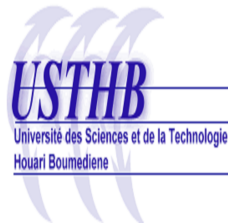


République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de Technologie Houari Boumediene  
Faculté de Physique  
Laboratoire de Physique Théorique



## MÉMOIRE

présenté pour l'obtention du diplôme de magister en physique

Spécialité :

**Physique Théorique**

par :

**BOUKHALFA Soufiane**

Sujet :

---

**OSCILLATIONS NON LINÉAIRES DANS UN PLASMA RELATIVISTE**

---

Soutenu publiquement, le 15/07/2010, devant le jury composé de :

|                                |                         |           |              |
|--------------------------------|-------------------------|-----------|--------------|
| <b>Mme. F. CHAFA-MEKIDECHE</b> | Professeur              | U.S.T.H.B | Présidente   |
| <b>Mr. T. H. ZERGUINI</b>      | Professeur              | U.S.T.H.B | Encadreur    |
| <b>Mr. M. TRIBECHÉ</b>         | Professeur              | U.S.T.H.B | Examineur    |
| <b>Mme. L. AMIROUCHE</b>       | Maître de Conférences A | U.S.T.H.B | Examinatrice |
| <b>Mme. N. DOULACHE</b>        | Maître de Conférences A | U.S.T.H.B | Examinatrice |

## REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été entièrement réalisé au sein du groupe de Physique des Plasmas du Laboratoire de Physique Théorique, de la Faculté de Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMEDIENNE (U.S.T.H.B).

Je remercie vivement le Professeur Taha Houssine ZERGUINI, mon encadreur, pour avoir accepté de m'accueillir au sein de son équipe de Physique des Plasmas et pour l'intérêt qu'il a constamment porté à la progression de mon travail. Pour tout cela, je lui exprime toute ma gratitude, mon profond respect et ma très haute considération.

Je remercie également le Professeur Mouloud TRIBECHÉ pour avoir proposé et structuré le sujet du présent mémoire. Outre la confiance qu'il m'a témoignée, il a suivi pas à pas l'évolution de mon travail et m'a initié à la physique non linéaires des plasmas complexes. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect et de ma très haute considération.

Je remercie vivement le Professeur F. CHAFA-MEKIDECHE du Laboratoire de Physique Théorique qui nous a honorés en acceptant de présider le jury de la présente thèse. Sa disponibilité en tant que chef de département nous a été d'un grand apport.

Mes remerciements les plus vifs vont également au Docteur Lynda AMIROUCHE, Maître de Conférences du Laboratoire de Physique Théorique, ainsi qu'au Docteur Naima DOULACHE, Maître de Conférences du Laboratoire de Physique des Matériaux, pour l'intérêt qu'elles ont manifesté et porté à ce travail en acceptant de prendre part au jury de la présente thèse.

Mes vifs remerciements vont également à tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et particulièrement aux membres de l'équipe avec laquelle j'ai travaillé pour leur amitié et leur disponibilité (Amour, Younsi, Boubakour, Mayout, Benzekka, Ghebache, Bacha, Fermous, Bencheriet).

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance et mes remerciements à mes parents, mes sœurs et mes frères pour leur soutien et leurs encouragements sans cesse renouvelés tout au long du présent travail.

# TABLE DES MATIÈRES

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Table des matières</b>   | <b>i</b>  |
| <b>Table des figures</b>  | <b>iv</b> |
| <b>Introduction générale</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Plasmas relativistes</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1 Généralités sur les plasmas . . . . .                                     | 5         |
| 1.1.1 Oscillations, écrantage et longueur de Debye . . . . .                  | 6         |
| 1.1.2 Classification des plasmas . . . . .                                    | 8         |
| 1.2 Plasmas relativistes . . . . .  | 9         |
| 1.3 Descriptions mathématiques d'un plasma relativiste . . . . .              | 10        |
| 1.3.1 Description hydrodynamique d'un plasma relativiste . . . . .            | 10        |
| 1.3.2 Description cinétique d'un plasma relativiste . . . . .                 | 12        |
| <b>2 Oscillations non linéaires dans un plasma relativiste à deux fluides</b> | <b>15</b> |
| 2.1 Présentation physique du problème . . . . .                               | 15        |
| 2.2 Équations de base et formulation . . . . .                                | 17        |
| 2.3 Analyse du pseudo-potentiel . . . . .                                     | 19        |
| 2.4 Conditions d'existence de solitons . . . . .                              | 21        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.5      | Potentiel solitaire pour un plasma relativiste composé d'ions froids et d'électrons chauds . . . . .                               | 24        |
| 2.6      | Équation de Korteweg-de Vries dans un plasma relativiste à deux fluides . . . . .  | 29        |
| 2.7      | Équation de Korteweg-de Vries modifiée dans un plasma relativiste à deux fluides . .   | 35        |
| <b>3</b> | <b>Ondes acoustiques ioniques dans un plasma relativiste composé d'ions, d'électrons et de positrons</b>                           | <b>44</b> |
| 3.1      | Présentation physique du problème . . . . .  | 44        |
| 3.2      | Équations de base et formulation . . . . .   | 45        |
| 3.3      | Analyse du pseudo-potentiel . . . . .  | 47        |
| 3.3.1    | Contribution ionique . . . . .   | 47        |
| 3.3.2    | Contributions électronique et positronique . . . . .   | 48        |
| 3.3.3    | Solitons et conditions d'existence . . . . .   | 49        |
| <b>4</b> | <b>Ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma poussiéreux à charge variable en présence d'électrons et d'ions relativistes</b> | <b>57</b> |
| 4.1      | Présentation physique du problème . . . . .  | 57        |
| 4.2      | Charge théorique d'un grain de poussière . . . . .   | 58        |
| 4.3      | Courants de charge électronique et ionique relativistes . . . . .  | 59        |
| 4.4      | Potentiel solitaire dans un plasma poussiéreux à charge variable en présence d'ions et d'électrons relativistes . . . . .          | 62        |
|          | <b>Conclusion générale</b>   | <b>67</b> |
| <b>A</b> | <b>Dérivation des équations de base de l'hydrodynamique relativiste</b>  | <b>70</b> |
| <b>B</b> | <b>L'expression de la vitesse du son relativiste</b>   | <b>75</b> |
| <b>C</b> | <b>Distribution de Maxwell-Jüttner</b>   | <b>77</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>81</b> |

---

## TABLE DES FIGURES

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Diagramme de classification des plasmas. . . . .   | 9  |
| 2.1 | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique pour différentes valeurs du paramètre relativiste $\varepsilon$ , avec $\beta_0 = 0.15$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .               | 27 |
| 2.2 | Potentiel de Sagdeev $V(\Phi)$ associé au soliton de la figure (2.1) pour différentes valeurs de $\varepsilon$ . . . . .   | 27 |
| 2.3 | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique pour différentes valeurs de $\beta_0$ , avec $\varepsilon = 0.014$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .                                    | 27 |
| 2.4 | Potentiel de Sagdeev $V(\Phi)$ associé au soliton de la figure (2.3) pour différentes valeurs de $\beta_0$ . . . . .   | 27 |
| 2.5 | Profil spatial de la densité ionique pour différentes valeurs du paramètre relativiste $\varepsilon$ , avec $\beta_0 = 0.15$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .   | 28 |
| 2.6 | Profil spatial de la densité électronique pour différentes valeurs du paramètre relativiste $\varepsilon$ , avec $\beta_0 = 0.15$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .  | 28 |
| 2.7 | La région d'existence de solitons dans le plan $(\beta_0, \varepsilon)$ pour $\alpha = 4/3$ . . . . .  | 28 |
| 2.8 | Variation de l'amplitude $\Phi_m^{(1)}$ en fonction de $\varepsilon$ pour différentes valeurs de $\rho$ avec $\beta_0 = 0.1$ , $\vartheta = 0.3$ , $\mu = 1836$ et $\alpha_i = \alpha_e = 4/3$ . . . . . | 43 |
| 2.9 | Variation de la largeur $W$ en fonction de $\rho$ pour différentes valeurs de $\varepsilon$ avec $\beta_0 = 0.1$ , $\vartheta = 0.3$ , $\mu = 1836$ et $\alpha_i = \alpha_e = 4/3$ . . . . .             | 43 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1  | La région d'existence de solitons dans le plan $(\beta_0, \varepsilon)$ pour la branche $\beta_0 > \nu$ , avec $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .   | 53 |
| 3.2  | La région d'existence de solitons dans le plan $(\beta_0, \varepsilon)$ pour la branche $\beta_0 < \nu$ , avec $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .   | 53 |
| 3.3  | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs de $\beta_0$ , avec $\varepsilon = 0.025$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .                      | 53 |
| 3.4  | Potentiel de Sagdeev $V_+(\Phi)$ associé au soliton de la figure (3.3) pour différentes valeurs de $\beta_0$ . . . . .  | 53 |
| 3.5  | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs de $\beta_0$ , avec $\varepsilon = 0.0015$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .                     | 54 |
| 3.6  | Potentiel de Sagdeev $V_-(\Phi)$ associé au soliton de la figure (3.5) pour différentes valeurs de $\beta_0$ . . . . .  | 54 |
| 3.7  | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs du paramètre relativiste $\varepsilon$ , avec $\beta_0 = 0.3$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .  | 54 |
| 3.8  | Potentiel de Sagdeev $V_+(\Phi)$ associé au soliton de la figure (3.7) pour différentes valeurs du paramètre relativiste $\varepsilon$ . . . . .  | 54 |
| 3.9  | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs du paramètre relativiste $\varepsilon$ , avec $\beta_0 = 0.05$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . . | 55 |
| 3.10 | Potentiel de Sagdeev $V_-(\Phi)$ associé au soliton de la figure (3.9) pour différentes valeurs du paramètre relativiste $\varepsilon$ . . . . .  | 55 |
| 3.11 | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs de $f$ , avec $\varepsilon = 0.025$ , $\beta_0 = 0.3$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .                      | 55 |
| 3.12 | Potentiel de Sagdeev $V_+(\Phi)$ associé au soliton de la figure (3.11) pour différentes valeurs de $f$ . . . . .   | 55 |
| 3.13 | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs de $f$ , avec $\varepsilon = 0.0015$ , $\beta_0 = 0.05$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .                    | 56 |
| 3.14 | Potentiel de Sagdeev $V_-(\Phi)$ associé au soliton de la figure (3.13) pour différentes valeurs de $f$ . . . . .   | 56 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.15 | Profil spatial des densités électronique, ionique et positronique, avec $\varepsilon = 0.025$ , $\beta_0 = 0.3$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .   | 56 |
| 3.16 | Profil spatial des densités électronique, ionique et positronique, avec $\varepsilon = 0.0015$ , $\beta_0 = 0.05$ , $\nu = 0.1$ , $\sigma = 1.2$ , $f = 1.5$ et $\alpha = 4/3$ . . . . .   | 56 |
| 4.1  | Variation de la charge du grain pour différentes valeurs de $\varepsilon$ avec $\sigma = 0.1$ , $Q_{d0} = -0.3$ et $\mu = 1836$ . . . . .  | 63 |
| 4.2  | Variation de la charge du grain pour différentes valeurs de $\varepsilon$ avec $\sigma = 0.1$ , $\mu = 1836$ , $n_{i0} = 10^5 \text{ cm}^{-3}$ , $Q_{d0} = -0.6$ , $r_d = 0.34 \mu\text{m}$ , $m_d = 10^{12} m_i$ , et $v_{d0} = 85 \text{ cm s}^{-1}$ . . . . .   | 66 |
| 4.3  | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ de l'onde acoustique poussiéreuse pour différentes valeurs de $\sigma = 0.84$ ( $f = 1.70$ ), $0.87$ ( $f = 1.72$ ), et $0.9$ ( $f = 1.75$ ), avec $\varepsilon = 0.02$ . Les valeurs des autres paramètres sont celles utilisées pour la figure (4.2). . . . . | 66 |
| 4.4  | Potentiel électrostatique solitaire $\Phi$ de l'onde acoustique poussiéreuse pour différentes valeurs de $\sigma = 0.84$ ( $f = 1.18$ ), $0.87$ ( $f = 1.20$ ), et $0.9$ ( $f = 1.22$ ), avec $\varepsilon = 0.03$ . Les valeurs des autres paramètres sont celles utilisées pour la figure (4.2). . . . . | 66 |

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un plasma est un milieu dispersif fortement non linéaire. Pendant les trois dernières décennies, il y a eu des avancées importantes dans le champ de la physique des plasmas non linéaires. L'étude des différentes structures non linéaires dans les plasmas non collisionnels fournit une base solide, non seulement pour explorer et comprendre les différents traits de la physique fondamentale des plasmas, mais aussi pour développer des applications pratiques dans la technologie. Le transport anormal de la chaleur dans les tokamaks, le confinement des plasmas par des champs radio-fréquences, les problèmes de l'interaction laser-plasma ...etc sont autant d'exemples typiques où la physique des plasmas non linéaires intervient. Les plasmas astrophysiques et la magnétosphère terrestre englobent une grande variété de phénomènes d'ondes non linéaires. Les différentes structures cohérentes d'ondes non linéaires observées grâce à des observations satellitaires sont : les solitons, les double couches, les ondes de choc, les tourbillons, ...etc. Parmi ces structures non linéaires, les solitons représentent l'un des aspects les plus importants des phénomènes non linéaires dans la recherche sur les plasmas modernes. Les solitons sont des ondes solitaires, c'est-à-dire spatialement localisées, dont les propriétés de stabilité sont remarquables. Ces structures cohérentes sont une manifestation étonnante et fascinante de la nature résultant de la concurrence entre la non-linéarité et la dispersion. La dispersion a pour effet d'étaler l'onde solitaire alors que la non-linéarité entraîne l'effet inverse. Dès sa première observation [1] en 1834 par un ingénieur hydrodynamicien, John Scott-Russell, il a suscité passion et débats. John Scott-

Russell a été tellement fasciné par cette observation inattendue qu'il a consacré dix années de sa vie à étudier ce phénomène, tandis que les théories fondées sur des approches linéarisées monteraient que le soliton ne pouvait pas exister. L'interprétation théorique de cette observation a cependant dû attendre l'année 1895 avec les travaux de Korteweg et de Vries [2] qui ont proposé l'équation qui maintenant porte leur nom (abrégée souvent en équation K-dV). L'étude de l'équation Kd-V a permis de comprendre les idées fondamentales de la notion de soliton. En 1965, Gardner et Morikawa [3] ont montré que l'équation K-dV est également valable pour l'étude des ondes magnéto-hydrodynamiques non linéaires se propageant perpendiculairement à un champ magnétique externe. Depuis, les ondes acoustiques solitaires non linéaires ont été intensément étudiées dans le domaine de la physique des plasmas. La prédiction théorique de Washimi et Taniuti [4] sur la possibilité d'existence de l'onde acoustique ionique solitaire a été confirmée expérimentalement par Ikezi, Taylor et Baker [5, 6].

L'étude des oscillations solitaires en physique des plasmas revêt une importance primordiale car elle nous permet de comprendre la nature de l'interaction non linéaire entre les différents champs, propres et/ou appliqués, et les constituants du plasma. Dans le cas où la vitesse des particules est beaucoup plus petite que celle de la lumière, l'onde solitaire présente un comportement classique. Cependant, dans le cas où la vitesse des particules se rapproche de celle de la lumière, le caractère relativiste devient prépondérant et de nouveaux effets se manifestent. Les plasmas relativistes sont généralement classés en deux catégories : ceux dont les effets relativistes sont induits par la vitesse fluide (la vitesse des particules constituant le fluide est comparable à celle de la lumière) et ceux dont les effets relativistes sont induits par la température (l'énergie thermique des particules est de l'ordre de leur énergie de masse ou au repos). Les plasmas relativistes sont présents dans une variété d'environnements spatiaux et de laboratoire (couche limite de la magnétosphère terrestre [7], interaction laser-plasma [8], ceintures de radiations de Van Allen [9], ...etc). Le but du présent mémoire consiste à analyser les oscillations non linéaires d'un plasma relativiste. La formulation covariante, plus rigoureuse, des équations hydrodynamiques a été adoptée. Dans une première étape, nous avons analysé les structures non linéaires associées à différents modèles de plasma relativiste. Nous nous sommes intéressés aussi bien au cas de l'amplitude arbitraire (plus ardu) qu'à celui de l'amplitude faiblement non linéaire. Dans une seconde étape, nous avons généralisé, au cas relativiste, le modèle OLM (Orbit-Limited Motion) qui décrit les variations self-consistantes de la charge d'un grain de poussière. Nous avons alors tiré profit de cette généralisation pour ana-

lyser le mode acoustique non linéaire dans un plasma complexe complètement relativiste. Nos résultats révèlent que les effets relativistes peuvent modifier de manière drastique les propriétés intrinsèques de différentes structures non linéaires qui peuvent se propager dans ces plasmas relativistes. Les applications de notre étude sont à rechercher du côté astrophysique, en particulier, dans les jets de particules émanant des sources galactiques, dans les noyaux actifs des galaxies et dans les plasmas d'éruption de la chromosphère solaire.

Ce présent manuscrit est organisé de la façon suivante : le premier chapitre sera dédié au rappel des propriétés des plasmas en général et des éléments théoriques nécessaires à l'étude de la dynamique des plasmas relativistes en particulier. Nous explorerons ainsi les deux approches relativistes habituellement utilisées en physiques des plasmas, à savoir l'approche hydrodynamique et l'approche cinétique.

Le deuxième chapitre sera dédié à l'étude des oscillations non linéaires de faibles et de larges amplitudes dans un plasma relativiste à deux fluides. Le point de départ sera l'ensemble des équations de base de l'hydrodynamique relativiste qui décrit la dynamique d'un plasma relativiste. Dans le but d'étudier les propriétés des ondes solitaires de larges amplitudes, l'analyse du potentiel de Sagdeev sera employée. Après intégration des équations de base de notre modèle dans le repère propre de l'onde solitaire, le pseudo-potentiel sera exprimé en termes de vitesses fluides des espèces de particules contenues dans notre plasma. Ce résultat sera employé pour examiner de près les conditions d'existence d'ondes acoustiques solitaires stationnaires dans un plasma relativiste à deux fluides en tirant profit de quelques propriétés de l'approche de la dynamique des gaz. Nous considérerons ensuite le cas d'un plasma relativiste composé d'ions froids et d'électrons chauds et nous étudierons les propriétés de l'onde acoustique ionique stationnaire qui peut se propager dans un tel plasma. Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons à la dynamique des structures non linéaires localisées de faible amplitudes dans un plasma relativiste composé de deux fluides en dérivant une équation de type  $K-dV$  ( $mK-dV$ ) par la technique de la perturbation reductive.

Le troisième chapitre sera dédié à l'étude des ondes acoustiques ioniques de larges amplitudes dans un plasma relativiste composé d'ions, d'électrons et de positrons. La dynamique d'un tel plasma sera décrite par l'ensemble des équations de l'hydrodynamique relativiste que nous avons déjà employé au premier chapitre. Ce chapitre peut être considéré comme étant une extension du premier chapitre à un plasma relativiste à plusieurs fluides. En s'appuyant sur l'analyse du pseudo-

---

potentiel, les propriétés des ondes acoustiques ioniques de larges amplitudes seront étudiées et les conditions d'existence seront examinées.

Le dernier chapitre sera dédié à l'étude de certaines structures cohérentes (solitons) de large amplitudes, associées à un plasma complexe à charge variable en présence d'ions et d'électrons relativistes. L'accent sera mis en particulier sur l'influence des effets relativistes des électrons et des ions sur les propriétés dynamiques des ondes acoustiques poussiéreuses. Nous établirons d'abord une généralisation des courants de charge ionique et électronique dans le cadre du modèle standard de la sonde électrostatique en régime relativiste. Ensuite, en tirant profit des ces derniers, nous passerons à l'étude des ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma complexe composé d'ions et d'électrons maxwelliens relativistes et d'un faisceau froid de grains de poussière par intégration de la dynamique des grains de poussière et la variation self-consistante de la charge des grains.

Le manuscrit se termine par une conclusion générale, où nous avons présenté un résumé des résultats obtenus et quelques perspectives, ainsi que quelques compléments servant d'annexes pour le présent mémoire.

---

# CHAPITRE

# 1

## PLASMAS RELATIVISTES

### 1.1 Généralités sur les plasmas

Historiquement le terme « plasma <sup>1</sup> » a été introduit en physique en 1928 [10] par le physicien américain Ivring Langmuir pour désigner les gaz ionisés dans les décharges électriques. Un plasma est donc un gaz partiellement ou complètement ionisé, constitué d'une soupe globalement neutre d'électrons, d'ions, de neutres (atomes, molécules). L'état plasma de la matière est très répandu dans la nature : on le rencontre dans les étoiles, dans certaines atmosphères de planètes où l'ionisation est due à des particules très énergétiques dont certaines émanent du soleil (vent solaire), dans l'espace interplanétaire et interstellaire. Plus près de nous, on le rencontre dans les flammes, les explosions et les ondes de choc, mais également dans les arcs électriques et en particulier les éclairs atmosphériques. Les plasmas sont aussi créés de façon artificielle, en laboratoire. Les décharges électriques dans les tubes fluorescents et les plasmas de fusion dans les tokamaks en constituent deux exemples. Par ailleurs, le développement de la physique des plasmas, a permis la découverte de nombreuses applications technologiques telles que les lampes à néon, les télévi-

---

1. L'histoire de l'invention du mot plasma par Ivring Langmuir est décrite par Harlod M. Mott-Smith dans une lettre à Nature [11].

sions à écran plasma, les écrans plasmas, ainsi que tous les composants électroniques nécessitant un traitement de surface par un plasma (dépôt, gravure, implantation).

### 1.1.1 Oscillations, écrantage et longueur de Debye

Nous allons rappeler ici, d'une manière très brève, un certain nombre de concepts fondamentaux à la nature de n'importe quel type de plasma à savoir la fréquence de Langmuir ou fréquence plasma  $\omega_p$  et la longueur de Debye  $\lambda_D$ . Une des plus importantes particularités d'un plasma est sa capacité à maintenir un état de neutralité de la charge au niveau macroscopique. En effet, si, dans un plasma initialement neutre, on produit une perturbation locale sous la forme d'un excès de charge électrique positive ou négative, le développement des champs de charge induit une réponse collective qui va tendre à restaurer cette neutralité. Bien qu'à première vue il pourrait être évident que la force de Coulomb, de portée infinie, due à n'importe quelle particule du plasma sera ressentie par le reste des particules du plasma, ce n'est en fait pas le cas. Debye et Hückel (1923), en cherchant à apporter une amélioration à la théorie de Svante Arrhenius sur la conductivité électrique des électrolytes, étaient les premiers à préciser que le champ dû au déséquilibre de charge est protégé de sorte que son influence soit efficacement limitée dans l'espace. En effet, on peut montrer que le potentiel électrostatique d'une charge électrique test (d'un ion positif à une seule charge par exemple) dans un plasma à une distance  $r$  de cet charge décroît plus rapidement que dans le vide ( $\propto 1/r$ ) de la sorte

$$\phi(r) \propto \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right). \quad (1.1)$$

Ce mécanisme inhérent aux plasmas, dit effet d'écran ou écrantage de Debye, réduit fortement la portée qu'aurait eu le potentiel d'une charge test quelconque du plasma et devient effectif sur une longueur dite « longueur de Debye », définie par la relation

$$\begin{aligned} \lambda_D &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}, \\ &\simeq 7.43 \times 10^3 \sqrt{\frac{T_e(\text{eV})}{n_e}} \text{ (m)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

C'est donc l'échelle spatiale à partir de laquelle nous pourrions considérer le plasma quasi-neutre. Par conséquent, pour que la neutralité macroscopique soit réalisée au sein d'un plasma, il faut que  $L$ , la plus petite dimension définissant le volume occupé par le plasma, soit beaucoup plus grande

que la longueur de Debye, soit

$$L \gg \lambda_D, \quad (1.3)$$

et que le nombre de particules chargées  $N_D$  que comporte une sphère de Debye doit être beaucoup plus grand que 1, soit

$$N_D \equiv n_e \left( \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \right) \gg 1. \quad (1.4)$$

Ainsi, plus il y a de particules dans la sphère de Debye plus important sera le caractère collectif des particules du plasma ( $N_D$  est couramment appelé le paramètre de plasma). L'un des plus importants phénomènes collectifs qui se manifestent dans un plasma sont les oscillations de plasma. Si dans un plasma de dimensions largement supérieures à la longueur de Debye se produit un défaut local de neutralité (résultant, par exemple, d'un mouvement aléatoire des particules), celle-ci sera rétablie du fait du comportement collectif des particules chargées. S'il y a peu ou pas de collisions, ce mouvement de retour vers l'équilibre des charges prendra la forme d'une oscillation pendulaire autour de la position où il y a eu initialement rupture de neutralité. Ce comportement collectif des électrons fait apparaître localement un mouvement oscillatoire de fréquence angulaire [12]

$$\omega_p = \frac{\sqrt{k_B T_e / m_e}}{\lambda_D} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \simeq 56.4 \sqrt{n_e} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (1.5)$$

dite « pulsation plasma électronique » à laquelle est associée la fréquence (propre) électronique  $f_p = \omega_p / 2\pi$ . Lors d'une oscillation dans un plasma avec dissipation, l'inverse de cette pulsation correspond au temps de retour à la neutralité. Cette échelle de temps est donc caractéristique de l'effet collectif des forces coulombiennes. On peut montrer que, dans certaines conditions, les ions effectuent aussi de telles oscillations, avec une pulsation [12]

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i Z^2 e^2}{m_i \epsilon_0}} \simeq 1.32 Z \sqrt{\frac{n_i}{A}} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (1.6)$$

dite « pulsation plasma ionique »,  $Z$  et  $A$  dénotent le nombre de charge et le nombre de masse respectivement. En réalité les oscillations de plasma sont amorties par les phénomènes de collision, entre les différents constituants du plasma, caractérisés par une fréquence,  $\nu_{coll}$ . L'existence des effets collectifs implique, outre les conditions (1.3) et (1.4), la condition suivante

$$\omega_p \gg \nu_{coll}, \quad (1.7)$$

qui permet, en fait, de négliger les collisions dans la description des oscillations de plasma. Les inégalités (1.3), (1.4), et (1.7) constituent donc les trois conditions d'existence d'un plasma ; autrement il s'agirait d'un plasma « non idéal » dans lequel il ne peut y avoir d'effet d'écran. La Table

1.1 dresse les valeurs approximatives des paramètres plasma pour différentes variantes de plasmas artificiels et naturels [12].

|                    | $n_e (m^{-3})$ | $T_e (keV)$ | $w_p (s^{-1})$     | $\lambda_D (m)$    | $N_D$           | $\nu_{ei} (Hz)$    |
|--------------------|----------------|-------------|--------------------|--------------------|-----------------|--------------------|
| Gaz interstellaire | $10^6$         | $10^{-5}$   | $6 \times 10^4$    | 0.7                | $3 \times 10^5$ | $4 \times 10^8$    |
| Vent solaire (1UA) | $10^7$         | $10^{-2}$   | $2 \times 10^5$    | 2                  | $4 \times 10^9$ | $10^{-4}$          |
| Ionosphère         | $10^{12}$      | $10^{-4}$   | $6 \times 10^7$    | $2 \times 10^{-3}$ | $10^4$          | $10^4$             |
| Couronne solaire   | $10^{12}$      | 0.1         | $6 \times 10^7$    | 0.07               | $4 \times 10^8$ | 0.5                |
| Décharge d'arc     | $10^{20}$      | $10^{-3}$   | $6 \times 10^{11}$ | $7 \times 10^{-7}$ | 40              | $10^{10}$          |
| Plasmas de Tokamak | $10^{20}$      | 10          | $6 \times 10^{11}$ | $7 \times 10^{-5}$ | $3 \times 10^7$ | $4 \times 10^4$    |
| FCI                | $10^{28}$      | 10          | $6 \times 10^{15}$ | $7 \times 10^{-9}$ | $4 \times 10^3$ | $4 \times 10^{11}$ |

Table 1.1 – Paramètres de quelques plasmas typiques.

En conclusion, le comportement collectif caractéristique d'un plasma n'est observé que sur une échelle de temps plus longue que la période de plasma ( $2\pi/w_p$ ) et sur une échelle d'espace plus grande que la longueur de Debye ( $\lambda_D$ ).

## 1.1.2 Classification des plasmas

Les divers types de plasmas peuvent être classés selon leur densité et température électronique car ces deux paramètres déterminent en grande partie les propriétés des plasmas. Les plasmas classiques couvrent une très large gamme de densité électronique allant de 1 à plus de  $10^{25} \text{ e}^-/\text{m}^3$  pour des températures électroniques de quelques centièmes d'électrons-volts ( $1 \text{ eV} \equiv 1.6 \times 10^4 \text{ K}$ ) à plus de 1 MeV ( $1.6 \times 10^{10} \text{ K}$ ). Le diagramme de la figure ci-dessous récapitule les différents plasmas selon leur densité électronique (en  $\text{cm}^{-3}$ ) et leur température (en eV) dans une échelle logarithmique.

Nous distinguons également les plasmas relativistes dans lesquels l'énergie d'agitation thermique est de l'ordre de l'énergie de masse ou de repos des électrons (c'est-à-dire  $T \geq m_e c^2$ ). En général, ce sont les électrons qui ont une température élevée (de l'ordre de quelques MeV), alors que les ions et les neutres restent à des températures relativement basses.  $T = m_e c^2$  (soit  $T \sim 10^{10} \text{ K}$ ) représente la limite du domaine d'application de la mécanique classique non-relativiste. Une autre frontière s'impose entre le cas classique et le cas quantique (dégénéré). En effet, si dans un plasma,

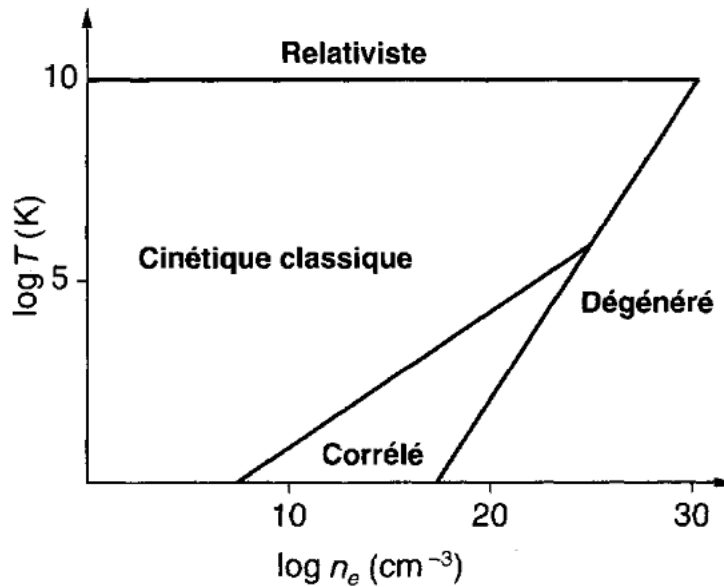


Figure 1.1 – Diagramme de classification des plasmas [13].

l'énergie d'agitation thermique est supérieure à l'énergie de Fermi d'un gaz dégénéré, c'est-à-dire

$$k_B T \geq \epsilon_F \equiv \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3}, \quad (1.8)$$

celui-ci est de nature quantique, autrement il est de nature classique. Dans les plasmas classiques, on distingue deux catégories de plasma selon que les effets d'interactions entre particules dominent ou pas. On exprime ceci avec le paramètre de couplage  $g = 1/N_D$ . Si  $g$  est plus petit que 1 ( $g \ll 1$ ), alors le plasma est cinétique, c'est à dire dominé par les effets cinétiques des particules le composant. Dans le cas contraire ( $g \geq 1$ ), le plasma est corrélé ou fortement couplé dont la structure est fluide.

## 1.2 Plasmas relativistes

Les plasmas relativistes sont des plasmas pour lesquels les corrections relativistes de la masse et de la vitesse des particules qui le composent sont importantes. En effet, plus la température augmente dans un plasma, plus grandes seraient les écarts entre les vitesses des particules qui le composent et plus importants seraient les effets relativistes. Ces derniers deviennent généralement dominants lorsque les écarts de vitesse entre les particules atteignent de grandes valeurs supérieures à  $0.85c$  ( $\gamma > 2$ ). En général, ce sont les électrons, dont les mouvements désordonnés (mouvements d'agitation thermique) sont les plus rapides, qui produisent les effets relativistes.

Les plasmas relativistes sont présents dans différentes parties de notre univers, à savoir, les étoiles jeunes, les noyaux actifs de galaxies (AGN), les étoiles à neutrons et les étoiles de la séquence principale. Dans les plasmas de l'environnement terrestre, les effets relativistes sont en général assez faibles. Il existe cependant des cas où ceux-ci ne peuvent être négligés.

### 1.3 Descriptions mathématiques d'un plasma relativiste

Pour décrire la dynamique d'un plasma relativiste, nous pouvons soit adapté l'approche hydrodynamique qui considère le plasma comme étant un fluide relativiste non-visqueux caractérisé par un certain nombre de grandeurs macroscopiques telles que la densité, la vitesse du fluide, la pression, ...etc, soit, pour une description plus fine, adapté l'approche cinétique qui tient compte de la nature moléculaire du fluide, en introduisant des grandeurs telles que les fonctions de distribution des vitesses qui donnent une description microscopique classique du fluide. Dans ce qui suit, nous définirons les quantités qui interviennent dans les deux approches et nous établirons les relations qui existent entre la description microscopique et la description macroscopique.

#### 1.3.1 Description hydrodynamique d'un plasma relativiste

Dans ce type de description, on suit le mouvement de petits éléments de volume de plasma, sans tenir compte des phénomènes microscopiques qui s'y déroulent. Cela suppose que ce volume est suffisamment petit pour que la description spatiale soit précise, et que celui-ci contient suffisamment de particules pour que les fluctuations par rapport aux valeurs moyennes y soient négligeables. Ainsi, le plasma sera considéré comme un fluide dont l'évolution est décrite par les équations d'hydrodynamique relativiste. Celles-ci expriment la conservation de l'énergie et l'impulsion du fluide, à l'aide du tenseur d'énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$  [14, 15], tel que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

L'expression de ce tenseur dans le cas d'un fluide non-visqueux et dans le référentiel propre du fluide est

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p & & 0 \\ & p & \\ & & p \\ 0 & & e \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

où  $p$  et  $e$  représentent la pression hydrostatique et la densité d'énergie respectivement. Dans un référentiel quelconque, l'expression de  $T^{\mu\nu}$  devient

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + \left(\frac{p+e}{c^2}\right) U^\mu U^\nu. \quad (1.11)$$

Nous imposons également la conservation du nombre de particules dans le plasma, en introduisant le 4-vecteur flux de particules  $N^\mu = nU^\mu$ ,

$$\partial_\mu N^\mu = 0. \quad (1.12)$$

Nous établissons dans l'annexe **A** les équations de l'hydrodynamique relativiste. Nous pouvons les exprimer en fonction de la densité d'énergie et de la pression ou bien de la densité d'entropie et de la température. Nous obtenons les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_j(p, e)}{\partial t} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \sigma_j(p, e) = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \gamma_j n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma_j n_j \mathbf{u}_j) = 0, \quad (1.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla_j\right) \left(\frac{p_j + e_j}{n_j c^2} \gamma_j \mathbf{u}_j\right) + \frac{1}{n_j \gamma_j} \nabla p_j = q_j \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{u}_j \times \mathbf{B})\right), \quad (1.15)$$

où  $j$  dénote l'espèce de particules considérée,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\sigma$ ,  $n$  et  $\gamma$  représentent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, la densité d'entropie, la densité de particules propre et le facteur de Lorentz. Nous avons donc trois équations à notre disposition : la première est l'équation d'énergie qui traduit le fait que le milieu est conservatif. La seconde est l'équation de continuité qui traduit la conservation du nombre de particules en régime relativiste. La dernière est l'analogue relativiste de l'équation d'Euler qui rend compte de l'ensemble de forces externes auxquelles est assujettie le fluide. Or, les inconnues sont au nombre de six :  $e$ ,  $p$  (ou bien  $T$ ,  $\sigma$ ),  $n$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Dans le but d'avoir autant d'équations que d'inconnues, nous complétons le système précédant en rajoutant trois équations supplémentaires : l'équation d'état reliant la pression, la densité d'énergie et la densité propre

$$e_j = m_j n_j c^2 + \frac{\alpha}{\alpha - 1} p_j, \quad (1.16)$$

où  $\alpha$  est la constante adiabatique et  $m$  la masse au repos de l'espèce considérée, et deux équations de Maxwell, décrivant l'évolution spatio-temporelle des champs électrique et magnétique, qui peuvent être rassemblées, en notation quadri-dimensionnelle, dans une seule équation de la sorte

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j N_j^\mu, \quad (1.17)$$

où  $F^{\mu\nu}$  est le tenseur électromagnétique. En fin, pour résoudre complètement le problème, nous devons imposer des conditions initiales adéquates.

### 1.3.2 Description cinétique d'un plasma relativiste

La description hydrodynamique d'un plasma fait intervenir des grandeurs macroscopiques telles la température, la pression, ...etc. Ces grandeurs sont des moyennes calculées à partir d'une fonction de distribution  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  des vitesses microscopiques des particules. Cette dernière s'obtient dans le cadre de la théorie cinétique des gaz et permet d'établir un rapport entre les propriétés macroscopiques et microscopiques.

#### Fonction de distribution et grandeurs hydrodynamiques

La fonction de distribution simple des vitesses nous permet de calculer, pour chaque position  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$ , la valeur moyenne de certaines propriétés moléculaires (aussi appelées corpusculaires ou microscopiques). Il en résulte ce qu'on appelle les grandeurs hydrodynamiques ou macroscopiques. Dans ce qui suit, nous allons présenter certaines des quantités macroscopiques élémentaires et leurs définitions dans le cadre de la théorie cinétique des gaz [16] :

(a) Le 4-vecteur densité de courant ou flux de particules :

$$N^\mu(x) = N^\mu(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} p^\mu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (1.18)$$

(b) Le tenseur énergie-impulsion :

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = m c^2 \int_{\mathbb{R}^3} p^\mu p^\nu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (1.19)$$

(c) Le 4-vecteur entropie :

$$S^\mu(x) = S^\mu(t, \mathbf{x}) = -k_B \int_{\mathbb{R}^3} p^\mu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \ln \left( \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\chi} \right) \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (1.20)$$

(d) La densité de particules :

$$n = \sqrt{N^\mu N_\mu}, \quad (1.21)$$

(e) Le 4-vecteur vitesse adimensionnel :

$$U^\mu = \frac{1}{n} N^\mu, \quad (1.22)$$

(f) La pression et la température :

$$p = \frac{1}{3} (U_\mu U_\nu - \eta_{\mu\nu}) T^{\mu\nu} = k_B n T. \quad (1.23)$$

où  $k_B = 1.38062 \times 10^{-23}$  J/K est la constante de Boltzmann,  $\chi = (mc/\hbar)^3$  avec  $\hbar = 1.05459 \times 10^{-34}$  Js est la constante de Planck,  $\eta^{\mu\nu}$  est le tenseur métrique

$$\eta_{00} = \eta^{00} = -1, \quad \eta_{ii} = \eta^{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu), \quad (1.24)$$

et  $p^0$  est la partie temporelle du 4-vecteur impulsion  $p^\mu \equiv (p^0, \mathbf{p}) = (\gamma m c, \gamma m \mathbf{v})$ .

### Équation de Vlasov relativiste

La fonction de distribution relativiste  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0$  est définie comme la densité de particules dans l'espace de phase à six dimensions. Le nombre de particules doit être conservé, ce qui impose l'équation de continuité dans l'espace de phase [17] suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\dot{\mathbf{x}} f) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\dot{\mathbf{p}} f) = 0. \quad (1.25)$$

Pour un gaz de particules de masse au repos  $m$  et de charge électrique  $q$  dont le mouvement relativiste est décrit par les équations suivantes

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}}, \quad (1.26)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}} \right). \quad (1.27)$$

Ces équations donnent  $\dot{\mathbf{x}}$  et  $\dot{\mathbf{v}}$  en fonction de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{v}$ . En utilisant ces deux dernières équations, nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (1.28)$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (1.29)$$

où les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  obéissent aux équations complètes de Maxwell

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} N^\mu, \quad (1.30)$$

$$\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0, \quad (1.31)$$

où  $F^{\mu\nu}$  est le tenseur électromagnétique et  $N^\nu$  est 4-vecteur densité de courant. Le courant et la densité sont donnés, dans un référentiel arbitraire, par

$$N^i = q \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v^i}{\sqrt{1+v^2}} f d^3v, \quad n = \int_{\mathbb{R}^3} f d^3v. \quad (1.32)$$

L'équation de Vlasov relativiste (1.29) permet de retrouver les lois de conservation du nombre de particules et du tenseur énergie-impulsion sous leur forme différentielle

$$\frac{\partial N^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.33)$$

### Distribution de Maxwell-Jüttner

Jüttner a étendu la distribution des vitesses classique de Maxwell-Boltzmann pour un gaz en équilibre thermodynamique au cas relativiste [18, 19]. L'analogue relativiste de la distribution classique ainsi obtenue  $f_{MJ}(n, T, p)$  dépend de cinq paramètres, qui décrivent complètement l'état du gaz à l'équilibre, à savoir, la densité propre de particules  $n$ , la température absolue  $T$  et la partie spatiale du 4-vecteur impulsion  $p = \gamma m v$  [20, 21] :

$$f_{MJ}(n, T, p) = \frac{n}{4\pi\varepsilon K_2(\varepsilon^{-1})} e^{-\varepsilon^{-1} \sqrt{1+p^2/m^2c^2}} \quad (1.34)$$

où  $\varepsilon = k_B T/mc^2$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  est le facteur relativiste de Lorentz, et  $K_2$  est la fonction de Bessel de seconde espèce. Les détails de la normalisation de la fonction de distribution de Maxwell-Jüttner sont récapitulés dans l'annexe C.

## CHAPITRE

# 2

## OSCILLATIONS NON LINÉAIRES DANS UN PLASMA RELATIVISTE À DEUX FLUIDES

### 2.1 Présentation physique du problème

L'analyse de l'existence des ondes solitaires électrostatiques dans des plasmas relativistes à deux composantes a suscité un grand intérêt durant ces dernières années et a fait l'objet de nombreuses études [22]-[31]. En effet, depuis le travail original de Das et Paul [22] sur l'existence de modes acoustiques ioniques de faibles amplitudes dans un plasma faiblement relativiste composé d'électrons chauds sans masses et d'ions froids, des sujets semblables dans des plasmas relativistes à plusieurs composantes ont été étudiés par beaucoup d'auteurs. Par exemple, les effets de la température des ions et de l'inertie des électrons sur les ondes solitaires acoustiques ioniques ont été étudiés dans le cas de l'amplitude faiblement non linéaire, en dérivant des équations de type K-dV, et également dans le cas de large amplitude, en employant l'analyse du potentiel de Sagdeev ou l'approche de la dynamique des gaz. Des méthodes similaires ont été employées pour des plasmas relativistes à plusieurs composantes, en présence d'électrons chauds et non thermiques et ont prédit l'existence d'ondes solitaires acoustiques électroniques. Cependant, dans la plupart de ces études, les auteurs utilisent des modèles mathématiques dans lesquels les effets relativistes ne

sont que partiellement considérés. En effet, dans ces études antérieures les effets relativistes sont habituellement pris en compte en substituant, dans l'équation d'Euler, la quantité de mouvement classique d'une particule fluide  $m\mathbf{u}$  par son analogue relativiste  $\gamma m\mathbf{u}$ , où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}$  est le facteur de Lorentz. L'analogie relativiste de l'équation du mouvement ainsi obtenue est généralement différente de celle dérivée directement de la formulation covariante, qui exprime la conservation du tenseur d'énergie-impulsion et du nombre de particules et qui est indépendante de la vitesse et de la température de l'élément fluide. En outre, les calculs analytiques dans ces études sont généralement effectués dans la limite faiblement relativiste où  $\gamma$  est remplacé par  $1 + \mathbf{u}^2/2c^2$ . L'approximation faiblement relativiste elle-même est un outil commode et peut être raffinée, plus exactement, en incluant dans l'expression de  $\gamma$  les ordres supérieurs, par exemple en prenant  $\gamma \simeq 1 + \mathbf{u}^2/2c^2 + 3\mathbf{u}^4/8c^4$ . Cependant, les approximations dans la plupart des ces études sont plutôt appliquées partiellement et d'une manière incohérente, vu qu'elles tiennent compte des effets relativistes uniquement dans l'équation du mouvement. À l'exception de quelques travaux, ces études ignorent complètement la relativité dans l'équation de continuité (ce qui est équivalent à prendre  $\gamma = 1$ ). Cette analyse contradictoire mènerait inévitablement à des résultats erronés et incorrects même dans la limite faiblement relativiste. La même contradiction se produit également pour l'équation de Poisson, dans laquelle la densité de charge contractée devrait être employée. Ainsi, une analyse basée sur un système d'équations complet dans lequel les effets relativistes sont pris en compte d'une manière cohérente est nécessaire. Dans une étude récente, Lie et Choi [32, 33] ont employé un ensemble d'équations d'hydrodynamique complètement relativiste pour étudier l'existence des ondes acoustiques ioniques dans un plasma complètement relativiste à deux fluides, composé d'électrons et d'ions, en s'appuyant sur l'analyse du potentiel de Sagdeev. Dans la théorie de Sagdeev, employée dans la référence [32] et aussi bien dans d'autres études [26]-[31], il est indispensable, pour une investigation analytique complète, de connaître la forme explicite du pseudo-potentiel en fonction du potentiel électrostatique. Cependant, en raison de la complexité mathématique des expressions impliquées dans l'analyse et c'est généralement le cas, des hypothèses restrictives devraient être imposées. Récemment, une approche alternative, pour analyser l'existence des ondes électrostatique solitaires de larges amplitudes, a été développée dans le cadre de la théorie de la dynamique des gaz [34]-[37]. Cette nouvelle approche est fondamentalement équivalente à l'analyse du potentiel de Sagdeev, mais au lieu de chercher une forme explicite du pseudo-potentiel en fonction du potentiel électrostatique en in-

tégrant les équations de base du modèle, elle s'appuie sur les lois de conservation obtenues à partir des intégrales premières des équations de base pour élucider les contraintes qui limitent l'existence d'ondes solitaires.

L'organisation de ce chapitre est comme suit : dans la première partie, nous présenterons l'ensemble des équations de base de l'hydrodynamique relativiste qui décrit la dynamique de notre plasma complètement relativiste, composé de deux fluides de particules de charge positive  $q_+$  et de charge négative  $q_-$ . Puis, nous utiliserons cet ensemble d'équations afin d'obtenir les intégrales premières de l'énergie et de l'impulsion pour chaque espèce de particules contenues dans notre plasma. Celles-ci seront employées afin d'exprimer le pseudo-potentiel en termes des vitesses fluides de chaque espèce. Ensuite, en tirant profit de quelques propriétés de l'approche de la dynamique, des conditions d'existence de solitons seront obtenues et ceci sans avoir recours à la dépendance explicite du pseudo-potentiel du potentiel électrostatique. En fin, nous étudierons les propriétés de l'onde acoustique ionique dans le cas d'un plasma relativiste composé d'ions froids et d'électrons chauds. Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons à la dynamique des structures non linéaires localisées de faible amplitude dans un plasma relativiste composé de deux fluides en dérivant une équation de type Korteweg-de Vries modifiée par la technique de la perturbation reductive.

## 2.2 Équations de base et formulation

Considérons un plasma relativiste composé de deux fluides de particules de charge positive  $q_+ = +Ze$  et de charge négative  $q_- = -Ze$ ,  $Z$  étant le nombre de charges et dont le mouvement à une dimension, s'effectue suivant la direction des  $x$ . Par conséquent, tous les paramètres du plasma, à savoir la densité, la pression, ...etc devraient changer uniquement le long de cette dernière. Nous supposons également que le plasma est exempt du champ magnétique et que le seul champ qui subsiste est le champ électrostatique. La dynamique d'un tel système est décrite par l'ensemble des équations de l'hydrodynamique relativiste suivant

$$\frac{\partial \gamma n}{\partial t} + \frac{\partial \gamma n u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial h \gamma u}{\partial t} + u \frac{\partial h \gamma u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\gamma n} \frac{\partial p}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) = 0, \quad (2.3)$$

où  $h$  est l'enthalpie par particule donnée par

$$h = mc^2 + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{p}{n}, \quad (2.4)$$

$n$  est la densité propre de particules,  $m$  la masse au repos,  $u$  la vitesse du fluide,  $p$  la pression,  $\alpha$  l'indice polytropique qui est égale à  $4/3$  pour un fluide ultra-relativiste et à  $5/3$  dans la limite classique,  $q$  la charge électrique,  $\gamma$  est le facteur de Lorentz

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (2.5)$$

et  $\phi$  est le potentiel électrostatique qui devrait satisfaire l'équation de Poisson relativiste

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi \sum_{j=\pm} q_j \gamma_j n_j, \quad (2.6)$$

où la sommation porte sur toutes les espèces de particule contenues dans le plasma. Il convient de noter que les équations (2.1)-(2.5) sont valables pour chaque espèce contenue dans notre modèle de plasma. Toutefois, par souci de simplification de notation, l'indice «  $j$  » sera omis. Notons aussi que l'équation (2.4) est obtenue en supposant une équation d'état relativiste de la forme

$$e = nmc^2 + \frac{p}{\alpha - 1}, \quad (2.7)$$

où  $e$  représente la densité d'énergie interne du plasma. Supposons maintenant qu'une onde électrostatique puisse se propager avec une vitesse  $-u_0$  dans le référentiel propre du plasma, c.-à-d. le référentiel où le plasma est au repos à  $x = -\infty$ . Nous cherchons une solution stationnaire localisée des équations (2.1) – (2.3) et (2.6) dans le repère propre de l'onde. Ainsi, nous allons avoir

$$\frac{\partial \gamma \beta}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

$$\beta \frac{\partial h \gamma \beta}{\partial x} + \frac{1}{\gamma n} \frac{\partial p}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$\beta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) = 0, \quad (2.10)$$

où  $\beta$  est la vitesse du fluide normalisée par rapport à la vitesse de la lumière, c.-à-d.  $\beta = u/c$ . En utilisant les équations (2.8) et (2.10), après quelques substitutions et réarrangements, l'équation (2.9) peut être réécrite de la sorte

$$\frac{\partial}{\partial x} (h\gamma + q\phi) = 0. \quad (2.11)$$

Ainsi, les équations (2.8), (2.10), et (2.11) peuvent être intégrées pour donner respectivement

$$n\gamma\beta = n_0\gamma_0\beta_0, \quad (2.12)$$

$$\frac{p}{n^\alpha} = \frac{p_0}{n_0^\alpha}, \quad (2.13)$$

$$\phi = -\frac{m}{q}\epsilon, \quad (2.14)$$

où l'expression de  $\epsilon$  est donnée par

$$\epsilon \equiv \gamma c^2 \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{p}{nm c^2} \right) - \gamma_0 c^2 \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{p_0}{n_0 m c^2} \right), \quad (2.15)$$

l'indice « 0 » se réfère aux valeurs des paramètres du plasma au point initial, tandis que  $\phi$  est supposé égal zéro à  $x = -\infty$ . Notons que  $m\epsilon$  représente la variation de l'énergie des particules du fluide à partir du point initial. Par conséquent, l'équation (2.14), valable pour chaque espèce de particules présente dans notre plasma, assure la conservation de l'énergie totale de chaque espèce. Nous pouvons formellement résoudre les équations (2.12) et (2.14) et exprimer  $\beta$  et  $n$  en termes de  $\phi$ , de sorte que le second membre de l'équation (2.6) puisse être exprimé en termes de  $\phi$ . Ainsi, l'équation (2.6) peut être réécrite sous cette forme

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \quad (2.16)$$

où le potentiel de Sagdeev  $V(\phi)$  est donné par

$$V(\phi) = 4\pi \sum_{j=\pm} q_j \int \gamma_j n_j d\phi. \quad (2.17)$$

## 2.3 Analyse du pseudo-potentiel

Dans cette section, nous allons chercher à établir une expression analytique du potentiel de Sagdeev en effectuant l'intégration par rapport à  $\phi$  du produit  $\gamma_j n_j$  figurant au second membre de l'équation (2.15). Pour en arriver, nous allons introduire une nouvelle variable définie par

$$\mu \equiv \gamma\beta = \beta / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (2.18)$$

qui peut être vue comme étant l'analogie relativiste de la vitesse classique de la particule fluide, puisque  $m\mu c$  représente la quantité de mouvement relativiste de celle-ci. En utilisant les équations (2.12) et (2.13), nous pouvons réécrire l'expression de  $\epsilon$ , donnée par l'équation (2.15), de

cette manière

$$\epsilon \equiv \sqrt{\mu^2 + 1} \left[ c^2 + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\alpha - 1} \right] - \sqrt{\mu_0^2 + 1} \left[ c^2 + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} \right] = -\frac{q}{m} \phi, \quad (2.19)$$

où  $c_{s0}$  est la vitesse du son classique à l'infini,

$$c_{s0} \equiv \sqrt{\frac{\alpha p_0}{m n_0}}. \quad (2.20)$$

La vitesse du son dans un milieu correspond à la vitesse de propagation d'une onde de pression.

Elle est définie localement comme suit

$$c_s^2 \equiv \frac{1}{m} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{\sigma=\text{cte}}, \quad (2.21)$$

où la dérivée est effectuée le long d'une ligne adiabatique. Cette dernière est reliée à  $c_{s0}$  via la relation suivante

$$c_s^2 = \frac{\alpha p}{m n} = c_{s0}^2 \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\alpha - 1}. \quad (2.22)$$

En utilisant les équations (2.12) et (2.14), l'intégrale dans l'équation (2.17) peut être mise sous la forme suivante

$$\int \gamma_j n_j d\phi = -\frac{m_j}{q_j} \gamma_0 n_0 \beta_0 \int \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \beta_j} d\beta_j. \quad (2.23)$$

En dérivant l'expression de  $\epsilon$ , donnée par l'équation (2.19), par rapport à  $\beta$ , substituant le résultat dans l'équation précédente, intégrant par rapport à  $\beta$  et en tenant compte de la quasi-neutralité de la charge et du courant de charge à l'état initial, nous obtenons l'expression du pseudo-potentiel  $V(\phi)$  qui peut être écrite comme suit

$$V(\phi) = -4\pi n_0 \gamma_0 \sum_{j=\pm} m_j \Pi_j, \quad (2.24)$$

où

$$\Pi_j \equiv \beta_0 \left[ \mu c^2 + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right)^\alpha \left( \frac{\mu^2 + \alpha - 1}{\mu_0 + \frac{\alpha - 1}{\alpha \mu_0}} \right) \right] - \beta_0 \left[ \mu_0 c^2 + \frac{c_{s0}^2}{\alpha - 1} \left( \mu_0 + \frac{\alpha - 1}{\alpha \mu_0} \right) \right], \quad (2.25)$$

sachant que la constante d'intégration avait été choisie de telle sorte qu'à  $x = -\infty$ ,  $V = 0$ . L'intégrale première de l'équation (2.16) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 &= -V(\phi), \\ &= 4\pi n_0 \gamma_0 \sum_{j=\pm} m_j \Pi_j. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En principe, moyennant certaines approximations, nous pouvons toujours inverser l'équation (2.19) et exprimer  $\mu$  en fonction de  $\phi$ , puis substituer le résultat dans l'expression du pseudo-potentiel  $V$ . L'équation ainsi obtenue devient formellement analogue à l'équation du mouvement d'une particule chargée soumise à un champ de forces créé par un potentiel  $V(\phi)$ , où les rôles du temps et de la position sont jouées par  $x$  et  $\phi$  respectivement. L'analyse basée sur cette analogie est connue comme l'analyse du pseudo-potentiel ou de potentiel de Sagdeev.

## 2.4 Conditions d'existence de solitons

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'inversion de l'équation (2.19) établie en se basant sur l'analyse du potentiel de Sagdeev s'avère en général une tâche très ardue à mesure qu'elle implique des puissances en fraction. Récemment, McKenzie, en utilisant les propriétés fonctionnelles des équations (2.19) et (2.25), a développé une approche alternative dans le cadre de la dynamique des gaz afin d'étudier l'existence d'ondes solitaires dans un plasma non-relativiste à deux composantes [34]. En principe cette approche est analogue à celle que nous venons d'utiliser, mais au lieu de chercher à inverser l'équation (2.19) et exprimer  $\mu$  en fonction de  $\phi$ , puis le substituer dans l'équation (2.25), elle s'appuie sur ces deux dernières équations pour élucider les contraintes qui limitent l'existence d'ondes solitaire dans un tel plasma. Dans ce qui suit, nous allons tirer profit de certaines propriétés de cette approche afin d'examiner de près les conditions d'existence d'une solution en onde solitaire dans un plasma complètement relativiste à deux composantes. Celles-ci peuvent alors être énoncées comme suit :

- (a)  $V(0) = 0$ ;
- (b)  $\partial V(0)/\partial \phi = 0$ ;
- (c)  $\partial^2 V(0)/\partial \phi^2 < 0$ ;
- (d) il existe  $\phi = \phi_{eq}$  tel que  $V(\phi_{eq}) = 0$ .

Notons que la condition (a) est automatiquement satisfaite du fait des conditions initiales imposées. En comparant maintenant les deux équations (2.6) et (2.16), nous remarquons que  $\partial V/\partial \phi$  est égale à  $4\pi$  multiplié par la densité de charge. Hors la quasi-neutralité de la densité de charge est toujours maintenue dans un plasma à l'infini, ce qui garantit par conséquent la condition (b),  $V'(0) = 0$ . Avant de pouvoir confronter le pseudo-potentiel  $V(\phi)$  au reste des conditions d'existence déjà mentionnées, il nous est nécessaire d'introduire la vitesse du son relativiste définie

dans la théorie de la dynamique des gaz relativistes par [14]

$$c_R^2 \equiv c^2 \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_{\sigma=\text{cte}}, \quad (2.27)$$

où  $e$ ,  $p$ , et  $\sigma$  sont respectivement la densité d'énergie interne, la pression et l'entropie. L'expression de  $c_R$  en fonction de la vitesse du son classique  $c_s$  est donnée par (voir l'annexe **B** pour les détails de la dérivation)

$$c_R^2 = \frac{c^2(\alpha - 1)c_s^2}{c^2(\alpha - 1) + c_s^2}. \quad (2.28)$$

En utilisant cette dernière expression, nous pouvons exprimer  $\partial \epsilon / \partial \mu$  comme suit

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mu} = \beta \left[ c^2 - c_s^2 \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha - 1} \right) \right] \equiv \frac{c_s^2}{\beta} \left( \frac{c^2 \beta^2}{v_R^2} - 1 \right). \quad (2.29)$$

Notons, par analogie au cas classique [34], que le point sonique apparaît lorsque la vitesse d'écoulement de l'espèce considérée est égale à la vitesse relativiste du son. Encore, nous pouvons voir, à partir de l'équation (2.29), que le signe de  $\partial \epsilon / \partial \mu$  à l'infini peut être soit positif ou négatif selon si  $M_0 > 1$  (région supersonique) ou  $M_0 < 1$  (région subsonique) respectivement, où le nombre de Mach relativiste  $M_0$  est donné par

$$M_0^2 = \frac{c^2 \beta_0^2}{v_{R0}^2} \equiv \frac{u_0^2}{v_{R0}^2}. \quad (2.30)$$

La dérivation de l'équation (2.24) par rapport à  $\phi$  nous donne

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = -4\pi n_0 \gamma_0 \sum_{j=\pm} m_j \frac{\partial \Pi_j}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mu_j}{\partial \phi}. \quad (2.31)$$

D'autre part, en partant de l'expression de  $\Pi$ , c.-à-d. l'équation (2.25), nous pouvons aisément monter que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = \frac{\beta_0}{\beta} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mu}. \quad (2.32)$$

En substituant ce dernier résultat dans l'équation (2.31) et en tenant compte des équations (2.12) et (2.14), celle-ci devient

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = -4\pi n_0 \gamma_0 \beta_0 \sum_{j=\pm} m_j \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mu_j}{\partial \phi} = 4\pi n_0 \mu_0 \sum_{j=\pm} \frac{q_j}{\beta_j}. \quad (2.33)$$

En utilisant les équations (2.33) et (2.14), la dérivée seconde de  $V$  par rapport à  $\phi$  s'écrit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 4\pi n_0 \mu_0 \sum_{j=\pm} \frac{q_j^2 \beta_j}{\mu_j^3} \left( m_j \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \mu_j} \right)^{-1}. \quad (2.34)$$

Ainsi, la condition (c) se traduit par

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0} = 4\pi n_0 \frac{\beta_0}{\mu_0^2} \sum_{j=\pm} q_j^2 \left( m_j \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \mu_j} \Big|_{\mu_j=\mu_0} \right)^{-1} < 0. \quad (2.35)$$

Pour des plasmas à deux composantes, cette condition peut être réécrite sous la forme suivante

$$m_+ \left( \frac{\partial \epsilon_+}{\partial \mu_+} \Big|_{\mu_+=\mu_0} \right)^{-1} + m_- \left( \frac{\partial \epsilon_-}{\partial \mu_-} \Big|_{\mu_-=\mu_0} \right)^{-1} < 0, \quad (2.36)$$

où  $m_+$  ( $m_-$ ) représente la masse au repos des particules de charge positive  $q_+$  ( $q_-$ ). Par conséquent, les deux espèces contenues dans notre plasma ne peuvent pas être simultanément supersoniques ( $M_0 > 1$ ) ou subsonique ( $M_0 < 1$ ), autrement la dernière condition ne sera pas satisfaite. Par ailleurs, le théorème de Rolle [38] stipule que la dérivée d'une fonction continue a au moins un zéro entre deux zéros consécutifs de la fonction. Ainsi, si les conditions  $V(0) = 0$  et  $V(\phi_{\text{eq}})$  sont vérifiées, il existerait au moins un point  $\phi = \phi_{\text{cn}}$  entre  $\phi = 0$  et  $\phi = \phi_{\text{eq}}$  tel que  $\partial V(\phi_{\text{cn}})/\partial \phi = 0$ . Puisque  $\partial V/\partial \phi$  est proportionnel à la densité de charge, il existe donc au moins un autre point, mis à part l'infini, où la densité de charge est nulle. Par conséquent, dans le cas d'un plasma à deux composantes, la vitesse fluide de chaque espèce en ce point doit être la même. Ceci signifie que les deux espèces de particules doivent simultanément s'accélérer ou bien se ralentir du moment qu'elles démarrent avec la même vitesse au point initial. Ce qui peut être traduit par la relation suivante

$$\left( \frac{\partial \epsilon_+}{\partial \mu_+} \Big|_{\mu_+=\mu_0} \right) \left( \frac{\partial \epsilon_-}{\partial \mu_-} \Big|_{\mu_-=\mu_0} \right) < 0. \quad (2.37)$$

Alors nous pouvons avoir soit (I)  $M_{+0} > 1$  et  $M_{-0} < 1$  ou bien (II)  $M_{+0} < 1$  et  $M_{-0} > 1$ . Ainsi, en utilisant l'équation (2.37), la condition (c), donnée par l'équation (2.36), devient équivalente à

$$m_+ \frac{\partial \epsilon_+}{\partial \mu_+} \Big|_{\mu_+=\mu_0} + m_- \frac{\partial \epsilon_-}{\partial \mu_-} \Big|_{\mu_-=\mu_0} > 0. \quad (2.38)$$

Dans le cas d'un plasma composé d'électrons et d'ions avec  $T_e \gg T_i$ , la condition du soliton (c), en utilisant l'équation (2.29), sera donnée par

$$c^2 \beta_0^2 > c_{Ri0}^2, \quad v_A^2 < c^2 \beta_0^2 < c_{Re0}^2, \quad (2.39)$$

où  $v_A$ , qui peut être vue comme étant la vitesse acoustique relativiste, est définie comme

$$v_A \equiv (m_i c_{si}^2 + m_e c_{se}^2) / \left( \frac{m_i c_{si}^2}{c_{Ri}^2} + \frac{m_e c_{se}^2}{c_{Re}^2} \right). \quad (2.40)$$

Notons que la condition du soliton donnée par l'équation (2.39) est formellement équivalente à la condition trouvée dans la référence [36] dans le cadre non-relativiste.

Pour qu'une onde solitaire puisse se propager dans un plasma à deux composantes, les conditions discutées ci-dessus doivent être complétées par une autre condition, la condition (d), qui exige la présence d'un point d'équilibre  $\phi_{eq}$  de sorte que  $V(\phi_{eq}) = 0$ . Le point d'équilibre peut être déterminé en cherchant une solution simultanée  $(\mu_+, \mu_-)$  des deux équations suivantes : l'équation hodographe,

$$\sum_{j=\pm} m_j \epsilon_j(\mu_j) = 0, \quad (2.41)$$

et l'équation d'équilibre,

$$\sum_{j=\pm} m_j \Pi_j(\mu_j) = 0. \quad (2.42)$$

La résolution d'un tel système s'avère très difficile compte tenu de la complexité des expressions analytiques de  $\epsilon$  et  $\Pi$ . Cependant, sous certaines hypothèses restrictives, des expressions approximatives des équations (2.19) et (2.25) peuvent être obtenues. Ce qui suit est un exemple où l'inversion de l'équation (2.19) est possible.

## 2.5 Potentiel solitaire pour un plasma relativiste composé d'ions froids et d'électrons chauds

Considérons maintenant le cas d'un plasma composé d'électrons chauds et d'ions froids tels que

$$T_i \approx 0, \quad \text{et} \quad c_{se}^2 \gg c^2(\alpha - 1). \quad (2.43)$$

La vitesse relativiste des ions,  $\mu_i$ , ainsi que celle des électrons,  $\mu_e$ , peuvent être approchées respectivement par

$$\mu_i \approx \mu_0 \sqrt{1 - \frac{2e\phi}{m_i \mu_0^2 c^2}}, \quad (2.44)$$

$$\mu_e \approx \mu_0 \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{e\phi}{k_B T_{e0}} \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (2.45)$$

où  $T_{0e}$  représente la température des électrons à l'infini et  $k_B$  étant la constante de Boltzmann. En substituant ces dernières dans les expressions de  $\Pi_i$  et  $\Pi_e$  données respectivement par

$$\Pi_i \approx \beta_0 c^2 (\mu_i - \mu_0), \quad (2.46)$$

$$\Pi_e \approx \frac{\beta_0 k_B T_{e0}}{\mu_0 m_e} \left[ \left( \frac{\mu_0}{\mu_e} \right)^\alpha - 1 \right], \quad (2.47)$$

nous obtenons, en utilisant l'équation (2.24), l'expression du pseudo-potentiel  $V$  en termes de  $\phi$

$$V(\phi) = -4\pi n_0 m_i c^2 \gamma_0^2 \beta_0^2 \left[ \sqrt{1 - \frac{2e\phi}{m_i c^2 \gamma_0^2 \beta_0^2}} - 1 \right] - 4\pi n_0 k_B T_{0e} \left[ \left( 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{e\phi}{k_B T_{0e}} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} - 1 \right]. \quad (2.48)$$

Il convient d'introduire les paramètres normalisés  $\Phi$ ,  $\varepsilon$ , et  $X$  définis respectivement par les relations suivantes :  $\Phi \equiv e\phi/(m_i c^2)$ ,  $\varepsilon \equiv k_B T_{0e}/m_i c^2$ , et  $X \equiv x/\lambda_D$ , où  $\lambda_D = \sqrt{m_i c^2/4\pi n_0 e^2}$  étant la longueur de Debye. L'équation de Poisson devient

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = -\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \Phi}, \quad (2.49)$$

où

$$V(\Phi) = -\gamma_0^2 \beta_0^2 \left[ \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{\gamma_0^2 \beta_0^2}} - 1 \right] + \varepsilon \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{\Phi}{\varepsilon} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right]. \quad (2.50)$$

Il est aisé de vérifier à partir de l'expression du pseudo-potentiel obtenue que  $V(\Phi)$  et  $dV/d\Phi = 0$  sont nuls en  $\Phi = 0$ . Pour qu'une onde solitaire puisse se propager, le pseudo-potentiel  $V$  doit en sus satisfaire les conditions d'existence suivantes :  $d^2V/d\Phi^2|_{\Phi=0} < 0$  et  $V(\Phi_c) > 0$ , où  $\Phi_c$  est défini comme  $[\Phi_c = \gamma_0^2 \beta_0^2/2]$  de telle sorte que pour une valeur donnée de  $\Phi$  dans l'intervalle  $[0, \Phi_c]$  la racine carrée qui figure dans l'équation (2.50) soit un réel. Ces deux dernières conditions peuvent être données explicitement sous cette forme

$$\gamma_0^2 \beta_0^2 - \alpha \varepsilon > 0, \quad (2.51)$$

$$\gamma_0^2 \beta_0^2 + \varepsilon \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{\Phi_c}{\varepsilon} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] > 0. \quad (2.52)$$

Notons que la condition (2.51) correspond exactement à celle que nous avons dérivée directement de l'analyse des conditions d'existence d'ondes solitaires, c.-à-d. la condition (2.39). En effet, compte tenu des hypothèses (2.43) et en utilisant les équations (2.27) et (2.40), nous allons avoir :  $c_{Ri}^2 \approx c_{si}^2 \approx 0$ ,  $c_{Re}^2 \approx c^2$ , et  $v_{A0}^2 \approx \alpha \varepsilon c^2/(1 + \alpha \varepsilon)$ , de sorte que la substitution de ces dernières dans (2.39) donnera exactement la condition (2.51). Par ailleurs, du fait de la complexité des inégalités (2.51) et (2.52), l'investigation analytique de ces dernières est très difficile à envisager ; c'est la raison pour laquelle nous allons se contenter de faire une étude graphique. Ainsi, la figure (2.7) nous montre la région dans le plan  $(\beta_0, \varepsilon)$  dans laquelle les deux dernières conditions sont satisfaites pour  $\alpha = 4/3$ . La courbe continue représente la limite de la condition (2.51), c.-à-d.,  $d^2V/d\Phi^2|_{\Phi=0} < 0$ , et la courbe discontinue correspond à la limite de la condition (2.52),

c.-à-d.,  $V(\Phi_c) > 0$ . Ainsi, la zone délimitée par les deux courbes représente la région d'existence d'ondes solitaires où les deux conditions sont vérifiées simultanément. Les figures (2.1) et (2.3) indiquent la formation d'une structure acoustique ionique solitaire de compression, dont l'existence est confirmée par le profil en forme de puits du pseudo-potentiel qui leur sont associés (figures (2.2) et (2.4) respectivement) et révèlent que les propriétés de cette onde acoustique ionique solitaire dépendent étroitement du paramètre relativiste  $\varepsilon$ , ainsi que de la vitesse  $\beta_0$  des deux espèces contenues dans le plasma à l'infini. En effet, à mesure que les effets relativistes augmentent, l'amplitude du soliton augmente et sa forme devient de plus en plus cornue, ce qui entraîne en conséquence une diminution de sa largeur. le profil des densités ionique et électronique (figures (2.5) et (2.6) respectivement) montre une accumulation des ions et un appauvrissement électronique dans la région de localisation du soliton.

---

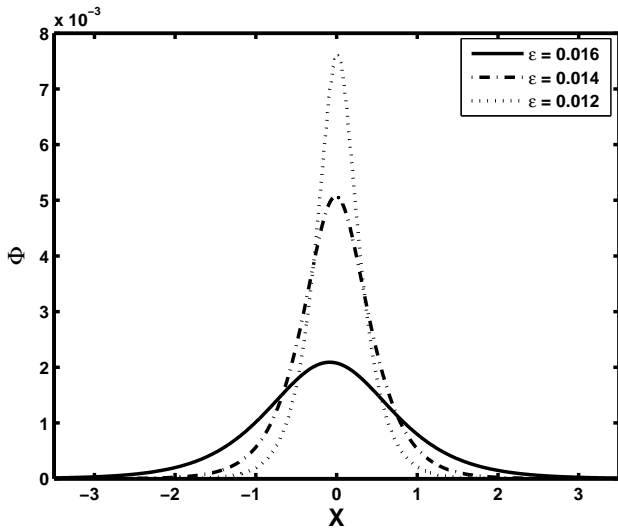


Figure 2.1 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l'onde acoustique pour différentes valeurs du paramètre relativiste  $\varepsilon$ , avec  $\beta_0 = 0.15$  et  $\alpha = 4/3$ .

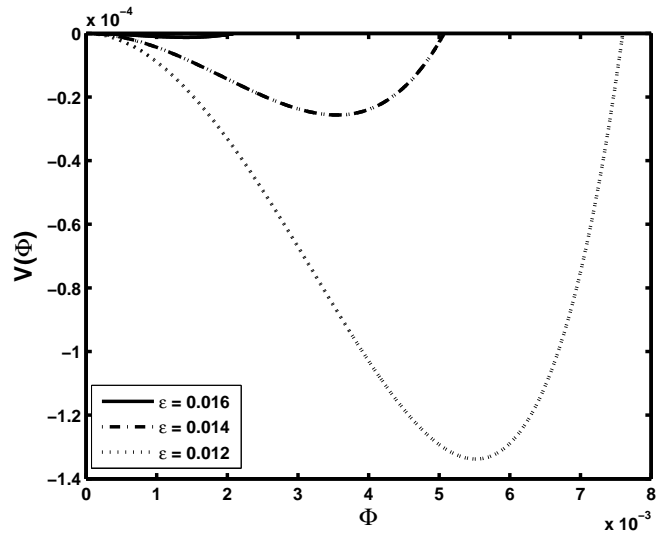


Figure 2.2 – Potentiel de Sagdeev  $V(\Phi)$  associé au soliton de la figure (2.1) pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

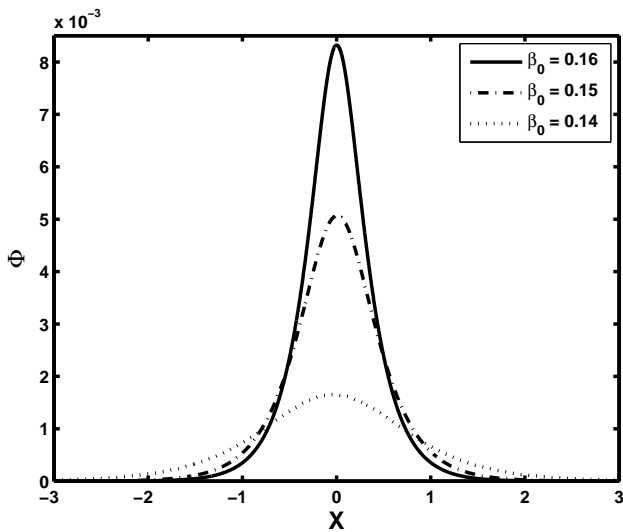


Figure 2.3 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l'onde acoustique pour différentes valeurs de  $\beta_0$ , avec  $\varepsilon = 0.014$  et  $\alpha = 4/3$ .

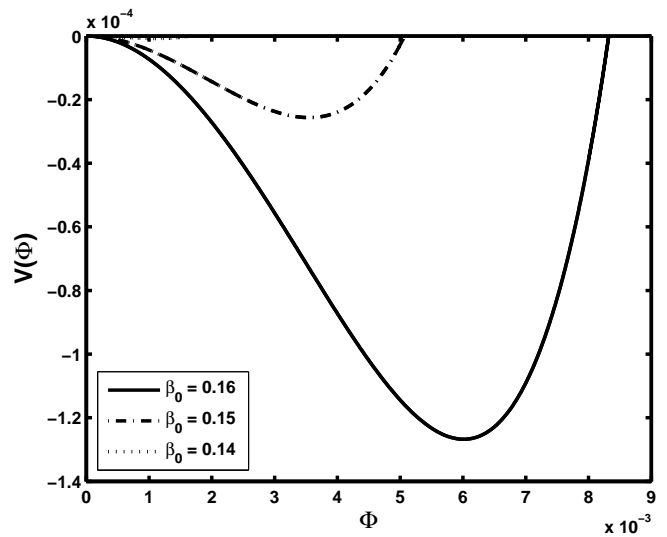


Figure 2.4 – Potentiel de Sagdeev  $V(\Phi)$  associé au soliton de la figure (2.3) pour différentes valeurs de  $\beta_0$ .

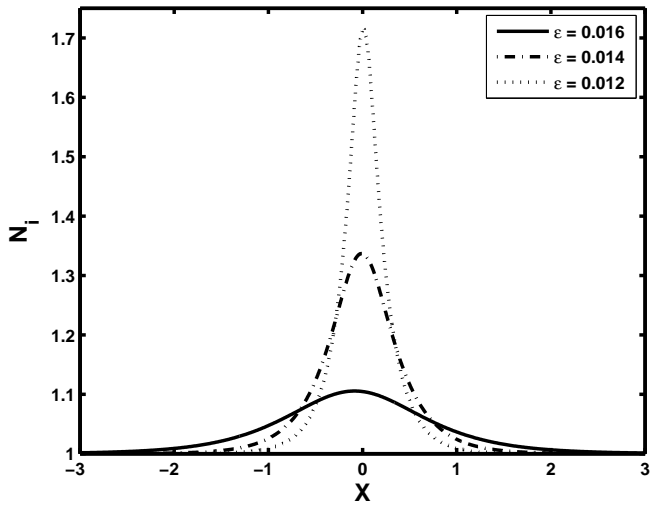


Figure 2.5 – Profil spatial de la densité ionique pour différentes valeurs du paramètre relativiste  $\varepsilon$ , avec  $\beta_0 = 0.15$  et  $\alpha = 4/3$ .

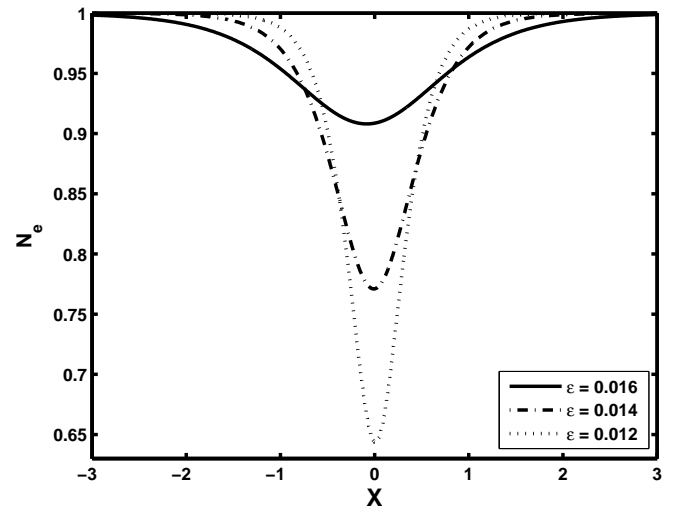


Figure 2.6 – Profil spatial de la densité électronique pour différentes valeurs du paramètre relativiste  $\varepsilon$ , avec  $\beta_0 = 0.15$  et  $\alpha = 4/3$ .

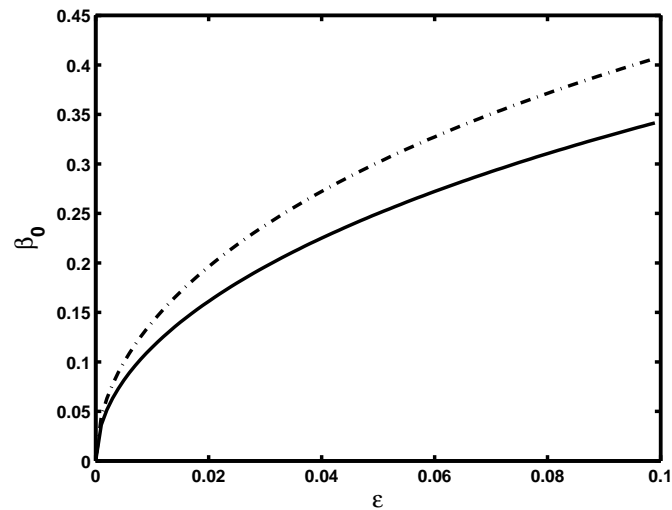


Figure 2.7 – La région d'existence de solitons dans le plan  $(\beta_0, \varepsilon)$  pour  $\alpha = 4/3$ .

## 2.6 Équation de Korteweg-de Vries dans un plasma relativiste à deux fluides

Dans le but d'étudier la dynamique des structures non linéaires localisées de faibles amplitudes dans un plasma relativiste composé de deux fluides de particules de charge positive  $q_+ = +Ze$  et de charge négative  $q_- = -Ze$ ,  $Z$  étant le nombre de charges, nous allons établir à partir des équations (2.1)-(2.3) et (2.6) l'analogue relativiste de l'équation classique de Korteweg-de Vries (K-dV) en utilisant la technique de la perturbation reductive standard via le changement de variables suivant

$$\xi = \epsilon^{1/2}(x - Vt), \quad \tau = \epsilon^{3/2}t, \quad (2.53)$$

où  $\epsilon$  est toujours un paramètre d'expansion infinitésimal mesurant la faiblesse de l'amplitude ou de la dispersion et  $V$  la vitesse de phase de l'onde solitaire dans le référentiel du laboratoire. Dans ce nouveau système de coordonnées, les équations (2.1)-(2.3) et (2.6) deviennent

$$\epsilon \frac{\partial \gamma n}{\partial \tau} - c v \frac{\partial \gamma n}{\partial \xi} + c \frac{\partial \gamma n \beta}{\partial \xi} = 0, \quad (2.54)$$

$$\epsilon \frac{\partial h \gamma \beta}{\partial \tau} + c(\beta - v) \frac{\partial h \gamma \beta}{\partial \xi} + \frac{c}{\gamma n} \frac{\partial p}{\partial \xi} = -q c \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad (2.55)$$

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) + c(\beta - v) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) = 0, \quad (2.56)$$

$$\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = -4\pi \sum_{j=\pm} q_j \gamma_j n_j, \quad (2.57)$$

où  $\beta \equiv u/c$  et  $v \equiv V/c$ . Le développement en série de puissance de  $\epsilon$  des variables  $n$ ,  $\beta$ ,  $p$  et  $\phi$ , autour de leur valeurs d'équilibre, s'écrit

$$\begin{pmatrix} n \\ \beta \\ p \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{(0)} \\ \beta^{(0)} \\ p^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n^{(0)} n^{(1)} \\ \beta^{(0)} \beta^{(1)} \\ p^{(0)} p^{(1)} \\ \phi^{(1)} \end{pmatrix} \epsilon + \begin{pmatrix} n^{(0)} n^{(2)} \\ \beta^{(0)} \beta^{(2)} \\ p^{(0)} p^{(2)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix} \epsilon^2 + \dots \quad (2.58)$$

où l'exposant « (0) » se rapporte à la valeur de la variable à l'état initial (lorsque  $\xi \rightarrow -\infty$ ) et  $\phi^{(0)}$  étant nul. À l'ordre le plus faible en  $\epsilon$ , les équations (2.54)-(2.56) sont triviales (c.-à-d. 0=0) et l'équation (2.57) donne

$$\sum_{j=\pm} q n^{(0)} \gamma^{(0)} = 0, \quad (2.59)$$

où

$$\gamma^{(0)} \equiv 1/\sqrt{1-\beta^{(0)2}}.$$

L'équation (2.59) implique la neutralité de la densité de charge dans le référentiel du laboratoire à l'infini. Il est physiquement raisonnable de supposer la neutralité de la densité de charge propre (la densité de charge dans le repère propre dans lequel  $\beta^{(0)} = 0$ ) à l'infini. Ainsi, en plus de la relation (2.59), nous avons également

$$\sum_{j=\pm} qn^{(0)} = 0, \quad (2.60)$$

qui, dans le cas d'un plasma constitué de deux fluides chargés, se réduit à

$$n_+^{(0)} = n_-^{(0)}, \quad (2.61)$$

où l'indice + (−) indique les particules de charge positive (les particules de charge négative). En tenant compte de cette dernière égalité, l'équation (2.59) nous donne

$$\beta_+^{(0)} = \beta_-^{(0)}. \quad (2.62)$$

Il est remarquable que, pour satisfaire la condition de neutralité de la charge à l'infini, non seulement les densités de particules de chaque espèce devraient être égales, mais également leurs vitesses d'écoulement. Cela est dû au fait que la densité de charge dans le référentiel du laboratoire dépend de la vitesse d'écoulement en raison de la contraction de Lorentz, qui se manifeste par la présence du facteur relativiste  $\gamma$  dans l'équation de Poisson. En outre, notons que la densité du courant à l'infini,  $c \sum_{j=\pm} qn^{(0)}\gamma^{(0)}\beta^{(0)}$ , compte tenu des équations (2.61) et (2.62), est égale à zéro. À l'ordre suivant, nous obtenons le système d'équations suivant

$$\Lambda_{1;\xi} = 0, \quad (2.63)$$

$$(\beta^{(0)} - v)R_{1;\xi} + \frac{p^{(0)}}{\gamma^{(0)}n^{(0)}}p_{;\xi}^{(1)} = -q\phi_{;\xi}^{(1)}, \quad (2.64)$$

$$p_{;\xi}^{(1)} - \alpha n_{;\xi}^{(1)} = 0, \quad (2.65)$$

$$\sum_{j=\pm} qn^{(0)}K_1 = 0. \quad (2.66)$$

où, dans cette nouvelle notation introduite pour des raisons de simplification,  $x_{;y}$  et  $x_{;yy}$  se réfèrent respectivement à  $\partial x/\partial y$  et  $\partial^2 x/\partial y^2$ . Les expressions de  $\gamma^{(1)}$ ,  $K_1$ ,  $\Lambda_1$ ,  $R_1$ ,  $h^{(0)}$  et  $h^{(1)}$  sont respective-

ment données par

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)3} \beta^{(0)} \beta^{(1)}, \quad (2.67)$$

$$K_1 = \gamma^{(0)} n^{(1)} + \gamma^{(1)}, \quad (2.68)$$

$$\Lambda_1 = \gamma^{(0)} \beta^{(1)} + (\beta^{(0)} - \nu) K_1, \quad (2.69)$$

$$R_1 = h^{(0)} \gamma^{(0)3} \beta^{(1)} + h^{(1)} \gamma^{(1)} \beta^{(0)}, \quad (2.70)$$

$$h^{(0)} = mc^2 + \frac{T}{\alpha - 1}, \quad (2.71)$$

$$h^{(1)} = \frac{T}{\alpha - 1} (p^{(1)} - n^{(1)}), \quad (2.72)$$

où la température  $T$  de chaque espèce à l'infini est définie comme suit

$$T \equiv \frac{\alpha p^{(0)}}{n^{(0)}}. \quad (2.73)$$

L'intégration des équations (2.65) et (2.63), en imposant des conditions aux limites appropriées ( $p^{(1)} = n^{(1)} = \beta^{(1)} = 0$  lorsque  $\xi = -\infty$ ), nous donne

$$p^{(1)} = \alpha n^{(1)}, \quad (2.74)$$

$$n^{(1)} = -\frac{\gamma^{(0)2} (1 - \beta^{(0)} \nu)}{\beta^{(0)} - \nu} \beta^{(1)}. \quad (2.75)$$

En utilisant les équations (2.72) – (2.75),  $R_1$  peut être réécrit ainsi

$$R_1 = \gamma^{(0)3} \left[ h^{(0)} - \frac{\beta^{(0)} (\nu \beta^{(0)} - 1) T}{\nu - \beta^{(0)}} \right] \beta^{(1)}. \quad (2.76)$$

En substituant maintenant l'expression de  $R_1$  dans l'équation (2.64), et après intégration par rapport à  $\xi$  avec un choix adéquat des conditions aux limites, nous obtenons

$$\beta^{(1)} = -\frac{q(\beta^{(0)} - \nu)}{\gamma^{(0)3} [h^{(0)} (\beta^{(0)} - \nu)^2 - T(1 - \beta^{(0)} \nu)^2]} \phi^{(1)}. \quad (2.77)$$

En utilisons les équations (2.67) et (2.75), l'équation (2.66) peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{n^{(0)} \gamma^{(0)}}{\beta^{(0)} - \nu} \sum_{j=\pm} q \beta^{(1)} = 0. \quad (2.78)$$

Ainsi, dans le cas d'un plasma à deux composantes, nous avons

$$\beta_+^{(1)} = \beta_-^{(1)}, \quad (2.79)$$

et par conséquent, à partir de l'équation (2.75),

$$n_+^{(1)} = n_-^{(1)}. \quad (2.80)$$

À partir de l'équation (2.67), nous pouvons aisément montrer que

$$\begin{aligned} (\gamma\beta c)^{(1)} &= \gamma^{(0)}\beta^{(1)}c + \gamma^{(1)}\beta^{(0)}c, \\ &= \gamma^{(0)3}\beta^{(1)}c. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ainsi, en utilisant les équations (2.79) et (2.80), nous avons

$$\sum_{j=\pm} q(n\gamma\beta c)^{(1)} = 0. \quad (2.82)$$

Par conséquent, la densité de courant ainsi que la densité de charge sont nulles jusqu'au premier ordre en  $\epsilon$  dans notre modèle de plasma relativiste à deux fluides.

Afin de trouver une expression pour la vitesse de phase de l'onde  $v$  en fonction des paramètres déjà connus, nous utilisons les équations (2.75) et (2.77) dans l'équation (2.66), une relation de dispersion est ainsi obtenue

$$\frac{1}{h_+^{(0)}(\beta^{(0)} - v)^2 - T_+(1 - \beta^{(0)}v)^2} + \frac{1}{h_-^{(0)}(\beta^{(0)} - v)^2 - T_-(1 - \beta^{(0)}v)^2} = 0. \quad (2.83)$$

Pour résoudre cette dernière équation, il convient de définir une nouvelle variable  $s$  via la relation suivante

$$\beta^{(0)} - v = s(1 - \beta^{(0)}v). \quad (2.84)$$

En substituant celle-ci dans l'équation (2.83), nous obtenons une solution de la forme

$$s = \pm \sqrt{\frac{T_+ + T_-}{h_+^{(0)} + h_-^{(0)}}}, \quad (2.85)$$

et par conséquent, en utilisant (2.84), la vitesse de phase de l'onde s'écrit

$$v = \frac{\beta^{(0)} - s}{1 - s\beta^{(0)}}. \quad (2.86)$$

Notons, à partir des équations (2.85) et (2.86), qu'il existe deux modes acoustiques non linéaires de faible amplitudes dans un plasma relativiste à deux fluides correspondant aux deux valeurs de  $s$ .

À l'ordre deux en  $\epsilon$ , nous obtenons le système d'équations suivant

$$K_{1;\tau} + c\Xi_{2;\xi} + c\Lambda_{2;\xi} = 0, \quad (2.87)$$

$$R_{1;\tau} + c\beta^{(1)}R_{1;\xi} + c(\beta^{(0)} - v)R_{2;\xi} - \frac{cT}{\alpha\gamma^{(0)}} \left( \frac{K_1}{\gamma^{(0)}} p_{;\xi}^{(1)} - p_{;\xi}^{(2)} \right) = -qc\phi_{;\xi}^{(2)}, \quad (2.88)$$

$$n^{(1)}p_{;\xi}^{(1)} - \alpha p^{(1)}n_{;\xi}^{(1)} - \alpha n_{;\xi}^{(2)} + p_{;\xi}^{(2)} = 0, \quad (2.89)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\phi_{;\xi\xi}^{(1)} = \sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_2 + \gamma^{(1)}n^{(1)}), \quad (2.90)$$

où  $\Xi_2$ ,  $\gamma^{(2)}$ ,  $K_2$ ,  $\Lambda_2$  et  $R_2$  sont donnés respectivement par

$$\Xi_2 = K_1 \beta^{(1)} + (\beta^{(0)} - \nu) n^{(1)} \gamma^{(1)}, \quad (2.91)$$

$$\gamma^{(2)} = \gamma^{(0)3} \beta^{(0)} \beta^{(2)} + \frac{1}{2} \gamma^{(0)5} (1 + 2\beta^{(0)2}) \beta^{(1)2}, \quad (2.92)$$

$$K_2 = \gamma^{(0)} n^{(2)} + \gamma^{(2)}, \quad (2.93)$$

$$\Lambda_2 = \gamma^{(0)} \beta^{(2)} + (\beta^{(0)} - \nu) K_2, \quad (2.94)$$

et

$$R_2 = h^{(0)} \gamma^{(0)} \beta^{(2)} + (h^{(0)} \gamma^{(1)} + h^{(1)} \gamma^{(0)}) \beta^{(1)} + (h^{(0)} \gamma^{(2)} + h^{(2)} \gamma^{(0)} + h^{(1)} \gamma^{(1)}) \beta^{(0)}, \quad (2.95)$$

avec

$$h^{(2)} = \frac{1}{2} (\alpha - 2) T n^{(1)2} + T n^{(2)}. \quad (2.96)$$

L'intégration directe de l'équation (2.89) par rapport à  $\xi$ , sachant que  $p^{(1)} = \alpha n^{(1)}$ , nous donne

$$p^{(2)} = \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) n^{(1)2} + \alpha n^{(2)}. \quad (2.97)$$

En utilisant maintenant les équations (2.75), (2.86), et (2.91)-(2.97), les équations (2.87) et (2.88) peuvent être intégrées pour donner

$$P + \frac{\gamma^{(0)} c}{1 - s \beta^{(0)}} \beta^{(2)} + \frac{s c}{\gamma^{(0)} (1 - s \beta^{(0)})} n^{(2)} = 0, \quad (2.98)$$

et

$$Q + \frac{s \gamma^{(0)} c h^{(0)}}{1 - s \beta^{(0)}} \beta^{(2)} + \frac{c T}{\gamma^{(0)} (1 - s \beta^{(0)})} n^{(2)} = 0, \quad (2.99)$$

respectivement, où

$$P \equiv -\gamma^{(0)3} \frac{1 - s \beta^{(0)}}{s} \int \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \tau} d\xi + \frac{1}{2} c \gamma^{(0)3} \frac{2s \beta^{(0)} - 2 + s^2}{s(1 - s \beta^{(0)})} \beta^{(1)2},$$

$$Q \equiv -\gamma^{(0)3} \frac{T \beta^{(0)} - h^{(0)} s}{s} \int \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \tau} d\xi + \frac{1}{2} c \gamma^{(0)3} \frac{h^{(0)} s^2 (2s \beta^{(0)2} + 1) + T(\alpha - 2 - 2s^2)}{s^2 (1 - s \beta^{(0)})} \beta^{(1)2} + q c \phi^{(2)}.$$

À partir des équations (2.98)-(2.99),  $\beta^{(2)}$  et  $n^{(2)}$  peuvent être exprimées, respectivement, en fonction de  $\beta^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$  comme suit

$$\beta^{(2)} = \frac{1 - s \beta^{(0)}}{c \gamma^{(0)} (h^{(0)} s^2 - T)} (PT - Qs), \quad (2.100)$$

$$n^{(2)} = \frac{\gamma^{(0)} (1 - s \beta^{(0)})}{c (h^{(0)} s^2 - T)} (Q - s h^{(0)} P). \quad (2.101)$$

Notons qu'à l'ordre deux en  $\epsilon$ , contrairement aux ordres inférieurs,  $\beta^{(2)}$  et  $n^{(2)}$  sont différents et dépendent de l'espèce contenue dans le plasma. En utilisant les équations (2.75), (2.86), et (2.93), la somme qui figure dans l'équation (2.90) peut être réécrite et mise sous la forme suivante

$$\sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_2 + \gamma^{(1)}n^{(1)}) = \sum_{j=\pm} qn^{(0)}(\gamma^{(0)}n^{(2)} + \gamma^{(0)3}\beta^{(0)}\beta^{(2)}) + \frac{1}{2s}(2s\beta^{(0)2} - 2\beta^{(0)} + s)\gamma^{(0)5} \sum_{j=\pm} qn^{(0)}\beta^{(1)2}. \quad (2.102)$$

Étant donné que  $\beta_+^{(1)2} = \beta_-^{(1)2} = \beta^{(1)2}$  et  $n_+^{(0)} = n_-^{(0)} = n^{(0)}$ , nous avons  $\sum_{j=\pm} qn^{(0)}\beta^{(1)2} = 0$ . Ainsi, l'équation (2.90) devient

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = \sum_{j=\pm} qn^{(0)}(\gamma^{(0)}n^{(2)} + \gamma^{(0)3}\beta^{(0)}\beta^{(2)}), \quad (2.103)$$

En substituant les expressions de  $\beta^{(2)}$  et  $n^{(2)}$ , données par les équations (2.100) et (2.101) respectivement, dans l'équation (2.103), nous obtenons

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = \sum_{j=\pm} C_\phi \phi^{(2)} + \sum_{j=\pm} C_\tau \int \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \tau} d\xi + \sum_{j=\pm} C_\beta \beta^{(1)2}, \quad (2.104)$$

où

$$C_\phi \equiv -\frac{\gamma^{(0)2} q^2 n^{(0)} (s\beta^{(0)} - 1)^2}{T - s^2 h^{(0)}}, \quad (2.105)$$

$$C_\tau \equiv -2 \frac{\gamma^{(0)5} q n^{(0)} (s\beta^{(0)} - 1)^2}{cs(T - s^2 h^{(0)})} (s h^{(0)} - T \beta^{(0)}), \quad (2.106)$$

et

$$C_\beta \equiv \frac{qn^{(0)}\gamma^{(0)5}}{2s^2(T - s^2 h^{(0)})} \left[ s^2 h^{(0)} (2s^2 \beta^{(0)2} + s^2 + s\beta^{(0)} - 3) - T(3s^3 \beta^{(0)} - 2s^2 + 2s^2 \beta^{(0)2} - s\alpha\beta^{(0)} + \alpha - 2) \right]. \quad (2.107)$$

La sommation sur toutes les espèces contenues dans le plasma permet de simplifier les termes de sommation de l'équation (2.104). Ainsi, nous avons

$$\sum_{j=\pm} C_\phi = 0, \quad (2.108)$$

$$\sum_{j=\pm} C_\beta = \frac{Zen^{(0)} \gamma^{(0)5} (s\beta^{(0)} - 1) (h_+ + h_-)}{2(T_+ - s^2 h_+)} (-3s^2 + \bar{\alpha} + 1), \quad (2.109)$$

$$\sum_{j=\pm} C_\tau = 2 \frac{Zen^{(0)} \gamma^{(0)5} (s\beta^{(0)} - 1)^3 (h_+ + h_-)}{c(T_+ - s^2 h_+)}, \quad (2.110)$$

où  $\bar{\alpha}$  est définie comme

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\alpha_+ T_+ + \alpha_- T_-}{T_+ + T_-}. \quad (2.111)$$

Notons l'emploi, ci-dessus, de la relation suivante :

$$\frac{1}{T_+ - s^2 h_+} = -\frac{1}{T_- - s^2 h_-} = \frac{h_+ + h_-}{h_- T_+ - h_+ T_-}. \quad (2.112)$$

Celle-ci peut être tirée directement de l'équation (2.85). Finalement, en dérivant les deux membres de l'équation (2.104) par rapport à  $\xi$ , après avoir substitué les sommes données par les équations (2.108)-(2.110) et en utilisant l'équation (2.77), nous obtenons l'équation de type Korteweg-de Vries de la forme [39]

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} + A \frac{\partial \phi^{(1)2}}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0, \quad (2.113)$$

où  $A$  et  $B$  sont donnés par

$$A = -\frac{1}{4} \frac{Z e (T_+ + T_-) (1 + \bar{\alpha} - 3s^2)}{\gamma^{(0)} (m_+ T_- - m_- T_+) (1 - s\beta^{(0)}) c s}, \quad (2.114)$$

$$B = -\frac{1}{8\pi} \frac{c^5 s^5 (m_- T_+ - m_+ T_-)^2}{Z^2 e^2 n^{(0)} \gamma^{(0)4} (1 - s\beta^{(0)})^4 (T_+ + T_-)^3}, \quad (2.115)$$

et dont la solution stationnaire localisée est donnée par

$$\phi^{(1)} = \phi_m^{(1)} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\xi - U\tau}{w} \right), \quad (2.116)$$

où l'amplitude  $\phi_m^{(1)}$  et la largeur  $w$  sont données respectivement par,  $\phi_m^{(1)} = 3U/2A$  et  $w = \sqrt{-4B/U}$ .

Notons que l'équation de Korteweg-de Vries ainsi obtenue est un résultat exact dans le sens qu'aucune approximation autre que la méthode de la perturbation reductive n'est employée dans la dérivation. Une des caractéristiques de l'équation (2.113), contrairement aux autres études faites dans le même cadre, est qu'elle est exprimée en termes de facteur de Lorentz. Par conséquent, elle est valable pour des valeurs arbitraires de la vitesse et de la température de chaque espèce. Il convient aussi de noter que la validité de l'équation K-dV obtenue n'est pas restreinte au plasma composé d'électrons et d'ions ou de positrons, mais également à n'importe quel type de plasma à deux fluides.

## 2.7 Équation de Korteweg-de Vries modifiée dans un plasma relativiste à deux fluides

Dans la section précédente, nous avons établi l'analogie relativiste de l'équation K-dV classique en employant la technique de la perturbation reductive standard. Celle-ci décrit l'évolution des

structures non linéaires localisées de faibles amplitudes, mais finies, dans un plasma à deux fluides complètement relativiste. Hors, si nous examinons de près l'équation K-dV obtenue, nous pouvons constater que pour une certaine valeur critique du paramètre  $\bar{\alpha}$  ( $\bar{\alpha} \simeq 3s^2 - 1$ ), le terme non linéaire quadratique devient extrêmement faible et la solution de l'équation K-dV ne sera pas de type soliton. Il s'agit, en fait, d'une singularité que la technique de la perturbation reductive standard employée ne peut pas éliminer. Cela implique que nous devons chercher une autre équation appropriée pour décrire l'évolution du système au voisinage de ce point critique, en incluant les effets non linéaires d'ordre supérieur, qui sont également importants dans la présente étude, en introduisant un autre type d'expansion via ce nouveau changement de variables,

$$\xi = \epsilon(x - Vt), \quad \tau = \epsilon^3 t, \quad (2.117)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre d'expansion infinitésimal mesurant la faiblesse de l'amplitude et  $V$  la vitesse de phase de l'onde solitaire dans le référentiel du laboratoire. Les variables étirées ( $\xi, \tau$ ) introduites sont généralement utilisées pour l'étude de la dynamique des structures non linéaires localisées, de faibles amplitudes à double couches (weak double-layers solitons) et des ondes de choc [40, 41].

Dans ce nouveau système de coordonnées, les équations (2.1)-(2.3) et (2.6) s'écrivent

$$\epsilon^2 \frac{\partial \gamma n}{\partial \tau} - c v \frac{\partial \gamma n}{\partial \xi} + c \frac{\partial \gamma n \beta}{\partial \xi} = 0, \quad (2.118)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial h \gamma \beta}{\partial \tau} + c(\beta - v) \frac{\partial h \gamma \beta}{\partial \xi} + \frac{c}{\gamma n} \frac{\partial p}{\partial \xi} = -q c \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad (2.119)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) + c(\beta - v) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) = 0, \quad (2.120)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = -4\pi \sum_{j=\pm} q_j \gamma_j n_j, \quad (2.121)$$

Les variables  $n, \beta, p$  et  $\phi$  sont alors développées en séries de puissances de  $\epsilon$  autour de leurs valeurs d'équilibres (voir le développement en série de puissances (2.58)). À l'ordre zéro et un en  $\epsilon$ , nous obtenons les mêmes équations que précédemment (voir la section 2.6). À l'ordre deux en  $\epsilon$ , en utilisant le système d'équations (2.58) dans (2.118)-(2.121), nous obtenons le système d'équa-

tions suivant

$$c\Xi_{2;\xi} + c\Lambda_{2;\xi} = 0, \quad (2.122)$$

$$c\beta^{(1)}R_{1;\xi} + c(\beta^{(0)} - \nu)R_{2;\xi} - \frac{cT}{\alpha\gamma^{(0)}} \left( \frac{K_1}{\gamma^{(0)}} p_{;\xi}^{(1)} - p_{;\xi}^{(2)} \right) = -qc\phi_{;\xi}^{(2)}, \quad (2.123)$$

$$n^{(1)}p_{;\xi}^{(1)} - \alpha p^{(1)}n_{;\xi}^{(1)} - \alpha n_{;\xi}^{(2)} + p_{;\xi}^{(2)} = 0, \quad (2.124)$$

$$\sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_2 + \gamma^{(1)}n^{(1)}) = 0, \quad (2.125)$$

où les expressions de  $\Xi_2$ ,  $\Lambda_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\gamma^{(1)}$ ,  $\gamma^{(2)}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $p^{(1)}$ ,  $p^{(2)}$  et  $h^{(2)}$  sont les mêmes que celles trouvées dans la section précédente. En utilisant ces dernières, l'intégration des équations (2.122) et (2.123) nous donne respectivement

$$P + \frac{\gamma^{(0)}c}{1 - s\beta^{(0)}}\beta^{(2)} + \frac{sc}{\gamma^{(0)}(1 - s\beta^{(0)})}n^{(2)} = 0, \quad (2.126)$$

$$Q + \frac{s\gamma^{(0)}ch^{(0)}}{1 - s\beta^{(0)}}\beta^{(2)} + \frac{cT}{\gamma^{(0)}(1 - s\beta^{(0)})}n^{(2)} = 0, \quad (2.127)$$

avec

$$P \equiv \frac{1}{2}c\gamma^{(0)3} \frac{2s\beta^{(0)} - 2 + s^2}{s(1 - s\beta^{(0)})} \beta^{(1)2},$$

et

$$Q \equiv \frac{1}{2}c\gamma^{(0)3} \frac{h^{(0)}s^2(2s\beta^{(0)2} + 1) + T(\alpha - 2 - 2s^2)}{s^2(1 - s\beta^{(0)})} \beta^{(1)2} + qc\phi^{(2)},$$

où  $s$  représente la vitesse acoustique dont l'expression est donnée par l'équation (2.85). Rappelons aussi que la vitesse de phase  $\nu$  et la vitesse d'écoulement de l'élément fluide à l'équilibre  $\beta^{(0)}$  sont reliées par la loi relativiste de l'addition des vitesses comme suit

$$\nu = \frac{\beta^{(0)} - s}{1 - s\beta^{(0)}}, \quad (2.128)$$

À partir des équations (2.126) et (2.127), les expressions de  $\beta^{(2)}$  et  $n^{(2)}$ , en fonction de  $\beta^{(1)}$  et  $\phi^{(2)}$ , sont données respectivement par

$$\beta^{(2)} = \frac{1 - s\beta^{(0)}}{c\gamma^{(0)}(h^{(0)}s^2 - T)}(PT - Qs), \quad (2.129)$$

$$n^{(2)} = \frac{\gamma^{(0)}(1 - s\beta^{(0)})}{c(h^{(0)}s^2 - T)}(Q - sh^{(0)}P). \quad (2.130)$$

En substituant les expressions de  $\gamma^{(1)}$ ,  $n^{(1)}$ ,  $\gamma^{(2)}$  et  $\nu$ , données respectivement par les équations (2.67), (2.75), (2.92) et (2.128), la somme qui figure dans l'équation (2.125) peut être réécrite et mise

sous la forme suivante

$$\sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_2 + \gamma^{(1)}n^{(1)}) = \sum_{j=\pm} qn^{(0)}(\gamma^{(0)}n^{(2)} + \gamma^{(0)3}\beta^{(0)}\beta^{(2)}) + \frac{1}{2s}(2s\beta^{(0)2} - 2\beta^{(0)} + s)\gamma^{(0)5} \sum_{j=\pm} qn^{(0)}\beta^{(1)2} = 0. \quad (2.131)$$

Étant donné que  $\beta_-^{(1)} = \beta_+^{(1)} = \beta^{(1)}$  et  $n_-^{(0)} = n_+^{(0)} = n^{(0)}$ , alors  $\sum_{j=\pm} qn^{(0)}\beta^{(1)2} = 0$ . Ainsi, nous allons avoir

$$\sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_2 + \gamma^{(1)}n^{(1)}) = \sum_{j=\pm} qn^{(0)}(\gamma^{(0)}n^{(2)} + \gamma^{(0)3}\beta^{(0)}\beta^{(2)}) = 0. \quad (2.132)$$

À partir des équations (2.129) et (2.130), nous pouvons exprimer  $\beta^{(2)}$  en fonction de  $n^{(2)}$  de la sorte

$$\beta^{(2)} = -\frac{s}{\gamma^{(0)2}}n^{(2)} + \frac{s\beta^{(0)} - 1}{c\gamma^{(0)}}P, \quad (2.133)$$

Par conséquent, l'équation de Poisson à l'ordre 2 en  $\epsilon$  peut être mise sous la forme suivante

$$\sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_2 + \gamma^{(1)}n^{(1)}) = n^{(0)}\gamma^{(0)}(1 + \gamma^{(0)2}\beta^{(0)}) \sum_{j=\pm} qn^{(2)} + \gamma^{(0)3}n^{(0)}\beta^0 \sum_{j=\pm} qb = 0. \quad (2.134)$$

Comme  $\sum_{j=\pm} qb = 0$ , du moment que  $b$  dépend uniquement de  $\beta^{(1)}$  et sachant que  $\beta_-^{(1)} = \beta_+^{(1)}$ , nous allons avoir

$$\sum_{j=\pm} qn^{(2)} = 0, \quad (2.135)$$

qui implique

$$n_-^{(2)} = n_+^{(2)}, \quad (2.136)$$

et par conséquent, en utilisant l'équation (2.133),

$$\beta_-^{(2)} = \beta_+^{(2)}. \quad (2.137)$$

À l'ordre 3 en  $\epsilon$ , nous obtenons le système d'équations suivant

$$K_{1;\tau} + c\Xi_{3;\xi} + \Lambda_{3;\xi} = 0, \quad (2.138)$$

$$R_{1;\tau} + c\beta^{(1)}R_{2;\xi} + c\beta^{(2)}R_{1;\xi} + c(\beta^{(0)} - \nu)R_{3;\xi} + \frac{cT}{\alpha\gamma^{(0)}} \left( \frac{L_2}{\gamma^{(0)2}}p_{;\xi}^{(1)} - \frac{K_1}{\gamma^{(0)}}p_{;\xi}^{(2)} + p_{;\xi}^{(3)} \right) = -qc\phi_{;\xi}^{(3)}, \quad (2.139)$$

$$p_{;\xi}^{(3)} - \alpha n_{;\xi}^{(3)} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}n^{(1)2}n_{;\xi}^{(1)} - \alpha(\alpha-1)(n^{(1)}n^{(2)})_{;\xi} = 0, \quad (2.140)$$

$$\frac{1}{4\pi}\phi_{;\xi\xi}^{(1)} = \sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_3 + \gamma^{(1)}n^{(2)} + \gamma^{(2)}n^{(1)}), \quad (2.141)$$

où

$$K_3 = \gamma^{(0)} n^{(3)} + \gamma^{(3)}, \quad (2.142)$$

$$\Lambda_3 = \gamma^{(0)} \beta^{(3)} + (\beta^{(0)} - \nu) K_3, \quad (2.143)$$

$$L_2 = \gamma^{(1)} K_1 + \gamma^{(0)2} (n^{(1)2} + n^{(2)}) - \gamma^{(0)} \gamma^{(2)}, \quad (2.144)$$

$$\Xi_3 = K_1 \beta^{(2)} + (\gamma^{(1)} n^{(1)} + K_2) \beta^{(1)} + (\beta^{(0)} - \nu) (n^{(1)} \gamma^{(2)} + \gamma^{(1)} n^{(2)}), \quad (2.145)$$

$$\gamma^{(3)} = \gamma^{(0)3} \beta^{(0)} \beta^{(3)} + \gamma^{(0)5} (1 + 2\beta^{(2)2}) \beta^{(1)} \beta^{(2)} + \frac{\gamma^{(0)7}}{2} (3 + 2\beta^{(0)2}) \beta^{(0)} \beta^{(1)3}, \quad (2.146)$$

et

$$R_3 = h^{(0)} \gamma^{(0)} \beta^{(3)} + (h^{(0)} \gamma^{(1)} + h^{(1)} \gamma^{(0)}) \beta^{(2)} + (h^{(0)} \gamma^{(2)} + h^{(1)} \gamma^{(1)} + h^{(2)} \gamma^{(0)}) \beta^{(1)} + (h^{(0)} \gamma^{(3)} + h^{(1)} \gamma^{(2)} + h^{(2)} \gamma^{(1)} + h^{(3)} \gamma^{(0)}) \beta^{(0)}, \quad (2.147)$$

avec

$$h^{(3)} = T \left[ n^{(3)} + (\alpha - 1) n^{(1)} n^{(2)} + \frac{1}{6} (\alpha^2 - 5\alpha + 6) n^{(1)3} \right]. \quad (2.148)$$

L'intégration de l'équation (2.140) donne

$$p^{(3)} = \alpha n^{(3)} + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} n^{(1)3} + \alpha(\alpha - 1) n^{(1)} n^{(2)}. \quad (2.149)$$

En utilisant maintenant les équations (2.75), (2.128), et (2.142)-(2.149), les équations (2.138) et (2.139) peuvent être respectivement intégrées pour donner

$$M + \frac{\gamma^{(0)} c}{1 - s\beta^{(0)}} \beta^{(3)} + \frac{sc}{\gamma^{(0)}(1 - s\beta^{(0)})} n^{(3)} = 0, \quad (2.150)$$

$$N + \frac{s\gamma^{(0)} c h^{(0)}}{1 - s\beta^{(0)}} \beta^{(3)} + \frac{cT}{\gamma^{(0)}(1 - s\beta^{(0)})} n^{(3)} = 0, \quad (2.151)$$

où les expressions de  $M$  et  $N$  sont données par

$$M \equiv -\gamma^{(0)3} \frac{1 - s\beta^{(0)}}{s} \int \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \tau} d\xi + \frac{1}{2} c \gamma^{(0)5} \frac{2\beta^{(0)2} s^4 + (2\beta^{(0)2} - 1)s^3 - 4\beta^{(0)} s^2 + 2s}{s^3(1 - s\beta^{(0)})} \beta^{(1)3} + c \gamma^{(0)3} \frac{s^3 + 2\beta^{(0)} s^2 - 2s}{s^2(1 - s\beta^{(0)})} \beta^{(1)} \beta^{(2)}, \quad (2.152)$$

et

$$N \equiv -\gamma^{(0)3} \frac{T\beta^{(0)} - h^{(0)} s}{s} \int \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \tau} d\xi + \frac{1}{2} c \gamma^{(0)5} \frac{\rho h^{(0)} s^2 + \zeta T}{s^3(1 - s\beta^{(0)})} \beta^{(1)3} + c \gamma^{(0)3} \frac{h^{(0)} s^3 (2s\beta^{(0)} + 1) + T(\alpha - 2 - 2s^2)}{s^2(1 - s\beta^{(0)})} \beta^{(1)} \beta^{(2)} + qc\phi^{(3)}, \quad (2.153)$$

respectivement, avec

$$\varrho = 3s^2(2\beta^{(0)2} + 1) + 2\beta^{(0)}s, \quad (2.154)$$

$$\zeta = -3s^4 - 12\beta^{(0)}s^3 - 3s^2 - 4\beta^{(0)}s + 2 + \frac{\alpha}{3}(6s^2 + 6\beta^{(0)}s - 1) - \alpha^2/3. \quad (2.155)$$

La résolution des deux équations (2.150) et (2.151) permet d'exprimer  $\beta^{(3)}$  et  $n^{(3)}$  en termes de  $\beta^{(1)}$ ,  $\beta^{(2)}$ , et  $\phi^{(3)}$  de la manière suivante

$$\beta^{(3)} = \frac{1 - s\beta^{(0)}}{c\gamma^{(0)}(h^{(0)}s^2 - T)}(MT - Ns), \quad (2.156)$$

$$n^{(3)} = \frac{\gamma^{(0)}(1 - s\beta^{(0)})}{c(h^{(0)}s^2 - T)}(N - sh^{(0)}M). \quad (2.157)$$

Ainsi, la somme qui figure dans l'équation (2.141), en utilisant les équations (2.67), (2.75), (2.128) et (2.146), peut être réécrite et mise sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \sum_{j=\pm} qn^{(0)}(K_3 + \gamma^{(1)}n^{(2)} + \gamma^{(2)}n^{(1)}) = \\ \sum_{j=\pm} qn^{(0)}\gamma^{(0)}(n^{(3)} + \gamma^{(0)2}\beta^{(0)}\beta^{(3)}) + \sum_{j=\pm} qn^{(0)}f(n^{(1)}, n^{(2)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.158)$$

Comme les quantités d'ordre inférieur sont identiques pour les deux espèces de particules considérées ici, la deuxième somme apparaissant dans le côté droit de la dernière équation va s'annuler de telle sorte que l'équation (2.141) se réduit à

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = \sum_{j=\pm} qn^{(0)}\gamma^{(0)}(n^{(3)} + \gamma^{(0)2}\beta^{(0)}\beta^{(3)}). \quad (2.159)$$

Maintenant, en substituant les expressions de  $\beta^{(3)}$  et  $n^{(3)}$ , données par les équations (2.156) et (2.157) respectivement, dans la dernière équation et après quelques réarrangements, l'équation du Poisson, jusqu'au troisième ordre en  $\epsilon$ , peut être réécrite et mise sous la forme suivante

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = \sum_{j=\pm} C_\phi \phi^{(3)} + \sum_{j=\pm} C_\tau \int \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \tau} d\xi + \sum_{j=\pm} C_\beta \beta^{(1)3} + \sum_{j=\pm} C_{\beta\beta} \beta^{(1)}\beta^{(2)}, \quad (2.160)$$

où, après avoir effectué la sommation sur toutes les espèces de particules contenues dans notre

plasma, les facteurs de sommation ci-dessus seront donnés explicitement par

$$\sum_{j=\pm} C_\phi = -Z^2 e^2 \gamma^{(0)2} n^{(0)} (s\beta^{(0)} - 1)^2 \left( \frac{1}{T_+ - s^2 h_+} + \frac{1}{T_- - s^2 h_-} \right), \quad (2.161)$$

$$\sum_{j=\pm} C_\tau = \frac{2Ze n^{(0)} \gamma^{(0)5} (s\beta^{(0)} - 1)^3 (h_+ + h_-)}{c(T_+ - s^2 h_+)}, \quad (2.162)$$

$$\sum_{j=\pm} C_\beta = \frac{Ze n^{(0)} \gamma^{(0)7} (T_+ + T_-)}{6s^3 (h_+ s^2 - T_+)} \left( \bar{\alpha} (1 - 6\beta^{(0)} s - 6s^2) + \bar{\alpha}^2 \right), \quad (2.163)$$

$$\sum_{j=\pm} C_{\beta\beta} = \frac{Ze \gamma^{(0)} n^{(0)5} (T_+ + T_-) (1 - s\beta^{(0)})}{s^2 (h_+ s^2 - T_+)} (\bar{\alpha} + 1 - 3s^2), \quad (2.164)$$

$\bar{\alpha}$  et  $\bar{\alpha}^2$  sont respectivement définis comme

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\alpha_+ T_+ + \alpha_- T_-}{T_+ + T_-}, \quad (2.165)$$

$$\bar{\alpha}^2 \equiv \frac{\alpha_+^2 T_+ + \alpha_-^2 T_-}{T_+ + T_-}. \quad (2.166)$$

Notons l'emploi, ci-dessus, des notations  $h_i, \alpha_i, T_i, \dots$  etc, au lieu de  $h_i^{(0)}, \alpha_i^{(0)}, T_i^{(0)}, \dots$  etc. En tenant compte maintenant de la relation (2.112) et du fait que  $\bar{\alpha} \simeq 3s^2 - 1$  (hypothèse du départ), l'équation de Poisson, en gardant uniquement les facteurs non nuls, devient

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = \sum_{j=\pm} C_\tau \int \frac{\partial \beta^{(1)}}{\partial \tau} d\xi + \sum_{j=\pm} C_\beta \beta^{(1)3}, \quad (2.167)$$

Finalement, en dérivant les deux membres de l'équation (2.167) par rapport à  $\xi$ , après avoir substitué les deux dernière expressions et en utilisant les équations (2.77) et (2.85) combinées avec la relation suivante

$$h_+ T_- - h_- T_+ = (m_+ T_- - m_- T_+) c^2, \quad (2.168)$$

nous obtenons l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mK-dV) de la forme

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} + A \phi^{(1)2} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0, \quad (2.169)$$

où les constantes  $A$  et  $B$  sont données par

$$A = \frac{Z^2 e^2 (T_+ + T_-)^2}{4s^3 c^3 (m_+ T_- - m_- T_+)^2} \left( 15s^4 - 12s^2 + 1 - \bar{\alpha}^2 \right), \quad (2.170)$$

$$B = -\frac{s^5 c^5 (m_+ T_- - m_- T_+)^2}{8\pi Z^2 e^2 n^{(0)} \gamma^{(0)4} (s\beta^{(0)} - 1)^4 (T_+ + T_-)^3}, \quad (2.171)$$

et dont la solution est une onde solitaire de type kink, pourvu que le terme non linéaire  $A$  soit strictement positif, donnée par [voir la référence [42] pour plus de détails]

$$\phi^{(1)} = \pm \phi_m^{(1)} \tanh\left(\frac{\xi - U\tau}{w}\right), \quad (2.172)$$

où  $\phi_m^{(1)}$  et  $w$  représentent respectivement l'amplitude et la largeur de l'onde solitaire. Leurs expressions sont données respectivement par

$$\phi_m^{(1)} = \sqrt{\frac{3U}{A}}, \quad (2.173)$$

$$w = \sqrt{\frac{-2B}{U}}, \quad (2.174)$$

où  $U$  représente la vitesse de l'onde. Afin d'avoir un aperçu sur la manière dont l'amplitude et la largeur de l'onde solitaire varient en fonction d'un paramètre donné, nous allons considérer le cas d'un plasma relativiste composé d'électrons de charge  $q_- = -e$  et d'ions de charge  $q_+ = +e$ . Cela revient en fait à remplacer, dans les expressions de  $A$  et  $B$ ,  $T_+$ ,  $T_-$ ,  $m_+$ ,  $m_-$  et  $Z$  par  $T_i$ ,  $T_e$ ,  $m_i$ ,  $m_e$  et 1 respectivement. Dans ce contexte, l'amplitude et la largeur de l'onde peuvent être mises sous la forme suivante

$$\Phi_m^{(1)} = \sqrt{\frac{12\vartheta s^3(\varepsilon - \rho/\mu)^2}{(\varepsilon + \rho)^2(15s^4 - 12s^2 + 1 - \bar{\alpha}^2)}}, \quad (2.175)$$

$$W = \sqrt{\frac{s^4(\varepsilon - \rho/\mu)^2}{\gamma^{(0)4}(1 - s\beta^{(0)})^4\vartheta(\varepsilon + \rho)^3}}, \quad (2.176)$$

tandis que  $s$  et  $\bar{\alpha}^2$  seront donnés par

$$s = -\sqrt{\frac{\varepsilon + \rho}{1 + \rho/(\alpha_i - 1) + \mu^{-1} + \varepsilon/(\alpha_e - 1)}}, \quad (2.177)$$

$$\bar{\alpha}^2 = \frac{\alpha_i^2 \rho + \alpha_e^2 \varepsilon}{\rho + \varepsilon}, \quad (2.178)$$

où nous avons introduit les paramètres normalisés  $\Phi_m^{(1)}$ ,  $W$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\vartheta$  et  $\rho$  donnés respectivement par :  $\Phi_m^{(1)} = e\phi_m^{(1)}/m_i c^2$ ,  $W = w/\sqrt{m_i c^2/4\pi e^2 n^{(0)}}$ ,  $\varepsilon = T_e/m_i c^2$ ,  $\mu = m_i/m_e$ ,  $\vartheta = U/c$ , et  $\rho = T_i/m_i c^2$ . Nous analysons maintenant numériquement les caractéristiques (la largeur et l'amplitude) de l'onde solitaire de type kink dont la variation en fonction du paramètre relativiste  $\varepsilon$  pour différentes valeurs de  $\rho$  est récapitulée sur les figures (2.8) et (2.9). Les résultats obtenus montrent que les paramètres relativistes  $\varepsilon$  et  $\rho$  influencent considérablement la forme et le comportement de l'onde solitaire de type kink qui peut se propager dans un tel plasma. La figure (2.8) montre que

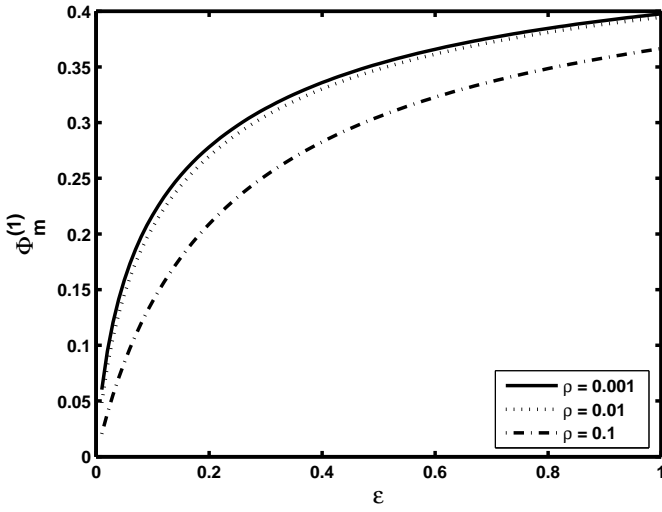


Figure 2.8 – Variation de l'amplitude  $\Phi_m^{(1)}$  en fonction de  $\epsilon$  pour différentes valeurs de  $\rho$  avec  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\vartheta = 0.3$ ,  $\mu = 1836$  et  $\alpha_i = \alpha_e = 4/3$ .

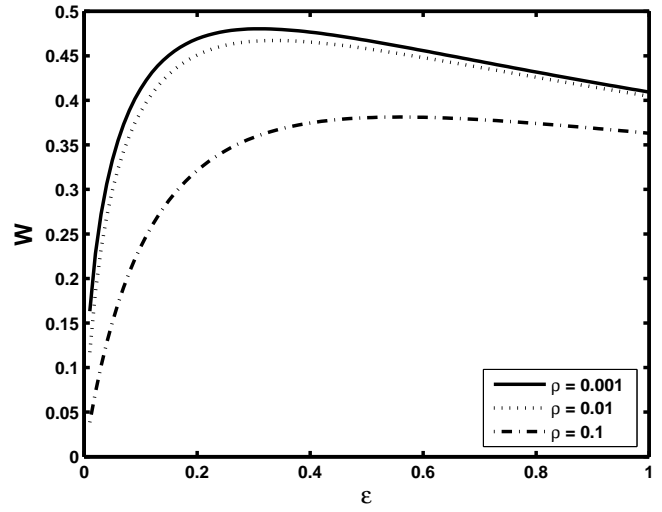


Figure 2.9 – Variation de la largeur  $W$  en fonction de  $\epsilon$  pour différentes valeurs de  $\rho$  avec  $\beta_0 = 0.1$ ,  $\vartheta = 0.3$ ,  $\mu = 1836$  et  $\alpha_i = \alpha_e = 4/3$ .

l'amplitude de l'onde  $\Phi_m^{(1)}$  croît rapidement à mesure que les électrons deviennent de plus en plus énergétique (c.-à-d., lorsque le caractère relativiste des électrons devient important). Par ailleurs, l'augmentation de  $\rho$  fournit qualitativement les mêmes résultats mais avec un léger décalage de l'amplitude de l'onde solitaire vers des valeurs plus petites. La figure (2.9) montre que pour des valeurs relativement faibles de  $\epsilon$  ( $\epsilon \lesssim 0.25$ ), le soliton subit un élargissement. En revanche, au delà d'une certaine valeur critique du paramètre relativiste  $\epsilon_{cr}$  (extremum local), la largeur du soliton de type kink subit une légère compression. Ce dernier phénomène (compression du soliton) devient moins prononcé et moins sensible à mesure que le caractère relativiste des ions croît dans le plasma.

## CHAPITRE

# 3

### ONDES ACOUSTIQUES IONIQUES DANS UN PLASMA RELATIVISTE COMPOSÉ D'IONS, D'ÉLECTRONS ET DE POSITRONS

#### 3.1 Présentation physique du problème

Les plasmas à deux composantes formés d'électrons et de positrons sont plutôt très répandus dans la nature. Ils représentent un nouvel état de la matière avec des propriétés thermodynamiques particulières et radicalement différentes de celles des plasmas habituels d'électrons et d'ions. De tels plasmas ont été observés dans les régions polaires des étoiles à neutrons, dans la magnétosphère des pulsars, dans les noyaux actifs de galaxies, et même dans le plasma d'éruption dans la chromosphère solaire [43]-[47]. Il y a beaucoup de faits indiquant que notre univers était un plasma chaud d'électrons et de positrons pendant les premières minutes de son existence [48, 49]. Récemment, des observations du satellite ASCA<sup>1</sup> ont révélé l'existence d'une fraction d'ions dans presque tous les plasmas astrophysiques d'électrons et de positrons [50]. La présence d'ions conduit à l'apparition de plusieurs modes de vibration de basses fréquences qui ne peuvent pas se propager dans les plasmas d'électrons-positrons (e-p). Nombreux sont les auteurs

---

1. Satellite d'observation dans le domaine des rayons X.

qui ont étudié les différents phénomènes de propagation d'ondes linéaires et non linéaires dans des plasmas d'électrons-positrons-ions au cours de la dernière décennie [51]-[62]. Cependant, la plupart de ces investigations sont confinées à des plasmas non-relativistes. Mais lorsque la vitesse électronique ou ionique ( $\mathbf{u}_{e,i}$ ) se rapproche de la vitesse de la lumière, les effets relativistes peuvent modifier sensiblement le comportement des solitons [63]-[65]. Les plasmas relativistes sont présents dans une variété d'environnements spatiaux et de laboratoire, à savoir, en interaction plasma-laser [8], dans la couche limite magnétosphérique terrestre [7], dans les ceintures de radiations de Van Allen [9], etc. Des jets d'ions avec des énergies de 0.1 à 100 MeV sont fréquemment observés dans l'atmosphère solaire et l'espace interstellaire. Comme les plasmas d'électrons et de positrons avec des ions chargés positivement possédant des vitesses relativistes sont fréquemment observés dans les milieux astrophysiques et l'espace, il est alors nécessaire d'étudier les propriétés des ondes solitaires acoustiques ioniques dans un tel plasma.

Dans une étude récente, Lie et Choi [32] ont employé un ensemble d'équations de l'hydrodynamique complètement relativiste pour étudier l'existence des ondes acoustiques ioniques dans un plasma à deux fluides, composé d'électrons et d'ions relativistes. L'objectif de ce chapitre est d'étendre ce modèle à un plasma relativiste à plusieurs composantes constitué d'électrons, de positrons, et d'ions et, en s'appuyant sur l'analyse du pseudo-potentiel, étudier les propriétés de l'onde acoustique ionique qui peut s'y propager.

## 3.2 Équations de base et formulation

Considérons un plasma relativiste, non collisionnel et non magnétisé, à plusieurs fluides, constitué d'ions, d'électrons et de positrons. Le traitement fluide est justifié lorsque l'interaction entre les différentes espèces de particules présent dans le plasma est faible, de sorte qu'on peut décrire séparément le mouvement de chaque type de particules. Les équations qui expriment la conservation du nombre de particules et du tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait à une dimension, s'écrivent

$$\frac{\partial \gamma n}{\partial t} + \frac{\partial \gamma n u}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial h \gamma u}{\partial t} + u \frac{\partial h \gamma u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\gamma n} \frac{\partial p}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) = 0, \quad (3.3)$$

où  $\phi$ , qui représente le potentiel électrostatique, devrait satisfaire l'équation de Poisson relativiste

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi \sum_{j=i,e,p} q_j \gamma_j n_j, \quad (3.4)$$

où l'indice «  $j$  » se réfère aux différentes espèces de particules présentes dans notre plasma,  $n$  la densité propre de particules,  $u$  la vitesse fluide,  $p$  la pression,  $\gamma$  le facteur relativiste,  $h \equiv w/n$  l'enthalpie par particule [voir l'annexe A pour la définition de  $w$ ],  $\alpha$  l'indice polytropique,  $m$  la masse au repos de la particule fluide et  $q$  la charge électrique. Il convient de noter que l'ensemble des équations (3.1)-(3.4) sont tout à fait différentes des équations utilisées dans la plupart des études antérieures sur les ondes acoustiques ioniques.

Dans le but d'étudier les propriétés de l'onde acoustique ionique de large amplitude, nous suivons la même procédure que dans le cas non-relativiste en introduisant un nouveau système de coordonnées  $(\xi, \tau)$  se déplaçant le long de l'axe des  $x$  avec une vitesse constante  $V$  par rapport au référentiel du laboratoire. Les deux systèmes de coordonnées sont reliés par la transformation de Lorentz suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - V \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \quad (3.6)$$

Ainsi, dans ce nouveau système de coordonnées, le système d'équations (3.1)-(3.4), en supposant que  $\partial_\tau = 0$  (solutions stationnaires), devient alors

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [\gamma n (\beta - v)] = 0, \quad (3.7)$$

$$-v \frac{\partial h \gamma \beta}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial h \gamma \beta}{\partial \xi} + \frac{1}{\gamma n} \frac{\partial p}{\partial \xi} = -q \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad (3.8)$$

$$(\beta - v) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -4\pi(1-v^2) \sum_j q_j \gamma_j n_j, \quad (3.10)$$

où  $\beta$  et  $v$  se réfèrent à  $u/c$  et  $V/c$  respectivement. L'intégration directe de l'équation (3.9), pour  $\beta - v \neq 0$ , nous donne

$$\frac{p}{n^\alpha} = \text{const}, \quad (3.11)$$

qui est la relation adiabatique de  $n$  et  $p$ . En utilisant cette dernière relation, nous pouvons montrer qu'après quelques manipulations algébriques, les deux derniers termes figurant dans le côté droit

de l'équation (3.8) peuvent être combinés pour donner  $\partial h\gamma/\partial \xi$ . Ainsi, l'équation (3.8) peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [h\gamma(1 - \beta v) + q\phi] = 0. \quad (3.12)$$

Nous pouvons formellement résoudre les équations (3.7), (3.11), et (3.12), et exprimer  $\beta$  et  $n$  en fonction de  $\phi$ , de sorte que le terme de gauche figurant dans l'équation de Poisson puisse être exprimé en fonction de  $\phi$ . Ainsi, l'équation (3.10) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \quad (3.13)$$

où le potentiel de Sagdeev  $V(\phi)$  est définie de la sorte

$$V(\phi) = 4\pi(1 - v^2) \sum_j q_j \int \gamma_j n_j d\phi. \quad (3.14)$$

Dans ce qui suit, nous chercherons à résoudre l'ensemble des équations (3.7), (3.11) et (3.12) et à exprimer  $\gamma$  et  $n$  en termes de  $\phi$ , puis effectuer l'intégration de l'équation (3.14) afin de trouver l'expression du pseudo-potentiel  $V$  dépendant seulement du potentiel électrostatique  $\phi$ .

### 3.3 Analyse du pseudo-potentiel

#### 3.3.1 Contribution ionique

Comme dans le cas non-relativiste, nous supposons que les ions sont froids, ce qui peut être traduit en régime relativiste par  $k_B T_i \ll m_i c^2$ . Ainsi, étant donné que l'agitation thermique des ions est négligeable, la densité d'énergie interne de ces derniers se réduit uniquement à leur densité d'énergie au repos. Par conséquent, l'enthalpie par ion  $h_i$  peut être approximée par

$$h_i \simeq m_i c^2. \quad (3.15)$$

En tenant compte de ceci et en intégrant l'équation (3.7), nous obtenons

$$\gamma_i n_i = \frac{\gamma_{0i} n_{0i} (v - \beta_{0i})}{v - \beta_i}, \quad (3.16)$$

et

$$\gamma_i (1 - \beta_i v) = \gamma_{0i} (1 - \beta_{0i} v) - \frac{e\phi}{m_i c^2}, \quad (3.17)$$

où les constantes d'intégration avaient été choisies de telle sorte qu'à l'infini ( $\xi = -\infty$ ),  $\phi = 0$ ,  $\beta_i = \beta_{0i}$ ,  $\gamma_i = \gamma_{0i}$  et  $n_i = n_{0i}$ . En résolvant maintenant l'équation (3.17) par rapport à l'inconnue  $\beta_i$  et en substituant le résultat ainsi obtenu dans l'équation (3.16), nous obtenons

$$\gamma_i n_i = \frac{\gamma_{0i} n_{0i} (\beta_{0i} - v)}{1 - v^2} \left( v \pm \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + v^2 - 1}} \right), \quad (3.18)$$

où

$$\chi \equiv \gamma_{0i} (1 - \beta_{0i} v) - \frac{e\phi}{m_i c^2}. \quad (3.19)$$

En fin, en substituant le résultat précédent dans l'équation (3.14) et en l'intégrant par rapport à  $\phi$ , la contribution ionique à l'expression du pseudo-potentiel  $V$  sera donnée par

$$V_{\pm}^{(i)}(\phi) = 4\pi n_{0i} m_i c^2 (v - \beta_{0i}) \left[ -\frac{e\phi}{m_i c^2} v \pm \left( \sqrt{\chi^2 + v^2 - 1} - \gamma_{0i} |\beta_{0i} - v| \right) \right], \quad (3.20)$$

sachant qu'une condition aux limites appropriée aux solutions localisées a été imposée ( $V_{\pm}^{(i)}(\phi = 0) = 0$ ). Il convient de noter que notre modèle de plasma admet deux modes acoustiques ioniques de larges amplitudes, selon que la vitesse de phase de l'onde  $v$  soit supérieure ou inférieure à la vitesse ionique à l'infini  $\beta_{i0}$ , un mode rapide ( $v > \beta_{i0}$ ) et un mode lent ( $v < \beta_{i0}$ ).

### 3.3.2 Contributions électronique et positronique

Pour les électrons et les positrons, nous supposons qu'ils sont tellement chauds que leurs énergies au repos deviennent très négligeables devant leurs énergies thermique respectives, autrement dit  $m_e c^2 \ll k_B T_{e,p}$ . Ainsi, en négligeant l'énergie au repos dans l'expression de l'enthalpie par particule (A.23), nous pouvons réécrire l'équation (3.12) comme suit

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{p}{n} \gamma (1 - \beta v) + q\phi \right) = 0, \quad (3.21)$$

où la charge électrique  $q = -e$  (+ $e$ ) dans le cas des électrons (des positrons). Nous supposons en plus que les électrons et les positrons se déplacent avec une vitesse uniforme moyenne égale à la vitesse des ions à l'infini, de sorte que le courant électrique, qui peut causer un champ électromagnétique, est négligeable à l'infini. Ainsi, en utilisant la relation adiabatique (3.11) dans l'équation (3.21), nous obtenons après intégration,

$$n_{e,p} = n_{0e,0p} \left( 1 \pm \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{1}{\gamma_0 (1 - \beta_0 v)} \frac{e\phi}{k_B T_{e,p}} \right)^{1/(\alpha - 1)}, \quad (3.22)$$

où  $\beta_0 = \beta_{0i} = \beta_{0e} = \beta_{0p}$  et  $\gamma_0 = \gamma_{0i} = \gamma_{0e} = \gamma_{0p}$ . Nous avons aussi introduit la température des électrons  $T_e$  (des positrons  $T_p$ ) par le biais de l'équation d'état d'un gaz parfait  $p_{0e,0p} = n_{0e,0p} k_B T_{e,p}$ . Il est remarquable de noter que, sachant que  $(1 + x/z)^z \rightarrow \exp(x)$  quand  $z \rightarrow \infty$ , la densité électronique (ou positronique) donnée par l'équation (3.22) tend vers une maxwellienne classique, dans la limite non-relativiste où  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\beta_0 \rightarrow 0$ , et  $v \rightarrow 0$ , c.-à-d.,

$$n_{e,p} \rightarrow n_{0e,0p} \exp\left(\pm \frac{e\phi}{k_B T_{e,p}}\right), \quad (3.23)$$

En substituant maintenant les expressions de  $n_e$  et de  $n_p$  dans l'équation (3.14), nous obtenons la contribution électronique et positronique à l'expression du pseudo-potentiel  $V$ ,

$$V^{(e,p)}(\phi) = 4\pi n_{0e,0p} (1 - v^2) \gamma_0^2 (1 - \beta_0 v) k_B T_{e,p} \left[ 1 - \left( 1 \pm \frac{\alpha - 1}{\alpha \gamma_0 (1 - \beta_0 v)} \frac{e\phi}{k_B T_{e,p}} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right], \quad (3.24)$$

sachant que la constante d'intégration a été choisie de sorte que  $V^{(e,p)} = 0$  au point  $\phi = 0$ .

### 3.3.3 Solitons et conditions d'existence

En multipliant maintenant l'équation (3.13) par  $d\phi/d\xi$ , intégrant une fois, imposant les conditions aux limites propres aux solutions localisées ( $\phi \rightarrow 0$ ,  $d\phi/d\xi \rightarrow 0$ , lorsque  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ), tenant compte de la condition de quasi-neutralité de la charge à l'équilibre,  $f = n_{0e}/n_{0i} = 1 + n_{0p}/n_{0i}$ , et en tenant compte des différentes contributions intervenant dans l'expression du pseudo-potentiel, nous obtenons la quadrature suivante :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + V_{\pm}(\phi) = 0, \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} V_{\pm}(\phi) = & 4\pi n_{0i} \gamma_0^2 (1 - v^2) (1 - \beta_0 v) k_B T_e f \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha \gamma_0 (1 - \beta_0 v)} \frac{e\phi}{k_B T_e} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] + \\ & 4\pi n_{0i} \gamma_0^2 (1 - v^2) (1 - \beta_0 v) k_B T_p (f - 1) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha \gamma_0 (1 - \beta_0 v)} \frac{e\phi}{k_B T_p} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] + \\ & 4\pi n_{0i} m_i c^2 \gamma_0 (v - \beta_0) \left[ -\frac{e\phi}{m_i c^2} v \pm \sqrt{\left( \gamma_0 (1 - \beta_0 v) - \frac{e\phi}{m_i c^2} \right)^2 + v^2 - 1 - \gamma_0 |v - \beta_0|} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

L'équation (3.25) peut être perçue comme étant l'équation du mouvement d'une pseudo-particule de masse unité, de position  $\phi$  et de vitesse  $d\phi/d\xi$ , oscillant dans un potentiel  $V_{\pm}(\phi)$ . Il convient

d'introduire les paramètres normalisés  $\Phi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $X$  définis respectivement par les relations suivantes :  $\Phi \equiv e\phi/(m_i c^2)$ ,  $\varepsilon \equiv k_B T_e/m_i c^2$ ,  $\sigma \equiv T_e/T_p$  et  $X \equiv \xi/\lambda_D$ , où  $\lambda_D = \sqrt{m_i c^2/4\pi n_0 e^2}$  étant la longueur de Debye ionique. Ainsi, l'équation de Poisson adimensionnelle s'écrit

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = -\frac{\partial V_{\pm}(\Phi)}{\partial \Phi}, \quad (3.27)$$

avec

$$\begin{aligned} V_{\pm}(\Phi) = & \gamma_0^2(1-\nu^2)(1-\beta_0\nu)\varepsilon f \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha\varepsilon\gamma_0(1-\beta_0\nu)}\Phi \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] + \\ & \gamma_0^2(1-\nu^2)(1-\beta_0\nu)\frac{\varepsilon}{\sigma}(f-1) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(\alpha-1)\sigma}{\alpha\varepsilon\gamma_0(1-\beta_0\nu)}\Phi \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] + \\ & \gamma_0(\nu-\beta_0) \left[ -\nu\Phi \pm \sqrt{(\gamma_0(1-\beta_0\nu)-\Phi)^2 + \nu^2 - 1 - \gamma_0|\nu-\beta_0|} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pour qu'une onde solitaire puisse se propager dans unait plasma, il faut que le pseudo-potentiel  $V_{\pm}(\Phi)$  satisfasse les conditions d'existence suivantes :  $V(0) = 0$ ,  $\partial V/\partial \Phi|_{\Phi=0} = 0$ ,  $\partial^2 V/\partial \Phi^2|_{\Phi=0} < 0$ , et  $V(\Phi_c) > 0$ , où  $\Phi_c = \gamma_0(1-\beta_0\nu) - \sqrt{1-\nu^2}$  est défini de telle sorte que pour une valeur de  $\Phi$  dans l'intervalle  $[0, \Phi_c]$  la racine carrée dans l'équation (3.28) soit un réel. Il est aisé de vérifier à partir de l'équation (3.28) que les deux premières conditions sont satisfaites pour la branche  $V_+$  si  $\beta_0 > \nu$  et pour la branche  $V_-$  si  $\beta_0 < \nu$ . Les conditions  $\partial^2 V/\partial \Phi^2|_{\Phi=0} < 0$  et  $V(\Phi_c) > 0$  peuvent être, respectivement, réécrites plus explicitement comme suit

$$(\beta_0 - \nu)^2 (f + (f-1)\sigma) - \alpha\varepsilon(1-\beta_0^2)(1-\beta_0\nu) > 0, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_0^2(1-\nu^2)(1-\beta_0\nu)\varepsilon f \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha\varepsilon\gamma_0(1-\beta_0\nu)}\Phi_c \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] + \\ & \gamma_0^2(1-\nu^2)(1-\beta_0\nu)\frac{\varepsilon}{\sigma}(f-1) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(\alpha-1)\sigma}{\alpha\varepsilon\gamma_0(1-\beta_0\nu)}\Phi_c \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] + \\ & \gamma_0(\nu-\beta_0) [-\nu\Phi_c \pm -\gamma_0|\nu-\beta_0|] > 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En raison de la complexité de ces deux dernières inégalités, pour être manipulées analytiquement, nous allons avoir recours à une investigation graphique en traçant la région d'existence de solitons dans le plan  $(\beta_0, \varepsilon)$  pour les deux branches  $V_+$  et  $V_-$  comme le montre les figures (3.1) et (3.2) respectivement. La figure (3.1) nous montre donc la région d'existence, délimitée par les deux courbes en trait continu et discontinu, où les conditions données par les équations (3.29) et (3.30) sont simultanément vérifiées lorsque  $\beta_0 > \nu$  (la branche supérieure), alors que la figure (3.2) nous montre la

région d'existence lorsque  $\beta_0 < \nu$  (la branche inférieure). Á partir de la figure (3.1), nous pouvons constater que pour des points  $(\beta_0, \varepsilon)$  très proches de la courbe en pointillé, qui vérifiée l'équation  $\partial^2 V / \partial \Phi^2|_{\Phi=0} = 0$ , le puit du pseudo-potentiel devrait être moins profond en raison des petites valeurs de  $\partial^2 V / \partial \Phi^2|_{\Phi=0}$ . Ceci est bien démontré dans la figure (3.4), qui montre d'ailleurs qu'à mesure que  $\beta_0$  augmente, donc à mesure que  $\beta_0$  s'éloigne de la courbe en pointillé, la profondeur du puit de pseudo-potentiel augmente, ce qui entraîne une augmentation de l'amplitude du soliton associé comme l'indique d'ailleurs la figure (3.3). Par ailleurs, à partir de la figure (3.2) qui montre la région d'existence de solitons pour la branche  $V_-$ , nous pouvons constater qu'à mesure que  $\beta_0$  croît, la profondeur du puit de pseudo-potentiel devrait décroître, et par conséquent l'amplitude du soliton associé devrait diminuer à mesure que  $\beta_0$  augmente. Ce que nous pouvons constater effectivement à partir des figures (3.5) et (3.6) respectivement.

Nous nous intéressons maintenant à la variation de l'onde solitaire, ainsi que celle du pseudo-potentiel qui lui est associé, avec la variation du paramètre relativiste  $\varepsilon \equiv k_B T_e / m_i c^2$  (la valeur  $\varepsilon = 0.025$  correspond à  $k_B T_e \approx 48 m_e c^2$ , ou d'une manière équivalente à  $T_e \approx 2.8 \times 10^{11}$ ). Les figures (3.7) et (3.9) révèlent que les propriétés de l'onde acoustique solitaire dépendent sensiblement de la température électronique  $T_e$ . En effet, une petite augmentation de  $T_e$  (les électrons et les positrons ( $T_p = T_e / \sigma$ ) deviennent plus chauds et donc plus relativistes) entraîne une diminution de l'amplitude du soliton et une augmentation de sa largeur. Ainsi, nous pouvons constater que plus les effets relativistes deviennent dominants dans notre plasma, plus aplatie sera la forme de l'onde solitaire qui s'y propage. Nous arrivons à la même conclusion en analysant directement les courbes (3.1) et (3.2) par rapport à  $\varepsilon$ . En effet, en partant d'un point  $(\beta_0, \varepsilon)$  appartenant à l'une des branches supérieure ou inférieure dans la région d'existence, l'augmentation de  $\varepsilon$ , pour une valeur de  $\beta_0$  fixe, conduit à des valeurs de  $\partial^2 V / \partial \Phi^2|_{\Phi=0}$  de plus en plus petites, du moment qu'on s'approche davantage de la courbe en pointillé pour laquelle  $\partial^2 V / \partial \Phi^2|_{\Phi=0} = 0$ . Ainsi, une augmentation de  $\varepsilon$  entraîne une diminution de la largeur du puit du pseudo-potentiel (figures (3.8) et (3.10)), et par conséquent une forme de l'onde acoustique solitaire moins prononcée, à mesure que nous augmentons la température des électrons et ceci indépendamment du choix de la valeur de  $\beta_0$ . Par ailleurs, la dépendance de l'onde acoustique solitaire, ainsi que celle du pseudo-potentiel qui lui est associée, du rapport des densités  $f = n_{e0} / n_{i0}$  est récapitulée sur les figures (3.11) et (3.12) respectivement pour la branche supérieure ( $\beta_0 - \nu > 0$ ), et sur les figures (3.13) et (3.14) respectivement pour la branche inférieure ( $\beta_0 - \nu < 0$ ). Les résultats montrent que l'amplitude et la largeur

de l'onde acoustique solitaire sont considérablement influencés par le rapport des densités  $f$ . En effet, une augmentation de  $f$  (en fait un appauvrissement ionique) entraîne une augmentation de l'amplitude du soliton et une légère diminution de sa largeur pouvant donner ainsi lieu à l'apparition de solitons de type cornu. Le profil des densités de particules (les figures (3.15) et (3.16)) montre une accumulation des ions, plus importante que celle des électrons, ainsi qu'une déplétion positronique dans la région de localisation du soliton.

---

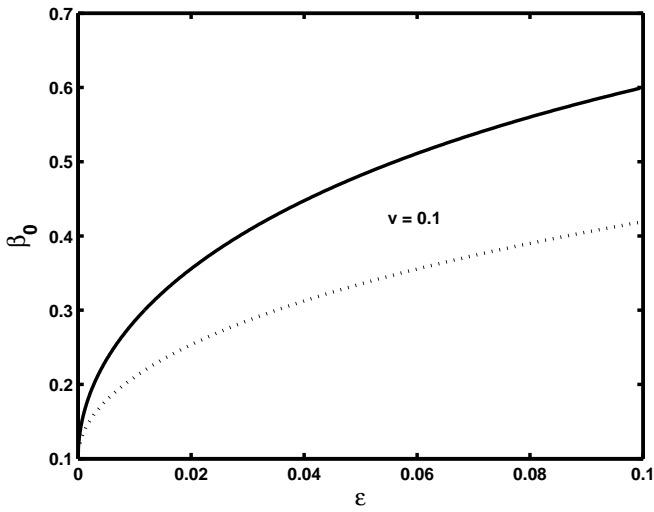


Figure 3.1 – La région d’existence de solitons dans le plan  $(\beta_0, \epsilon)$  pour la branche  $\beta_0 > \nu$ , avec  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

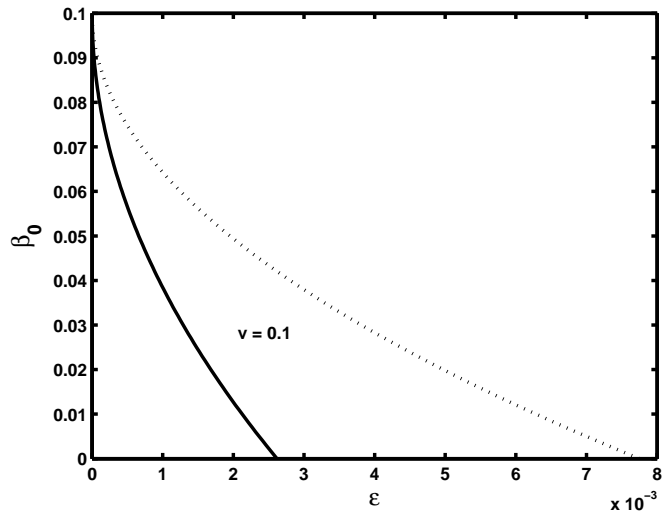


Figure 3.2 – La région d’existence de solitons dans le plan  $(\beta_0, \epsilon)$  pour la branche  $\beta_0 < \nu$ , avec  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

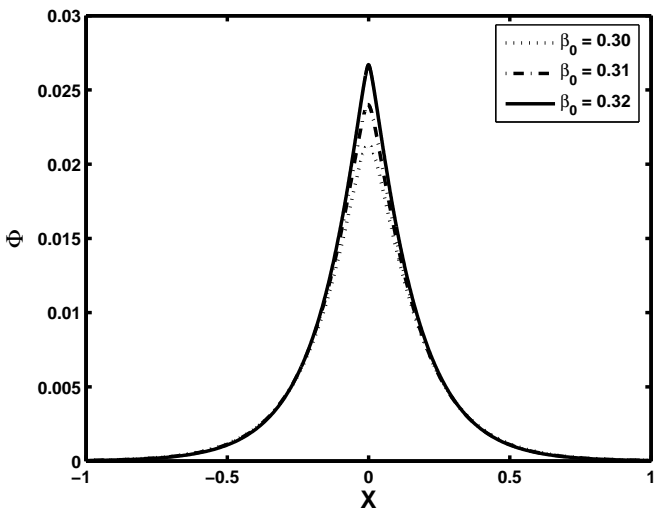


Figure 3.3 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l’onde acoustique ionique pour différentes valeurs de  $\beta_0$ , avec  $\epsilon = 0.025$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

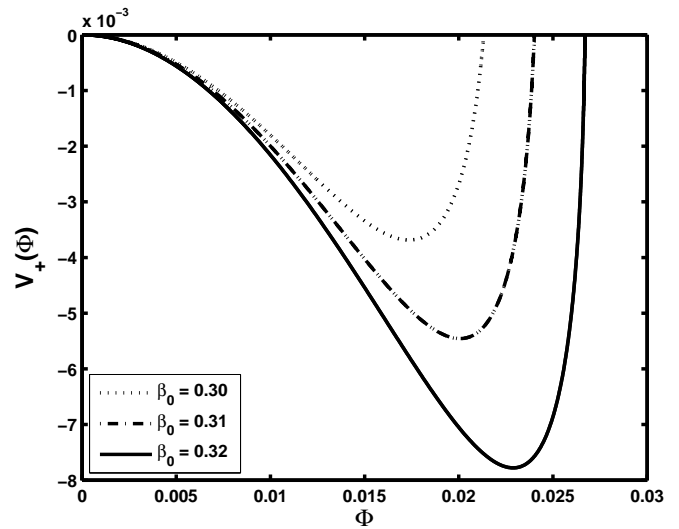


Figure 3.4 – Potentiel de Sagdeev  $V_+(\Phi)$  associé au soliton de la figure (3.3) pour différentes valeurs de  $\beta_0$ .

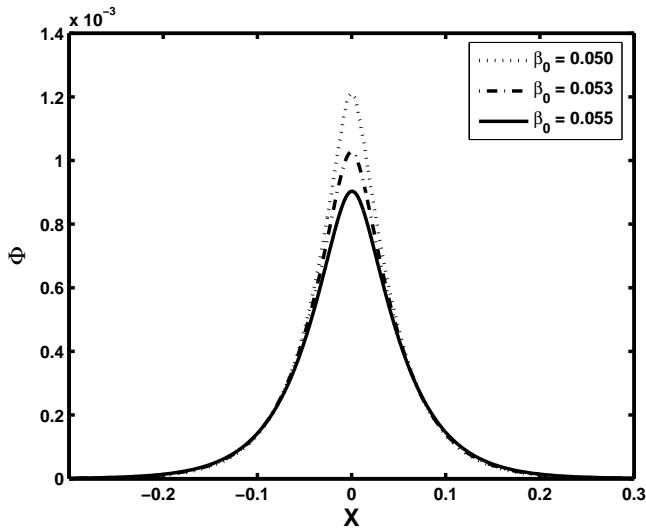


Figure 3.5 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l’onde acoustique ionique pour différentes valeurs de  $\beta_0$ , avec  $\varepsilon = 0.0015$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

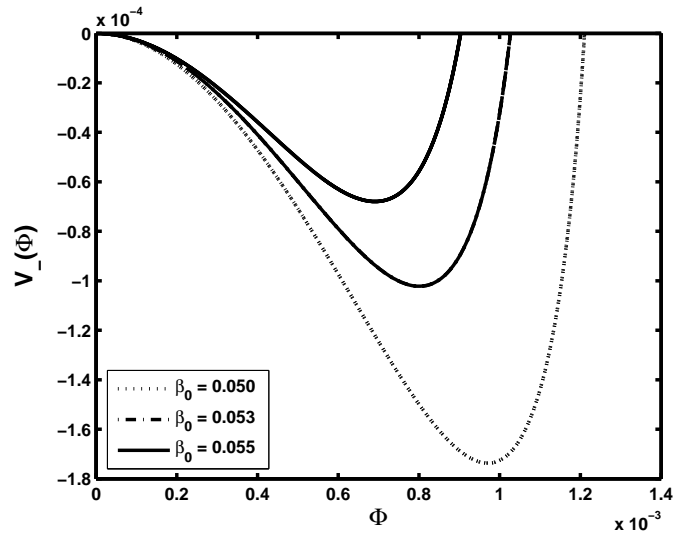


Figure 3.6 – Potentiel de Sagdeev  $V_-(\Phi)$  associé au soliton de la figure (3.5) pour différentes valeurs de  $\beta_0$ .

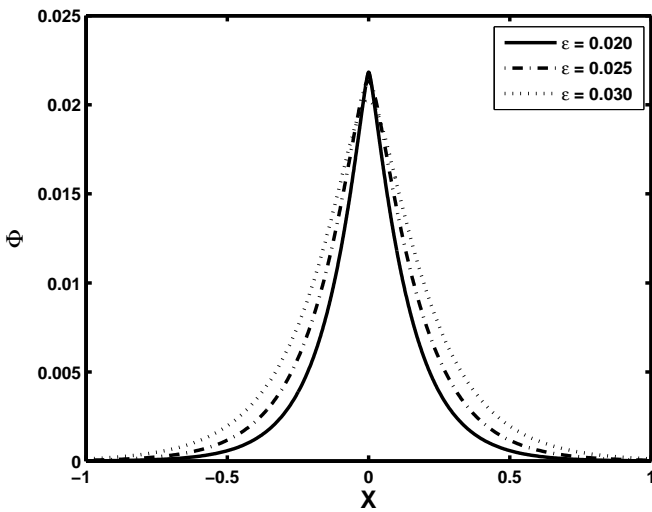


Figure 3.7 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l’onde acoustique ionique pour différentes valeurs du paramètre relativiste  $\varepsilon$ , avec  $\beta_0 = 0.3$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

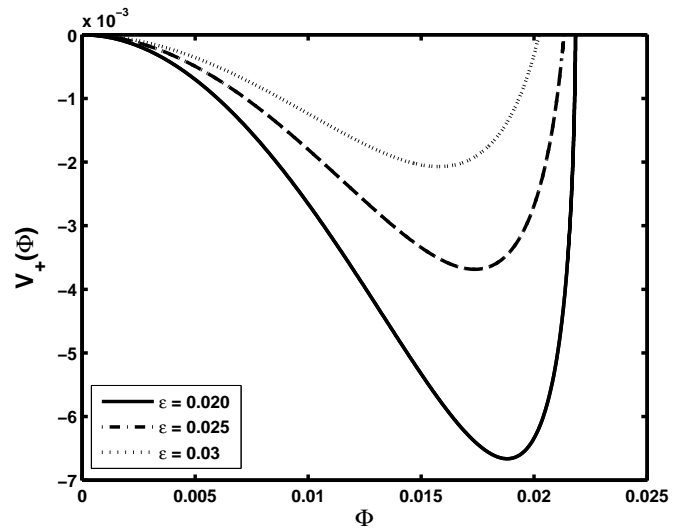


Figure 3.8 – Potentiel de Sagdeev  $V_+(\Phi)$  associé au soliton de la figure (3.7) pour différentes valeurs du paramètre relativiste  $\varepsilon$ .

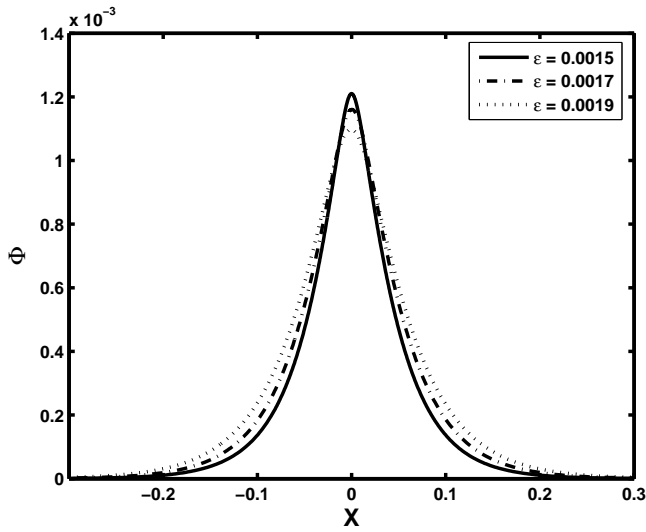


Figure 3.9 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l’onde acoustique ionique pour différentes valeurs du paramètre relativiste  $\varepsilon$ , avec  $\beta_0 = 0.05$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

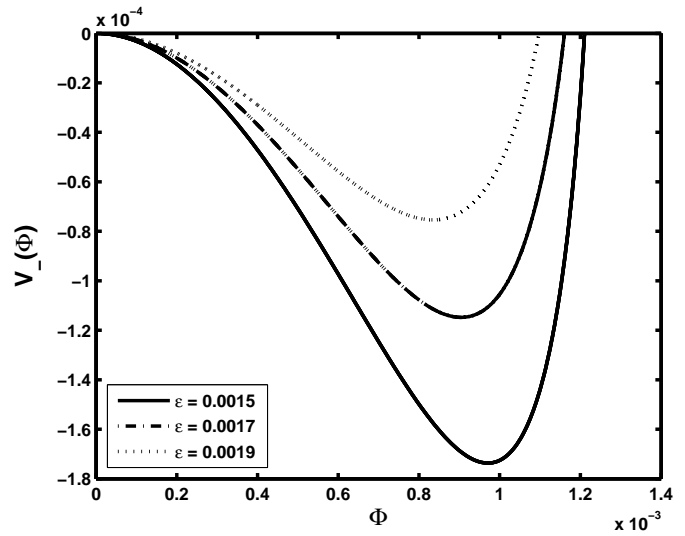


Figure 3.10 – Potentiel de Sagdeev  $V_-(\Phi)$  associé au soliton de la figure (3.9) pour différentes valeurs du paramètre relativiste  $\varepsilon$ .

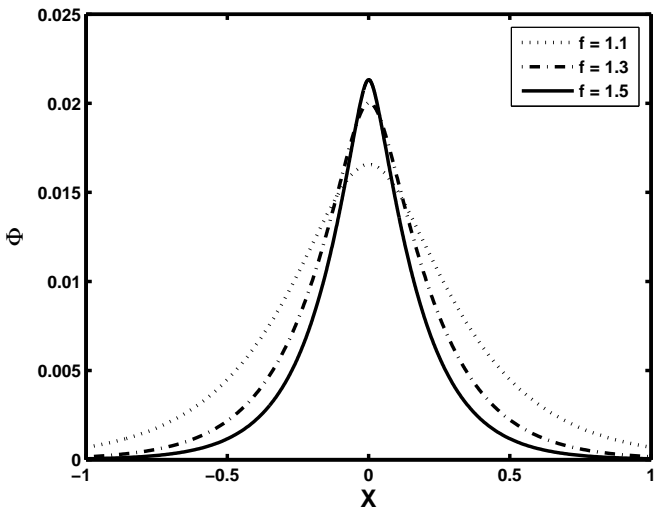


Figure 3.11 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l’onde acoustique ionique pour différentes valeurs de  $f$ , avec  $\varepsilon = 0.025$ ,  $\beta_0 = 0.3$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$  et  $\alpha = 4/3$ .

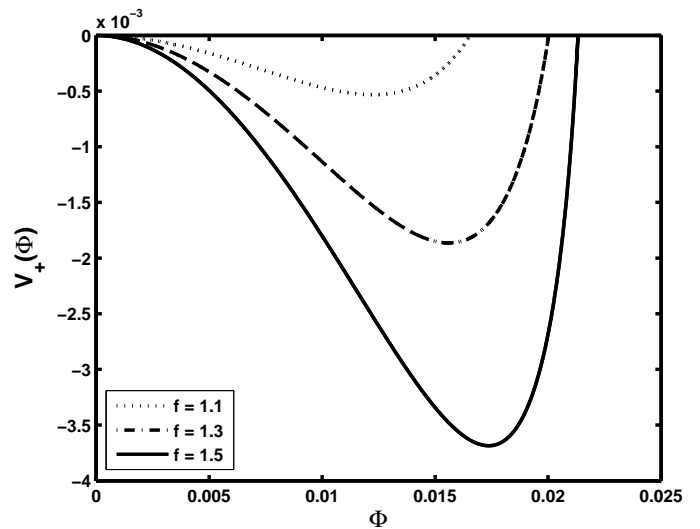


Figure 3.12 – Potentiel de Sagdeev  $V_+(\Phi)$  associé au soliton de la figure (3.11) pour différentes valeurs de  $f$ .

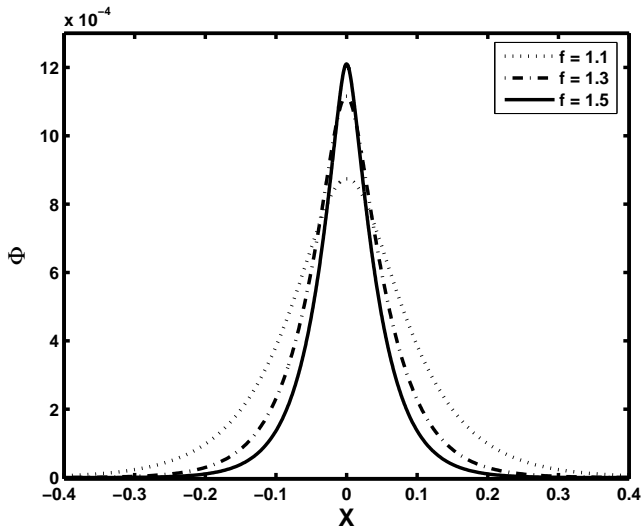


Figure 3.13 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l’onde acoustique ionique pour différentes valeurs de  $f$ , avec  $\varepsilon = 0.0015$ ,  $\beta_0 = 0.05$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$  et  $\alpha = 4/3$ .

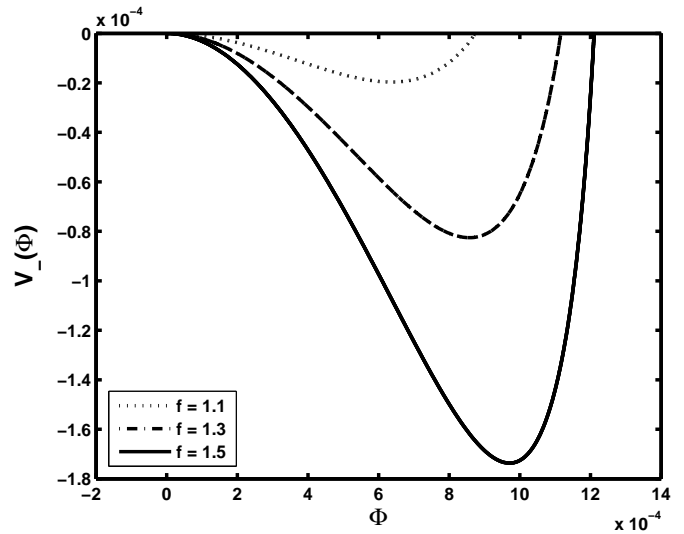


Figure 3.14 – Potentiel de Sagdeev  $V_-(\Phi)$  associé au soliton de la figure (3.13) pour différentes valeurs de  $f$ .

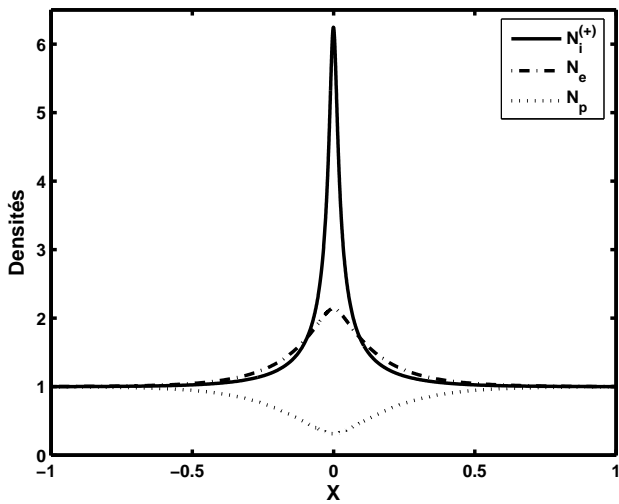


Figure 3.15 – Profil spatial des densités électronique, ionique et positronique, avec  $\varepsilon = 0.025$ ,  $\beta_0 = 0.3$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

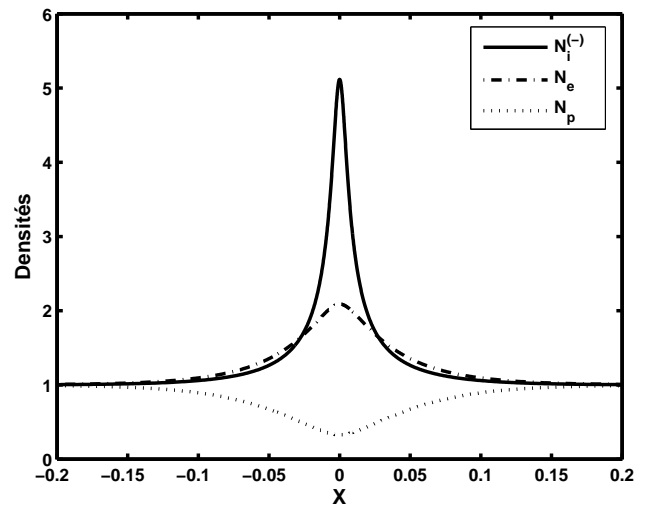


Figure 3.16 – Profil spatial des densités électronique, ionique et positronique, avec  $\varepsilon = 0.0015$ ,  $\beta_0 = 0.05$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\sigma = 1.2$ ,  $f = 1.5$  et  $\alpha = 4/3$ .

## CHAPITRE

# 4

### ONDES ACOUSTIQUES POUSSIÉREUSES DANS UN PLASMA POUSSIÉREUX À CHARGE VARIABLE EN PRÉSENCE D'ÉLECTRONS ET D'IONS RELATIVISTES

#### 4.1 Présentation physique du problème

Un plasma poussiéreux (aussi appelé « plasma complexe »), est, comme son nom l'indique, un plasma qui contient des grains de poussière dont la taille peut varier du nanomètre au millimètre [66]-[71]. Cette espèce chargée supplémentaire rend le système encore plus compliqué qu'un plasma ordinaire. Ils peuvent être constitués de divers matériaux (silicium, carbone, glace, polymère, ...etc) et être de forme variées (sphérique, structure fractale, ...etc). Au cours des ces dernières années, les plasmas poussiéreux ont suscité un large et profond regain d'intérêt à cause de leur rôle, parfois prépondérant, dans certaines applications technologiques, spatiales et astrophysiques. Les plasmas poussiéreux sont présents dans différentes parties de notre système solaire, à savoir, le milieu interplanétaire, les nuages interstellaires, les queues et les chevelures des comètes, les nuages interstellaires, les anneaux planétaires, l'ionosphère et la magnétosphère terrestres, etc. Ils sont aussi présents dans les dispositifs de laboratoires et les procédés industriels [72]. Les gaz d'échappement d'une fusée, la lumière zodiacale, la troposphère arctique, la mésosphère polaire,

la flamme d'une chandelle, ...etc, sont autant d'autres exemples de plasmas poussiéreux. La présence de la poussière dans le plasma implique de nouveaux phénomènes tels que la fluctuation de la charge électrique, l'appauvrissement électronique, la dissipation anormale de l'énergie, des homogénéités, des instabilités, ...etc. Ces grains de poussière massifs et hautement chargés peuvent modifier sensiblement les propriétés intrinsèques du plasma traditionnel à deux composantes. Les oscillations non linéaires associées à un tel plasma devraient donc être sensiblement différentes de celles qui peuvent se propager dans un plasma ordinaire, car la présence des grains de poussière chargés peut avoir une forte influence sur les caractéristiques des modes habituels du plasma [73]-[77].

Dans le présent chapitre nous nous intéresserons à l'étude des ondes acoustiques poussiéreuses de larges amplitudes dans un plasma poussiéreux à charge variable en présence d'ions et d'électrons relativistes. Nous établirons d'abord une généralisation des courants électronique et ionique classiques en régime relativiste en s'appuyant sur le modèle standard de la sonde électrostatique, puis nous exprimerons le potentiel électrostatique non linéaire en fonction de la charge du grain pour ainsi étudier l'influence des effets relativistes sur cette dernière [78]. Ensuite, nous passerons à l'étude de l'onde acoustique poussiéreuse dans un plasma complexe composé d'ions et d'électrons maxwelliens relativistes et d'un faisceau froid de grains de poussière par intégration de la dynamique des grains de poussière et la variation self-consistante de la charge des grains, en tirant profit des courants électronique et ionique déjà calculés [79]. L'accent sera mis sur l'influence des effets relativistes sur les propriétés de l'onde acoustique poussiéreuse solitaire non linéaire de large amplitude.

## 4.2 Charge théorique d'un grain de poussière

Un paramètre fondamental dans l'étude des plasmas poussiéreux est la charge électrique des grains de poussière. Cette charge notée  $q_d$  est déduite du potentiel de surface de la poussière noté  $\phi_d$ , par la relation suivante

$$q_d = C \phi_d, \quad (4.1)$$

où  $C$  est la capacitance effective du grain. Le potentiel  $\phi_d$  est défini relativement au potentiel local. Dans le cas d'une poussière sphérique de rayon  $r_d$  la capacitance est définie par

$$C = r_d \left( 1 + \frac{r_d}{\lambda_{De}} \right) \simeq r_d, \quad (4.2)$$

où  $\lambda_{De}$  est la longueur de Debye électronique. Le potentiel de surface de la poussière, dépend des espèces présentes dans le plasma. En effet, tout objet plongé dans un plasma acquiert un potentiel pour lequel la somme des flux de particules chargées arrivant à sa surface est égale à zéro. Dans un plasma, les particules chargées sont les ions et les électrons, si bien que l'on doit avoir à la surface de la poussière, un courant d'électrons égal au courant d'ions (en valeur absolue). Nous allons dans ce qui suit voir comment calculer les courants collectés par une poussière sphérique isolée, dans le cadre du modèle standard de la sonde électrostatique ou modèle OLM (Orbit-Limited Motion) [70].

### 4.3 Courants de charge électronique et ionique relativistes

Les courants obéissant au modèle OLM sont définis comme étant les courants maximum (fonctions du potentiel de surface de la sonde) qui peuvent être collectés par une sphère parfaitement absorbante dans un plasma non collisionnel, stationnaire et isotropique. Afin de calculer ces courants, il faut déterminer les conditions de capture des ions et des électrons par le grain de poussière extrêmement lourd portant une charge négative locale  $q_d(x, t)$  et ayant une masse  $m_d$ . Pour cela nous devons tenir compte du comportement d'une particule incidente au voisinage d'un grain de poussière en fonction de sa trajectoire en introduisant une distance  $b$ , que nous appelons d'ailleurs paramètre d'impact, en deçà de laquelle la particule incidente va heurter la poussière et va ainsi contribuer au courant collecté. Au-delà de cette distance, il va transférer seulement une partie de sa quantité de mouvement par diffusion sur le grain de poussière. Le paramètre  $b$  est obtenu en utilisant les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique relativistes respectivement

$$\mu_j^2 = \mu_{jp}^2 + \frac{2q_j q_d}{r_d m_j c^2}, \quad (4.3)$$

$$\mu_j b_j = \mu_{jp} r_d, \quad (4.4)$$

où  $\mu_j = (p_j/m_j c)$  est la vitesse relativiste de l'espèce «  $j$  » dans le plasma,  $\mu_{jp}$  est la vitesse relativiste de l'espèce  $s$  au moment de l'impact avec la surface du grain de poussière (en  $r_d$ ),  $m_j$  et  $q_j$  sont la masse au repos et la charge électrique de l'espèce «  $j$  », respectivement. En éliminant  $\mu_{jp}$  entre (4.3) et (4.4) nous obtenons l'expression suivante pour  $b$

$$b^2 = r_d^2 \left( 1 - \frac{2q_j q_d}{r_d m_j \mu_j^2 c^2} \right), \quad (4.5)$$

La section efficace de collection, définie par :  $\sigma_j^d = \pi b^2$ , traduisant le domaine à l'intérieur duquel une particule incidente doit se trouver pour être collectée par le grain, s'écrit alors

$$\sigma_j^d(q_d, \mu_j) = \pi r_d^2 \left( 1 - \frac{2q_j q_d}{r_d m_j \mu_j^2 c^2} \right). \quad (4.6)$$

Le courant microscopique de charge d'une espèce relativiste «  $j$  » est obtenu en moyennant  $\sigma_j^d$  sur la fonction de distribution des vitesses des particules de l'espèce considérée comme suit

$$I_j = q_j \iiint_V \frac{d^3 \mu_j}{\sqrt{\mu_j^2 + 1}} \mu_j \sigma_j^d(q_d, \mu_j) f_{MJ}(\mu_j), \quad (4.7)$$

où  $f_{MJ}(\mu_j)$  est la fonction de distribution de Maxwell-Jüttner de l'espèce  $j$  supposée à l'équilibre thermodynamique. Son expression est la suivante [voir l'annexe C pour plus de détails]

$$f_{MJ}(\mu_j) = \frac{n_{j0} m_j c^2 / T_j}{4\pi K_2(m_j c^2 / T_j)} \exp\left(-\frac{m_j c^2}{T_j} \sqrt{1 + \mu_j^2} - \frac{q_j}{T_j} \phi(x)\right), \quad (4.8)$$

où  $n_{j0}$  ( $j = e, i$ ) est la densité propre de l'espèce «  $j$  » à l'équilibre et  $K_2$  est la fonction de Bessel de seconde espèce. L'expression du courant de charge électronique sera donnée par

$$\begin{aligned} I_e &= -e\pi r_d^2 n_{e0} \frac{(m_e c^2 / T_e)}{4\pi K_2(m_e c^2 / T_e)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{\mu_{\min}}^{+\infty} \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(1 + \frac{2e\phi_d}{m_e \mu^2 c^2}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{m_e c^2}{T_e} \sqrt{1 + \mu^2} + \frac{e\phi}{T_e}\right), \\ &= -2e\pi r_d^2 n_{e0} \frac{(T_e / m_e c^2)}{K_2(T_e / m_e c^2)} \left(\frac{T_e}{m_e c^2} + \sqrt{1 - \frac{2e\phi_d}{m_e c^2}}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{m_e c^2}{T_e} \sqrt{1 - \frac{2e\phi_d}{m_e c^2}}\right) \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $\mu_{\min} = \sqrt{-2e\phi_d / T_e}$  est la vitesse minimale que devra acquérir un électron à l'infini pour pouvoir parvenir à la surface du grain avec une vitesse nulle. En procédant de la même manière, l'expression du courant de charge ionique sera donnée par

$$\begin{aligned} I_i &= e\pi r_d^2 n_{i0} \frac{(m_i c^2 / T_i)}{4\pi K_2(m_i c^2 / T_i)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{+\infty} \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(1 - \frac{2e\phi_d}{m_i \mu^2 c^2}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{m_i c^2}{T_i} \sqrt{1 + \mu^2} - \frac{e\phi}{T_e}\right), \\ &= 2e\pi r_d^2 n_{i0} \frac{(T_i / m_i c^2)}{K_2(T_i / m_i c^2)} \left(\frac{T_i}{m_i c^2} + 1 - \frac{e\phi_d}{T_i}\right) \exp\left(-\frac{m_i c^2}{T_i}\right) \exp\left(-\frac{e\phi}{T_i}\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Il convient d'introduire les paramètres normalisés :  $\sigma = T_i / T_e$ ,  $\mu = m_i / m_e$ ,  $\varepsilon = T_e / m_i c^2$ ,  $\Phi$  est le potentiel électrostatique normalisé par rapport à  $T_i / e$ , et  $Q_d$  est la charge électrique du grain

normalisée par rapport à  $r_d T_e / e$ . Ainsi, les expressions des courants relativistes électrostatique et ionique peuvent être réécrites respectivement de la sorte

$$I_e = -2e\pi r_d^2 n_{e0} \frac{\mu\varepsilon}{K_2(1/\mu\varepsilon)} \left( \mu\varepsilon + \sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_d} \right) e^{-\sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_d}/\mu\varepsilon} e^{\sigma\Phi}, \quad (4.11)$$

$$I_i = 2e\pi r_d^2 n_{i0} \frac{\sigma\varepsilon}{K_2(1/\sigma\varepsilon)} (\sigma\varepsilon + 1 - Q_d/\sigma) e^{-1/\sigma\varepsilon} e^{-\Phi}. \quad (4.12)$$

Dans la limite classique, c.-à-d. lorsque l'énergie d'agitation thermique est négligeable devant l'énergie au repos de la même espèce, autrement dit :  $\mu\varepsilon \ll 1$  et  $\sigma\varepsilon \ll 1$ , nous pourrons faire les approximations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_d} \approx 1 - \mu\varepsilon Q_d, \\ K_2(z) \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \exp(-z). \end{array} \right. \quad (4.13)$$

En substituant ces dernières dans les expressions des courants électronique et ionique relativistes, et en négligeant tous les termes proportionnels à  $c^{-2}$ , nous retombons exactement sur les expressions des courants électronique et ionique classiques, bien connues dans la littérature des plasmas complexes [70], données respectivement par

$$I_e \rightarrow -e\pi r_d^2 n_{e0} \left(\frac{8T_e}{\pi m_e}\right)^{1/2} \exp(Q_d) \exp(\sigma\Phi), \quad (4.14)$$

$$I_i \rightarrow e\pi r_d^2 n_{i0} \left(\frac{4T_i}{\pi m_i}\right)^{1/2} (1 - Q_d/\sigma) \exp(-\Phi), \quad (4.15)$$

où  $n_{j0}$  ( $j = e, i$ ) représente ici la densité de particules classique de l'espèce «  $j$  » à l'équilibre. Dans la théorie de la sonde électrostatique, la charge du grain de poussière (assimilé donc à une sonde immergée dans un plasma) provient essentiellement de la collecte des électrons et des ions présents dans le plasma. Ces derniers viennent se greffer sur la surface du grain. Par conséquent, la charge électrique du grain de poussière  $q_d$  est calculée de manière self-consistante à partir de l'équation

$$\tilde{v}_d \frac{dq_d}{dx} = I_e + I_i, \quad (4.16)$$

où  $I_e$  et  $I_i$  sont les courants microscopiques électronique et ionique, respectivement. Cependant avant d'aller plus loin, notons d'abord que le temps caractéristique du mouvement d'un grain, dont les dimension sont de l'ordre d'un micron, est de l'ordre de quelques dizaines de millisecondes alors que son temps de charge est typiquement de l'ordre de  $10^{-8}$  s. Le déplacement du grain, durant le temps de charge du grain, est par conséquent négligeable devant l'échelle spatiale

de notre problème. Il s'ensuit que le processus de charge peut être traité comme un phénomène local et le terme convectif dans l'équation (4.16) peut être négligé pour ainsi obtenir

$$I_e + I_i \simeq 0. \quad (4.17)$$

En substituant les expressions des courants dans (4.17), et en tenant compte de la condition de quasi-neutralité de la charge à l'équilibre ( $\Phi = 0$ ) donnée par

$$f = \frac{n_{i0}}{n_{e0}} = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \left(\frac{K_2(1/\sigma\varepsilon)}{K_2(1/\mu\varepsilon)}\right) \left(\frac{\mu\varepsilon + \sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_{d0}}}{\sigma\varepsilon + 1 - Q_{d0}/\sigma}\right) \exp(1/\sigma\varepsilon) \times \exp\left(-\sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_{d0}/\mu\varepsilon}\right), \quad (4.18)$$

nous obtenons la relation suivante

$$(1 + \sigma)\Phi = \ln \left\{ \frac{(\sigma^2\varepsilon + \sigma - Q_d)(\mu\varepsilon + \sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_{d0}})}{(\sigma^2\varepsilon + \sigma - Q_{d0})(\mu\varepsilon + \sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_d})} \right\} + \sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_d} - \sqrt{1-2\mu\varepsilon Q_{d0}}, \quad (4.19)$$

où  $Q_{d0}$  est la charge du grain à l'équilibre. En guise de comparaison, la variation de la charge du grain  $Q_d$  en fonction du potentiel non linéaire  $\Phi$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon = 0.001, 0.01, \text{ et } 0.1$  est récapitulée sur la figure (4.1). Les paramètres suivants  $Q_{d0} = -0.3$ ,  $\mu = 1836$ , et  $\sigma = 0.1$  ont été choisis. Les résultats montrent qu'une augmentation du potentiel non linéaire mènerait à une augmentation de la valeur de la charge négative du grain. Notons aussi qu'à mesure que les effets

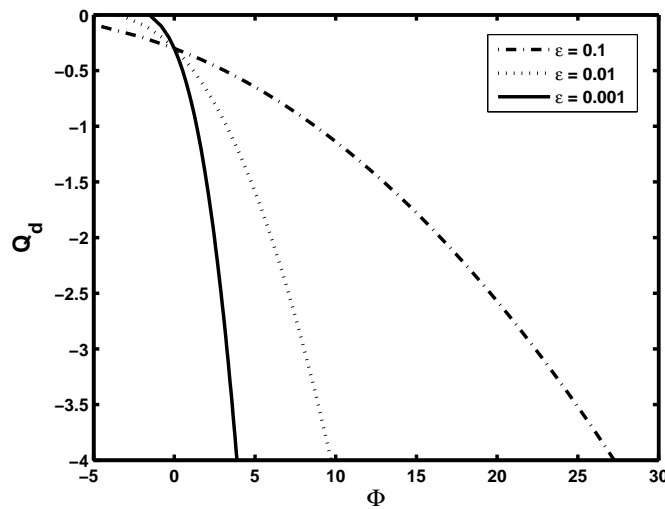


Figure 4.1 – Variation de la charge du grain pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  avec  $\sigma = 0.1$ ,  $Q_{d0} = -0.3$  et  $\mu = 1836$ .

relativistes croient dans le plasma, il devient évident que certaines des valeurs négatives de  $Q_d$  ne peuvent jamais être réalisées du fait que de très grandes valeurs du potentiel non linéaire sont exigés et par conséquent, des effets non linéaires importants peuvent rentrer en jeu. Ceci peut être attribué à l'appauvrissement des particules de la poussière dans notre plasma.

#### 4.4 Potentiel solitaire dans un plasma poussiéreux à charge variable en présence d'ions et d'électrons relativistes

Nous nous intéressons maintenant aux effets de la fluctuation de la charge du grain, dus à la collecte des ions et des électrons relativistes, sur les ondes solitaires acoustiques poussiéreuses en tenant compte du terme convectif de l'équation (4.16). Pour cela, considérons le cas d'un faisceau froid de grains de poussière que l'on peut décrire grâce à la fonction de distribution suivante [80, 81]

$$f_d(x, v_d) = n_{d0} \frac{v_{d0}}{\tilde{v}_d} \delta(v_{d0} - \tilde{v}_d), \quad (4.20)$$

où l'expression de la vitesse perturbée du grain  $\tilde{v}_d$  s'écrit

$$\tilde{v}_d = v_{d0} \left( 1 - \frac{2}{m_d v_{d0}^2} \int_0^\phi q_d d\phi \right). \quad (4.21)$$

En intégrant la fonction de distribution précédente sur tout l'espace des vitesses, nous obtenons

$$N_d = \frac{n_d}{n_{d0}} = \frac{v_{d0}}{\tilde{v}_d} = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho \chi}}, \quad (4.22)$$

où les expressions de  $\rho$  et  $\chi$  sont données respectivement par

$$\rho = \frac{2r_d \sigma T_e^2}{m_d e^2 v_{d0}^2}, \quad (4.23)$$

$$\chi = \int_0^\Phi Q_d d\Phi. \quad (4.24)$$

L'équation de Poisson qui décrit l'évolution spatiale du potentiel électrostatique dans un plasma poussiéreux composé d'électrons relativistes, d'ions relativistes, et de grains de poussière vus comme étant un fluide classique, s'écrit

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -4\pi \left( \sum_{j=e,i} q_j \gamma_j n_j + q_d n_d \right), \quad (4.25)$$

où  $j = e, i$  indique respectivement les électrons et les ions,  $q_e = -e$  et  $q_i = +e$  sont des charges électriques,  $\phi$  le potentiel électrostatique,  $\gamma_j$  le facteur relativiste de Lorentz,  $n_j$  la densité propre mesurée dans le référentiel propre des particules de l'espèce «  $j$  », tandis que  $n_d$  représente la densité classique des grains de poussière mesurée dans le référentiel du laboratoire. Notons que cette dernière équation découle directement de l'équation de Poisson relativiste (A.30) en supposant que les grains sont immobiles, c.-à-d. en posant  $\gamma_d = 1$ . Supposons, en sus, que les électrons et les ions, dans une échelle de temps liée à la dynamique des grains de poussière extrêmement lente, sont en équilibre thermodynamique dans le référentiel du laboratoire et leurs densités relatives  $n_j$  obéissent à la distribution de Maxwell-Jüttner [voir l'annexe C pour plus de détails]

$$n_j = n_{j0} \exp\left(-\frac{q_j \phi}{T_j}\right), \quad (4.26)$$

$T_j$  et  $n_{j0}$  sont respectivement la température et la densité propre à l'équilibre ( $\phi = 0$ ) des particules d'espèce «  $j$  ». Cependant, selon la théorie de la relativité restreinte, la densité de charge d'une espèce «  $j$  » dans le référentiel propre  $n_j$  se déplaçant à la vitesse moyenne  $u_j$  par rapport au référentiel du laboratoire, du fait de la contraction des longueurs dans la direction du mouvement, est reliée à la densité de charge relative mesurée dans le référentiel du laboratoire  $n_j$  juste par le facteur relativiste de Lorentz  $\gamma_j$  de la sorte

$$n_j = \gamma_j n_j, \quad (4.27)$$

où  $\gamma_j = 1/\sqrt{1 - u_j^2/c^2}$ . Ainsi, compte tenu de la condition de quasi-neutralité de la charge à l'équilibre dans le référentiel propre du plasma à l'infini donnée par  $f = Z_{d0} n_{d0}/n_{e0} + 1$ , l'équation de Poisson peut alors être réécrite sous la forme adimensionnelle suivante

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = N_e - f N_i + (f - 1) \frac{Q_d}{Q_{d0}} N_d, \quad (4.28)$$

où  $N_e = \exp(\sigma\Phi)$ ,  $N_i = \exp(-\Phi)$ , et  $\sigma = T_i/T_e$ . La densité relative  $N_j$  ( $j = i, e, d$  indique respectivement les électrons, les ions, et les grains de poussière), la charge  $Q_d$  des grains de poussière, le potentiel électrostatique  $\Phi$ , et la variable spatiale  $X$  sont respectivement normalisés par  $n_{j0}$ ,  $r_d T_e/e$ ,  $T_i/e$ , et  $\lambda_{Dm} = (T_i/4\pi n_{e0} e^2)^{1/2}$ . Les équations sont complétées par l'équation d'évolution de la charge des grains de poussière dans le cas stationnaire ( $\tilde{v}_d dq_d/dx = I_e + I_i$ ), cette dernière traduit le principe de conservation de la charge électrique.  $I_e$  et  $I_i$  représentent respectivement les courants de charge électronique et ionique maxwelliens relativistes que nous avons déjà calculés

dans la section précédente. Donc l'équation de la charge peut être mise sous une forme adimensionnelle comme suit,

$$\frac{dQ_d}{dX} = kN_d \left\{ -N_e \frac{\mu\sqrt{\epsilon}}{K_2(1/\mu\epsilon)} \left( \mu\epsilon + \sqrt{1 - 2\mu\epsilon Q_d} \right) \exp\left(\sqrt{1 - 2\mu\epsilon Q_d}/\mu\epsilon\right) + f N_i \frac{\sigma\sqrt{\epsilon}}{K_2(1/\sigma\epsilon)} (\sigma\epsilon + 1 - Q_d/\sigma) \exp(-1/\sigma\epsilon) \right\}, \quad (4.29)$$

avec

$$k = \left( \frac{2n_{e0}e^2r_d^2\sigma^2}{m_i v_{d0}^2 c^2} \right)^{1/2} \quad (4.30)$$

À l'équilibre ( $\Phi = 0$ ), l'équation (4.29) requiert ;

$$f = \left( \frac{\mu}{\sigma} \right) \left( \frac{K_2(1/\sigma\epsilon)}{K_2(1/\mu\epsilon)} \right) \left( \frac{\mu\epsilon + \sqrt{1 - 2\mu\epsilon Q_{d0}}}{\sigma\epsilon + 1 - Q_{d0}/\sigma} \right) \exp(1/\sigma\epsilon) \exp\left(-\sqrt{1 - 2\mu\epsilon Q_{d0}}/\mu\epsilon\right). \quad (4.31)$$

Dans la simulation numérique qui va suivre, les valeurs de  $f$  et  $k$  seront déduites de leurs expressions respectives tandis que les autres paramètres sont supposés a priori connus. Les équations (4.24), (4.28) et (4.29) sont intégrées numériquement en faisant appel à un schéma d'intégration numérique adéquat. Les figures (4.3) et (4.4) montrent que la variation spatiale de  $\Phi$  pour différentes valeurs du rapport de températures  $\sigma$  exhibe un profil spatialement localisé. Les résultats révèlent que l'écart entre les deux températures, ionique et électronique, affecte d'une manière significative le profil spatial de l'onde acoustique poussiéreuse à charge variable. En effet, l'augmentation de l'agitation thermique des électrons entraîne une augmentation de l'amplitude du soliton et une légère diminution de sa largeur, et celui-ci est d'autant prononcé pour des petites valeurs du paramètre relativiste  $\epsilon$ . Par ailleurs, la figure (4.2) indique qu'à mesure que les effets relativistes augmentent, l'amplitude du soliton augmente, sa largeur diminue et le profil de l'onde solitaire devient plus cornu. En conséquence, les effets relativiste modifient sensiblement les structures solitaires qui peuvent se propager dans un tel plasma. D'autre part, l'influence du rapport des températures ionique et électronique  $\sigma$  devient pratiquement insignifiant quand les effets relativistes deviennent dominants.

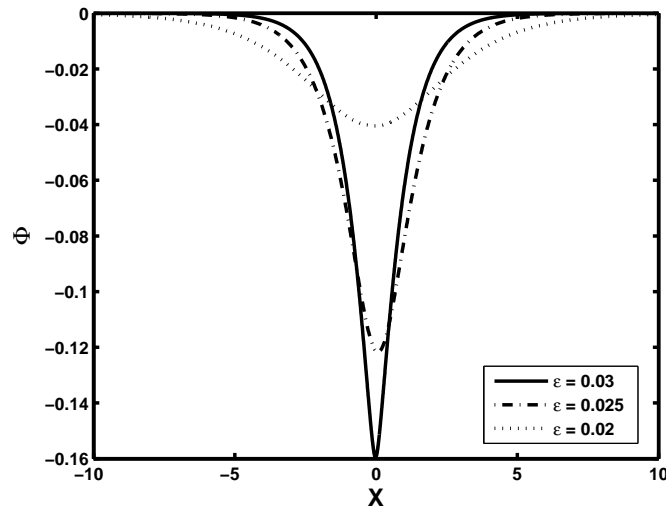


Figure 4.2 – Variation de la charge du grain pour différentes valeurs de  $\epsilon$  avec  $\sigma = 0.1$ ,  $\mu = 1836$ ,  $n_{i0} = 10^5 \text{ cm}^{-3}$ ,  $Q_{d0} = -0.6$ ,  $r_d = 0.34 \mu\text{m}$ ,  $m_d = 10^{12} m_i$ , et  $v_{d0} = 85 \text{ cm s}^{-1}$ .

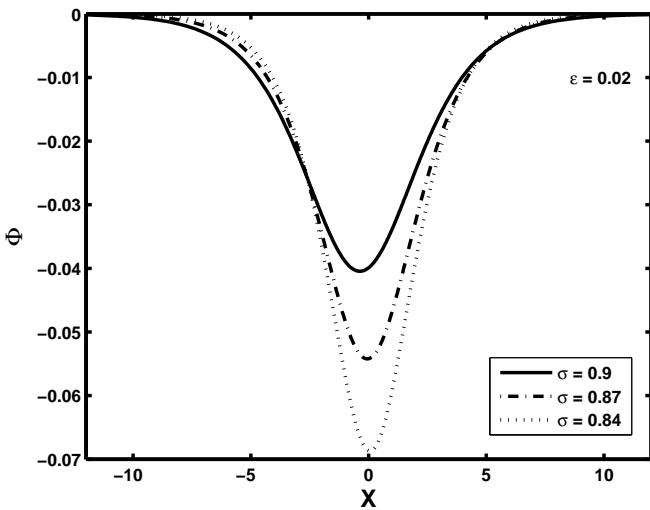


Figure 4.3 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  de l'onde acoustique poussiéreuse pour différentes valeurs de  $\sigma = 0.84$  ( $f = 1.70$ ),  $0.87$  ( $f = 1.72$ ), et  $0.9$  ( $f = 1.75$ ), avec  $\epsilon = 0.02$ . Les valeurs des autres paramètres sont celles utilisées pour la figure (4.2).

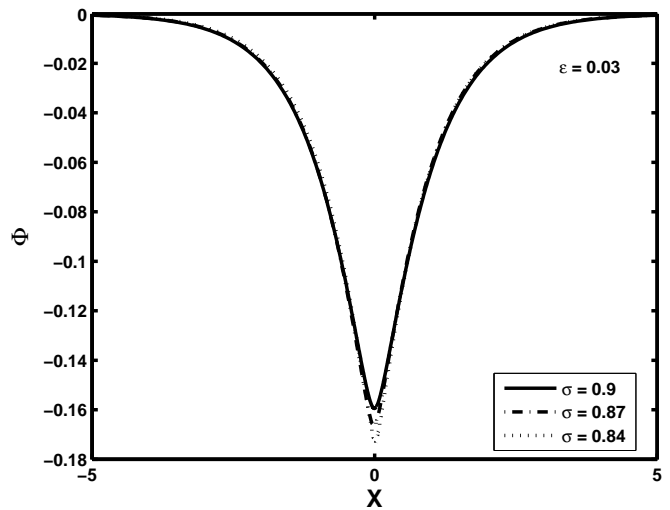


Figure 4.4 – Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  de l'onde acoustique poussiéreuse pour différentes valeurs de  $\sigma = 0.84$  ( $f = 1.18$ ),  $0.87$  ( $f = 1.20$ ), et  $0.9$  ( $f = 1.22$ ), avec  $\epsilon = 0.03$ . Les valeurs des autres paramètres sont celles utilisées pour la figure (4.2).

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Pour conclure, le présent mémoire a porté sur l'étude des structures non linéaires spatialement localisées (solitons) dans différents types de plasmas relativistes.

Le premier chapitre a été dédié au rappel des propriétés des plasmas en général et un aperçu sur les plasmas relativistes, ainsi que les différentes approches mathématiques employées pour décrire leur dynamique en particulier.

Dans le deuxième et le troisième chapitre, nous avons utilisé l'ensemble des équations de base de l'hydrodynamique relativiste exprimant la conservation de l'énergie et l'impulsion du fluide. Cette approche a la particularité d'être complètement cohérente avec le principe de la relativité restreinte, et représente ainsi un ensemble covariant plus général d'équations décrivant la dynamique d'un plasmas relativiste.

Le deuxième chapitre a été dédié à l'étude des oscillations non linéaires de faibles et de larges amplitudes dans un plasma relativiste à deux fluides. Ce chapitre comprend deux parties, la première concerne le traitement large amplitude et la seconde concerne le traitement faible amplitude. Dans le traitement large amplitude, l'analyse du pseudo-potentiel a été employée. Nos résultats ont révélé que des ondes électrostatiques solitaires stationnaires de larges amplitudes peuvent se propager dans un plasma relativiste à deux fluides, chose prohibée dans le cas d'un plasma non-relativiste, et dont le comportement et la forme dépendent étroitement du caractère relativiste du plasma. Dans le traitement faible amplitude, une équation de type  $K-dV$  ( $mK-dV$ ), gouvernant la

dynamique des ondes solitaires de faibles amplitudes, mais finies, a été dérivée. Une des caractéristiques de cette dernière équation, contrairement aux autres études faites dans le même cadre, est qu'elle est exprimée en termes de facteur de Lorentz et aucune restriction n'a été imposée au magnitude des températures de chaque espèce. Par conséquent, elle est valable pour des valeurs arbitraires de la vitesse et de la température de chaque espèce. Celle-ci admet une solution en onde solitaire de type kink. Les résultats obtenus ont révélé que, selon le caractère relativiste des électrons, les structures non linéaires localisées peuvent subir soit un élargissement ou bien une compression, et que ce dernier phénomène (compression du soliton) devient moins prononcé et moins sensible à mesure que le caractère relativiste des ions croît dans le plasma.

Le troisième chapitre a été dédié à l'étude des ondes acoustiques ioniques dans un plasma relativiste constitué d'ions, d'électrons et de positrons. Cette étude a été motivée, d'une part, par le fait que les plasmas d'électrons et de positrons avec des ions chargés positivement possédant des vitesses relativistes sont fréquemment observés dans les milieux astrophysiques et l'espace, et d'autre part, par le fait qu'aucune étude, sur les oscillations non linéaires dans un plasma relativiste à plusieurs composantes, antérieure rigoureuse se basant sur un système d'équations cohérent et complètement relativiste n'a été faite. En effet, dans la plupart de ces études, les effets relativistes ne sont que partiellement considérés, et habituellement pris en compte uniquement dans l'équation du mouvement en ignorant complètement la relativité dans l'équation de continuité ou dans l'équation de Poisson. Dans le but d'étudier les propriétés des ondes acoustiques ioniques de larges amplitudes dans un plasma relativiste à plusieurs fluides, composé d'ions, d'électrons et de positrons, dont la dynamique est gouvernée par un système covariant d'équations d'hydrodynamique relativiste, l'analyse de potentiel de Sagdeev a été utilisée. Nous avons montré que notre modèle de plasma admis deux modes acoustiques ioniques de larges amplitudes, selon si la vitesse de phase de l'onde  $\nu$  soit supérieure ou inférieure à la vitesse ionique à l'infini  $\beta_{i0}$ . Le profil des ces structures solitaires est affecté d'une manière significative par le caractère relativiste du plasma de sorte que plus les effets relativistes deviennent importants, plus aplatie sera la forme de l'onde solitaire qui s'y propage.

Le dernier chapitre a été dédié à l'analyse et l'existence de certaines structures cohérentes (solitons) de larges amplitudes, associées à un plasma complexe à charge variable en présence d'ions et d'électrons relativistes. Les courants de charge ionique et électronique relativistes appropriés, établis dans le cadre du modèle standard de la sonde électrostatique (OLM), ont été utilisés. Nos

résultats ont montré que, dans un tel plasma, des ondes acoustiques poussiéreuses spatialement localisées de raréfaction peuvent exister et dont les caractéristiques (la largeur et l'amplitude) dépendent étroitement de l'aspect relativiste du milieu, ainsi que du rapport entre les deux températures ionique et électronique. En particulier, il convient de noter que plus le caractère relativiste du plasma devient dominant plus cornu soit le profil de l'onde solitaire. En effet, l'augmentation de l'agitation thermique des électrons entraîne une augmentation de l'amplitude du soliton et une légère diminution de sa largeur, et celui-ci est d'autant prononcé pour des petites valeurs du paramètre relativiste  $\epsilon$ . D'autre part, l'effet du rapport des températures devient pratiquement insignifiant quand les effets relativistes deviennent dominants.

Les perspectives de ce présent mémoire sont nombreuses, nous nous proposons à l'avenir d'étendre l'étude faite dans le deuxième et le troisième chapitre à des plasmas relativistes de fluides imparfaits ou visqueux en tenant compte des différents phénomènes de dissipation (à savoir, la viscosité, le transfert de chaleur, ...) d'une part, et de considérer le champ magnétique ou le champ de gravitation d'autre part. Concernant le dernier chapitre, nous nous proposons de faire intervenir les différents processus de charge (à savoir, l'émission secondaire des électrons, l'émission photo-électrique, ...) qui contribuent à la charge du grain de poussière en régime relativiste.

---

## ANNEXE

# A

## DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE BASE DE L'HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

### A.1 Équations de base

La dynamique d'un fluide relativiste chargé est gouvernée par deux équations, l'équation de la conservation du tenseur énergie-impulsion [14, 15]

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} N_\nu \quad (\text{A.1})$$

et l'équation de la conservation du nombre de particules,

$$\partial_\nu N^\nu = 0 \quad (\text{A.2})$$

où  $N^\nu \equiv nU^\nu$  est le 4-vecteur flux de particules,  $n$  est la densité de particules propre, et  $U^\nu \equiv \gamma(\mathbf{u}, c)$  est le 4-vecteur vitesse. Le tenseur énergie-impulsion  $T^{\alpha\beta}$  est donné par

$$T^{\alpha\beta} \equiv p\eta^{\alpha\beta} + \frac{w}{c^2} U^\alpha U^\beta, \quad (\text{A.3})$$

où  $p$  est la pression hydrostatique,  $e$  est la densité d'énergie, et  $w \equiv p + e$  est la densité de chaleur.

Le tenseur électromagnétique  $F^{\alpha\beta}$  satisfait les équations de Maxwell

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \sum_a q_a N_a^\mu, \quad (\text{A.4})$$

où la sommation porte sur toutes les espèces de particules contenues dans le fluide. En substituant l'expression du tenseur énergie-impulsion (A.3) dans l'équation (A.1) et en utilisant l'équation de continuité (A.2), l'équation (A.1) peut être mise sous la forme suivante

$$\partial^\mu p + n U^\nu \partial_\nu \left( \frac{w}{nc^2} U^\mu \right) = \frac{q}{c} n F^{\mu\nu} U_\nu. \quad (\text{A.5})$$

Il convient de séparer cette dernière équation en deux équations, une est tri-dimensionnelle et l'autre scalaire. L'équation tri-dimensionnelle est obtenue en remplaçant  $\mu$  par  $i$ ; ce qui donne, après avoir réarrangé les différents termes, l'équivalent relativiste de l'équation d'Euler décrivant la dynamique d'un fluide relativiste soumis à l'action d'un champ électromagnétique externe

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left( \frac{w}{nc^2} \gamma u_i \right) + \frac{1}{n\gamma} \frac{\partial p}{\partial x_i} = q \left( E_i + \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_i \right). \quad (\text{A.6})$$

L'équation scalaire est obtenue en contractant les deux membres de l'équation (A.5) par  $U_\mu$ ; on aura ainsi

$$U^\mu \partial_\mu p + n U_\mu U^\nu \partial_\nu \left( \frac{w}{nc^2} U^\mu \right) = \frac{q}{c} n F^{\mu\nu} U_\mu U_\nu. \quad (\text{A.7})$$

À partir de la condition de normalisation du 4-vecteur  $U^\nu$ , i.e.  $U_\nu U^\nu = -c^2$ , on peut écrire

$$U_\nu \partial_\alpha U^\nu = 0. \quad (\text{A.8})$$

En utilisant cette dernière relation et une propriétés des tenseurs antisymétriques, l'équation (A.7) devient

$$-n U^\alpha \left[ p \partial_\alpha \left( \frac{1}{n} \right) + \partial_\alpha \left( \frac{e}{n} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.9})$$

En utilisant la deuxième loi de la thermodynamique

$$T d\sigma = p d \left( \frac{1}{n} \right) + d \left( \frac{e}{n} \right), \quad (\text{A.10})$$

où  $T$  est la température et  $\sigma$  est l'entropie par particule. On peut maintenant réécrire l'équation (A.9) sous la forme suivante

$$n T U^\alpha \partial_\alpha \sigma = 0, \quad (\text{A.11})$$

ou bien

$$\partial_t \sigma + \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma = 0, \quad (\text{A.12})$$

qui est une équation d'énergie traduisant le fait que l'écoulement est adiabatique le long de la trajectoire de la particule de fluide. Les équations fondamentales de l'hydrodynamique relativiste

sont ainsi « l'équation de continuité » (A.2), « l'équation d'Euler relativiste » (A.6), « l'équation d'énergie » (A.12), combinées avec les équations d'état qui donneront  $\sigma$ ,  $T$ , et  $e$  en termes de  $n$  et  $p$ .

## A.2 Équations d'état

Afin d'avoir une idée de la forme possible des équations d'état, considérons un fluide composé de particules ponctuelles sans structure interne de masse au repos  $m$  et qui interagissent via seulement des collisions localisées dans l'espace. Dans ce cas, on peut montrer que le tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$T^{\mu\nu} = \sum_N \frac{p_N^\mu p_N^\nu}{E_N} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N). \quad (\text{A.13})$$

Dans le repère propre,  $T^{\mu\nu}$  aura une forme isotrope

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

ainsi la pression  $p$  et la densité d'énergie  $e$  seront données dans le repère propre par

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^3 T^{ii} = \frac{1}{3} \sum_N \frac{\mathbf{p}_N^2}{E_N} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N), \quad (\text{A.15})$$

$$e = T^{00} = \sum_N E_N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N), \quad (\text{A.16})$$

alors que la densité de particules propre est donnée par

$$n = \sum_N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N). \quad (\text{A.17})$$

Il s'ensuit qu'en général

$$0 \leq p \leq \frac{e}{3}. \quad (\text{A.18})$$

Pour un gaz froid non-relativiste, on peut toujours faire l'approximation

$$E_N \simeq mc^2 + \frac{\mathbf{p}_N^2}{2m}, \quad (\text{A.19})$$

de sorte que l'équation (A.16) donne

$$e \simeq nmc^2 + \frac{3}{2}p \quad (\text{A.20})$$

Pour un gaz chaud ultra-relativiste, on a

$$E_N \simeq |\mathbf{p}_N| \gg mc^2, \quad (\text{A.21})$$

et l'équation (A.16) donne

$$e \simeq 3p \gg nmc^2. \quad (\text{A.22})$$

Les deux équations (A.20) et (A.22) peuvent être rassemblées dans une seule équation d'état de la forme

$$e = nmc^2 + \frac{1}{\alpha - 1}p, \quad (\text{A.23})$$

où  $\alpha$  est la constante adiabatique qui peut prendre deux valeurs : 4/3 pour un gaz ultra-relativiste et 5/3 pour un gaz non-relativiste. Ainsi, l'équation (A.9) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\frac{n^\alpha}{\alpha - 1} U^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{p}{n^\alpha} \right) = 0. \quad (\text{A.24})$$

En comparant cette dernière avec l'équation (A.11), on peut exprimer l'entropie par particule  $\sigma$ , et la température  $T$  en fonction de la pression  $p$ , et de la densité de particules propre  $n$ , de la sorte

$$\sigma = k \frac{p}{n^\alpha}, \quad \text{et} \quad T = C n^{\alpha-1}, \quad (\text{A.25})$$

où  $k$  et  $C$  sont des constantes. Considérons maintenant le cas d'un plasma contenant deux fluides de particules chargées de charge  $q_j$  et de masse au repos  $m_j$  (électrons et ions par exemple). Supposons que le mouvement s'effectue à une dimension suivant la direction des  $x$ . En absence du champ magnétique ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ), les équations (A.2), (A.6), et (A.24) qui décrivent la dynamique d'un tel système peuvent être réécrites respectivement de cette manière

$$\frac{\partial \gamma_j n_j}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_j n_j u_j}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial h_j \gamma u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial h_j \gamma u_j}{\partial x} \right) + \frac{1}{\gamma_j n_j} \frac{\partial p_j}{\partial x} = -q_j \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_j}{n_j^{\alpha_j}} \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_j}{n_j^{\alpha_j}} \right) = 0, \quad (\text{A.28})$$

où «  $j$  » dénote l'espèce de particules considérée, et  $h_j$  est l'enthalpie par particule donnée par

$$h_j = \frac{w_j}{n_j} = m_j c^2 + \frac{\alpha_j}{\alpha_j - 1} \frac{p_j}{n_j}, \quad (\text{A.29})$$

et  $\phi$  est le potentiel électrostatique qui devrait satisfaire l'équation de Poisson relativiste déduite de l'équation (A.4) en posant  $\mu = 0$ ,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi \sum_j q_j \gamma_j n_j \quad (\text{A.30})$$

où la sommation porte sur toutes les espèces de particules «  $j$  » contenues dans le plasma.

---

## ANNEXE

# B

## L'EXPRESSION DE LA VITESSE DU SON RELATIVISTE

La vitesse du son relativiste est définie dans la théorie de la dynamique des gaz relativistes par [14]

$$c_R^2 \equiv c^2 \left( \frac{\partial p}{\partial e} \right)_\sigma, \quad (\text{B.1})$$

où  $e$ ,  $p$ , et  $\sigma$  représentent respectivement la densité d'énergie interne, la pression, et l'entropie. Réécrivons cette dernière de cette manière

$$c_R^2 = c^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma \left( \frac{\partial \rho}{\partial e} \right)_\sigma. \quad (\text{B.2})$$

À partir de la première loi de la thermodynamique

$$T d\sigma = p d \left( \frac{1}{\rho} \right) + p d \left( \frac{e}{\rho} \right) = -\frac{e}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho} de, \quad (\text{B.3})$$

nous avons

$$\left( \frac{d\rho}{de} \right)_\sigma = \frac{1}{h}, \quad (\text{B.4})$$

où  $h$  est l'enthalpie par particule dont l'expression est la suivante

$$h = \frac{p + e}{\rho}, \quad (\text{B.5})$$

$\rho = mn$  étant la densité de masse. En s'appuyant sur ces deux relations de thermodynamique

$$de = \rho dh + h d\rho - dp, \quad (\text{B.6})$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial p} dp + \frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho, \quad (\text{B.7})$$

nous pouvons réécrire la loi donnée par l'équation (B.3) comme suit

$$Td\sigma = \left( \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{1}{\rho} \right) dp + \frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho. \quad (\text{B.8})$$

Ainsi, nous aurons

$$\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_\sigma = - \frac{\rho (\partial h / \partial \rho)}{\rho (\partial h / \partial p) - 1}. \quad (\text{B.9})$$

En substituant les équations (B.9) et (B.4) dans l'équation (B.2), nous obtenons l'expression de la vitesse du son relativiste

$$c_R^2 = -c^2 \frac{\rho (\partial h / \partial \rho)}{h (\rho (\partial h / \partial p) - 1)}. \quad (\text{B.10})$$

En utilisant maintenant l'équation d'état polytropique, donnée par l'équation (A.23), reliant la densité d'énergie interne, la pression, et la densité de masse, l'expression finale de  $c_R$  sera donnée par

$$c_R^2 = \frac{c^2(\alpha - 1)c_s^2}{c^2(\alpha - 1) + c_s^2}, \quad (\text{B.11})$$

où  $c_s^2 = \alpha p / \rho$  est la vitesse du son classique.

## ANNEXE

# C

## DISTRIBUTION DE MAXWELL-JÜTTNER

### C.1 Normalisation

Considérons un gaz relativiste dont les particules ont la masse au repos  $m$  et la charge électrique  $q$ . Toutes les équations qui suivent peuvent être facilement adaptées aux cas d'un mélange de plusieurs espèces de particules, par exemple un plasma composés d'ions et d'électrons. La fonction de distribution dans l'espace de phase  $(\mu, x)$  d'un tel gaz a été établie pour la première fois par Jüttner [18, 19]

$$f_{MJ}(\mu, x) = A \exp \left[ -\varepsilon^{-1} \sqrt{1 + \mu^2} - \kappa \phi(x) \right], \quad (\text{C.1})$$

où  $A$  est la constante de normalisation,  $\phi$  est le potentiel électrostatique,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , et  $\kappa$  sont donnés respectivement par

$$\varepsilon \equiv \frac{k_B T}{m c^2}, \quad \mu \equiv \frac{p}{m c}, \quad \kappa \equiv \frac{q}{k_B T}, \quad (\text{C.2})$$

avec  $k_B$  est la constante de Boltzman,  $T$  est la température du gaz,  $c$  est la vitesse de la lumière et  $p$  est l'impulsion relativiste ayant la forme suivante

$$p = \gamma m v, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (\text{C.3})$$

La fonction de distribution des vitesses à l'équilibre ( $\phi = 0$ )  $f_{MJ}^{(0)}(\mu)$  est normalisée par rapport à la densité de particules propre à l'équilibre en évaluant l'intégrale suivante

$$n_0 = \int f_0(\mu) d^3\mu, \quad (C.4)$$

ou, d'une manière équivalente,

$$n_0 = 4\pi A \int_0^\infty \mu^2 \exp[-\varepsilon^{-1} \sqrt{1 + \mu^2}] d\mu. \quad (C.5)$$

Introduisons ce nouveau changement de variables

$$\begin{aligned} s^2 = \mu^2 + 1 &\Rightarrow s ds = \mu d\mu \\ \mu : 0 \rightarrow +\infty &\Rightarrow s : 1 \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (C.6)$$

En substituant tout ça dans l'équation (C.5), celle-ci devient

$$n_0 = 4\pi A \int_1^\infty s (s^2 - 1)^{1/2} \exp(-s/\varepsilon) ds \quad (C.7)$$

Notons que

$$\int_1^\infty s (s^2 - 1)^{1/2} ds = \frac{1}{3} (s^2 - 1)^{3/2}, \quad (C.8)$$

cela permet l'intégration par partie de l'équation (C.7). Il en résulte

$$n_0 = \frac{4\pi A \varepsilon}{3} \int_1^\infty (s^2 - 1)^{3/2} \exp(-s/\varepsilon) ds. \quad (C.9)$$

Nous rappelons la forme intégrale de la fonction de Bessel modifiée  $K_\nu(z)$  [82]

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{(z/2)^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma[\nu + (1/2)]} \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\nu - (1/2)} e^{-zt} dt \\ &\left[ \Re e\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad (C.10)$$

Dans la limite où  $z \rightarrow \pm\infty$ , la valeur asymptotique de  $K_\nu(z)$  est donnée par

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{1}{2z} + \dots \right] \quad (C.11)$$

En utilisant (C.10) dans (C.9), nous obtenons l'expression de la constante de normalisation  $A$  en fonction de la densité de particules propre à l'équilibre  $n_0$  et de la fonction de Bessel de seconde espèce  $K_2$  ainsi

$$A = \frac{n_0}{4\pi \varepsilon K_2(\varepsilon^{-1})}. \quad (C.12)$$

Ainsi, la distribution maxwellienne relativiste où de Maxwell-Jüttner se sera donnée par [20, 21]

$$f_{MJ}(\mu, x) = \frac{n_0}{4\pi\varepsilon K_2(\varepsilon^{-1})} \exp \left[ -\varepsilon^{-1} \sqrt{1+\mu^2} - \kappa\phi(x) \right], \quad (\text{C.13})$$

et la densité qui lui correspondant, mesurée dans un référentiel arbitraire,

$$n = n_0 \exp(-\kappa\phi). \quad (\text{C.14})$$

La densité de particules propre  $n$  est définie ainsi [83]

$$n = \int \frac{d^3\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} f_{MJ}(\mu, x). \quad (\text{C.15})$$

La densité de particules propre est un invariant relativiste indépendante de la vitesse du repère auquel elle se réfère et tend vers  $n$  dans le cas limite d'une distribution froide de particules. Le rapport de la densité de particules propre,  $n$ , sur  $n$  est

$$\frac{n}{n} = \frac{K_1(\varepsilon^{-1})}{K_2(\varepsilon^{-1})}. \quad (\text{C.16})$$

L'inégalité  $K_1(\varepsilon^{-1}) < K_2(\varepsilon^{-1})$  implique que la densité de particules propre est toujours inférieure à la densité de particules relative pour la distribution Maxwell-Jüttner. Le rapport  $K_1(\varepsilon^{-1})/K_2(\varepsilon^{-1})$  tend vers 1 dans la limite classique, c'est-à-dire quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et tend vers  $\varepsilon/2$  dans la limite ultra-relativiste, c'est-à-dire quand  $\varepsilon \gg 1$ .

## C.2 Limite non-relativiste

En utilisant (C.3), nous pouvons montrer que

$$1 + \mu^2 = 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad (\text{C.17})$$

qui, dans la limite non-relativiste, donne

$$\begin{aligned} 1 + \mu^2 &\simeq 1 + \beta^2 \\ \mu^2 &\simeq \beta^2 \\ \sqrt{1 + \mu^2} &\simeq \sqrt{1 + \beta^2} \simeq 1 + \frac{\beta^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

et permet ainsi d'écrire  $f_0$ , en utilisant (C.11), de la sorte

$$f_{MJ}^{(0)} \sim n_0 c^3 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{mv^2}{2k_B T} \right]. \quad (\text{C.19})$$

Dans la même limite, nous avons

$$d^3\mu \rightarrow \frac{d^3v}{c^3} \quad \text{et} \quad n_0 \rightarrow n_0, \quad (\text{C.20})$$

et par conséquent  $f_{MJ}^{(0)}(\mu)d^3\mu \rightarrow f_{MB}^{(0)}(v)d^3v$ , où  $f_{MB}^{(0)}(v)$  représente la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann classique à l'équilibre et dont l'expression est la suivante :

$$f_{MB}^{(0)}(v) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{mv^2}{2k_B T} \right]. \quad (\text{C.21})$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Scott-Russell, Proc. Roy. Soc. Edinburgh , 319 (1844).
- [2] D. J. Kortweg and G. D. Vries, Phil. Mag. **39**, 422 (1895).
- [3] C. S. Gardner and G. M. Morikawa, Comm. Pure Appl. Math. **18**, 35 (1965).
- [4] H. Washimi and T. Taniuti, Phys. Rev. Lett. **17**, 996 (1966).
- [5] H. Ikezi, R. J. Taylor, , and R. D. Baker, Phys. Rev. Lett. **25**, 11 (1970).
- [6] H. Ikezi, Phys. Fluids **16**, 1668 (1973).
- [7] J.I.Vette, *Summary of particle population in the magnetosphere, in : Particle and Fields in the Magnetosphere*, Reidel, Dordrecht, 1970.
- [8] J.Arons, Space Sci.Rev. **24**, 417 (1979).
- [9] H.Ikezi, Phys. Fluids **16**, 1668 (1973).
- [10] I. Langmuir, Proceedings of the National Academy of Sciences **14**, 627 (1928).
- [11] H. M. Mott-Smith, Nature **28**, 233 (1971).
- [12] T. Boyd and J. Sanderson, *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, 2003.
- [13] J.-L. D. et Abraham Bers, *Physique des Plasmas*, volume 1, IEdp Sciences, 1994.
- [14] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 1975.
- [15] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.

- 
- [16] M. Kunik, S. Qamar, and G. Warnecke, *J. Comput. Phys.* **192**, 695 (1973).
- [17] E. S. WEIBEL, *Plasma Phys.* **9**, 665 (1967).
- [18] F. Jüttner, *Ann. Phys.* **34**, 856 (1911).
- [19] F. Jüttner, *Ann. Phys.* **35**, 145 (1911).
- [20] R. L. Liboff, *Kinetic Theory - Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions*, Springer, third edition, 2003.
- [21] S. R. D. Groot, W. A. Vanleeuwen, and C. G. Deweert, *Relativistic Kinetic Theory : Principles and Applications*, Elsevier Science and Technology Books, 1980.
- [22] G. Das and S. Paul, *Phys. Fluids* **28**, 823 (1985).
- [23] Y. Nijoh, *Phys. Fluids B* **4**, 2830 (1992).
- [24] A. Esfandyari, S. Khorram, , and A. Rostami, *Phys. Plsmas* **8**, 4753 (2001).
- [25] K. Singh and V. Kumar, *Phys. Plsmas* **12**, 052103 (2005).
- [26] R. Roychoudhury and S. Bhattacharyya, *Phys. Fluids* **30**, 2582 (1987).
- [27] K. Ghosh and D. Ray, *Phys. Fluids* **3**, 303 (1991).
- [28] H. Kuehl and C. Zhang, *Phys. Fluids B* **3**, 555 (1991).
- [29] Y. Nejob and H. Sanuki, *Phys. Plsmas* **1**, 2154 (1994).
- [30] O. Sah and K. Goswami, *Phys. Plsmas* **2**, 365 (1995).
- [31] P. Chatterjee and R. Jana, *Can. J. Phys.* **54**, 489 (2004).
- [32] N. Lee and C. R. Choi, *Phys. Plsmas* **14**, 022307 (2007).
- [33] N. C. Lee, *Phys. Plsmas* **15**, 022307 (2008).
- [34] J. Mckenzie, *Phys. Plsmas* **9**, 800 (2002).
- [35] J. Mckenzie, *Phys. Plsmas* **67**, 353 (2002).
- [36] F. Verheest, T. Cattaert, G. Lakshina, and S. Singh, *J. Plasma Phys.* **70**, 237 (2004).
- [37] F. Verheest, T. Cattaert, M. Hellberg, and R. Mace, *Phys. Plsmas* **13**, 042301 (2006).
- [38] A. Hupé, *Limites et Dérivées (Cours et Exercices Corrigés)*, volume 1, Ellipses Marketing, 1994.
- [39] N. C. Lee, *Phys. Plsmas* **15**, 082301 (2008).
- [40] S. G. Tagare, *Phys. Plsmas* **7**, 883 (2000).
-

- 
- [41] S. Ghosh and R. Bharuthram, *Astrophys. Space Sci.* **314**, 121 (2008).
- [42] Y. Xie and Y. Hunan, *Inter. J. Nonlinear Science* **6**, 124 (2008).
- [43] G. Gibbons, S. Hawking, and S. Siklas, *The Very Early Universe*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.
- [44] H. Miller and P. Witta, *Active Galactic Nuclei*, Springer-Verlag, Berlin.
- [45] F. Rizzato, *J. Plasma Phys.* **40**, 289 (1988).
- [46] V. Berezhian, M. El-Ashry, and U. Mofiz, *Phys. Rev. E* **50**, 448 (1994).
- [47] P. Shukla, M. Yu, and N. Tsintsadze, *Phys. Fluids* **27**, 327 (1984).
- [48] W. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [49] M. Rees, *In the Very Early Universe*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [50] T. Kotani, N. Kawai, M. Matsuoka, and W. Brinkmann, *Astron. Soc. Jpn.* **48**, 619 (1996).
- [51] S. Popel, S. Vladimirov, and P. Shukla, *Phys. Plasmas* **2**, 716 (1995).
- [52] Y. Nejoh, *Phys. Plasmas* **3**, 1447 (1996).
- [53] S. Mahajan, V. Berezhiani, and R. Miklaszewski, *Phys. Plasmas* **5**, 3264 (1998).
- [54] M. Salahuddin, H. Saleem, and M. Saddiq, *Phys. Rev. E* **66**, 0346407 (2002).
- [55] H. Hasegawa, S. Irie, S. Usami, and Y. Ohsawa, *Phys. Plasmas* **9**, 2549 (2002).
- [56] S. Mahmood, A. Mushtaq, and H. Saleem, *New J. Phys.* **5**, 281 (2003).
- [57] H. Saleem, Q. Haque, and J. Vranes, *Phys. Rev. E* **67**, 057402 (2003).
- [58] H. Saleem and S. Mahmood, *Phys. Plasmas* **10**, 2612 (2003).
- [59] P. Shukla, J. Mendonca, and R. Bingham, *Phys. Scr. T* **113**, 133 (2004).
- [60] H. Hasegawa and Y. Ohsawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **73**, 1764 (2004).
- [61] W. El-Taibany, W. Moslem, M. Wadati, and P. Shukla, *Phys. Lett. A* **372**, 4067 (2008).
- [62] S. Mahmood and N. Akhtar, *Eur. Phys. J. D* **49**, 217 (2008).
- [63] S. Singh and T. Honzawa, *Phys. Fluids B* **5**, 2093 (1993).
- [64] H. Malik, S. Singh, and R. Dahiya, *Phys. Plasmas* **1**, 1137 (1994).
- [65] T. Gill, H. Kaur, and N. Saini, *J. Plasma Phys.* **71**, 23 (2004).
- [66] C. K. Goertz, *Rev. Geophys.* **27**, 271 (1989).
-

- 
- [67] D. A. Mendis and M. Rosenberg, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 419 (1994).
- [68] M. Horanyi, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 383 (1996).
- [69] F. Verheest, *Waves in Dusty Space Plasmas*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [70] P. K. Shukla and A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics*, Institute of Physics, Bristol, 2002.
- [71] P. K. Shukla and B. Eliasson, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 25 (2009).
- [72] G. S. Selwyn, *Jpn. J. Appl. Phys.* **32**, 3068 (1993).
- [73] P. V. Bliokh and V. V. Yarashenko, *Sov. Astron.* **29**, 330 (1985).
- [74] P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **8**, 1791 (2001).
- [75] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thomson, and N. D'Angelo, *Phys. Plasmas* **5**, 1607 (1998).
- [76] N. N. Rao, P. K. Shukla, and M. Y. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [77] P. K. Shukla and V. P. Silin, *Phys. Scr.* **45**, 508 (1992).
- [78] M. Tribeche and S. Boukhalfa, *Phys. Plasmas* **16**, 094502 (2009).
- [79] M. Tribeche, S. Boukhalfa, and T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **17**, 064501 (2010).
- [80] M. Tribeche, H. Houili, and T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **9**, 419 (2002).
- [81] M. Tribeche, L. A. Gougam, and T. H. Zerguini, *Phys. Scr.* **75**, 354 (2007).
- [82] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt Academic Press, fifth edition, 2001.
- [83] D. B. Melrose, *Quantum plasmadynamics I. Unmagnetized plasmas*, School of Physics, University of Sydney, 2006.
-