N° d'ordre : 05/2011-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIEN»
FACULTE DE MATHEMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de Docteur
En Mathématiques
Spécialité: Analyse E.D.P
Par : LAOUBI Karima

Thème

Contrôle et Stabilisation Frontière de Problèmes Hyperboliques

Soutenu publiquement, le 28/06/2011, devant le jury composé de :

M. D. TENIOU	Professeur à l' U.S.T.H.B	Président
M. A. HEMINNA	Professeur à l' U.S.T.H.B	Directeur de thèse
M. M. MEDJDEN	Professeur à l' U.S.T.H.B	Examinateur
M. H. OSMANOV	Professeur à l' U.M.B.B	Examinateur
M. T. ALIZIANE	M.C/A à l'U.S.T.H.B	Examinateur
M. A. KHEMMOUDJ	M.C/A à l'U.S.T.H.B	Examinateur
Mme. O. ZAIR	M.C/A à l' U.S.T.H.B	Examinatrice

Table des matières

0 Introduction **2**

0.1 Chapitre I 4

0.2 Chapitre II 4

0.3 Chapitre III 4

0.4 Bibliographie 14

1 Rappel sur quelques travaux réalisés dans le domaine de la stabilité polynômiale **18**

1.1 Définitions 19

1.1.1 Stabilisation exponentielle 19

1.1.2 Stabilisation forte 19

1.2 Quelques travaux réalisés dans le domaine de la stabilité polynômiale 20

1.3 Bibliographie 23

2 Stabilisation polynômiale de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type Ventcel **26**

2.1 Le problème 27

2.2 Partie A :*Contrôle sur un côté du bord* 29

2.2.1 Stabilisation exponentielle d'un model 1-d avec un paramètre. 29

2.2.2 Stabilisation polynômiale 47

2.3 Partie B :*Contrôle sur deux côtés parallèles* 49

2.3.1 Stabilisation exponentielle d'un model 1-d avec un paramètre. 49

2.3.2 Stabilisation polynômiale 68
2.4 Comparaison 70
2.5 Bibliographie 71

3 Etude de la stabilisation polynômiale du problème de Ventcel pour l'équation des ondes posée dans un disque 74
3.1 Fonctions de Bessel 76
3.1.1 Equations et fonctions de Bessel 76
3.1.2 Quelques propriétés des fonctions de Bessel de 1^{re} espèce 77
3.1.3 Zéros de Bessel 78
3.2 Existence et unicité de la solution 80
3.3 Formulation du problème 81
3.4 Stabilisation exponentielle d'un model à une dimension 82
3.5 Graphique 89
3.6 Stabilisation polynômiale 100
3.7 Bibliographie 102

4 Conclusion Remarques et Perspectives 105

Chapitre 0

Introduction

Dans ce travail, nous proposons l'étude de la stabilisation polynômiale de l'équation des ondes, posée dans différents domaines avec des conditions aux limites de type Ventcel sur une partie de la frontière et de type Dirichlet sur la partie restante (parties A et B du chapitre2). Par contre, dans le chapitre3, on s'est limité à des conditions aux limites de type Ventcel uniquement.

Les conditions aux limites de type Ventcel sont caractérisées par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels du même ordre que l'opérateur principal. Elles sont justifiées par des méthodes asymptotiques et apparaissent dans les problèmes de mécanique (cf.[14]), de processus de diffusion (cf.[13, 24]) et dans certains phénomènes ondulatoires (cf.[7, 8, 9, 15, 16]).

Plusieurs techniques ont été développées pour montrer la convergence polynômiale de différents problèmes d'évolutions. Parmi celles ci on peut citer : la méthode d'estimation de l'énergie combinée avec la technique des multiplicateurs [19, 22], la méthode des bases de Riez utilisée dans [17, 26], une inégalité de l'énergie établie dans [?] et généralisée dans [2] et [11] et enfin, nous terminons par signaler une méthode faisant intervenir l'analyse de Fourier, basée sur l'inégalité d'Ingham donnée dans [3].

Monsieur le professeur A.Heminna a montré dans ses travaux [8, 9] que le feedback naturel utilisé dans notre système n'assure pas une dissipation suffisante de l'énergie pour permettre sa décroissance exponentielle.

L'objectif de ce travail,(composé de trois parties), est de montrer que notre problème admet une décroissance polynômiale en utilisant une méthode basée sur l' analyse de Fourier combinée avec l'inégalité d'Ingham et la technique des multiplicateurs.

Ce travail est subdivisé en trois chapitres :

0.1 Chapitre I

Dans le 1^{er} chapitre, nous allons présenter quelques résultats récents de la stabilité polynômiale associés à des problèmes d'évolutions.
Nous pensons que ces résultats nous permettent de mieux saisir la problématique de notre problème principal.

0.2 Chapitre II

Dans ce chapitre, nous rentrons dans le vif du sujet à savoir : l'étude de la stabilité polynômiale du problème de Venctel pour l'équation des ondes posé dans un ouvert borné de IR^2.
• Nous supposons dans la 1^{re} partie de ce chapitre que le sous ensemble Γ_1 sur lequel porte le feedback est composé d'un seul côté.
• Dans la 2^e partie, nous montrons que notre problème admet une décroissance polynômiale dans le cas où la frontière Γ_1 est composée de deux côtés parallèles.

0.3 Chapitre III

Dans ce chapitre, nous abordons le même problème sous une autre forme Autrement dit : Nous étendons l'étude développée dans le 2^e chapitre au cas d'un disque et, on démontre que l'énergie des solutions exprimées en coordonnées polaires admet une décroissance polynômiale en se servant cette fois ci des fonctions de Bessel.

Les trois chapitres sont présentés comme suit :

On a réservé le 1^{er} chapitre à l'essentiel qui a été traité dans ce domaine par les différents auteurs.
Nous pouvons consulter ces travaux en [2],[4] et [18] etc.

Chapitre II :

<u>Partie</u> A :

Dans cette partie on montre, pour un certain choix spécifique de la frontière Γ_1 sur laquelle porte le feedback, que le problème de Ventcel donné ci-dessous admet une décroissance polynômiale $\cdot$

Plus précisément : Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & dans\ \Omega \times IR^+, \\ \partial_\nu u - \triangle_T u + u_t = 0 & sur\ \Gamma_1 \times IR^+, \\ u = 0 & sur\ \Gamma_0 \times IR^+, \\ u(\cdot, 0) = u_0,\ u_t(\cdot, 0) = u_1 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Où $\Omega = (0,1)^2$ est un ouvert borné de IR^2 de frontière Γ telle que :

$$\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_0}$$

$\Gamma_1 = \{(1, y) : 0 < y < 1\}$ et $\Gamma_0 = \partial\Omega \backslash \overline{\Gamma_1}$.

$\triangle_T$ désigne le Laplacien tangentiel,(cf. [24]).

La 1^{re} section de cette partie est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des semi groupes (cf. [5]).

Dans la 2^e section, on considère le model $1 - d$ suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}^{(L)} - u_{xx}^{(L)} + L^2 u^{(L)} = 0 & \text{dans } (0,1), \forall t > 0, \\ u^{(L)}(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u_x^{(L)}(1,t) = -L^2 u^{(L)}(1,t) - u_t^{(L)}(1,t), & \forall t > 0, \\ u^{(L)}(\cdot, 0) = u_0^{(L)}, u_t^{(L)}(\cdot, 0) = u_1^{(L)}, & \text{dans } (0,1) \end{cases} \tag{2}$$

où L est un paramètre réel positif supérieur à 2.

Dans le but de montrer que l'énergie de ce problème vérifie :

$$E_L(t) \leq C(L)e^{-\omega(L)t}E_L(0). \tag{3}$$

on utilise la démarche suivante :

On écrit $u^{(L)}$ sous la forme :

$$u^{(L)} = y + w$$

où y est solution du même problème que $u^{(L)}$ mais sans dissipation, w est le reste.

On vérifie aisément que y et w sont respectivement solutions de :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + L^2 y = 0 & \text{dans } (0,1), \forall t > 0, \\ y(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ y_x(1,t) = -L^2 y(1,t), & \forall t > 0, \\ y(\cdot,0) = u_0^{(L)}, y_t(\cdot,0) = u_1^{(L)}, \quad \text{dans } (0,1) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + L^2 w = 0 & \text{dans } (0,1), \forall t > 0, \\ w(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ w_x(1,t) = -L^2 w(1,t) - u_t^{(L)}(1,t), & \forall t > 0, \\ w(\cdot,0) = 0, w_t(\cdot,0) = 0. \quad \text{dans } (0,1) \end{cases} \tag{5}$$

Pour le 1^{er} problème (4), on montre que les valeurs propres $(\lambda_n)_n$ assocées à l'opérateur positif auto adjoint A_L défini par :

$$A_L v = -v_{xx} + L^2 v, \ \ \forall v \in D(A_L).$$

où

$$D(A_L) = \{v \in H^2(0,1) : v(0) = 0 \text{ et } v_x(1) = -L^2 v(1)\},$$

vérifient la condition :

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{\pi}{4L\sqrt{2}}, \ \ \forall k \in N. \tag{6}$$

La condition (6) est d'une importance capitale pour pouvoir appliquer l'inégalité d'Ingham [10] (voir aussi [6]).

Cette dernière inégalité nous permet d'en déduire en utilisant la théorie spectrale l'estimation de l'énergie :

$$E_y(0) \leq C_2 L^3 \int_0^T (y_t(1,t))^2)\, dt. \tag{7}$$

C_2 est une constante positive .

Pour le second (5) ; on montre par la technique des multiplicateurs l'inégalité :

$$\int_0^T w_t(1,t)^2\, dt \leq C(T^2 + T + 1) \int_0^T u_t(1,t)^2\, dt. \tag{8}$$

pour $T > 0$ fixé.

En combinant les deux inégalités (7) et (8) et les arguments donnés dans la preuve du théorème 3.3 de [21], on obtient l'estimation (3) de la stabilité exponentielle.
En injectant ensuite l'inégalité $x^k e^{-x} \leq c_k, \quad x \geq 0$, dans (3) où c_k est une constante positive et $k \in IN^*$, on obtient :

$$E_{l\pi}(t) \leq C_1 \frac{c_k l^{6k}}{C_2^k t^k} E_{l\pi}(0) = \frac{C_k}{t^k} l^{6k} E_{l\pi}(0), \quad L = l\pi.$$

Enfin, l'analyse de Fourier nous permet de déduire, pour des données initiales vérifiant $u_0 \in H^{3k+1}(\Omega)$ tel que $u_{0|\Gamma_1} \in H^{3k+1}(\Gamma_1)$ et $u_1 \in H^{3k}(\Omega)$, $k \in IN^*$(cf.[2] et [12]), l'estimation de convergence polynômiale :

$$E(t) \leq \frac{C_k}{t^k} E^{(k)}(0), \tag{9}$$

où

$$E^{(k)}(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{3k+1}(\Omega)} + \|u_{0||\Gamma_1}\|^2_{H^{3k+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^{3k}(\Omega)}$$

Partie B :

Nous reprenons dans cette partie le problème de Ventcel (1).
On considére le cas général où :

$$\Gamma_1 = \{(1,y) : 0 < y < 1\} \cup \{(0,y) : 0 < y < 1\}$$

En adoptant le même principe utilisé dans la partie A, on montre dans la 2^e section de celle ci que les valeurs propres $(\lambda_n)_n$ associées au problème :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + L^2 y = 0 & dans\ (0,1), \forall t > 0, \\ y_x(0,t) = L^2 y_(0,t), & \forall t > 0, \\ y_x(1,t) = -L^2 y(1,t), & \forall t > 0, \\ y(\cdot,0) = u_0^{(L)}, y_t(\cdot,0) = u_1^{(L)}, & dans\ (0,1) \end{cases} \tag{10}$$

vérifient la condition :

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \ \geq \ \gamma \ = \ \frac{\pi\sqrt{2}}{8L}, \ \ \forall \ k \ \in \ IN. \tag{11}$$

Cette dernière inégalité est alors utilisée pour montrer l'estimation :

$$E_y(0) \leq C \int_0^T ((y_t(1,t))^2 + (y_t(0,t))^2)\, dt, \quad \forall T \ \geq \ 16L\sqrt{2}. \tag{12}$$

où C est une constante positive.

Puis, on montre une estimation sur w solution du problème restant à savoir :

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + L^2 w = 0 & dans\ (0,1), \forall t > 0, \\ w_x(0,t) = L^2 w(0,t) + u_t^{(L)}(0,t), & \forall t > 0, \\ w_x(1,t) = -L^2 w(1,t) - u_t^{(L)}(1,t), & \forall t > 0, \\ w(\cdot,0) = 0, w_t(\cdot,0) = 0, & dans\ (0,1) \end{cases}$$

en procédant de la manière suivante : On écrit maintenant w sous la forme :

$$w = z + v$$

où z (respectivement v) est solution du même problème que w mais avec dissipation en 1 uniquement (respectivement en 0 uniquement).

On obtient alors les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} + L^2 z = 0, \quad \text{dans} \quad (0,1), \ \ \forall t > 0, \\ z_x(0,t) = L^2\, z(0,t), \qquad \forall t > 0, \\ z_x(1,t) = -L^2 z(1,t) - k_1(t), \ \forall t > 0, \\ z(\cdot,0) = 0, \ \ z_t(\cdot,0) = 0. \ \ \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{13}$$

et

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + L^2 v = 0, \quad \text{dans} \quad (0,1), \quad \forall t > 0, \\ v_x(0,t) = L^2 v(0,t) + k_2(t), \; \forall \; t > 0, \\ v_x(1,t) = -L^2 v(1,t), \qquad \forall t > 0, \\ v(\cdot,0) = 0, \;\; v_t(\cdot,0) = 0, \quad \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{14}$$

où

$$k_1(t) = \begin{cases} u_t^{(L)}(1,t) \;\; si \;\; 0 < t < T \\ 0 \;\; \text{ailleurs}, \end{cases}$$

et

$$k_2(t) = \begin{cases} u_t^{(L)}(0,t) \;\; si \;\; 0 < t < T \\ 0 \;\; \text{ailleurs}. \end{cases}$$

En utilisant la technique des multiplicateurs, on montre que :

$$\int_0^T (z_t^2(1,t) + z_t^2(0,t))\,dt \leq C'(T^2 + T + 1)\int_0^T (u_t^{(L)}(1,t))^2\,dt \tag{15}$$

et

$$\int_0^T (v_t^2(1,t) + v_t^2(0,t))\,dt \leq C''(T^2 + T + 1)\int_0^T (u_t^{(L)}(0,t))^2\,dt \tag{16}$$

Par suite, il est évident qu'en combinant (15) et (16) on obtient l'estimation sur w suivante :

$$\int_0^T (w_t^2(1,t) + w_t^2(0,t))\,dt \leq C(T^2 + T + 1)\int_0^T ((u_t^{(L)}(1,t))^2 + (u_t^{(L)}(0,t))^2)\,dt \tag{17}$$

Les inégalités (12) et (17) permettent de déduire l'existence de deux constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de L telles que :

$$E_L(t) \leq C_1 e^{-\frac{C_2}{L^3}t} E_L(0). \tag{18}$$

En utilisant l'analyse de Fourier et l'estimation (18), on obtient le résultat fondamental de la stabilité polynômiale suivant :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^k} E^{(k)}(0), \tag{19}$$

où

$$E^{(k)}(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{\frac{3}{2}k+1}(\Omega)} + \|u_{0||\Gamma_1}\|^2_{H^{\frac{3}{2}k+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{3}{2}k}(\Omega)}, \;\; \forall t \, > \, 0,$$

pour des données initiales suffisamment régulières i.e.

$(u_0, u_1) \in H^{\frac{3}{2}k+1}(\Omega) \times H^{\frac{3}{2}k}(\Omega)$ vérifiant $u_{0|\Gamma_1^j} \in H^{\frac{3}{2}k+1}(\Gamma_1^j)$, $j = 1, 2$.(cf. [2]).

Remarque 0.1. *Dans la partie B, on a obtenu la même stabilisation, avec des données initiales moins régulières.*

Chapitre III :

Etude du problème de Ventcel pour l'équation des ondes posée dans un disque :
On se donne un ouvert Ω borné de IR^2 de frontière Γ de classe C^2 tel que :

$$\Omega = \{x \in IR^2; 0 < |x| < 1\}$$

$$\Gamma = \{x \in IR^2/|x| = 1\}$$

On considère le problème :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathcal{IR}^+ \\ \partial_\nu u - \triangle_T u + u_t = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathcal{IR}^+ \\ u(\cdot, 0) = u^0, \ u_t(\cdot, 0) = u^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{20}$$

Dans la 1^{re} section de ce chapitre, on rappelle quelques notions élémentaires sur les fonctions de Bessel. Nous abordons également le problème des zéros de Bessel qui sont d'un intérêt capital dans la 3^e section.

En se basant sur les travaux de M.Abramowitz [1] et GN .Watson [25], on montre que tous les zéros des fonctions de Bessel sont entrelacés et, on termine cette partie par quelques résultats essentiels sur le comportement asymptotique de ces valeurs. Dans la 2^e section, nous montrons que le problème est bien posé et, on s'intéressera à la formulation de celui ci en coordonnées polaires en écrivant :

$$u = \sum_{\kappa \in Z} u^{(2\kappa)} e^{i2\kappa\theta}$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Où $u^{(2\kappa)}$ est le coefficient de Fourier de u.

On obtient le problème à une dimension suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(k)} + \frac{(k)^2}{r^2}u^{(k)} = 0 & \text{dans} \quad (0,1)\times R^+ \\ \frac{\partial}{\partial r}u^{(k)}(1) + (k)^2 u^{(k)}(1) + u_t^{(k)}(1) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times R^+ \\ u^{(k)}(0) = 0 & \text{sur} \quad IR^+ \\ u^{(k)}(\cdot,0) = u_0^{(k)}, \ u_t^{(k)}(\cdot,0) = u_1^{(k)} & \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{21}$$

Où $k = 2\kappa$, $k \in Z$

Par la suite , on montre que l'énergie du problème (21) définie par :

$$E_k(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ((\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)}))r dr + \frac{k^2}{2}(u^{(k)}(1))^2. \tag{22}$$

vérifie :

$$E_k'(t) = -((u_t^{(k)}(1))^2$$

Maintenant , pour démontrer la stabilité exponentielle du problème (21), on considère les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} y_{tt} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 y + \frac{(k)^2}{r^2}y = 0 & \text{dans} \quad (0,1)\times R^+ \\ \frac{\partial y}{\partial r}(1) = -(k)^2 y(1) & \text{sur} \quad \Gamma \times R^+ \\ y(0) = 0 & \text{sur} \quad IR^+ \\ y(\cdot,0) = u_0^{(k)}, \ y_t(\cdot,0) = u_1^{(k)} & \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 w + \frac{(k)^2}{r^2}w = 0 & \text{dans} \quad (0,1)\times R^+ \\ \frac{\partial w}{\partial r}(1) = -(k)^2 w(1) - u_t^{(k)}(1) & \text{sur} \quad \Gamma \times R^+ \\ w(0) = 0 & \text{sur} \quad IR^+ \\ w(\cdot,0) = 0, \ w_t(\cdot,0) = 0 & \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{24}$$

Pour le problème (23) , on introduit l'opérateur positif, autoadjoint à résolvante compacte A_k défini sur $L^2((0,1))$ par :

$$A_k(\upsilon) = -\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2\upsilon + \frac{(k)^2}{r^2}\upsilon$$

et de domaine :

$$D(A_k) = \{\upsilon \in H^2(0,1) : \upsilon(0) = 0 \text{ et } \upsilon_r(1) = -k^2\upsilon(1)\}$$

Puis , on associe le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + (\lambda^2 - \frac{k^2}{r^2})\varphi = 0 \\ \varphi_r(1) = -k^2\varphi(1) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

En utilisant les conditions aux limites on obtient :

• Les fonctions propres :$\varphi_n(r) = \alpha_n J_k(\lambda_n(r)),\ n \geq 0$ qui sont solutions du problème (25).

• L'équation caractéristique :

$$\frac{J_k(\lambda)}{J_{k+1}(\lambda)} = \frac{1}{k^2+k}\lambda \ \ , k \neq 0$$

où J_k est la fonction de Bessel de 1^{re} espèce d'ordre k.

En utilisant la formule de Green et les propriétés des zéros de Bessel, on montre que les valeurs propres $(\lambda_n)_n$ de l'opérateur A_k vérifient les deux conditions :

• $\lambda_n^2 > k^2 \qquad \forall\, n \geq 0.$

• Il existe une constante $c > 0$ tel que :

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c, \quad \forall\ n\ \in\ IN, \tag{26}$$

A ce stade, on peut utiliser l'inégalité d'Ingham (cf. [10]) pour en déduire l'estimation de l'énergie suivante :

$$E_y(0) \leq c_2 \int_0^T (y_t(1,t))^2\, dt \tag{27}$$

L'estimation suivante sur w solution du problème (24) :

$$\int_0^T (w_t^2(1,t))\, dt \leq C(T^2+T+1) \int_0^T ((u_t^{(k)}(1,t))^2) dt \tag{28}$$

est démontrée en utilisant la technique des multiplicateurs en coordonnées polaires. Par combinaison des deux estimations (27) et (28) et avec la même méthode utilisée dans le chapitre précédent on montre que :

$$E_k(t) \leq C_1 e^{-C_2\, t} E_k(0) \tag{29}$$

Enfin, L'inégalité (29), l'analyse de Fourier et les techniques utilisées dans [2] et [20] nous permettent de déduire le résultat de la stabilité polynômiale suivant :
Pour tout $m \in IN^\star$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$ vérifiant $u_{0/\Gamma} \in H^{m+1}(\Gamma)$, l'énergie de la solution u du problème (20) vérifie

$$E(t) \leq \frac{C}{t^m} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} E_k(0), \;\; \forall\, t \,>\, 0, \tag{30}$$

0.4 Bibliographie

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York : Dover, pp 358-435, 1972.

[2] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik,*Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*, J.Evol. Equ. 2 , 127-150 (2002)

[3] K. Ammari, Z. Liu and M. Tucsnak, *Decay rates for a beam with pointiwse force and moment feedback* , Math. Control Signals system. 15 (2002), 229-255l. Equ. 2, 127-150 (2002)

[4] A.Batkai, K.J Engel ,*Polynomial stability of operator semigroups*, Math.Nachr. 279, N0. 13-14, 1425-1440 (2006)

[5] H. Brezis,*Opérateurs maximaux monotones et semi -groupes de contraction dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam (1973)

[6] A. Haraux. *Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire.* J. Math. Pures Appl. IX. Sér. 68(4) :457–465, 1989.

[7] A. Heminna. *Stabilisation frontière de l'équation des ondes avec conditions de ventcel.* Maghreb Math. Rev. 11(2) :165–196, 2002.

[8] A. Heminna. *Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel.* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 :591–622 (electronic), 2000.

[9] A.Heminna, *Stabilisation de problemes de Ventcel,* C.R. Acad.Sci.Paris, 328, série I (1999) 1171-1174

[10] A.E Ingham *Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series.* Math. Z. 41 :367–369, 1936.

[11] S. Jaffard,M. Tucsnak and E. Zuazua *Singular inter stabilization of the wave equation,* J. Diff. Equa. 145 (1998), 184-215

[12] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, volume 36 of RMA. Masson, Paris, 1994.

[13] K. Lemrabet. *Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 300(15) :531–534, 1985.

[14] K. Lemrabet. *Le problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de* $\mathbf{R}^3$. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 304(6) :151–154, 1987.

[15] K. Lemrabet and D.E. Teniou. *Un problème d'évolution de type Ventcel.* Rev. Maghrébine Math. 1(1) :15–29, 1992.

[16] K. Lemrabet and Bendali,*The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation.,* SIAM J. Appl. Math. 56(6) :1664–1693, 1996.

[17] W. Littman and B. Liu. *On the spectral properties and stabilization of acoustic flow.* SIAM J. Appl. Math. 59(1) :17–34 (electronic), 1999.

[18] Z. Liu and B. Rao. *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation.* Z. Angew. Math. Phys. 56(4) :630–644, 2005.

[19] J. Muñoz Rivera and Y. Qin. *Polynomial decay for the energy with an acoustic boundary condition.* Appl. Math. Lett. 16(2) :249–256, 2003.

[20] S. Nicaise and K. Laoubi, *Polynomial stabilization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions,* Math. Nachr.283, NO.10 ,1428-1438(2010) .

[21] S. Nicaise. *Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications.* Rendiconti di Matematica Serie VII 23 :83–116, 2003.

[22] B. Rao. *Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control.* SIAM J. Control Optim. 36(1) :148–163 (electronic), 1998.

[23] D.Russel ,*Decay rates for weakly damped system in Hilbert space obtained with control theoric methos* , J.Diff Equat .19. (1975), 344-370

[24] A.D. Ventcel. *On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes.* Theor. Probability Appl. 4 :164–177, 1959.

[25] GN. Watson. *Atreatise on the theory of Bessel functions* ,Cambridge, University Press, 1922(1996).

[26] X. Zhang and E. Zuazua. *Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic-parabolic coupled system.* J. Differential Equations 204 :380–438, 2004.

Chapitre 1

Rappel sur quelques travaux réalisés dans le domaine de la stabilité polynômiale

Dans ce chapitre, on désigne par H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\|_H$ et par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel défini par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^p u \in L^2(\Omega),\ p \in IN^N,\ |p| \leq m\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{m,\Omega} = [\int_\Omega \sum_{|p|\leq m} |D^p u|^2 \, dx]^{\frac{1}{2}}$$

où Ω un ouvert de IR^N

On utilise la notation :

$$A : D(A) \subset H \to H$$

pour tout opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ défini sur H.

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe noté $S(t) = e^{At}$ sur H.

La fonction $U(t) = S(t)\,x$ est continue pour tout x dans H et, elle est de classe

$C^1([0,\infty[,H)$ pour tout x dans $D(A)$ (cf.[7]).

Si $x \in D(A)$, U est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U_t(t) = AU(t),\ t > 0 \\ U(0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

La solution faible du problème (1.1) est définie par :

$$U(t) = S(t)x = e^{At}x$$

De plus, pour tout $n \in IN$ on a (cf.[2]) :

$$x \in D(A^n) \Rightarrow U^{(n)}(t) = e^{At}A^n x = A^n e^{At}x,$$

et

$$\|x\|_{D(A^n)} = (\|x\|_H^2 + \|A^n x\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.1 Définitions

1.1.1 Stabilisation exponentielle

Le problème (1.1) est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives M et α telles que :

$$\|U(t)\|_H \leq Me^{-\alpha t}\|x\|_H \quad ,t > 0$$

pour tout x dans H .

1.1.2 Stabilisation forte

Le problème (1.1) est dit fortement stable si :

$$Lim_{t\rightarrow+\infty}(S(t)x) = 0 \ \ \forall x \in H$$

Remarque 1.1. *S'il existe une fonction positive $f(t)$ avec $Lim_{t\to\infty}(f(t)) = 0$ telle que :*

$$\|U(t)\|_H \leq f(t)\|x\|_{D(A)} \quad \forall x \in D(A), \quad t > 0$$

On dit que la solution du problème (1.1) décroit et le taux de décroissance est d'ordre $f(t)$, pour tout x dans $D(A)$ (cf.[6]).

Remarque 1.2. *La décroissance est dite de type polyômial si $f(t) = \frac{1}{t^k}, \quad k > 0$.*

1.2 Quelques travaux réalisés dans le domaine de la stabilité polynômiale

On reprend le problème (1.1).

• Dans [2], F.Alabeau, P.Cannarsa et V.Komornik ont démontré dans le théorème *4-2* que si A est un opérateur linéaire, autoadjoint vérifiant :

$$(Ax, x) \geq w\|x\|^2 \;\; \forall x \in D(A), \quad w > 0$$

Alors, pour toute donnée initiale $u_0 \in D(A^n)$, $n \geq 1$, l'énergie de la solution du problème (1.1) satisfait :

$$E(u(t)) \leq \frac{c_n}{t^n} E^{(n)}(u_0), \;\; \forall t > 0$$

où c_n est une constante positive et $E^{(n)}(u_0)$ est l'énergie d'ordre plus élevé (voir [2]). En utilisant ensuite les résultats de ce théorème, les auteurs ont montré que le système couplé :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times IR^+ \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha v = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times IR^+ \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times IR^+ \end{cases} \tag{1.2}$$

avec α un paramètre non nul, vérifie l'estimation de la convergence polynômiale suivante :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|u_t|^2 + |\upsilon_t|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla \upsilon|^2)\, dx & \\
&\leq \frac{c_n}{t^n}(\|u(0)\|^2_{H^{n+1}(\Omega)} + \|\upsilon(0)\|^2_{H^{n+1}(\Omega)} \\
&+ \quad |u_t(0)\|^2_{H^n(\Omega)} + \|\upsilon_t(0)\|^2_{H^n(\Omega)})
\end{aligned}$$

pour toute donnée initiale $U_0 = (u(0), \upsilon(0), u_t(0), \upsilon_t(0))$ telle que :

$$(u(0), \upsilon(0), u_t(0), \upsilon_t(0)) \in H^{n+1}(\Omega) \times H^{n+1}(\Omega) \times H^n(\Omega) \times H^n(\Omega)$$

et pour tout $n \geq 1$
Ce travail est enrichi par plusieurs propositions selon l'opérateur différentiel utilisé suivi par des exemples.

• Cependant ; A. Batkai et K. J. Engel ont établi dans [4] une estimation de convergence polynômiale de la forme :

$$\|S(t)x\| \leq C\frac{1}{t^\beta}\|A^\alpha x\| \quad \forall x \in D(A^\alpha), \quad t > 0 \tag{1.3}$$

pour des constantes α et β positives .

Une telle estimation est généralement obtenue si le spectre de l'opérateur non borné A admet des valeurs propres proches de l'axe imaginaire $\pm i\infty$.
Cette méthode a été appliquée sur des systèmes couplés de l'équation des ondes en utilisant les arguments données dans le théorème *4.5* page *1435* et la proposition *3.1* page *1428* (cf.([4])).

• On suppose maintenant que l'opérateur linéaire A vérifie :
(H_1) : A est le générateur d'un $\mathcal{C}^0$ semi groupe $S(t) = e^{At}$ sur H,
(H_2) : $iIR \bigcap \sigma(A) = \emptyset$, $\sigma(A)$ désigne le spectre de l'opérateur A.

(H_3) : $sup_{|\beta|\geq 1}\frac{1}{\beta^l}\|(i\beta - A)^{-1}\| \leq M$ pour $l > 0$ et $\beta \in IR$.

Afin d'étudier le taux de décroissance pour des solutions fortement stables (et non pas exponentiellement stables) de problèmes évolutifs, Liu et Rao ont démontré sous les trois hypothèses H_1, H_2 et H_3 ci-dessus, l'estimation suivante :

$$\|e^{tA}x\|_H \leq C_k(\frac{lnt}{t})^{\frac{k}{l}}(lnt)\|x\|_{D(A^k)} \tag{1.4}$$

pour toute donnée initiale $x \in D(A^k)$, où $k \in IN^\star$ et $C_k > 0$.

L' estimation (1.4) est donnée dans le théorème 2.1 page 632 de [6]

Ce théorème a été appliqué dans [6] sur trois systèmes fortement stables pour estimer le taux de décroissance $f(t)$. Il s'agit d' un système de l' élasticité en une dimension, l'équation des ondes en deux dimension et sur un système couplé onde-chaleur en dimension n.

Les auteurs Liu et Rao ont affirmé dans ce travail que l'estimation (1.4) n'est pas optimale, par contre ils ont signalé que les résultats de convergence obtenus pour des systèmes hybrides [9] et [8] sont meilleurs (décroissance d'ordre polynômial $(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}})$).

Notons enfin, que des estimations analogues ont été obtenues dans des travaux récents par différents auteurs, chacun dans un domaine particulier à savoir :

$-$ Les travaux de A. Alabau - Boussuira (cf.[3]) pour des systèmes hyperboliques et évolutifs couplés.

$-$ Le travail de J. Rivera et R. Racke [10] pour un système de l'élasticité en deux dimension.

$-$ Celui de Lebeau et E. Zuazua [5] pour montrer la décroissance polynômiale d'un système linéaire de la termoélasticité en trois dimensions.

$-$ Les travaux de E. Zuazua et X. Zhang [11] réalisés sur des systèmes couplés hyperboliques et évolutifs en une dimension.

1.3 Bibliographie

Bibliographie

[1] F. Alabau ,*Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 328 (1999), 1015-1020.

[2] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik,*Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*, J.Evol. Equ. 2 , 127-150 (2002)

[3] Alabau :Boussouirra,*Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems,* SIAM J. Control Optim .41 , 511-541 (2002)

[4] A. Batkai ,K. J Engel ,*Polynomial stability of operator semigroups*, Math. Nachr. 279, N0. 13-14, 1425-1440 (2006)

[5] Lebeau and Zuazua ,*Decay rates for the three dimensional linear system of thermoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. 148. 179-231(1999)

[6] Z. Liu and B. Rao. *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation.* Z. Angew. Math. Phys. 56(4) :630–644, 2005.

[7] Pazy.A *Semigroups of linear operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer. Venlag, New York -Berlin , 1983.

[8] B. Rao and R. Wehbe, *Stabilisation frontière de plaques de Kirchhoff avec résolvante non compacte* ,C,R. Acad. Sci. Paris, 328, Série I (1999), 501-596

[9] B.Rao. *Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control.* SIAM J. Control Optim. 36(1) :148–163 (electronic), 1998.

[10] J.E.M.Rivera and R.Racke ,*Polynomial stability in two - dimensional magneto -elasticity* , IMA J .Appl. Math .66 (2001) 269-283

[11] X. Zhang and E. Zuazua. *Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic-parabolic coupled system.* J. Differential Equations 204 :380–438, 2004.

Chapitre 2

Stabilisation polynômiale de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type Ventcel

Résumé. On considère l'équation des ondes posée dans un carré de IR^2 avec des conditions aux limites de type Ventcel sur une partie de la frontière et des conditions de Dirichlet homogènes sur la partie restante.

• Dans la partie A de ce chapitre, nous supposons que le sous ensemble Γ_1 sur lequel porte le feedback est composé d'un seul côté .

• Dans la partie B, Γ_1 est composé de deux côtés parallèles.

Monsieur A. Heminna a montré dans [7] que ce problème n'est pas exponentiellement stable.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la stabilité polynômiale [**?**, 15] du problème de Ventcel en se servant de la stabilité exponentielle d'un model $1-d$.

Ce dernier résultat est obtenu en utilisant l' analyse de Fourier combinée avec l'inégalité d'Ingham [6, 9] et la technique des multiplicateurs.

2.1 Le problème

Soit $\Omega = (0,1)^2$ un ouvert borné de IR^2 de frontière Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où Γ_0 et Γ_1 sont de mesure positive.

On considère le problème :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & dans\ \Omega \times IR^+, \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + u_t = 0 & sur\ \Gamma_1 \times IR^+, \\ u = 0 & sur\ \Gamma_0 \times IR^+, \\ u(.,0) = u_0,\ u_t(.,0) = u_1 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

$\triangle_T$ désigne le Laplacien tangentiel [14] sur Γ_1. Dans notre cas $\triangle_T = \partial_{yy}$, $\partial_\nu u = \partial_x u$ $u = u(x,y,t)$ où $(x,y) \in \Omega$, $t \in IR^+$ et ν désigne le vecteur normal unité extérieur à Ω

Afin d'établir l'existence et l'unicité de la solution de ce problème on introduit l'espace :

$$V = \left\{ \upsilon \in H^1(\Omega) : \upsilon_{|\Gamma_0} = 0,\ \upsilon_{|\Gamma_1} \in H_0^1(\Gamma_1) \right\},$$

muni de la norme :

$$\|\upsilon\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla \upsilon|^2\, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T \upsilon|^2\, d\Gamma \tag{2.2}$$

où ∇_T désigne le gradient tangentiel. On pose :

$$\mathbf{H} = V \times L^2(\Omega)$$

$\mathbf{H}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $<,>_{\mathbf{H}}$ défini par :

$$< (u,\upsilon), (f,g) >_H = (\nabla u, \nabla f)_{L^2(\Omega)} + (\nabla_T u, \nabla_T f)_{L^2(\Gamma_1)} + (\upsilon, g)_{L^2(\Omega)}, \tag{2.3}$$

pour lequel on associe la norme : $\|\cdot\|_H =< \cdot,\cdot >_H^{1/2}$.

On désigne par $\Gamma_{1\ell}$, $\ell \in \{1,2,3,4\}$, les intersections de Γ_1 avec les quatre bords de Ω. Alors pour $u \in V$, $\Delta_T(u/\Gamma_{1\ell})$ est bien défini dans $H^{-1}(\Gamma_{1\ell}) = (H_0^1(\Gamma_{1\ell}))'$. Notons en outre que pour $u \in V$ tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, par le théorème de Grisvard [5] $\partial_\nu u \in (\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{1\ell}))'$ pour tout $\ell \in \{1,2,3,4\}$, donc $\partial_\nu u \in H^{-1}(\Gamma_{1\ell})$ car

$(\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{1\ell}))' \subset H^{-1}(\Gamma_{1\ell})$

On peut considérer maintenant l'opérateur non borné **A** défini sur **H** par :

$$A(u,v) = (v, \Delta u)$$

de domaine :

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{A}\right) = \left\{(u,v) \in V \times V,\ \Delta u \in L^2\left(\Omega\right) : \partial_\nu u - \Delta_T u + v = 0 \text{ sur } \Gamma_{1\ell}, \ell \in \{1,2,3,4\}\right\}$$

L'énergie de la solution du problème (2.1) est définie par :

$$E(t) = E(u,u_t)(t) = \frac{1}{2} \|\left(u,u_t\right)(t)\|_H^2 \tag{2.4}$$

En intégrant par partie , on vérifie que pour $(u^0,u^1) \in \mathbf{D}\left(\mathbf{A}\right)$ on a :

$$\frac{d}{dt} E\left(t\right) = -\int_{\Gamma_1} \left|u_t\right|^2 d\Gamma \tag{2.5}$$

Théorème 2.1. *1/ Soit* $(u^0,u^1) \in \boldsymbol{H}$ *;*

le problème (2.1) admet une unique solution faible :

$$(u,v) \in C\left([0,\infty[\, , \boldsymbol{H}\right)$$

2/ Soit $(u^0,u^1) \in \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{A}\right)$ *;*

le problème (2.1) admet une unique solution forte :

$$(u,v) \in C\left([0,\infty[\, , \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{A}\right)\right) \cap C^1\left([0,\infty[\, , \boldsymbol{H}\right).$$

Preuve :

Il suffit de montrer que **A** est maximal dissipatif, (voir [7, 8]).

Remarque 2.1. *Monsieur A. Heminna a montré dans [7, 8] que le feedback naturel n'assure pas une dissipation suffisante de l'énergie pour permettre sa décroissance exponentielle même dans le cas où la partie Γ_1 est composée de deux côtés parallèles. Plus précisément l'auteur a montré que si*
$\Gamma_1 = \{(1,y) : 0 < y < 1\} \cup \{(x,1) : 0 < x < 1\}$ *l'opérateur A associé au problème (2.1) admet des valeurs propres à parties réelles négatives, qui sont aussi proches que l'on veut de l'axe imaginaire.*
Notre objectif est de montrer, pour deux choix de la frontière Γ_1 et pour des données initiales suffisamment régulières (cf. [2] et [1]), que la solution du problème (2.1) admet une décroissance polynômiale.

2.2 Partie A :*Contrôle sur un côté du bord*

Dans cette partie, on considère le cas particulier où :

$$\Gamma_1 = \{(1,y) : 0 < y < 1\}$$

2.2.1 Stabilisation exponentielle d'un model 1-d avec un paramètre.

Le développement partiel de la solution u de (2.1) en série de Fourier donne :

$$u(x,y,t) = \sum_{l=1}^{\infty} u^{(l\pi)}(x,t)\sin(l\pi y), \tag{2.6}$$

Où $u^{(l\pi)}(x,t)$ sont les coefficients de Fourier de u vérifiant l'équation des ondes à une dimension dans $(0,1)$ suivante , avec dissipation en $x = 1$.

$$\begin{cases} u_{tt}^{(L)} - u_{xx}^{(L)} + L^2 u^{(L)} = 0 & \text{dans } (0,1), \forall t > 0, \\ u^{(L)}(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u_x^{(L)}(1,t) = -L^2 u^{(L)}(1,t) - u_t^{(L)}(1,t), & \forall t > 0, \\ u^{(L)}(\cdot,0) = u_0^{(L)}, u_t^{(L)}(\cdot,0) = u_1^{(L)} & \text{dans } (0,1), \end{cases} \tag{2.7}$$

où $L = l\pi$ est un paramètre réel ≥ 2 et $u_0(x,y) = \sum_{l=1}^{\infty} u_0^{(l\pi)}(x)\sin(l\pi y)$, $u_1(x,y) = \sum_{l=1}^{\infty} u_1^{(l\pi)}(x)\sin(l\pi y)$,

Le système (2.7) a été étudié dans [10] .

On introduit l'énergie de la solution $u^{(L)}$ du problème (2.7) :

$$E_L(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (((u_x^{(L)}(x,t))^2 + L^2(u^{(L)}(x,t))^2 + (u_t^{(L)}(x,t))^2)\,dx + \frac{L^2}{2}(u^{(L)}(1,t))^2.$$

Lemme 2.1. *Pour toute solution régulière u^L du système (2.7) on a :*

$$E_L^{'}(t) = -(u_t^L(1,t))^2$$

Preuve :

Soit $u^{(L)}$ une solution régulière du problème (2.7) ; on a :

$$\frac{d(E_L(t))}{dt} = \int_0^1 (\partial_x(u_x^{(L)}u_t^{(L)}) - u_{xx}^{(L)}u_t^{(L)} + L^2 u_t^{(L)}u^{(L)} + u_{tt}^{(L)}u_t^{(L)})dx + L^2(u_t^{(L)}(1,t)u^{(L)}(1,t))$$
$$= \int_0^1 (\partial_x(u_x^{(L)}u_t^{(L)})dx + \int_0^1 u_t^{(L)}(-u_{xx}^{(L)} + L^2u^{(L)} + u_{tt}^{(L)})dx + L^2(u_t^{(L)}(1,t)u^{(L)}(1,t))$$
$$= u_x^{(L)}(1,t)u_t^{(L)}(1,t) + L^2(u_t^{(L)}(1,t)u^{(L)}(1,t)$$

En utilisant les conditions aux limites du problème (2.7), on obtient :

$$\frac{d(E_L(t))}{dt} = -(u_t^{(L)}(1,t))^2$$

. Le système (2.7) est exponentiellement stable d'après [10], mais sa décroissance exponentielle dépend de la constante L. Il existe donc deux constantes positives $C(L)$ et $\omega(L)$ telles que :

$$E_L(t) \leq C(L)e^{-\omega(L)t}E_L(0). \tag{2.8}$$

Dans le but d'étudier la stabilité exponentielle du problème (2.7) tout en respectant sa dépendance par rapport au paramètre L (pour L suffisament grand), on procède de la manière suivante :

On écrit $u^{(L)}$ solution du problème (2.7) sous la forme :

$$u^{(L)} = y + w$$

où y est solution du même problème que $u^{(L)}$ mais sans dissipation, w est le reste. Elles sont respectivement solutions des deux problèmes :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + L^2 y = 0 & \text{dans } (0,1), \forall t > 0, \\ y(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ y_x(1,t) = -L^2 y(1,t), & \forall t > 0, \\ y(\cdot,0) = u_0^{(L)}, y_t(\cdot,0) = u_1^{(L)}, \quad \text{dans } (0,1) \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + L^2 w = 0 & \text{dans } (0,1), \forall t > 0, \\ w(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ w_x(1,t) = -L^2 w(1,t) - u_t^{(L)}(1,t), & \forall t > 0, \\ w(\cdot,0) = 0, w_t(\cdot,0) = 0\ , \quad \text{dans } (0,1) \end{cases} \tag{2.10}$$

On étudie les deux problèmes séparément :

L'étude du problème (2.9) est liée à celle de l'opérateur A_L défini sur l'espace $L^2(0,1)$ par :

$$A_L v = -v_{xx} + L^2 v, \forall v \in D(A_L).$$

et de domaine :

$$D(A_L) = \{v \in H^2(0,1) : v(0) = 0 \text{ et } v_x(1) = -L^2 v(1)\},$$

Proposition 2.1. *L'opérateur A_L est un opérateur positif, autoadjoint sur $L^2(0,1)$. De plus la résolvante $R_\lambda(A_L)$ est compacte , $\forall\, \lambda \in\ \rho(A_L)$.*

Preuve : On note (.) le produit scalaire de $L^2(0,1)$.

- A_L est positif :

$$\begin{aligned} \forall v \in D(A_L),\ (A_L(v), v) &= \int_0^1 (-\partial_{xx} v + L^2 v) v)\, dx \\ &= \int_0^1 (-\partial_{xx} v v)\, dx + \int_0^1 L^2 v^2\, dx \\ &= -v_x(1) v(1) + \int_0^1 (\partial_x v)^2\, dx + \int_0^1 L^2 v^2\, dx \\ &= L^2 v(1)^2 + \int_0^1 (\partial_x v)^2\, dx + \int_0^1 L^2 v^2\, dx \geq 0 \end{aligned}$$

Et

$$(A_L(v), v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0$$

• Montrons que A_L est autoadjoint :

En se servant de la méthode utilisée dans [4] on définit :

$$D(A_L^*) = \{v \in L^2(0,1)/\exists c > 0, \forall u \in D(A_L), |(v, A_L u)| \leq c\|u\|_{L^2(0,1)}\}$$

et

$$\forall v \in D(A_L^*), \forall u \in D(A_L), (A_L^* v, u) = (v, A_L u).$$

Tout d'abord , nous commençons par démontrer que :

$$D(A_L) \subset D(A_L^*) \text{ et } A^*_{L/D(A_L)} = A_L.$$

Soit $v \in D(A_L)$.

$$\begin{aligned}
\forall u \in D(A_L), (v, A_L u) &= \int_0^1 v(-\partial_{xx} u)\, dx + \int_0^1 L^2 uv\, dx \\
&= \int_0^1 \partial_x v \partial_x u\, dx - u_x(1)v(1) + \int_0^1 L^2 uv\, dx \\
&= v_x(1)u(1) + \int_0^1 u(-\partial_{xx} v)\, dx - u_x(1)v(1) + \int_0^1 L^2 uv\, dx
\end{aligned}$$

Comme

$$v_x(1) = -L^2 v(1)$$

et

$$u_x(1) = -L^2 u(1)$$

Alors :

$$(v, A_L u) = \int_0^1 u(-\partial_{xx} v) + L^2 uv\, dx = (A_L v, u)$$

On en déduit que :

$$v \in D(A_L^*) \text{ et } A_L^* v = A_L v$$

Montrons ensuite que : $D(A_L^*) \subset D(A_L)$. Pour cela , on munit l'espace $H^1(0,1)$ du produit scalaire :

$$\langle u, \phi \rangle_1 = \int_0^1 (u\phi + u_x \phi_x + L^2 u\phi)\, dx + L^2 u(1)\phi(1)$$

qui défini une norme équivalente à la norme usuelle.

On en déduit que :

Pour tout $f \in L^2(0,1)$, il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que :

$$\forall \phi \in H^1(0,1),\ \langle u, \phi \rangle_1 = \int_0^1 f\phi\, dx$$

En prenant $\phi \in \mathcal{D}(0,1)$, on obtient :

$$u_{xx} = u + L^2 u - f \qquad dans \qquad \mathcal{D}'(0,1)$$

On a $u \in H^2(0,1)$,

$$u + A_L u = f \tag{2.11}$$

et

$$\int_0^1 (u_x + u_x\phi_x + L^2 u\phi)dx + L^2 u(1)\phi(1) = \int_0^1 f\phi\, dx \quad \forall \phi \in H^1(0,1)$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\int_0^1 (u + L^2 u - u_{xx})\phi\, dx + u_x\phi|_0^1 + L^2 u(1)\phi(1) = \int_0^1 f\phi\, dx \quad \forall \phi \in H^1(0,1)$$

Comme $u + L^2 u - u_{xx} = f$, il reste

$$(u_x(1) + L^2 u(1))\phi(1) - u_x(0)\phi(0) = 0 \quad \forall \phi \in H^1(0,1)$$

Ce qui donne

$$u_x(0) = 0 \text{ et } u_x(1) = -L^2 u(1)$$

Comme

$$u \in H^2(0,1) \text{ alors } u \in D(A_L)$$

Maintenant, on considère $v \in D(A_L^*)$. Il existe $w \in L^2(0,1)$ tel que :

$$\forall \phi \in D(A_L), \int_0^1 A_L\phi v\, dx = \int_0^1 w\phi\, dx$$

Soit u la solution de (2.11) avec : $f = v + w$. Alors, $w = -v + u + A_L u$ et

$$\int_0^1 A_L\phi v\, dx = \int_0^1 (u - v)\phi\, dx + \int_0^1 A_L u\phi\, dx = \int_0^1 (u - v)\phi\, dx + \int_0^1 uA_L\phi\, dx$$

D'où

$$\forall \phi \in D(A_L), \ \int_0^1 (A_L\phi + \phi)(v-u)\,dx = 0$$

En prenant ϕ solution de (2.11) avec $f = v - u$ on obtient :

$$v \equiv u \text{ d'où } v \in D(A_L) \text{ et } D(A_L^*) \subset D(A_L)$$

D'où A_L est autoadjoint .

• Montrons que A_L est à résolvante compacte :

Si $\lambda = -1 - L^2$, alors :

$$((\lambda I - A_L)u, u) = -\|u\|^2_{L^2(0,1)} - L^2\|u\|^2_{L^2(0,1)} - L^2\|u\|^2_{L^2(0,1)} - \|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2_{L^2(0,1)} - L^2(u(1))^2, \ \ u \in D(A_L)$$

$$\leq -(\|u\|^2_{L^2(0,1)} + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2_{L^2(0,1)} + L^2(u(1))^2), \ \ u \in D(A_L)$$

D'où on voit que :

$$\|(\lambda I - A_L)u\|^2_{L^2(0,1)} \geq \|u\|^2_{L^2(0,1)} + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2_{L^2(0,1)} + L^2(u(1))^2, \ \ u \in D(A_L)$$

Ceci entraine que $\lambda \in \rho(A_L)$ et que $R_\lambda(A_L) = (\lambda I - A_L)^{-1}$ est compacte ■

Le spectre de l'opérateur A_L est caractérisé par le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Les valeurs propres λ^2 de A_L sont simples, strictement supérieures à L^2 et vérifient l'équation transcendante :*

$$\mu \cos \mu = -L^2 \sin \mu \tag{2.12}$$

avec $\mu = \sqrt{\lambda^2 - L^2}$. Notons $(\lambda_k^2)_{k\geq 0}$ la suite des valeurs propres de A_L classées dans l' ordre croissant.

Les fonctions propres normalisées associées sont données par :

$$\varphi_k(x) = \alpha_k \sin(\mu_k x), \forall x \in (0,1), \tag{2.13}$$

où $\mu_k = \sqrt{\lambda_k^2 - L^2}$ et $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est une suite réelle telle que :

$$\alpha_k \to \sqrt{2} \text{ quand } k \to \infty. \tag{2.14}$$

et ,

$$|\varphi_k(1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2L^2}, \forall k \in IN. \tag{2.15}$$

Finalement , les valeurs propres $(\lambda_k)_k$ *vérifient la condition :*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{8L}, \forall k \in IN. \tag{2.16}$$

Preuve :

• Nous montrons d'abord que : $\lambda^2 > L^2$

Par la formule de Green , on remarque que pour tout υ dans $D(A_L)$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (A_L\upsilon)(x)\upsilon(x)dx &= \int_0^1 (-\upsilon_{xx} + L^2\upsilon)\upsilon(x)dx \\
&= \int_0^1 (\upsilon_x)^2 + (-\upsilon_x\upsilon \mid_0^1) + \int_0^1 L^2\upsilon^2(x)dx \\
&= \int_0^1 ((\upsilon_x)^2 + L^2\upsilon^2(x))dx - \upsilon_x(1)\upsilon(1)
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites du problème (2.9) montrent que :

$$\int_0^1 (A_L v)(x)v(x)\,dx = \int_0^1 (v_x(x)^2 + L^2 v(x)^2)\,dx + L^2 v(1)^2 \geq L^2 \int_0^1 v(x)^2\,dx,$$

Ce qui implique que :

$$\lambda^2 \geq L^2.$$

Maintenant , il est facile de vérifier que si $\lambda^2 = L^2$. alors la seule solution du problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} -\varphi_{xx} + L^2\varphi = \lambda^2\varphi \quad \text{dans } (0,1), \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi_x(1) = -L^2\varphi(1). \end{cases} \tag{2.17}$$

est $\varphi = 0$, ce qui est impossible . Par conséquent $\lambda^2 = L^2$ ne peut pas être une valeur propre de A_L.

De la 1^{re} équation du problème (2.17), on en déduit qu'il existe α et $\beta \in I\!R$ tels que :

$$\varphi(x) = \alpha \sin(\mu x) + \beta \cos(\mu x),$$

avec $\mu = \sqrt{\lambda^2 - L^2}$.

La 1^{re} condition au bord : $\varphi(0) = 0$ montre que $\beta = 0$ et de la 2^e condition, on obtient :

$$\alpha\mu \cos \mu = -L^2 \alpha \sin \mu.$$

Par conséquent , une solution non triviale φ existe si et seulement si (2.12) a lieu. La forme des fonctions propres

$$\varphi_k(x) = \alpha_k \sin(\mu_k x), \forall x \in (0,1),$$

découle aussi de cette considération .

L'équation (2.12) est équivalente à :

$$\tan \mu = -\frac{\mu}{L^2},$$

Les racines de cette équation sont simples et vérifient :

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < \mu_k < (k+1)\pi, \forall k \in IN. \tag{2.18}$$

De l'hypothèse de normalisation :

$$\int_0^1 \varphi_k(x)^2 \, dx = 1$$

On obtient :

$$\alpha_k^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(2\mu_k)}{2 \times 2\mu_k} \right) = 1.$$

Comme $\mu_k \to \infty$ quand $k \to \infty$ alors :

$$\alpha_k \to \sqrt{2} \text{ quand } k \to \infty.$$

Notons que :

$$\varphi_k(1) = \alpha_k \sin \mu_k.$$

En utilisant la relation $\sin^2 \mu_k + \cos^2 \mu_k = 1$ et l'équation caractéristique (2.12), on écrit :

$$\sin^2 \mu_k (1 + \frac{L^4}{\mu_k^2}) = 1,$$

Comme $\mu_k \geq 1, \quad \forall k \in IN$, on obtient :

$$1 \leq \sin^2 \mu_k (1 + L^4),$$

ce qui prouve (2.15).

Et enfin, la condition (2.16) découle de l'inégalité (2.18).

En effet :De $\mu_k = \sqrt{\lambda_k^2 - L^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} - \lambda_k &= \sqrt{\mu_{k+1}^2 + L^2} - \sqrt{\mu_k^2 + L^2} \\ &= \frac{\mu_{k+1}^2 - \mu_k^2}{\sqrt{\mu_{k+1}^2 + L^2} + \sqrt{\mu_k^2 + L^2}} \\ &= (\mu_{k+1} - \mu_k) \frac{\mu_{k+1} + \mu_k}{\sqrt{\mu_{k+1}^2 + L^2} + \sqrt{\mu_k^2 + L^2}} \end{aligned}$$

En utilisant l' estimation (2.18) on obtient :

$$\mu_{k+1} - \mu_k \geq \frac{\pi}{2} \tag{2.19}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} - \lambda_k &\geq \frac{\pi}{2} \frac{\mu_{k+1} + \mu_k}{\sqrt{\mu_{k+1}^2 + L^2} + \sqrt{\mu_k^2 + L^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1 + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}} + \sqrt{\frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}^2} + \frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}}. \\ &\geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}} + \sqrt{\frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}^2} + \frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}} \end{aligned}$$

Comme $\mu_{k+1} > \mu_k$ on obtient :

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}} = \frac{\pi}{4L} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\mu_{k+1}^2}}}$$

Comme $\mu_{k+1} \geq 1$ et $L \geq 1$ alors ,

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{8L}, \forall k \in IN.$$

Ce qui termine la preuve du théorème 2.2 ■

Dans le paragraphe suivant , on donne une inégalité équivalente à l'inégalité d'Ingham [9] (voir aussi [6]), où les constantes de l'équivalence dépendent de la condition (2.16).

Lemme 2.2. *Soient $(\nu_n), n \in Z$ une suite de nombres réels et un réel positif γ tels que la condition*

$$\nu_{n+1} - \nu_n \geq \gamma, \quad \forall n \in Z,$$

a lieu .
Alors , il existe deux constantes positives c et C , indépendantes de γ telles que pour toute fonction f de la forme :

$$f(t) = \sum_{n \in Z} a_n e^{i\nu_n t},$$

avec $a_n \in \mathcal{C}$, on a :

$$\frac{c}{\gamma} \sum_{n \in Z} |a_n|^2 \leq \int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}} |f(t)|^2 \, dt \leq \frac{C}{\gamma} \sum_{n \in Z} |a_n|^2.$$

Preuve

Posons $\alpha = \frac{2}{\gamma}$ et $\tilde{\nu}_n = \alpha\nu_n$, on remarque que la condition en ν est équivalente à

$$\tilde{\nu}_{n+1} - \tilde{\nu}_n \geq 2, \quad \forall n \in Z.$$

Par conséquent , l'inégalité d'Ingham standard [9] montre qu'il existe deux constantes positives c, C telles que pour toute fonction g de la forme :

$$g(s) = \sum_{n \in Z} a_n e^{i\tilde{\nu}_n s},$$

on a

$$c\sum_{n\in Z}|a_n|^2 \le \int_0^{2\pi}|g(s)|^2\,ds \le C\sum_{n\in Z}|a_n|^2.$$

et le résultat du lemme 2.2 est alors prouvé en utilisant le changement de variable $t=\alpha s$.

Remarque 2.2. *Afin d'établir le résultat (2.8) de la stabilité exponentielle du problème $1-d$, on aura besoin de deux théorèmes : le premier donne une estimation sur l'énergie $E_y(t)$ de la solution y du problème (2.9) et le second donne une majoration sur w solution du problème (2.10) .*

Théorème 2.3. *Soit $E_y(t)$ l'énergie de la solution y du problème (2.9) définie par :*

$$E_y(t)=\frac{1}{2}\int_0^1(((y_x(x,t))^2+L^2(y(x,t))^2+(y_t(x,t))^2)\,dx+\frac{L^2}{2}(y(1,t))^2.$$

Alors , il existe une constante C_1 positive , indépendante de L, telle que : Pour tout $T>16L\sqrt{2}$, on a

$$E_y(0)\le C_1L^3\int_0^T(y_t(1,t))^2)\,dt. \tag{2.20}$$

<u>**N.B :**</u> L'énergie E_y est constante : $E_y'(t)=0$, pour toute solution régulière .

Preuve : *Les résultats donnés dans la preuve de ce théorème sont standards voir Lions et Magenes [11] ou Komornik [10] pages 7-10.*

La théorie spectrale permet d'écrire la solution y de (2.9) sous la forme :

$$y(x,t)=\sum_{k\ge 0}(y_{0k}\cos(t\lambda_k)+y_{1k}\frac{\sin(t\lambda_k)}{\lambda_k})\varphi_k(x)$$

Où y_{0k} (resp. y_{1k}) sont les coefficients de Fourier de $u_0^{(L)}$ (resp.$u_1^{(L)}$) , i.e :
$u_0^{(L)}=\sum_{k\ge 0}y_{0k}\varphi_k$ et $u_1^{(L)}=\sum_{k\ge 0}y_{1k}\varphi_k$

On a :

$$y_t(1,t)=\sum_{k\ge 0}(-y_{0k}\sin(t\lambda_k)+y_{1k}\frac{\cos(t\lambda_k)}{\lambda_k})\lambda_k\varphi_k(1)$$

De la condition (2.16) et le lemme 2.2, on obtient :

$$L\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2+|y_{1k}|^2)|\varphi_k(1)|^2 \leq C_3\int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}}|y_t(1,t)|^2\,dt,$$

où C_3 est une constante positive independante de L.

En utilisant ensuite l'estimation (2.15), on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2+|y_{1k}|^2) \leq C_4L^3\int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}}|y_t(1,t)|^2\,dt.$$

On conclut finalement par l'identité (cf .[11, 10]) :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2+|y_{1k}|^2) = \|u_0^{(L)}\|^2_{D(A_L^{1/2})}+\|u_1^{(L)}\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(0,1)$, et la propriété :

$$\|v\|^2_{D(A_L^{1/2})} = \|A_L^{1/2}v\|^2 = (A_Lv,v) = \int_0^1 (v_x(x)^2+L^2v(x)^2)\,dx + L^2v(1)^2,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $L^2(0,1)$. Comme $u_0^{(L)} = y_0(.,0)$, $u_1^{(L)} = y_t(.,0)$ alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2+|y_{1k}|^2) = \int_0^1 (y_x(x,0)^2+L^2y(x,0)^2)+y_t(x,0)^2)\,dx \ + \\ L^2(y(1,0)^2) \ = \ 2E_y(0),\end{aligned}$$

d'où l'existence d'une constante $C>0$, indépendante de L, telle que :

$$E_y(0) \leq C_2\,L^3\int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}}((y_t(1,t))^2\,dt$$

Pour tout $T>\frac{4\pi}{\gamma}$ on a :

$$E_y(0) \leq C_2\,L^3\int_0^{T}((y_t(1,t))^2)\,dt$$

Ce qui termine la preuve du théorème 2.3 ■

Le théorème suivant donne une majoration sur w solution du problème (2.10).

Théorème 2.4. *Il existe une constante C indépendante de L et $T > 0$ tels que la solution w de (2.10) satisfait :*

$$\int_0^T w_t(1,t)^2\,dt \leq C(T^2+T+1)\int_0^T u_t^{(L)}(1,t)^2\,dt. \qquad \forall\, T>0 \tag{2.21}$$

Preuve : Pour $T > 0$ fixé, on considère z solution de

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} + L^2 z = 0 & \text{dans } (0,1), \forall t > 0, \\ z(0,t) = 0, & \forall t > 0, \\ z_x(1,t) = -L^2 z(1,t) - k(t), & \forall t > 0, \\ z(\cdot,0) = 0, z_t(\cdot,0) = 0, & \end{cases} \tag{2.22}$$

où

$$k(t) = \begin{cases} u_t^{(L)}(1,t) & \text{si } 0 < t < T, \\ 0 & \text{sinon }. \end{cases}$$

Comme $z - w$ satisfait l'équation $(z-w)_{tt} + A_L(z-w) = 0$ sur $(0,T)$ avec des données initiales nulles et une condition au bord homogène sur $(0,T)$, alors $z = w$ sur $(0,1)\times(0,T)$.

Nous utilisons maintenant la technique des multiplicateurs, (cf. [10]). On multiplie la première équation du problème (2.22) par $x(2T-t)z_x$ et on intègre le résultat dans $Q = (0,1)\times(0,2T)$, il vient :

$$0 = \int_Q (z_{tt} - z_{xx} + L^2 z)(x(2T-t)z_x)\,dxdt$$

Posons

$$I_1 = \int_Q z_{tt}x(2T-t)z_x\,dxdt$$

$$I_2 = \int_Q -z_{xx}x(2T-t)z_x\,dxdt$$

$$I_3 = \int_Q L^2 z x(2T-t)z_x\,dxdt$$

En intégrant par parties , on obtient pour des solutions régulières :

$$I_1 = \int_Q (\partial_t(z_t x(2T-t)z_x) + x z_t z_x - x(2T-t)z_{tx}z_t)\,dxdt$$

Or

$$-x(2T-t)z_{tx}z_t = -\frac{1}{2}\partial_x(x(2T-t)z_t^2) + \frac{1}{2}(2T-t)z_t^2$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_Q \partial_t(z_t x(2T-t)z_x)\,dxdt + \int_Q x z_t z_x\,dxdt \\
&- \frac{1}{2}\int_Q \partial_x(x(2T-t)z_t^2)\,dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)z_t^2\,dxdt \\
&= \int_Q x z_t z_x\,dxdt - \frac{1}{2}\int_0^{2T} (2T-t)z_t^2(1,t))\,dt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)z_t^2\,dxdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\int_Q -\partial_x(x(2T-t)z_x^2)\,dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)z_x^2\,dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2T} (2T-t)z_x^2(1,t))\,dt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)z_x^2\,dxdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2}\int_Q L^2\partial_x(x(2T-t)z^2)\,dxdt - \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)L^2z^2\,dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2T} (2T-t)L^2z^2(1,t))\,dt - \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)L^2z^2\,dxdt
\end{aligned}$$

En tenant compte des calculs effectués sur I_1 ,I_2 et I_3 , on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\int_Q (z_x^2 + z_t^2 - L^2z^2)(2T-t)\,dxdt \\
&+ \int_Q x z_x z_t\,dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2T} (L^2z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2 - z_t(1,t)^2)(2T-t)\,dt.
\end{aligned}$$

Cette identité est équivalente à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{2T} z_t(1,t)^2(2T-t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_Q (z_x^2 + z_t^2 - L^2z^2)(2T-t)\,dxdt \\
&+ \int_Q x z_x z_t\,dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2T} (L^2z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2)(2T-t)\,dt.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$|\int_Q xz_t z_x\,dxdt| \leq |\int_Q z_t z_x\,dxdt| \leq \left(\int_Q z_t^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q z_x^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme

$$\left(\int_Q z_t^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q z_x^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\int_Q (z_x^2+z_t^2)\,dxdt$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2T} z_t(1,t)^2(2T-t)\,dt \leq C(T+1)\int_Q (z_x^2+z_t^2)\,dxdt \\ +\frac{1}{2}\int_0^{2T}(L^2z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2)(2T-t)\,dt,\end{aligned} \tag{2.23}$$

où C est une constante positive indépendante de L et $T>0$.

Rappelons que :

$$z_x(1,t) = -L^2z(1,t) - k(t)$$

Par conséquent :

$$L^2z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2 = L^2z(1,t)^2 - (L^2z(1,t)+k(t))^2 = (L^2-L^4)z(1,t)^2 - 2L^2z(1,t)k(t) - k(t)^2.$$

Pour $\varepsilon > 0$ on a :

$$L^2z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2 \leq (L^2 - L^4 + \epsilon L^4)z(1,t)^2 + (\frac{1}{\epsilon}-1)k(t)^2.$$

On fixe alors $\epsilon > 0$ tel que :

$$L^2 - L^4 + \epsilon L^4 \leq 0, \forall L \geq 2,$$

Pour ce choix de ϵ , on obtient :

$$L^2z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2 \leq Ck(t)^2.$$

En injectant cette dernière estimation dans (2.23) ,il vient :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2T} z_t(1,t)^2(2T-t)\,dt \leq C(T+1)\int_Q (z_x^2+z_t^2)\,dxdt + C\int_0^T k(t)^2(2T-t)\,dt. \tag{2.24}$$

On définit l'énergie de z solution du problème (2.22) par :

$$E_z(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (((z_x(x,t))^2 + L^2(z(x,t))^2 + (z_t(x,t))^2)\,dx + \frac{L^2}{2}(z(1,t))^2,$$

En intégrant par partie , on obtient pour des solutions régulières :

$$\begin{aligned}
E_z^{'}(t) &= \int_0^1 (z_{xt}z_x + L^2 z_t z + z_{tt}z_t)\,dx + L^2 z_t(1,t)z(1,t) \\
&= \int_0^1 (\partial_x(z_t z_x) - z_t z_{xx} + L^2 z_t z + z_{tt}z_t)\,dx + L^2 z_t(1,t)z(1,t) \\
&= \int_0^1 z_t(z_{tt} - z_{xx} + L^2 z)\,dx + [z_x z_t]_0^1 + L^2(z_t(1,t)z(1,t) \\
&= z_x(1,t)z_t(1,t) + L^2(z_t(1,t)z(1,t))
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites du problème (2.22) donnent :

$$\begin{aligned}
E_z^{'}(t) &= (-L^2 z(1,t) - k(t))z_t(1,t) \\
&+ L^2 z_t(1,t)z(1,t) \\
&= -k(t)z_t(1,t),
\end{aligned}$$

d'où :

$$E_z'(t) = -z_t(1,t)k(t).$$

En intègrant ce résultat entre 0 et s et en utilisant le fait que $E_z(0) = 0$, on obtient :

$$E_z(s) = \int_0^s E_z'(t)\,dt = -\int_0^s z_t(1,t)k(t)\,dt.$$

On intègre ensuite cette identité entre 0 et $2T$ et on utilise le théorème de Fubini , on arrive à :

$$\int_0^{2T} E_z(s)\,ds = -\int_0^{2T}\int_0^s z_t(1,t)k(t)\,dt\,ds = -\int_0^{2T} z_t(1,t)k(t)(2T-t)\,dt.$$

Et pour tout $\epsilon > 0$, on écrit :

$$\int_0^{2T} E_z(s)\,ds \leq \epsilon \int_0^{2T} z_t(1,t)^2(2T-t)\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^{2T} k(t)^2(2T-t)\,dt,$$

On a :

$$\int_Q (z_x^2 + z_t^2)\,dxdt \leq 2\int_0^{2T} E_z(s)\,ds$$

Cette dernière inégalité dans (2.24) donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2T} z_t(1,t)^2(2T-t)\,dt &\leq C(T+1)2\epsilon\int_0^{2T} z_t(1,t)^2(2T-t)\,dt \\ &+ \frac{C(T+1)}{2\epsilon}\int_0^{2T} k(t)^2(2T-t)\,dt \\ &+ C\int_0^{T} k(t)^2(2T-t)\,dt.\end{aligned} \tag{2.25}$$

On choisit ϵ tel que $C(T+1)2\epsilon = \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^{2T} z_t(1,t)^2(2T-t)\,dt &\leq C(T+1)^2\int_0^{2T} k(t)^2(2T-t)\,dt + C\int_0^{T} k(t)^2(2T-t)\,dt \\ &\leq 8C(T+1)^2T\int_0^{2T} k(t)^2\,dt.\end{aligned}$$

Comme $2T-t \geq T$ sur $(0,T)$ et $z = w$ sur $(0,1)\times(0,T)$ alors :

$$\begin{aligned}\frac{T}{4}\int_0^{T}(w_t^2(1,t))dt &= \frac{T}{4}\int_0^{T}(z_t^2(1,t))dt \\ &\leq \frac{1}{4}\int_0^{T}(2T-t)(z_t^2(1,t))dt \\ &\leq \frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)(z_t^2(1,t))dt \\ &\leq 8CT(T+1)^2\int_0^{2T} k^2(t)dt,\end{aligned}$$

On utilise finalement la définition de $k(t)$ on obtient le résultat (2.21) donné par le théorème (2.4) ■

Théorème 2.5. *Il existe deux constantes positives C_1, C_2 indépendantes de L telles que*

$$E_L(t) \leq C_1 e^{-\frac{C_2}{L^6}t}E_L(0), \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.26}$$

Preuve

De $u^{(L)} = y + w$, on remarque que $E_L(0) = E_y(0)$ et grâce au théorème (2.3) nous obtenons :

$$E_L(0) \leq C_2 L^3 \int_0^T y_t(1,t)^2\, dt.$$

pour $T > C_1 L$. En utilisant l'estimation (2.21) du théorème 2.4, on obtient pour $T > C_1 L$:

$$E_L(0) \leq C_3 L^3 (T^2 + T + 1) \int_0^T u_t^{(L)}(1,t)^2\, dt,$$

En prenant $T_L := (C_1 + 1)L$, on arrive à :

$$E_L(0) \leq C_4 L^3 (L^2 + L + 1) \int_0^{T_L} u_t^{(L)}(1,t)^2\, dt.$$

Le résultat du lemme 2.1 permet d'écrire :

$$E_L(T_L) \leq E_L(0) \leq C_4 L^3 (L^2 + L + 1)(E_L(0) - E_L(T_L)),$$

Ce qui donne finalement :

$$E_L(T_L) \leq \gamma_L E_L(0),$$

où $\gamma_L = \frac{C_4 L^3 (L^2+L+1)}{1+C_4 L^3 (L^2+L+1)} < 1$. En appliquant cette argument (cf. [12]) sur $[(m-1)T_L, mT_L]$, pour $m = 1, 2..$, On obtient :

$$E_L(mT_L) \leq \gamma_L E_L((m-1)T_L)..... \leq \gamma_L^m E_L(0), \qquad m = 1, 2..$$

Ce qui donne :

$$E_L(mT_L) \leq e^{-\omega_L m T_L} E_L(0), \qquad m = 1, 2..$$

avec $\omega_L = \frac{1}{T_L} \ln \frac{1}{\gamma_L}$.

Pour t positif , il existe $m = 1, 2..$ tel que :

$$(m-1)T_L < t \leq mT_L$$

En utilisant la décroissance de l'énergie E_L, on conclut que :

$$E_L(t) \leq E_L((m-1)T_L) \leq e^{-\omega_L (m-1) T_L} E_L(0) \leq \frac{1}{\gamma_L} e^{-\omega_L t} E_L(0),$$

De plus γ_L et ω_L vérifient les équivalences : $\gamma_L \sim 1 - \frac{C}{L^5}$ et $\omega_L \sim \frac{c}{L^6}$.

Remarque 2.3. *Vu que le problème (2.7) est un problème à une dimension (dans l'espace), les valeurs propres associées à l'opérateur A_L sont caractérisées par le théorème 2.2. C'est pourquoi l'analyse de Fourier (cf.[16]) conduit à la stabilité exponentielle de l'énergie E_L.*

2.2.2 Stabilisation polynômiale

Dans cette section, nous montrons la stabilité polynômiale du système (2.1) dans le cas particulier où Γ_1 est composée d'un seul côté . A savoir :

$$\Gamma_1 = \{(1, y) : 0 < y < 1\}.$$

Rappelons l'expression de u en série de Fourier partiel :

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} u^{(l\pi)}(x) \sin(l\pi y), \tag{2.27}$$

où $u^{(l\pi)}$ est le coefficient de Fourier de u vérifiant l' équation des ondes (2.7) avec $L = l\pi$.

L'énergie de ce système est donnée par :

$$E_{l\pi}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ((u_x^{(l\pi)}(x,t))^2 + l^2\pi^2(u^{(l\pi)}(x,t))^2 + (u_t^{(l\pi)}(x,t))^2)\, dx + \frac{l^2\pi^2}{2}(u^{(l\pi)}(1,t))^2,$$

Comme

$$\int_0^1 sin^2(l\pi y)\, dy = \frac{1}{2} = \int_0^1 cos^2(l\pi y)\, dy$$

On trouve :

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} E_{l\pi}(t).$$

L'analyse de Fourier , le théorème 2.5 et les techniques utilisées dans [1, 2] nous permettent de déduire le résultat de la stabilité polynômiale du système (2.1) suivant :

Théorème 2.6. *Pour tout $k \in IN^\star$, il existe une constante positive C_k telle que pour toute donnée initiale $u_0 \in H^{3k+1}(\Omega)$ telle que $u_{0|\Gamma_1} \in H^{3k+1}(\Gamma_1)$ et $u_1 \in H^{3k}(\Omega)$, la* *solution u de (2.1) satisfait :*

$$E(t) \leq \frac{C_k}{t^k} E^{(k)}(0), \tag{2.28}$$

où $E^{(k)}(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{3k+1}(\Omega)} + \|u_{0|\Gamma_1}\|^2_{H^{3k+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^{3k}(\Omega)}$

Preuve :

Pour tout $k \in IN^\star$, il existe une constante $c_k > 0$ telle que

$$x^k e^{-x} \leq c_k, \quad \forall x \geq 0.$$

En injectant cette estimation dans (2.26), on obtient :

$$E_{l\pi}(t) \leq C_1 \frac{c_k l^{6k}}{C_2^k t^k} E_{l\pi}(0) = \frac{C_k}{t^k} l^{6k} E_{l\pi}(0).$$

L'analyse de Fourier nous permet d'écrire :

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} E_{l\pi}(t) \leq \frac{1}{2} \frac{C_k}{t^k} \sum_{l=1}^{\infty} l^{6k} E_{l\pi}(0).$$

Posons :

$$E^{(k)}(0) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{6k} E_{l\pi}(0).$$

Comme $l^{6k} < \lambda^{6k}$ car $\lambda^2 > L^2 = (l\pi)^2$ alors :

$$E^{(k)}(0) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{6k} E_{l\pi}(0)$$

En utilisant ensuite la propriété (cf.[10]) :

$$\|\upsilon\|_\alpha = (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} \|\upsilon_k\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

Où $\alpha \in IR$, H un espace de Hilbert et ,$(\upsilon_k)_{k\geq 0}$ sont les coefficients de Fourier de υ, on obtient :

$$E^{(k)}(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{3k+1}(\Omega)} + \|u_{0|\Gamma_1}\|^2_{H^{3k+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^{3k}(\Omega)}$$

Cette dernière inégalité peut être retrouvée en utilisant l'inégalité de Parseval ■

2.3 Partie B :*Contrôle sur deux côtés parallèles*

On reprend la notation utilisée dans la partie A.

Dans cette partie , nous supposons que la frontière Γ_1 sur laquelle porte le feedback est composée de deux côtés parallèles i.e.

$\Gamma_1 = \{(1,y) : 0 < y < 1\} \cup \{(0,y) : 0 < y < 1\} = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2$ et $\Gamma_0 = \partial\Omega \backslash \overline{\Gamma_1}$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times R^+ \\ \partial_\nu u - \triangle_T u + u_t = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times R^+ \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times R^+ \\ u(\cdot,0) = u^0, \ u_t(\cdot,0) = u^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.29}$$

Rappelons que :

Si $(u^0, u^1) \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$, alors le problème (2.29) admet une unique solution forte (u,v) vérifiant :

$$(u,v) \in C([0,\infty[\,, \mathbf{D}(\mathbf{A})) \cap C^1([0,\infty[\,, \mathbf{H}\ ).$$

2.3.1 Stabilisation exponentielle d'un model 1-d avec un paramètre.

Une démarche analogue à la précédente conduit au problème à une dimension suivant , avec dissipation en 1 et en 0 .

$$\begin{cases} u_{tt}^{(L)} - u_{xx}^{(L)} + (L)^2 u^{(L)} = 0 \ \text{ dans } \ (0,1), \ \ \forall\, t > 0, \\ u_x^{(L)}(0,t) = (L)^2 u^{(L)}(0,t) + u_t^{(L)}(0,t), \ \ \forall\, t > 0, \\ u_x^{(L)}(1,t) = -(L)^2 u^{(L)}(1,t) - u_t^{(L)}(1,t), \ \ \ \forall\, t > 0, \\ u^{(L)}(\cdot,0) = u_0^{(L)}, u_t^{(L)}(\cdot,0) = u_1^{(L)}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Où L est paramètre ≥ 2 L'énergie de la solution du système (2.30) est :

$$E_L(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (((u_x^{(L)}(x,t))^2 + L^2(u^{(L)}(x,t))^2 + (u_t^{(L)}(x,t))^2)\,dx + \frac{L^2}{2}((u^{(L)}(1,t))^2 + (u^{(L)}(0,t))^2).$$

Lemme 2.3. *Pour toute solution régulière $u^{(L)}$ du système (2.30) on a :*

$$E_L^{'}(t) = -((u_t^{(L)}(1,t))^2 + (u_t^{(L)}(0,t))^2)$$

Preuve :

Soit $u^{(L)}$ une solution régulière du problème (2.30) ; on a :

$$\frac{d(E_L(t)}{dt} = \int_0^1 (\partial_x(u_x^{(L)}u_t^{(L)}) - u_{xx}^{(L)}u_t^{(L)} + L^2 u_t^{(L)}u^{(L)} + u_{tt}^{(L)}u_t^{(L)})dx + L^2(u_t^{(L)}(1,t)u^{(L)}(1,t) + u_t^{(L)}(0,t)u^{(L)}(0,t)$$

$$= \int_0^1 (\partial_x(u_x^{(L)}u_t^{(L)})dx + \int_0^1 u_t^{(L)}(-u_{xx}^{(L)} + L^2u^{(L)} + u_t^{(L)}t)dx + L^2(u_t^{(L)}(1,t)u^{(L)}(1,t) + u_t^{(L)}(0,t)u^{(L)}(0,t))$$

$$= u_x^{(L)}(1,t)u_t^{(L)}(1,t) - u_x^{(L)}(0,t)u_t^{(L)}(0,t) + L^2(u_t^{(L)}(1,t)u^{(L)}(1,t) + u_t^{(L)}(0,t)u^{(L)}(0,t))$$

En utilisant les conditions aux limites (2^{me} et 3^{me} équation) du problème (2.30), il vient :

$$\frac{d(E_L(t)}{dt} = -((u_t^{(L)}(1,t))^2 + (u_t^{(L)}(0,t))^2)$$

Pour montrer que le système (2.30) est exponentiellement stable on procède comme dans la partie A ; on écrit $u^{(L)}$ sous la forme :

$$u^{(L)} = y + w$$

où y est solution du même problème que $u^{(L)}$ mais sans dissipation, w est le reste. Elles sont respectivement solutions de :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + L^2 y = 0 \ \ dans \ \ (0,1), \forall t > 0, \\ y_x(0,t) = L^2 y_(0,t), \ \ \forall t > 0, \\ y_x(1,t) = -L^2 y(1,t), \ \ \forall t > 0, \\ y(\cdot,0) = u_0^{(L)}, y_t(\cdot,0) = u_1^{(L)}, \end{cases} \tag{2.31}$$

et

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + L^2 w = 0 \ \ dans \ \ (0,1), \forall t > 0, \\ w_x(0,t) = L^2 w(0,t) + u_t^L(0,t), \ \ \forall t > 0, \\ w_x(1,t) = -L^2 w(1,t) - u_t^L(1,t), \ \ \forall t > 0, \\ w(\cdot,0) = 0, w_t(\cdot,0) = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

L'étude du problème (2.31) est liée à celle de l'opérateur positif, autoadjoint, à inverse compact A_L défini sur $L^2(0,1)$ par

$$D(A_L) = \{v \in H^2(0,1) : v_x(0) = L^2 v(0) \text{ et } v_x(1) = -L^2 v(1)\}$$

et

$$A_L v = -v_{xx} + L^2 v, \forall v \in D(A_L).$$

Le théorème suivant caractérise le spectre de l'opérateur A_L :

Théorème 2.7. *Les valeurs propres λ^2 de A_L sont strictement supérieures à L^2 et vérifient l'équation transcendante :*

$$\tan(\mu) = \frac{2\mu L^2}{\mu^2 - L^4} \tag{2.33}$$

avec $\mu = \sqrt{\lambda^2 - L^2}$.

Les fonctions propres normalisées associées sont données par :

$$\varphi_k(x) = \alpha_k(\sin(\mu_k x) + \frac{\mu_k}{L^2}\cos(\mu_k x)), \forall x \in (0,1), \tag{2.34}$$

Où $\mu_k = \sqrt{\lambda_k^2 - L^2}$ et α_k est une suite de nombres réels tel que :

$$\alpha_k^2 = \frac{2L^4}{\mu_k^2 + L^4 + 2L^2},$$

$$\alpha_k \sim \frac{L^2\sqrt{2}}{\mu_k} \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ k \longrightarrow \infty \quad \textit{et} \quad \frac{\alpha_k \mu_k}{L^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2L^2}, \ \forall\, k \in IN, \tag{2.35}$$

De plus on a :

$$|\varphi_k(0)|^2 = |\varphi_k(1)|^2 = \frac{\alpha_k^2 \mu_k^2}{L^4} = \frac{2\mu_k^2}{\mu_k^2 + L^4 + 2L^2}, \quad \forall\, k \in IN, \tag{2.36}$$

$$|\varphi_k(0)| = |\varphi_k(1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2L^2}, \ \forall\, k \in IN, \tag{2.37}$$

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma = \frac{\pi\sqrt{2}}{8L}, \ \forall\, k \in IN. \tag{2.38}$$

Preuve :

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

• On montre que $\lambda^2 \geq L^2$:

Par intégration par parties , on remarque que pour tout υ dans $D(A_L)$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (A_L\upsilon)(x)\upsilon(x)dx &= \int_0^1(-\upsilon_{xx} + L^2\upsilon)\upsilon(x)dx \\ &= \int_0^1 (\upsilon_x)^2 + (-\upsilon_x\upsilon\mid_0^1) + \int_0^1 L^2\upsilon^2(x)dx \\ &= \int_0^1((\upsilon_x)^2 + L^2\upsilon^2(x))dx - \upsilon_x(1)\upsilon(1) + \upsilon_x(0)\upsilon(0)\end{aligned}$$

Les conditions aux limites du problème (2.31) montrent que :

$$\int_0^1 (A_L\upsilon)(x)\upsilon(x)dx = \int_0^1 ((\upsilon_x)^2 + L^2\upsilon^2(x))dx + L^2\upsilon^2(1) + L^2\upsilon^2(0) \geq L^2 \int_0^1 (\upsilon)^2 dx$$

Ce qui implique que :

$$\lambda^2 \geq L^2.$$

Maintenant , on considère le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\varphi_{xx} + L^2\varphi = \lambda^2\varphi \ \text{ dans } \ (0,1), \\ \varphi_x(1) = -L^2\varphi(1) \\ \varphi_x(0) = L^2\varphi(0) \end{cases} \tag{2.39}$$

• Les fonctions propres :

La première équation de (2.39) montre qu'il existe α et $\beta \in I\!R$ tels que :

$$\varphi(x) = \alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x)$$

avec $\mu = \sqrt{\lambda^2 - L^2}$.

Comme

$$\varphi_x(x) = \mu\alpha\cos(\mu x) - \mu\beta\sin(\mu x)$$

la 2^{eme} condition aux limites donne alors :

$$\varphi_x(0) = L^2\beta = \alpha\mu$$

soit :

$$\beta = \frac{\alpha\mu}{L^2}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\varphi(x) = \alpha\left(\sin(\mu\, x) + \frac{\mu}{L^2}\cos(\mu\, x)\right),$$

Si $\mu = 0$ alors $\varphi = 0$, ce qui est impossible. Donc $\lambda^2 = L^2$ ne peut pas être une valeur propre de A_L.

• Equation caractéristique :

De la condition $\varphi_x(1) = -L^2\varphi(1)$ on obtient :

$$\mu\alpha\cos(\mu) - \mu\beta\sin(\mu) = -L^2(\alpha\sin\mu + \beta cos\mu)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\alpha\mu + L^2\beta}{\alpha\mu - L^2\alpha} = \frac{\sin\mu}{\cos\mu} = \tan\mu$$

En utilisant le fait que : $\beta = \frac{\alpha\mu}{L^2}$, on obtient :

$$\tan(\mu) = \frac{2\mu L^2}{\mu^2 - L^4}$$

Les racines de cette équation sont simples et vérifient :

$$\begin{aligned} &k\pi < \mu_k < k\pi + \tfrac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad \mu_k \,>\, L^2, \\ &k\pi - \tfrac{\pi}{2} < \mu_k < k\pi, \quad \text{si} \quad 0 \,<\, \mu_k \,<\, L^2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

• Montrons que $\alpha_k \sim \frac{L^2\sqrt{2}}{\mu_k} \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$

De l'hypothèse de normalisation :

$$\int_0^1 \varphi_k^2(x)dx \;=\; 1$$

on obtient :

$$\int_0^1 \alpha_k^2[\sin^2(\mu_k x) + \frac{\mu_k^2}{L^4}\cos^2(\mu_k x) + \frac{\mu_k}{L^2}(\sin(2\mu_k x))]dx = 1$$

En utilisant les formules trigonométriques :

$$\sin^2(\mu_k x) = \frac{1 - \cos(2\mu_k x)}{2}$$

et

$$\cos^2(\mu_k x) = \frac{1+\cos(2\mu_k x)}{2}$$

on obtient :

$$\alpha_k^2 \int_0^1 (\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\mu_k x)}{2} + \frac{\mu_k^2}{2L^4} + \frac{\mu_k^2}{2L^4}\cos(2\mu_k x) + \frac{\mu_k}{L^2}\sin(2\mu_k x))dx = 1$$

En calculant les intégrales on trouve :

$\alpha_k^2[\frac{1}{2} + \frac{\mu_k^2}{2L^4} + \frac{1}{2L^2} + (\frac{\mu_k^2}{4\mu_k L^4} - \frac{1}{4\mu_k})\sin(2\mu_k) - \frac{\mu_k}{2\mu_k L^2}\cos(2\mu_k)]$

$= \frac{\alpha_k^2\mu_k^2}{2L^4}[\frac{L^4}{\mu_k^2} + 1 + \frac{L^2}{\mu_k^2} + (2 - \frac{2L^4}{\mu_k^2})\frac{\sin(2\mu_k)}{4\mu_k} - \frac{L^2}{\mu_k^2}\cos(2\mu_k)]$

$= 1.$

Sachant que

$$\begin{aligned} |\sin(\mu_k)| &= \tfrac{2\mu_k L^2}{\mu_k^2+L^4}, \quad |\cos(\mu_k)| = |\tfrac{\mu_k^2-L^4}{\mu_k^2+L^4}|, \quad \cos(2\mu_k) = \tfrac{\mu_k^4+L^8-6\mu_k^2L^4}{\left(\mu_k^2+L^4\right)^2}, \\ \sin(2\mu_k) &= \tfrac{4\mu_k L^2\left(\mu_k^2-L^4\right)}{\left(\mu_k^2+L^4\right)^2}, \qquad \tan(2\mu_k) = \tfrac{4\mu_k L^2\left(\mu_k^2-L^4\right)}{\mu_k^4+L^8-6\mu_k^2L^4}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

on obtient :

$$\alpha_k^2 = \frac{2L^4}{\mu_k^2 + L^4 + 2L^2} \tag{2.42}$$

Comme $\mu_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$, alors

$$\frac{\alpha_k^2\mu_k^2}{2L^4} \sim 1,$$

Ce qui implique que :

$$\alpha_k \sim \frac{L^2\sqrt{2}}{\mu_k} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Comme $\mu_k \geq 1$ et $L \geq 1$, alors

$$\frac{\alpha_k^2\mu_k^2}{L^4} - \frac{1}{2L^4} = \frac{(4\mu_k^2-1)L^4 - (\mu_k^2+2L^2)}{2L^4(\mu_k^2+L^4+2L^2)} = \frac{N}{D}$$

$$N \geq (4\mu_k^2 - 1)L^2 - (\mu_k^2 + 2L^2) = \mu_k^2(4L^2 - 1) - 3L^2 \geq 4L^2 - 1 - 3L^2 = L^2 - 1 \geq 0$$

D'où

$$\frac{\alpha_k \mu_k}{L^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2L^2}, \ \forall \ k \ \in \ IN,$$

• Estimation de $\varphi_k(0)$ et $\varphi_k(1)$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_k(1) &= \alpha_k \sin(\mu_k) + \tfrac{\alpha_k \mu_k}{L^2} \cos(\mu_k), \\ &= \cos \mu_k (\alpha_k \tan \mu_k + \tfrac{\alpha_k \mu_k}{L^2}) \end{aligned}$$

$$\varphi_k(0) = \frac{\alpha_k \mu_k}{L^2}$$

En utilisant les relations (2.41) et (2.42) on obtient :

$$|\varphi_k(0)|^2 = |\varphi_k(1)|^2 = \frac{\alpha_k^2 \mu_k^2}{L^4} = \frac{2\mu_k^2}{\mu_k^2 + L^4 + 2L^2}.$$

Comme $\mu_k \geq 1$ et $L^2 \geq 1$ alors

$$|\varphi_k(0)| = |\varphi_k(1)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2L^2}.$$

• Estimation de $\lambda_{k+1} - \lambda_k$

De $\mu_k = \sqrt{\lambda_k^2 - L^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} - \lambda_k &= \sqrt{\mu_{k+1}^2 + L^2} - \sqrt{\mu_k^2 + L^2} \\ &= \tfrac{\mu_{k+1}^2 - \mu_k^2}{\sqrt{\mu_{k+1}^2 + L^2} + \sqrt{\mu_k^2 + L^2}} \\ &= (\mu_{k+1} - \mu_k) \tfrac{\mu_{k+1} + \mu_k}{\sqrt{\mu_{k+1}^2 + L^2} + \sqrt{\mu_k^2 + L^2}} \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (2.40) on obtient :

$$\mu_{k+1} - \mu_k \geq \frac{\pi}{2} \tag{2.43}$$

De (2.43) il vient :

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1}-\lambda_k &\geq \tfrac{\pi}{2}\tfrac{\mu_{k+1}+\mu_k}{\sqrt{\mu_{k+1}^2+L^2}+\sqrt{\mu_k^2+L^2}} \\
&= \tfrac{\pi}{2}\tfrac{1+\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}}{\sqrt{1+\frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}+\sqrt{\frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}^2}+\frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}}. \\
&\geq \tfrac{\pi}{2}\tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}+\sqrt{\frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}^2}+\frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}}
\end{aligned}$$

Comme $\mu_{k+1} > \mu_k$ on obtient :

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \geq \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{L^2}{\mu_{k+1}^2}}} = \frac{\pi}{4L}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{L^2}+\frac{1}{\mu_{k+1}^2}}}$$

Comme $\mu_k \geq 1$ et $L \geq 1$ alors

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k \geq \frac{\pi}{4L\sqrt{2}}$$

Ce qui prouve l'estimation (3.31) ■

La proposition suivante donne une estimation sur l'énergie $E_y(t)$ de la solution y du problème (2.31).

Proposition 2.2. *: Soit $E_y(t)$ l'énergie de la solution y du problème (2.31) définie par :*

$$E_y(t)=\frac{1}{2}\int_0^1((y_x(x,t))^2+L^2(y(x,t))^2+(y_t(x,t))^2)\,dx+\frac{L^2}{2}((y(1,t))^2+(y(0,t))^2).$$

avec $E_y'(t)=0$ pour toute solution régulière .

Il existe une constante $C>0$, indépendante de L, telle que :

$$E_y(0)\leq C\int_0^T((y_t(1,t))^2+(y_t(0,t))^2)\,dt, \quad \forall T \geq 16L\sqrt{2}. \tag{2.44}$$

Preuve de la proposition 2.2 :

La théorie spectrale permet d'écrire la solution y de (2.31) sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{k\geq 0}(y_{0k}\cos(t\lambda_k) + y_{1k}\frac{\sin(t\lambda_k)}{\lambda_k})\varphi_k(x)$$

Où y_{0k} (resp. y_{1k}) sont les coefficients de Fourier de $u_0^{(L)}$ (resp.$u_1^{(L)}$) , i.e :
$u_0^{(L)} = \sum_{k\geq 0} y_{0k}\varphi_k$ et $u_1^{(L)} = \sum_{k\geq 0} y_{1k}\varphi_k$

On a :

$$y_t(1,t) = \sum_{k\geq 0}(-y_{0k}\sin(t\lambda_k) + y_{1k}\frac{\cos(t\lambda_k)}{\lambda_k})\lambda_k\varphi_k(1)$$

et

$$y_t(0,t) = \sum_{k\geq 0}(-y_{0k}\sin(t\lambda_k) + y_{1k}\frac{\cos(t\lambda_k)}{\lambda_k})\lambda_k\varphi_k(0)$$

De l'inégalité du lemme 2.2 et l'estimaton (2.38) on en déduit qu'il existe deux constantes $C_1^{'} > 0$ et $C_2^{'} > 0$, indépendantes de L, telles que :

$$\frac{C_1^{'}}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2 + |y_{1k}|^2)|\varphi_k(1)|^2 \leq \int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}} |y_t(1,t)|^2\,dt,$$

et

$$\frac{C_2^{'}}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2 + |y_{1k}|^2)|\varphi_k(0)|^2 \leq \int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}} |y_t(0,t)|^2\,dt,$$

Comme $|\varphi_k(1)|^2 = |\varphi_k(0)|^2 \ \geq \ \frac{1}{2L^4}$, alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2 + |y_{1k}|^2) \leq C_3\,L^3\,\int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}} |y_t(1,t)|^2\,dt,$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2 + |y_{1k}|^2) \leq C_3\,L^3\,\int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}} |y_t(0,t)|^2\,dt,$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2 + |y_{1k}|^2) \leq \frac{C_3}{2}\,L^3\,\int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}} (|y_t(1,t)|^2 + |y_t(0,t)|^2)\,dt,$$

où C_3 est une constante positive indépendante de L.

On conclut finalement par l'identitée (cf [11, 10]) :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2+|y_{1k}|^2)=\|u_0^{(L)}\|^2_{D(A_L^{1/2})}+\|u_1^{(L)}\|^2$$

et la propriété :

$$\|v\|^2_{D(A_L^{1/2})}=\|A_L^{1/2}v\|^2=(A_Lv,v)=\int_0^1(v_x(x)^2+L^2v(x)^2)\,dx+L^2(v(1)^2+v(0)^2),\ \forall\, v\ \in\ D(A_L)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(0,1)$. Comme $u_0^{(L)}=y_0$, $u_1^{(L)}=y_t(.,0)$ alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k^2|y_{0k}|^2+|y_{1k}|^2)=\int_0^1(y_x(x,0)^2+L^2y(x,0)^2)+y_t(x,0)^2\,dx\ +\\ L^2(y(1,0)^2+y(0,0)^2)\ =\ 2E_y(0),\end{aligned}$$

d'où l'existence d'une constante $C>0$, indépendante de L, telle que :

$$E_y(0)\le C\,L^3\int_0^{\frac{4\pi}{\gamma}}((y_t(1,t))^2+(y_t(0,t))^2)\,dt$$

Pour tout $T>\frac{4\pi}{\gamma}=16L\sqrt{2}$ on a :

$$E_y(0)\le C_6\int_0^T((y_t(1,t))^2+(y_t(0,t))^2)\,dt$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2 :

On donne une majoration sur w

Proposition 2.3. *: Il existe une constante positive C telle que ;*

Pour tout $T>0$ la solution w du problème (2.32) satisfait :

$$\int_0^T(w_t^2(1,t)+w_t^2(0,t))\,dt\le C(T^2+T+1)\int_0^T((u_t^{(L)}(1,t))^2+(u_t^{(L)}(0,t))^2)dt \quad (2.45)$$

Preuve : On écrit la solution w solution du problème (2.32) sous la forme $w=z+v$ où z (respectivement v) est solution du même problème que w mais avec dissipation en 1 uniquement (respectivement en 0 uniquement) .

Il vient alors :

$$\begin{cases}z_{tt}-z_{xx}+L^2z=0,\quad \text{dans}\quad (0,1),\quad \forall t>0,\\ z_x(0,t)=L^2\,z(0,t)\ \forall t>0,\\ z_x(1,t)=-L^2z(1,t)-k_1(t),\ \forall t>0,\\ z(\cdot,0)=0,\ \ z_t(\cdot,0)=0.\end{cases} \quad (2.46)$$

et

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + L^2 v = 0, \quad \text{dans} \quad (0,1), \ \ \forall t > 0, \\ v_x(0,t) = L^2 v(0,t) + k_2(t), \quad \forall\, t > 0, \\ v_x(1,t) = -L^2 v(1,t), \ \forall t > 0, \\ v(\cdot,0) = 0, \ \ v_t(\cdot,0) = 0, \end{cases} \tag{2.47}$$

où

$$k_1(t) = \begin{cases} u_t^{(L)}(1,t) \ \ si \ \ 0 < t < T \\ 0 \ \ \text{ailleurs}, \end{cases}$$

et

$$k_2(t) = \begin{cases} u_t^{(L)}(0,t) \ \ si \ \ 0 < t < T \\ 0 \ \ \text{ailleurs}. \end{cases}$$

La démonstration de la proposition (2.3) est basée sur les deux lemmes suivants :

Lemme 2.4. *Il existe une constante positive C telle que pour tout $T > 0$ la solution z du problème (2.46) satisfait :*

$$\int_0^T (z_t^2(1,t) + z_t^2(0,t))\, dt \le C(T^2 + T + 1) \int_0^T (u_t^{(L)}(1,t))^2\, dt \tag{2.48}$$

Preuve :

On applique la technique des multiplicateurs, [10]. On multiplie la première équation du problème (2.46) par $(x - \frac{1}{2})(2T - t) z_x$ et on intègre le résultat dans $Q = (0,1) \times (0, 2T)$, on obtient pour des solutions régulières :

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \int_0^1 [(x - \frac{1}{2})(2T - t) z_t z_x]_{t=0}^{t=2T}\, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2T} (2T - t)[(x - 1/2) z_t^2]_{x=0}^{x=1}\, dt \\ &+ \ \int_Q (x - 1/2) z_t z_x\, dx dt + \frac{1}{2} \int_Q (2T - t)[z_t^2 + z_x^2 - L^2 z^2]\, dt dx \\ &- \ \frac{1}{2} \int_0^{2T} [(x - 1/2)(z_x^2 - L^2 z^2)]_{x=0}^{x=1} (2T - t)\, dt. \end{aligned}$$

Cette identité est équivalente à

$$\begin{aligned}
0 &= \int_Q (x-1/2) z_t z_x \, dxdt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)[z_t^2 + z_x^2 - L^2 z^2]\, dtdx \\
&- \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)(z_t^2(1,t) + z_t^2(0,t))dt + \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 z^2(1,t) - z_x^2(1,t)]\, dt \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 z^2(0,t) - z_x^2(0,t)]\, dt
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)(z_t^2(1,t) + z_t^2(0,t))dt &= \int_Q (x-1/2) z_t z_x \, dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)[z_t^2 + z_x^2 - L^2 z^2]\, dtdx \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 z^2(1,t) - z_x^2(1,t)]\, dt \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 z^2(0,t) - z_x^2(0,t)]\, dt.
\end{aligned}$$

On a :

$$z_x(0,t) = L^2 z(0,t),$$

d'où :

$$\begin{aligned}
L^2 z^2(0,t) - z_x^2(0,t) &= L^2 z^2(0,t) - L^4 z^2(0,t) \\
&= (L^2 - L^4) z^2(0,t) \\
&\leq 0, \quad \forall L \geq 2.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy on a :

$$\int_Q (x-1/2) z_t z_x \, dxdt \leq C \int_Q (z_t^2 + z_x^2)\, dtdx,$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)(z_t^2(1,t) + z_t^2(0,t))dt \leq C(T+1)\int_Q (z_t^2 + z_x^2)\, dtdx \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 z^2(1,t) - z_x^2(1,t)]\, dt,$$

On rappelle que :

$$z_x(1,t) = -L^2 z(1,t) - k_1(t).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} L^2 z^2(1,t) - z_x^2(1,t) &= L^2 z^2(1,t) - (L^2 z(1,t) + k_1(t))^2 \\ &= (L^2 - L^4) z^2(1,t) - 2L^2 z(1,t) k_1(t) - k_1^2(t) \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ on a :

$$|2L^2 z(1,t) k_1(t)| \leq \varepsilon L^4 z^2(1,t) + \frac{1}{\epsilon} k_1^2(t)$$

d'où

$$L^2 z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2 \leq (L^2 - L^4 + \epsilon L^4) z(1,t)^2 + (\frac{1}{\epsilon} - 1) k_1(t)^2.$$

On fixe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$L^2 - L^4 + \epsilon L^4 \leq 0, \quad \forall L \ \geq \ 2.$$

On obtient alors :

$$L^2 z(1,t)^2 - z_x(1,t)^2 \leq C k_1(t)^2. \tag{2.50}$$

En injectant l'estimation (2.50) dans (2.49) on obtient :

$$\frac{1}{4} \int_0^{2T} (2T - t)(z_t^2(1,t) + z_t^2(0,t)) dt \leq C(T+1) \int_Q (z_t^2 + z_x^2) \, dt dx \tag{2.51}$$
$$C \int_0^{2T} (2T - t) k_1^2(t) \, dt,$$

L'énergie de z est définie par :

$$E_z(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((z_x(x,t))^2 + L^2 (z(x,t))^2 + (z_t(x,t))^2) \, dx + \frac{L^2}{2} ((z(1,t))^2 + (z(0,t))^2).$$

Une intégration par partie pour des solutions régulières , nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E_z^{'}(t) &= \int_0^1 z_t(z_{tt} - z_{xx} + L^2 z)\, dx \\ &+ [z_x z_t]_0^1 + L^2(z_t(1,t)z(1,t) + z_t(0,t)z(0,t)) \\ &= z_x(1,t)z_t(1,t) - z_x(0,t)z_t(0,t) \\ &+ L^2(z_t(1,t)z(1,t) + z_t(0,t)z(0,t)) \end{aligned}$$

Les conditions aux limites du problème (2.46) nous donnent :

$$\begin{aligned} E_z^{'}(t) &= (-L^2 z(1,t) - k_1(t))z_t(1,t) - L^2 z(0,t)z_t(0,t) \\ &+ L^2 z_t(1,t)z(1,t) + L^2 z_t(0,t)z(0,t) \\ &= -k_1(t)z_t(1,t), \end{aligned}$$

d'où :

$$E_z^{'}(t) = -k_1(t)z_t(1,t) \tag{2.52}$$

En intégrant ce résultat entre 0 et S , on obtient :

$$E_z(S) - E_z(0) = \int_0^S E_z^{'}(t)\, dt = -\int_0^S k_1(t)z_t(1,t)\, dt.$$

On utilise le fait que :$E_z(0) = 0$, on intègre entre 0 et $2T$ puis on utilise le théorème de Fubini ; on arrive à :

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} E_z(S) ds &= -\int_0^{2T}\int_0^S z_t(1,t)k_1(t)dt\, ds, \\ &= -\int_0^{2T} (2T-t)z_t(1,t)k_1(t)dt, \end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$, on a :

$$\int_0^{2T} E_z(S)ds \le \epsilon \int_0^{2T} z_t^2(1,t)(2T-t)\, dt + \frac{1}{4\epsilon}\int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt. \tag{2.53}$$

On a aussi :

$$\int_Q (z_t^2 + z_x^2)\, dtdx \leq 2 \int_0^{2T} E_z(S)ds$$

En injectant cette dernière inégalité dans (2.51), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)(z_t^2(1,t)+z_t^2(0,t))dt &\leq C(T+1)\int_0^{2T} E_z(S)ds \\ &+ \int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt.\end{aligned}$$

On utilise ensuite (2.53), il vient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)(z_t^2(1,t)+z_t^2(0,t))dt &\leq C(T+1)\epsilon\int_0^{2T} z_t^2(1,t)(2T-t)\, dt \\ &+ \frac{1}{4\epsilon}C(T+1)\int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt \\ &+ \int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt.\end{aligned}$$

En choisissant ϵ tel que $C(T+1)\epsilon = \frac{1}{8}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int_0^{2T}(2T-t)(z_t^2(1,t)+z_t^2(0,t))dt &\leq C(T+1)^2\int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt \\ &+ \int_0^{2T} k_1^2(t)(2T-t)dt.,\end{aligned}$$

Comme $T \leq 2T - t \leq 2T$ sur $[0, T]$, alors :

$$\frac{T}{8}\int_0^T (z_t^2(1,t)+z_t^2(0,t))dt \leq CT(T+1)^2\int_0^{2T} k_1^2(t)dt,$$

ou encore :

$$\int_0^T (z_t^2(1,t)+z_t^2(0,t))\, dt \leq C(T+1)^2\int_0^{2T} k_1^2(t)\, dt.$$

On utilise pour terminer la définition de $k_1(t)$ qui nous donne :

$$\int_0^T (z_t^2(1,t)+z_t^2(0,t))\, dt \leq C(T^2+T+1)\int_0^T (u_t^{(L)}(1,t))^2\, dt,$$

pour une constante $C > 0$.

Lemme 2.5. *Il existe une constante positive C telle que ; Pour tout $T > 0$ la solution v du problème (2.47) satisfait :*

$$\int_0^T (v_t^2(1,t) + v_t^2(0,t))\, dt \leq C(T^2 + T + 1) \int_0^T (u_t^{(L)}(0,t))^2 dt \tag{2.54}$$

Preuve :

On procède de la même manière que dans le lemme précédent avec le même multiplicateur ; on obtient l'identité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)(v_t^2(1,t) + v_t^2(0,t))dt &= \int_Q (x-1/2) v_t v_x \, dxdt \\ &+ \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)[v_t^2 + v_x^2 - L^2 v^2]\, dtdx \\ &+ \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 v^2(1,t) - v_x^2(1,t)]\, dt \\ &+ \frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 v^2(0,t) - v_x^2(0,t)]\, dt \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} L^2 v^2(1,t) - v_x^2(1,t) &= L^2 v^2(1,t) - (-(L^2 v(1,t))^2 \\ &= (L^2 - L^4) v^2(1,t) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

et

$$\int_Q (x-1/2) v_t v_x \, dxdt \leq C \int_Q (v_t^2 + v_x^2)\, dtdx$$

alors :

$$\frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)(v_t^2(1,t) + v_t^2(0,t))dt \leq C(T+1)\int_Q (v_t^2 + v_x^2)\, dtdx \tag{2.55}$$
$$\frac{1}{4}\int_0^{2T} (2T-t)[L^2 v^2(0,t) - v_x^2(0,t)]\, dt,$$

Rappelons que :

$$v_x(0,t) = L^2 v(0,t) + k_2(t)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} L^2v^2(0,t) - v_x^2(0,t) &= L^2v^2(0,t) - (L^2v(0,t) + k_2(t))^2 \\ &= (L^2 - L^4)v^2(0,t) - 2L^2v(0,t)k_2(t) - k_2^2(t) \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ on a :

$$|2L^2v(0,t)k_2(t)| \leq \varepsilon L^4v^2(0,t) + \frac{1}{\epsilon}k_2^2(t),$$

d'où

$$L^2v(0,t)^2 - v_x(0,t)^2 \leq (L^2 - L^4 + \epsilon L^4)v(0,t)^2 + (\frac{1}{\epsilon} - 1)k_2(t)^2.$$

En fixant $\varepsilon > 0$ tel que :

$$L^2 - L^4 + \epsilon L^4 \ \leq \ 0, \quad \forall\, L \ \geq \ 2,$$

on obtient :

$$L^2v(0,t)^2 - v_x(0,t)^2 \leq Ck_2(t)^2. \tag{2.56}$$

En combinant (2.55) et (2.56), il vient :

$$\frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)(v_t^2(1,t) + v_t^2(0,t))dt \leq C(T+1)\int_Q (v_t^2 + v_x^2)\,dtdx \tag{2.57}$$
$$C\int_0^{2T}(2T-t)k_2^2(t)\,dt,$$

L'énergie de v solution du problème (2.47) est définie par :

$$E_v(t) = \frac{1}{2}\int_0^1((v_x(x,t))^2 + L^2(v(x,t))^2 + (v_t(x,t))^2)\,dx + \frac{L^2}{2}((v(1,t))^2 + (v(0,t))^2),$$

En utilisant une intégration par partie ainsi que les conditions aux limites du problème (2.47), on obtient pour des solutions régulières :

$$E_v^{'}(t) = -k_2(t)v_t(0,t) \tag{2.58}$$

On intègre le résultat (2.58) entre 0 et S puis entre 0 et $2T$ et on utilise le théorème de Fubini on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2T} E_v(S)ds &= -\int_0^{2T}\int_0^S v_t(0,t)k_2(t)dt\,ds, \\
&= -\int_0^{2T}(2T-t)v_t(0,t)k_2(t)dt,
\end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$ on a :

$$\int_0^{2T} E_v(S)ds \leq \epsilon \int_0^{2T} v_t^2(0,t)(2T-t)\,dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^{2T} k_2^2(t)(2T-t)dt. \tag{2.59}$$

On a aussi :

$$\int_Q (v_t^2 + v_x^2)\,dtdx \leq 2\int_0^{2T} E_v(S)ds.$$

En injectant cette dernière estimation dans (2.57) et en utilisant (2.59) on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)(v_t^2(1,t)+v_t^2(0,t))dt &\leq C(T+1)\epsilon\int_0^{2T} v_t^2(0,t)(2T-t)\,dt \\
&+ \frac{1}{\epsilon}C(T+1)\int_0^{2T} k_2^2(t)(2T-t)dt \\
&+ C\int_0^{2T} k_2^2(t)(2T-t)dt.
\end{aligned}$$

Comme dans le lemme 2.4 , on choisit ϵ tel que : $C(T+1)\epsilon = \frac{1}{8}$; il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\int_0^{2T}(2T-t)(v_t^2(1,t)+v_t^2(0,t))dt &\leq C(T+1)^2\int_0^{2T} k_2^2(t)(2T-t)dt \\
&+ C\int_0^{2T} k_2^2(t)(2T-t)dt,
\end{aligned}$$

Comme $T \leq 2T-t \leq 2T$ sur $[0,T]$, alors :

$$\frac{T}{8}\int_0^{T}(v_t^2(1,t)+v_t^2(0,t))dt \leq CT(T+1)^2\int_0^{2T} k_2^2(t)dt.$$

Finalement la définition de $k_2(t)$ donne :

$$\int_0^T (v_t^2(1,t)+v_t^2(0,t))\,dt \leq C(T^2+T+1)\int_0^T (u_t^{(L)}(0,t))^2\,dt,$$

pour une constante $C > 0$

Démonstration de la proposition 2.3 :

En combinant les estimations (2.48) et (2.54) , on obtient :

$$\int_0^T (z_t^2(1,t)+v_t^2(1,t)+z_t^2(0,t)+v_t^2(0,t))\,dt \leq C^{'}(T^2+T+1)\int_0^T ((u_t^{(L)}(1,t))^2+(u_t^{(L)}(0,t))^2)\,dt$$

Comme

$$w_t^2(1,t) = (z_t(1,t)+v_t(1,t))^2 \leq 2\{z_t^2(1,t)+v_t^2(1,t)\}$$

et

$$w_t^2(0,t) = (z_t(0,t)+v_t(0,t))^2 \leq 2\{z_t^2(0,t)+v_t^2(0,t)\}$$

Alors :

$$\int_0^T (w_t^2(1,t)+w_t^2(0,t))\,dt \leq C(T^2+T+1)\int_0^T u_t^2(0,t)+u_t^2(1,t)\,dt,$$

où $C = 2C^{'}, \quad C^{'} > 0$

Théorème 2.8. *: Stabilisation exponentielle du problème* $1-d$

Il existe deux constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de L telles que :

$$E_L(t) \leq C_1 e^{-\frac{C_2}{L^3}t} E_L(0), \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{2.60}$$

Preuve :

De $u^{(L)} = y+w$, il vient $E_L(0) = E_y(0)$; grâce à la proposition (2.2) nous obtenons :

$$E_y(0) = E_L(0) \leq C\int_0^T (y_t(1,t)^2 + y_t(0,t)^2)\,dt,$$

pour $T > 16L\sqrt{2}$.

Comme

$$y_t(1,t) = u_t^{(L)}(1,t) - w_t(1,t)$$

et

$$y_t(0,t) = u_t^{(L)}(0,t) - w_t(0,t)$$

Alors

$$y_t^2(1,t) \leq 2\{u_t^2(1,t) + w_t^2(1,t)\}$$

$$y_t^2(0,t) \leq 2\{u_t^2(0,t) + w_t^2(0,t)\}.$$

En utilisant ensuite l'estimation (2.45) de la proposition (2.3) on obtient :

$$E_L(0) \leq C(T^2 + T + 1) \int_0^T (u_t^2(1,t) + u_t^2(0,t))\, dt,$$

pour $T > 16L\sqrt{2}$; en prenant $T_L = (16L\sqrt{2} + 1)$ on obtient :

$$E_L(0) \leq C(L^2 + L + 1) \int_0^{T_L} (u_t^2(1,t) + u_t^2(0,t))\, dt.$$

Le résultat du lemme 2.3 nous permet de déduire :

$$E_L(T_L) \leq E_L(0) \leq C(L^2 + L + 1)(E_L(0) - E_L(T_L)),$$

où encore :

$$E_L(T_L)(1 + C(L^2 + L + 1)) \leq C(L^2 + L + 1)E_L(0)$$

Ce qui donne finalement :

$$E_L(T_L) \leq \gamma_L E_L(0),$$

avec $\gamma_L = \frac{C(L^2+L+1)}{1+C(L^2+L+1)}$. En utilisant les arguments données dans la preuve du théorème 3.3 de [12] , il vient alors :

$$E_L(t) \leq \frac{1}{\gamma_L} e^{-\omega_L t} E_L(0),$$

avec $\omega_L = \frac{1}{T_L} \ln \frac{1}{\gamma_L}$. γ_L et ω_L vérifient : $\gamma_L \sim 1 - \frac{C}{L^2}$ et $\omega_L \sim \frac{C}{L^3}$

2.3.2 Stabilisation polynômiale

Dans cette section on montre la stabilité polynômiale du système (2.29) dans le cas général où la frontière Γ_1 qui porte le contrôle est définie par :

$$\Gamma_1 = \{(1,y) : 0 < y < 1\} \cup \{(0,y) : 0 < y < 1\}.$$

L'expression de u par Fourier partiel s'écrit :

$$u(x,y,t) = \sum_{l=1}^{\infty} u^{(l\pi)}(x,t)\sin(l\pi y)$$

où $u^{(l\pi)}$ est le coefficient de Fourier de u vérifiant le système (2.30) avec $L = l\pi$.

On rappelle que l'énergie $E_{l\pi}$ de la solution $u^{(l\pi)}$ du problème (2.30) est donnée par :

$$E_{l\pi}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((u_x^{(l\pi)}(x,t))^2 + l^2\pi^2(u^{(l\pi)}(x,t))^2 + (u_t^{(l\pi)}(x,t))^2\right) dx \ +$$

$$\frac{l^2\pi^2}{2}\left(u^{(l\pi)}(1,t)^2 + u^{(l\pi)}(0,t)^2\right),$$

On a (voir paritie A) :

$$E(t) = \frac{1}{2}(\sum_{l=1}^{\infty} E_{l\pi}(t)).$$

En utilisant l'analyse de Fourier et le théorème précédent on obtient , pour des données initiales suffsamment régulières [1, 2] le résultat fondamental donné par le théorème suivant :

Théorème 2.9. *Pour tout $k \in IN^\star$,il existe une constante $C_k > 0$ telle que pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^{\frac{3}{2}k+1}(\Omega)\times H^{\frac{3}{2}k}(\Omega)$ vérifiant $u_{0|\Gamma_1^j} \in H^{\frac{3}{2}k+1}(\Gamma_1^j)$, $j = 1, 2$, l'énergie de la solution u du problème (2.29) vérifie*

$$E(t) \leq \frac{C_k}{t^k}\sum_{l=1}^{\infty} l^{3k}E_{l\pi}(0), \ \ \forall\, t \ > \ 0, \tag{2.61}$$

où

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{3k}E_{l\pi}(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{\frac{3}{2}k+1}(\Omega)} + \|u_{0|\Gamma_1}\|^2_{H^{\frac{3}{2}k+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{3}{2}k}(\Omega)}.$$

Preuve :

Pour tout $k \in IN^\star$, il existe une constante $c_k > 0$ telle que

$$x^k e^{-x} \leq c_k, \quad \forall x \ \geq \ 0.$$

En injectant cette estimation dans (2.60) on obitent :

$$E_{l\pi}(t) \leq C_1 \frac{c_k\, l^{3k}}{C_2^k\, t^k} E_{l\pi}(0) = \frac{C_k}{t^k} l^{3k} E_{l\pi}(0), \ \ \forall\, t \ > \ 0,$$

d'où

$$E(t) = \sum_{l=1}^{\infty} E_{l\pi}(t) \leq \frac{C_k}{t^k} \sum_{l=1}^{\infty} l^{3k} E_{l\pi}(0), \quad \forall\, t \,>\, 0.$$

En utilisant finalement les résultats donnés dans [10] , on obtient :

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{3k} E_{l\pi}(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{\frac{3}{2}k+1}(\Omega)} + \|u_{0|\Gamma_1}\|^2_{H^{\frac{3}{2}k+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^{\frac{3}{2}k}(\Omega)},$$

ce qui termine la démonstration du théorème (2.9) ■

2.4 Comparaison

Dans la partie B, on a obtenu la même stabilisation, avec des données initiales moins régulières.

L'utilisation du paramètre L dans le model 1-d nous a aidé à préciser le domaine des données initiales du problème principal.

2.5 Bibliographie

Bibliographie

[1] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik,*Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations* , J.Evol. Equ. 2, 127-150 (2002)

[2] A. Batkai ,K. J Engel ,*Polynomial stability of operator semigroups* , Math.Nachr.279, N0. 13-14,1425-1440 (2006)

[3] H. Brezis,*Opérateurs maximaux monotones et semi -groupes de contraction dans les espaces de Hilbert* , North Holland, Amsterdam (1973)

[4] P. Cannarsa,*Persistent regional null controllability for a class of degenerate parabolic equations* , CMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED ANALYSIS, Volume 3, Num 4 pp 607-635 , 2004

[5] P.Grisvard, *Elliptic Problems in nonsmooth domains,Monographs and Studies in Mathematics* , 24 Pitman , Boston -London -Melbourne,1985

[6] A. Haraux. *Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire.* J. Math. Pures Appl. IX. Sér. 68(4) :457–465, 1989.

[7] A. Heminna. *Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel.* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 5 :591–622 (electronic), 2000.

[8] A. Heminna, *Stabilisation de problemes de Ventcel ,* C.R. Acad.Sci.Paris, 328, série I (1999) 1171-1174

[9] Ingham. *Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series.* Math. Z. 41 :367–369, 1936.

[10] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, volume 36 of RMA. Masson, Paris, 1994.

[11] J. L Lions et E. Magenes *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, I-III, Dunod , Paris , 1968- 1970. Masson, Paris, 1994.

[12] S. Nicaise. *Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications.* Rendiconti di Matematica Serie VII 23 :83–116, 2003.

[13] J. E. M. Rivera and R. Racke ,*Polynomial stability in two - dimensional magneto -elasticity*, IMA J .Appl. Math .66 (2001) 269-283

[14] A.D. Ventcel. *On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes.* Theor. Probability Appl. 4 :164–177, 1959.

[15] X. Zhang and E. Zuazua. *Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic-parabolic coupled system.* J. Differential Equations 204 :380–438, 2004.

[16] X. Zhang and E. Zuazua. *decay of the solutions of the system of thermoelasticity of type III* . Commun. Contemp. Math ., 5(2003) , 25 - 83

Chapitre 3

Etude de la stabilisation polynômiale du problème de Ventcel pour l'équation des ondes posée dans un disque

Résumé . Ce travail traite le problème de la stabilisation polynomiale [8, 14] de l'équation des ondes posée dans un disque avec des conditions aux limites de type Ventcel ·
L'étude de ce dernier nécessite quelques notions et résultats préliminaires concernant les fonctions de Bessel [1, 13] ·
Nous commençons par présenter ces fonctions , donner quelques propriétés et nous abordons en particulier , le problème des zéros de Bessel qui s'avèrent importants dans la suite de ce chapitre ·
Ce problème sera formulé en coordonnées polaires . En se servant ensuite de la théorie spectrale et la technique des multiplicateurs on montre la stabilité exponentielle d'un model à une dimension · Quelle sera donc l'effet d'une telle stabilisation (stabilisation partielle) sur le comportement des solutions à l'infini ? La réponse est donnée dans

le présent travail est que l'énergie des solutions suffisamment régulières décroit au sens polynômial à l'infini ·

3.1 Fonctions de Bessel

3.1.1 Equations et fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernouilli, portent le nom de Friedrich Bessel et sont les solutions y de l'équation différentielle de Bessel :

$$x\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + (m^2x^2 - k^2)y = 0$$

Cette équation est équivalente à :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (m^2 - \frac{k^2}{x^2})y = 0 \tag{3.1}$$

où k est un nombre réel ou complexe ·

Il existe deux sortes de fonctions de Bessel [13] :

• Les fonctions de Bessel d'ordre k de 1^{re} espèce notées J_k qui sont définies en 0 :

$$J_k(x) = (\frac{x}{2})^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(k+p)!}(\frac{x}{2})^{2p}, \tag{3.2}$$

• Les fonctions de Bessel du second espèce Y_k définies par :

$$Y_k(x) = Lim_{\nu \longrightarrow k}(\frac{(cos\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{sin(\pi\nu)}) \tag{3.3}$$

Les solutions Y_k ne sont pas définies en 0 , et on a (cf.[13]) :

$$Lim_{x \longrightarrow 0}Y_k(x) = -\infty \tag{3.4}$$

La forme générale des solutions de (3.1) s'écrit :

$$y(x) = AJ_k(mx) + BY_k(mx) \tag{3.5}$$

3.1.2 Quelques propriétés des fonctions de Bessel de 1^{re} espèce

Les fonctions de Bessel d'ordre négatif

Les fonctions de Bessel d'ordre négatif sont définies par :

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x), \quad k > 0$$

Dérivées des fonctions de Bessel $J_k(x)$

$$\frac{d}{dx}[x^k J_k(mx)] = mx^k J_{k-1}(mx) \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(mx)] = -mx^{-k} J_{k+1}(mx) \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dx}[J_k(mx)] = -mJ_{k+1}(mx) + \frac{k}{x} J_k(mx) \tag{3.8}$$

Développement en séries de puissance des fonctions de Bessel

$$J_k(x) = \frac{(\frac{x}{2})^k}{\Gamma(k+1)}(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p}}{p!(k+1).....(k+P)})$$

Approximation asymptotique des fonctions de Bessel$(x \to \infty)$

$$\begin{aligned} J_k(x) & \\ \simeq & \sqrt(\frac{2}{\pi x})[(1 - \frac{(4k^2-1^2)(4k^2-3^2)}{2!(8x)^2} + ...)cos(x - \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}) \\ - & (\frac{(4k^2-1^2)}{1!8x} - ....)sin(x - \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2})] \end{aligned}$$

Des deux dernières séries , on conclut que :

- Pour x grand (au voisinage de ∞) , on peut approcher $J_k(x)$ d'aprés [1] par :

$$J_k(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos(x - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2})) \quad (3.9)$$

• Pour k fixé et x au voisinage de 0, $J_k(x)$ peut être approchée [13] par :

$$J_k(x) \simeq \frac{1}{2^k k!} x^k \quad (3.10)$$

Intégrale de Bessel

Les fonctions de Bessel peuvent être aussi exprimer en fonctions d'intégrale (cf.[13]) :

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} cos(k\theta - xsin\theta) d\theta \quad (3.11)$$

3.1.3 Zéros de Bessel

On note $j_{k,1}$, $j_{k,2}$, ...les zéros positifs de $J_k(x)$, fonctions de Bessel d'ordre k de 1^{re} espèce .

Proposition 3.1. *: Si $j_{k,1}$, $j_{k,2}$, ...(respectivement $j_{k+1,1}$, $j_{k+1,2}$, ...) sont les zéros positifs de $J_k(x)$ (resp $J_{k+1}(x)$). Alors pour $k > -1$ on a :*

$$0 < j_{k,1} < j_{k+1,1} < j_{k,2} < j_{k+1,2} < j_{k,3} < .... \quad (3.12)$$

Ce résultat est souvent exprimé par l'expression : " les zéros de $J_k(x)$ sont entrelacés avec ceux de $J_{k+1}(x)$" (cf. [13]).

Preuve

Pour montrer le résultat (3.12) , on utilise les formules de dérivation (3.6) et (3.7) pour $m = 1$:

$$\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(x)] = -x^{-k} J_{k+1}(x) \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{k+1} J_{k+1}(x)] = x^{k+1} J_k(x) \quad (3.14)$$

L'équation (3.13) montre qu' entre deux zéros consécutifs de $x^{-k}J_k(x)$, il existe au moins un zéro de $x^{-k}J_{k+1}(x)$, de même l'équation (3.14) montre que lorsqu'on se place entre deux zéros consécutifs de $x^{k+1}J_{k+1}(x)$, il y a au moins un zéro de $x^{k+1}J_k(x)$. Le résultat (3.12) devient donc évident .

Le théorème suivant donne une caractérisation des zéros de Bessel , valable pour toutes les solutions de (3.1) tel que k soit un réel et $k^2 > \frac{1}{4}$:

Théorème 3.1. *Soient $j_{k,i}$ et $j_{k,i+1}$ deux zéros consécutifs de $J_k(x)$ solution de première espèce de (3.1) .Alors :*

$$\frac{\pi}{\sqrt(1-\frac{k^2-\frac{1}{4}}{j_{k,i+1}^2})} < j_{k,i+1} - j_{k,i} < \frac{\pi}{\sqrt(1-\frac{k^2-\frac{1}{4}}{j_{k,i}^2})},\ k^2 > \frac{1}{4} \tag{3.15}$$

On voit que l'écart tend vers π quand $j_{k,i}$ tend vers ∞

La démonstration de ce théorème est donnée dans [1] .

Propriétés des zéros de Bessel

• Formule asymptotique : De l'expression (3.10) , on en déduit que :

$x = 0$ est un zéro d'ordre k . Les zéros suivants ; $x = j_{k,1}$,$j_{k,2}$,.....$j_{k,i}$.....sont simples distincts et pour i grand , on peut approcher le i^{me} zéro par la formule asymptotique :

$$j_{k,i} \sim \pi(i + \frac{k}{2} - \frac{1}{4}), \quad i \geq 1 \tag{3.16}$$

• En admettant que tout les zéros sont simples (Si $J_k(x) = 0$ alors $J_k'(x) \neq 0$) il ne peut y avoir de zéro commun à $J_k(x)$ et $J_{k+1}(x)$.

Par récurrence , il est clair que tous les zéros de toutes les fonctions de Bessl sont entrelacés .

• Si k est réel et $k > -1$, les zéros des fonctions de Bessel sont tous réels (cf. [13]).

3.2 Existence et unicité de la solution

Soit $\Omega = \{x \in \mathcal{IR}^2; 0 < |x| < 1\}$ le disque de $\mathcal{IR}^2$ de frontière Γ tel que :

$$\Gamma = \{x \in \mathcal{IR}^2 / |x| = 1\}$$

On considère le problème :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathcal{IR}^+ \\ \partial_\nu u - \triangle_T u + u_t = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathcal{IR}^+ \\ u(\cdot, 0) = u^0, \ u_t(\cdot, 0) = u^1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

$\triangle_T$ désigne le Laplacien tangentiel,(cf. [10])

On introduit l'éspace :

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega) : v_{/\Gamma} \in H^1(\Gamma)\right\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_\Gamma |\nabla_T v|^2 \, d\Gamma$$

On pose :

$$\mathbf{H} = V \times L^2(\Omega)$$

$\mathbf{H}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $<,>_{\mathbf{H}}$ défini par :

$$< (u, v), (f, g) >_H = (\nabla u, \nabla f)_{L^2(\Omega)} + (\nabla_T u, \nabla_T f)_{L^2(\Gamma)} + (v, g)_{L^2(\Omega)}, \tag{3.18}$$

auquel est associée la norme :$\| \cdot \|_H =< \cdot, \cdot >_H^{1/2}$.

l'énergie de la solution du problème (3.17) est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \| (u, u_t)(t) \|_H^2 \tag{3.19}$$

On suppose que $(u^0, u^1) \in \mathbf{H}$. l'unique solution u du problème (3.17) vérifie :

$$(u, u_t) \in C\left([0, \infty[\,, V \times L^2(\Omega)\right).$$

On définit sur $\mathbf{H}$, l'opérateur non borné $\mathbf{A}$ par :

$$\mathbf{A}(u, v) = (v, \triangle u)$$

de domaine $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = \{(u, v) \in V \times V, \ \Delta u \in L^2(\Omega) : \partial_\nu u - \triangle_T u + v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$

Si $(u^0, u^1) \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ alors , $(u, u_t) \in C([0, \infty[\,, \mathbf{D}(\mathbf{A})) \cap C^1([0, \infty[\,, \mathbf{H})$.

3.3 Formulation du problème

On considère maintenant l'expression suivante des solutions particulières u du problème (3.17) :

$$u = \sum_{\kappa \in Z} u^{(2\kappa)}(r,t) e^{i2\kappa\theta}$$

où $u^{(2\kappa)}$ est le coefficient de Fourier de u .

Le laplacien en coordonnées polaires s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

On a donc :

$$u_{tt} = \sum_{\kappa \in Z} u_{tt}^{(2\kappa)} e^{i2\kappa\theta}$$

et

$$\Delta u = \sum_{\kappa \in Z} ((\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})u^{(2\kappa)})) - \frac{(2\kappa)^2}{r^2}u^{(2\kappa)}))e^{i2\kappa\theta}$$

La 1^{re} équation du problème (3.17) est donc équivalente à :

$$u_{tt}^{(2\kappa)} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(2\kappa)} + \frac{(2\kappa)^2}{r^2}u^{(2\kappa)} = 0 \qquad \text{dans} \quad (0,1)$$

Comme :

$$\partial_\nu u_{/\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial r}/\Gamma,$$

$$\nabla_T u_{/\Gamma} = (-sin\theta, cos\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

et

$$\Delta_T u_{/\Gamma} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}/\Gamma$$

On obtient alors sur Γ :

$$\partial_\nu u - \triangle_T u + u_t = \sum_{\kappa \in Z} \frac{\partial}{\partial r}u^{(2\kappa)}(1)e^{i2\kappa\theta} + (2\kappa)^2 u^{(2\kappa)}(1)e^{i2\kappa\theta} + u_t^{(2\kappa)}(1)e^{i2\kappa\theta} = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial r}u^{(2\kappa)}(1) + (2\kappa)^2 u^{(2\kappa)}(1) + u_t^{(2\kappa)}(1) = 0, \qquad sur \quad \Gamma$$

Ce qui nous permet de déduire le model $1-d$ suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(k)} + \frac{(k)^2}{r^2}u^{(k)} = 0 & \text{dans} \quad (0,1)\times R^+ \\ \frac{\partial}{\partial r}u^{(k)}(1) + (k)^2 u^{(k)}(1) + u_t^{(k)}(1) = 0 & \text{sur} \quad IR^+ \\ u^{(k)}(0) = 0 & \text{sur} \quad IR^+ \\ u^{(k)}(\cdot,0) = u_0^{(k)},\ u_t^{(k)}(\cdot,0) = u_1^{(k)} & \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{3.20}$$

Où on a posé $k = 2\kappa$

La condition au bord "$u^{(k)}(0) = 0$" est justifie plus loin.

3.4 Stabilisation exponentielle d'un model à une dimension .

On reprend le problème (3.20) ci-dessus :

L'énergie de la solution de ce problème est donnée par :

$$E_k(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ((\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)})^2) r dr + \frac{k^2}{2}(u^{(k)}(1))^2. \tag{3.21}$$

En effet , en considérant une solution forte , en multipliant la 1^{re} équation du problème (3.20) par u_t et en intègrant dans $(0,1)$ on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(u_t^{(k)})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2]\, rdr - \int_0^1 \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(k)} u_t^{(k)}\, rdr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}[(u_t^{(k)})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2]\, rdr + \int_0^1 (-\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}u_t^{(k)}] + \frac{\partial u_t^{(k)}}{\partial r}([r\frac{\partial u}{\partial r}))\, dr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}[(u_t^{(k)})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2]\, rdr - [r\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}u_t^{(k)}]_0^1 + \int_0^1 \frac{r}{2}\frac{d}{dt}(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})^2\, dr \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}[(u_t^{(k)})^2 + (\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2]\, rdr - u_r^{(k)}(1)u_t^{(k)}(1) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}[(u_t^{(k)})^2 + (\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2]\, rdr + k^2 u^{(k)}(1)u_t^{(k)}(1) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}[(u_t^{(k)})^2 + (\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2]\, rdr + \frac{k^2}{2}\frac{d}{dt}(u^{(k)}(1))^2 \end{aligned}$$

En intégrant ensuite le dernier résultat entre 0 et t , on obtient l'expression (3.21) de l'énergie .

Lemme 3.1. *Pour toute solution régulière $u^{(k)}$ du système (3.20) on a :*

$$E_k^{'}(t) = -((u_t^{(k)}(1))^2 \tag{3.22}$$

Preuve : On utilise la méthode d'intégration par parties et les conditions aux limites .

On a :

$$E_k^{'}(t) = \int_0^1 (\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial r \partial t} + \frac{k^2}{r^2}u^{(k)}u_t^{(k)} + u_t^{(k)}u_{tt}^{(k)})rdr + k^2 u^{(k)}(1)u_t^{(k)}(1)$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial r \partial t})\, rdr &= \int_0^1 (\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial r \partial t} r \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})\, dr \\
&= -\int_0^1 u_t^k \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})\, dr + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} r \frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})\, dr \\
&= -\int_0^1 u_t^k \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})\, dr + u_t^{(k)}(1)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}(1) \\
&= -\int_0^1 u_t^k \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})(r\frac{\partial}{\partial r})u^{(k)}\, rdr + u_t^{(k)}(1)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}(1)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
E_k^{'}(t) &= \int_0^1 (u_t^{(k)}(-\frac{1}{r}^2(r\frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(k)}) + \frac{k^2}{r^2}u^{(k)}u_t^{(k)} + u_t^{(k)}u_{tt}^{(k)})\, rdr + u_t^{(k)}(1)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r}(1) \\
&= \int_0^1 u_t^{(k)}[u_{tt}^{(k)} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 u^{(k)} + \frac{(k)^2}{r^2}u^{(k)}]\, rdr + u_t^{(k)}(1)[-k^2 u^{(k)}(1) - u_t^{(k)}(1) + k^2 u^{(k)}(1)] \\
&= -((u_t^{(k)}(1))^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Afin de montrer la stabilisation exponentionnelle du problème (3.20), on écrit $u^{(k)}$ sous la forme : $u^{(k)} = y + w$ où y et w sont respectivement solutions des deux problèmes :

$$\begin{cases} y_{tt} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 y + \frac{(k)^2}{r^2} y = 0 & \text{dans} \quad (0,1) \times R^+ \\ \frac{\partial y}{\partial r}(1) = -(k)^2 y(1) & \text{sur} \quad IR^+ \\ y(0) = 0 & \text{sur} \quad IR^+ \\ y(\cdot,0) = u_0^{(k)}, \; y_t(\cdot,0) = u_1^{(k)} & \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 w + \frac{(k)^2}{r^2} w = 0 & \text{dans} \quad (0,1) \times R^+ \\ \frac{\partial w}{\partial r}(1) = -(k)^2 w(1) - u_t^{(k)}(1) & \text{sur} \quad IR^+ \\ w(0) = 0 & \text{sur} \quad IR^+ \\ w(\cdot,0) = 0, \; w_t(\cdot,0) = 0 & \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{3.24}$$

• On commence par étudier le problème (3.23) :

L'étude de ce problème est liée à celle de l'opérateur positif , autoadjoint à résolvante compacte A_k (cf.[8]) défini sur $L^2((0,1))$ par :

$$A_k(\upsilon) = -\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 \upsilon + \frac{(k)^2}{r^2}\upsilon$$

et de domaine :

$$D(A_k) = \{\upsilon \in H^2(0,1) : \upsilon(0) = 0 \text{ et } \upsilon_r(1) = -k^2\upsilon(1)\}$$

Proposition 3.2. *:Les valeurs propres λ^2 de A_k sont simples , strictement supérieures à k^2 et vérifient l'équation transcendante suivante :*

$$\frac{J_k(\lambda)}{J_{k+1}(\lambda)} = \frac{1}{k^2+k}\lambda, \; k \neq 0 \tag{3.25}$$

où J_k est la fonction de Bessel de 1^{re} espèce d'ordre k donnée par (3.2).

Les fonctions propres associées sont données par :

$$\varphi_n(r) = \alpha_n J_k(\lambda_n(r)), \; n \in IN \tag{3.26}$$

où $(\alpha_n)_n$ est une suite de nombres réels vérifiant :

$$\alpha_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.27}$$

et

$$\varphi_n(1) \geq \frac{C}{\sqrt{2}} \tag{3.28}$$

Où C est une constante positive .

Preuve : La démonstration de la proposition (3.2) se fait en 5 étapes :

• Nous commençons d'abord par montrer que : $\lambda^2 > k^2$.

Par la formule de Green , on remarque que pour tout υ dans $D(A_k)$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (A_k\upsilon)\upsilon r\,dr &= \int_0^1 (-\tfrac{1}{r^2}(r\tfrac{\partial}{\partial r})(r\tfrac{\partial}{\partial r})\upsilon + \tfrac{(k)^2}{r^2}\upsilon)\upsilon\,rdr \\
&= -\int_0^1 \upsilon\tfrac{\partial}{\partial r}(r\tfrac{\partial \upsilon}{\partial r})\,dr + \int_0^1 \tfrac{(k)^2}{r^2}\upsilon^2\,rdr \\
&= -[r\upsilon\tfrac{\partial \upsilon}{\partial r}]_0^1 + \int_0^1 (\tfrac{\partial \upsilon}{\partial r})^2\,rdr + \int_0^1 \tfrac{(k)^2}{r^2}\upsilon^2\,rdr \\
&= k^2(\upsilon(1))^2 + \int_0^1 (\tfrac{\partial \upsilon}{\partial r})^2\,rdr + \int_0^1 \tfrac{(k)^2}{r^2}\upsilon^2\,rdr
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\int_0^1 (A_k\upsilon)\upsilon\,dr \;\geq\; \int_0^1 \tfrac{(k)^2}{r^2}\upsilon^2(r)rdr > (k)^2\int_0^1 \upsilon^2(r)rdr$$

car $0 < r < 1$ d'où $\lambda^2 > k^2$

• Les Fonctions propres :

Pour $\lambda^2 > k^2$, on cherche φ solution du problème :

$$\begin{cases} -\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2\varphi + \frac{k^2}{r^2}\varphi = \lambda^2\varphi & \text{dans} \quad (0,1) \\ \varphi_r(1) = -k^2\varphi(1) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

où encore :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{k^2}{r^2}\varphi = \lambda^2\varphi & \text{dans} \quad (0,1) \\ \varphi_r(1) = -k^2\varphi(1) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + (\lambda^2 - \frac{k^2}{r^2})\varphi = 0 & \text{dans} \quad (0,1) \\ \varphi_r(1) = -k^2\varphi(1) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

La 1^{re} équation du problème (3.29) est l'équation différentielle de Bessel (3.1) , dont la forme générale des solutions est :

$$\varphi(r) = \alpha J_k(\lambda r) + \beta Y_k(\lambda r) \tag{3.30}$$

où J_k et Y_k sont les solutions de Bessel de 1^{re} et 2^{e}espèce respectivement données par (3.2) et (3.3).

Comme la fonction φ est continue dans $\overline{\Omega}$, elle est bornée au voisinage de zéro, d'où $\beta \equiv 0$. Ce qui prouve que les solutions régulières $u^{(k)}$ sont nulles en zéro et justifie la présence de la condition au bord "$u^{(k)}(0) = 0$" dans le model 1-d.

On obtient alors les fonctions propres :

$$\varphi_n(r) = \alpha_n J_k(\lambda_n(r)), \; n \geq 0$$

• L'équation caracéristique :

La condition au limite :

$$\varphi_r(1) = -k^2\varphi(1)$$

combinée avec la relation (3.8), nous permettent d'écrire :

$$-\lambda J_{k+1}(\lambda) + kJ_k(\lambda) = -k^2 J_k(\lambda)$$

Soit encore :

$$(k^2 + k)J_k(\lambda) = \lambda J_{k+1}(\lambda)$$

Comme $\lambda \neq 0$ (sinon $\varphi = 0$ ce qui est impossible), on obtient :

$$\frac{J_k(\lambda)}{J_{k+1}(\lambda)} = \frac{\lambda}{k^2 + k}, \qquad k \neq 0$$

Notons que les racines de cette dernière équation forment les valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de l'opérateur A_k.

• Montrons que : $\alpha_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

En utilisant les formules (3.11),(3.26) et la relation de normalisation :

$$\int_0^1 \varphi_n^2(r)\, rdr = 1$$

on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \varphi_n^2(r)\, rdr \\ &= \alpha_n^2 \int_0^1 (\tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi cos(k\theta - \lambda_n(r) sin\theta)\, d\theta)^2\, rdr \end{aligned}$$

La formule trigonométrique

$$cos(a-b) = cosa\, cosb + sina\, sinb$$

nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi cos(k\theta - \lambda_n(r) sin\theta)\, d\theta &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi cos(k\theta).cos(\lambda_n(r) sin\theta)\, d\theta \\ +\tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi sin(k\theta).sin(\lambda_n(r) sin\theta)\, d\theta &\leq \tfrac{1}{2\pi}\{\int_0^\pi cos^2(k\theta)\, d\theta + \int_0^\pi cos^2(\lambda_n(r) sin\theta)\, d\theta\} \\ &+ \tfrac{1}{2\pi}\{\int_0^\pi sin^2(k\theta)\, d\theta + \int_0^\pi sin^2(\lambda_n(r) sin\theta)\, d\theta\} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_n^2 \int_0^1 (\tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi cos(k\theta - \lambda_n(r) sin\theta)\, d\theta)^2\, rdr \\ &\leq 4.\alpha_n^2 \int_0^1 rdr \\ &= 2\alpha_n^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\alpha_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• Reste à montrer l'estimation (3.28) :

Puisque :

$$|\varphi_n(1)| \geq |\frac{1}{\sqrt{2}}|J_k(\lambda_n)|$$

Et comme :

$J_k(\lambda_n) = 0$ si $\lambda_n = 0$ ce qui est impossible .

Alors , on peut trouver une constante $C > 0$ tel que :

$$|\varphi_n(1)| \geq \frac{C}{\sqrt{2}}$$

Proposition 3.3. *Il existe une constante $c > 0$ tel que :*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c, \quad \forall\, n \ \in \ IN, \tag{3.31}$$

Preuve :

• On reprend l'équation caractéristique (3.25) et la formule asymptotique (3.9).

Pour λ grand, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{J_k(\lambda)}{J_{k+1}(\lambda)} &\simeq \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}cos(\lambda-\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))}{\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}cos(\lambda-\frac{\pi}{2}(k+1+\frac{1}{2}))} \\ &= \frac{cos(\lambda-\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))}{cos(\lambda-\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})-\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{cos(\lambda-\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))}{sin(\lambda-\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{J_k(\lambda)}{J_{k+1}(\lambda)} \simeq cotg(\lambda - \tfrac{\pi}{2}(k + \tfrac{1}{2})) \sim \tfrac{1}{k^2+k}\lambda \tag{3.32}$$

Etudions l'équation :

$$cotg(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2})) = \frac{1}{k^2 + k}\lambda$$

ce qui est équivalent :

$$\frac{J_k(\lambda)}{J_{k+1}(\lambda)} = \frac{1}{k^2 + k}\lambda$$

La fonction $cotg(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2}))$ a pour période π .

Observons le graphique " Graphe BZ " qui représente l'intersection des deux courbes $cotg(\lambda - \frac{\pi}{2}(k + \frac{1}{2})$ et $\frac{1}{k^2+k}\lambda$.

3.5 Graphique

Les droites "$\lambda = k\pi$" sont des asymptotes pour la fonction $cotg(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))$. Etant donnée que $cotg(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})) \simeq \frac{J_k(\lambda)}{J_{k+1}(\lambda)}$, on en déduit que J_{k+1} s'annule au voisinage de $k\pi$ (les asymptotes) et J_k s'annule pour les même valeurs de $cotg(\lambda - \frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}))$.
Comme les valeurs λ_i sont les points d'intersection entre les deux courbes susmentionnées , on remarque aisément d'après le graphique que sur chaque période la racine λ_i se trouve entre $j_{k+1,i}$ et $j_{k,i+1}$ où $j_{k+1,i}$ (respectivement $j_{k,i+1}$) est la i^e racine de $J_{k+1}(x)$ (respectivement $(i+1)^e$ racine de $J_k(x)$) .
Ce qui nous permettent d'écrire :

$$j_{k+1,0} = 0 < \lambda_0 < j_{k,1}$$

$$j_{k+1,1} < \lambda_1 < j_{k,2}$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$j_{k+1,n} < \lambda_n < j_{k,n+1}$$

$$j_{k+1,n+1} < \lambda_{n+1} < j_{k,n+2}$$

D'où :

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > j_{k+1,n+1} - j_{k,n+1}$$

Pour n grand , on utilise la formule asymptotique (3.16) , il vient alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} - \lambda_n &> \pi(n+1+\tfrac{k+1}{2}-\tfrac{1}{4}) - \pi(n+1+\tfrac{k}{2}-\tfrac{1}{4}) \\ &> \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Remarque 3.1. *Un simple calcul en utilisant le logiciel Maple ou Mathematica et la commande BesselJZero[k,n], montre que le minimum des écarts des cinquante premiéres racines $j_{k,n}$ des dix premiéres fonctions $J_k(x)$ est strictement positif.*

Les calculs montrent que l'écart entre deux zéros consécutifs tend vers π .Ce qui se justifie bien à l'aide de l'inégalité donnée par le théorème (3.1) dans la mesure où les $j_{k,n}$ tendent vers l'infini.

- Pour les valeurs de λ telles que : $0 < \lambda < \infty$.

Comme les valeurs propres d'un opérateur positif autoadjoint à résolvante compacte vérifient la suite d'inégalités :

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3....,$$

il est aisément facile de montrer que l'écart $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ est strictement positif, ce qui permet d' écrire :

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2}$$

Par conséquent, on peut dire qu'il existe une constante $c = inf\{\frac{\pi}{2}, \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}\} > 0$ telle qu'on ait :

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > c$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 3.3.

Dans le but de montrer la stabilisation exponentielle du problème (3.20) , on aura besoin d'une estimation sur l'énergie de y solution du problème (3.23) et une majoration sur w solution de (3.24)

Proposition 3.4. *:*

Soit $E_y(t)$ l'énergie de y solution du problème (3.23)

$$E_y(t) = \frac{1}{2}\{\int_0^1 ((\frac{\partial y}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(y)^2 + (y_t)^2)\, rdr + k^2(y(1))^2\}.$$

vérifiant $E_y'(t) = 0$. Il existe une constante positive c_1 indépendante de k telle que :

$$E_y(0) \leq c_1 \int_0^T (y_t(1,t))^2\, dt; \quad \forall T > \frac{4\pi}{c} \tag{3.33}$$

Preuve :

La théorie spectrale permet d'écrire la solution y de (3.23) sous la forme :

$$y(r,t) = \sum_{n\geq 0}(y_{0n}\cos(t\lambda_n) + y_{1n}\frac{\sin(t\lambda_n)}{\lambda_n})\varphi_n(r)$$

Où y_{0n} (resp. y_{1n}) sont les coefficients de Fourier de $u_0^{(k)}$ (resp.$u_1^{(k)}$) , i.e :
$u_0^{(k)} = \sum_{n\geq 0} y_{0n}\varphi_n$ et $u_1^{(k)} = \sum_{n\geq 0} y_{1n}\varphi_n$
On a :

$$y_t(1,t) = \sum_{n\geq 0}(-y_{0n}\sin(t\lambda_n) + y_{1n}\frac{\cos(t\lambda_n)}{\lambda_n})\lambda_n\varphi_n(1)$$

De l'inégalité du lemme 2.2 donné dans le chapitre 2 et l'estimaton (3.31) de la proposition (3.3), on en déduit qu'il existe une constante $C' > 0$ indépendante de k, telle que :

$$\frac{C'}{c}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n^2|y_{0n}|^2 + |y_{1n}|^2)|\varphi_n(1)|^2 \leq \int_0^{\frac{4\pi}{c}} |y_t(1,t)|^2\,dt,$$

et comme

$$|\varphi_n(1)|^2 \geq \frac{C}{2}$$

Alors il existe $c_1 > 0$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n^2|y_{0n}|^2 + |y_{1n}|^2) \leq c_1\int_0^{\frac{4\pi}{c}} |y_t(1,t)|^2\,dt,$$

On conclut par l'identité (cf.[7]) :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n^2|y_{0n}|^2 + |y_{1n}|^2) = \|u_0^{(k)}\|^2_{D(A_L^{1/2})} + \|u_1^{(k)}\|^2$$

et la propriété :

$$\|v\|^2_{D(A_k^{1/2})} = \|A_k^{1/2}v\|^2 = (A_kv,v) = \int_0^1 \{(\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})v)^2 + \frac{k^2}{r^2}v^2\}\,rdr + k^2(v(1))^2,\ \forall\, v\, \in\, D(A_k)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(0,1)$.

Ce qui donne finalement :

$$E_y(0) \leq c_1\int_0^T (y_t(1,t))^2\,dt; \quad \forall\, T > \frac{4\pi}{c}$$

Proposition 3.5. *:*

Pour tout $T > 0$ la solution w du problème (3.24) vérifie l'estimation suivante :

$$\int_0^T (w_t^2(1,t))\,dt \leq C(T^2+T+1)\int_0^T (u_t^{(k)}(1,t))^2\,dt \tag{3.34}$$

où C désigne une constante positive.

Preuve

On reprend le problème en w :

$$\begin{cases} w_{tt} - \frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 w + \frac{(k)^2}{r^2} w = 0 \qquad \text{dans} \quad (0,1) \times \mathcal{IR}^+ \\ \frac{\partial w}{\partial r}(1) = -(k)^2 w(1) - H(t) \qquad \text{sur} \quad \mathcal{IR}^+ \\ w(0) = 0 \qquad \text{sur} \quad \mathcal{IR}^+ \\ w\,(0) = 0,\ w_t\,(0) = 0 \qquad \text{dans} \quad (0,1) \end{cases} \tag{3.35}$$

avec :

$$H(t) = \begin{cases} u_t^{(k)}(1,t) \quad si \quad 0 < t < T \\ 0 \ \ \text{ailleurs}, \end{cases}$$

On utilise la technique des multiplicateurs [7]. On multiplie la première équation du problème (3.35) par $r^3(2T-t)w_r$ et on intègre le résultat dans $Q = (0,1) \times (0,2T)$ on obtient pour des solutions régulières :

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_Q [w_{tt}(r^3(2T-t)w_r)]\,dt\,dr + \int_Q [-(\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 w)(r^3(2T-t)w_r)]\,dt\,dr \\ &+\; \int_Q [(\frac{(k)^2}{r^2} w)(r^3(2T-t)w_r)]\,dt\,dr \end{aligned}$$

Posons :

$$I_1 = w_{tt}(r^3(2T-t)w_r)$$

$$I_2 = -(\frac{1}{r^2}(r\frac{\partial}{\partial r})^2 w)(r^3(2T-t)w_r)$$

et

$$I_3 = (\frac{(k)^2}{r^2} w)(r^3(2T-t)w_r)$$

On a :

$$\begin{aligned} I_1 \;&=\; \partial_t(w_t(r^3(2T-t)w_r)) \\ &-\; w_t r^3(2T-t)w_{tr} + r^3 w_r w_t \end{aligned}$$

Or :

$$w_t r^3(2T-t)w_{tr} = \frac{1}{2}\partial_r((2T-t)r^3 w_t^2) - \frac{3}{2} r^2(2T-t)w_t^2$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \partial_t(w_t r^3(2T-t)w_r) - \frac{1}{2}\partial_r((2T-t)r^3 w_t^2) \\ &+ \frac{3}{2}r^2(2T-t)w_t^2 + r^3 w_r w_t \end{aligned}$$

Pour : $I_2 = -\frac{1}{r}(2T-t)[\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r})r^3(w_r)]$ on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r})r^3 w_r &= \frac{\partial}{\partial r}[(rw_r)r^3 w_r] \\ &- 3r^3 w_r^2 - rw_r r^3 \frac{\partial}{\partial_r}(w_r) \end{aligned}$$

Comme

$$-rw_r r^3 \frac{\partial}{\partial r}(w_r) = -\frac{\partial}{\partial r}[(rw_r)r^3 w_r] + 4r^3 w_r^2 + r\frac{\partial}{\partial_r}(w_r)r^3 w_r$$

Alors :

$$-rw_r r^3 \frac{\partial}{\partial r}(w_r) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}[(rw_r)r^3 w_r] + 2r^3 w_r^2$$

Ce qui implique que :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rw_r)r^3 w_r = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}[(r^4 w_r^2)] - r^3 w_r^2$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2}(2T-t)\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}[(r^4 w_r^2)] - 2r^3 w_r^2] \\ &= -\frac{1}{2}(2T-t)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r^4 w_r^2] + r^2(2T-t)w_r^2 \\ &= -\frac{1}{2}(2T-t)\frac{\partial}{\partial r}[\frac{1}{r}r^4 w_r^2] + r^2(2T-t)w_r^2 - \frac{1}{2}(2T-t)r^2 w_r^2 \\ &= -\frac{1}{2}(2T-t)\frac{\partial}{\partial r}[r^3 w_r^2] + \frac{1}{2}(2T-t)r^2 w_r^2 \end{aligned}$$

Calcul de I_3 :

$$I_3 = \frac{(k)^2}{r^2}(2T-t)wr^3(\frac{\partial w}{\partial r}) = (k)^2 r(2T-t)ww_r$$

Comme :

$$r(\frac{\partial w}{\partial r})w = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}[rw^2] - \frac{1}{2}w^2$$

Alors :

$$I_3 = \frac{k^2}{2}(2T-t)\frac{\partial}{\partial r}(rw^2) - \frac{1}{2}(2T-t)k^2w^2$$

En tenant compte des calculs effectués sur I_1 , I_2 et I_3 on peut écrire :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_Q (\partial_t(w_t r^3(2T-t)w_r)\,dt\,dr - \frac{1}{2}\int_Q \partial r((2T-t)r^3 w_t^2)\,dt\,dr \\
&+ \frac{3}{2}\int_Q r((2T-t)w_t^2)r\,dr\,dt + \int_Q (r^2 w_r w_t)r\,dr\,dt \\
&- \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)\frac{\partial}{\partial r}[r^3 w_r^2]\,dr\,dt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)\frac{\partial}{\partial r}(k^2 r w^2)\,dr\,dt \\
&- \frac{1}{2}\int_Q k^2(2T-t)w^2\,dr\,dt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)rw_r^2\,r\,dr\,dt
\end{aligned}$$

Où encore :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{3}{2}\int_Q r((2T-t)(w_t^2 + \frac{1}{3}w_r^2))r\,dr\,dt + \int_Q (r^2 w_r w_t)r\,dr\,dt \\
&- \frac{1}{2}\int_Q k^2(2T-t)w^2\,dr\,dt - \frac{1}{2}\int_Q \partial r((2T-t)r^3 w_t^2)\,dt\,dr \\
&- \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)\frac{\partial}{\partial r}[r^3 w_r^2]\,dr\,dt + \frac{1}{2}\int_Q (2T-t)\frac{\partial}{\partial r}(k^2 r w^2)\,dr\,dt
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz , on en déduit que :

$$\begin{aligned}
0 &\leq C(T+1)\int_Q [w_t^2 + w_r^2] r\, dr\, dt \\
&- \frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)w_r^2(1,t)\, dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)k^2w^2(1,t)\, dt
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\, dt \\
&\qquad\qquad \leq C(T+1)\int_Q [w_t^2 + w_r^2] r\, dr\, dt, \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)[k^2w^2(1,t) - w_r^2(1,t)]\, dt,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

En rappelant que :

$$w_r(1,t) = -(k)^2 w(1,t) - H(t)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
k^2w^2(1,t) - w_r^2(1,t) &= k^2w^2(1,t) - ((k)^2w(1,t) + H(t))^2 \\
&= (k^2 - k^4)w^2(1,t) - 2k^2 w(1,t)H(t) - H^2(t)
\end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$, on écrit :

$$|2k^2 w(1,t)H(t)| \leq \epsilon k^4 w^2(1,t) + \frac{1}{\epsilon}H^2(t)$$

et on a :

$$k^2w^2(1,t) - w_r^2(1,t) \leq (k^2 - k^4 + \epsilon k^4)w^2(1,t) + (\frac{1}{\epsilon} - 1)H^2(t)$$

En fixant alors $\epsilon > 0$ tel que :

$$(k^2 - k^4 + \epsilon k^4) \leq 0, \ \forall\ k^2 \geq 2$$

On obtient :

$$k^2 w^2(1,t) - w_r^2(1,t) \leq CH^2(t)$$

En utilisant cette dernière estimation dans (3.36), on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\,dt \leq C(T+1)\int_Q [w_t^2 + w_r^2]r\,dr\,dt \qquad (3.37)$$
$$+C\int_0^{2T}(2T-t)H^2(t)\,dt,$$

On définit l'énergie de w par :

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\{\int_0^1 ((\frac{\partial w}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(w)^2 + (w_t)^2)\,rdr + k^2(w(1))^2\}.$$

En utilisant la méthode d'intégration par parties , on trouve :

$$E_w^{'}(t) = -w_t(1,t)H(t)$$

On intègre cette identité entre 0 et s sachant que $E_w(0) = 0$, on obtient :

$$E_w(s) = \int_0^s E_w^{'}(t)\,dt = -\int_0^s w_t(1,t)H(t)\,dt$$

On intègre ensuite entre 0 et $2T$ et , en utilisant le théorème de Fubini on obtient :

$$\int_0^{2T} E_w(s)\,ds = -\int_0^{2T}\int_0^s E_w^{'}(t)\,dt\,ds = -\int_0^{2T} w_t(1,t)H(t)(2T-t)\,dt$$

On a :

$$\int_0^{2T} E_w(s)\,ds \leq \epsilon\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\,dt \qquad (3.38)$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2T} H^2(t)(2T-t)\,dt \quad pour \ \ \epsilon > 0,$$

et

$$\int_Q [w_t^2 + w_r^2]r\,dr\,dt \leq C\int_0^{2T} E_w(s)\,ds$$

En injectant cette dernière estimation dans (3.37), on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\,dt \le C(T+1)\int_0^{2T} E_w(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)H^2(t)\,dt, \tag{3.39}$$

(3.38) dans (3.39) donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\,dt &\le C(T+1)\epsilon\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\,dt \\ &+ \frac{1}{\epsilon}C(T+1)\int_0^{2T}(2T-t)H^2(t)\,dt + C\int_0^{2T}(2T-t)H^2(t)\,dt\end{aligned}$$

On choisit ϵ tel que : $\epsilon C(T+1)=\frac{1}{4}$, on obtient :

$$\frac{1}{4}\int_0^{2T}(2T-t)w_t^2(1,t)\,dt \le 4C(T+1)^2T\int_0^{2T} H^2(t)\,dt$$

Comme $T \le 2T-t \le 2T, \quad sur \quad [0,T]$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{T}{4}\int_0^{T} w_t^2(1,t)\,dt &\le \frac{T}{4}\int_0^{2T} w_t^2(1,t)\,dt \\ &\le CT(T+1)^2\int_0^{2T} H^2(t)\,dt\end{aligned}$$

Pour terminer , on utilise la définition de $H(t)$ qui nous donne :

$$C(T^2+T+1)\int_0^{T}(u_t^{(k)}(1,t))^2$$

Théorème 3.2. *Il existe deux constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de k telles que :*

$$E_k(t) \le C_1 e^{-C_2\,t}E_k(0)$$

Preuve :

De $u^{(k)}=y+w$ on remarque que :

$$E_k(0)=E_y(0)$$

Et en utilisant la proposition 3.4 , on obtient :

$$E_k(0) = E_y(0) \leq c_1 \int_0^T y_t^2(1,t)\, dt$$

et comme :

$$y_t = u_t^{(k)} - w_t$$

Alors :

$$\begin{aligned} y_t^2(1,t) &= (u_t^{(k)}(1,t) - w_t(1,t))^2 \\ &= (u_t^{(k)})^2(1,t) - 2u_t^{(k)}(1,t)w_t(1,t) + w_t^2(1,t) \\ &\leq c\{(u_t^{(k)})^2(1,t) + w_t^2(1,t)\} \end{aligned}$$

Avec la proposition 3.5 , on obtient :

$$E_k(0) \leq C(T^2 + T + 1) \int_0^T u_t^{(k)}(1,t)^2\, dt$$

Pour $T > \frac{4\pi}{c}$, on choisit $T_1 = (\frac{4\pi}{c} + 1)$

On arrive à :

$$E_k(0) \leq C"(\pi^2 + \pi + 1) \int_0^{T_1} u_t^{(k)}(1,t)^2\, dt$$

où encore

$$E_k(0) \leq C' \int_0^{T_1} u_t^{(k)}(1,t)^2\, dt$$

Le résultat (3.22) du lemme 3.1 , nous permet de déduire :

$$E_k(T_1) \leq E_k(0) \leq C'(E_k(0) - E_k(T_1))$$

Ce qui donne :

$$E_k(T_1)(1 + C') \leq C_2(k^2 + k + 1)E_k(0)$$

Soit :

$$E_k(T_1) \leq \frac{C'}{1 + C'} E_k(0)$$

Posons :

$$\gamma_1 = \frac{C'}{1 + C'} = C_1$$

En utilisant les arguments données dans la preuve du théorème 3.3 de [9] , il vient alors :

$$E_k(t) \leq \frac{1}{\gamma_1} e^{-w\,t} E_k(0)$$

avec

$$w = \frac{1}{T_1} ln \frac{1}{\gamma_1}$$

Comme :

$$ln(\frac{C'}{1+C'}) = ln(1 + \frac{1}{C'}) \simeq \frac{1}{C'}$$

Alors

$$w = \frac{1}{\frac{4\pi}{c}+1} . \frac{1}{C'} \simeq C_2$$

Et le théorème 3.2 est alors démontré.

Remarque 3.2. *Le résultat du théorème 3.2 nous permet de contrôler la convergence polynômiale des solutions particulières données en fonction de* $exp(2ik\theta)$ *du problème de Ventcel principal posé dans un disque .*

3.6 Stabilisation polynômiale

Cette section traite le problème de la stabilisation polynômiale du problème de Ventcel principal posé dans un disque .

On rappelle le développement de u en série de Fourier Bessel :

$$u = \sum_{\kappa \in Z} u^{(2\kappa)} e^{i2\kappa\theta}$$

L'énergie E_k de la solution $u^{(k)}$ du problème (3.20) est donnée par :

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((\frac{\partial u^{(k)}}{\partial r})^2 + \frac{k^2}{r^2}(u^{(k)})^2 + (u_t^{(k)}))rdr + \frac{k^2}{2}(u^{(k)}(1))^2.$$

Le résultat de la stabilité exponentielle du problème (3.20), l'analyse de Fourier et les techniques utilisées dans [2] et [8] nous permettent de déduire le résultat de la stabilité polynômiale du problème (3.17) suivant :

Théorème 3.3. *Pour tout $m \in IN^\star$,il existe une constante $C_m > 0$ telle que pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$ vérifiant $u_{/\Gamma} \in H^{m+1}(\Gamma)$, l'énergie des solutions particulières u du problème (3.17) vérifie*

$$E(t) \leq \frac{C_m}{t^m} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} E_k(0), \;\; \forall\, t \,>\, 0, \tag{3.40}$$

où

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} E_k(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u_{0|\Gamma}\|^2_{H^{m+1}(\Gamma)} + \|u_1\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

Preuve : On procède comme dans le chapitre 2.

Pour tout $m \in IN^\star$, il existe une constante $c_m > 0$ telle que

$$x^m e^{-x} \leq c_m, \quad \forall x \,\geq\, 0.$$

En injectant cette estimation dans l'inégalité du théorème (3.2) on obitent :

$$E_k(t) \leq C_1 \frac{c_m}{C_2^m\, t^m} E_k(0) = \frac{C_m}{t^m} E_k(0), \;\; \forall\, t \,>\, 0,$$

d'où

$$E(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} E_k(t) \leq \frac{C_m}{t^m} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} E_k(0), \;\; \forall\, t \,>\, 0.$$

En utilisant finalement l'énégalité de PARSEVAL on obtient :

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} E_k(0) \leq \|u_0\|^2_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u_{0|\Gamma}\|^2_{H^{m+1}(\Gamma_1)} + \|u_1\|^2_{H^m(\Omega)}.$$

ce qui termine la démonstration du théorème (3.3) .

<u>Comparaison avec les résultats obtenus dans le chapitre 2</u> :

Les données initiales sont moins régulières par rapport à celles utilisées dans les parties A et B .

Pour $m = 1$, le système (3.17) est stabilisé pour des données initiales vérifiant :

$(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tel que $u_{0/\Gamma} \in H^2(\Gamma)$.

Lorsque les données initiales sont suffisamment régulières , on obtient un taux de décroissance polynômiale d'ordre plus élevé donné par l'estimation (3.40).

3.7 Bibliographie

Bibliographie

[1] M.Abramowitz and I . A .Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas , Graphs , and Mathematical Tables* , New York :Dover,pp.358-364,1972.

[2] F. Alabau , P. Cannarsa and V. Komornik,*Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations* , J.Evol. Equ. 2 , 127-150 (2002)

[3] A.Batkai ,K.J Engel ,*Polynomial stability of operator semigroups* , Math.Nachr.279,N0.13-14,1425-1440 (2006)

[4]

[5] A.Heminna. *Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel.* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 5 :591–622 (electronic), 2000.

[6] A.Heminna, *Stabilisation de problems de Ventcel* C.R. Acad.Sci.Paris , 328, série I (1999) 1171-1174

[7] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, volume 36 of RMA. Masson, Paris, 1994.

[8] S. Nicaise and K. Laoubi, *Polynomial stabilization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions,* Math. Nachr.283, NO.10 ,1428-1438(2010) .

[9] S.Nicaise. *Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications.* Rendiconti di Matematica Serie VII 23 :83–116, 2003.

[10] A.D. Ventcel. *On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes.* Theor. Probability Appl. 4 :164–177, 1959.

[11] J.E.M.Rivera and R.Racke ,*Polynomial stability in two - dimensional magneto -elasticity* , IMA J .Appl. Math .66 (2001) 269-283

[12] X. Zhang and E.Zuazua ,*Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic coupled system ,*

[13] GN .Watson. *Atreatise on the theory of Bessel functions* ,Cambridge , University Press ,1922(1996).

[14] X.Zhang and E.Zuazua. *Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic-parabolic coupled system.* J. Differential Equations 204 :380–438, 2004.

Chapitre 4

Conclusion

Remarques et Perspectives

• L'approche proposée dans les parties A et B (chapitre 2) pour démontrer la stabilité exponentielle du model $1-d$ permet d'obtenir la dépendance explicite des constantes par rapport à L qui permet à son tour de préciser le domaine des données initiales vérifiant l'estimation de la stabilité polynômiale .

• Dans le cas d'un disque, pour des problèmes techniques de calculs, on a contrôler des solutions particulières exprimées en fonction de $exp(2ik\theta)$. Nous pensons que la méthode des bases de Riez utilisée dans [2, 4] donne des résultats plus performants.

• L'estimation de convergence polynômiale démontrée dans le cas d'un disque correspond à celle obtenue par F.Alabeau , P.Cannarsa et V.Komornik dans [1]. On peut donc penser à améliorer ce résultat en utilisant l'approche présentée dans [1].

• Il me parait impossible d'appliquer l'analyse de Fourier utilisée dans ce travail sur l'équation des ondes posée dans un ouvert de IR^n avec des conditions aux limites de type Ventcel . Il serait peut être possible d'utiliser la caractérisation de stabilité polynômiale de Liu et Rao donnée dans [3].

• L'analyse de Fourier Bessel utilisée dans le 3^e chapitre pose problème dans le cas d'une couronne. Une voie possible serait de démontrer la stabilité exponentielle du model à une dimension en utilisant d'autres méthodes.

Bibliographie

[1] F.Alabau , P.Cannarsa and V.Komornik,*Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations* ,, J.Evol. Equ. 2 , 127-150 (2002)

[2] W.Littman and B.Liu. *On the spectral properties and stabilization of acoustic flow.* SIAM J. Appl. Math. 59(1) :17–34 (electronic), 1999.

[3] Z.Liu and B.Rao. *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation.* Z. Angew. Math. Phys. 56(4) :630–644, 2005.

[4] X.Zhang and E.Zuazua. *Polynomial decay and control of a 1-d hyperbolic-parabolic coupled system.* J. Differential Equations 204 :380–438, 2004.