Belbachir, S. Hadj-Brahim, *Determinantal approach to generalized Bernoulli and Euler polynomials and link with Stirling numbers, submitted.* 44

[18] H. Belbachir, S. Hadj-Brahim, M. Rachidi, *Another determinental approach for a family of Appell polynomials*, *Filomat* 32 **12** (2018) 4155–4164. 84

[19] H. Belbachir, N. Souddi, M. Tigane, *Combinatorial properties of the r-Whitney numbers of Dowling lattices*, Article apparaître dans "Arts Combinatorial" 2019. 3, 31, 52

[20] E.T. Bell *The history of Blissard's symbolic calculus, with a sketch of the inventor's life, Amer. Math. Monthly.* **45** (1938) 414–421. 98

[21] M. Benoumhani, *On Whitney numbers of Dowlling lattices*, *Discrete Math.* **159** (1996), 13–33. 20, 90

95

[22] J. Bernoulli, *Ars conjectandi*, Basel, 1713.

[23] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, *Discrete Math.* **49** (1984), no. 3, 241–259. 96

[24] S. Butler, P. Karasik, *A note on nested sums*, *J. Integer Sequences*, **13** (2010), article 10.4.4. 35, 40

[25] G. S. Cheon, *A note on the Bernoulli and Euler polynomials*, *Appl. Math. Lett.* **16** (2003), no. 3, 365–368. 37

[26] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, The Art of Finite and Infinite Expansions. revised and enlarged edition, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht and Boston, 1974. 4, 10, 92

[27] F. A. Costabile, F. Dell'Accio, M. I. Gualtieri, *A new approach to Bernoulli polynomials*, *Rend. Mat. Appl.* (7) **26** (2006), no. 1, 1–12. 1, 22

[28] F. A. Costabile, E. Longo, *A determinantal approach to Appell polynomials*, *J. Comput. Appl. Math.* **234** (2010), no. 5, 1528–1542. 1, 21, 81

[29] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, *Volume I, McGraw-Hill, New York*, (1953). 1, 34

[30] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn and R. Wellman, *Legendre polynomials, Legendre-Stirling numbers, and the left-definite analysis of the Legendre differential expression,* J. Comput. Appl. Math. **148** (2002), no. 1, 213–238. 56

[31] L. Euler, *Methodus generalis summandi progressiones*, Comment. acad. sci. Petrop., v.6 (1738), 68–97. 13, 16

[32] W. Gawronski, L. L. Littlejohn and T. Neuschel, *Asymptotics of Stirling and Chebyshev-Stirling numbers of the second kind,* Stud. Appl. Math. **133** (2014) 1–17. 57

[33] S. P. Goyal, R. K. Laddha, *On the generalized Zeta function and the generalized Lambert function*, Ganita Sandesh 11.2 (1997) : 99–108. 76

[34] M. X. He, P. E. Ricci, *Differential equation of Appell polynomials via the factorization method, J. Comput. Appl. Math.* **139** (2002), no. 2, 231–237. 13

[35] Y. He, W. Zhang, *Some symmetric identities involving a sequence of polynomials, Electron J. Combin.* **17** (2010), Note 7, 7 pp. 21

[36] A. Hurwitz, *Personal communication via George Polya that Hurwitz used the Fourier series approach to Bernoulli polynomials in his lectures.* 13, 17

[37] L. Kargin, V. Kurt, *On the generalization of the Euler polynomials with the real parameters*, Applied Math. and Comput. **218** (2011) 856–859. 94

[38] E. Lucas, *Théorie des Nombres*, Paris 1891, Chapter 14. 13

[39] H. Liu, W. Wang, *Some identities on the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials via power sums and alternate power sums*, *Discrete Math.* **309** (2009), no. 10, 3346–3363. 37, 48

[40] Q. M. Luo, *Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions*, *Taiwanese J. Math.* **10** (2006) 917–925. 2, 25

[41] Q. M. Luo, *Extensions of the Genocchi polynomials and their Fourier expansions and integral representations*, *Osaka Journal of Mathematics*, 48(2), (2011) 291-309. 2

[42] Q. M. Luo, B. N. Guo, F. Qi, L. Debnath, *Generalizations of Bernoulli numbers and polynomials*, *Int. J. Math. Sci.* **59** (2003) 3769–3776. 84, 85

[43] Q. M. Luo, L. F. Qi, L. Debnath, *Generalization of Euler numbers and polynomials. Int. J. Math. Sci.* **61** (2003) 3893–3901. 84, 85

[44] Q. M. Luo, H. M. Srivastava, *Some generalizations of the Apostol-Genocchi polyonmials and the Stirling numbers of the second kind*, *Appl. Math. Comput.* **217** (2011) 5702–5728. 25, 37, 65

[45] T. Mansour, J. L. Ramirez and M. Shattuck, *A generalization of the r-Whitney numbers of the second kind.* J. Comb. **8** (1)(2017) 29–55. 96

[46] J. A. Marrero, M. Rachidi, V. Tomeo, *On the nested sums and orthogonal polynomials*, *Linear and Multilinear Algebra*, **60** (2012), 995–1007. 35, 40

[47] M. Merca *A connection between Jacobi-Stirling numbers and Bernoulli polynomials, J. Number. Theory.* **151** (2015) 223–229. 54, 56

[48] I. Mező, *A new formula for the Bernoulli polynomials. Results Math.* **58** (2010) 329–335. 95, 96

[49] I. Mező, J. L. Ramirez, *Some identities of the r-Whitney numbers. Aequationes Math.* **90** (2) (2016) 393–406. 96

[50] M. Mihoubi, *Bell polynomials and binomial type sequences*, *Discrete Math.* **308** (2008), no. 12, 2450–2459.

[51] M. Mihoubi, S. Taharbouchet Some identities involving Appell polynomials, Article à apparaître dans "Quaestiones Mathematicae" 2019. 2, 20, 21

[52] P. Natalini, A. Bernardi, *A generalisation of the Bernoulli polynomials*, J. Appl. Math., **3** (2003), 155–163. 38

[53] N. E. Nőrlund, *Vorlesungen uber Differentzenrechnung*, *Springer-Verlag, Berlin*, 1924 ; Reprinted by Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1954. 24, 25

[54] Á. Pintér, H. M. Srivastava, *Addition theorems for the Appell polynomials and the associated classes of polynomial expansions*, Aequat. Math. **85** (2013), no. 3, 483–495. 1, 18, 26, 33, 45

[55] J. L. Raabe, *Zurückführung einiger Summen and bestimmten Integrale auf die Jacob Bernoullische Function*, Journal für die reine and angrew. Math. **42** (1851) 348–376, especially p. 356. 14, 17, 45, 63, 64

[56] S. Roman, The Umbral Calculus. *Academic Press*, New York, 1984. 2, 11

[57] S. Roman, G. Rota, *The Umbra1 Calculus*, *Advances in Math.* **27** (1978), no. 2, 95–188.

[58] J. Sándor, B. Crstici, Handbook of Number Theory II, Springer, Kluwer Acedemic Publishers, The Netherlands, 2004. 15

[59] C. Schneider, *Solving parameterized linear difference equations in terms of indefinite nested sums and products*, J. Difference Equ. Appl. **11** (2005), no. 9, 799–821. 35, 40

[60] I. M. Sheffer, *Some properties of polynomial sets of type zero*, Duke Math. J. **5** (1939), 590–622. 2, 11, 27

[61] I. M. Sheffer, *Note on Appell polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 739–744. 2, 11, 12

[62] N. J. A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences. Published electronically at* http :// www.research.att.com/njas/sequences, 2013. 9, 11, 13, 18

[63] H. M. Srivastava, *Some characterizations of Appell and q-Appell polynomials*, *Ann. Mat.Pura Appl.* (Ser. 4) **130** (1982) 321–329. 1

[64] H. M. Srivastava, *Some generalizations and basic (or q-) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials*, *Appl. Math. Inf. Sci.* **5** (2011) 390–444. 59

[65] H. M. Srivastava, M. Garg, S. Choudhary, *A new generalization of the Bernoulli and related polynomials*, *Russ. J. Math. Phys.* **17** (2010) 251–261. 74, 75

[66] H. M. Srivastava, M. A. Ozarslan, B. Yilmaz, *Some Families of Differential Equations Associated with the Hermite-Based Appell Polynomials and Other Classes of Hermite-Based Polynomials*, *Filomat* **28** (2014) 695–708. 2

[67] H. M. Srivastava, A. Pinter, Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials, *Appl. Math. Lett* **17** (2004) 375–380. 1, 34, 45

[68] B. Sury, *Sum of the reciprocals of the binomial coefficients*, *European J. Combin.* **14** (1993) 351–353. 102

[69] L. Verde-Star, H. M. Srivastava, *Some binomial formulas of the generalized Appell form*, *J. Math. Anal. Appl.* **274** (2002) 755–771. 1

[70] Z. Z. Zhang, J. Z. Yang, *Notes on some identities related to the partial Bell polynomials*, *Tamsui Oxf. J. Inf. Math. Sci.* **28** (2012) 39–48. 92