

N° d'ordre : 22/2003-M/MT

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIÈNE

USTHB/ALGER

THÈSE

Présentée

Pour l'obtention du diplôme de : MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Probabilités et Statistiques

Par : **Mlle MEZOUEZ FATIHA**

THEME

**Analyse multi-échelle pour la détection des singularités.
Application au champ magnétique terrestre.**

Soutenue publiquement le Dimanche 19/10/03 à 10 h 00 salle HASSANI
Devant le jury composé de :

A.AISSANI

M. EL BAHY MOSTEFA

A.HOUACINE

K.BOUKHATELA

M.HAMOUDI

O.ANES

professeur, USTHB

Chargé de cours, U.S.T.H.B

Maître de conférences, USTHB

Maître de conférences, USTHB

Maître de conférences, USTHB

Maître de conférences, INPS

*président
directeur de thèse*

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

A.KESSAB

Chargé de cours , USTHB

Examineur

Remerciements;

A terme de ce travail, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude envers mon directeur de thèse M.EL BAHY chargé de cours à l'USTHB , pour m'avoir dirigé lors de la réalisation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à monsieur A.AISSANI, professeur à l'USTHB , qui ma fait l'honneur de présider le jury, ainsi qu'à messieurs K.BOUKHATELA , maître de conférence à l'USTHB, AHOUACINE , maître de conférence à l'USTHB , O.ANES , maître de conférence à l'INPS et A.KESSAB , chargé de cours à l'USTHB , pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je suis particulièrement reconnaissante à monsieur M.HAMOUDI, maître de conférence à l'USTHB , de m'avoir accordé l'aide la plus large à la réalisation de cette thèse .je le remercie sincèrement pour l'honneur qu'il m'a fait de faire partie du jury .

J'exprime ma profonde reconnaissance à toutes les personnes enseignants et étudiants qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Table des Matières:

Introduction générale	3
1 Généralités sur les ondelettes :	5
1.1 Introduction :	5
1.2 Définition d'une ondelette :	6
1.3 Transformée en ondelette :	7
1.3.1 Transformée en ondelettes continue :	7
1.3.2 La transformée en ondelettes discrète :	8
1.3.3 La transformation inverse :	9
1.3.4 Ondelette de Meyer :	9
1.3.5 L'ondelette de Morlet :	10
1.3.6 L'ondelette " Chapeau Mexicain " :	11
1.3.7 Les ondelettes d'Ingrid Daubechies :	11
1.4 Le choix de l'ondelette :	11
1.5 Analyse multirésolution et base d'ondelettes :	12
1.5.1 Définition d'une analyse multirésolution :	13
1.5.2 Définition :	13
1.5.3 Bases de Riesz et bases orthonormées :	13
1.5.4 Ondelettes et espaces fonctionnels :	14
1.5.5 Propriétés fondamentales :	19
2 Seuillage des coefficients d'ondelettes :	21
2.1 Réduction du bruit par seuillage des coefficients d'ondelettes :	21

2.1.1	Définitions et notations :	21
2.1.2	Estimation dans l'espace des suites :	23
2.1.3	Méthode du seuillage :	23
2.2	Estimation minimax par seuillage en ondelettes :	24
2.2.1	Estimation minimax Bayesienne :	24
2.2.2	Estimateur presque-minimax :	25
2.3	L'estimation par seuillage des coefficients d'ondelettes des données entachées d'un bruit blanc gaussien :	28
2.3.1	Seuillage universel :	31
2.3.2	Méthode du seuillage "SURE" :	36
2.3.3	Propriétés minimax du seuillage "SURE" :	36
2.4	L'estimation par seuillage des coefficients d'ondelettes des données entachées d'un bruit stationnaire :	37
2.4.1	Seuillage universel dépendant des niveaux :	37
2.4.2	Seuillage "SURE" dépendant des niveaux :	38
3	Analyse multi-échelle pour la détection des singularités et estimation des régularités via l'analyse en ondelette continue :	40
3.1	Transformée en ondelettes et caractérisation de régularité locale:	40
3.2	Estimation de la régularité d'une singularité :	51
4	Résultats et évaluations :	54
4.1	Réduction du bruit par seuillage des coefficients d'ondelettes en utilisant les seuils "SURE" et "universel":	55
4.1.1	Evaluation qualitative :	69
4.1.2	Evaluation quantitative :	69
4.1.3	Conclusion :	76
4.2	Détection des singularités et spéci...cation des régularités :	76
4.2.1	Analyse en ondelettes continues du cycle synthétique sans bruit :	77
4.2.2	Analyse en ondelettes continues du cycle synthétique bruité après seuillage:	78

4.3	Application au champ magnétique terrestre :	83
4.3.1	Le champ magnétique terrestre :	83
4.3.2	Vent solaire et activité géomagnétique :	85
4.3.3	Analyse en ondelettes continue des du champ magnétique terrestre de l'observation Chambon-la-forêt :	87
	Conclusion générale	93
	Références bibliographiques :	93

Introduction générale :

La transformation en ondelettes a été considérée comme un outil promoteur pour l'élimination du bruit en traitement du signal. Des méthodes non linéaires ont été proposées et qui consiste à estimer une fonction à partir des données bruitées par un seuillage des coefficients d'ondelettes empiriques. Contrairement aux méthodes linéaires, ces méthodes possèdent de bonnes propriétés minimax sur certains espaces fonctionnels.

L'idée est de ramener à zéro les coefficients d'ondelettes qui sont en dessous d'un seuil λ , ces coefficients sont considérés comme peu fiable car noyés dans le bruit.

Nous concevons l'élimination du bruit comme une opération d'estimation d'une fonction inconnue f à partir des données bruitées avec comme principal objectif la minimisation de l'erreur en moyenne quadratique. L'estimateur \hat{f} obtenu et avec une grande probabilité aussi régulier que la fonction f , c'est-à-dire :

Il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec λ_n qui tend vers 1 et une constante $c = c(F; \tilde{A})$ telles que :

$$\text{prob} \left\{ \int \hat{f}_n^2 \cdot c: kfk_F \leq \lambda_n \right\} \rightarrow 1$$

où F est une classe fonctionnelle contenant f :

Cette étude porte sur un signal synthétique perturbé par un processus stationnaire.

Une deuxième étude consiste à détecter les singularités du signal synthétique et estimer leur irrégularité par l'utilisation du formalisme de la transformée en ondelettes continue introduit par Mallat et qui s'avère puissant pour caractériser les fines structures présentes dans le signal. L'analyse est ap-

pliquée par la suite au signal synthétique entaché du bruit (bruit blanc, processus auto-régressif $AR(1)$, processus moyenne mobile $MA(1)$ et le processus mixte $ARMA(1,1)$) après seuillage.

Les méthodes décrites ç-dessus ont été appliquées aux données réelles du champ magnétique terrestre de l'observatoire Chambon-la-forêt a...n de mettre en évidence certains phénomènes qui sont les variations brusques du champ magnétique, après avoir effectué un seuillage.

Nous avons donc utilisé la transformée en ondelettes continue pour détecter les singularités du champ géomagnétique qui sont en rapport avec l'activité solaire ainsi que leur type.

Les algorithmes qui ont été développés dans ce sens sont fonctionnels et les résultats obtenus sont satisfaisants.

Chapitre 1

Généralités sur les ondelettes :

1.1 Introduction :

C'est dans l'analyse des problèmes physiques que la théorie des séries de Fourier trouve son origine et dont le résultat principal est que :

Toute fonction 2π périodique $f(t)$ est la somme :

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}} C_N e^{iNt}$$

de sa série de Fourier (au sens des distributions), les coefficients C_N se calculent alors par :

$$C_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-iNt} dt \quad N \in \mathbb{Z}$$

Ce résultat a été étendu aux fonctions non-périodiques et la série de Fourier devient transformée de Fourier et qui est donnée par :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \text{ pour toute fonction } f \text{ dans } L^2(\mathbb{R})$$

La transformée de Fourier inverse représente la fonction $f(t)$ comme:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

L'analyse de Fourier a permis de résoudre certains problèmes dans l'étude des signaux stationnaires, mais a néanmoins montré ses limites dans l'étude des signaux non-stationnaires, qui nécessitent une étude locale en temps et en fréquence de plus son impossibilité d'analyser et de caractériser certains espaces fonctionnels. De ce fait, de nombreux chercheurs, chacun sous la pression des besoins spécifiques de sa spécialité, ont effectué des efforts considérables qui ont donné naissance à la théorie des ondelettes.

1.2 Définition d'une ondelette :

On appelle ondelette analysante ou ondelette mère, toute fonction $\tilde{A}(t)$ localisée et oscillante.

La condition de localisation s'exprime sous la forme d'une décroissance rapide quand $|t|$ augmente, c'est-à-dire pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^p \tilde{A}(t) = 0$$

La condition d'oscillation suggère que \tilde{A} vibre comme une onde, c'est-à-dire que l'intégrale de $\tilde{A}(t)$ soit nulle et qu'il en soit de même pour les m premiers moments de \tilde{A} , qui s'exprime mathématiquement par :

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{A}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} t \tilde{A}(t) dt = \dots = \int_{\mathbb{R}} t^m \tilde{A}(t) dt = 0$$

On dira donc que \tilde{A} a m moments nuls.

La mère des ondelettes $\tilde{A}(t)$ engendre d'autres ondelettes $\tilde{A}_{a,b}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ par changement d'échelles et par translation dans le temps.

Donc à partir d'une fonction de base \tilde{A} appelée ondelette-mère, on construit une famille de fonctions élémentaires :

$$\tilde{A}_{a,b}(t) = \frac{1}{a} \tilde{A} \left(\frac{t-b}{a} \right) ; a > 0; b \in \mathbb{R}$$

avec \tilde{A} est l'ondelette mère, a ($a > 0$) est un paramètre d'échelle agissant par dilatation si $a > 1$ ou contraction si $a < 1$ et b est le paramètre de translation dans le temps qui indique la position de l'ondelette analysante $\tilde{A}(t)$.

Une limitation sévère pour le développement d'une analyse temps-fréquence vient du fait qu'une

ondelette ne peut pas avoir à la fois une dispersion temporelle et une dispersion fréquentielle arbitrairement petite, ce point est lié au principe d'incertitude de " Heisenberg " qui est exprimé par l'inégalité :

$$\Phi_t : \Phi_\omega \geq \frac{1}{2}$$

où Φ_t et Φ_ω sont les dispersions temporelles et fréquentielles.

‡ La valeur minimale de $\Phi_t : \Phi_\omega$ est atteinte pour les gaussiennes :

$$\tilde{A}(t) = C e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{1}{2a}(t-t_0)^2}$$

1.3 Transformée en ondelette :

Il existe deux types de transformée en ondelettes :

- 1- Transformée en ondelettes continue.
- 2- Transformée en ondelettes discrète dont on distinguera entre :

‡ Bases obliques.

‡ Bases d'ondelettes orthonormales.

1.3.1 Transformée en ondelettes continue :

‡ Pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit la transformée en ondelettes continue par la fonction wf définie par :

$$wf(a; b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{A}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

où f est le signal continu à analyser, \tilde{A} est le conjugué de l'ondelette analysante \tilde{A} , a est le paramètre d'échelle et b est le paramètre de translation.

La transformée en ondelettes continue est une représentation complète, stable et redondante du signal, elle indique les fluctuations du signal autour de b à l'échelle " a " .

1.3.2 La transformée en ondelettes discrète :

La transformée en ondelettes discrète est obtenue en restreignant les paramètres a et b à un sous ensemble discret (et même ...ni) de \mathbb{R} de la forme suivante :

$$a = a_0^m \quad ; \quad b = nb_0 a_0^m \quad N; m \in \mathbb{Z}$$

où a_0 est le pas de dilatation et b_0 est le pas de translation.

La famille d'ondelettes discrètes est donnée par :

$$\tilde{A}_{m;n}(t) = a_0^{m-2} \tilde{A} \left(\frac{t - nb_0}{a_0^m} \right) \quad m; n \in \mathbb{Z}$$

ainsi, pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ la transformée d'ondelette discrète est

$$\begin{aligned} wf(a_m; b_n) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{A}_{m;n}(t) dt \\ &= a_0^{m-2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{A} \left(\frac{t - nb_0}{a_0^m} \right) dt \end{aligned}$$

I. Daubechies [10] a montré que la famille $\{\tilde{A}_{m;n}\}_{m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}}$ constitue une frame ou base base oblique, c'est-à-dire :

Il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on ait :

$$A \|f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{m;n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{A}_{m;n} \rangle|^2 \leq B \|f\|_{L^2}^2$$

- Si $A = B$, la famille $\{\tilde{A}_{m;n}\}_{m;n \in \mathbb{Z}}$ est une base oblique ...ne.
- Si $A = B = 1$ et $\langle \tilde{A}_{m;n}, \tilde{A}_{m;n} \rangle = 1$ pour tout $m;n \in \mathbb{Z}$, alors la famille $\{\tilde{A}_{m;n}\}_{m;n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée.

1.3.3 La transformation inverse :

La transformée en ondelettes inverse ne peut être effectuée que si la condition d'admissibilité suivante est satisfaite :

$$C_{\hat{A}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{A}(\omega)|^2 d\omega}{\omega} < +\infty$$

où \hat{A} est la transformée de Fourier de l'ondelette analysante \tilde{A} .

Si $\hat{A}(\omega)$ a une décroissance rapide, la condition d'admissibilité est équivalente à :

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{A}(t) dt = 0$$

La transformée inverse s'écrit alors :

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 C(a,b) \tilde{A}\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2}$$

Type d'ondelettes :

1.3.4 Ondelette de Meyer :

L'ondelette de Meyer est issue d'une analyse multi-résolution et dont le spectre est donné par :

$$\hat{A}(\omega) = \begin{cases} (2^{i/4}) \frac{1}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \sin \frac{1}{2} V\left(\frac{3}{2^{i/4}} |\omega| \right) & , \text{ si } \frac{2^{i/4}}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4^{i/4}}{3} \\ (2^{i/4}) \frac{1}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \cos \frac{1}{2} V\left(\frac{3}{2^{i/4}} |\omega| \right) & , \text{ si } \frac{4^{i/4}}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8^{i/4}}{3} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

où V est la fonction régulière définie par :

$$V(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \leq 0 \\ \omega^4 (35 - 84\omega + 70\omega^2) & \text{si } 0 < \omega < 1 \\ 1 & \text{si } \omega \geq 1 \end{cases}$$

et vérifie $V(\omega) + V(1 - \omega) = 1$.

Les ondelettes de Meyer (Figure 1.1) sont des ondelettes orthogonales et de régularité infinie symétriques mais leur principal inconvénient est qu'elles ne sont pas à support compact.

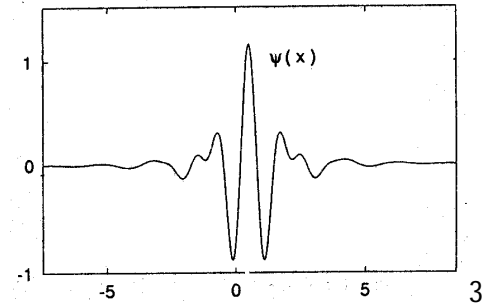


Figure 1.1 : Ondelette de Meyer

1.3.5 L'ondelette de Morlet :

L'ondelette de Morlet est la première ondelette qui fut découverte par J.Morlet, elle est définie par :

$$\tilde{A}_R(t) = \frac{1}{2^{1/4}} \exp \left[i \frac{\pi}{2} \cos(2\pi w_0 t) \right], \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{A}_I(t) = \frac{1}{2^{1/4}} \exp \left[i \frac{\pi}{2} \sin(2\pi w_0 t) \right], \quad t \in \mathbb{R}$$

L'ondelette de Morlet (Figure 1.2) n'est pas construite à partir d'une analyse multirésolution, de plus, elles ne forment pas une base orthogonale. Elles constituent une frame.

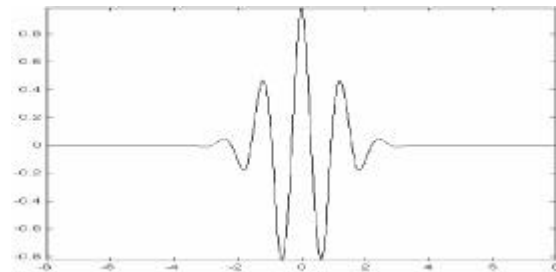


Figure 1.2 : Ondelette de Morlet

1.3.6 L'ondelette " Chapeau Mexicain " :

L'ondelette chapeau mexicain (Figure 1.3) est la dérivée seconde d'une gaussienne. C'est une fonction symétrique. Elle est définie par :

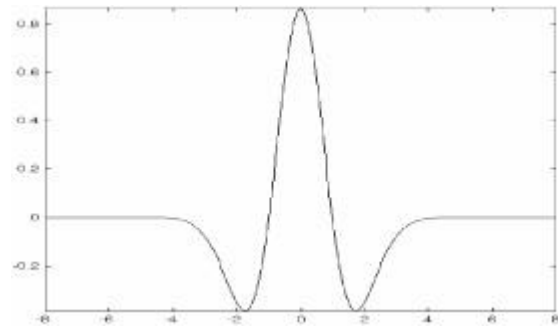


Figure 1.3 : Ondelette " Chapeau mexicain "

$$\tilde{A}(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

et constitue une frame.

1.3.7 Les ondelettes d'Ingrid Daubechies :

Pour toute fonction $\tilde{A}(t)$ et $\psi(t)$ de classe C^r , I. Daubechies a construit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\tilde{A}_{j;k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \tilde{A}_n(2^j t - k); \quad j \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{Z}; N \geq 1$$

ayant les propriétés suivantes :

• Le support \tilde{A}_n est l'intervalle $[0; 2n + 1]$:

• $\tilde{A}_n(t)$ a n moments nuls et est de classe $C^{\frac{1}{2} \epsilon n}$ avec $\frac{1}{2} \epsilon$ proche de $\frac{1}{5}$.

Si la fonction à analyser possède m dérivées continues, alors les coefficients d'ondelettes de sa décomposition dans la base de Daubechies seront de l'ordre de grandeur de $2^{i(m+\frac{1}{2})j}$. Cela signifie que dès que la fonction à analyser est régulière les coefficients à conserver sont beaucoup moins nombreux.

1.4 Le choix de l'ondelette :

Toute analyse dépend d'un choix d'une ondelette particulière \tilde{A} dont les propriétés sont dictées par les qualités requises pour l'application considérée.

Les propriétés qui sont en général prises en considération peuvent être résumées en :

- 2 – La localisation
- L'oscillation
- La régularité
- La symétrie
- L'orthogonalité

2 La localisation spatiale est souhaitable afin de pouvoir caractériser de façon simple les phénomènes locaux tels que les singularités. L'ondelette est d'autant plus localisée que son support est petit.

2 La propriété d'oscillation signifie que l'ondelette $\tilde{A}(x)$ possède un certain nombre de moments nuls, les coefficients d'ondelettes auront donc, des valeurs numériques très faibles aux hautes résolutions. Cela nous permet de réduire considérablement le coût de calcul [3].

2 La régularité est la faculté d'être bien localisée en l'espace et en fréquence. La régularité nous permettra d'avoir une reconstruction qui approche le mieux le signal analysé.

2 L'orthogonalité nous assure que les informations contenues dans un canal ne se retrouvent pas dans les autres canaux, cela veut dire qu'il n'y a pas de redondance d'information.

Le choix d'un type d'ondelette ne peut se faire a priori. Une ondelette possédant toutes les qualités requises n'existe pas. Certaines de leurs propriétés s'excluent mutuellement. Ainsi, on ne peut pas avoir une ondelette symétrique et à support compact en même temps (sauf pour le système de Haar). Les ondelettes splines sont symétriques mais non compactes. En revanche, les ondelettes de Daubechies sont compactes mais non symétriques. Donc le choix de l'ondelette sera porté sur l'ondelette la plus adaptée à l'application considérée.

1.5 Analyse multirésolution et base d'ondelettes :

La notion d'analyse multirésolution a été introduite par Mallat en 1986 et joue un rôle clé dans la construction des bases d'ondelettes.

1.5.1 Définition d'une analyse multirésolution :

Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ par définition est une suite croissante $V_j, j \in \mathbb{Z}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes:

$$\text{Ⓢ } \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = f0g, \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (1.1)$$

$$\text{Ⓢ } \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, \text{ on a : } f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1} \quad (1.2)$$

$$\text{Ⓢ } \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ on a : } f(t) \in V_0 \iff f(t - k) \in V_0 \quad (1.3)$$

$$\text{Ⓢ } \text{Il existe une fonction } g(t) \in V_0 \text{ telle que la suite } \{g(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (1.4)$$

soit une base de Riesz de l'espace V_0 , c'est-à-dire, il existe deux

constantes $C^0 > C > 0$ telles que, pour toute suite $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

de scalaires, on ait $C \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k e_k|^2 \leq C^0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$

On aura donc :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

où W_j est le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} .

1.5.2 Définition :

Une analyse multirésolution $V_j, j \in \mathbb{Z}$ de $L^2(\mathbb{R})$ est r -irrégulière ($r \in \mathbb{N}$) si l'on peut choisir la fonction intervenant dans (2.4) de sorte que l'on ait :

g est r fois dérivable.

Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \frac{d^m}{dx^m} g(t) \right| \leq C_m (1 + |t|)^{-m}$ (g à décroissance rapide)

1.5.3 Bases de Riesz et bases orthonormées :

Soit $V_j, j \in \mathbb{Z}$ une analyse multi-résolution. Y.Meyer [6] a montré qu'une base orthonormée d'ondelettes $\{f(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_0 est construite à partir de la base de Riesz $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et dont le

terme général est donné par :

$$\hat{g}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{A}(\omega + 2k\pi) \hat{g}(\omega + 2k\pi) j^k$$

' est dite fonction père.

Si de plus $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multi-résolution r -régulière, alors ' vérifie la propriété suivante :

$$\frac{d^k}{dt^k} \tilde{g}(t) \sim C_N (1 + |t|)^{-N}, \text{ pour tout } N \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq r$$

L'existence de ' permet de construire l'ondelette mère \tilde{A} et par conséquent d'avoir une base orthonormée d'ondelettes $\{2^{j/2} \tilde{A}(2^j t - k) ; k \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$.

De même l'ondelette \tilde{A} vérifie :

$$\frac{d^q \tilde{A}(t)}{dt^q} \sim C_m (1 + |t|)^{-m}, \text{ pour tout } m \geq 1 \text{ et } 0 \leq q \leq r$$

I. Daubechies [10] a démontré l'existence d'une analyse multirésolution V_j de $L^2(\mathbb{R})$ régulière telle que les fonctions ' et \tilde{A} associées soient à support compact.

Une ondelette $\tilde{A}(t)$ provenant d'une analyse multi-résolution r -régulière vérifie :

$$\frac{d^N}{dt^N} \tilde{A}(0) = \int_{\mathbb{R}} t^N \tilde{A}(t) dt = 0 \text{ pour } 0 \leq N \leq r$$

1.5.4 Ondelettes et espaces fonctionnels :

La formule de reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes est :

$$f(t) = \sum_{j,k} \tilde{A}_{j,k} \tilde{A}_{j,k}(t) \tag{1.5}$$

pour toute fonction de f appartenant à $L^2(\mathbb{R})$.

Cette formule reste valable pour bien analyser d'autres espaces fonctionnels comme $L^p(\mathbb{R})$, avec $1 < p < \infty$, les espaces de Holder, de Besov.

Les fonctions de ces différents espaces s'écrivent en terme des séries (1:5) dans le cas d'espaces fonc-

tionnels homogènes et en :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_k(t - k) + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{j,k} \tilde{A}_{j,k}(x) \quad (1.6)$$

où :

$$\tilde{f}_k = \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{f}_k(t - k) dt \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{A}_{j,k} \tilde{A}_{j,k} dt$$

dans le cas des espaces fonctionnels non homogènes [6].

Dans les deux cas-les séries (1:5) et (1:6) convergent au sens de l'espace fonctionnel d'appartenance de la fonction f.

1- Ondelettes et espaces $L^p(\mathbb{R})$ $1 < p < \infty$:

L'espace $L^p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \text{ est finie.}$$

La caractérisation de l'espace $L^p(\mathbb{R})$ en termes des coefficients d'ondelettes est comme suit :

La fonction f (t) est la somme de la série $\sum_{j,k} \tilde{f}_{j,k} \tilde{A}_{j,k}(t)$ si et seulement si

$$\left(\sum_{j,k} |\tilde{f}_{j,k}|^2 \int_{\mathbb{R}} |\tilde{A}_{j,k}(t)|^{2/p} dt \right)^{1/2} \text{ est finie.}$$

2- Ondelettes et espaces de Hölder :

Soit une analyse multirésolution r-régulière:

a-Espace de Hölder non-homogène :

Définition :

Soit $\alpha \in]0, 1[$, une fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^\alpha(\mathbb{R})$ si f est bornée sur \mathbb{R} et si $\|f\|_\alpha$ est finie où :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\substack{t,h \\ h \neq 0}} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha}$$

Soit $\alpha = m + \frac{1}{2}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2} \in]0, 1[$. Une fonction f appartient à $C^\alpha(\mathbb{R})$ si f est bornée, de classe C^m et que toutes les dérivées $f^{(m)}$ appartiennent à $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Soit $\alpha = 1$, $C^1(\mathbb{R})$ est l'espace de Zygmund $C_{\alpha}^1(\mathbb{R})$ défini par les deux conditions suivantes :

f bornée et $\|f\|_{1;\alpha}$ finie, où :

$$\|f\|_{1;\alpha} = \sup_{t,h \neq 0} \frac{|f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)|}{|h|}$$

Soit $\alpha = m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Hölder $C^{m+1}(\mathbb{R})$ devient espace de Zygmund $C_{\alpha}^{m+1}(\mathbb{R})$. C'est l'espace des fonctions f bornées de classe C^m dont toutes les dérivées $f^{(m)}$ appartiennent à $C_{\alpha}^1(\mathbb{R})$.

La caractérisation de l'espace de Hölder C^{α} , pour $\alpha < r$ en termes des coefficients d'ondelettes est comme suit :

On dira qu'une fonction $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R})$ si les coefficients d'ondelettes

$$\tilde{c}_k = \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{\psi}(t - k) dt \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\|c_{j;k}\|_{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \tilde{A}_{j;k}(t) dt \quad j > 0; k \in \mathbb{Z}$$

vérifient :

$$\|c_{-k}\|_{\alpha} \leq C_0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\|c_{j;k}\|_{\alpha} \leq C_1 2^{j(\alpha - \frac{1}{2})} 2^{j\alpha} \quad \text{pour tout } j > 0; k \in \mathbb{Z}$$

où C_0 et C_1 étant deux constantes.

b- Espace de Hölder homogène :

Définition :

Si $\alpha \in]0; 1[$, une fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^{\alpha}(\mathbb{R})$ s'il existe une constante C telle que :

$$\|f\|_{\alpha} \text{ est finie.}$$

Si $\alpha = m + \frac{1}{2}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2} \in]0; 1[$. Une fonction f appartient à $C^{\alpha}(\mathbb{R})$ si f est de classe C^m et que toutes les dérivées $f^{(m)}$ appartiennent à $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Si $\alpha = 1$. Une fonction f appartient à l'espace de Zygmund α_{α} s'il existe une constante C telle

que :

$\|f\|_{C^m}^{(1)}$ est ...nie.

† Si $\mathbb{R}^m = m + 1$ l'espace de Zygmund C^{m+1} est l'espace de fonctions f de classe C^m dont les dérivées $f^{(m)}$ appartiennent à $C^1(\mathbb{R})$.

Une fonction f appartient à $C^{\mathbb{R}}$ si et seulement s'il existe une constante C telle que :

$$\|f\|_{C^{\mathbb{R}}} \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|f^{(j)}\|_{L^p}$$

3- Ondelettes et espaces de Besov :

Soit une analyse multi-résolution r -régulière:

a- Espace de Besov :

L'espace de Besov $B_{p,q}^{-\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} > 0$ et $0 < p, q \leq +1$ est un sous espace régulier de $L^p(\mathbb{R})$.

Le paramètre \mathbb{R} mesure la régularité et p, q spécifient le type de norme utilisée.

Pour définir ces espaces, on introduit, pour $h \in \mathbb{P}$, la m -ième différence :

$$\Phi_h^m(f; t) = \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} f(t + jh)$$

le m -ième module de régularité de f dans $L^p(\mathbb{R})$ est défini par :

$$W_{m,p}(f; h) = \|\Phi_h^m f\|_{L^p} \quad \forall m = 1, 2, \dots$$

Définition :

Pour $0 < \mathbb{R} < m$ et $0 < p, q \leq +1$, on définit l'espace de Besov $B_{p,q}^{-\mathbb{R}}$ comme l'ensemble de toutes les fonctions f telles que :

$$\|f\|_{B_{p,q}^{-\mathbb{R}}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sup_h \frac{W_{m,p}(f; h)}{h^{\mathbb{R}}} \right)^q dh \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{si } 0 < q < +1$$

$$\|f\|_{B_{p,q}^{-\mathbb{R}}} = \sup_h \frac{W_{m,p}(f; h)}{h^{\mathbb{R}}}, \quad \text{si } q = 1$$

est ...ni.

La norme de l'espace de Besov $B_{p,q}^{-\alpha}$ est définie par :

$$\|f\|_{B_{p,q}^{-\alpha}} = \|f\|_{L^p} + \|j^{\alpha} f\|_{B_{p,q}^{-\alpha}} \text{ pour } 1 \leq p, q < \infty$$

Et qui est une semi norme si $0 \leq \alpha < 1$.

Bien que la définition de la norme de l'espace de Besov dépend de m (m -ième module de régularité), l'espace n'est pas paramétrisé par m pour la raison suivante :

Il a été démontré [10] que pour des valeurs $m > \alpha$ donne lieu à des normes équivalentes.

La caractérisation de l'espace de Besov non homogène $B_{p,q}^{-\alpha}$ via les coefficients d'ondelettes est la suivante :

Les fonctions $f \in B_{p,q}^{-\alpha}$, avec $\alpha < r$, sont les sommes des séries

$$f(t) = \sum_k \tilde{\varphi}_{k'}(t - k) + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_{j,k'}(t)$$

telle que :

$$\sum_k \tilde{A} \sum_j \tilde{B} j^{-\alpha} j^p < 1$$

Et :

$$\sum_{j,k} \tilde{C} j^{\alpha} j^p \tilde{D} = 2^{i j (\frac{1}{2} i \frac{1}{p})} \tilde{E} \text{ avec } \tilde{E} \in \ell^q(\mathbb{N})$$

On a l'équivalence suivante :

$$\|f\|_{B_{p,q}^{-\alpha}} \approx \|(\tilde{C})\|_{\ell^q} + \|j^{\alpha} \tilde{D}\|_{\ell^q} \tag{1.7}$$

avec $j^{\alpha} \tilde{D} = \sum_{j \geq 0} \tilde{A} \sum_k \tilde{B} (j^{\alpha} j^p)^{1-p} \tilde{E}$.

Le terme de droite de (1.9) est la norme dans l'espace des suites (contenant la suite des coefficients d'ondelettes) $b_{p,q}^{\alpha}$.

b- Espace de Besov homogène :

Le cas des espaces de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^{-\alpha}$ est semblable aux espaces de Besov non-homogènes $B_{p,q}^{-\alpha}$ sauf que l'ondelette père $\tilde{\varphi}$ n'interviendra pas dans la décomposition en séries d'ondelettes. On

aura donc

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{-\alpha}} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|j^{\alpha} \tilde{A}_{j,k}(x)\|_{p,q}^q \right)^{1/q}$$

Les éléments $f \in \dot{B}_{p,q}^{-\alpha}$, avec $\alpha < r$, sont les sommes des séries d'ondelettes $\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{\alpha} \tilde{A}_{j,k}(x)$ telles que :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j\alpha} 2^{j(1-\frac{1}{p})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} j^{\alpha} \tilde{A}_{j,k}(x) = f \in \dot{B}_{p,q}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

1.5.5 Propriétés fondamentales :

La relation de Parseval s'écrit :

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{-\alpha}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j^{\alpha} \tilde{A}_{j,k})^2 \quad (1.9)$$

dans le cas d'un espace fonctionnel non-homogène et

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{-\alpha}}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j^{\alpha} \tilde{A}_{j,k})^2 \quad (1.10)$$

dans le cas d'un espace fonctionnel homogène.

Soit \mathcal{E} l'espace des suites des coefficients d'ondelettes $(\tilde{A}_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ des fonctions d'une classe fonctionnelle de Besov définie par :

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{-\alpha}} = 1:$$

Soit $\mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^k$ et $\mathcal{E}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{C})$ l'ensemble des coefficients $(\tilde{A}_{j,k})$ qui satisfont $j^{\alpha} \tilde{A}_{j,k} \in \mathcal{C}$: Alors, il existe deux constantes $C > C^0 > 0$ telles que

$$f \in \mathcal{E}_{p,q}^{\alpha} \iff C^0 \frac{1}{2} \in \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \in \mathcal{E}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{C})$$

Ces propriétés nous permettent de faire la transition de l'espace des fonctions à l'espace des suites (l'espaces des coefficients d'ondelettes).

Chapitre 2

Seuillage des coefficients d'ondelettes :

2.1 Réduction du bruit par seuillage des coefficients d'ondelettes :

2.1.1 Définitions et notations :

Le processus à analyser a la structure suivante :

$$y_i = f(t_i) + \epsilon_i \quad i = 1; n \quad (2.1)$$

$y = (y_i)_{i=1;n}$ représente les données observées (bruitées)

$f = (f(t_i))_{i=1;n}$ est le vecteur des données sans bruit

$\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1;n}$ est le vecteur aléatoire représentant le bruit contenu dans le signal de matrice covariance :

$$\begin{aligned} \gamma_{\epsilon}(h) &= \gamma_{\epsilon}(h;0) = \text{Cov}(\epsilon_{t+h}, \epsilon_t) \\ &= E[(\epsilon_{t+h} - E[\epsilon_{t+h}]) (\epsilon_t - E[\epsilon_t])] \\ &= E[\epsilon_{t+h} \epsilon_t] \quad \text{si } E[\epsilon] = 0 \end{aligned}$$

Si on suppose que $\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1;n}$ est un bruit blanc Gaussien c'est-à-dire $\epsilon_i \gg N(0, \sigma^2)$, avec $i = 1; n$, alors γ_{ϵ} est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont :

$$\gamma_{\epsilon}(i; i) = \gamma_{\epsilon}(0) = \sigma^2 \quad \forall i = 1; n:$$

2 Le meilleur estimateur \hat{p} de f est celui qui minimise l'erreur en moyenne quadratique :

$$\sum_{i=1}^n (\hat{p}_i - f_i)^2$$

2 La valeur moyenne de cette erreur est appelée fonction Risque dont l'expression est :

$$r(\hat{p}, f) = E \sum_{i=1}^n (\hat{p}_i - f_i)^2$$

Le but est de trouver un estimateur \hat{p} avec un risque

$$r(\hat{p}, f) = E \sum_{i=1}^n (\hat{p}_i - f_i)^2 \quad \text{minimum}$$

2 On dira que \hat{p} est optimal au sens minimax s'il minimise les pires des risques c'est-à-dire :

$$R(\hat{p}, f) = \inf_{\hat{p}} \sup_f \sum_{i=1}^n (\hat{p}_i - f_i)^2$$

2 La linéarité de la transformée en ondelettes dans (2:1) donne :

$$w_{jk} = \mu_{jk} + Z_{jk}; \quad j = 1; \dots; m; \quad k = 1; \dots; 2^{j-1} \quad (2.2)$$

avec :

$w_{jk} = (Ty)_{j;k}$ la transformée en ondelettes du signal y

$\mu_{jk} = (Tf)_{j;k}$ la transformée en ondelettes du signal sans bruit f ;

$Z_{jk} = (Tn)_{j;k}$ la transformée en ondelettes du bruit "

2 L'orthogonalité de la transformée en ondelettes (T) a une propriété statistique fondamentale :

T transforme un bruit blanc gaussien en un bruit blanc gaussien de matrice covariance :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= T^{-1} T^t \\ &= T^{-1} I_n T^t \\ &= I_n \end{aligned}$$

2.1.2 Estimation dans l'espace des suites :

Les relations entre l'estimation minimax dans l'espace fonctionnel (l'espace F d'appartenance de la fonction f) et l'espace des suites \mathcal{E} (constitué des coefficients d'ondelettes) données précédemment dans (1:6:1) ont pour conséquences les résultats suivants [16] :

a- On a égalité entre le risque minimax dans l'espace fonctionnel et le risque minimax dans l'espace des suites :

$$R(n; F) = R^*(n; \mathcal{E})$$

b- Si F est une classe de Besov, le risque minimax dans l'espace des suites \mathcal{E} est équivalent au risque minimax sur le corps de Besov $\mathcal{E}_{p,q}^{\otimes}$

$$R(n; \mathcal{E}) = R^*(n; \mathcal{E}_{p,q}^{\otimes})$$

où $\mathcal{E}_{p,q}^{\otimes}(C) = \{ \mu : \|\mu\|_{\mathcal{E}_{p,q}^{\otimes}} < C \}$.

Par conséquent, une estimation minimax dans le corps de Besov $\mathcal{E}_{p,q}^{\otimes}(C)$, noté $\mathcal{E}_{p,q}^{\otimes}$, nous fournit une estimation minimax dans l'espace des fonctions.

2.1.3 Méthode du seuillage :

La méthode du seuillage est basée sur les étapes suivantes :

1. Appliquer la transformée en ondelettes aux données $y_i; i = 1; n$; on obtient n coefficients d'ondelettes (w_{jk}) :
2. Appliquer le seuillage doux τ_{λ} aux coefficients d'ondelettes w_{jk} avec un seuil λ :

$$\tau_{\lambda}(w) = \text{sign}(w) (|w| - \lambda)_+$$

On a donc

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_{jk} \quad \text{ou} \quad \hat{\beta}_{jk} = \tau_{\lambda}(w_{jk}; \lambda)$$

3. Inverser la transformée en ondelettes aux coefficients w_{jk} après seuillage.

Le seuillage annule certains coefficients dont la valeur est inférieure au seuil. Le résultat est une reconstruction avec une contribution significative des coefficients à des échelles différentes.

² La question centrale qui se pose est comment choisir le seuil qui préserve l'information dans le signal et réalise un débruitage. Un petit seuil préserve l'information mais n'est pas efficace pour éliminer le bruit, alors qu'un grand seuil produit un résultat excessivement adouci avec une perte d'information. Beaucoup de Littérature est dévolue à ce problème de choix de seuil.

Parmi ses méthodes, certaines favorisent à minimiser l'erreur en moyenne quadratique comme le seuil « SURE ».

2.2 Estimation minimax par seuillage en ondelettes :

2.2.1 Estimation minimax Bayesienne :

On considère le problème d'estimation de μ dans le modèle (2:2) en supposant que μ_i , où $i \in I$, est une variable aléatoire telle que :

$$|\mu_i| \leq C$$

où $I = \{(j;k) : 1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq k \leq 2^{j-1}\}$ et ζ est la suite des moments définie par :

$$\zeta_i = E_j \mu_i^{p \wedge q} \quad i \in I$$

Le risque minimax Bayesien est défini par :

$$B^{\alpha}(n; \mathcal{E}_{p,q}^{\otimes}) = \inf_{\hat{\mu}} \sup_{\mu \in \mathcal{E}_{p,q}^{\otimes}} E_{\mu} E_{\mu}^{\otimes} \|\hat{\mu} - \mu\|_2^2$$

Donoho et Johnstone ont démontré [16] que l'estimateur minimax de Bayes $\hat{\mu}_i^{\alpha}$ (de B^{α}) est de la forme :

$$\hat{\mu}_i^{\alpha} = \psi_j^{\alpha}(y_i) \quad i \in I$$

où ψ_j^{α} est une fonction non-linéaire.

De plus, si $p \cdot q$ il y a équivalence entre le risque de Bayes et le risque minimax, c'est-à-dire

$$R^? i_n; \mathbb{E}_{p;q}^{\otimes \mathbb{C}} = B^? i_n; \mathbb{E}_{p;q}^{\otimes \mathbb{C}} (1 + o(1)) \quad (2.3)$$

par conséquent :

l'estimateur $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_i)_i$ est asymptotiquement minimax :

2.2.2 Estimateur presque-minimax :

Dans ce qui suit, on verra que l'utilisation du seuillage doux :

$$\hat{\theta}_{\lambda} (y) = \text{sign}(y) (|y| - \lambda)_+$$

avec un choix particulier de λ , ou du seuillage dur :

$$\hat{\theta}_{\lambda^1} (y) = y 1_{|y| \geq \lambda^1}$$

avec un choix particulier de λ^1 , fournit un estimateur bayésien presque minimax et qui est énoncé par le théorème suivant :

Théorème :

Il existe deux constantes ...nies $\alpha(p); M(p)$ telles que :

$$\begin{aligned} B^? i_n; \mathbb{E}_{p;q}^{\otimes \mathbb{C}} &\cdot \alpha(p \wedge q) B^? i_n; \mathbb{E}_{p;q}^{\otimes \mathbb{C}} \\ B^? i_n; \mathbb{E}_{p;q}^{\otimes \mathbb{C}} &\cdot M(p \wedge q) B^? i_n; \mathbb{E}_{p;q}^{\otimes \mathbb{C}} \end{aligned}$$

pour

$$\begin{aligned} \lambda_j &= s:l \ t_j; s;p \\ \lambda_j^1 &= s:m \ t_j^1; s;p \end{aligned}$$

pour certaines fonctions l et m et certaines suites $t^>$ et t^1 :

Preuve :

Considérons le problème univarié suivant :

$$y = \mu + z$$

Supposons que μ est une variable aléatoire de loi à priori μ_1 appartenant à $M_{p,q}^{\otimes}$ l'ensemble des mesures à priori satisfaisant :

$$\int \mu_{p,q} \cdot C$$

Le risque de Bayes de l'estimateur $\hat{\mu}_s$ est noté par :

$$r(\mu_s; \mu_1) = E_{\mu_1} E_{\mu} j_{\hat{\mu}_s}(y) | \mu \rangle^2$$

Dans le cas multivarié on obtient :

$$\begin{aligned} L(\mu_s; \mu_1) &= E_{\mu_1} E_{\mu} k_{\hat{\mu}_s}(y) | \mu \rangle^2 \\ &= \int r(\mu_s; \mu_1) \end{aligned}$$

Soit $\mu_2(\mu_1) = \inf_{\mu_s} r(\mu_s; \mu_1)$. D'où

$$\inf_{\mu_s} L(\mu_s; \mu_1) = \int \mu_2(\mu_1)$$

et

$$B_{\mu_s}^{\otimes} \int \mu_{p,q}^{\otimes} = \sup_{\mu_2 M_{p,q}^{\otimes}} \int \mu_2(\mu_1) \quad (2.4)$$

Grâce à la semi-continuité de μ_{\otimes} et à la compacité faible de l'ensemble $M_{p,q}^{\otimes}$, la borne supérieure est atteinte par une certaine mesure $\mu_1^?$ qui est la mesure à priori la plus défavorable pour les estimateurs obtenus par seuillage.

Pour évaluer la performance du seuillage, on définit :

$$\mu_{s,p}(c; s) = \inf_{\mu_2 \in [0; +1]} \sup_{\mu_s} E_{\mu_1} E_{\mu} j_{\hat{\mu}_s}(y) | \mu \rangle^2 : E_{\mu_1} j_{\mu}^p \cdot c^p$$

Et

$$\mu_{1,p}(c; s) = \inf_{\mu_2 \in [0; +1]} \sup_{\mu_s} E_{\mu_1} E_{\mu} j_{\hat{\mu}_s}(y) | \mu \rangle^2 : E_{\mu_1} j_{\mu}^p \cdot c^p$$

avec $s = (\text{varz})^{1/2}$

Pour une comparaison avec les estimateurs de Bayes minimax, on définit :

$$\alpha(p) = \sup_{c; s} \frac{\frac{1}{2} r_{s;p}(c; s)}{\frac{1}{2}(c; s)}; \quad M(p) = \sup_{c; s} \frac{\frac{1}{2} r_{1;p}(c; s)}{\frac{1}{2}(c; s)} \quad (2.5)$$

avec $\frac{1}{2}(c; s) = \inf_{\pm} \sup_{M_{p;q}^{\otimes}} \sum_{i=1}^n E_{\frac{1}{2}} E_{\pm} j_{\pm}(y_i) \gg j^2$

Notons :

$$r_{s;p}(c; s) = \sup_{\pm} \sum_{i=1}^n E_{\frac{1}{2}} E_{\pm} j_{\pm}(y_i) \gg j^2; \quad E j \gg j^p \cdot c^p$$

Le pire risque en utilisant le seuil s quand le moment d'ordre p est inférieur à c^p .

Donoho et Johnstone [16] ont montré que la fonction $r_{s;p}(c; s)$ est concave en c^p pour chaque s et s : Ainsi

$$l(\hat{c}; s; p) = \min_{\hat{c}} r_{s;p}(c; s)$$

est le seuil minimax dans ce problème.

Les quantités $r_{s;p}$ et $m(c; s; p)$ sont définies de la même manière.

Soit $\hat{c}_i^? = \hat{c}_i^?$ une suite de moment associé à $\frac{1}{2}$ comme $\frac{1}{2} \geq M_{p;q}^{\otimes}$ et $\hat{c}_i^? \geq E_{p;q}^{\otimes}$ par définition de $r_{s;p}$:

$$\frac{1}{2} (\frac{1}{2} \hat{c}_i^?) \cdot r_{s;p \wedge q}(\hat{c}_i^?; s);$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} B_{s; i; n; E_{p;q}^{\otimes}} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \hat{c}_i^?) \quad \text{d'après (2:4)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r_{s;p \wedge q}(\hat{c}_i^?; s) \\ &= \alpha(p \wedge q) \sum_{i=1}^n (\hat{c}_i^?; s) \quad \text{d'après (2:5)} \\ &= \alpha(p \wedge q) B_{s; i; n; E_{p;q}^{\otimes}} \end{aligned}$$

² De même pour \pm_1 qui est à un facteur de $M(p)$ près de la règle de Bayes minimax.

² $\alpha(p)$ et $M(p)$ sont inférieure à 2.22 quantitativement, $\alpha(p)$ tend à être plus petit que $M(p)$, par conséquent, le seuillage doux est meilleur que le seuillage dur.

² Si $p < q$ d'après (2:3) les estimateurs \hat{b}^p et \hat{b}^q sont à un facteur de $\alpha(p)$ et $M(p)$ respectivement,

asymptotiquement minimax pour $R^? i n; E_{p;q}^{\otimes}$ ce qui est exprimé par :

$$\begin{aligned} \sup_{E_{p;q}^{\otimes}} E_{\beta^*} \cdot \alpha(p) R^? i n; E_{p;q}^{\otimes} (1 + o(1)) \\ \sup_{E_{p;q}^{\otimes}} E_{\beta^1} \cdot M(p) R^? i n; E_{p;q}^{\otimes} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

2.3 L'estimation par seuillage des coefficients d'ondelettes des données entachées d'un bruit blanc gaussien :

2 M.Johnstone et W.Silverman [12] ont construit un estimateur $\hat{\beta}$ d'un risque optimal dit "Risque Benchmark" à partir de l'utilisation d'un "Oracle" qui consiste à utiliser le seuil :

$$\pm_i = I_{\{|\mu_j| > \lambda\}}$$

L'estimateur qui en résulte est

$$\hat{\beta}_i = \pm_i \mu_i \quad i \geq 1$$

dont le risque Benchmark est

$$r(\hat{\beta}; \mu) = \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \wedge \lambda^2$$

Ce risque sera utilisé pour évaluer les performances des estimateurs obtenus dans la pratique.

2 La contribution à la fonction risque de chaque coefficients [12] est :

$$r(\lambda; \mu) = \frac{1}{2} \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 + [\Phi(\lambda - \mu) + \Phi(\lambda + \mu)] \mu_i^2 \wedge \lambda^2 - \lambda^2 [\Phi(\lambda - \mu) + \Phi(\lambda + \mu)]$$

où λ est le seuil, μ est le coefficient d'ondelette sans bruit, λ le niveau du bruit, Φ distribution du bruit (loi de Gauss) et Φ fonction de répartition du bruit.

Le seuil qui minimise la fonction risque est donnée asymptotiquement par le théorème suivant :

Théorème :

Soit $w_i = \mu_i + z_i$, pour $i = \overline{1; n}$, les coefficients d'ondelettes bruités $r(\cdot; \mu)$ la fonction risque.

Si μ_n minimise $r(\cdot; \mu)$, alors pour $n \rightarrow \infty$

$$\mu_n \xrightarrow{P} \mu$$

Preuve :

Posons :

$$I_1 = \{ \mu_i \mid \mu_i \in \mathbb{R} \}$$

$$M_0 = \{ \mu_i \mid \mu_i \in \mathbb{R} \}$$

$$M_1 = \text{Card}(I_1)$$

On a établi précédemment dans le paragraphe 2.2.2 que :

$$r(\mu; \mu) = \sum_{i=1}^n r(\mu_i; \mu)$$

$$r^0(\mu; \mu) = M_0 \frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu; \mu) + \sum_{i \in I_1} \frac{\partial r(\mu_i; \mu)}{\partial \mu}$$

Soit $I_1^0; I_1^{00}$ une partition de I_1 en deux sous ensembles :

$$I_1^0 = \{ \mu_i \in I_1 \mid \frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu_i; \mu) < 0 \}$$

$$I_1^{00} = \{ \mu_i \in I_1 \mid \frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu_i; \mu) \geq 0 \}$$

μ_n minimise $r(\mu; \mu)$, on a donc $r^0(\mu; \mu) = 0$. D'où :

$$M_0 \frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu; \mu) + \sum_{i \in I_1^0} \frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu_i; \mu) = - \sum_{i \in I_1^{00}} \frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu_i; \mu)$$

Or :

$$\frac{\partial r}{\partial \mu}(\mu; \mu) = 2 \sum_{i=1}^n [2 \mu_i \otimes (\mu_i + \mu) \otimes (\mu_i - \mu)] + 2 \sum_{i=1}^n [A(\mu_i + \mu) + A(\mu_i - \mu)]$$

de plus, d'après le résultat asymptotique standard on a :

$$O_p(n^{-1/2}) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On déduit donc les équivalences suivantes :

$$O_p(n^{-1/2}) \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$O_p(n^{-1/2}) \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

et

$$O_p(n^{-1/2}) \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Des deux premières équivalences, on conclut que :

$$\frac{M_0}{M_1} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

En combinant ce dernier résultat avec la troisième équivalence, on trouve :

$$\frac{M_0}{M_1} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

En passant au logarithme :

$$3 \log \frac{1}{2} + \log M_0 - \log M_1 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{n}$$

On déduit donc que :

$$\log M_0 - \log M_1 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{n}$$

D'où $\sqrt{\frac{1}{2} \log n}$.

2.3.1 Seuillage universel :

Donoho et Johnstone ont montré l'utilisation du seuil asymptotique $\lambda_n \gg \frac{3}{4} (2 \log n)^{\frac{1}{2}}$ dit "seuil universel" a pour résultat, un estimateur $\hat{\beta}$ dont le risque atteint à un facteur $(1 + 2 \log n)$ près le risque Benchmark, qui est énoncé par le théorème suivant :

Théorème

L'estimateur

$$\hat{\beta}_i = \pm_s \cdot \mu_i \cdot \frac{\tilde{A}}{(2 \log n)^{\frac{1}{2}}} \quad i = 1; n$$

satisfait

$$E \|\hat{\beta} - \mu\|^2 \leq (2 \log n + 1) \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \leq 8 \mu^2 \leq 8 \mu^2 R^n$$

preuve :

La démonstration de ce théorème sera faite pour le cas univariate, le cas multivariate est déduit par sommation.

Soit $x \sim N(0; 1)$ et $\pm_s(x; t) = \text{Sign}(x) (|x| - t)_+$.

Montrons que, pour tout $\pm \cdot \frac{1}{2}$ et $t = \frac{1}{2} (2 \log \pm^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$:

$$E (\pm_s(x; t) - \pm)^2 = \frac{1}{2} (2 \log \pm^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \pm + \frac{1}{2} \pm^2$$

$$E (\pm_s(x; t) - \pm)^2 = 1 - 2P(|x| < t) + E x^2 \wedge t^2$$

1^{er} cas : Si $t^2 < x^2$

$$E (\pm_s(x; t) - \pm)^2 = 1 + t^2 - \frac{1}{2} (2 \log \pm^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (\pm + 1)$$

2^{ième} cas : Si $x^2 \leq t^2$

$$E (\pm_s(x; t) - \pm)^2 = 1 - 2P(|x| < t) + E x^2$$

$$\begin{aligned}
E(\pm_s(x; t) - \mu_i)^2 &= 2(1 - 2P(|x_j| < t)) + \mu_i^2 \\
&= 2P(|x_j| \geq 1) + \mu_i^2 \\
&= 4e^{-t} + \mu_i^2 \\
&= \mu_i^2 2 \log \mu_i^{-1} + 1 + \mu_i^2 \\
&= \mu_i^2 2 \log \mu_i^{-1} + 1 + \mu_i^2
\end{aligned}$$

le théorème suivant affirme que l'estimateur $\hat{\mu}^B$ obtenu atteint asymptotiquement le meilleur risque relativement au risque Benchmark, en effet,

Théorème :

$$\inf_{\mu} \sup_{\mu} \frac{E \sum_{i=1}^p (\hat{\mu}_i - \mu_i)^2}{2 \log n} \leq \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

Preuve :

Soit la fonction perte :

$$L_n(\hat{\mu}; \mu) = \frac{\sum_{i=1}^p (\hat{\mu}_i - \mu_i)^2}{1 + \sum_{i=1}^p \mu_i^2}$$

Le risque associé à cette fonction perte est définie par :

$$R_n(\pm; \mu) = E_{\mu} L_n(\pm(w); \mu)$$

Supposons que μ est un vecteur aléatoire de loi de probabilité à priori \mathbb{P} , et soit

$$R_n(\pm; \mathbb{P}) = E_{\mathbb{P}} R_n(\pm; \mu).$$

Notons

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{P}) = \inf_{\pm} R_n(\pm; \mathbb{P})$$

Le risque de Bayes associé à la loi à priori \mathbb{P} , et $\pm_{\mathbb{P}}$ est la règle de Bayes associée à cette loi à priori.

D'après le théorème minimax de la théorie de la décision appliqué à la fonction perte $E_n \hat{\mu}; \mu$. De plus, si on note le côté gauche de (3:9) par m_n , on obtient :

$$m_n = \sup_{\mu} \frac{1}{2} \log n (1 + o(1))$$

par conséquent, le théorème est démontré si on peut trouver une suite de loi à priori $F_{n,1}$ qui vérifie :

$$\frac{1}{2} \log n (1 + o(1)) \leq 2 \log n (1 + o(1)) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Considérons la distribution à priori $F_{n,1}$ qui est définie par :

$$F_{n,1} = (1 - \epsilon) \delta_0 + \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \delta_x \phi(x) dx = 2$$

avec δ_x représente la masse de Dirac en x .

Pour $a \gg 0$ fixé, et $\epsilon > 0$ suffisamment petit on définit $\phi = \phi(\cdot; a)$ par :

$$\phi(a + x) = \phi(a - x)$$

avec ϕ est la densité de la loi normale standard $N(0; 1)$.

On a alors [20]:

$$\frac{1}{2} \log n (1 + o(1)) \leq 2 \log n (1 + o(1))$$

Donoho [12] a démontré qu'en utilisant cette distribution à priori dans le problème d'estimation de μ à partir des données $y = \mu + z$, avec $z \sim N(0; 1)$, ainsi que la perte quadratique usuelle $E_j^2(\hat{\mu})$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \log n (1 + o(1)) \leq 2 \log n (1 + o(1)) \quad (2.8)$$

avec Φ est la fonction de répartition de la loi standard $N(0; 1)$.

Pour appliquer ce résultat à notre problème, on choisira :

$$\epsilon = \frac{1}{n} = \log n^{-1}$$

a...n que

$$1 = 1_n = 1 ("_n; a) \vee (2 \log n_i - 2 \log \log n)^{1=2}.$$

Considérons que la loi à priori de μ_n est i.i.d. $F_{\mu,1}$. Cette distribution calcule facilement le risque de Bayes $\frac{1}{2}_n (\frac{1}{4}_n)$ pour le problème vectorielle :

$$w_i = \mu_i + z_i \quad \text{si } i = 1; \dots; n$$

Quand on utilise la fonction perte quadratique $L_n(\hat{\mu}; \mu) = \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i - \mu_i^2$, d'après (2:8) on peut alors écrire :

$$\frac{1}{2}_n (\frac{1}{4}_n) \vee n \frac{1}{2}_1 (F_{\mu,1}) \vee n^2 \frac{1}{2}_n^2 (a) \text{ lorsque } n \rightarrow +1$$

Par ailleurs, considérons la variable aléatoire

$$N_n = \# \{i : \mu_i \in 0g\}.$$

avec $N_n \sim B(n; \frac{1}{n})$.

Soit $\epsilon_n = (\log n)^{-2=3}$ et définissons l'événement :

$$A_n = \{N_n \cdot n^2 + \epsilon_n g\}.$$

En utilisant l'inégalité de Chébychev, on trouve

$$P(A_n^c) \cdot n^2 = \epsilon^2 \rightarrow 0.$$

A partir des résultats établis ci-dessus, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\frac{1}{4}_n) &= E_{\frac{1}{4}_n} E_{\mu} \frac{L_n \mathbb{E}_{\frac{1}{4}_n; \mu}}{1 + \sum_{i=1}^n \mu_i^2} \\
&= E_{\frac{1}{4}_n} E_{\mu} \frac{L_n \mathbb{E}_{\frac{1}{4}_n; \mu}}{1 + N_n} \\
&\leq \frac{1}{1 + n''_n + \frac{1}{n}} E_{\frac{1}{4}_n} E_{\mu} L_n \mathbb{E}_{\frac{1}{4}_n; \mu} \mathbb{1}_{A_n} \\
&\leq \frac{1 + o(1)}{1 + n''_n + \frac{1}{n}} E_{\frac{1}{4}_n} E_{\mu} L_n \mathbb{E}_{\frac{1}{4}_n; \mu} \\
&\leq \frac{1 + o(1)}{1 + n''_n + \frac{1}{n}} \frac{1}{2}(\frac{1}{4}_n) \\
&\leq \frac{1}{1 + n''_n + \frac{1}{n}} n''_n \stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{2} \log n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{4}_n) \leq \frac{1}{2} \log n \stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{2} \log n + 1.$$

avec a est choisit arbitrairement grand, ce qui démontre (2:7).

2 L'estimateur \hat{f}_n^u est d'un risque qui est à un facteur de logarithmique près du risque minimax ce qui est illustré par le théorème suivant:

Théorème :

Soit $B_{p,q}^{\circ}(c)$ une boule de Besov, alors \hat{f}_n^u est presque minimax :

$$\sup_{f \in B_{p,q}^{\circ}(c)} E \|\hat{f}_n^u - f\|_{L^2}^2 \leq K \log n \inf_{\hat{f}} \sup_{f \in B_{p,q}^{\circ}(c)} E \|\hat{f}_n^u - f\|_{L^2}^2 \quad (2.9)$$

Preuve :

Donoho, Liu et Mac Gibbon [19] ont démontré que :

$$\inf_{\hat{\mu}} \sup_{\mu \in \mathcal{F}_{p,q}^{\circ}} E \|\hat{\mu} - \mu\|_{l_n}^2 \leq \frac{1}{2;22} \sup_{\mu \in \mathcal{F}_{p,q}^{\circ}} \sum_{i=1}^n \min\{\mu_i^2, \frac{1}{4} 2^{-i}\}.$$

En utilisant le théorème établi dans 2.3.1 et la relation de Parseval, on peut alors écrire :

$$\sup_{f \in B_{p,q}^{\circ}(c)} E \|\hat{f}_n^u - f\|_{L^2}^2 \leq (2 \log n + 1) \frac{1}{4} 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2;22} \inf_{\hat{f}} \sup_{f \in B_{p,q}^{\circ}(c)} E \|\hat{f}_n^u - f\|_{L^2}^2.$$

Le théorème est ainsi démontré.

2.3.2 Méthode du seuillage "SURE" :

Cette méthode proposée par C. Stein (1981) est basée principalement sur l'estimation sans biais de l'erreur en moyenne quadratique (EQM) $\sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i^2 - \mu^2$ de la forme suivante [13] :

$$\text{SURE}(\lambda; \mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i^2 + \frac{3\lambda^2}{n} (n - 2n_0)$$

où $n_0 = \sum_{i=1}^n w_{ij} \cdot \lambda_{ij}$ dit "Stein's Unbiased Risk Estimator".

Le seuil λ^S est la valeur qui minimise cette quantité.

2.3.3 Propriétés minimax du seuillage "SURE" :

La procédure "SURE" est optimale dans le sens qu'elle adapte les régularités de la fonction et l'estimateur qui en résulte est d'un risque presque minimax sur l'espace de Besov, qui est exprimé par :

$$\sup_{\mu \in \mathcal{F}_{p,q}^S} R(\hat{\mu}^S; \mu) \leq C \inf_{\hat{\mu}} \sup_{\mu \in \mathcal{F}_{p,q}^S} R(\hat{\mu}; \mu) \quad (2.10)$$

où $\hat{\mu}^S$ l'estimateur obtenu à partir d'un seuillage SURE.

Adaptivité et optimalité des seuils "Universel" et "SURE" :

² Les résultats précédents relient les performances du seuil universel à la sélection idéale des coefficients : ce ci exprime le fait que si la selection optimale donne de bons résultats alors le seuillage doux par un seuil universel donne des résultats qui s'en approchent.

De plus le risque obtenu est à un facteur logarithmique près du risque minimax.

² Contrairement au seuil universel, le seuil SURE dépend du signal à traiter donc plus adaptatif.

La procédure "SURE" donne de bons résultats sur l'espace de Besov à lequel probablement les données bruitées appartiennent.

Le risque obtenu est à une constante près du risque minimax. C'est à dire que si une fonction non bruitée appartient à un espace de Besov $F = B_{p,q}^S$ l'algorithme SURE agit comme une procédure minimax : il s'approche de l'estimateur qui minimise le pire cas de risque dans l'espace de fonction.

De (2:9) et (2:10) on conclut que la performance presque minimax de "SURE" est meilleure que celle du seuil "universel" d'un facteur logarithmique.

2.4 L'estimation par seuillage des coefficients d'ondelettes des données entachées d'un bruit stationnaire :

Considérons le modèle (2:2) avec Z un bruit stationnaire (AR(1), MA(1), ARMA(1,1), ...).

Le bruit étant corrélé sa répartition dépend du niveau par conséquent, l'utilisation d'un seuil unique n'effectue pas un bon seuillage.

L'extension du seuillage des coefficients d'ondelettes consiste à appliquer un seuillage dépendant d'échelle à la transformée en ondelettes des données (M.Johnstone et W.Silverman [17]).

Soit $(\lambda_j)_j$ la suite des seuils correspondant à chaque niveau j : On applique un seuillage doux

$$\pm (|j_k| \lambda_j) = \text{sign}(j_k) \max(|j_k| - \lambda_j, 0)$$

à chaque niveau "j":

L'estimateur $\hat{\beta}$ obtenu est : $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_{jk})_{jk}$

$$\hat{\beta}_{jk} = \pm (|j_k| \lambda_j) \quad j = 1; \dots; m; \quad k = 1; \dots; 2^{j-1}$$

2.4.1 Seuillage universel dépendant des niveaux :

Johnstone et al [17] ont proposé dans le cas des signaux bruités par un bruit corrélé, un seuillage dépendant de niveau avec un seuil

$$\lambda_j = s_j \sqrt{2 \log n}, \text{ où } s_j = (\text{var} Z_j)^{1/2}$$

Les propriétés minimax étudiées dans la section 2.3.1 dans le cas d'un bruit blanc, ont été étendues dans ce cas et dont les principaux résultats sont :

² Le risque de l'estimateur $\hat{\beta}$ atteint à un facteur logarithmique près le risque Benchmark.

$$r_{\hat{\beta}; \mu} \leq (2 \log n + 1) \frac{\sum_{j=1}^p \mu_j^2 \wedge s_j^2}{\sum_{j=1}^p s_j^2} \mathbf{A};$$

avec $\bar{s}^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^p s_j^2$.

² L'estimateur $\hat{\beta}$ atteint asymptotiquement le meilleur risque relatif au risque Benchmark :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{2 \log n} \frac{\bar{s}^2}{\zeta^2} \inf_{\hat{\beta} \in \mathcal{R}^n} \sup_{\mu \in \mathcal{R}^n} \frac{E \|\hat{\beta} - \mu\|_2^2}{\sum_{j=1}^p \mu_j^2 \wedge s_j^2} \rightarrow 1$$

où $\zeta^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^p \frac{1}{s_j^2}$;

2.4.2 Seuillage "SURE" dépendant des niveaux :

De la même manière pour le seuillage SURE on a :

$$\text{SURE}_j = \hat{\beta}_{(\cdot, j)} \cdot w_j + \frac{s_j^2}{n_j} (n_j - 2n_{j0})$$

n_j est le nombre de coefficients w_{jk} nuls au j -ième niveau.

² d'après (2.3) et le théorème établis dans 2.2.2, l'estimateur $\hat{\beta}$ obtenu par seuillage doux et la suite des seuils $(s_{\cdot, j})_j$ est presque minimax

$$\inf_{\hat{\beta}_{(\cdot, j)}} \sup_{\mu \in \mathcal{E}_{p, q}^{\otimes}} E \|\hat{\beta}_{(\cdot, j)} - \mu\|_2^2 \leq \alpha(p) \inf_{\hat{\beta}} \sup_{\mu} E \|\hat{\beta} - \mu\|_2^2$$

² parmi tous les estimateurs obtenus à partir de l'utilisation de la suite $(s_{\cdot, j})_j$ et seuillage doux, l'estimateur obtenu par la suite des seuils $\text{sure}_{(\cdot, j)}$ est le meilleur [13]

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}_{p, q}^{\otimes}(c)} E \|\text{sure}_{(\cdot, j)} - \mu\|_2^2 \leq \inf_{\hat{\beta}_{(\cdot, j)}} \sup_{\mu} E \|\hat{\beta}_{(\cdot, j)} - \mu\|_2^2 :$$

La combinaison de ces deux résultats nous déduit le théorème ci-dessous.

Théorème :

Soit l'ondelette discrète \tilde{A} qui possède r moments nuls et est r fois continûment différentiable. Alors, l'estimateur \hat{f}^s est presque minimax

$$\sup_{f \in B_{p,q}^{\otimes}(c)} R(\hat{f}^s; f) \sim \inf_{\hat{f}} \sup_{f \in B_{p,q}^{\otimes}(c)} R(\hat{f}; f) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

pour tout $p, q \in [1, +\infty]$, avec $c \in]0, +\infty[$ et $\otimes_0 < \otimes < r$.

On constate donc que dans le cas du seuillage sure dépendant d'échelle, on a un meilleur résultat car on a équivalence entre le risque minimax de l'estimateur obtenu \hat{f}^s et le risque minimax.

Ce théorème étant valable pour tout p, q, c , on dira que la méthode du seuillage sure est adaptative sur les corps de Besov $B_{p,q}^{\otimes}(c)$.

Chapitre 3

Analyse multi-échelle pour la détection des singularités et estimation des régularités via l'analyse en ondelette continue :

3.1 Transformée en ondelettes et caractérisation de régularité locale:

L'une des propriétés remarquables de la transformée en ondelettes est la caractérisation des fonctions. En mathématique, cette régularité locale est mesurée par l'exposant de Lipschitz ou Hölder.

Définition 3.1 : régularité (Mallat et Hwang 1992)

Soit n un entier positif tel que $n \leq \alpha < n + 1$. La fonction $f(t)$ possède un exposant de Hölder α (où α -Lipschitzienne) en t_0 si et seulement s'il existe deux constantes C et $h_0 > 0$ et un polynôme $P_n(t)$ tels que pour $h < h_0$:

$$|f(t_0 + h) - P_n(h)| \leq C|h|^\alpha \quad (3.1)$$

$f(t)$ est uniformément α -Hölderienne sur un intervalle $]b; b^0[$ si et seulement s'il existe une constante A et pour tout $t_0 \in]b; b^0[$ il existe un polynôme d'ordre n , $P_n(h)$ tel que (3.1) est vérifiée pour $t_0 + h \in]b; b^0[$.

‡ La régularité hölderienne de $f(t)$ en t_0 est la borne supérieure de toutes les valeurs α pour lesquelles $f(t)$ est α -Lipshitzienne en t_0 .

‡ La régularité hölderienne α_0 donne une indication sur la différentiabilité de $f(x)$. Si la régularité hölderienne α_0 de $f(t)$ satisfait $n < \alpha_0 < n + 1$ alors $f(t)$ est n fois différentiable, mais sa n -ième dérivée est singulière en t_0 et α_0 caractérise cette régularité.

Définition -2- : Exposants de Hölder négatifs

Soient $f(t)$ une distribution tempérée, α un nombre réel non entier et $[b; b^0]$ un intervalle compact de \mathbb{R} .

La distribution $f(t)$ possède un exposant de Hölder uniforme α sur l'intervalle $]b; b^0[$ si et seulement si sa primitive possède un exposant de Hölder uniforme $\alpha + 1$ sur $]b; b^0[$.

‡ Mallat et Hwang [25] ont relié la régularité d'une fonction à la décroissance des coefficients d'ondelettes aux petites échelles et qui est établi par le résultat suivant :

$f(t)$ est uniformément hölderienne sur $]b + \epsilon; b^0 - \epsilon[$, avec $\epsilon > 0$, si et seulement s'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour $t \in]b + \epsilon; b^0 - \epsilon[$ et $a > 0$

$$|w_f(a; t)| \leq C_\alpha a^{-\alpha} \quad (3.2)$$

‡ Pour des valeurs de α plus grandes que 1, le résultat est étendu en imposant que l'ondelette $\tilde{A}(t)$ ait un nombre de moments nuls $n > \alpha$.

Détection des singularités et estimation des régularités :

Définition : Maxima du module de la transformée en ondelette

Soit $w_f(a; t)$ la transformée en ondelette d'une fonction $f(t)$

‡ On appelle maximum local de la transformée en ondelette, tout point $(a_0; t_0)$ tel que :

$$\frac{\partial w_f(a_0; t)}{\partial t} \text{ possède un zéro-crossing en } t = t_0$$

‡ On appelle maxima du module de la transformée en ondelette continue, tout point $(a_0; t_0)$ tel que :

$$|w_f(a_0; t)| < |w_f(a_0; t_0)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On appelle ligne maxima, toute courbe dans le domaine échelle, le long duquel tous les points sont des maxima de la transformée en ondelette.

Mallat et Hwang ont montré qu'il ne peut y avoir de singularités sans qu'il ait un maximum du module de la transformée en ondelette aux ...nes échelles et qui est énoncé par le théorème suivant :

Théorème :

Soit n un entier strictement positif, et soit $\tilde{A}(t)$ une ondelette à n moments nuls, à support compact et n fois continument différentiable.

Soit $f(t) \in L^1([b; b^0])$

Si il existe une échelle $a_0 > 0$ telle que pour toute échelle $a < a_0$ et $t \in [b; b^0]$, $|w_f(a; t)|$ n'admet pas de maximum local, alors $\delta > 0$ et $\alpha < n$, $f(t)$ est uniformément α -hölderienne sur $[b + \delta; b^0 - \delta]$.

Si $\tilde{A}(t)$ est la n -ième dérivée d'une fonction régulière alors $f(t)$ est uniformément n -hölderienne sur $[b + \delta; b^0 - \delta]$.

Preuve :

Proposition (P_n) :

Soit $\tilde{A}(t)$ une ondelette telle que :

$$\tilde{A}(t) = \frac{d^n \tilde{A}(t)}{dt^n}$$

où $\tilde{A}(t)$ est une fonction continue à support compact.

Supposons que, pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $K_\delta > 0$ telle que :

$$\int_{b+\delta}^{b^0-\delta} |f(x) \tilde{A}_a(x)| dx \leq K_\delta \tag{3.3}$$

Si $|w_f(a; t)|$ n'admet pas de maximum pour $t \in [b; b^0]$ et $a < a_0$ alors, $\delta > 0$, $\exists A_\delta$ tel que pour tout $t \in [b + \delta; b^0 - \delta]$ et $a < a_0$:

$$|w_f(a; t)| \leq A_\delta a^n \tag{3.4}$$

Montrons premièrement que (3.3) est vraie. On suppose, pour cela, que $f(t) = 0$ pour $t \notin [b; b^0]$.

Puisque $f(t) \in L^1[b; b^0]$, on a :

$$\int_b^{b^0} |f(t)| dt = \int_b^{b^0} |f(t)| dt = \int_{i-1}^{i-1} |f(t)| dt$$

par un changement de variable dans l'intégrale, on obtient :

$$\int_{i-1}^{i-1} |f(t)| dt = \int_{i-1}^{i-1} |f(t)| dt$$

par conséquent, $\int_b^{b^0} |f(t)| dt$ est bornée par une constante indépendante de l'échelle a. D'où (3:3) est véri...ée.

Pour démontrer la proposition (P_n) pour n = 1, on introduit le lemme suivant :

Lemme -1- :

Soient [c; d] un intervalle de R, K une constante positive et g(x) une fonction qui satisfait :

$$\int_c^d |g(x)| dx < K \tag{3.5}$$

et est telle que $\frac{dg(t)}{dt}$ ne possède pas de maximum local sur [c; d].

Soit B > 0 avec B < (d - c) = 4. Il existe deux constantes B_B et C_B telles que :

$$\forall t \in [c + B; d - B]; |g(t)| < B_B \tag{3.6}$$

et

$$\forall t \in [c + B; d - B]; \left| \frac{dg(t)}{dt} \right| < C_B \tag{3.7}$$

Les constantes B_B et C_B dépendent de B, d - c et K.

Preuve du lemme -1- :

$g^0(t)$ ne possède pas de maximum local, alors $g^0(t)$ admet un signe constant où $g^0(t)$ est monotone.

1- Supposons que $g'(t)$ a un signe constant alors $g(t)$ est monotone. L'équation (3:5) donne :

$$\int_c^{c+B} |g(x)| dx \cdot K; \int_{d_i}^{d_i+B} |g(x)| dx \cdot K \quad (3.8)$$

Si $g'(t)$ est positive et $g(t)$ reste positive, alors la dernière intégrale de (3:8) implique que

$$\int_{d_i}^{d_i+B} |g(x)| dx \cdot K = B$$

et comme

$$\int_c^{c+B} |g(x)| dx \cdot K > \int_{d_i}^{d_i+B} |g(x)| dx \cdot K$$

alors :

$$\int_c^{c+B} |g(x)| dx \cdot K = B$$

d'où

$$\int_c^{c+B} |g(x)| dx \cdot K = \max(\int_c^{c+B} |g(x)| dx; \int_{d_i}^{d_i+B} |g(x)| dx) \quad (g \text{ monotone})$$

Donc (3:6) est vérifiée pour $B_B, K=B$.

2- Supposons que $g'(t)$ est monotone, par exemple décroissante, donc $g(t)$ est concave.

La démonstration est la même si $g(t)$ est convexe.

a/ premièrement, on suppose que $g(t)$ ne change pas de signe sur $]c+B; d_i+B[$.

‡ Si $g(t)$ est négative, puisqu'elle est concave :

$$\int_c^{c+B} |g(t)| dt \cdot K = \max(\int_c^{c+B} |g(t)| dt; \int_{d_i}^{d_i+B} |g(t)| dt), \forall t \in]c+B; d_i+B[$$

$g'(t)$ est décroissante, alors elle est positive sur $]c; c+B[$ où bien elle est négative sur $]c+B; d_i[$, puisque

$g(t)$ reste négative et

$$\int_c^{c+B} |g(t)| dt \cdot K; \int_{c+B}^{d_i} |g(t)| dt \cdot K$$

on déduit que :

$$\int_c^{c+B} |g(t)| dt \cdot K = \max(K=B; K=d_i - c - B)$$

comme, par hypothèse, $B < (d_j - c) = 4$. On obtient :

$$|jg(c + B)| \cdot K = B$$

de la même manière, on peut montrer que $|jg(d_j - B)| \cdot K = B$. Ainsi :

$$|jg(t)| \cdot K = B$$

† Si $g(t)$ est positive, il existe un $t \in]c + B; d_j - B[$ tel que :

$$g(t) \cdot g''(t) \leq -8t \in]c + B; d_j - B[$$

comme $g(t)$ est concave, alors :

$$\int_{c+B}^{d_j-B} |jg(t)| dt \leq \frac{g''(t)(d_j - c - 2B)}{2}$$

de (3:5) on obtient :

$$\frac{g''(t)(d_j - c - 2B)}{2} < K$$

puisque $B < (d_j - c) = 4$, on a :

$$g''(t) < 4K = d_j - c$$

d'où

$$|jg(t)| \cdot 4K = d_j - c$$

b- Supposons que $g(t)$ change de signe sur $[c + B; d_j - B]$. Ou bien $g(c + B)$ et $g(d_j - B)$ sont négatifs où l'un des deux est négatif.

On considère le cas où les deux sont négatifs. L'autre cas peut être traité de la même manière.

$g(t)$ est concave, elle possède deux zéro-crossing Z_0 et Z_1 avec $Z_0 < Z_1$.

Pour $t \in]c + B; Z_0[\cup]Z_1; d_j - B[$, $g(t)$ est négative et $|jg(t)| \cdot \max(|jg(c + B)|; |jg(d_j - B)|)$ sur $[c; c + B]$.

$g(t)$ est monotone sur $[c; c+B]$ et $[d; d+B]$, avec les mêmes arguments que 1-, on montre que :

$$|g(c+B) - K| = B \text{ et } |g(d+B) - K| = B$$

pour $t \in [Z_0; Z_1]$ tel que $g(t) = 0$.

$$g'' \in [Z_0; Z_1] : g(t) = g'' \int_{Z_0}^t (t-x) dx$$

montrons que g'' est bornée :

puisque $g(t)$ est concave sur $[Z_0; Z_1]$, on peut déduire que :

$$K \leq \int_{Z_0}^{Z_1} g(x) dx \leq \frac{g''(Z_0)(Z_1 - Z_0)^2}{2} \quad (3.9)$$

Supposons que $g'' \leq K=B$, soit $h(t)$ une fonction affine avec 0 en Z_0 et égale à $g(e)$ en e .

pour $x < Z_0$, $h(x)$ est négative et $h(t) > g(t)$, car $g(t)$ est concave.

Donc :

$$|h(c+B) - K| = |g(c+B) - K| = B$$

On sait que

$$\frac{|h(c+B) - K|}{|h(e) - K|} = \frac{Z_0 - c + B}{e - Z_0}$$

puisque $|h(c+B) - K| = B$ et $h(e) = g(e) = K=B$

On obtient :

$$e - Z_0 \leq Z_0 - c + B$$

avec les mêmes arguments appliqués au deuxième zéro-crossing Z_1 et $d+B$ on trouve :

$$Z_1 - e \leq d + B - Z_1$$

En sommant ces deux équations on a :

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_0 &\leq Z_0 - Z_1 - c + d - 2B \\ 2(Z_1 - Z_0) &\leq d - c - 2B \\ Z_1 - Z_0 &\leq \frac{d - c - 2B}{2} \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $B < (d - c)/4$, on aura :

$$Z_1 - Z_0 \leq (d - c)/4$$

En substituant cette inégalité dans (3.9) on obtient :

$$g'' \leq \frac{8K}{d - c}$$

cependant,

$$g'' \leq \max_{K=B} \frac{8K}{d - c}$$

En prenant $B_S \leq \max_{K=B} \frac{8K}{d - c}$ on aura :

$$g'' \leq B_S$$

d'où :

$$g(t) \leq B_S$$

ce qui termine la démonstration de 1/.

2/ Montrons que $g^0(t)$ est bornée. Par hypothèse $g^0(t)$ n'admet pas de maxima sur l'intervalle $[c + B; d - B]$. Par ailleurs nous savons que :

$$g^0(t) \leq \max_{t \in [c+B; d-B]} \{g^0(c+B); g^0(d-B)\}, \quad \forall t \in [c+B; d-B]$$

Supposons, par exemple, que :

$$g^0(c+B) \leq g^0(d-B)$$

alors $g^0(t)$ est décroissante sur $[c + B; c + B]$ et $g^0(t)$ ne change pas de signe sur cet intervalle.

Cependant :

$$\begin{aligned} g^0(c + B) &= \frac{2}{B} \int_{c+B}^{c+B} g^0(x) dx \\ &= \frac{2}{B} [g(c + B) - g(c + B)] \\ &= \frac{4}{B} B_{B=2} \end{aligned}$$

puisque :

$$g^0(t) \leq \max \{g^0(c + B), g^0(d - B)\}, \forall t \in [c + B; d - B]$$

Nous déduisons que $g^0(t)$ est bornée par une constante C_B qui dépend seulement de B, b, c et K .

Ce qui termine la démonstration du lemme -1-.

Lemme -2- :

Soient $[c; d]$ un intervalle de \mathbb{R} , K une constante positive et $g(t)$ une fonction qui satisfait :

$$\int_c^d |g(t)| dt < K$$

et telle que $\frac{d^2g}{dt^2}$ ne possède pas de maximum locaux sur $[c; d]$.

Soit $B > 0$ tel que $B < (d - c)/4$, alors il existe une constante D_B qui dépend seulement de $B, d - c$ et K telle que :

$$\forall t \in [c + B; d - B] : \frac{d^2g(t)}{dt^2} < D_B \quad (3.10)$$

La démonstration du lemme -2- est la même que celle du lemme -1-.

Démontrons, maintenant, la proposition (P_n) .

† Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= \frac{d\bar{A}(t)}{dt} \\ wf(a; t) &= a \frac{d}{dt} (f \circ \bar{A}_a)(t) \end{aligned}$$

on pose :

$$g(t) = f \circ \bar{A}_a(t)$$

$g(t)$ satisfait (3:5) du lemme -1- pour $c = b + \epsilon = 2; d = b^0; \epsilon = 2$. Nous avons d'après le lemme-1- pour $B = \epsilon = 2$ et $a < a_0$

$$jwf(a; t)j \cdot a: C^{\epsilon=2}$$

ce qui conclue la démonstration de (3:4) pour $n = 1$.

† Pour $n = 2$:

La démonstration de (P_n) pour $n = 2$ est basée sur le lemme -2-

$$\tilde{A}(t) = \frac{d^2 \hat{A}(t)}{dt^2}$$

on déduit que :

$$wf(a; t) = a^2 \frac{d^2}{dt^2} (f \circ \hat{A}_a)(t)$$

En appliquant le résultat du lemme -2- pour $g(t) = f \circ \hat{A}_a(t)$ avec $B = c = 2; c = a + \epsilon = 2$ et $d = B; \epsilon = 2$, l'équation (3:10) donne :

$$jwf(a; t)j \cdot a^2 D^{\epsilon=2}$$

ce qui termine la démonstration pour $n = 2$.

† Pour $n > 2$:

Supposons que (P_n) est vraie pour $n \geq 2$ alors (P_{n+1}) est aussi vraie.

Soit \tilde{A} une ondelette avec $(n + 1)$ moments nuls et $f(t)$ une fonction qui satisfait (2:9).

L'ondelette $\tilde{A}(t)$ peut s'écrire

$$\tilde{A}(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$$

où l'ondelette $\mu(t)$ a n moments nuls.

Soit $\frac{df(t)}{dt}$ la dérivée de $f(t)$ au sens des distributions

$$wf(a; t) = a \frac{df}{dt} \circ \mu_a(t) \tag{3.11}$$

Montrons que :

$$\int_{b+\epsilon}^{b+\epsilon} \frac{df}{dt} \circ \mu_a(t) dt \cdot K \tag{3.12}$$

puisque l'ondelette $\tilde{A}(t)$ a plus de deux moments nuls, alors d'après la proposition (P₂), on a :

$$\int_{b+\epsilon}^{b^0} |j\omega f(a;t)|^2 dt \leq A_{\epsilon,2}^2$$

à partir de (3:2) on déduit que $f(t)$ est uniformément \mathbb{R} -hölderienne sur l'intervalle $]b+\epsilon; b^0[$ pour $\mathbb{R} < 2$. Cependant, $\frac{df(t)}{dt}$ est globalement bornée sur $]b+\epsilon; b^0[$. D'où, on déduit facilement que (3:12) est satisfaite. Par voie de conséquence, d'après la proposition (P_n), il existe une constante $A_{\epsilon,n}$ telle que :

$$\int_{b+\epsilon}^{b^0} \left| \frac{d^n f}{dt^n} \right|^2 dt \leq A_{\epsilon,n}^2$$

L'équation (3:11) implique que :

$$|j\omega f(a;t)| \leq A_{\epsilon,n} \omega^{n+1}$$

D'où la démonstration de P (n + 1).

En appliquant le resultat 3.2 à (P_n), on déduit que la fonction $f(t)$ est \mathbb{R} -hölderienne pour $\mathbb{R} < n$.

Pour $\mathbb{R} = n$, le théorème -1- ne peut pas être appliqué car l'exposant de Hölder est entier.

Montrons que (3:4) implique $f(t)$ est n-hölderienne si l'ondelette $\tilde{A}(t)$ s'écrit sous forme :

$$\tilde{A}(t) = \frac{d^n \mu(t)}{dt^n} \tag{3.13}$$

où $\mu(t)$ est une fonction régulière.

Soit $\frac{d^n f}{dt^n}(t)$ la nième dérivée de la fonction $f(t)$ au sens des distributions. Similairement à (3:11),

(3:13) vérifie

$$\int_{b+\epsilon}^{b^0} \left| \frac{d^n f}{dt^n} \right|^2 dt \leq A_{\epsilon,n}^2$$

puisque l'intégrale de $\mu(t)$ est non nulle, cette inégalité implique que $\frac{d^n f}{dt^n}$ est une fonction bornée par $A_{\epsilon,n}$ sur tout l'intervalle $]b+\epsilon; b^0[$. Cependant, $f(t)$ est globalement n-hölderienne sur $]b+\epsilon; b^0[$.

Ce qui clôture la démonstration du théorème -1-.

¶ Comme conséquence du théorème -1-, Mallat et Hwang [25] ont établi le résultat suivant :

La fermeture de l'ensemble des points $t \in \mathbb{R}$ où $f(t)$ n'est pas n-hölderienne, est incluse dans la

fermeture des maxima du module de la transformée en ondelettes de $f(t)$.

On conclut donc, que toute singularité de $f(t)$ peut être localisée par une suite de lignes maxima quand l'échelle a tend vers zéro.

3.2 Estimation de la régularité d'une singularité :

A partir du théorème suivant, on déduit que la régularité d'une fonction f en un point t_0 est liée à la décroissance des coefficients d'ondelettes de f au voisinage de t_0 et dont la valeur est donnée par le maximum des pentes des lignes maxima dans un diagramme Log-Log.

Théorème :

Soit $f(t)$ une distribution tempérée telle que sa transformée en ondelettes continue soit bien définie sur $]b; b^0[$ et soit $t_0 \in]b; b^0[$.

S'il existe une échelle $a_0 > 0$ et une constante c telles que, pour $t \in]b; b^0[$ et $a < a_0$, tous les maxima du module de $wf(a; t)$ appartiennent à un cône défini par :

$$|t - t_0| \leq c \cdot a, \quad (3.14)$$

alors, pour tout point $t_1 \in]b; b^0[$ tel que $t_1 \in]t_0 - a_0, t_0 + a_0[$, $f(t)$ est uniformément n holderienne au voisinage de t_1 :

Soit $\alpha < n$ non entier, la fonction $f(t)$ est α holderienne en t_0 si et seulement si, il existe une constante A telle qu'en chaque maximum du module $(a; t)$ à l'intérieur d'un cône défini en (3:14) :

$$|wf(a; t)| \leq A a^{-\alpha} \quad (3.15)$$

La propriété (3:15) est équivalente à :

$$\log |wf(a; t)| \leq -\alpha \log a + \log A \quad (3.16)$$

Cette propriété permet d'estimer la régularité holderienne α au point t_0 , en prenant la pente maximum des lignes droites dans un diagramme $\log |w|$ vs $\log a$.

Preuve :

1/ montrons que $f(t)$ est uniformément n holderienne en tout point différent de t_0 .

Soit $t_1 \in]b; t_0[$, pour $a < a_0$ on a $|jw f(a; t)|$ admet un seul maximum sur un cône pointant en t_0 .

Par conséquent, pour $\epsilon > 0$ tel que $b + \epsilon < x_{0j}$, il existe s_ϵ telle que, $\forall s < s_\epsilon$ et $t \in]b + \epsilon; t_0 - \epsilon[$, $|jw f(a; t)|$ ne possède pas des maxima.

D'où, d'après le théorème 1, $f(t)$ est uniformément n holderienne sur $]b + \epsilon; t_0 - \epsilon[$.

À partir de ce résultat, on déduit facilement que $f(t)$ est uniformément n holderienne au voisinage du point $t_1 \in]b + \epsilon; t_0 - \epsilon[$.

Raisonnement analogue pour $t_1 \in]t_0; b^0[$.

2/ montrons, à présent, que la régularité en t_0 est caractérisée par la décroissance des maxima du module de la transformée en ondelettes.

Soit $t_1 \in]b; t_0[$ et soit $t_2 \in]t_0; b^0[$. D'après 1/, $f(t)$ est uniformément n holderienne au voisinage de t_1 et t_2 .

Alors, il résulte du théorème 1 qu'il existe a_0 telle que pour $a < a_0$:

$$|jw f(a; t_1)| \cdot A_1 a^n \text{ et } |jw f(a; t_2)| \cdot A_2 a^n \quad (3.17)$$

On aura donc, pour $a \in]a_1; t_2[$ et $a < a_0$:

$$|jw f(a; t)| \cdot \max(|jw f(a; t_1)|; |jw f(a; t_2)|)$$

et que tous les maxima locaux du module de la transformée en ondelettes sont à l'intérieur d'un cône pointant en t_0 .

Or, on a par hypothèse que tous ces maxima du module ont une amplitude plus petite que $A a^\alpha$, et puisque $\alpha < n$, on déduit donc de (3:17) qu'il existe une constante B telle que si $t \in]t_1; t_2[$ et $a < a_0$:

$$|jw f(a; t)| \cdot B a^\alpha$$

comme $t_0 \in]t_1; t_2[$, on a d'après théorème précédent $f(t)$ est α holderienne en t_0 .

Ce théorème est donc entièrement démontré.

La formule (3:16) montre que le Log du module de la transformée en ondelette le long d'une ligne maxima est une droite et que le maximum des pentes donne la régularité de la singularité étudiée.

Chapitre 4

Résultats et évaluations :

Le signal synthétique a la structure suivante :

$$R(t) = R_1(t - t_1) + R_2(t - t_2) + \dots + R_{44}(t - t_{44})$$

avec

$$R_i(t - t_i) = a_i (t - t_i)_+^{b_i} : e^{c_i(t - t_i)}$$

où $a_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R}_+^n$, $i = \overline{1; 44}$.

Notons que $R_i(t - t_i)$ est b_i -Hölderienne en t_i . Les temps t_i , $i = \overline{1; 44}$, correspondent aux minima temps de commencement de chaque cycle et aux maxima point à partir duquel le cycle change de

signe. Ainsi le cycle synthétique obtenu possède 22 cycles et dont le graphe est le suivant

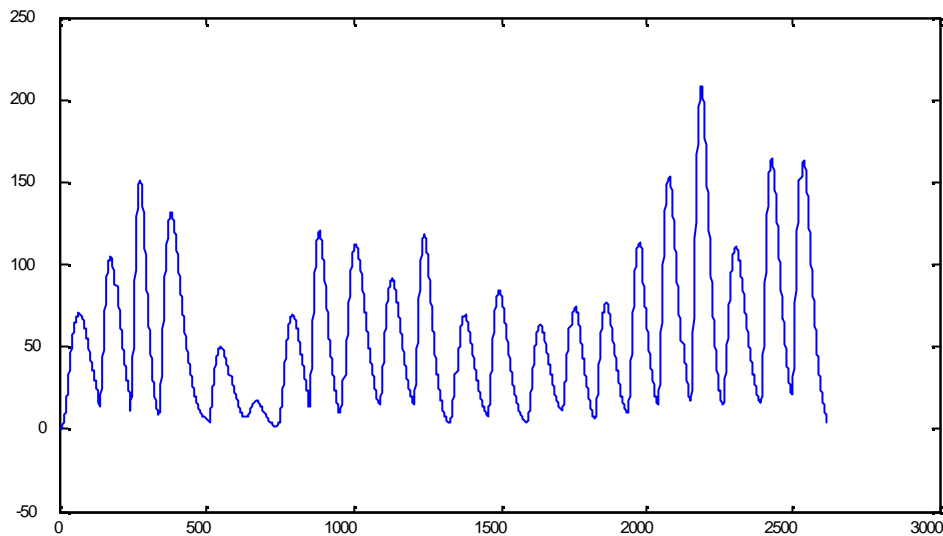


Figure 4.1 : signal synthétique

Une première étude consiste à appliquer les méthodes de réduction du bruit au signal synthétique à lequel on a ajouté différents types de bruits (bruit blanc, un processus autorégressif d'ordre 1 $Ar(1)$, un processus moyenne mobile d'ordre 1 $Ma(1)$, ainsi que le processus mixte $ARMA(1,1)$. Et par la suite, détecter les singularités présentes dans le signal et spécifier le type des régularités correspondantes. Une application sera faite sur les données réelles du champ magnétique terrestre de l'observatoire Chambon-la forêt (CLF).

4.1 Réduction du bruit par seuillage des coefficients d'ondelettes en utilisant les seuils "SURE" et "universel":

Les résultats du seuillage (global ou dépendant d'échelles) des coefficients d'ondelettes du signal synthétique bruité, par l'utilisation des seuils "universel" et "SURE" sont illustrés dans les figures suivantes :

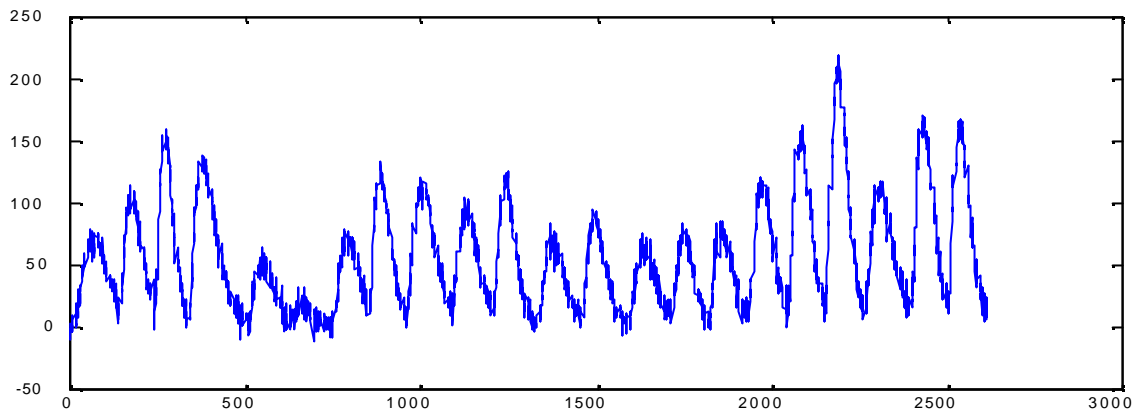


Figure 4.2 : Synthétique+bruit blanc avec $\frac{3}{4} = 6$

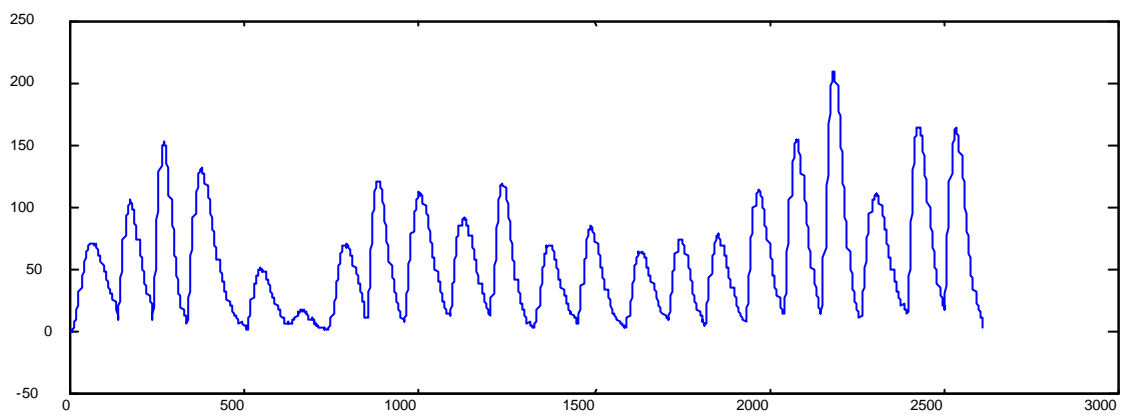


Figure 4.3 : Synthétique+bruit blanc ($\frac{3}{4} = 6$) après seuillage (sure global)

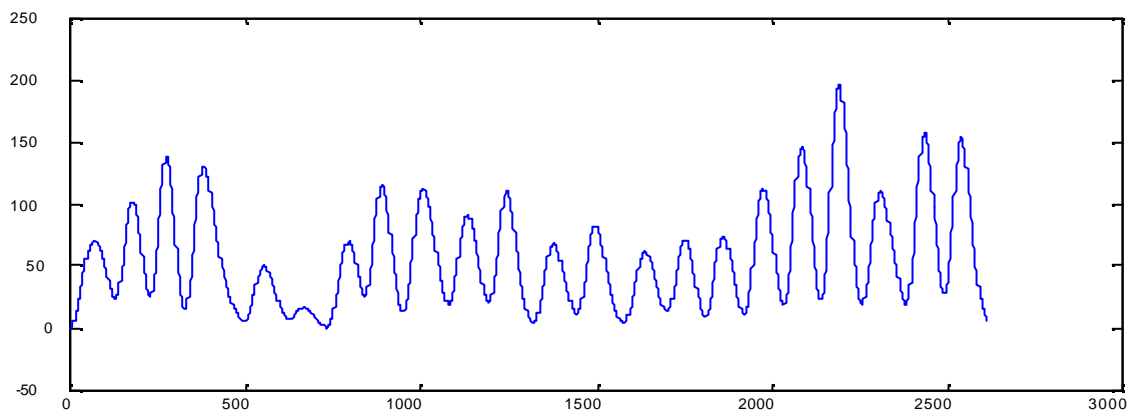


Figure 4.4 : Synthétique+bruit blanc ($\frac{3}{4} = 6$) après seuillage (universel global)

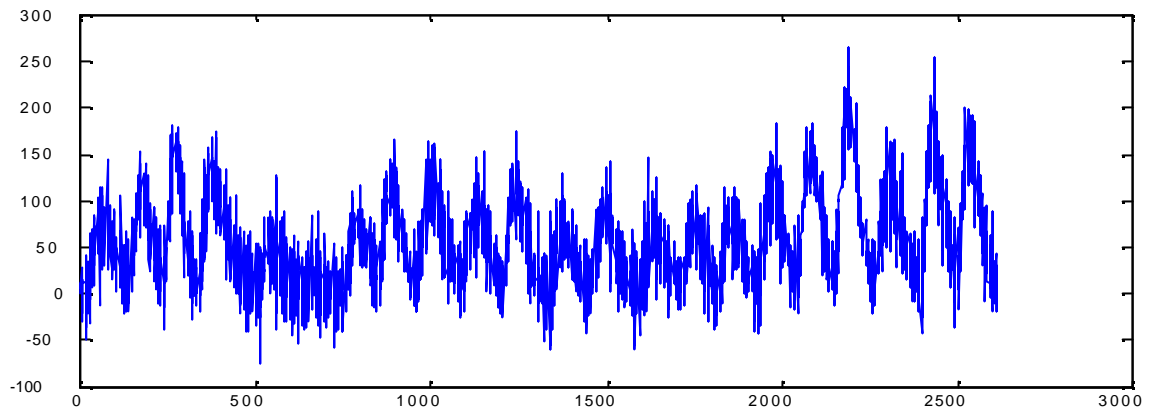


Figure 4.5 : Synthétique + $ma(1)$ avec $\mu = 0;5$

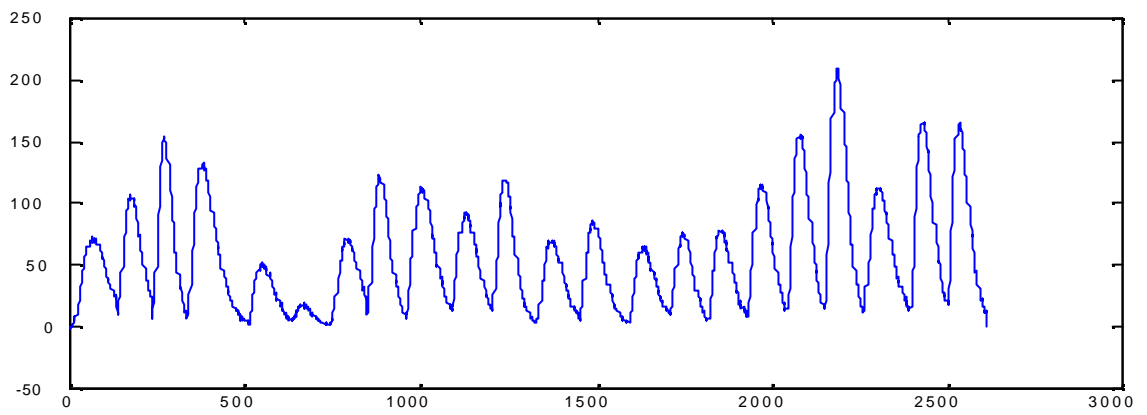


Figure 4.6 : Synthétique + $ma(1)$ ($\mu = 0;5$) débruité avec sure global

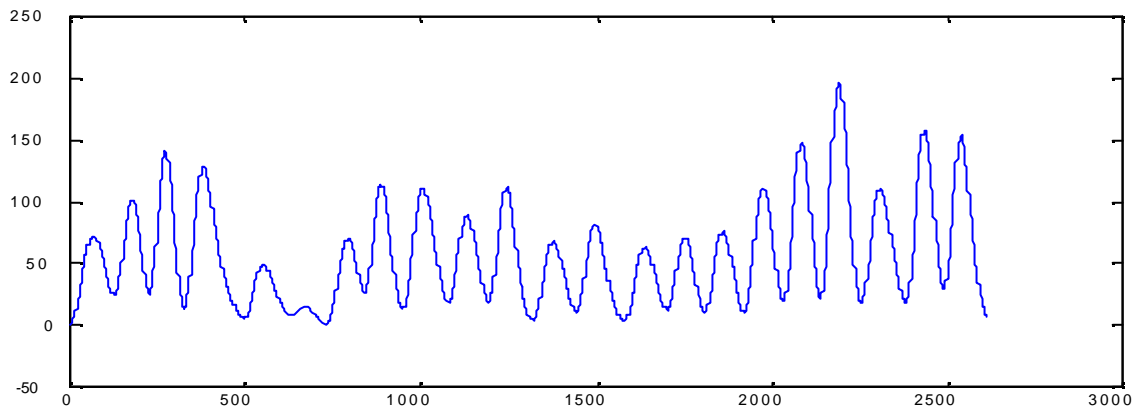


Figure 4.7 : Synthétique + $ma(1)$ ($\mu = 0;5$) débruité avec universel global

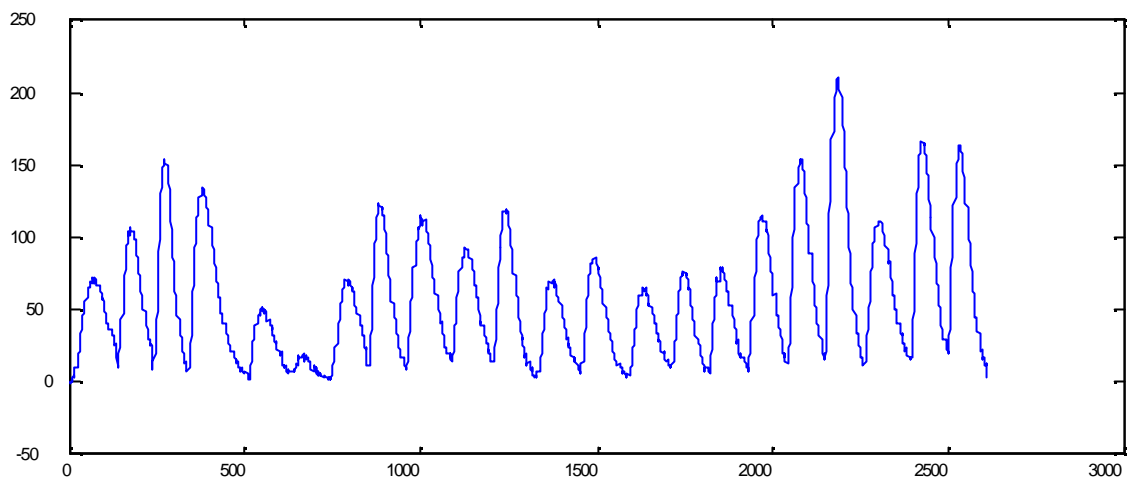


Figure 4.8 : Synthétique + ma(1) ($\mu = 0;5$) après seuillage (sure dépendant d'échelle)

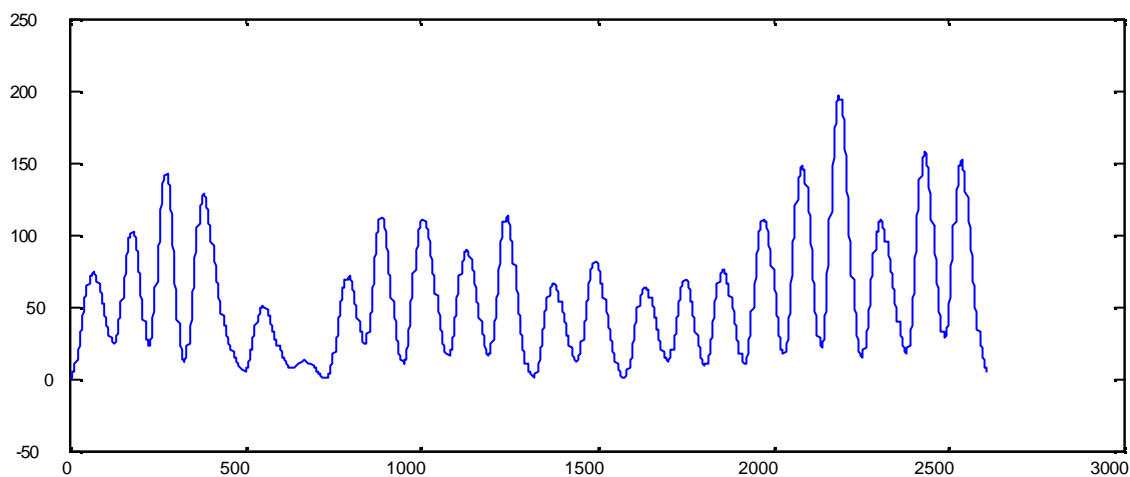


Figure 4.9 : Synthétique + ma(1) ($\mu = 0;5$) après seuillage (universel dépendant d'échelle)

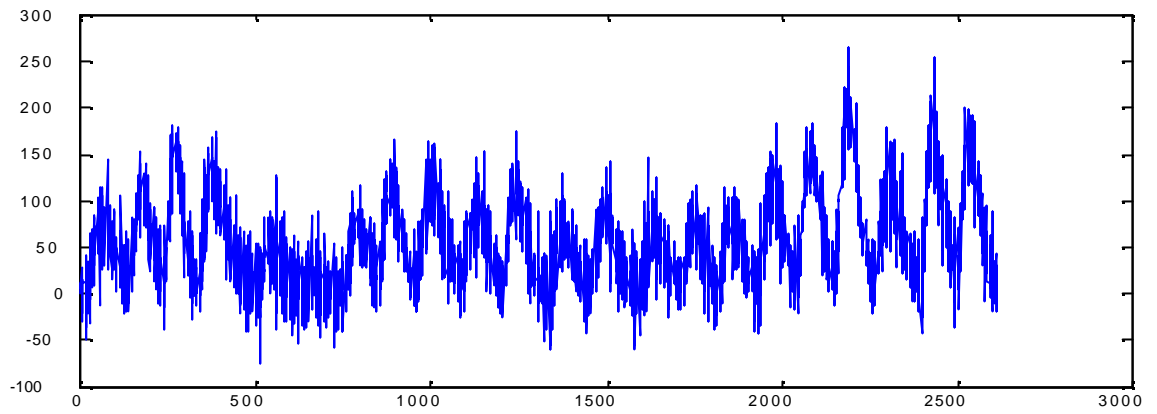


Figure 4.10 : Synthétique + $ma(1)$ avec $\mu = 0;8$

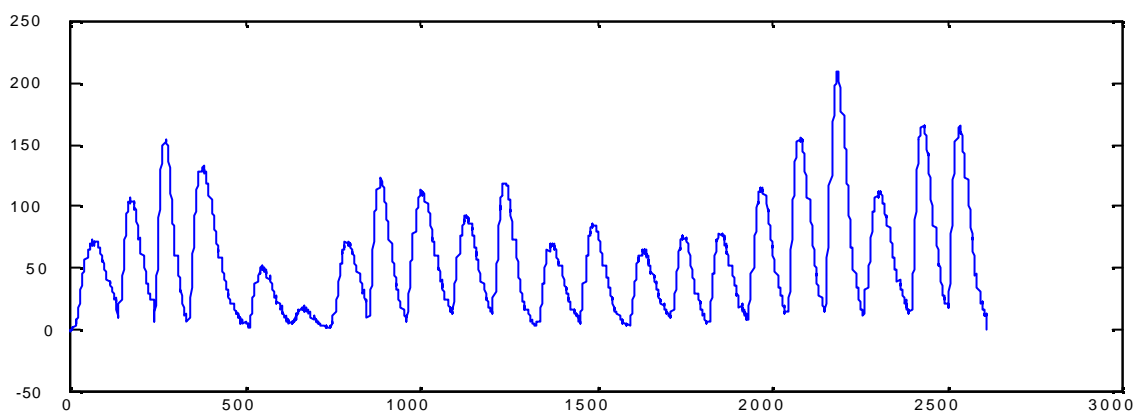


Figure 4.11 : Synthétique + $ma(1)$ ($\mu = 0;8$) après seuillage (universel dépendant d'échelle)

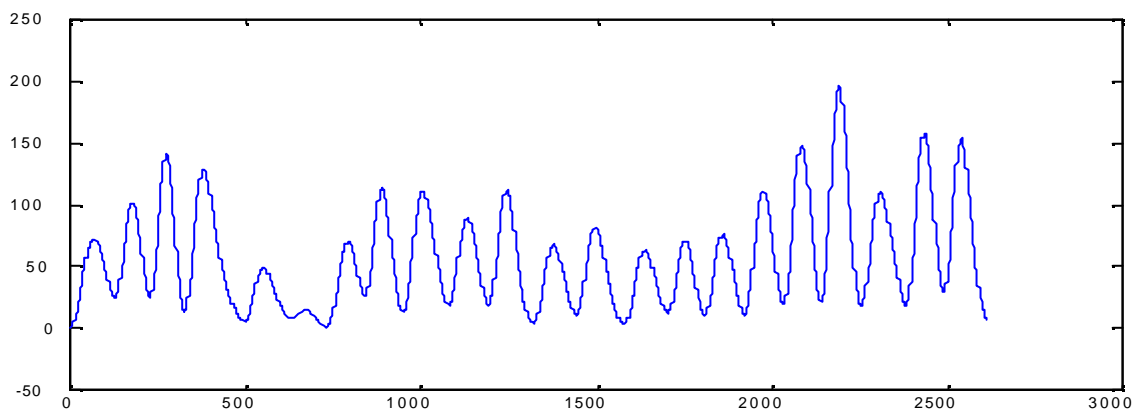


Figure 4.12: Synthétique + $ma(1)$ ($\mu = 0;8$) après seuillage (sure dépendant d'échelle)

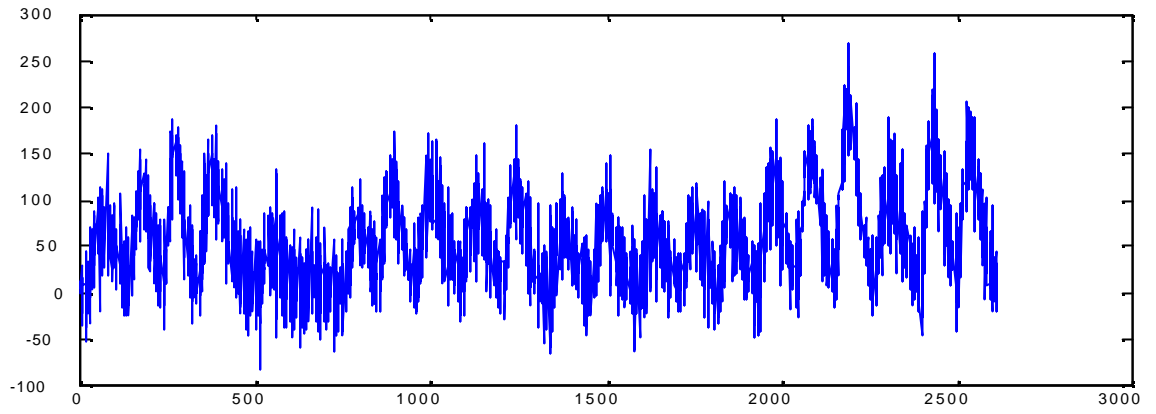


Figure 4.13 : Synthétique + ma(1) avec $\mu = 0; 95$

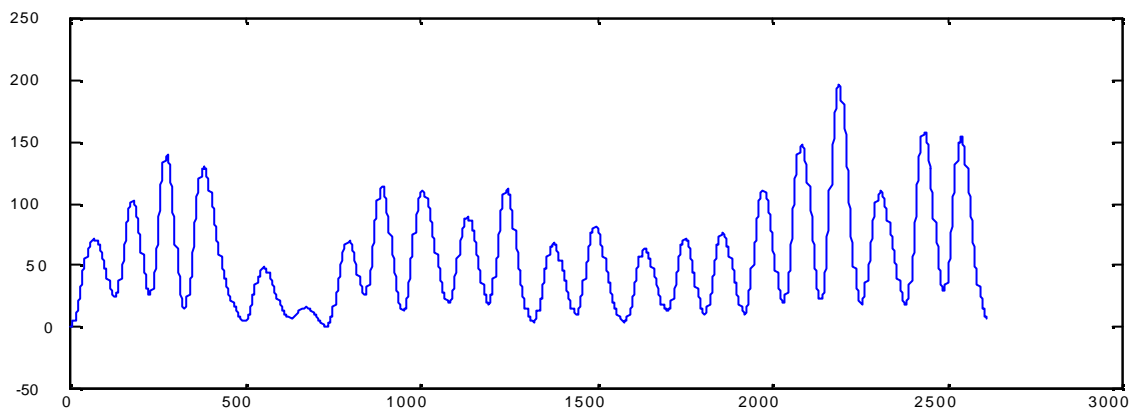


Figure 4.14 : Synthétique + ma(1) ($\mu = 0; 95$) après seuillage (universel dépendant d'échelle)

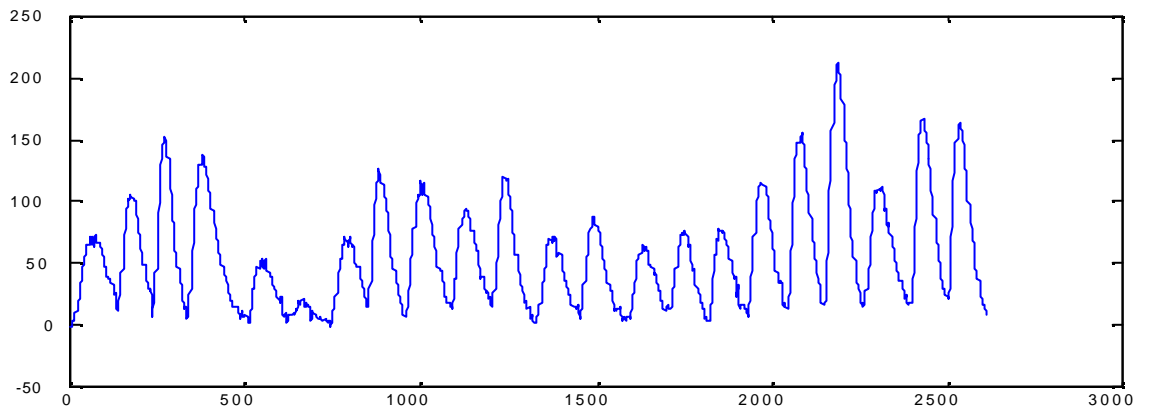


Figure 4.15 : Synthétique + ma(1) ($\mu=0,95$) après seuillage (sure dépendant d'échelle)

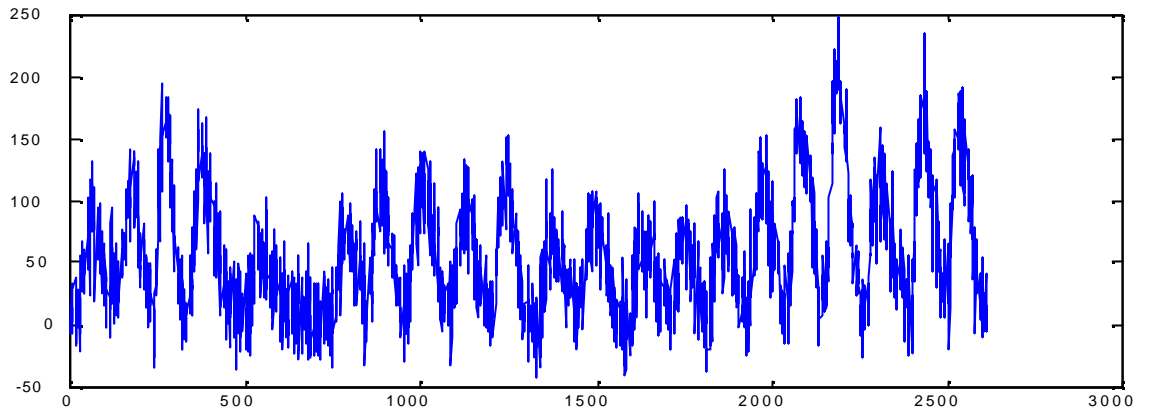


Figure 4.16 : Synthétique + ar(1) avec $\rho = 0;2$

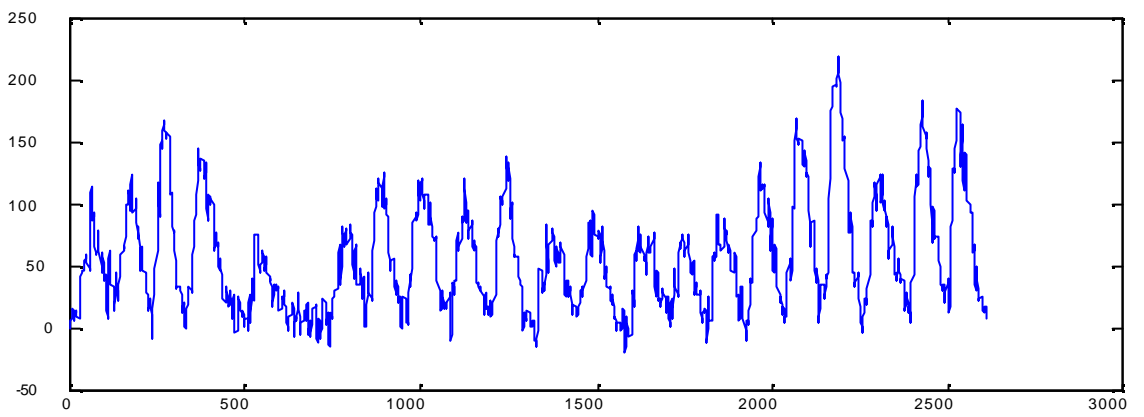


Figure 4.17 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0;2$) après seuillage (sure global)

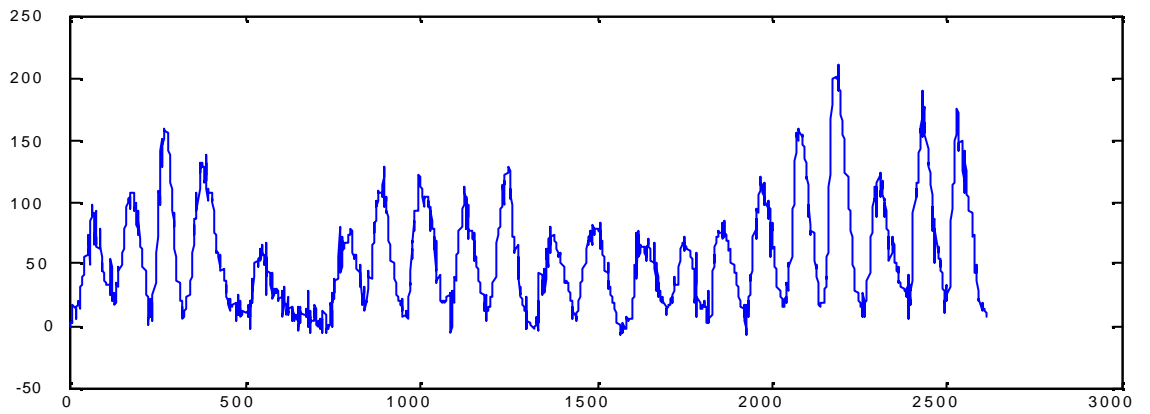


Figure 4.18 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0;2$) après seuillage (universel global)

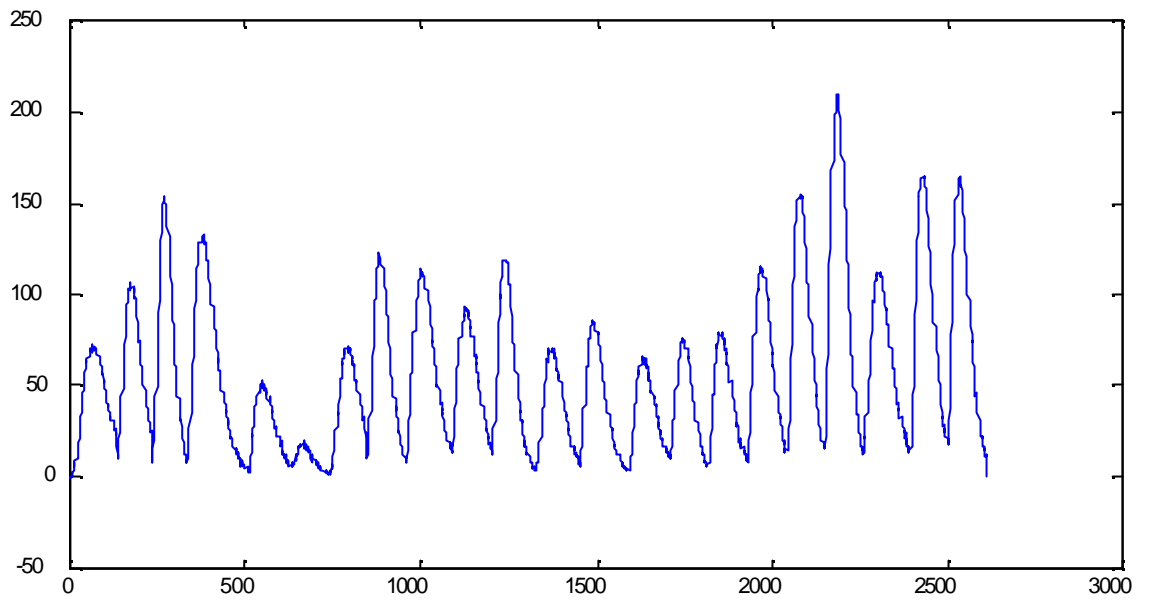


Figure 4.19 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0;2$) après seuillage (sure dépendant d'échelles)

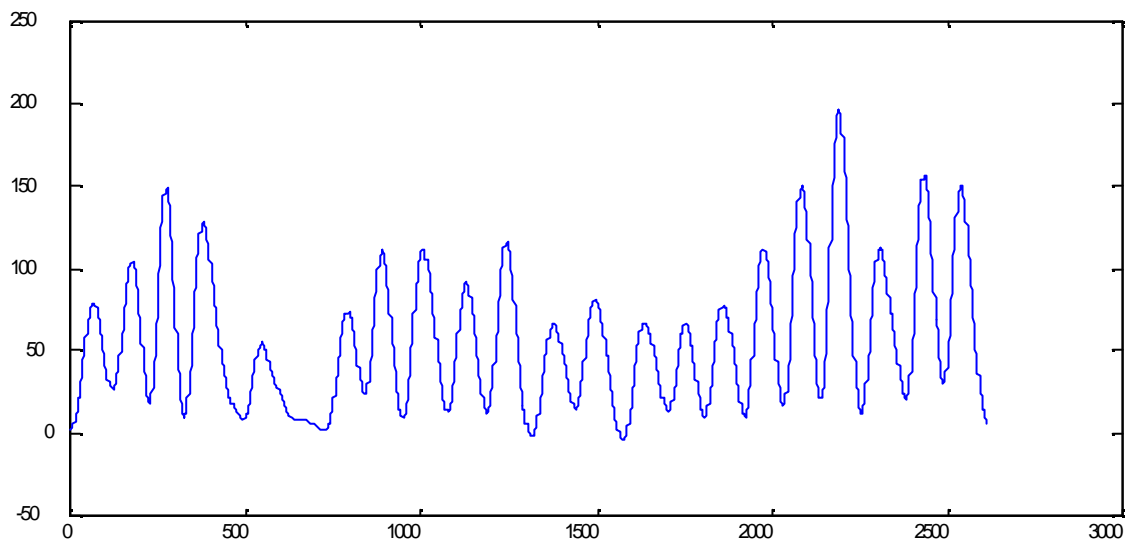


Figure 4.20 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0;2$) après seuillage (universel dépendant d'échelles)

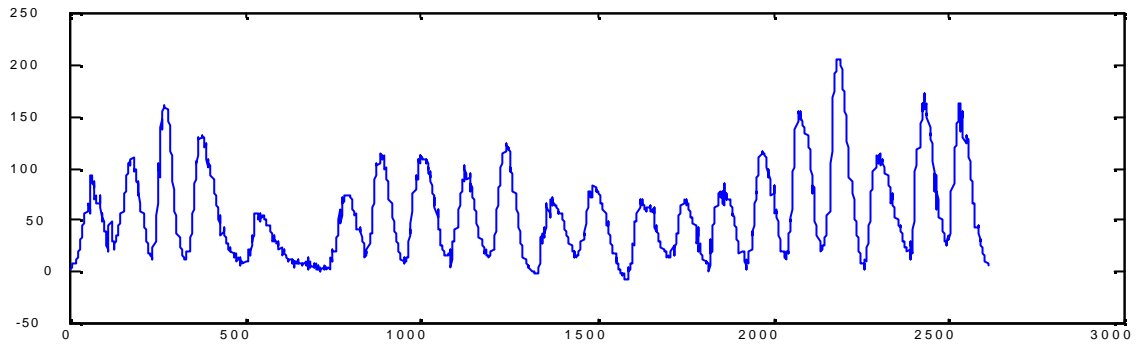


Figure 4.21 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0; 5$) après seuillage (sure dépendant d'échelles)

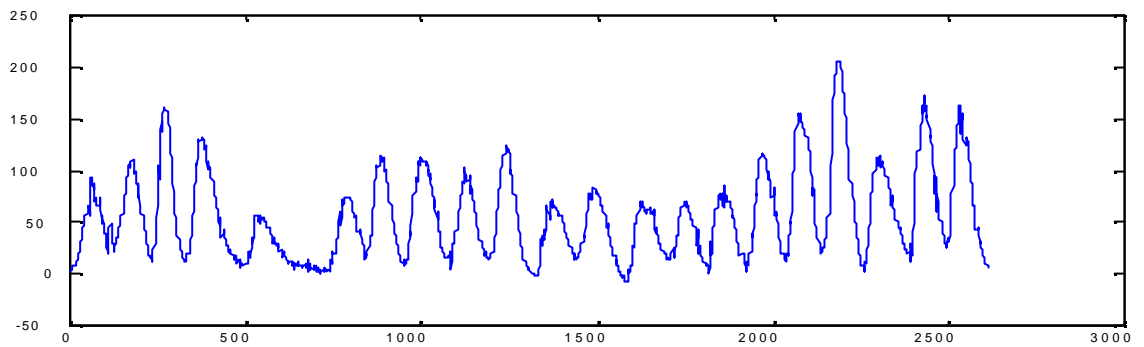


Figure 4.22 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0; 8$) après seuillage (sure dépendant d'échelles)

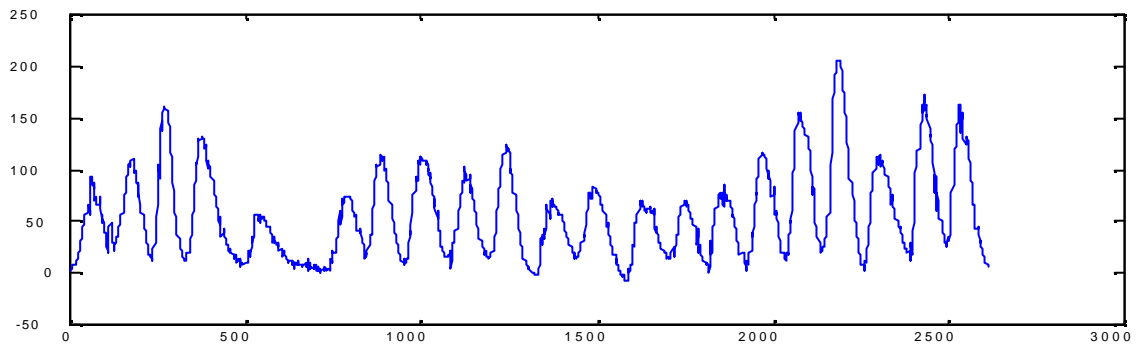


Figure 4.23 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0; 95$) après seuillage (sure dépendant d'échelles)

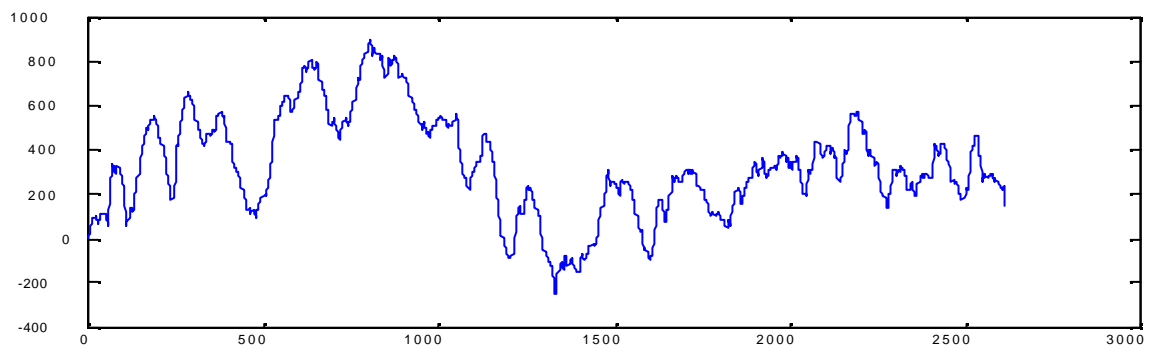


Figure 4.24 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 1$) après seuillage (sure dépendant d'échelle)

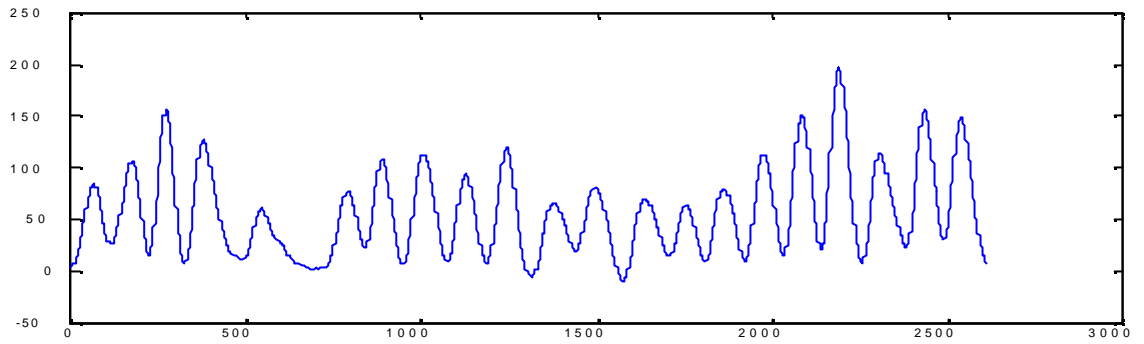


Figure 4.25 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0; 5$) après seuillage (universel dépendant d'échelles)

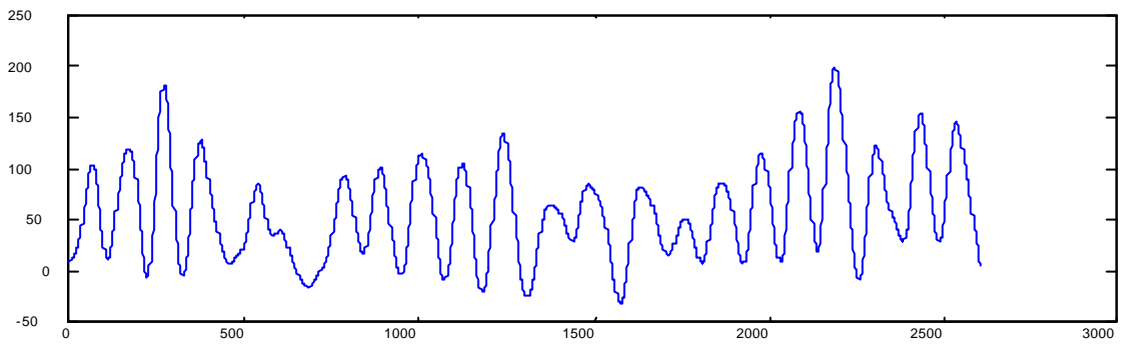


Figure 4.26 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0; 8$) après seuillage (universel dépendant d'échelles)

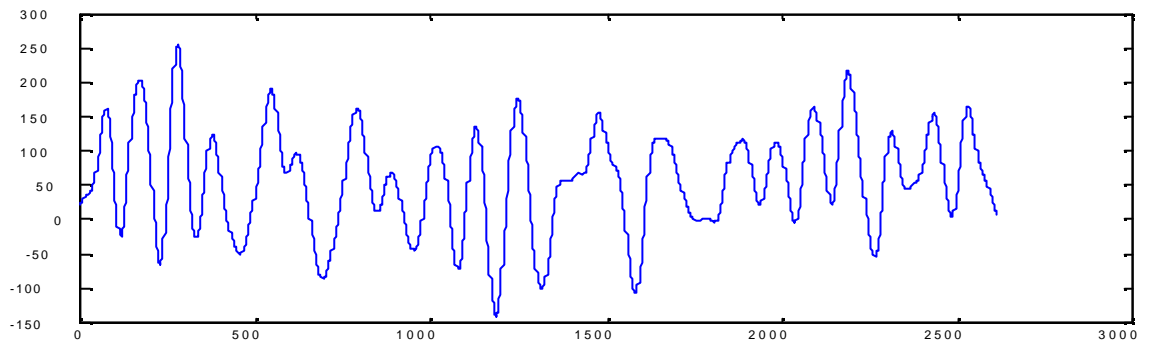


Figure 4.27 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 0; 95$) après seuillage (universel dépendant d'échelles)

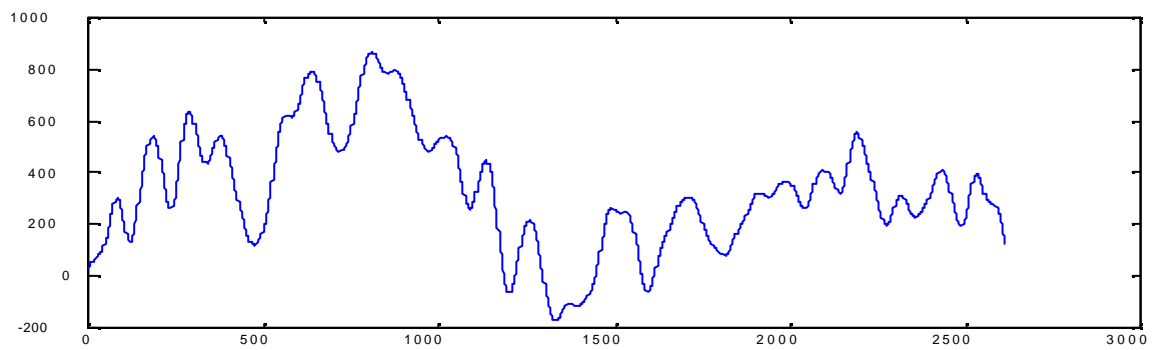


Figure 4.28 : Synthétique + ar(1) ($\rho = 1$) après seuillage (universel dépendant d'échelles)

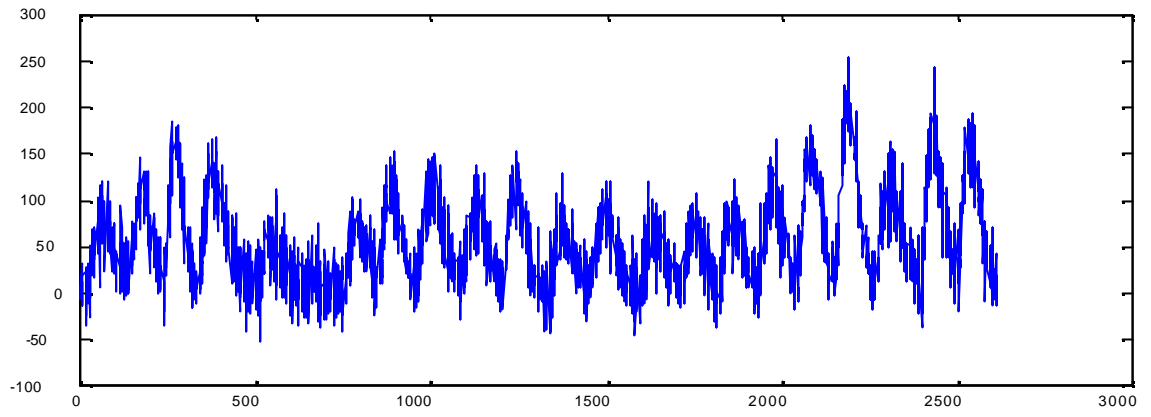


Figure 4.29 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 2 \mu = 0; 5$]

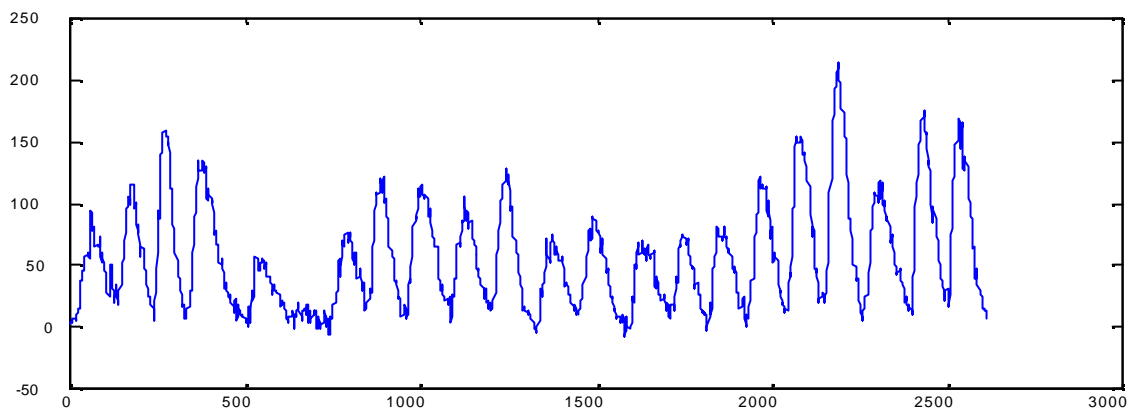


Figure 4.30 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 2 \mu = 0; 5$] après seuillage avec sure global

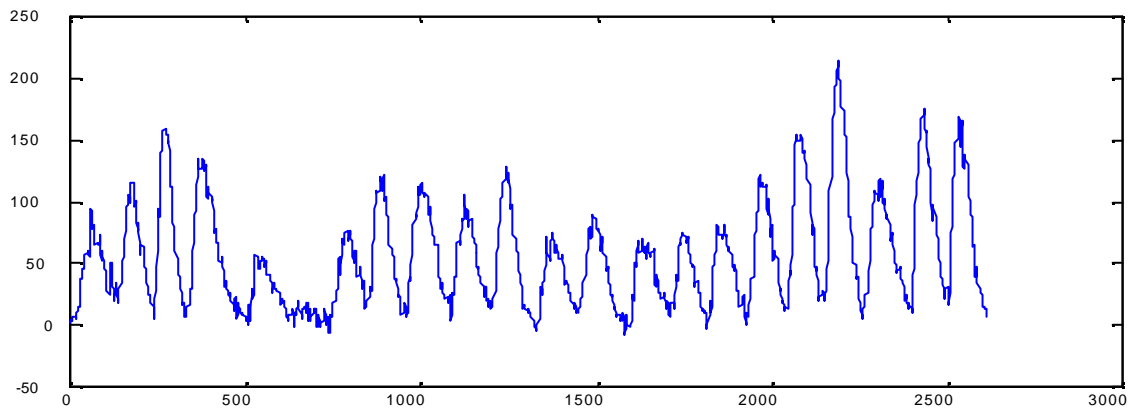


Figure 4.31 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 2 \mu = 0; 5$] après seuillage avec universel global

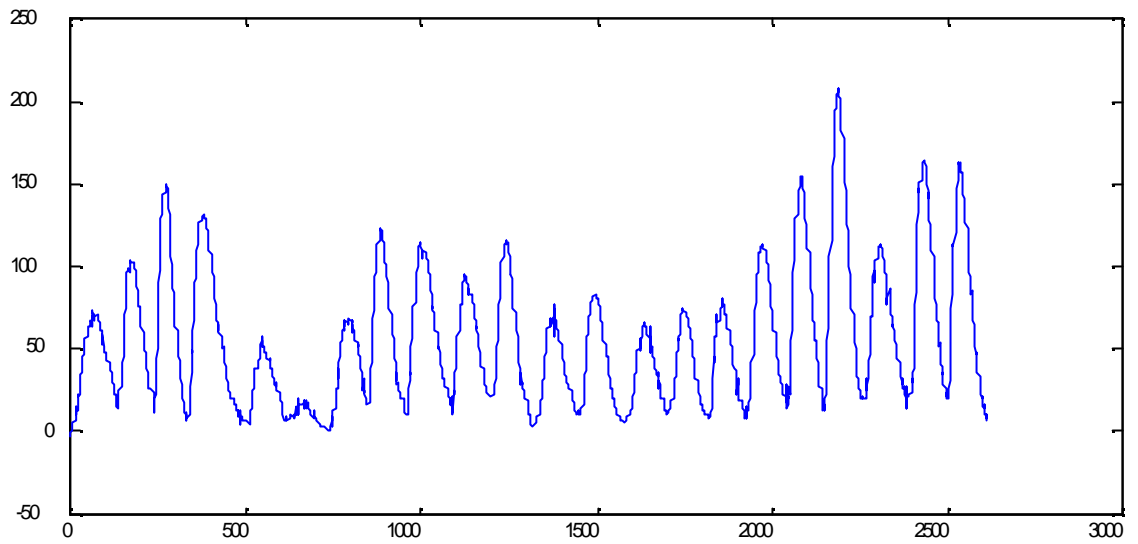


Figure 4.32 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 2 \mu = 0; 5$] débruité (sure dépendant d'échelles)

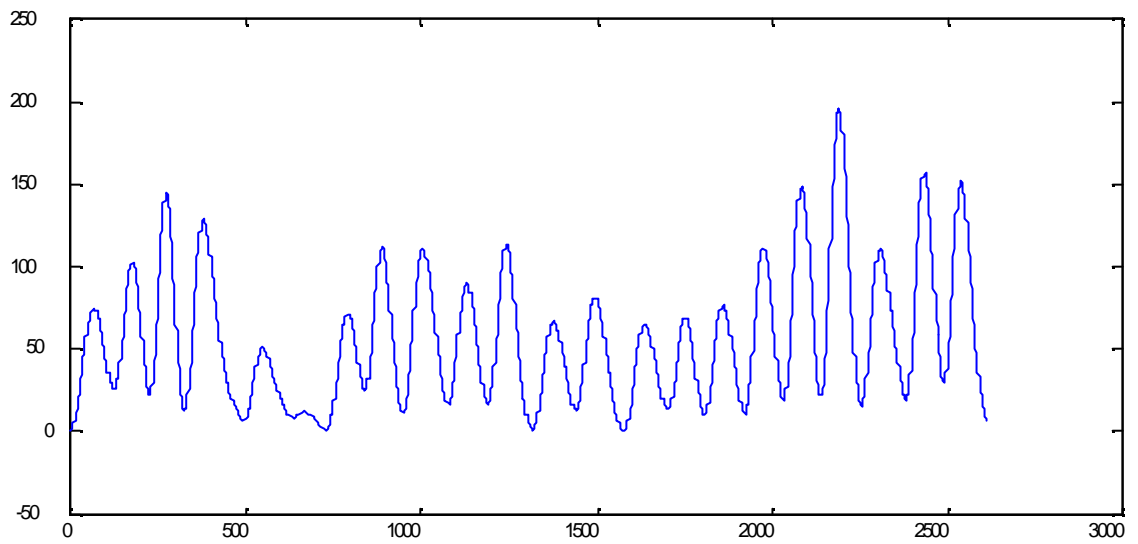


Figure 4.33 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 2 \mu = 0; 5$] débruité (universel dépendant d'échelles)

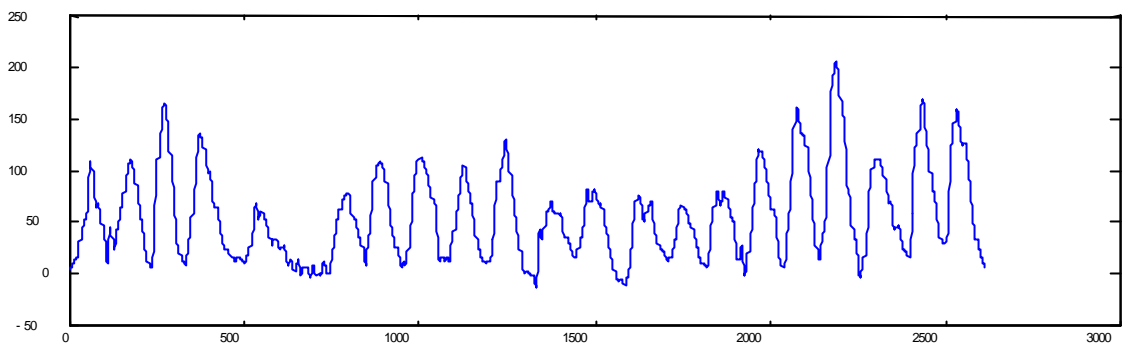


Figure 4.34 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 5; \mu = 0; 5$] après seuillage (sure dépendant d'échelles)

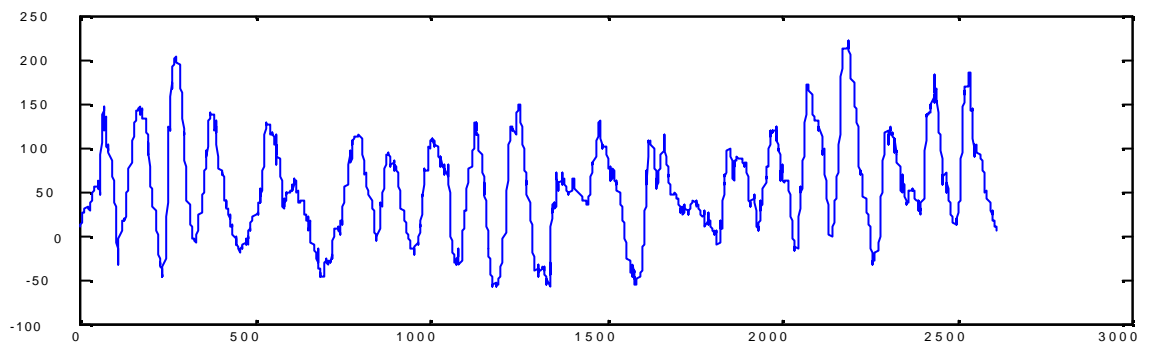


Figure 4.35 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 8; \mu = 0; 5$] après seuillage (sure dépendant d'échelles)

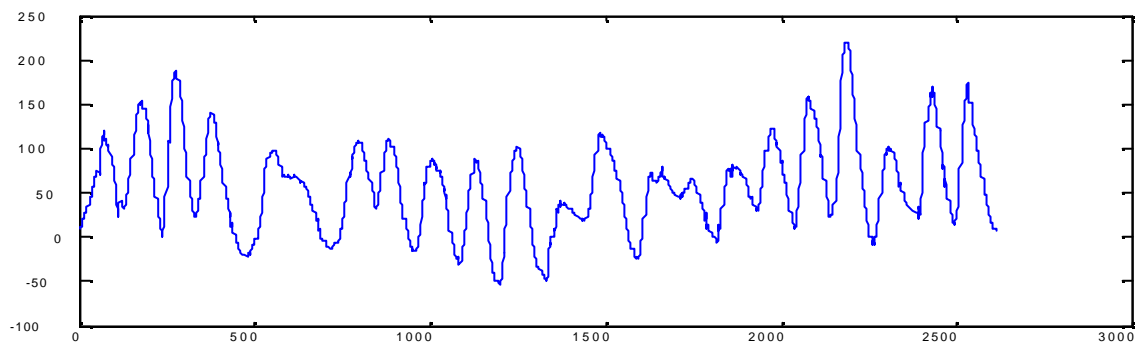


Figure 4.36 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 95; \mu = 0; 5$] après seuillage (sure dépendant d'échelles)

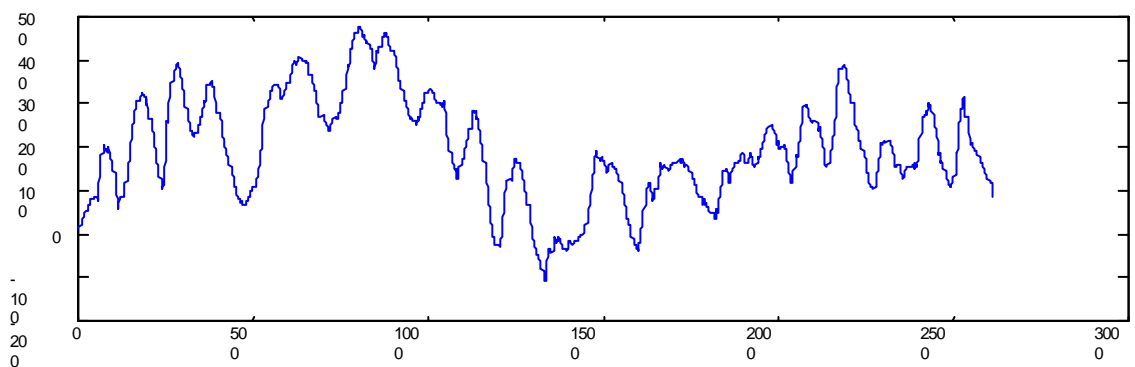


Figure 4.37 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 1; \mu = 0; 5$] après seuillage (sure dépendant d'échelles)

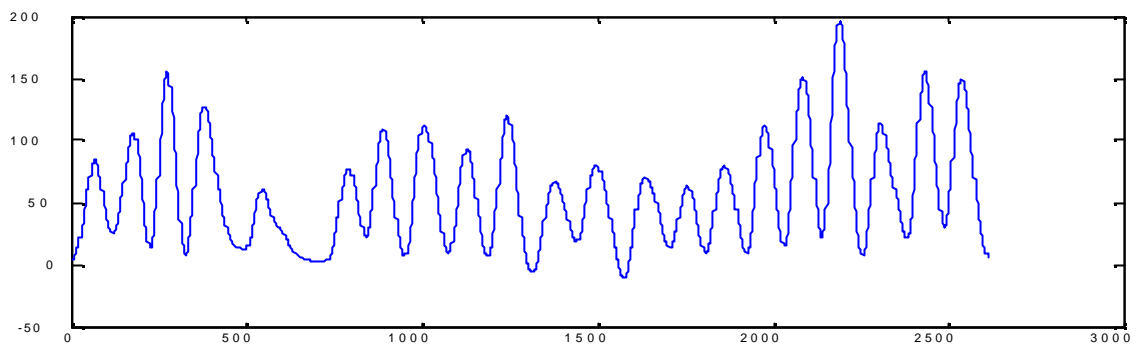


Figure 4.38 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 5; \mu = 0; 5$] après seuillage (universel dépendant d'échelle)

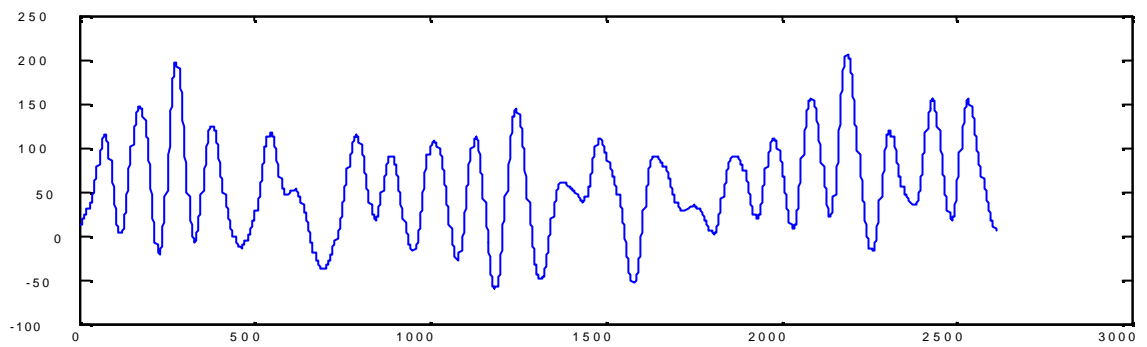


Figure 4.39 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 8; \mu = 0; 5$] après seuillage (universel dépendant d'échelle)

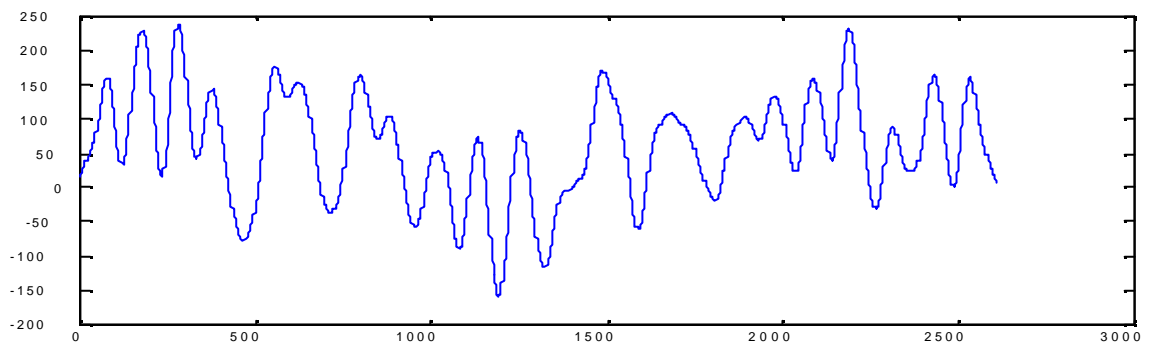


Figure 4.40 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 0; 95; \mu = 0; 5$] après seuillage (universel dépendant d'échelle)

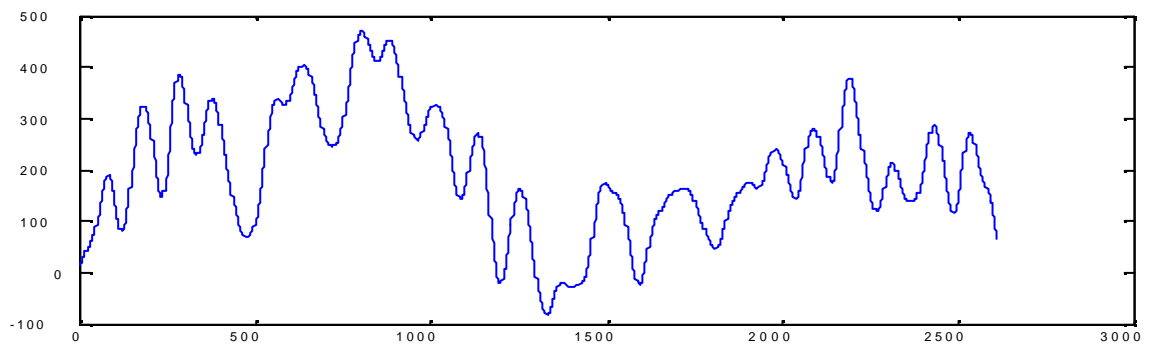


Figure 4.41 : Synthétique + arma(1,1) [$\sigma^2 = 1; \mu = 0; 5$] après seuillage (universel dépendant d'échelles)

4.1.1 Evaluation qualitative :

Dans le cas d'un bruit blanc, on remarque qu'une grande partie du bruit a été éliminée (figure 4.3, 4.4) que ça soit par l'utilisation d'un seuillage global sure ou universel. De plus l'apparition de certaines fluctuations qui sont dûes au bruit dans le résultat du seuillage sure.

Quant au cas d'un bruit corrélé tels que $Ar(1)$, $Ma(1)$ et $ARMA(1,1)$ un seuillage global n'effectue pas un bon seuillage car on a la présence d'un remarquable taux de bruit (figure 4.6, 4.7, 4.17, 4.18, 4.30, 4.31) et l'apport du seuillage dépendant d'un niveau est positif car il permet d'améliorer le résultat (figure 4.8, 4.9, 4.14, 4.15, 4.19, 4.20) .

Dans le cas d'un bruit $Ar(1)$. On remarque qu'à partir de $\rho = 0,5$, on commence à perdre certaines caractéristiques du signal synthétique original tel que le 6-ième cycle (figure 4.21, 4.25) et lorsque le paramètre ρ s'approche de plus en plus de la valeur 1, c'est-à-dire, lorsque le processus $AR(1)$ tend vers le nonstationnarité, on ne trouve plus les 22 cycles du signal synthétique, de plus, on observe une augmentation dans les amplitudes (figure 4.24, 4.28). Par conséquent, il y a une perte totale du signal original.

Des résultats similaires sont observés dans le cas d'un processus $arma(1,1)$ avec le paramètre μ petit (figure 4.29 ! 4.41), qui dans ce cas là se comporte comme un processus $Ar(1)$ et comme un processus $Ma(1)$ lorsque le paramètre ρ est petit et dont les résultats sont beaucoup plus satisfaisants car on a préservation du signal synthétique original après seuillage, ceci est principalement dû à la stationnarité du processus $MA(1)$.

4.1.2 Evaluation quantitative :

L'évaluation quantitative des résultats se fait par la biais de l'erreur en moyenne quadratique entre le signal original et le signal obtenu après seuillage et dont les valeurs sont synthétisées dans les tableaux suivants :

Type du modèle	paramètres	Type du seuillage	EQM
Sun+bruit blanc	$\frac{3}{4} = 1$	Sure global	0;082
		Universel global	0;194
	$\frac{3}{4} = 2$	Sure global	0;095
		Universel global	0;210
	$\frac{3}{4} = 4$	Sure global	0;099
		Universel global	0;287
	$\frac{3}{4} = 6$	Sure global	1;04
		Universel global	1;87
	$\frac{3}{4} = 8$	Sure global	2;11
		Universel global	2;64

Tab 4.1 : Les erreurs en moyenne quadratique du signal synthétique bruité (bruit blanc) après seuillage

Type du modèle	paramètres	Type du seuillage	EQM
Sun+ma(1)	$\mu = 0; 2$	Sure global	1,41
		Universel global	4,34
		Sure dépendant d'échelle	1,64
		Universel dépendant d'échelle	2,01
	$\mu = 0; 5$	Sure global	5,01
		Universel global	5,57
		Sure dépendant d'échelle	2,35
		Universel dépendant d'échelle	2,89
	$\mu = 0; 8$	Sure global	6,32
		Universel global	6,41
		Sure dépendant d'échelle	3,07
		Universel dépendant d'échelle	3,65
	$\mu = 0; 95$	Sure global	8,24
		Universel global	8,83
		Sure dépendant d'échelle	4,14
		Universel dépendant d'échelle	4,57
	$\mu = 1$	Sure global	8,31
		Universel global	8,98
		Sure dépendant d'échelle	4,25
		Universel dépendant d'échelle	4,69

Tab 4.2 : Les erreurs en moyenne quadratique du signal synthétique
bruité (bruit Ma(1)) après seuillage

Type du modèle	paramètres	Type du seuillage	EQM
Sun+ma(1)	' = 0; 2	Sure global	8,53
		Universel global	9,56
		Sure dépendant d'échelle	5,81
		Universel dépendant d'échelle	5,29
	' = 0; 5	Sure global	19,37
		Universel global	20,04
		Sure dépendant d'échelle	17,85
		Universel dépendant d'échelle	18,26
	' = 0; 8	Sure global	32,69
		Universel global	33,26
		Sure dépendant d'échelle	30,73
		Universel dépendant d'échelle	31,05
	' = 0; 95	Sure global	65,48
		Universel global	66,10
		Sure dépendant d'échelle	61,13
		Universel dépendant d'échelle	62,92
	' = 1	Sure global	350,64
		Universel global	351,24
		Sure dépendant d'échelle	349,90
		Universel dépendant d'échelle	350,54

Tab 4.3 : Les erreurs en moyenne quadratique du signal synthétique
bruité (bruit AR(1)) après seuillage

Type du modèle	paramètres	Type du seuillage	EQM
Sun+arma(1,1)	$\sigma = 0:2$ $\mu = 0:2$	Sure global	8:40
		Universel global	9:00
		Sure dépendant d'échelle	5:03
		Universel dépendant d'échelle	5:83
	$\sigma = 0:5$ $\mu = 0:2$	Sure global	17:61
		Universel global	18:18
		Sure dépendant d'échelle	15:37
		Universel dépendant d'échelle	15:73
	$\sigma = 0:8$ $\mu = 0:2$	Sure global	30:47
		Universel global	31:85
		Sure dépendant d'échelle	28.33
		Universel dépendant d'échelle	28.93
	$\sigma = 0:95$ $\mu = 0:2$	Sure global	52.50
		Universel global	53.54
		Sure dépendant d'échelle	49.29
		Universel dépendant d'échelle	50.13
$\sigma = 1$ $\mu = 0:2$	Sure global	281.81	
	Universel global	282.57	
	Sure dépendant d'échelle	281.35	
	Universel dépendant d'échelle	281.52	

Tab 4.4 : Les erreurs en moyenne quadratique du signal synthétique
bruité (bruit arma(1,1)) après seuillage

Type du modèle	paramètres	Type du seuillage	EQM
Sunthétique arma(1,1)	$\sigma = 0:2$ $\mu = 0:5$	Sure global	8:15
		Universel global	8:71
		Sure dépendant d'échelle	4:89
		Universel dépendant d'échelle	5:44
	$\sigma = 0:5$ $\mu = 0:5$	Sure global	16:86
		Universel global	17:45
		Sure dépendant d'échelle	14:32
		Universel dépendant d'échelle	14:99
	$\sigma = 0:8$ $\mu = 0:5$	Sure global	28:66
		Universel global	29:28
		Sure dépendant d'échelle	27.22
		Universel dépendant d'échelle	27.73
	$\sigma = 0:95$ $\mu = 0:5$	Sure global	34.57
		Universel global	35.38
		Sure dépendant d'échelle	32.10
		Universel dépendant d'échelle	32.94
$\sigma = 1$ $\mu = 0:5$	Sure global	178.80	
	Universel global	179.75	
	Sure dépendant d'échelle	178.47	
	Universel dépendant d'échelle	178.74	

Tab 4.5 : Les erreurs en moyenne quadratique du signal synthétique bruité (bruit arma(1,1)) après seuillage

Type du modèle	paramètres	Type du seuillage	EQM
Sunthétique arma(1,1)	$\sigma = 0:2$ $\mu = 0:8$	Sure global	7:04
		Universel global	7:28
		Sure dépendant d'échelle	4:22
		Universel dépendant d'échelle	4:63
	$\sigma = 0:5$ $\mu = 0:8$	Sure global	16:12
		Universel global	16:33
		Sure dépendant d'échelle	13:96
		Universel dépendant d'échelle	14:45
	$\sigma = 0:8$ $\mu = 0:8$	Sure global	27:65
		Universel global	27:94
		Sure dépendant d'échelle	25.00
		Universel dépendant d'échelle	25.41
	$\sigma = 0:95$ $\mu = 0:8$	Sure global	31.97
		Universel global	32.52
		Sure dépendant d'échelle	30.04
		Universel dépendant d'échelle	30.77
$\sigma = 1$ $\mu = 0:8$	Sure global	176.32	
	Universel global	177.00	
	Sure dépendant d'échelle	176.02	
	Universel dépendant d'échelle	176.24	

Tab 4.6 : Les erreurs en moyenne quadratique du signal synthétique
bruité (bruit arma(1,1)) après seuillage

Une remarque importante à faire, est que les erreurs obtenues après utilisation d'un seuil "SURE" sont inférieures à celles obtenues après utilisation d'un seuil universel (Tab 4.1, Tab 4.2, Tab 4.3, Tab

4.4, Tab 4.5, Tab 4.6).

Dans le cas d'un bruit blanc, les erreurs sont très petites et augmentent légèrement avec le paramètre $\frac{3}{4}$ pour atteindre une valeur maximale de $2;64$ après utilisation d'un seuil universel et $2;11$ après utilisation d'un seuil sure (Tab 4.1). Dans le cas d'un bruit corrélé, on constate que les erreurs, obtenues après un seuillage dépendant d'échelles sont inférieures à celles obtenues après un seuillage global. Et que celles-ci sont relativement petites lorsque le paramètre $'$ est petit (cas du bruit AR(1) et ARMA(1,1)) et atteignent une très grande valeur lorsque le paramètre $'$ s'approche de la valeur 1, après utilisation d'un seuillage global ou dépendant d'échelles (Tab 4.3, Tab 4.4, Tab 4.5).

Dans le cas d'un bruit Ma(1), les erreurs obtenues sont satisfaisantes (Tab 4.2) et sont de même ordre que celles obtenues dans le cas d'un bruit arma(1,1) avec $'$ petit qui reste stationnaire. Ces erreurs augmentent au fur et à mesure que le paramètre μ augmente (Tab 4.2).

4.1.3 Conclusion :

En comparant entre les méthodes de réduction du bruit utilisées, on peut constater que l'utilisation d'un seuillage global donne de bons résultats dans le cas d'un bruit blanc gaussien, contrairement, au cas d'un bruit corrélé tels que ar(1), ma(1) et arma(1,1), l'apport d'un seuillage dépendant des niveaux est positif, car il permet d'améliorer les résultats, en particulier, dans le cas d'un bruit stationnaire.

En comparant les erreurs calculées à partir de l'utilisation des seuils sure et universel, on dira que les méthodes basées sur le seuil sure sont optimales par rapport à celles basées sur le seuil universel:

4.2 Détection des singularités et spéci...cation des régularités :

Dans ce qui suit, l'étude sera faite sur un cycle (le 22^{ème}) du signal synthétique a...n de caractériser ses singularités à travers l'étude des variations de la valeur absolue des coefficients d'ondelettes le long des lignes maxima.

4.2.1 Analyse en ondelettes continues du cycle synthétique sans bruit :

On étudie donc, la transformée en ondelettes continues du 22^{ème} cycle synthétique, dont les lignes maximas qui lui sont associées sont illustrées dans la figure 4.42 suivante :

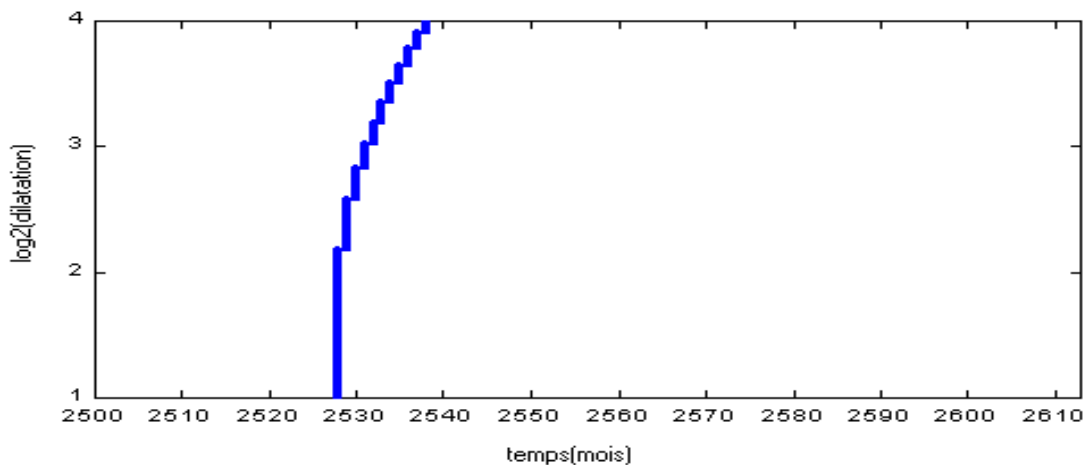


Figure 4.42 : Les lignes maxima d'un cycle synthétique

L'étude étant faite sans effets de bords, on remarque la présence d'une seule ligne maxima qui atteint une dilatation 2^4 et qui converge vers le point $t = 2528$ et qui correspond à l'occurrence du maximum du cycle. La ligne de pente où "ridge function" (figure 4.43) est calculée afin de déterminer la régularité de la singularité correspondante et dont le graphe est le suivant :

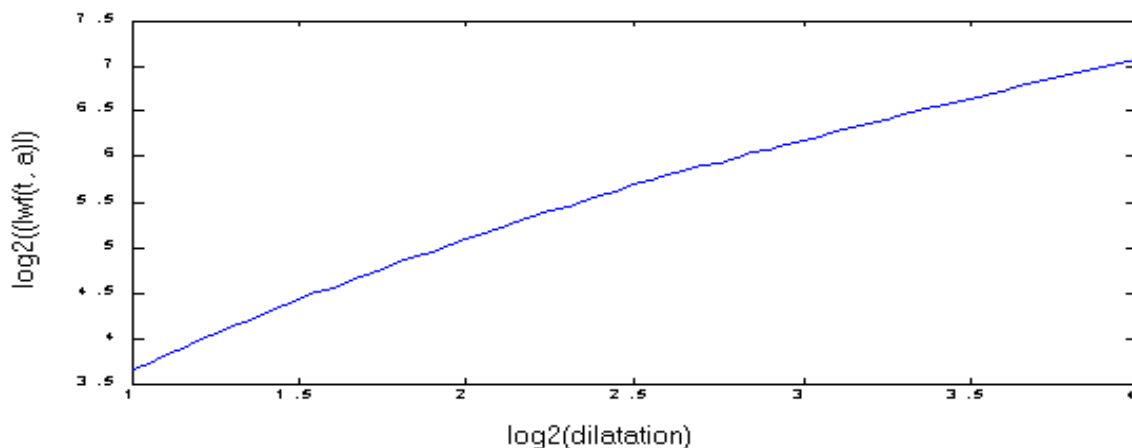


Figure 4.43 : La fonction ridge de la ligne maxima du cycle synthétique

L'ajustement de la fonction ridge par une ligne droite avec un corrélation de 0,96 donne une pente égale à 1,33 qui correspond à la régularité de la singularité en $t = 2528$:

4.2.2 Analyse en ondelettes continues du cycle synthétique bruité après seuillage:

Dans le cas du signal synthétique bruité (bruit blanc, AR(1), MA(1), ARMA(1,1)) l'étude sera faite après un seuillage sure, et dépendant d'échelles dans le cas d'un bruit corrélé (AR(1), MA(1), ARMA(1,1)).

Les lignes maxima du 22^{ème} cycle synthétique pour les différents cas de bruits sont présentées dans la figure ci-dessous :

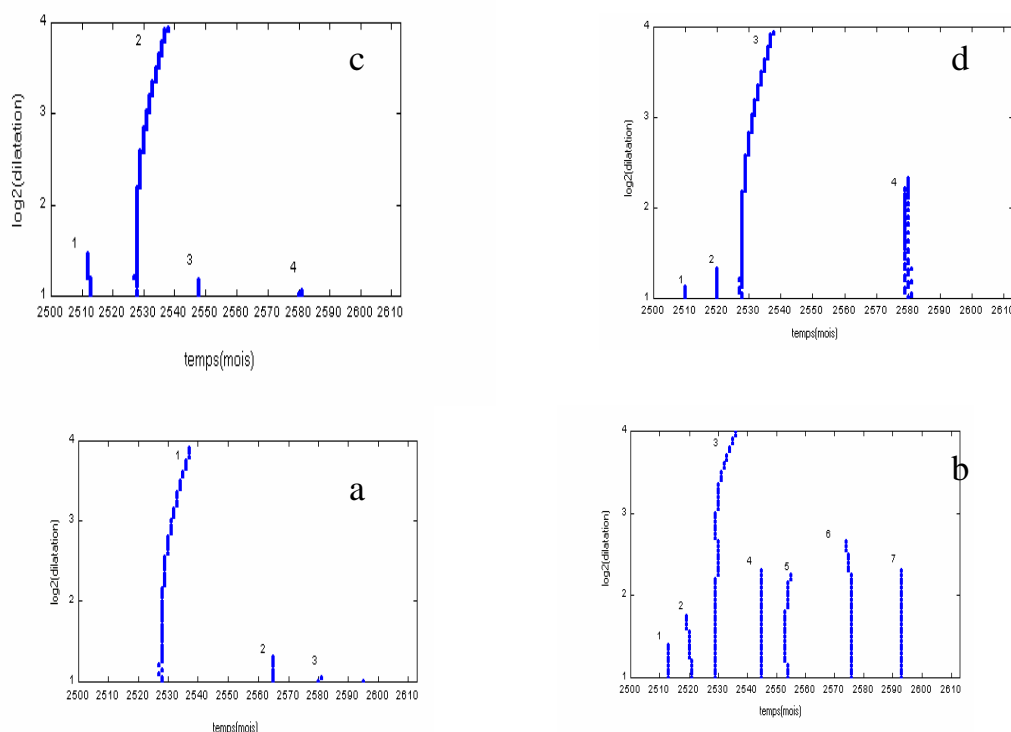


Figure 4.44 : Les lignes maxima du cycle synthétique après seuillage :

- a- cycle synthétique bruité avec un bruit blanc
- b- cycle synthétique bruité avec un bruit ar(1)
- c- cycle synthétique bruité avec un bruit ma(1)
- d- cycle synthétique bruité avec un bruit arma(1,1)

On constate l'apparition de certaines lignes générées par le bruit qui ne dépasse pas la dilatation 2^3 ,

ainsi que la présence de la ligne qui est due au cycle lui même et qui continue à dominer dans les différents cas de bruits (...gure 4.44 : a, b, c, d).

En effet, dans le cas d'un bruit blanc, on remarque la présence de trois lignes au total qui convergent vers les points $t_1 = 2528; t_2 = 2564; t_3 = 2581$, trois autre lignes qui convergent vers $t_1 = 2513; t_2 = 2528; t_3 = 2548; t_4 = 2581$ dans le cas d'un bruit MA(1), sept lignes qui convergent vers les instants $t_1 = 2513; t_2 = 2520; t_3 = 2528; t_4 = 2544; t_5 = 2554; t_6 = 2576$ et $t_7 = 2593$ pour le cas du bruit AR(1) et ...nalement dans le cas d'un bruit arma(1,1), on a la présence de quatre lignes qui convergent vers les points de singularités $t_1 = 2510, t_2 = 2520, t_3 = 2528$ et $t_4 = 2579$.

Quant aux fonctions ridges relatives aux lignes maxima, certaines d'entre elles n'admettent pas un ajustement par une droite et d'autres donnent des valeurs de pentes négatives. En effet, les trois lignes obtenues dans le cas d'un bruit blanc sont de pentes respectives de $1; 39$ pour $a \sim 2^{1:6}$; $1; 29$ et $-0,65$ (...gure 4.45) dans le cas d'un bruit Ma(1), les singularités relatives aux instants t_1, t_2 et t_4 sont de régularités $1; 40$ pour $2^{1:05} \cdot a < 2^{1:4}$, $1; 32$ pour $a \sim 2^{2:3}$ et $0; 92$ pour $a \sim 2$ quant aux autres instants relatifs au cas bruit AR(1), certains sont de régularités négatives (...gure 4.47). La troisième ligne associée à l'instant $t = 2528$ est de pente égale à $1; 31$. Finalement, pour le cas du processus arma(1,1), les fonctions ridges $n^\pm = 2; 3$ et 4 sont de pentes respectives $0; 62, 1; 36$ pour $2^{1:9} \cdot a < 2^4$ et $1; 56$ pour $2 \cdot a < 2^{1:8}$.

On constate que les régularités correspondantes à la singularité en $t = 2528$ obtenues dans les différents cas du bruit sont de valeurs proches et dont les fonctions ridges sont principalement dominées par la partie déterministe du signal (après seuillage)

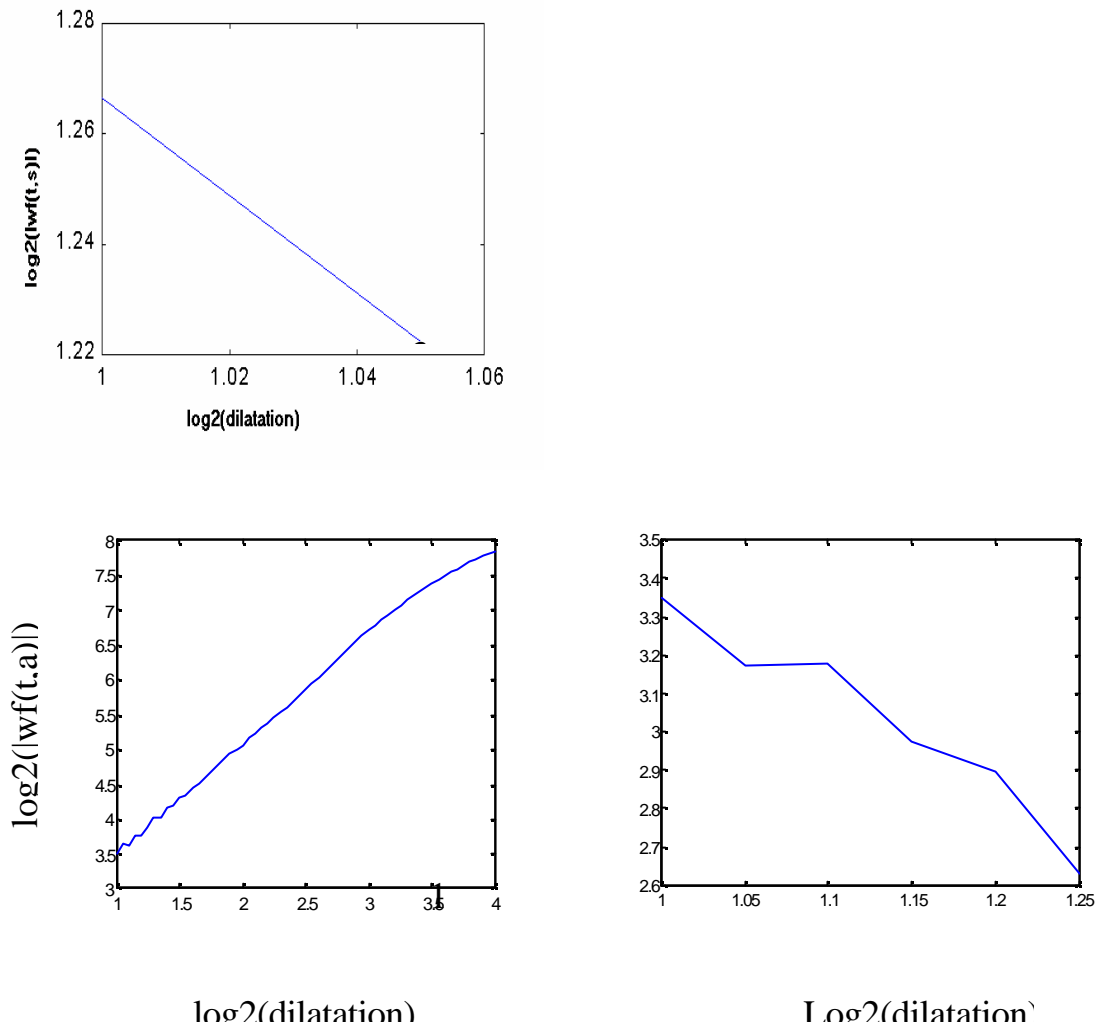


Figure 4.45 : les fonctions ridges du cycle synthétique bruité(bb) près seuillage

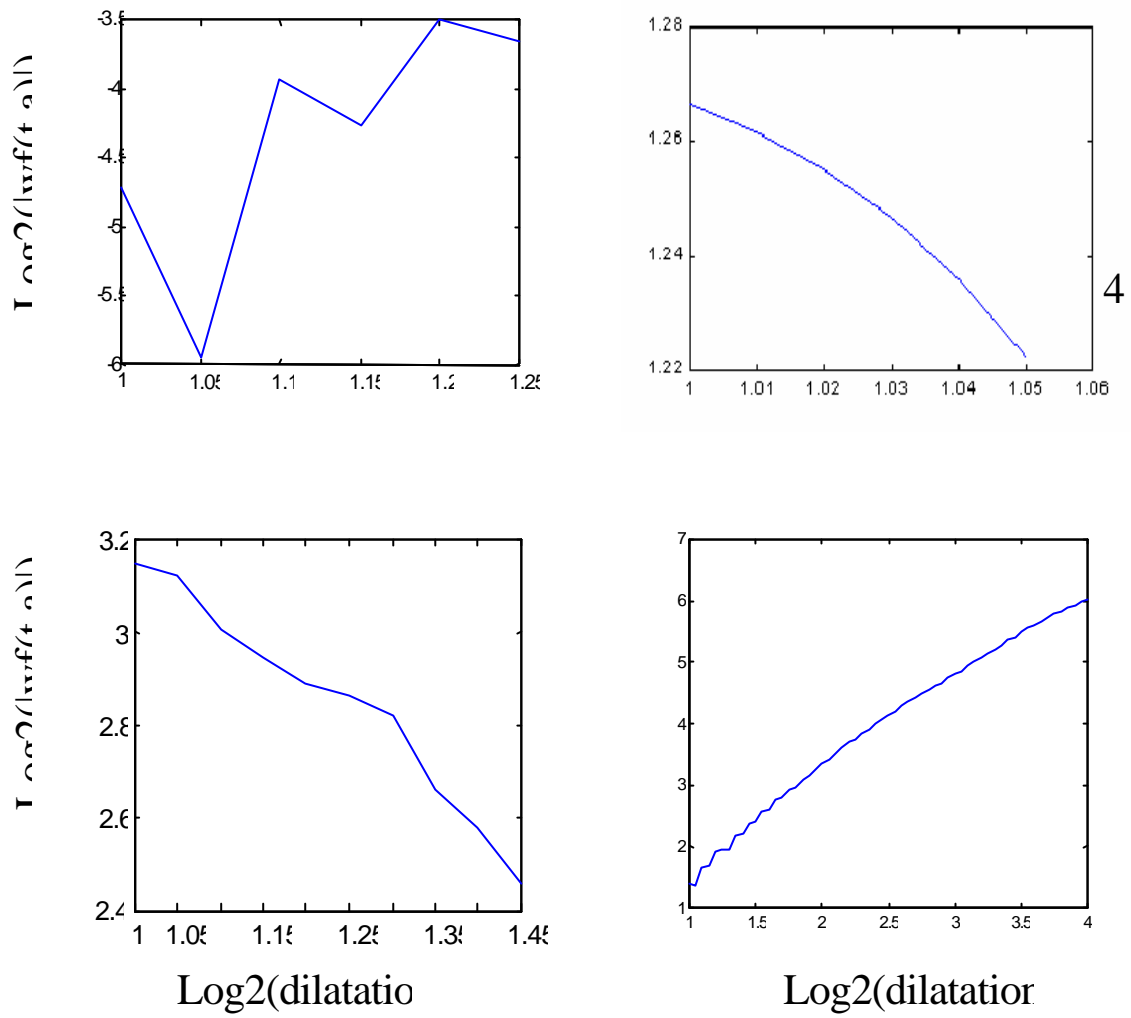


Figure 4.46 : les fonctions ridges du cycle synthétique bruité (ma(1)) après seuillage

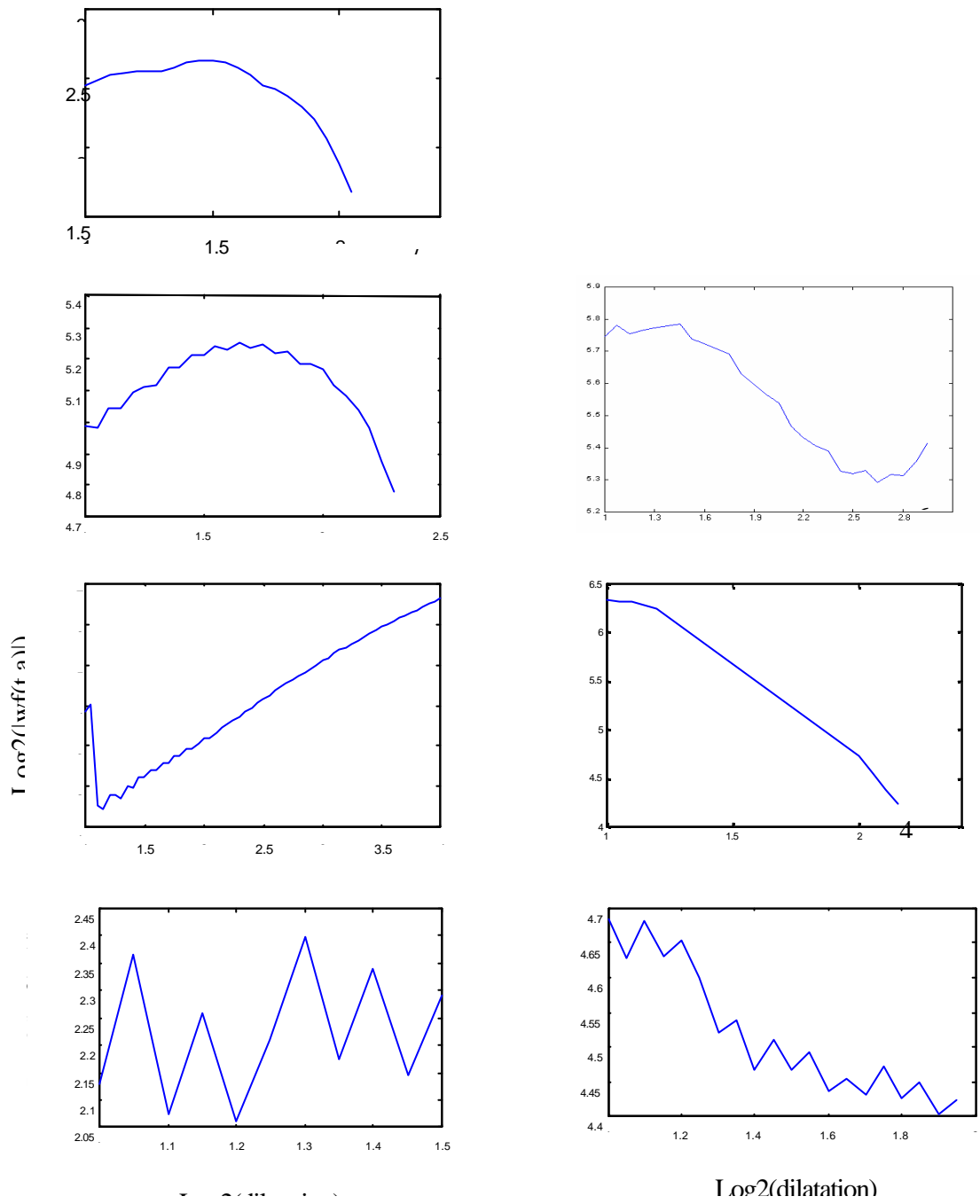


Figure 4.47 : les fonctions ridges du cycle synthétique bruité (ar(1)) après seuillage

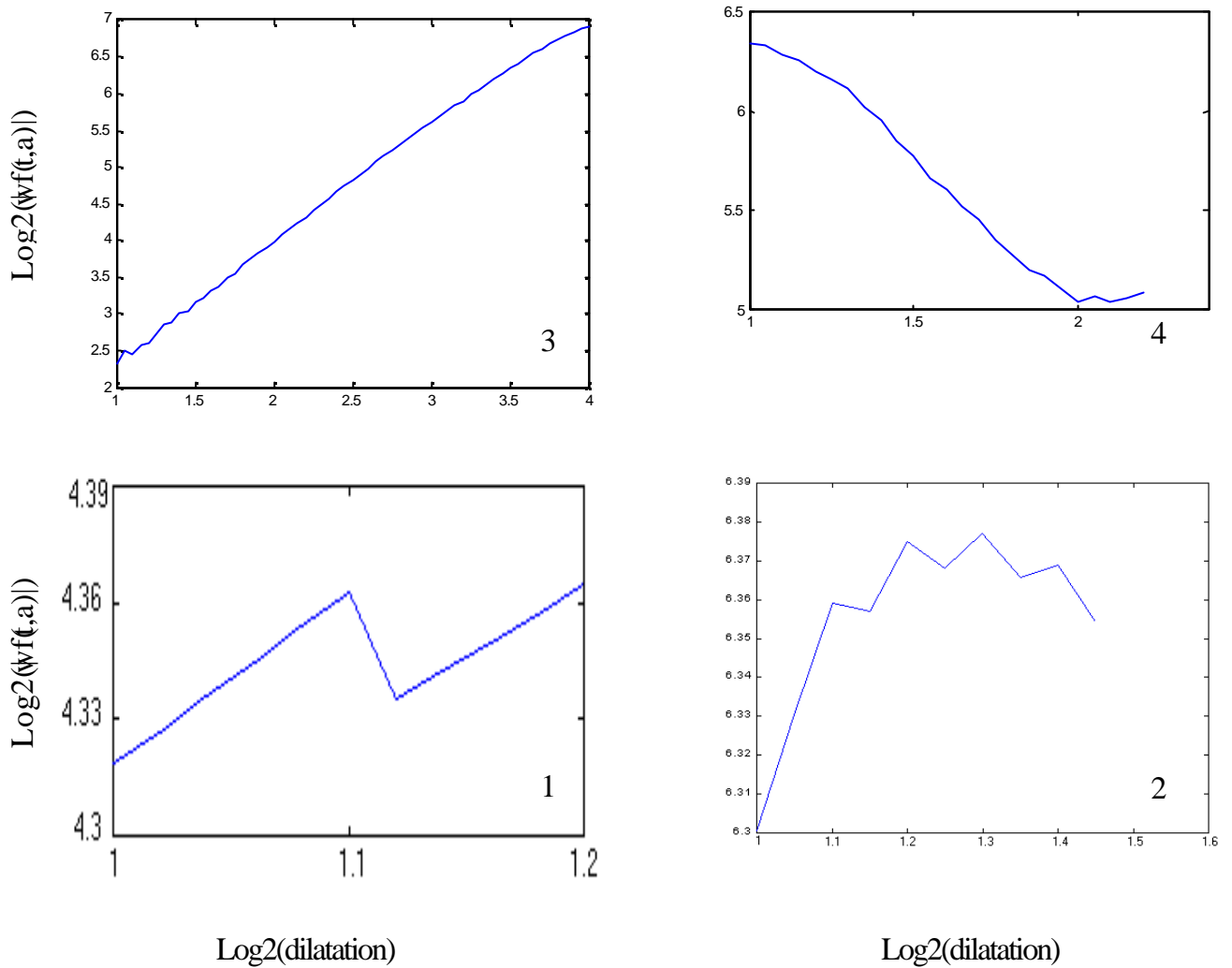


Figure 4.48 :les fonctions ridges du cycle synthétique bruité (arma(1,1)) après seuillage

4.3 Application au champ magnétique terrestre :

4.3.1 Le champ magnétique terrestre :

Le champ magnétique terrestre noté \vec{B}_t est la somme en un point de la surface de la terre de deux parties dont la première a ses sources à l'intérieur de la terre (\vec{B}_i), la seconde à l'extérieur (\vec{B}_e).

Le champ interne (\vec{B}_i) est lui même la somme de deux parties [22] \vec{B}_p et \vec{B}_c .

Le champ magnétique terrestre, \vec{B}_t s'écrit donc :

$$\vec{B}_t = \vec{B}_p + \vec{B}_c + \vec{B}_e .$$

-a- Le champ magnétique interne :

\vec{B}_p est le champ principal ou " champ nucléaire " qui est d'origine interne, son intensité varie de 6000 nT aux pôles à 3000 nT à l'équateur et représente en moyenne 99 % du champ observé à la surface du globe et est engendré par des courants électriques circulant dans la partie fluide du noyau de la terre composée principalement de fer conducteur (Figure 4.49).

La seconde partie, \vec{B}_c , a ces sources dans la croûte terrestre et est beaucoup plus faible, en moyenne que \vec{B}_p .

Connue aussi sous le nom de « champ anormal », elle est engendrée par les roches aimantées de la croûte terrestre dont les composants magnétiques principaux sont l'hématite et la magnétique (Figure 4.48).

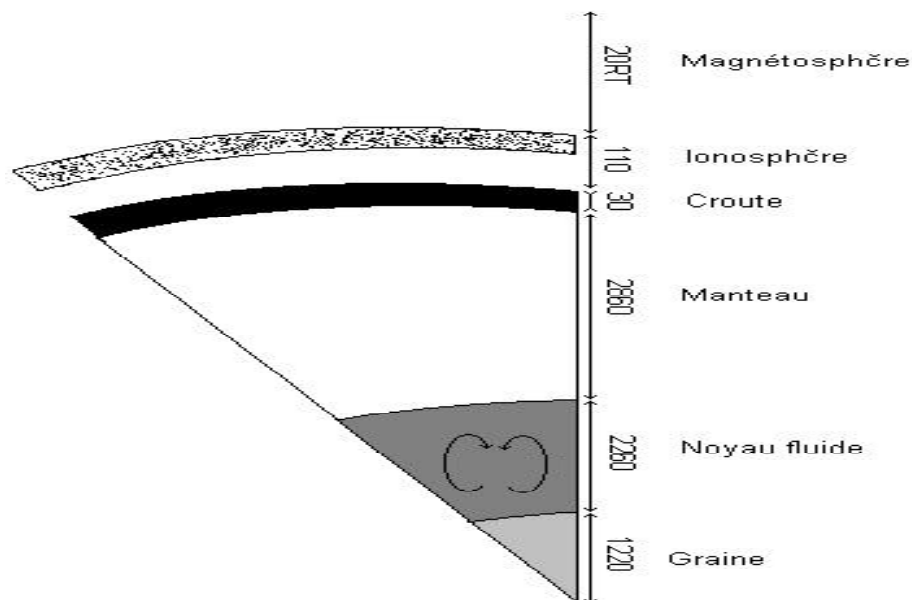


Figure 4.49 : Les sources du champ magnétique terrestre

-b- Le champ magnétique externe :

Le champ magnétique terrestre d'origine externe \vec{B}_e est engendré par des courants électriques circulants dans l'ionosphère et dans la magnétosphère. Ce champ \vec{B}_e est de faible amplitude de l'ordre de 10 nT et peut atteindre 1000 nT en temps d'orage.

4.3.2 Vent solaire et activité géomagnétique :

Dé...nition -1-

Le vent solaire est un plasma totalement ionisé, formé essentiellement d'électrons et de protons qui s'échappe en direction radiale du soleil. Son expansion entraîne le champ magnétique solaire, formant ce qu'on appelle " le champ magnétique interplanétaire ". Ce vent est d'une densité qui se situe entre 0,02 et 100 particules par centimètre cube, et à une vitesse comprise entre 300 et 800 km/s.

Dé...nition -2-

L'activité géomagnétique est dé...nie par les variations irrégulières observées dans les enregistrements du champ géomagnétique. Ces variations sont dues à des sources de champ non permanents.

Activité géomagnétique :

En raison du vent solaire provenant du soleil, la terre est frappée par le plasma magnétique, supersonique, portant une grande quantité d'énergie cinétique et électromagnétique composée d'orages et de sous-orages géomagnétique.

Le vent solaire ne touche pas directement la terre ni son atmosphère, car la terre est protégée par son bouclier magnétique, la magnétosphère, qui l'isole du courant de particules chargées du vent solaire. La forme de la magnétosphère est déterminée par la pression du vent solaire et par le champ magnétique interplanétaire (...gure 4.50). Le vent comprime le champ magnétique sur la face de la terre éclairée par le soleil, et l'étire de l'autre côté, où il forme une longue queue, telle une comète.

Entre le vent solaire et la magnétosphère s'étend une mince région frontalière, nommée la magnétopause, où la pression du champ géomagnétique et celle du vent solaire s'équilibrent.

Quand le vent solaire rencontre la magnétosphère, il se produit une onde de choc, à quelques 13000 kilomètres de la magnétopause. La région comprise entre d'onde de choc et de la magnétosphère est connue sous le nom de magnétogaine, à l'intérieur de laquelle, le champ magnétique terrestre est con...né.

Certaines particules véhiculées par le vent solaire arrivent à pénétrer dans l'atmosphère terrestre par la queue géomagnétique, et provoque ainsi des perturbations dans le champ magnétique terrestre qui se manifestent à la surface du globe par des phénomènes tels que les orages et les sous-orages géomagnétiques [29]

Figure 4.50 : Les perturbations de la magnétosphère

Les variations de l'activité géomagnétique :

La variabilité dans l'activité géomagnétique a plusieurs sources :

1. (a) Variabilité du soleil lui-même qui est reflété dans le vent solaire

² Les cycles solaires de 11 et 22 années et qui sont déterminés par le nombre de tâches solaires qui ont une variation cyclique

(b) L'orbite de la terre autour du soleil qui change l'orientation des systèmes de coordonnées appropriés (variation semestrielle).

(c) L'orbite de la terre autour du soleil la prenant à différentes latitudes solaires (variabilité annuelle).

(d) Rotation du soleil autour de son axe, qui peut mener aux périodicités $T = 27$ jours et $T = 13$; 14 jours.

4.3.3 Analyse en ondelettes continue des du champ magnétique terrestre de l'observation Chambon-la-forêt :

Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude des valeurs en moyennes journalières de l'observatoire Chambon-la-forêt (France). On dispose d'une série de données de janvier 1991 à décembre 1999, ces mesures de champ sont fournies par le programme Intermagnet avec résolution de 0,1 nT.

Programme InterMagNet :

InterMagNet (International Red time Magnetic Observatory Network) est un programme non exclusif d'échange global entre des observatoires géomagnétiques. Ces observatoires obéissent à des normes internationales et permettent d'acquérir des données du champ magnétique en temps continu. Ce programme a permis d'établir un réseau mondial d'observatoires magnétiques, auquel appartient l'observatoire Chambon-la-forêt (CLF).

Analyse en ondelettes continue :

La détection des singularités via le module de la transformée en ondelettes continue sera faite sur la composante z des données magnétiques de l'année 1999 (...gure 4.51) après avoir effectué un seuillage "SURE" dépendant d'échelles (...gure 4.52)

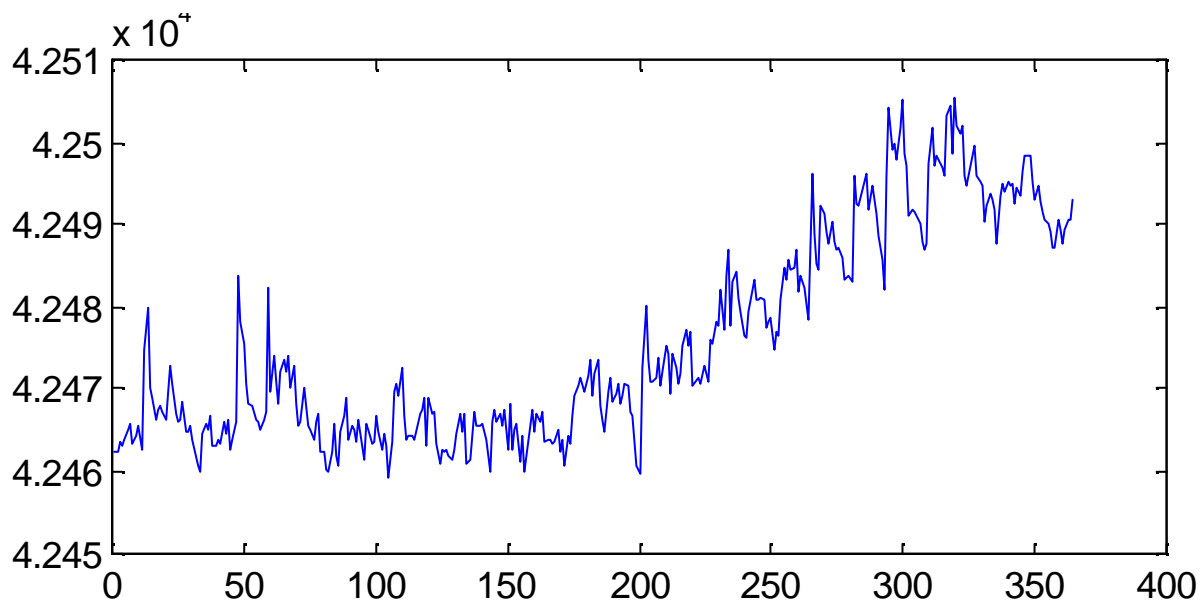


Figure 4.51 : la composante z du champ magnétique de l'observatoire CLF (année 1999)

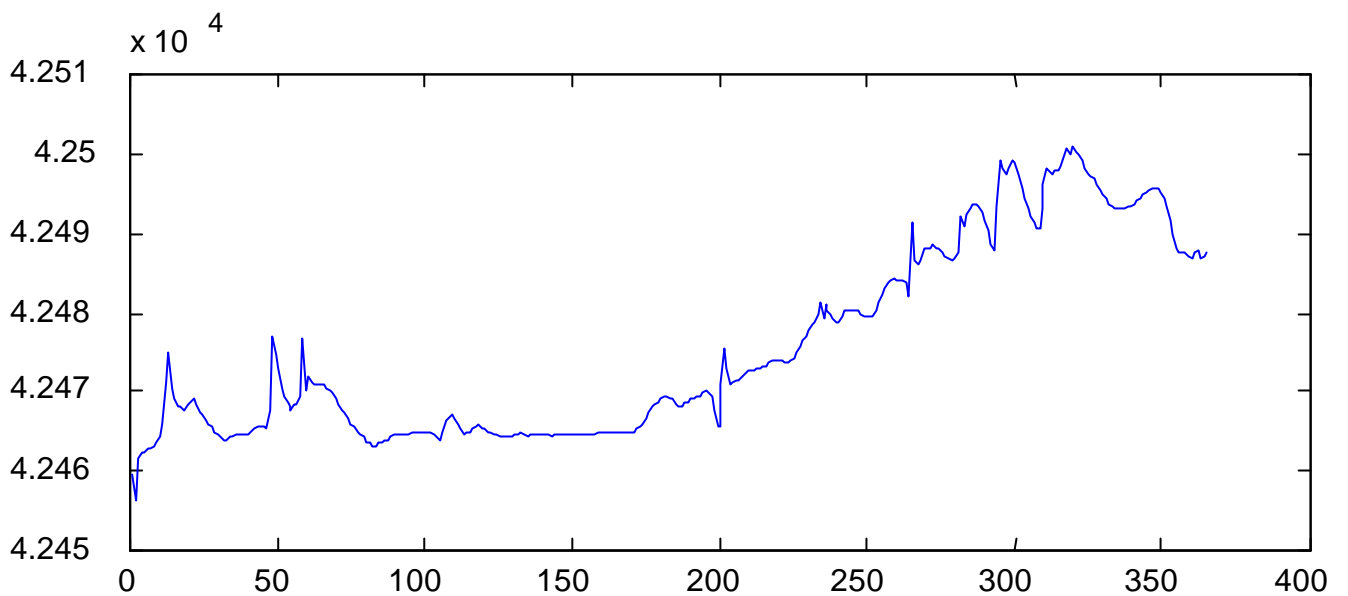


Figure 4.52 : la composante z du champ magnétique après seuillage (sure dépendant d'échelle)

Les lignes maxima qui lui sont associées sont présentées dans la Figure 4.53 ci-dessous

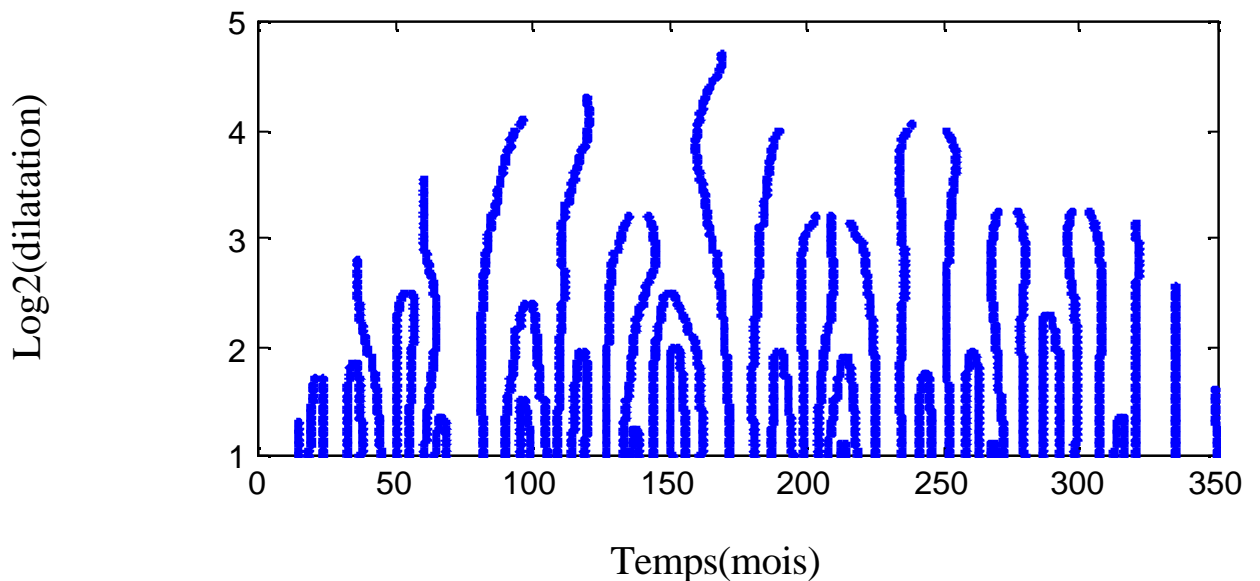


Figure 4.53 : Lignes maxima de la composante z du champ magnétique de Chambon-la-forêt

On ne prendra en considération que les lignes maxima les plus dominantes pour lesquelles $\alpha > 2;8$. Ces 18 lignes convergent respectivement vers les points $t_i = 45, 55, 82, 109, 127, 133, 172, 181, 199, 204, 225, 235, 252, 272, 279, 298, 307$ et 320 . Les fonctions Ridges correspondantes sont illustrées

dans la figure 4.54

Figure 4.54 : fonctions ridges de la composante z de chambon-la-forêt (année 1999)

On constate qu'à part la singularité représentée par la ligne maxima n° 21 dont la pente est négative

(j 1; 98), les autres singularités sont de régularités qui varient entre 0,91 et 1,86.

Afin de mettre en évidence les singularités du champ géomagnétique qui sont en rapport avec l'activité solaire, on calculera les étendues des différents intervalles de temps qui séparent les lignes maximales correspondantes aux singularités étudiées et qui sont comme suit :

entre la ligne n° 9 et la ligne n° 12 l'étendue est de 27 jours.

entre la ligne n° 12 et la ligne n° 17 l'étendue est de 27 jours.

entre la ligne n° 17 et la ligne n° 21 l'étendue est de 26 jours.

entre la ligne n° 21 et la ligne n° 27 l'étendue est de 29 jours.

entre la ligne n° 27 et la ligne n° 29 l'étendue est de 20 jours.

entre la ligne n° 29 et la ligne n° 33 l'étendue est de 23 jours.

entre la ligne n° 33 et la ligne n° 38 l'étendue est de 21 jours.

entre la ligne n° 38 et la ligne n° 42 l'étendue est de 27 jours.

entre la ligne n° 42 et la ligne n° 47 l'étendue est de 27 jours.

entre la ligne n° 47 et la ligne n° 48 l'étendue est de 27 jours.

entre la ligne n° 48 et la ligne n° 52 l'étendue est de 28 jours.

entre la ligne n° 52 et la ligne n° 56 l'étendue est de 28 jours.

D'après les résultats obtenus ci-dessus, on remarque que mise à part les étendues de 20, 23 et 21 jours des intervalles de temps correspondant aux lignes 27-29, 29-33 et 33-38, les autres sont en moyenne d'étendue égales à 27, 37 jours. Par conséquent, les singularités qui leur sont associées sont certainement dues au cycle de 27 jours qui est lié à la rotation du soleil autour de son axe.

Quant aux composantes x et y les graphes des lignes maximales associés sont représentés dans les figures 4.57 et 4.58 respectivement

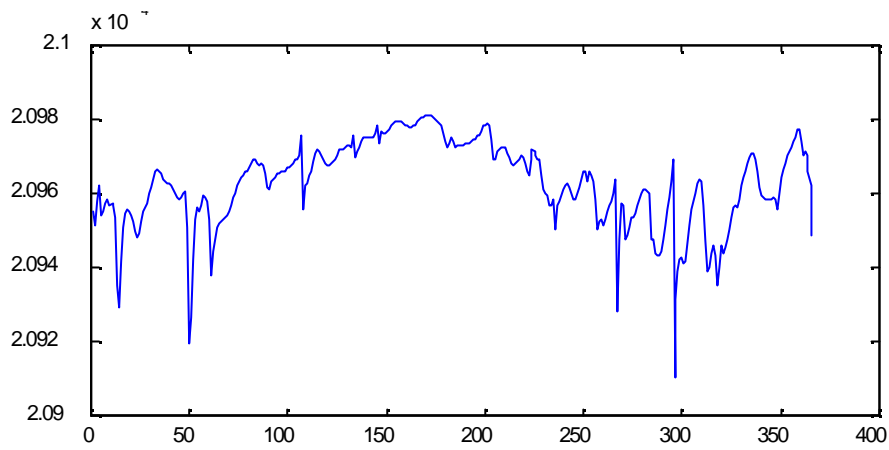


Figure 4.55 : la composante x du champ magnétique après seuillage (sure dépendant d'échelle)

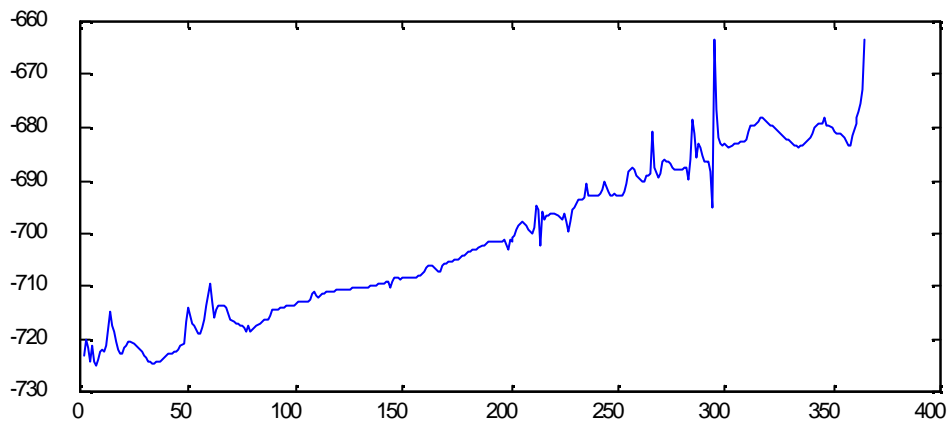


Figure 4.56: la composante y du champ magnétique après seuillage (sure dépendant d'échelle)

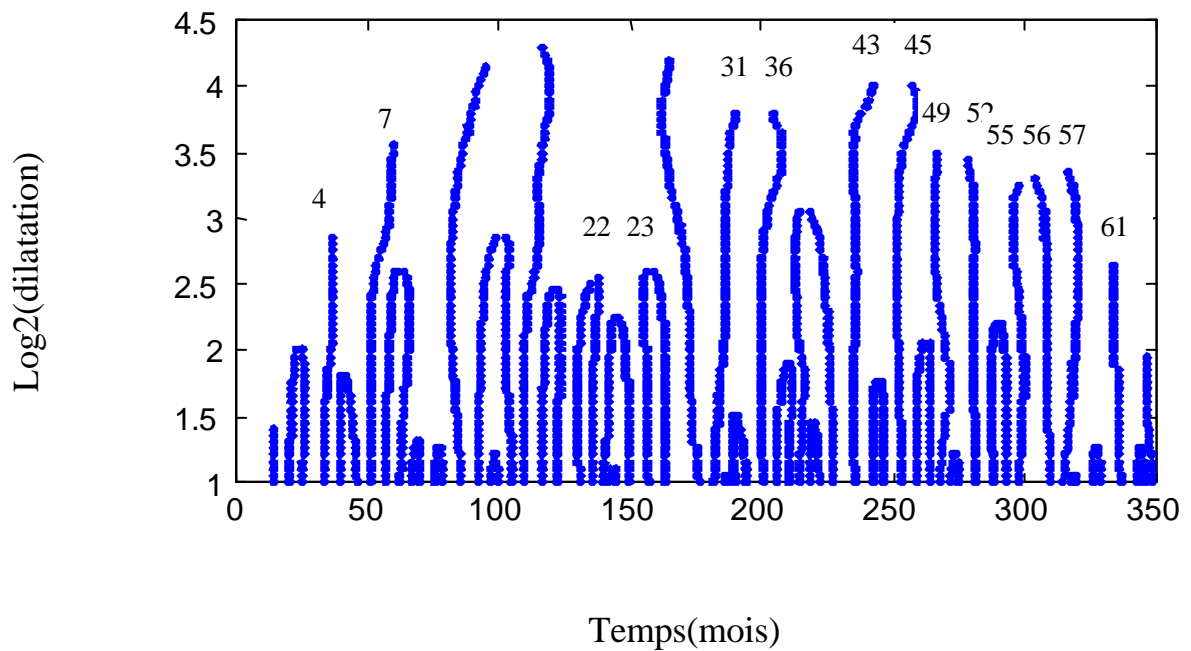


Figure 4.57: lignes maxima de la composante x du champ magnétique de chambon-la-forêt (1999)

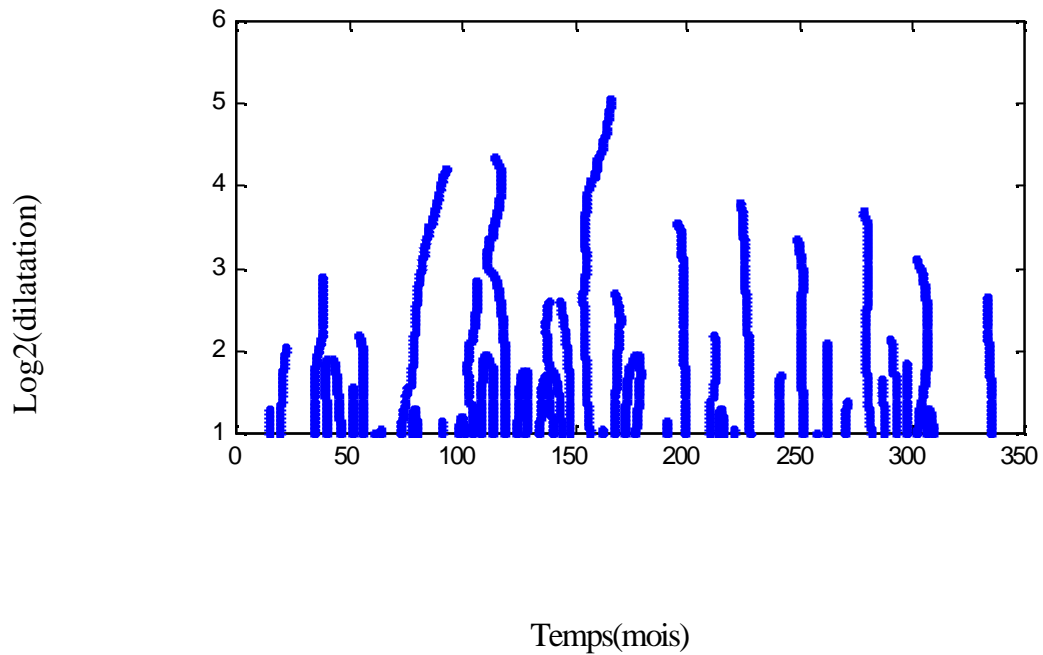


Figure 4.58: lignes maxima de la composante y du champ magnétique de chambon-la-forêt (1999)

Les lignes maxima associées à la composante x (Figure 4.57) sont en nombre de 57 et dont les plus dominantes (indiquées par des numéros sur le graphe) correspondent exactement aux mêmes lignes dominantes présentes dans le graphe des lignes maxima associées à la composante z (Figure 4.53). En ce qui concerne la composante y (Figure 4.58) on a un résultat différent du fait que certains lignes maxima dominantes ne correspondent pas aux mêmes singularités que celles présentes dans le cas des composantes x et z.

Conclusion :

Le formalisme de la transformée en ondelettes continue introduit par Mallat est d'une grande simplicité numérique, de plus qu'on ne fait aucune hypothèse à priori sur l'instant t_0 de l'occurrence de l'événement. Cette analyse a donnée des résultats satisfaisantes sur la détection des singularités ainsi que sur la caractérisation des lignes structures contenues dans le signal.

L'étude qui a été effectuée sur les lignes maxima les plus dominantes contiennent plus d'informations sur le signal étudié.

L'analyse des données réelles du champ géomagnétique (année 1999) de l'observatoire Chambon-la-forêt a permis de mettre en évidence les singularités de périodicité 27 jours qui sont dues à la rotation du soleil autour de son axe.

Conclusion générale :

Le travail décrit dans ce manuscrit nous a permis en premier lieu de connaître les avantages des méthodes de seuillage basées sur la décomposition en ondelettes orthogonales tant sur le plan théorique que sur le plan pratique.

On a constaté que l'estimateur obtenu à partir des données bruitées par l'utilisation d'un seuil "SURE" est d'un risque qui est à une constante près du risque minimax et qui lui est asymptotiquement équivalent dans le cas d'un seuillage dépendant d'échelles contrairement, au seuil universel dont le risque est à un facteur de "log n" près du risque minimax.

A partir de l'étude qui a été faite sur le signal synthétique, on a constaté que l'utilisation d'un seuillage global donne de bons résultats dans le cas d'un bruit gaussien, contrairement au cas d'un bruit corrélé (AR(1), MA(1), ARMA(1,1)); et qu'une nette amélioration est perceptible par l'application d'un seuillage dépendant des niveaux. En comparant les erreurs calculées à partir de l'utilisation des seuils SURE et universel, on dira que les méthodes basées sur le seuil SURE sont optimales.

Par conséquent, nous avons choisis la procédure "SURE" dépendant d'échelles comme méthode de réduction du bruit pour les données réelles du champ magnétique terrestre.

Quant à l'étude qui consiste à détecter les singularités et caractériser les régularités correspondantes par l'application de la transformée en ondelettes continue, cette analyse a donné des résultats encourageant sur la caractérisation des ...nes structures continues dans le signal considéré. A partir de l'application qui a été effectuée sur le signal synthétique, on a remarqué que les lignes maximales les plus dominantes contiennent plus d'informations sur le signal étudié. Concernant l'analyse des données réelles du champ géomagnétique de l'observatoire Chambon-la-forêt, le seuillage nous a permis une meilleure compréhension des phénomènes physiques que contient le champ géomagnétique, l'étude étant faite sur une année, nous avons pu mettre en évidence certaines singularités liées à l'activité solaire, en particulier celles qui sont dues à la rotation du soleil autour de son axe et dont la période est de 27 jours.

Bibliographie:

- [1] C.GASQUET, P.WITOMSKI, " Analyse de Fourier et application". édition Masson.
- [2] I.DAUBECHIES, "Localization and signal analysis", IEEE Transactions. on information théory, vol.36.no.5, September 1990.
- [3] M^d.CHIBANI, "analyse et extraction des caractéristiques dans les images", thèse de magister, U.S.T.H.B, institut d'électronique, 1991.
- [4] Y.MEYER, S.JAFFARD et O.RIOUL, "l'analyse par ondelettes".
- [5] I.DAUBECHIES, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets".commun. Pure App Math, 41, 909-996, 1988.
- [6] KAHANE, P.G LENARIE - RIEUSSET "Fourier series and wavelets" .Studies in the Development of Modern Mathematics, ISSN 1040-6441, Vol 3, 1995.
- [7] A.COHEN, "ondelettes et traitement numérique du signal"Masson, Paris, 1992.
- [8] Y.MEYER, "Les ondelettes : algorithmes et applications", édition ARMAND COLIN, 1992.
- [9] I.DAUBECHIES, "Ten lectures on wavelets" CBMS, SIAM . Vol 61.
- [10] D.HATHAWAY, R.M.WILSON, "a synthesis of solar cycle prédiction techniques". Journal of géophysical research. Vol 104, no = A10. October 1999.
- [11] DONOHO et JOHNSTONE. June 1992. " Ideal adaptation by wavelet shrinkage". Departement of statistics, Stanford university, Sranford, Ca. 94305-4065, U.S.A

- [12] D.L.DONOHO et I.M.JOHNSTONE, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage".
 Departement of statistics, Stanford university, Juju 1994.
- [13] R.R.COIFMAN and D.L.DONOHO, "Translation-Invariant De-noising" Yale university and
 Stanford university.
- [14] D.L.DONOHO, I.M.JOHNSTONE, G.KERKYACHIAN et D.PICARD, "Wavelet shrinkage : As-
 ymptotia", 1995.
- [15] D.L.DONOHO, I.M.JOHNSTONE, "Minimax estimation via wavelet shrinkage". technical rep-
 port No 402. Departement of statistics, Stanford university, 1992.
- [16] I.M.JOHNSTONE, B.W.SILVERMAN, "Wavelet threshold estimations for data with correlated
 noise". Departement of statistacs, Stanford university. Decembre 1994.
- [17] M.GANSE, "Wavelet thresholding and noise réduction". Thèse Doctorat université catholique de
 Louvain. Avril 2000.
- [18] D.L.DONOHO, "Denoising by soft-thresholding". IEE Transactions on in...rmation theory. Vol
 41, No 3. 1995.
- [19] D.L.DONOHO, I.M.JOHNSTONE, "Minimax Risk over L_p -balls for L_q -errors". Departement of
 statistics, Stanford university, Ca 94305. July 20, 1994.
- [20] Mioara Alexandrescu et al, "Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis". Thèse de
 Doctorat 1994. Institut de physique de Paris.
- [21] JAMES BURCH, "Ejections coronale et tempêtes spatiales". Pour la science No 284 Juin 2001.
- [22] G.JOBERT, "traité de géophysique interne". édition masson 1976.
- [23] STEPHANE MALLAT et WEN LIANG HWANG, "Singularity detection and processing with
 wavelets". IEEE Transactions on information theory", Vol.38.No.2.March 1992.
- [24] O.RIOUL and P.DUHAMEL, "Fast algorithms for discrete and continus wavelet transforms".
 IEEE trans on information theory, vol.38.no.2, March 1992.

- [25] What is a geomagnetis storm". Journal of geophysical research, vol.99, no.A4. April 1, 1994.
- [26] A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation". Stephane G.Mallat.