

N° d'ordre : 10/2014-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie « Houari Boumedien »

Faculté de Mathématiques



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Systèmes Dynamiques

Par : SEDKAOUI El Djouher

Sujet

ETUDE DE QUELQUES BIFURCATIONS DU MODELE NEURONAL DE HINDMARSH-ROSE

Soutenu publiquement le 19/01/2014, devant le jury composé de :

Rachid BEBBOUCHI	Professeur	à l'USTHB	Président
Tounsia BENZEKRI	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Directrice de mémoire
Arezki KESSI	Professeur	à l'USTHB	Examineur
Dahira DALI	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examinatrice

Remerciements

Me voici arrivée à un début.

La conviction à mener à terme ce mémoire a été l'oeuvre de ma directrice de mémoire, madame **T. BENZEKRI** (Laboratoire de Systèmes Dynamiques, Faculté de Mathématiques, USTHB).

Je tiens à lui exprimer ici ma gratitude pour ses efforts et ses idées à rédiger un document, où toutes les expressions mathématiques devraient être précises et concrètes.

L'aboutissement de ce mémoire a aussi été encouragé par de nombreuses personnes des différentes disciplines, je les remercie toutes.

Je citerai en exemple :

madame **N.Metref**, enseignante à l'Université de Boumerdes,

monsieur **K.M'Hamed Messaoud**, enseignant à l'USTHB, pour m'avoir fourni une aide matérielle et morale,

mademoiselle **A.Baouta**, doctorante à l'USTHB, pour les différentes lectures et discussions réalisées ensemble à la bibliothèque de la faculté.

Un grand merci aux professeurs **R.Bebbouchi** et **A.Kessi** ainsi que madame **D.Dali** d'avoir bien voulu juger mon travail.

Table des matières

Introduction	4
1 Rappel de l'électrophysiologie du neurone	7
1.1 La modélisation de neurones biologiques : de l'anatomie au modèle	7
1.1.1 Anatomie et physiologie d'un neurone biologique	7
1.1.2 Les modèles mathématiques de la littérature	11
2 Quelques rappels	17
2.1 Théorème d'existence et d'unicité	17
2.2 Stabilité	18
2.2.1 Méthode directe de Lyapounov	18
2.2.2 Fonction de Lyapounov	20
2.3 Typologie des points d'équilibre	21
2.4 Théorème de Hartmann-Großman	22
2.5 Théorème Poincaré-Bendixson	22
2.5.1 Ensembles ω – limite et α – limite	22
2.5.2 Théorème Poincaré-Bendixson	23
2.6 Recherche d'une orbite périodique	23
2.6.1 Critère de Bendixson	23
2.7 Etude des bifurcations	23
2.7.1 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf	24
2.7.2 Bifurcation pli ou noeud-col	26
2.7.3 Bifurcation homocline	29
2.7.4 La bifurcation d'hystérèse	29
2.8 Dynamique lente-rapide	31
3 Modèle de Hindmarsh-Rose-2D	33
3.1 Analyse locale :	35
3.1.1 Recherche des points d'équilibre	35
3.1.2 Nature des points d'équilibre :	36
3.2 Etude des bifurcations	39
3.2.1 Recherche d'une orbite périodique	40
3.2.2 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf	40

4	Modèle de Hindmarsh-Rose-3D	46
4.1	Analyse locale	47
4.1.1	Recherche des points d'équilibre	47
4.1.2	Nature des points d'équilibre	51
4.2	Etude des bifurcations	55
4.2.1	Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf	55
5	Dynamique rapide	68
5.1	Analyse locale :	68
5.1.1	Recherche des points d'équilibre.	68
5.1.2	Nature des points d'équilibre.	72
5.2	Etude des bifurcations	81
5.2.1	Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf	82
5.2.2	Bifurcation pli	87
5.2.3	Bifurcation homocline	91
5.3	Dynamique du système tridimensionnel lent-rapide de Hindmarsh-Rose . .	94
	Conclusion	100
	Bibliographie	102

Introduction

Le sujet de ce mémoire se situe dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques non linéaires.

Ce travail présente une étude de la dynamique d'un système dissipatif.

En particulier, il s'agit de l'étude d'un modèle en neurophysiologie reproduisant l'activité électrique d'un neurone, cellule du système nerveux.

Ce modèle a été étudié en utilisant les différentes techniques de la dynamique non linéaire des systèmes dynamiques ainsi que la théorie des bifurcations.

Un neurone est une cellule électriquement active, son activité se manifeste par l'émission de variation de son potentiel de membrane, appelé potentiel d'action.

Ce potentiel d'action, résulte de courants transmembranaires, principalement constitués d'ions de sodium et d'ions de potassium, qui sont le courant sodique et le courant potassique.

Parmi les premiers à s'être intéressés au fonctionnement des phénomènes électriques qui engendrent le fonctionnement d'un neurone, Hodgkin et Huxley en 1952 proposent un modèle qui consiste en un système de quatre équations différentielles dont les inconnues sont le potentiel d'action, la fonction d'activation du courant potassique, la fonction d'activation du courant sodique et une variable qui mesure l'inactivation du courant sodique.

De plus, le neurone est soumis à un courant externe, qui représentera le paramètre de ce modèle.

Ce modèle consiste à reproduire les différents comportements du potentiel d'action observé expérimentalement.

Une simplification du modèle à deux dimensions a été proposée par Fitzhugh en 1961.

Il a été observé que la dynamique de l'activation du courant sodique est très rapide et

a été donc considérée comme une variable stationnaire et donc constante.

Ce type de réduction peut être parfois obtenu lorsque les différences d'échelles de temps permettent à des variables relativement rapides à être considérées comme des variables 'pseudo-stationnaires'.

Il a été aussi observé que la somme de la fonction d'activation du potassium et celle qui mesure l'inactivation du courant sodique est relativement constante et par conséquent que la dynamique de ces deux fonctions est similaire.

Ces deux approximations ont donné lieu au modèle à deux dimensions appelé modèle de Fitzhugh-Nagumo.

Cette modélisation n'étant pas suffisamment réaliste, car elle ne reproduit que des comportements simples de la dynamique du neurone, Hindmarch et Rose, partant du modèle de Fitzhugh-Nagumo, proposent un modèle tridimensionnel.

L'idée est de modéliser l'influence des variables lentes sur la dynamique du neurone et de reproduire des dynamiques plus complexes observées expérimentalement dans les neurones tels que les oscillations en salves.

Alors que le modèle à deux dimensions ne peut simuler qu'un comportement périodique dit " spiking " correspondant à une émission continue du potentiel d'action, Hindmarch et Rose proposent un modèle capable de reproduire des dynamiques complexes telles que le phénomène " bursting " qui sont des oscillations périodiques du potentiel d'action correspondant à des trains de potentiel d'action séparés par des périodes lentes dites de quiescence.

La modélisation d'un neurone nécessite donc de considérer des échelles de temps d'évolution différentes pour les différentes variables du système. Hindmarch et Rose ajoutent donc une troisième variable lente. Cette variable représente un courant qui évolue lentement simulant les flux lents d'ions à travers la membrane du neurone.

Ce travail est constitué de cinq chapitres :

Le chapitre I présente les principaux mécanismes régissant le fonctionnement d'un neurone et permettant de comprendre la modélisation.

Le deuxième chapitre est consacré à quelques rappels des notions des systèmes dynamiques.

Le chapitre trois est consacré au modèle bidimensionnel de Hindmarch-Rose qui correspond au modèle de Fitzhugh-Nagumo.

L'existence et la stabilité des points d'équilibre et de cycles limites y sont discutées en

fonction d'un des deux paramètres du système.

L'étude du critère de Bendixson a permis de délimiter le domaine d'existence de solutions périodiques.

L'analyse de la bifurcation de Hopf montre que pour certaines valeurs du paramètre, le système manifeste des oscillations continues du potentiel d'action correspondant au cycle limite stable.

Dans le quatrième chapitre, des conditions d'existence de cycles limites stables sont donnés par le biais du théorème de la bifurcation de Hopf en dimension trois.

Des simulations numériques de ces oscillations sont présentées à la fin de ce chapitre.

Le chapitre cinq est consacré à l'étude de la dynamique rapide du système de Hindmarsh-Rose. Une étude de l'existence des solutions et de la stabilité de ce système est faite en considérant la variable z qui est constante dans ce cas, comme un paramètre. Nous avons considéré les différents types de bifurcations de ce système en fonction des paramètres du système. Nous avons donné une description du scénario donnant lieu à des solutions qui présentent des oscillations en salves dites 'bursting'.

Nous terminons ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Rappel de l'électrophysiologie du neurone

Ce chapitre a pour but de présenter les notions de base nécessaires à la modélisation de neurones biologiques.

La construction d'un paradigme est à la fois contrainte par l'observation et par ce que l'on souhaite reproduire : dans quel but ? À quelle échelle ? Quel comportement ?

Pour éclairer ce cheminement, du neurone vers son modèle, la première partie s'organise suivant deux sections : la première vise à introduire les notions simples et fondamentales de l'anatomie et de la physiologie du neurone pour en venir, dans la seconde partie, aux modèles existants de la littérature, du modèle Integrate-and-Fire au modèle à conductances.

1.1 La modélisation de neurones biologiques : de l'anatomie au modèle

1.1.1 Anatomie et physiologie d'un neurone biologique

L'anatomie au modèle

Il existe une grande diversité de neurones.

Ils sont classés selon leur morphologie qui reflète à la fois l'espèce animale, leur localisation dans le système nerveux et leur fonction.

- Les dendrites :

Les dendrites sont des ramifications issues du corps cellulaire et qui permettent les connexions synaptiques afférentes au neurone.

Elles assurent ainsi la propagation de l'information entre les différents neurones impliqués

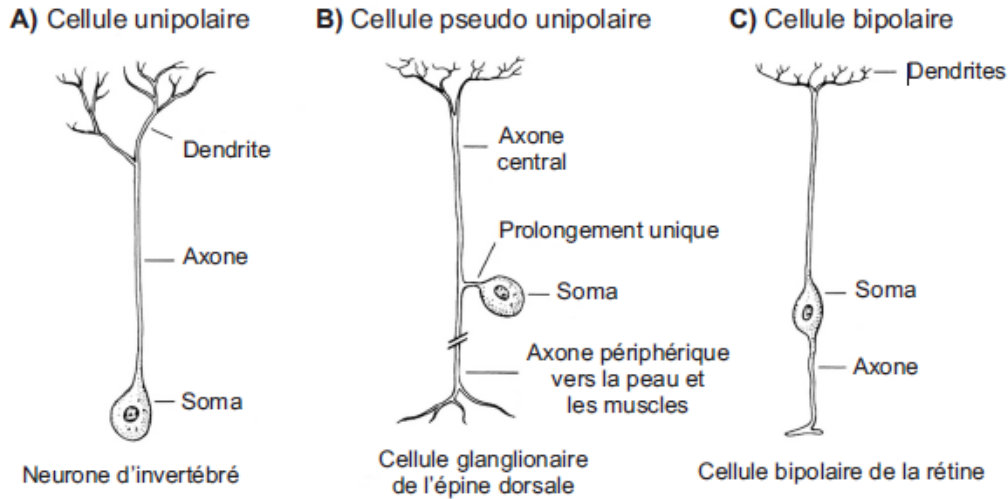


FIGURE 1.1: Les trois types de cellules multipolaires [L.B10]

dans la communication en transmettant les informations générées au niveau synaptique préférentiellement vers le soma.

L'essentiel de l'information transmise d'un neurone à l'autre est reçu par les dendrites.

L'axone :

L'axone, généralement unique, est un prolongement long et cylindrique du soma.

Son diamètre est inférieur à celui d'une dendrite et, chez l'homme, sa longueur peut être de l'ordre du mètre.

Il conduit vers d'autres neurones un signal, le potentiel d'action, qui naît dans son segment initial.

Les synapses :

Les synapses sont les points de contact entre un neurone et sa cible, un autre neurone, une fibre musculaire, etc...

On distingue dans le vivant deux catégories de synapses :

les synapses dites « chimiques » et les synapses « électriques ».

Les premières, rencontrées le plus fréquemment, nécessitent un intermédiaire pour transmettre l'information : le neurotransmetteur.

En effet, l'activité électrique arrivant dans la terminaison axonale présynaptique stimule des vésicules synaptiques.

- Le soma et la membrane plasmique :

Le soma (ou perikaryon) d'un neurone du cortex humain a un diamètre de l'ordre de $20\mu m$ pour une épaisseur de membrane d'environ $5nm$.

Les signaux arrivant sur les dendrites sont intégrés au niveau du soma qui génère à son tour une réponse se propageant dans l'axone.

Le milieu extracellulaire est plus riche en ions sodium Na^+ mais plus pauvre en ions potassium K^+ que le milieu intracellulaire.

Il existe d'autres types d'ions, notamment calciques Ca^{2+} .

Les différences de concentration calcique sont souvent proportionnelles aux variations de potentiel du neurone et peuvent être ainsi utilisées comme marqueur de l'activité électrique neuronale.

La physiologie du neurone

Explicitons maintenant l'aspect fonctionnel des éléments décrits précédemment.

– Le potentiel de repos :

Lorsque la membrane n'est soumise à aucune excitation, le système constitué de la membrane et des milieux extra- et intracellulaire est à l'équilibre, mais il existe malgré tout une différence de potentiel due à l'inégalité de concentration des ions de part et d'autre de la membrane.

Cette différence de potentiel prend toujours pour référence le milieu extracellulaire et porte le nom de potentiel de repos.

Ce dernier est généralement de l'ordre de $-65 mV$.

La membrane au repos est plus perméable aux ions K^+ qu'aux autres ions.

– Le potentiel d'action :

Lorsqu'une stimulation est imposée au neurone, sa membrane devient extrêmement perméable aux ions Na^+ .

Les propriétés de perméabilité sélective des protéines transmembranaires donnent naissance à un signal électrique se propageant le long de l'axone : le potentiel d'action.

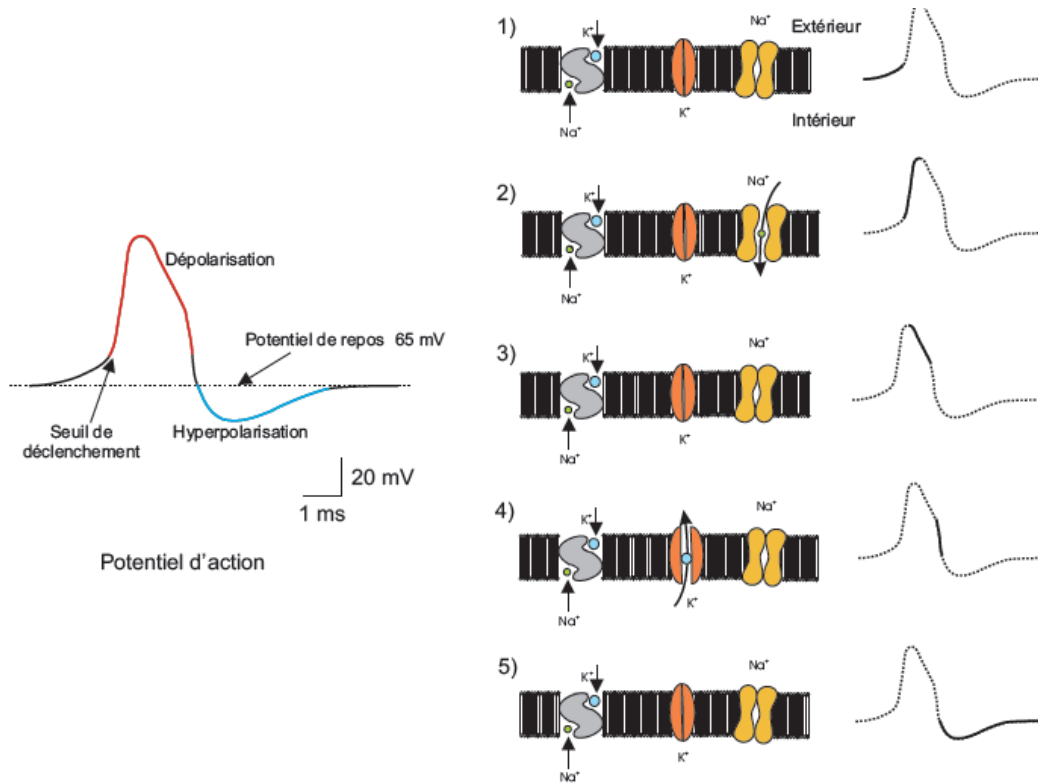


FIGURE 1.2: Mécanismes de genèse d'un potentiel d'action [HS10]

Cette figure illustre ce phénomène en cinq étapes :

1. Lors de la stimulation, la membrane commence par se dépolariser.
2. Si la stimulation persiste, la membrane se dépolarise jusqu'à atteindre le seuil de déclenchement (du potentiel d'action) et les canaux perméables aux ions sodium s'ouvrent rapidement, accentuant encore la dépolarisation.

A noter que le passage des ions sodium continue si le seuil a été franchi, même si la stimulation a cessé.

3. Lorsque la tension de membrane a atteint environ 58mV , les canaux sodiques se ferment spontanément, ce qui a pour effet l'arrêt de l'augmentation de la dépolarisation.

4. Peu après, un second processus entre en action : l'ouverture des canaux potassiques.

Ce phénomène provoque la repolarisation de la membrane plasmique.

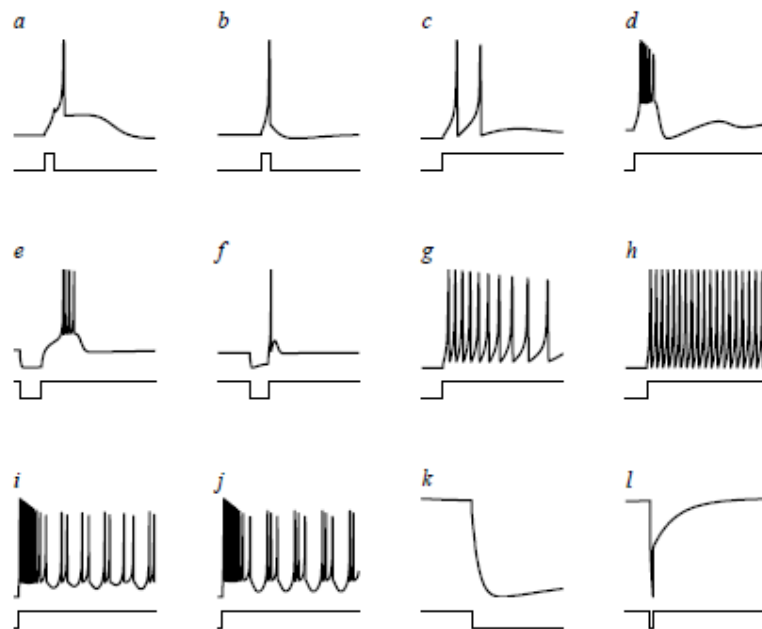
Cette période de décroissance du potentiel d'action est appelée « période réfractaire abso-

lue » car un second potentiel d'action ne peut apparaître durant cette période du fait de l'inactivation des canaux sodiques.

5. Le délai de fermeture des canaux potassiques provoque ensuite une hyperpolarisation transitoire (ou période réfractaire relative) de la membrane qui retrouvera son potentiel de repos après la fermeture des canaux potassiques.

Après avoir été généré dans le corps cellulaire, ce potentiel d'action va être transmis à d'autres neurones via l'axone sans atténuation.

En effet, une “régénération” du potentiel d'action a lieu à chaque noeud de Ranvier jusqu'aux terminaisons axonales : le potentiel de l'axone au noeud suivant est entraîné au-dessus du seuil de déclenchement.



a: After-depolarization. b: After-hyperpolarization c: Double phasic spike. d: Phasic burst with subthreshold oscillations. e: Inhibitory rebound burst. f: Inhibitory rebound spike. g: Regular (accommodating) spiking. h: Fast (non-accommodating) spiking. i: Irregular spiking with initial burst. j: Regular bursting with initial burst. k: Response to hyperpolarizing current step. l: Response to negative delta pulse.

FIGURE 1.3: Les différentes étapes transitoires dans le modèle de Hindmarsh-Rose [Lan06]

1.1.2 Les modèles mathématiques de la littérature

Un modèle mathématique de neurone biologique vise à décrire le neurone grâce à un formalisme mathématique afin de reproduire son activité.

Les modèles actuels cherchent à imiter l'activité électrique et, bien que l'influence de processus thermodynamiques ait été démontrée, aucun modèle thermodynamique de l'activité neuronale n'est utilisé à ce jour.

La complexification du formalisme entraînera également des problèmes d'ajustement du modèle avec l'augmentation du nombre de paramètres et la non linéarité des équations.

Nous présentons un état de l'art des modèles mathématiques de neurones biologiques ou modèles impulsionsnels en cherchant à faire ressortir à la fois les applications possibles et le degré d'ajustement des modèles.

Les modèles Integrate-and-Fire (IF) et Leaky-Integrate-and-Fire (LIF)

– Le modèle « intègre et tire », en anglais « Integrate-and-Fire », a été introduit au tout début du vingtième siècle par Louis Edouard Lapicque (1866-1952), médecin et physiologiste français, spécialiste du système nerveux.

Sa représentation de l'activité électrique du neurone est issue d'un modèle de charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance, dont l'équation figure ci-dessous :

$$I(t) = C_m \frac{dV_{MEM}}{dt} \quad (1.1)$$

où C_m représente la capacité de membrane, V_{MEM} la tension de membrane et I , le courant.

Ce modèle ne rend pas compte de l'apparition d'un potentiel d'action, s'éloignant en ce sens d'un neurone vivant.

– Un modèle « intègre et tire avec fuite » ou « Leaky-Integrate-and-Fire » a ensuite été proposé pour ramener progressivement le neurone à son potentiel de repos.

L'équation (1.1) devient alors :

$$I(t) - \frac{dV_{MEM}}{R_m} = C_m \frac{dV_{MEM}}{dt} \quad (1.2)$$

où R_m est la résistance membranaire.

Ainsi, pour émettre un potentiel d'action, le courant entrant doit dépasser le seuil $I_s = \frac{V_s}{R_m}$.

L'équation peut encore s'écrire :

$$C_m \frac{dV_{MEM}}{dt} = I(t) - g_{fuite}(V_{MEM} - E_{fuite}) \quad (1.3)$$

Ces deux variantes présentent peu de caractéristiques à ajuster, le seuil V_s et la fréquence d'oscillation, ce qui revient encore à régler la stimulation, g_{fuite} et E_{fuite} .

Les modèles Resonate-and-Fire, IF quadratique et d'Izhikevich

Des extensions du modèle IF, plus réalistes phénoménologiquement, ont été suggérées sur la base de l'équation (1.3)

- La première a été proposée en 1937 par Gaylord Young sous le nom de « résonne et tire » ou « Resonate-and-Fire » (RF) introduisant un courant potassique à faible seuil de déclenchement.

- La seconde est appelée IF quadratique car elle fait intervenir le carré du potentiel de membrane.

- La troisième, introduite par Eugene Izhikevich, est une combinaison des deux précédentes; elle fait à la fois intervenir l'expression quadratique et le courant potassique à faible seuil.

Il est formalisé par les équations suivantes où v représente une tension, u un courant et a, b, c, d sont des constantes :

$$\frac{dv(t)}{dt} = 140 + 0.04 v(t)^2 + 5 v(t) - u(t) \quad (1.4)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = a (b v(t) - u(t)) \quad (1.5)$$

$$\text{et si } v \geq 1 \text{ alors } v \leftarrow c, \quad u \leftarrow u + d \quad (1.6)$$

Bien que relativement faciles à résoudre numériquement, les équations de ces modèles fournissent des comportements plus réalistes que les modèles IF classiques.

Le formalisme d'Hodgkin–Huxley

Ce formalisme fait partie des formalismes dits « à conductances ».

A la différence des modèles précédents qui étaient plus abstraits, le formalisme d'Hodgkin–Huxley s'inscrit dans une modélisation biophysique à l'échelle des sous-éléments constituant la cellule.

Ce modèle décrit l'activité du neurone au niveau cellulaire incluant les échanges ioniques par les courants I_{ion} de l'équation ci-dessous.

$$C_{MEM} \frac{dV_{MEM}(t)}{dt} = \sum_{ion} I_{ion}(V_{MEM}(t)) \quad (1.7)$$

$$I_{ion}(t) = g_{ion}(V_{MEM}(t)) (V_{MEM}(t) - E_{ion}) \quad (1.8)$$

où la conductance g_{ion} s'exprime ainsi :

$$g_{ion}(V_{MEM}(t)) = g_{ion} m(V_{MEM}(t))^p h(V_{MEM}(t))^q (V_{MEM}(t) - E_{ion}) \quad (1.9)$$

avec

$$\tau_x(V_{MEM}(t)) \frac{dx(t)}{dt} = x_{\infty} - x(t), \quad x = m, h \quad (1.10)$$

τ_x est une fonction homogène à un temps et qui dépend de 1 à 4 paramètres.

Les réductions du modèle d'Hodgkin–Huxley : modèles de FitzHugh–Nagumo, Morris–Lecar et Hindmarsh–Rose

Du fait de sa complexité de réglage le formalisme d'Hodgkin a été décliné en variantes simplifiées par Fitz Hugh et Nagumo en 1961 et 1962, Morris et Lecar en 1981, Hindmarsh et Rose en 1984 ou Doya en 1993.

Elles portent maintenant leur nom.

Nous présentons brièvement les équations de quelques unes d'entre elles :

– Equations du modèle de FitzHugh–Nagumo :

$$\frac{dV_{MEM}(t)}{dt} = V_{MEM}(t) - V_{MEM}^3(t) - \omega(t) - I(t) \quad (1.11)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = V_{MEM}(t) - a - b\omega(t) \quad (1.12)$$

avec ω , variable homogène à une tension, I un courant de stimulation extérieur, a et b des constantes à déterminer.

– Le modèle de Morris et Lecar est un modèle à conductances qui combine le formalisme original d'Hodgkin et Huxley et le modèle de FitzHugh–Nagumo.

Il se présente sous la forme suivante :

$$C_{MEM} \frac{dV_{MEM}(t)}{dt} = \sum_{ion} I_{ion} (V_{MEM}(t)) \quad (1.13)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \phi \frac{\omega_{\infty} - \omega}{\tau_{\omega}(V_{MEM})} \quad (1.14)$$

$$\sum_{ion} I_{ion} = g_{Ca} m_{\infty} (V_{MEM} - V_{Ca}) + g_K \omega (V_{MEM} - E_K) + g_{fuite} (V_{MEM} - E_{fuite}) \quad (1.15)$$

– Enfin, le modèle Hindmarsh-Rose, quant à lui, est construit à partir du modèle de FitzHugh–Nagumo et combine trois équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = y + 3x^2 - x^3 - zI \quad (1.16)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 5x^2 - y \quad (1.17)$$

$$\frac{dz}{dt} = r \left(4 \left(x + \frac{8}{5} \right) - z \right) \quad (1.18)$$

Le paramètre à estimer est ici la constante r .

Ce modèle simple est capable de reproduire des comportements dynamiques variés sans nécessiter beaucoup de réglages ; il est donc utilisé pour modéliser des réseaux à grande échelle, à l'instar des modèles IF, d'Izhikevich ou FitzHugh–Nagumo.

Les modèles multi-compartmentaux

Le formalisme d'Hodgkin–Huxley ou les autres modèles à conductances sont également souvent utilisés pour la conception de modèles de neurones comportant plusieurs compartiments.

On modélise alors axones, dendrites, synapses, épines dendritiques, etc, généralement sous la forme de cylindres ou d'un assemblage de cylindres.

Définition 1. [Izh07]

Du point de vue des systèmes dynamiques, le neurone est excitable parce-que le point d'équilibre est proche d'une bifurcation.

Un spike est le potentiel d'action né à partir d'une impulsion par le fait de l'interaction avec d'autres neurones.

Le Bursting est un ensemble d'oscillations d'une période d'activité alternées par une période de repos (quiescence).

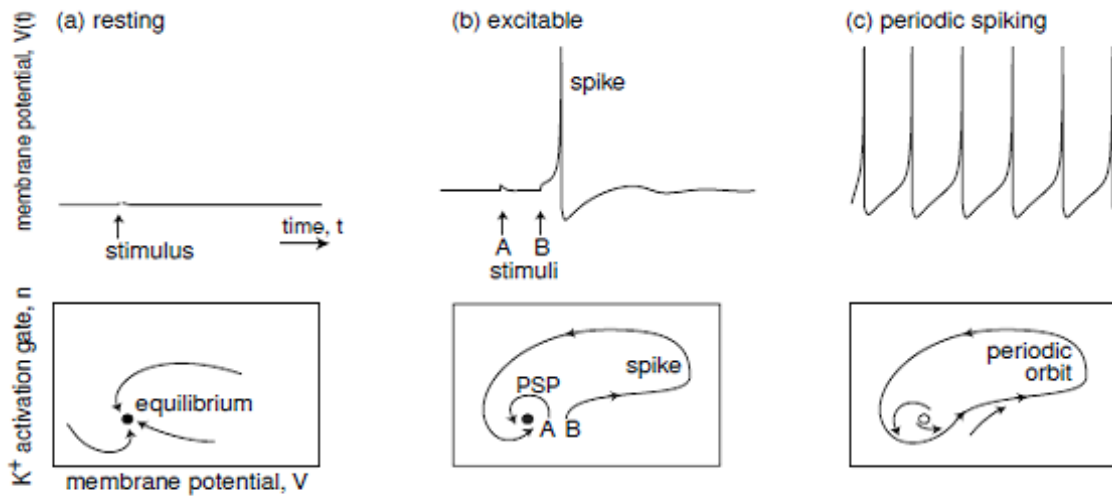


FIGURE 1.4: Le repos, l'excitabilité et le périodique spiking correspondent à un point d'équilibre (a, b) ou un cycle limite (c) [Izh07]

Chapitre 2

Quelques rappels

2.1 Théorème d'existence et d'unicité

Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et I un ouvert de $\mathbb{R}$.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) & (t, u) \in I \times U, \\ u(t_0) = u_0 & (t_0, u_0) \in I \times U, \end{cases} \quad (P_c(t_0, u_0))$$

où $f \in C(I \times U, E)$

Théorème 1. (de Cauchy-Lipshitz)[BG10]

On suppose qu'il existe un voisinage de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et $k > 0$ tels que pour tous $(t, X), (t, Y)$ dans ce voisinage, $\|f(t, X) - f(t, Y)\|_E \leq k \|X - Y\|_E$.

Alors on a les propriétés suivantes :

Existence : Il existe $\tau > 0$ et $u \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], U)$ solution du problème $P_c(t_0, u_0)$

Unicité : Si v est une autre solution du système $P_c(t_0, u_0)$, elle coïncide avec u sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Définition 2. [Arn74]

Le flot est défini par : $\phi^t : E \rightarrow E$ et $X(t) = \phi^t X(t_0)$

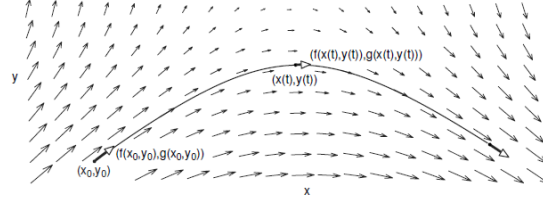


FIGURE 2.1: Les solutions sont les trajectoires tangentes au champ de vecteurs[Izh07]

Proposition 1. [Arn74]

$\forall X \in E, \forall t, s \in I$, on a

$$\phi^t(\phi^s(X)) = \phi^{t+s}(X) \quad (2.1)$$

pour autant que t et s soient suffisamment petits pour que les deux membres de l'égalité soient définis.

Il découle immédiatement de cette proposition que

$$\phi^t(\phi^{-t}(X)) = \phi^0(X) = X. \quad (2.2)$$

Aussi, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, la solution du problème $P_c(t_0, u_0)$ est donnée par $\phi^{t-t_0}(u_0)$, c'est-à-dire que la trajectoire de cette solution dans $I \times U$ est obtenue en translatant la trajectoire de la solution qui passe par u_0 en $t = 0$.

2.2 Stabilité

La théorie de la stabilité joue un rôle central en théorie des systèmes dynamiques. L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires.

2.2.1 Méthode directe de Lyapounov

Définition 3. Un point v qui vérifie $f(v) = 0$, est appelé un point d'équilibre ou un point stationnaire.

Remarque 1. On se ramènera au point d'équilibre 0 par changement de variable $u = v$.

Définition 4. [BG10]

Soit le champ de vecteurs relatif au système $P_c(t_0, u_0)$ de flot ϕ^t , où $f \in C^1(I \times U)$.

Un point d'équilibre v du système $P_c(t_0, u_0)$ est dit stable s'il existe un voisinage V_0 de v dans U tel que :

- le flot $\phi^t(w)$ est défini pour tout $t \geq 0$ et pour tout $w \in V_0$,
- pour tout voisinage W de v dans U , il existe un voisinage $V \subset V_0$ tel que $\phi^t(w)$ appartient à W pour tout $t \geq 0$ et pour tout $w \in V$

Le point d'équilibre v est dit asymptotiquement stable si de plus il existe un voisinage $V_1 \subset V_0$ tel que,

- pour tout $w \in V_1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(w) = v$

Notation :

On notera par J_0 , la matrice jacobienne au point d'équilibre de $P_c(t_0, u_0)$ ou la différentielle au point d'équilibre 0.

$$J_0 = Df(0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right](0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.3)$$

où les fonctions f_i sont les composantes de la fonction f .

Définition 5. On dit que le point d'équilibre de $P_c(t_0, u_0)$ est hyperbolique si aucune des valeurs propres de J_0 n'admet de partie réelle nulle.

Théorème 2. (Stabilité des points d'équilibre)[Wig00]

Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne J_0 au point d'équilibre du système $P_c(t_0, u_0)$ ont leur partie réelle négative (resp. strictement négative), alors, ce point d'équilibre est stable (resp. asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov.

Si une des valeurs propres de J_0 a sa partie réelle positive au sens strict, alors, ce point d'équilibre n'est pas stable au sens de Lyapounov.

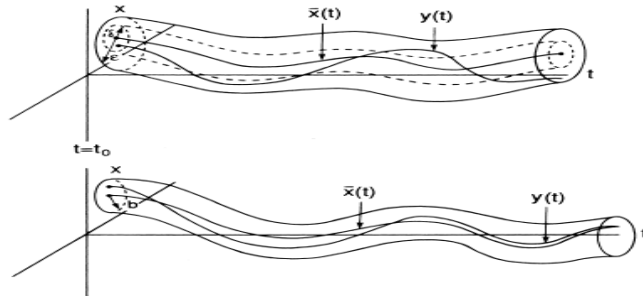


FIGURE 2.2: Haut : Stabilité. Bas : Stabilité asymptotique[Wig00]

2.2.2 Fonction de Lyapounov

Théorème 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit la fonction $V : U \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue sur U et de classe C^1 sur $U \setminus \{0\}$ telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ ie : la fonction V admet un minimum à l'origine, local.

- i) Si $\dot{V} \leq 0$ sur $U \setminus \{0\}$ ie : V décroît le long des trajectoires, alors 0 est stable.
- ii) Si $\dot{V} < 0$ sur $U \setminus \{0\}$, (resp. $\dot{V} > 0$ sur $U \setminus \{0\}$) alors 0 est asymptotiquement stable, (resp. 0 est instable).

Remarque 2. Si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable).

2.3 Typologie des points d'équilibre

La nature des points d'équilibre de $P_c(t_0, u_0)$ est déterminée par le signe de P et de S , de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \lambda S + P = 0. \quad (2.4)$$

Les solutions oscillantes et non oscillantes sont donc déterminées par l'intérieur et l'extérieur de la parabole d'équation : $S^2 = 4P$.

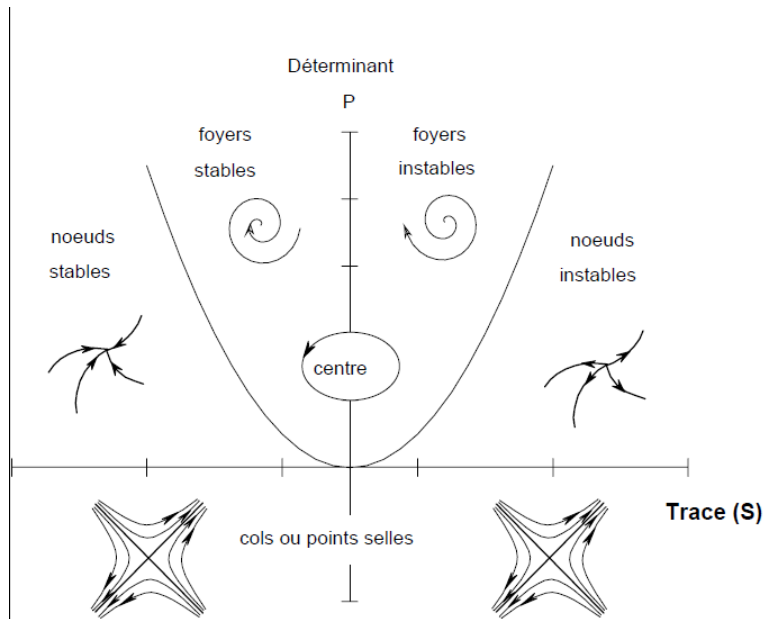


FIGURE 2.3: Nature des points d'équilibre d'un système non linéaire de dimension 2, en fonction de la trace et du déterminant de sa matrice jacobienne au voisinage de ces points.

2.4 Théorème de Hartmann-Großman

Le théorème prouvé indépendamment par Hartmann en 1960 et de Großman en 1959, précise que la structure d'une trajectoire d'un système près d'un point d'équilibre a qualitativement la même structure qu'une trajectoire donnée par le système linéarisé.

Soit le système $P_c(t_0, u_0)$ avec l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$

On suppose que le système $P_c(t_0, u_0)$ admet a comme point d'équilibre.

On suppose que la jacobienne $Df(a)$ du système $P_c(t_0, u_0)$ admet des valeurs propres avec partie réelle non nulle.

On considère le champ linéaire associé au champ de vecteurs relatif au système $P_c(t_0, u_0)$:

$$\dot{\xi} = Df(a)(\xi) \quad (2.5)$$

avec ξ in U .

Théorème 4. *Théorème de Hartmann-Großman [Wig00]*

Le flot généré par le système $P_c(t_0, u_0)$ est C^0 conjugué au flot généré par le système (2.5) au voisinage du point d'équilibre a .

2.5 Théorème Poincaré-Bendixson

2.5.1 Ensembles ω - limite et α - limite

Soit le système $P_c(t_0, u_0)$ avec $f \in C^r(U \subset \mathbb{R}^2), r > 1$. On notera $\phi^t(\cdot)$ le flot correspondant.

Définition 6. 1. $q \in \mathbb{R}^2$ est appelé un point ω - limite de $p \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$

$\exists \{t_n\}, t_n \rightarrow +\infty$ tel que $\phi^{t_n}(p) \rightarrow q$.

2. $q \in \mathbb{R}^2$ est appelé un point α - limite de $p \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$

$\exists \{t_n\}, t_n \rightarrow -\infty$ tel que $\phi^{t_n}(p) \rightarrow q$.

Notation

$\omega(p)$ = ensemble des points ω - limite de p .

$\alpha(p)$ = ensemble des points α - limite de p .

2.5.2 Théorème Poincaré-Bendixson

Théorème 5. [Str94]

Un ensemble ω -limite non vide compact du système $P_c(t_0, u_0)$, qui ne contient pas de point d'équilibre est une orbite périodique.

C'est-à-dire,

si on suit une courbe intégrale d'un champ de vecteurs dans une surface compacte, il ne peut se passer que deux choses :

1. on s'approche d'un point d'équilibre du champ de vecteurs
2. on s'approche d'un cycle limite.

2.6 Recherche d'une orbite périodique

2.6.1 Critère de Bendixson

Soit le système $P_c(t_0, u_0)$ avec $f \in C^1(U \subset \mathbb{R}^2)$. On notera $\phi^t(\cdot)$ le flot correspondant.

Théorème 6. [Izh07]

Supposons que le sous-ensemble U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. Si la divergence $\text{div } f$ est de signe constant et non identiquement nulle, alors le système n'a aucune orbite périodique incluse dans U . On dit aussi qu'il n'y a pas de cycle limite.

Ce théorème nous permet d'isoler des valeurs du paramètre de bifurcation, pour lesquelles il n'y a pas d'orbites périodiques.

Remarque 3. [Arn74] Si $\text{div } f = 0$, le flot conserve le volume de tout domaine.

2.7 Etude des bifurcations

Une bifurcation est un changement qualitatif dans la dynamique d'un système lors d'un changement des valeurs des paramètres.[A.B06]

Un système dynamique à l'état stationnaire (attracteur : point limite) peut devenir oscillatoire (attracteur : cycle limite) par franchissement d'une valeur critique du paramètre de contrôle.

Définition 7. [Izh07]

Un cycle limite est une courbe fermée dans l'espace des phases.

Il reflète la périodicité du mouvement et son caractère oscillatoire.

Définition 8. [CLW94]

Une orbite homocline du système $P_c(t_0, u_0)$ est une solution bornée, qui tend vers un point d'équilibre lorsque $t \mapsto \pm\infty$.

2.7.1 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf**Théorème 7.** de Poincaré-Andronov-Hopf [N.C09]

On suppose que la matrice jacobienne $Df(0)$ au point d'équilibre 0 , admet deux valeurs propres complexes $\lambda_{1,2}(r) = \text{Re}(\lambda_{1,2})(r) \pm i \text{Im}(\lambda_{1,2})(r)$.

Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re}(\lambda_{1,2})(r_c) = 0, \\ \frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial r} \Big|_{r=r_c} \neq 0, \end{array} \right.$$

Alors $(0, r_c)$ est un point de bifurcation de Hopf.

Soit c_1 l'indice de MARSDEN-MCCRACKEN tel que :

$$c_1 = \frac{1}{16 \text{Im}(\lambda_{1,2})(r_c)}$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\ & + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

où chacune des fonctions $\hat{F}$ et $\hat{G}$ représente la partie non linéaire du système, les fonctions F et G représentent chacune la transformée par la matrice de passage (ou de changement de base) des fonctions $\hat{F}$ et $\hat{G}$ respectivement.

Le calcul de c_1 permet de distinguer différents cas :

	$c_1 < 0$		$c_1 > 0$
$\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial r} \Big _{r_c} < 0$	$r < r_c$	eq. inst. et orb. per. st.	eq. inst. et pas orb. per.
	$r > r_c$	eq. st. et pas orb. per.	eq. st. et pas orb. per.
$\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial r} \Big _{r_c} > 0$	$r < r_c$	eq. st. et pas orb. per.	eq. st. et pas orb. per.
	$r > r_c$	eq. inst. et orb. per. st.	eq. inst. et pas orb. per.

eq : équilibre, orb : orbite, per : périodique, st : stable, inst : instable,

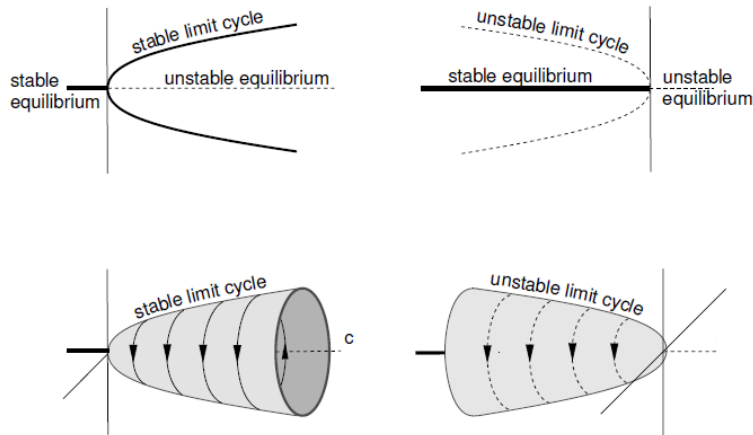


FIGURE 2.4: A gauche, la bifurcation super-critique. A droite, la bifurcation sous-critique[Izh07]

Remarque 4. [Izh07]

En dimension 3, on suppose qu'en plus des deux valeurs propres complexes, il existe une troisième valeur propre réelle et négative.

2.7.2 Bifurcation pli ou noeud-col

Le nom de noeud-col vient du fait que dans un système de deux dimensions (x, y) , une selle entre en collision avec un noeud (stable ou instable).

- Bifurcation noeud-col en dimension 1

On considère le système de la forme :

$$\dot{x} = g(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Théorème 8. [Y.K04]

On suppose qu'en $\alpha = 0$, le point $x = 0$ est un point d'équilibre du système (2.7).

De plus, on supposera $g_x(0, 0) = 0$ (la condition de la bifurcation pli).

Si l'on a :

$$g_{xx}(0, 0) \neq 0 \quad \text{et} \quad g_{\alpha}(0, 0) \neq 0, \quad (2.8)$$

alors, le système (2.7) présente une bifurcation pli au point de bifurcation $(0, 0)$ et en plus le système (2.7) est localement topologiquement équivalent au voisinage de l'origine au système :

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2, \quad \text{avec } \beta \text{ est une constante.} \quad (2.9)$$

- Bifurcation noeud-col en dimension 2

On considère le système de la forme :

$$\dot{x} = h(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Théorème 9. *On suppose que l'équation (2.10) admet pour $\alpha = 0$ l'équilibre $x = 0$ avec comme valeurs propres du polynôme caractéristique relatif à l'équation (2.10), $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$.*

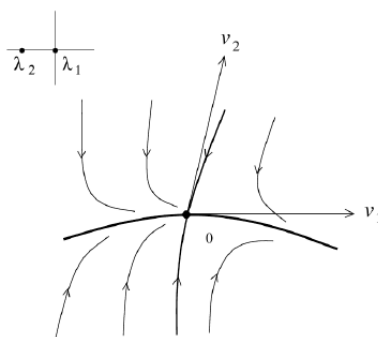


FIGURE 2.5: Bifurcation pli en dimension 2

On a l'existence pour $|\alpha|$ suffisamment petit d'une sous-variété W_α^c de dimension 1.

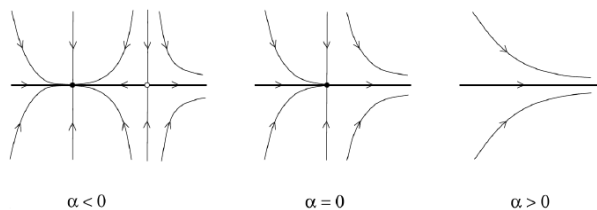
Pour $\alpha = 0$, la restriction s'écrit : $\dot{u} = a u^2 + O(u^3)$.

Si $a \neq 0$ et si l'équation restreinte dépend de manière générique de α elle est localement topologiquement équivalente à la forme normale

$$\dot{u} = \alpha + \sigma u^2, \quad \sigma = \text{signe } a = \pm 1.$$

Le théorème de Shoshitaishvili nous dit que le système est localement topologiquement équivalent à

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha + \sigma u^2 \\ \dot{v} = -v \end{cases}$$

FIGURE 2.6: Le noeud et le col entrent en collision en $\alpha = 0$

- Bifurcation noeud-col en dimension n

On considère le système de la forme :

$$\dot{x} = k(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

Théorème 10. *Sotomayor/[J.P05]*

On suppose $k(x_0, \mu_0) = 0$ et que la jacobienne en x_0 et μ_0 $D_x k(x_0, \mu_0) = J_0$ admet $\lambda = 0$ comme valeur propre simple de vecteur propre v .

On désigne par w un vecteur propre de la matrice transposée de la jacobienne J_0^t pour la même valeur propre $\lambda = 0$.

On suppose de plus que J_0 admet k valeurs propres de partie réelle négative et $(n - k - 1)$ valeurs propres de partie réelle est positive.

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

$${}^t\omega D_\mu k(x_0, \mu_0) \neq 0, \quad {}^t\omega D_x^2 k(x_0, \mu_0)(v, v) \neq 0 \quad (2.12)$$

Alors il existe une courbe différentiable de points d'équilibre de l'équation (2.11) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui passe par (x_0, μ_0) et tangente à l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$.

Près de x_0 , il n'y aucun point d'équilibre si $\mu < \mu_0$ et il y a deux points d'équilibre de l'équation (2.11) lorsque $\mu > \mu_0$.

Les deux points d'équilibre sont hyperboliques et possèdent des variétés stables de dimension k et $k + 1$ respectivement.

L'ensemble des champs de vecteurs différentiables qui satisfont la condition ci-dessus est un ouvert dense dans l'espace de Banach des champs de vecteurs différentiables qui ont x_0 comme point d'équilibre avec une valeur propre nulle simple.

La bifurcation ainsi décrite s'appelle la bifurcation pli.

2.7.3 Bifurcation homocline

On parle de bifurcation homocline lorsque l'amplitude d'un cycle limite croît jusqu'à toucher le point col et le cycle disparaît, la période du cycle tendant vers l'infini lorsque le paramètre tend vers le paramètre de bifurcation.[JI93]

2.7.4 La bifurcation d'hystérèse

Considérons l'exemple suivant :

$$\dot{x} = c + x - x^3 \quad (2.13)$$

qu'on peut écrire :

$$\dot{x} = c + s(x, 0) \quad (2.14)$$

où $s(x, c) = c + x - x^3$

La courbe $s(x, 0)$ s'annule en $x = 0$ et en $x = \pm 1$.

Elle présente un maximum égal à $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et un minimum égal à $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

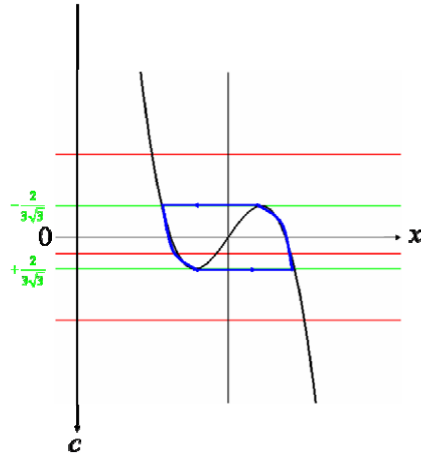


FIGURE 2.7: Représentation graphique de la fonction $s(x, 0) = x - x^3$.

Les points d'équilibre de l'équation (2.13) se trouvent à l'intersection de la courbe $s(x, 0)$ et de la droite horizontale $x = -c$. Trois cas se présentent :

- Si $c > \frac{2}{3\sqrt{3}}$, l'équation (2.13) admet un point d'équilibre unique asymptotiquement stable.

- Si $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < c < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, l'équation (2.13) admet trois points d'équilibre, un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre asymptotiquement stables.
- Si $c < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, l'équation (2.13) admet à nouveau un seul point d'équilibre asymptotiquement stable.

Le diagramme de bifurcation montre que pour les valeurs du paramètre $c = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$, le nombre de points d'équilibre passe de un à trois et à nouveau repasse à un seul point fixe.

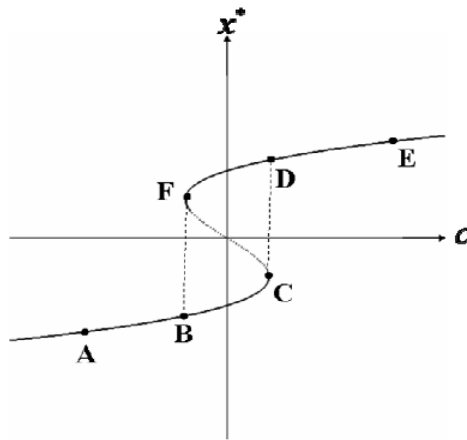


FIGURE 2.8: Diagramme de la bifurcation d'hystérèse

Il est possible de décrire un cycle d'hystérèse.

En effet, pour une valeur de $c < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, quelque soit la condition initiale $x(0)$, la variable $x(t)$ va tendre vers le point d'équilibre unique asymptotiquement stable noté A .

Faisons maintenant varier le paramètre c en l'augmentant progressivement.

Lorsque $c = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, le point B , à nouveau point d'équilibre apparaît.

Pour les valeurs du paramètre telles que $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < c < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, trois points d'équilibre existent.

Cependant, l'équilibre précédent continue d'être asymptotiquement stable et la variation du paramètre c se fait en restant sur la même branche du diagramme jusqu'au point C .

A partir de ce point C correspondant à $c = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, une augmentation aussi petite soit-elle du paramètre c provoque un saut sur la branche supérieure stable en un point D .

Toute augmentation du paramètre c se fait ensuite en restant sur cette branche stable jusqu'en un point E .

Maintenant, faisons le chemin inverse, c'est-à-dire en faisant varier le paramètre c en le diminuant progressivement à partir du point E .

Cette fois, le système reste sur la branche stable supérieure jusqu'au point F correspondant à $c = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, pour cette valeur du paramètre, le système saute sur la branche stable inférieure au point B .

Enfin, la diminution du paramètre c conduit au point de départ A .

Pendant la variation du paramètre c , le système a décrit un cycle $ABCDEFBA$ appelé cycle d'hystérèse.

Le parcours suivi pendant la phase d'augmentation du paramètre c ($ABCDE$) est différent que celui suivi pendant la phase de diminution ($EDFBA$).

De nombreux phénomènes physiques et naturels correspondent à de tels cycles d'hystérèse, c'est-à-dire que le chemin suivi par le système dépend du sens parcouru.

2.8 Dynamique lente-rapide

Définition 9. Une dynamique lente-rapide est un champ de vecteurs différentiable défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme :

$$(S_\epsilon) \begin{cases} \epsilon \dot{x} &= f_1(x, y, \epsilon) \\ \dot{y} &= f_2(x, y, \epsilon) \end{cases}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ où les fonctions f_1 et f_2 sont $C^1(U)$.

Le paramètre ϵ représente le rapport entre les deux échelles de temps des variables x et y et est supposé petit strictement positif, $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$.

Les composantes de $x \in \mathbb{R}^m$ sont appelées les "variables rapides", celles de $y \in \mathbb{R}^n$ sont appelées les "variables lentes."

Le changement de variable temporelle "Rescaling" :

$$t = \epsilon \tau, \quad dt = \epsilon d\tau \quad (2.15)$$

permet d'obtenir un système équivalent à (S_ϵ) (défini suivant une autre échelle de temps) :

$$(P_\epsilon) \begin{cases} \dot{x} &= f_1(x, y, \epsilon) \\ \dot{y} &= \epsilon f_2(x, y, \epsilon) \end{cases}$$

Nous appelons "système lent-rapide" un système du type (S_ϵ) ou (P_ϵ) .

La première équation de (S_ϵ) (*resp.* (P_ϵ)) constitue la dynamique rapide et la deuxième la dynamique lente.

Définition 10. *Le système différentiel avec contrainte :*

$$(S_0) \begin{cases} f_1(x, y, 0) &= 0 \\ \dot{y} &= f_2(x, y, 0) \end{cases}$$

est appelé "système critique."

$$(P_0) \begin{cases} \dot{x} &= f_1(x, y, 0) \\ \dot{y} &= 0 \end{cases}$$

est appelé le "système couche-limite."

Sa première équation, pour laquelle y est un paramètre est nommé "système rapide" :

$$\dot{x} = f_1(x, y, 0) \quad (2.16)$$

Définition 11. *Pour l'un ou l'autre des systèmes (S_ϵ) ou (P_ϵ) , on définit "l'ensemble critique" :*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid f_1(x, y, 0) = 0\} \quad (2.17)$$

constitué des points singuliers de (P_0) .

Chapitre 3

Modèle de Hindmarsh-Rose-2D

L'objet de ce travail est l'étude du modèle tridimensionnel qui a été proposé en 1984 par J.L.Hindmarsh et R.M.Rose, ce modèle décrit la dynamique d'un neurone.

Il s'agit de faire une étude qualitative du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 - z \\ \dot{y} = \gamma (1 - 5x^2 - y) \\ \dot{z} = \epsilon (4x + K - z) \end{cases}$$

où la variable x est le potentiel de la membrane et représente la concentration ionique transmembranaire principalement constituée d'ions Na^+ (sodium) et d'ions K^+ (potassium).[Izh07]

La variable y représente la fonction d'activation ionique (Na^+ ou K^+).

La troisième variable z modélise le déclenchement et l'arrêt du potentiel d'action. C'est une variable qui régule les phénomènes de décharge.

Le paramètre K est le courant électrique, γ est un paramètre positif et $0 < \epsilon \ll 1$.

On se propose dans ce chapitre de décrire la dynamique du champ non-linéaire, relatif au modèle (1982) à deux équations de Hindmarsh-Rose :

$$(I_0) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 \\ \dot{y} = \gamma (1 - 5x^2 - y) \end{cases}$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\gamma > 0$.

Le système (I_0) s'écrit sous la forme d'une équation non-linéaire :

$$\dot{X} = f(X) \tag{3.1}$$

avec

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ car ses composantes f_1 et f_2 sont $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Le théorème d'existence et d'unicité¹, assure l'existence d'une unique solution de l'équation (3.1) pour une condition initiale donnée.

1. Chapitre : Quelques rappels, Théorème d'existence et d'unicité

3.1 Analyse locale :

Il s'agit d'étudier la nature des trajectoires du système (I_0) .

3.1.1 Recherche des points d'équilibre

En annulant le champs relatif au système (I_0) ,

$$(II) \begin{cases} \dot{x} = 0 \iff y = x^3 - 3x^2 \\ \dot{y} = 0 \iff y = 1 - 5x^2 \end{cases}$$

on obtient une équation du troisième degré en x :

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0 \quad (3.2)$$

Une solution triviale est $x = -1$, l'équation (3.2) s'écrit :

$$(x + 1)(x^2 + x - 1) = 0 \quad (3.3)$$

Après calcul du discriminant de l'équation $(x^2 + x - 1) = 0$, on aboutit aux solutions suivantes :

$$x_A = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_B = -1 \text{ et } x_C = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Les points d'équilibre du système (I_0) sont donc :

$$A = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, 1 - 5x_A^2 \right), B = (-1, -4) \text{ et } C = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 - 5x_C^2 \right),$$

autrement,

$$A = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-13 - 5\sqrt{5}}{2} \right), B = (-1, -4) \text{ et } C = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-13 + 5\sqrt{5}}{2} \right).$$

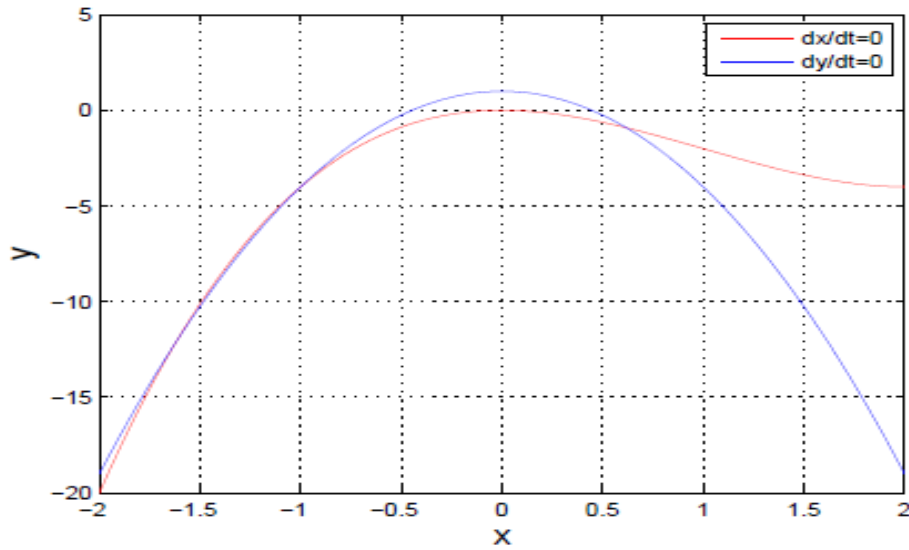


FIGURE 3.1: les nullclines du modèle de Hindmarsh-Rose 2D

Dans cette figure, les points d'équilibre sont donnés par l'intersection des deux isoclines : $\frac{dx}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$

3.1.2 Nature des points d'équilibre :

On linéarise le système (I_0) autour du point d'équilibre.

On notera par $\bar{X}_0 = (x_0, y_0)$, l'un des points d'équilibre A , B ou C .

On pose : $a = 6x_0 - 3x_0^2$

On note par J_0 , la matrice jacobienne au point d'équilibre $\bar{X}_0$:

$$J_0 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -10\gamma x_0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

On pose :

$$(V) \begin{cases} S(x_0, \gamma) = a - \gamma & (\text{la trace de } J_0) \\ P(x_0, \gamma) = \gamma x_0 (3x_0 + 4) & (\text{le déterminant de } J_0) \end{cases}$$

Les valeurs propres de la jacobienne J_0 sont les racines λ du polynôme caractéristique :

$$|J_0 - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda(a - \gamma) + P(x_0, \gamma) = 0,$$

i.e :

$$|J_0 - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda(-3x_0^2 + 6x_0 - \gamma) + \gamma x_0(3x_0 + 4) = 0, \quad (3.4)$$

dont le discriminant est :

$$\Delta(x_0, \gamma) = (a - \gamma)^2 - 4P(x_0, \gamma) \quad (3.5)$$

- **Le point $A(x_A, y_A)$ est un noeud**, en effet :

le discriminant $\Delta(x_A, \gamma)$ et le produit $P(x_A, \gamma)$ sont donnés par :

$$(VI) \begin{cases} \Delta(x_A, \gamma) = \gamma^2 - 2\gamma x_A(3x_A + 14) + a^2 > 0 \quad \forall \gamma, \\ P(x_A, \gamma) = \gamma x_A(3x_A + 4) > 0 \quad \forall \gamma \end{cases}$$

Le point A est un noeud asymptotiquement stable, car :

$$S(x_A, \gamma) = 6x_A - 3x_A^2 - \gamma < 0. \quad (3.6)$$

Les valeurs propres réelles au point A sont :

$$(VII) \begin{cases} \lambda_1(\gamma) = \frac{S(x_A, \gamma) - \sqrt{\Delta(x_A, \gamma)}}{2} < 0 \quad \forall \gamma, \\ \lambda_2(\gamma) = \frac{S(x_A, \gamma) + \sqrt{\Delta(x_A, \gamma)}}{2} < 0 \quad \forall \gamma, \end{cases}$$

- **Le point $B(x_B, y_B)$ est un col**, car :

$$(VIII) \left\{ \begin{array}{l} S(x_B, \gamma) = -9 - \gamma < 0, \quad \forall \gamma \\ P(x_B, \gamma) = -\gamma < 0, \quad \forall \gamma \end{array} \right.$$

Les valeurs propres réelles du point B sont :

$$(IX) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(\gamma) = \frac{S(x_B, \gamma) - \sqrt{\gamma^2 + 22\gamma + 81}}{2} < 0 \quad \forall \gamma, \\ \lambda_2(\gamma) = \frac{S(x_B, \gamma) + \sqrt{\gamma^2 + 22\gamma + 81}}{2} > 0 \quad \forall \gamma, \end{array} \right.$$

- **Le point $C(x_C, y_C)$ est un noeud ou foyer**, car :

$$P(x_C, \gamma) = \gamma x_C (3x_C + 4) > 0 \quad \forall \gamma.$$

Le calcul de $S(x_C, \gamma)$ donne : $S(x_C, \gamma) = 3x_C(2 - x_C) - \gamma$.

On notera $\gamma_C = 3x_C(2 - x_C) \approx 2.5622$.

Le signe du discriminant du polynôme caractéristique déterminera la nature du point C et le signe de $S(x_C, \gamma)$ sa stabilité :

$$\Delta(x_C, \gamma) = \gamma^2 - 2\gamma x_C(3x_C + 14) + a^2 \quad (3.7)$$

Son discriminant $\Delta'_1 > 0$

On notera γ_1 et γ_2 les racines de l'équation (3.7) qui sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = x_C(3x_C + 14) - \sqrt{\Delta'_1} \approx 0.341 \\ \gamma_2 = x_C(3x_C + 14) + \sqrt{\Delta'_1} \approx 19.2545 \end{array} \right.$$

On pose : $\Delta(x_C, \gamma) = \Delta$

γ	0	γ_1	γ_C	γ_2	$+\infty$
C est un	<i>noeud instable foyer instable foyer stable noeud stable</i>				

- Pour $\gamma \in]0, \gamma_1[$, $\Delta(x_C, \gamma) > 0$ et $S(x_C, \gamma) > 0$ donc le point **C** est un **noeud instable**.
- Pour $\gamma \in]\gamma_1, \gamma_C[$, $\Delta(x_C, \gamma) < 0$ et $S(x_C, \gamma) > 0$ donc le point **C** est un **foyer instable**.
- Pour $\gamma \in]\gamma_C, \gamma_2[$, $\Delta(x_C, \gamma) < 0$ et $S(x_C, \gamma) < 0$ donc le point **C** est un **foyer stable**.
- Pour $\gamma \geq \gamma_2$, $\Delta(x_C, \gamma) > 0$ et $S(x_C, \gamma) < 0$ donc le point **C** est un **noeud stable**.

En plus, le point C est un **centre** pour $\gamma = \gamma_C$, dont les deux valeurs propres complexes et conjuguées, sont données par :

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\gamma_C x_C (3 x_C + 4)} \approx \pm i 3.0446,$$

donc, ici, possibilité de bifurcation.

3.2 Etude des bifurcations

Pour l'un des points d'équilibre que l'on note $\overline{X}_0$ du système (I_0) , en appliquant le changement de variable $(x - x_0, y - y_0)$.

Celui-ci s'écrira :

$$(I_1) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3(1 - x_0)x^2 + 3xx_0(2 - x_0) \\ \dot{y} = \gamma(-5x^2 - 10xx_0 - y) \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre pour le système (I_1) .

Le système (I_1) est donc équivalent au système (I_0) .

La matrice J_0 est la jacobienne au point d'équilibre 0 pour le système (I_1) :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 6x_0 - 3x_0^2 & 1 \\ -10\gamma x_0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

3.2.1 Recherche d'une orbite périodique

Nous commençons par utiliser le critère de Bendixson² qui va nous permettre d'isoler des valeurs du paramètre, pour lesquelles il n'y a pas d'orbites périodiques.

La divergence du champ de vecteurs relatif au système I_0 , laquelle n'est autre que la trace de la jacobienne, que l'on notera $Tr(J_0)(\gamma)$ au point x , est donnée par :

$$\operatorname{div} f = \operatorname{Tr}(J_0)(\gamma) = -\gamma - 3x^2 + 6x. \quad (3.8)$$

Cette équation est du second degré en x , son discriminant $\Delta(\gamma) = 12(3 - \gamma)$.

- Pour $\gamma < 3$, $\Delta(\gamma) > 0$ donc $\operatorname{div} f$ ne garde pas un signe constant et il y a possibilité d'existence de solutions périodiques.
- Pour $\gamma = 3$, $\Delta(\gamma) = 0$ donc $\operatorname{div} f = -3(x-1)^2$ est de signe négatif et il n'y a pas de solutions périodiques.
- Pour $\gamma > 3$, $\Delta(\gamma) < 0$, donc $\operatorname{div} f$ est de signe négatif et il n'y a pas de solutions périodiques.

3.2.2 Bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf

Le critère de Bendixson assure que s'il y a bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf, alors elle se produira pour des valeurs de $\gamma_1 \leq \gamma < 3$.

2. Chapitre : Quelques rappels, Critère de Bendixson

On rappelle que le point C est un foyer pour ces valeurs de γ .

Le point C est un centre pour la valeur de $\gamma = \gamma_C$, car $S(x_C, \gamma_C) = 0$, donc la partie réelle des valeurs propres en ce point est nulle et la partie imaginaire non nulle.

Les valeurs propres du point C sont données par : $\lambda_j(\gamma) = \frac{S(x_C, \gamma) \pm i \sqrt{\Delta(x_C, \gamma)}}{2}$.

La partie réelle des valeurs propres s'écrit :

$$Re(\lambda_j)(\gamma) = \frac{(\gamma_C - \gamma)}{2} \Rightarrow \frac{\partial Re(\lambda_j)}{\partial \gamma}(\gamma_C) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

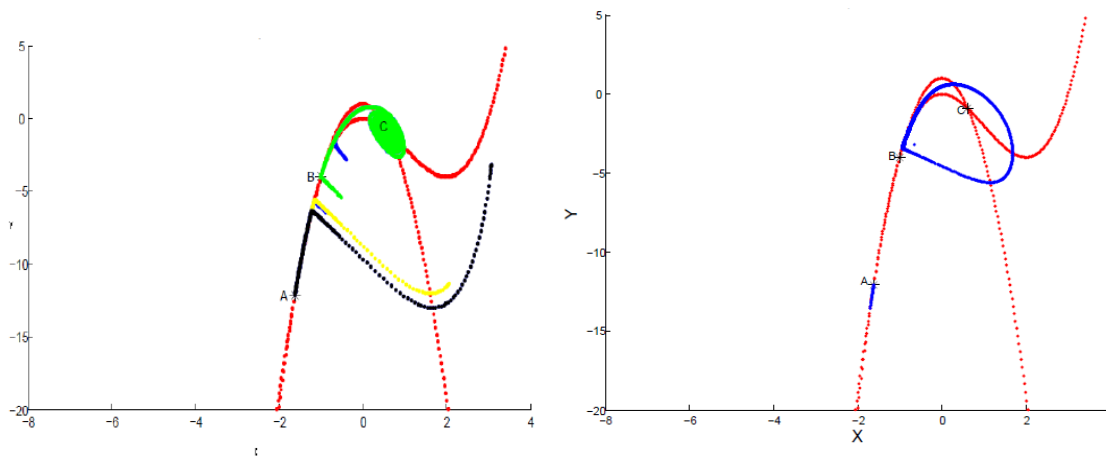
On retrouve les deux conditions, à savoir,

$$1) Re(\lambda_j)(\gamma_C) = 0 \quad \text{avec} \quad Im(\lambda_j) \approx 3.0446 \neq 0,$$

$$2) \frac{\partial Re(\lambda_j)}{\partial \gamma}(\gamma_C) = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

qui sont les deux conditions du théorème de Poincaré-Andronov-Hopf³.

Le point (C, γ_C) est donc une bifurcation de HOPF.



Dans la figure de gauche, nous avons représenté les différents types de points d'équilibre du modèle (I_0) pour $\gamma = 2.7$

3. Chapitre : Quelques rappels, Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

La figure de droite représente le cycle limite obtenu par bifurcation de Hopf pour $\gamma = 1.1$

On s'intéresse dans la suite, à la direction, la stabilité de la bifurcation de Hopf.

Soit la décomposition du système I_1 en partie linéaire et non linéaire :

$$(I_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y + \gamma_C x + 3(1 - x_C) x^2 - x^3 \\ \dot{y} = -10 \gamma x x_C - \gamma y - 5 \gamma x^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{F} \\ \hat{G} \end{pmatrix}$$

avec :

J_0 étant la matrice jacobienne au point 0, $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont les termes non linéaires :

$$J_0 = \begin{pmatrix} \gamma_C & 1 \\ -10 \gamma x_C & -\gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{F}(x, y, \gamma) = 3(1 - x_C) x^2 - x^3 \\ \hat{G}(x, y, \gamma) = -5 \gamma x^2 \end{cases}$$

Rappelons que la première condition a donné comme résultat :
le point (C, γ_C) est un point de bifurcation pour le champ I_0 .

Déterminons un vecteur propre v_1 associé à la valeur propre complexe λ_1 donné par,
 $\lambda_1(\gamma) = \frac{\gamma_C - \gamma}{2} + i \frac{\sqrt{\Delta(x_C, \gamma)}}{2}$ que l'on obtient en résolvant le système :

$$(I'_1) : (J_0 - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \operatorname{Re}(\lambda_1(\gamma)) = \frac{\gamma_C - \gamma}{2} \quad \text{partie réelle de } \lambda_1(\gamma) \\ I = \operatorname{Im}(\lambda_1(\gamma)) = \frac{\sqrt{\Delta(x_C, \gamma)}}{2} \quad \text{partie imaginaire de } \lambda_1(\gamma) \\ I_C = \operatorname{Im}(\lambda_1(\gamma_C)) = \sqrt{\gamma_C x_C (3 x_C + 4)} = \lambda_1(\gamma_C) \end{array} \right.$$

Le système (I_1) à résoudre donne :

$$(J_0 - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\gamma_C - R - i I) x + y = 0 \\ -10 \gamma x_C - (\gamma + R + i I) y = 0 \end{cases}$$

Une solution de ce système est un vecteur propre associé à λ_1 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ R - \gamma_C + i I \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base est donc donnée par,

$$P = (\operatorname{Re}(v_1), -\operatorname{Im}(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R - \gamma_C & -I \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -I(\gamma_C - R) & -I \end{pmatrix}$$

Soit le changement de variables,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Alors on a,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = P^{-1} J_0 P \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} \hat{F}(x_2, y_2, \gamma) \\ \hat{G}(x_2, y_2, \gamma) \end{pmatrix}$$

Ainsi pour $\gamma = \gamma_C$, on a,

$$P^{-1} J_0 P = \begin{pmatrix} 0 & I_C \\ I_C \gamma_C (10 x_C - \gamma_C) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = I_C y_2 + F(x_2, y_2, \gamma_C) \\ \dot{y}_2 = I_C \gamma_C (10 x_C - \gamma_C) x_2 + G(x_2, y_2, \gamma_C) \end{cases}$$

avec,

$$\begin{pmatrix} F(x_2, y_2, \gamma_C) \\ G(x_2, y_2, \gamma_C) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \hat{F}(x_2, y_2, \gamma_C) \\ \hat{G}(x_2, y_2, \gamma_C) \end{pmatrix}$$

On a donc les fonctions F et G données par :

$$\begin{cases} F(x_2, y_2, \gamma) = -3 x_2^2 (x_C - 1) - x_2^3 \\ G(x_2, y_2, \gamma) = I (\gamma_C - R) (3 x_2^2 (x_C - 1) + x_2^3) + 5 I \gamma x_2^2 \end{cases}$$

Les fonctions F et G ne dépendant que de x_2 , l'indice de MARSDEN-McCRACKEN⁴ c_1 est donné par,

$$c_1 = -\frac{1}{16 I_C} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_2^3} \quad (3.9)$$

Au point $(x_2, y_2) = (0, 0)$ et $\gamma = \gamma_C$, $c_1 = -2.33$

4. Chapitre : Quelques rappels, Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

De plus $\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial \gamma}(\gamma_C) = -\frac{1}{2}$, donc, d'après le tableau du théorème de Poincaré-Andronov-Hopf, on déduit :

Pour $\gamma < \gamma_C$, le point C est un équilibre instable avec une orbite périodique stable,
et

pour $\gamma > \gamma_C$, le point C est un équilibre stable.

La bifurcation de Hopf est donc de type bifurcation super-critique.[Lan06]

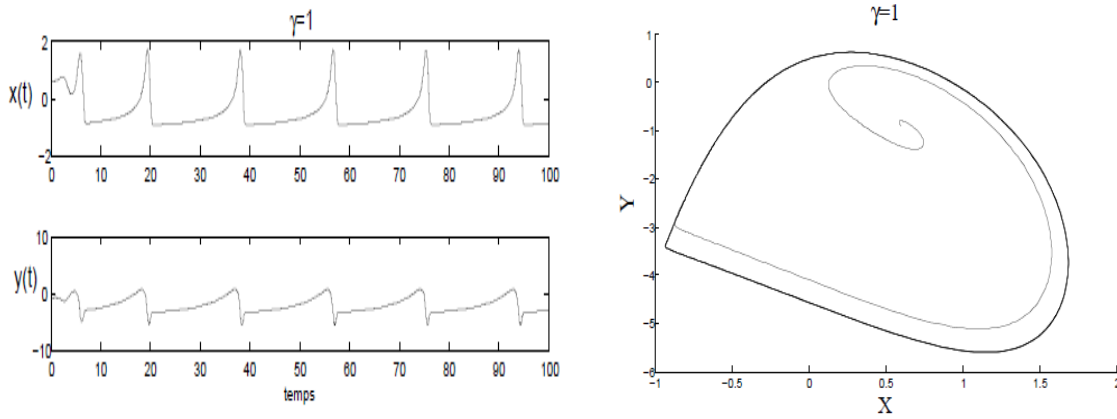


FIGURE 3.2: A gauche, la trajectoire du modèle de Hindmarsh-Rose-2D. A droite, le portrait de phase du modèle pour $\gamma = 1$

Chapitre 4

Modèle de Hindmarsh-Rose-3D

J.L.Hindmarsh et R.M.Rose ont ajouté à leur premier modèle une troisième équation en 1984 pour les raisons citées dans l'introduction ¹.

Le modèle obtenu est :

$$(I_0) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 - z \\ \dot{y} = \gamma(1 - 5x^2 - y) \\ \dot{z} = \epsilon(4x + K - z) \end{cases}$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $K \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon \ll 1$ une échelle de temps.

Le système (I_0) s'écrit sous la forme d'une équation non-linéaire :

$$\dot{X} = f(X) \tag{4.1}$$

où les vecteurs

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ car ses composantes f_1 , f_2 et f_3 sont $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Le théorème d'existence et d'unicité ² assure l'existence d'une unique solution de l'équation (4.1) pour une condition initiale donnée.

1. Introduction

2. voir chapitre 2 : Quelques rappels, Théorème d'existence et d'unicité

4.1 Analyse locale

Il s'agit de voir la nature des trajectoires ou solutions du système (I_0) .

4.1.1 Recherche des points d'équilibre

En annulant le champs relatif au système (I_0) ,

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \iff y - x^3 + 3x^2 - z = 0 \\ \dot{y} = 0 \iff y = 1 - 5x^2 \\ \dot{z} = 0 \iff z = 4x + K \end{array} \right.$$

on obtient une équation du troisième degré en x :

$$x^3 + 2x^2 + 4x + K - 1 = 0 \quad (4.2)$$

Les points d'équilibre sont de la forme

$$\overline{X}_0(K) = (x_0(K), 1 - 5x_0^2(K), 4x_0(K) + K),$$

où $x_0(K)$ est solution de l'équation (4.2).

Pour trouver les racines de l'équation (4.2), on utilise la méthode de Cardan.

Méthode de Cardan : Rappel

Définition 12. Soit à résoudre une équation du troisième degré en x :

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0 \quad (4.3)$$

avec a, b, c et d des réels ;

Avec le changement de variable : $z = x + \frac{b}{3a}$, l'équation (4.3) en fonction de z s'écrit :

$$z^3 + p z + q = 0 \quad (4.4)$$

avec

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \\ q = \frac{b}{27a} \left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a} \end{array} \right.$$

En posant $z = u + v$, l'équation (4.4) s'écrit :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (4.5)$$

La condition de simplification proposée par CARDAN est de poser $(3uv + p) = 0$

$$(3uv + p) = 0 \Rightarrow uv = -\frac{p}{3}.$$

On note : $X_1 = u^3$ et $X_2 = v^3$, et l'équation (4.5) s'écrit : $u^3 + v^3 = -q$, et on obtient le système :

$$(II) \begin{cases} X_1 + X_2 = u^3 + v^3 = -q \\ X_1 X_2 = u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

X_1 et X_2 sont donc les solutions de l'équation du second degré en X :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (4.6)$$

Son discriminant est donné par : $\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27}$

- Si $\Delta > 0$, alors les solutions réelles sont :

$$(III) \begin{cases} X_1 = u^3 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} \\ X_2 = v^3 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \end{cases}$$

Donc la solution z s'écrit :

$$(IV) \begin{cases} z_0 = u + v & (\text{solution réelle}) \\ z_1 = j u + \bar{j} v & (\text{solution complexe}) \\ z_2 = j^2 u + \bar{j}^2 v & (\text{solution complexe}) \end{cases}$$

où les nombres i et j sont les nombres imaginaires purs : $j = e^{\left(\frac{2i\pi}{3}\right)}$, $i^2 = -1$

- Si $\Delta = 0$, alors, la solution réelle est double :

$$X_1 = X_2 = u^3 = v^3 = -\frac{q}{2} \quad (4.7)$$

Donc la solution réelle z s'écrira :

$$(V) \begin{cases} z_0 = u + v = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\ z_1 = z_2 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \end{cases}$$

- Si $\Delta < 0$, alors les deux solutions sont complexes :

$$(VI) \begin{cases} X_1 = u^3 = \frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2} \\ X_2 = v^3 = \bar{u}^3 = \frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{cases}$$

u s'écrit :

$$u = r e^{i\theta} = r \cos(\theta) + i r \sin(\theta) \Rightarrow v = \bar{u} \quad (4.8)$$

Chercher u revient à chercher les nombre réels r et θ , vérifiant :

$$u^3 = r^3 \cos(3\theta) + i r^3 \sin(3\theta) \quad (\text{formule de Moivre}) \quad (4.9)$$

En remplaçant cette équation dans la première du système (VI), on obtient :

$$(VII) \begin{cases} r^3 \cos(3\theta) = \frac{-q}{2} \\ r^3 \sin(3\theta) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{cases}$$

d'où,

$$(VIII) \left\{ \begin{array}{l} r^6 \cos^2(3\theta) = \frac{q^2}{4} \\ r^6 \sin^2(3\theta) = \frac{|\Delta|}{4} \end{array} \right.$$

Puisque $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, alors on a,

$$r = \sqrt[6]{\frac{q^2 + \Delta}{4}} \quad (4.10)$$

En substituant la valeur de r dans le système (VII), on obtient la valeur de l'angle θ , en utilisant la fonction inverse du cosinus.

Donc la solution z s'écrira :

$$(IX) \left\{ \begin{array}{ll} z_0 = u + \bar{u} & (\text{solution réelle}) \\ z_1 = j u + \bar{j} \bar{u} & (\text{solution complexe}) \\ z_2 = j^2 u + \bar{j}^2 \bar{u} & (\text{solution complexe}) \end{array} \right.$$

Les solutions de l'équation (4.2) sont données par :

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} x_0(K) = \sqrt[3]{\frac{-q_0(K) - \sqrt{\Delta(K)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q_0(K) + \sqrt{\Delta(K)}}{2}} - \frac{2}{3} \\ x_1(K) = j \sqrt[3]{\frac{-q_0(K) - \sqrt{\Delta(K)}}{2}} + \bar{j} \sqrt[3]{\frac{-q_0(K) + \sqrt{\Delta(K)}}{2}} - \frac{2}{3} \\ x_2(K) = j^2 \sqrt[3]{\frac{-q_0(K) - \sqrt{\Delta(K)}}{2}} + \bar{j}^2 \sqrt[3]{\frac{-q_0(K) + \sqrt{\Delta(K)}}{2}} - \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

où i et j sont les nombres imaginaires purs : $j = e^{i \left(\frac{2\pi}{3} \right)}$, $j^2 = e^{i \left(\frac{4\pi}{3} \right)}$ $i^2 = -1$.

Seule est considérée la solution réelle $x_0(K)$ du système qui correspond dans notre modèle au potentiel d'action.

4.1.2 Nature des points d'équilibre

La matrice jacobienne J_0 au point d'équilibre $\overline{X}_0(K)$ est donnée par :

$$J_0 = \begin{pmatrix} -3x_0^2(K) + 6x_0(K) & 1 & -1 \\ -10\gamma x_0(K) & -\gamma & 0 \\ 4\epsilon & 0 & -\epsilon \end{pmatrix}$$

On pose :

$$(V) \begin{cases} B(K, \gamma, \epsilon) = -3x_0^2(K) + 6x_0(K) - (\gamma + \epsilon) = (Tr(J_0) \text{ trace du jacobien}) \\ C(K, \gamma, \epsilon) = (-3x_0^2(K) + 6x_0(K))(\gamma + \epsilon) - (\epsilon\gamma) - 10\gamma x_0(K) - 4\epsilon \\ D(K, \gamma, \epsilon) = \epsilon\gamma(-3x_0^2(K) - 4x_0(K) - 4) = Det(J_0) \text{ jacobien} \end{cases}$$

Les valeurs propres de J_0 qui sont les racines λ du polynôme caractéristique sont données par l'équation suivante :

$$|J_0 - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 B(K, \gamma, \epsilon) + \lambda C(K, \gamma, \epsilon) + D(K, \gamma, \epsilon) = 0 \quad (4.11)$$

où : I est la matrice identité.

L'équation (4.11) est du troisième degré en λ , ses racines sont données à l'aide de la méthode de Cardan.

Le discriminant $\Delta(K, \gamma, \epsilon)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\Delta(K, \gamma, \epsilon) = & -\frac{1}{27} B^2(K, \gamma, \epsilon) C^2(K, \gamma, \epsilon) + D^2(K, \gamma, \epsilon) \\
& + \frac{4}{27} B^3(K, \gamma, \epsilon) D(K, \gamma, \epsilon) \\
& - \frac{4}{27} C^3(K, \gamma, \epsilon) + \frac{18}{27} B(K, \gamma, \epsilon) C(K, \gamma, \epsilon) D(K, \gamma, \epsilon)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Si $\Delta(K, \gamma, \epsilon)$ est positif :

les valeurs propres $\lambda(K, \gamma, \epsilon)$ de la matrice J_0 sont données par :

$$(VII) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(K, \gamma, \epsilon) = -\frac{1}{2} \left(\left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) - \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) + \left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) + \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) \right) \\ \quad + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \quad + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) - \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) - \left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) + \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) \right) \\ \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) = -\frac{1}{2} \left(\left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) - \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) + \left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) + \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) \right) \\ \quad + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \quad - i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) - \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) - \left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) + \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) \right) \\ \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) = \left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) - \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) + \left(\sqrt[3]{\frac{-q(K, \gamma, \epsilon) + \sqrt{\Delta(K, \gamma, \epsilon)}}{2}} \right) \\ \quad + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \end{array} \right.$$

où $\lambda_3(K, \gamma, \epsilon)$ est réelle et les deux autres valeurs complexes conjuguées.

Et la valeur de $q(K, \gamma, \epsilon)$ est donnée par :

$$q(K, \gamma, \epsilon) = - \left(\frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{27} \right) (2 B^2(K, \gamma, \epsilon) + 9 C(K, \gamma, \epsilon)) - D(K, \gamma, \epsilon) \quad (4.13)$$

Si $\Delta(K, \gamma, \epsilon)$ est négatif :

Dans ce cas, les trois valeurs propres réelles sont données par :

$$(VIII) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(K, \gamma, \epsilon) = u(K, \gamma, \epsilon) + \overline{u(K, \gamma, \epsilon)} + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \quad = 2 \operatorname{Re}(u(K, \gamma, \epsilon)) + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \\ \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) = j u(K, \gamma, \epsilon) + \overline{j u(K, \gamma, \epsilon)} + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \quad = -\operatorname{Re}(u(K, \gamma, \epsilon)) - \sqrt{3} \operatorname{Im}(u(K, \gamma, \epsilon)) + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \\ \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) = j^2 u(K, \gamma, \epsilon) + \overline{j^2 u(K, \gamma, \epsilon)} + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \quad = -\operatorname{Re}(u(K, \gamma, \epsilon)) + \sqrt{3} \operatorname{Im}(u(K, \gamma, \epsilon)) + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \end{array} \right.$$

où u vérifie $u^3(K, \gamma, \epsilon) = \frac{-q(K, \gamma, \epsilon) - i \sqrt{|\Delta(K, \gamma, \epsilon)|}}{2}$

Si $\Delta(K, \gamma, \epsilon)$ est nul :

Dans ce cas, les trois valeurs propres réelles dont l'une λ_1 est simple et l'autre λ_2 et λ_3 double et elles sont données par :

$$(VIII_1) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(K, \gamma, \epsilon) = \frac{3 q(K, \gamma, \epsilon)}{p(K, \gamma, \epsilon)} + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \\ \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) = \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) = -\frac{3 q(K, \gamma, \epsilon)}{2 p(K, \gamma, \epsilon)}(K, \gamma, \epsilon) + \frac{B(K, \gamma, \epsilon)}{3} \end{array} \right.$$

où la valeur de $p(K, \gamma, \epsilon)$ est donnée par :

$$p(K, \gamma, \epsilon) = -\frac{B^2(K, \gamma, \epsilon)}{3} - C(K, \gamma, \epsilon) \quad (4.14)$$

4.2 Etude des bifurcations

4.2.1 Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf

Dans ce paragraphe, nous allons montrer l'existence de cycles limites en utilisant la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

On applique le changement de variable au système (I_0) :

$$(x - x_0(K), y - y_0(K), z - z_0(K)),$$

et on obtient alors le système (I_1) équivalent au système (I_0) , pour lequel l'origine est un point d'équilibre.

$$(I_1) \begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 3x^2(1 - x_0(K)) + 3x(2x_0(K) - x_0^2(K)) + y - z \\ \dot{y} = \gamma(-5x^2 - y - 10xx_0(K)) \\ \dot{z} = \epsilon(4x - z) \end{cases}$$

Pour utiliser le théorème de Poincaré-Andronov-Hopf³, on considère le polynôme caractéristique associé à la matrice jacobienne à l'origine :

$$|J_0 - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 B(K, \gamma, \epsilon) + \lambda C(K, \gamma, \epsilon) + D(K, \gamma, \epsilon) = 0$$

On peut réécrire ce polynôme en fonction de ses trois racines $\lambda_1(K, \gamma, \epsilon)$, $\lambda_2(K, \gamma, \epsilon)$ et $\lambda_3(K, \gamma, \epsilon)$:

$$\begin{aligned} & -(\lambda - \lambda_1(K, \gamma, \epsilon))(\lambda - \lambda_2(K, \gamma, \epsilon))(\lambda - \lambda_3(K, \gamma, \epsilon)) = \\ & -\lambda^3 + \lambda^2(\lambda_1(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_3(K, \gamma, \epsilon)) \\ & -\lambda(\lambda_1(K, \gamma, \epsilon)\lambda_2(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_1(K, \gamma, \epsilon)\lambda_3(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_2(K, \gamma, \epsilon)\lambda_3(K, \gamma, \epsilon)) \\ & + \lambda_1(K, \gamma, \epsilon)\lambda_2(K, \gamma, \epsilon)\lambda_3(K, \gamma, \epsilon) \end{aligned} \tag{4.15}$$

3. Quelques rappels, Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

Pour appliquer le théorème de Hopf, on supposera des trois valeurs propres, deux complexes qu'on notera :

$$\lambda_{1,2}(K, \gamma, \epsilon) = \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(K, \gamma, \epsilon)) \pm \operatorname{Im}(\lambda_{1,2}(K, \gamma, \epsilon)).$$

En identifiant les coefficients de même puissance de l'équation caractéristique et l'équation (4.15), on aboutit au système (IX_0) .

$$(IX_0) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) \\ = 2 \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) = B(K, \gamma, \epsilon) \\ \\ \lambda_1(K, \gamma, \epsilon) \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_1(K, \gamma, \epsilon) \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) + \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) \\ = \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})^2(K, \gamma, \epsilon) + \operatorname{Im}(\lambda_{1,2})^2(K, \gamma, \epsilon) + 2 \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon) (\lambda_3)(K, \gamma, \epsilon) \\ = -C(K, \gamma, \epsilon) \\ \\ \lambda_1(K, \gamma, \epsilon) \lambda_2(K, \gamma, \epsilon) \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) \\ = (\operatorname{Re}(\lambda_{1,2})^2(K, \gamma, \epsilon) + \operatorname{Im}(\lambda_{1,2})^2(K, \gamma, \epsilon)) \lambda_3(K, \gamma, \epsilon) \\ = D(K, \gamma, \epsilon) \end{array} \right.$$

Montrons qu'il existe un réel $\epsilon_c(K, \gamma)$ tel que $(0, \epsilon_c(K, \gamma))$ est un point de bifurcation de HOPF, ie tel que les conditions du théorème **Poincaré-Andronov-Hopf** soient satisfaites, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon_c) = 0 \\ 2) \quad \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon}(K, \gamma, \epsilon_c) \neq 0 \\ 3) \quad \lambda_3(K, \gamma, \epsilon_c) < 0 \end{array} \right.$$

1. La première condition du théorème : $Re(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon_c) = 0$

Si la partie réelle des valeurs propres complexes au point de bifurcation $(0, \epsilon_c)$ s'annule, alors les équations du système (IX_0) , s'écriront sous la forme :

$$(IX_1) \begin{cases} \lambda_3(K, \gamma, \epsilon_c) & = B(K, \gamma, \epsilon_c) \\ Im(\lambda_{1,2})^2(K, \gamma, \epsilon_c) & = -C(K, \gamma, \epsilon_c) \\ Im(\lambda_{1,2})^2(K, \gamma, \epsilon_c) \lambda_3(K, \gamma, \epsilon_c) & = D(K, \gamma, \epsilon_c) \end{cases}$$

En remplaçant les deux premières équations dans la troisième, celle-ci donne :

$$B(K, \gamma, \epsilon_c) C(K, \gamma, \epsilon_c) = -D(K, \gamma, \epsilon_c) \quad (4.16)$$

On rappelle le polynôme caractéristique, qui est donné par :

$$|J_0 - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 B(K, \gamma, \epsilon) + \lambda C(K, \gamma, \epsilon) + D(K, \gamma, \epsilon) = 0, \quad \forall K, \forall \gamma \text{ et } \forall \epsilon$$

On rappelle aussi le système des coefficients B , C et D lesquels sont fonction des paramètres K , γ et ϵ .

$$(V) \begin{cases} B(K, \gamma, \epsilon) = -3x_0^2(K) + 6x_0(K) - (\gamma + \epsilon) = Tr(J_0) \\ C(K, \gamma, \epsilon) = (-3x_0^2(K) + 6x_0(K))(\gamma + \epsilon) - (\epsilon\gamma) - 10\gamma x_0(K) - 4\epsilon \\ D(K, \gamma, \epsilon) = \epsilon\gamma(-3x_0^2(K) - 4x_0(K) - 4) = Det(J_0) \text{ (déterminant de } J_0) \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de $B(K, \gamma, \epsilon)$, $C(K, \gamma, \epsilon)$ et $D(K, \gamma, \epsilon)$ données par le système (V) dans l'équation (4.16), on obtient :

$$\begin{aligned} & (-3x_0^2(K) + 6x_0(K) - (\gamma + \epsilon_c)) \\ & ((-3x_0^2(K) + 6x_0(K))(\gamma + \epsilon_c) - (\epsilon_c\gamma) - 10\gamma x_0(K) - 4\epsilon_c) \\ & = -\epsilon_c\gamma(-3x_0^2(K) - 4x_0(K) - 4) \end{aligned} \quad (4.17)$$

On pose : $-3x_0^2(K) + 6x_0(K) = a(K)$.

L'équation (4.17) du second degré en ϵ_c , s'écrit alors sous la forme :

$$\epsilon_c^2 [4 - (a(K) - \gamma)] + \epsilon_c [(a(K) - \gamma)^2 - 4a(K)] + \gamma (a(K) - \gamma) (a(K) - 10x_0(K)) = 0 \quad (4.18)$$

Nous allons déterminer les valeurs des paramètres K et γ pour lesquelles l'équation (4.18) admet des solutions.

Discussion du signe du discriminant $\Delta(K, \gamma)$

$$\begin{aligned} \Delta(K, \gamma) &= [(a(K) - \gamma)^2 - 4a(K)]^2 \\ &+ 4\gamma [(a(K) - \gamma - 4) (a(K) - \gamma) (a(K) - 10x_0(K))] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le premier terme $[(a(K) - \gamma)^2 - 4a(K)]^2$ est positif pour tout γ et pour tout K .

Pour avoir le discriminant positif, il suffit de chercher pour quelles valeurs des paramètres γ et K , son deuxième terme est positif.

- **Etude du signe de $a(K) - \gamma - 4$**

$a(K) - \gamma - 4$ est négative pour tout γ et tout K .

Donc, il suffit que le produit $(a(K) - \gamma) (a(K) - 10x_0(K))$ soit négatif, donc que ces deux facteurs soient de signes opposés.

- **Etude du signe de $a(K) - \gamma$**

On a : $a(K) - \gamma = -3x_0^2(K) + 6x_0(K) - \gamma$.

$a(K) - \gamma$ est négative pour tout $\gamma \geq 3$ et pour tout K .

$a(K) - \gamma = 0$ admet deux racines réelles positives $x'_0(\gamma)$ et $x''_0(\gamma)$ pour $\gamma < 3$.

$$(R) \begin{cases} x'_0(\gamma) = 1 + \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} > 1 \\ x''_0(\gamma) = 1 - \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} < 1 \end{cases}$$

$a(K) - \gamma$ est positive pour K qui vérifie : $x''_0(\gamma) \leq x_0(K) \leq x'_0(\gamma)$,

et $a(K) - \gamma$ négative pour K qui vérifie : $x_0(K) \leq x''_0(\gamma)$ et $x_0(K) \geq x'_0(\gamma)$.

- **Etude du signe de $a(K) - 10 x_0(K)$**

On détermine graphiquement le signe de $a(K) - 10 x_0(K)$

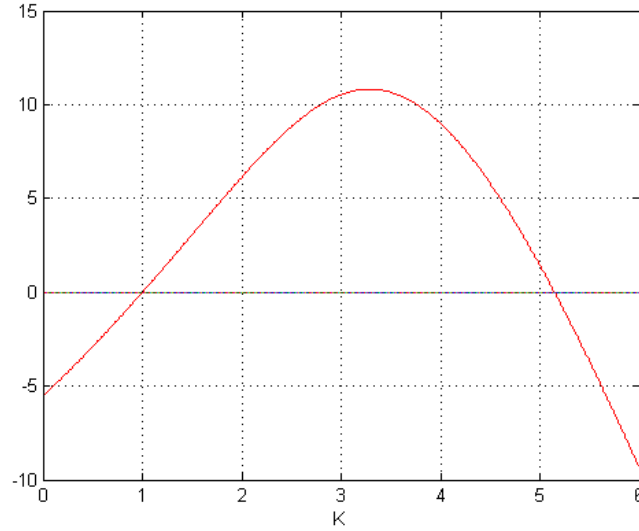


FIGURE 4.1: La trajectoire de la fonction $a(K) - 10 x_0(K)$

$a(K) - 10 x_0(K)$ est positive pour $1 \leq K \leq 5.148$ et pour tout γ , et négative pour tout γ et pour $K \in]-\infty, 1[\cup]5.148, +\infty[$.

En résumé, la première condition de la bifurcation de Hopf est vérifiée pour :

$$1 \leq K \leq 5.148 \text{ et pour tout } \gamma$$

ou

$$\begin{cases} \gamma < 3 \\ K \in]-\infty, 1[\\ 1 - \frac{\sqrt{3}(3-\gamma)}{3} \leq x_0(K) \leq 1 + \frac{\sqrt{3}(3-\gamma)}{3}, \end{cases}$$

L'équation (4.18) admet donc deux racines réelles :

$$(X) \begin{cases} \epsilon_{c_1}(K, \gamma) = \frac{-((a(K) - \gamma)^2 - 4a(K)) - \sqrt{\Delta(K, \gamma)}}{2(4 - (a(K) - \gamma))} \\ \epsilon_{c_2}(K, \gamma) = \frac{-((a(K) - \gamma)^2 - 4a(K)) + \sqrt{\Delta(K, \gamma)}}{2(4 - (a(K) - \gamma))} \end{cases}$$

Etude du signe des racines $\epsilon_{c_1}(K, \gamma)$ et $\epsilon_{c_2}(K, \gamma)$:

On a déjà vu le signe de la fonction $4 - (a(K) - \gamma)$, donc le dénominateur des racines ϵ_{c_1} et ϵ_{c_2} est positif pour tout K et pour tout γ .

Quant au numérateur : le discriminant $\Delta(K, \gamma)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta(K, \gamma) &= ((a(K) - \gamma)^2 - 4a(K))^2 + 4\gamma((a(K) - \gamma) - 4)(a(K) - \gamma)(a(K) - 10x_0(K)), \end{aligned}$$

Nous avons vu que sous les conditions imposées ci-dessus pour γ et K , le produit

$$((a(K) - \gamma) - 4)(a(K) - \gamma)(a(K) - 10x_0(K))$$

est positif, et donc $\epsilon_{c_1}(K, \gamma) < 0$ et $\epsilon_{c_2}(K, \gamma) > 0$

Conclusion

Comme ϵ est une échelle de temps, la valeur $\epsilon_{c_2}(K, \gamma)$ est la racine à considérer pour les paramètres K et γ qui vérifient les systèmes a) ou b) ou c).

On notera $\epsilon_{c_2} = \epsilon_c$ pour le paramètre de bifurcation.

2. La deuxième condition du théorème $\frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \neq 0$

On dérive par rapport au paramètre ϵ le polynôme caractéristique associé à la matrice jacobienne J_0 :

$$|J_0 - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 B(K, \gamma, \epsilon) + \lambda C(K, \gamma, \epsilon) + D(K, \gamma, \epsilon) = 0$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} & (-3\lambda^2 + 2\lambda B(K, \gamma, \epsilon_c) + C(K, \gamma, \epsilon_c)) \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \\ & \lambda^2 \frac{\partial B}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + \lambda \frac{\partial C}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + \frac{\partial D}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Comme chacune des valeurs propres s'écrit :

$$\lambda_{1,2}(K, \gamma, \epsilon) = Re(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon) \pm i Im(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon),$$

$\forall K, \forall \gamma$ et $\forall \epsilon$, et en dérivant cette équation par rapport à ϵ , on obtient :

$$\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = \frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \pm i \frac{\partial Im(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon}|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \quad (4.21)$$

En plus, la première condition du théorème de **HOPF** a donné :

$$\begin{cases} Re(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon_c) = 0 \\ (Im)^2(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon_c) = -C(K, \gamma, \epsilon_c) \end{cases}$$

L'équation (4.20) s'écrira donc sous la forme :

$$\begin{aligned}
& + 2 i B(K, \gamma, \epsilon_c) \left(\frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + i \frac{\partial Im(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \right) \\
& - C(K, \gamma, \epsilon_c) \frac{\partial B}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \\
& - 2 C(K, \gamma, \epsilon_c) \left(\frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + i \frac{\partial Im(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \right) \\
& + i Im(\lambda_{1,2}) \frac{\partial C}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + \frac{\partial D}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Après séparation des parties réelle et imaginaire, l'équation (4.22) s'écrira comme un système de deux équations :

$$(XI) \left\{ \begin{array}{l}
- 2 C \frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) - 2 B Im(\lambda_{1,2}) \frac{\partial Im(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \\
- C \frac{\partial B}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + \frac{\partial D}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = 0 \\
- 2 C \frac{\partial Im(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + 2 Im(\lambda_{1,2}) B(K, \gamma, \epsilon_c) \frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \\
+ Im(\lambda_{1,2}) \frac{\partial C}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = 0
\end{array} \right.$$

On divise la deuxième équation du système (XI) par $Im(\lambda_{1,2}) (K, \gamma, \epsilon_c)$, et on obtient l'égalité :

$$- 2 Im(\lambda_{1,2}) \frac{\partial Im(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = + 2 B(K, \gamma, \epsilon_c) \frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + \frac{\partial C}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c)$$

En remplaçant l'expression de $\left(-2 \operatorname{Im}(\lambda_{1,2}) \frac{\partial \operatorname{Im}(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) \right)$ dans la première équation du système (XI), celle-ci s'écrira :

$$\begin{aligned} & -2 C \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + B \left(2 B \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} + \frac{\partial C}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} \right) (K, \gamma, \epsilon_c) \\ & - C \frac{\partial B}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + \frac{\partial D}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

qui donne :

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) = \frac{\frac{\partial D}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) - C \frac{\partial B}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c) + B \frac{\partial C}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon} (K, \gamma, \epsilon_c)}{2 C(K, \gamma, \epsilon_c) - 2 B^2(K, \gamma, \epsilon_c)} \quad (4.24)$$

Le dénominateur de cette équation est négatif, en effet :

$$2 C(K, \gamma, \epsilon) - 2 B^2(K, \gamma, \epsilon_c) = -2 \left((\operatorname{Im})^2(\lambda_{1,2}) + B^2 \right) (K, \gamma, \epsilon_c) \quad (4.25)$$

$$\text{car } (\operatorname{Im})^2(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon_c) = -C(K, \gamma, \epsilon_c)$$

Il suffit de voir le signe du numérateur de l'équation (4.24)

En remplaçant les expressions B , C et D par leur expression en fonction des paramètres K , γ et ϵ_c , le numérateur de l'équation (4.24) s'écrira :

$$(a(K) - \gamma)^2 - 2 a(K) (2 + \epsilon_c) + 2 \epsilon_c (4 + \gamma) \quad (4.26)$$

On a obtenu graphiquement le signe de $a(K)$:

La fonction $a(K) \leq 0 \quad \forall \gamma$ et pour K , tel que $1 \leq K$ ou $K \leq -23$

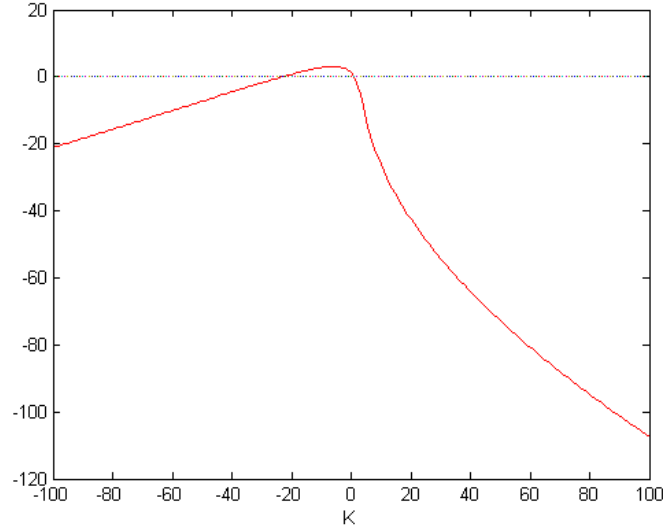


FIGURE 4.2: La trajectoire de la fonction $a(K) = 6x_0(K) - 3x_0^2(K)$.

et donc la quantité $(a(K) - \gamma)^2 - 2a(K)(2 + \epsilon_c) + 2\epsilon_c(4 + \gamma)$ est positive pour tout γ et pour K vérifiant $1 \leq K$ ou $K \leq -23$.

$$\frac{\partial \text{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon}(K, \gamma, \epsilon_c) < 0 \quad \forall \gamma \text{ et pour } K, \text{ tel que } 1 \leq K \text{ ou } K \leq -23. \quad (4.27)$$

3. La troisième condition du théorème : $\lambda_3(K, \gamma, \epsilon_c) < 0$

$$\lambda_3(K, \gamma, \epsilon_c) = a(K) - (\gamma + \epsilon_c) \quad (4.28)$$

Il suffit que l'expression $a(K)$ soit négative pour que $\lambda_3(K, \gamma, \epsilon_c)$ soit négative.

De ce qui précède, nous aboutissons au résultat suivant :

Proposition 2. *Si les paramètres K et γ vérifient l'une des conditions données par :*

$$1 \leq K \leq 5.148 \quad \text{et pour tout } \gamma$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma < 3 \\ K \in]-\infty, 1[\\ 1 - \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} \leq x_0(K) \leq 1 + \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3}, \end{array} \right.$$

Alors les conditions du théorème de Hopf sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad Re(\lambda_{1,2})(K, \gamma, \epsilon_c) = 0 \\ 2) \quad \frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \epsilon}(K, \gamma, \epsilon_c) \neq 0 \\ 3) \quad \lambda_3(K, \gamma, \epsilon_c) < 0, \end{array} \right.$$

et il existe un réel ϵ_c tel que $(0, \epsilon_c)$ est un point de bifurcation de Hopf.

Dans la suite, nous représentons trois types de solutions obtenues par la bifurcation de Hopf.

La première solution est obtenue pour $\gamma = 1.1$, $K = 5.1$, et est représentée par la figure ci-dessous. Les trajectoires $x(t)$ sont les solutions périodiques de type 'bursting'.

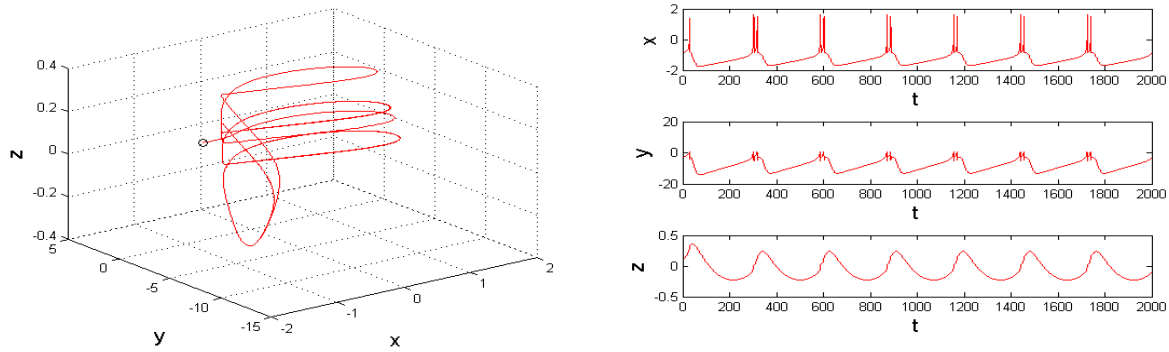


FIGURE 4.3: La première solution de type 'bursting' ($\epsilon = 0.003$)

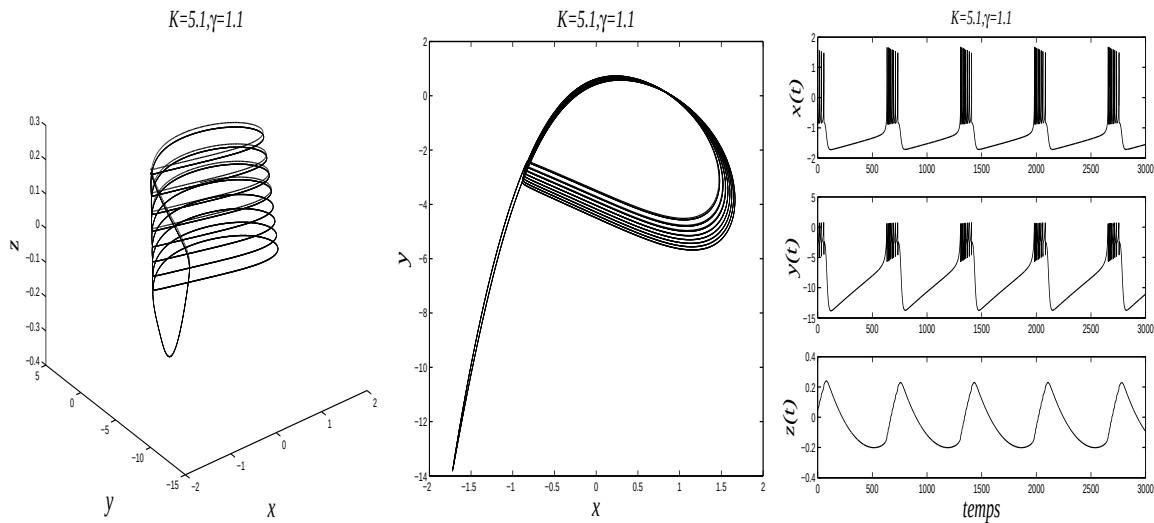


FIGURE 4.4: La première solution de type 'bursting' ($\epsilon = 0.001$)

Sous les conditions citées dans la proposition, la trajectoire du système est représentée par des oscillations ou bursts intercalés par des moments d'équilibre avec l'évolution du paramètre de bifurcation ϵ .

La deuxième solution est représentée par la figure ci-dessous, obtenue pour $\gamma = 0.5$ et $K = 5.1$. Cette solutions est périodiques de type 'spiking'.

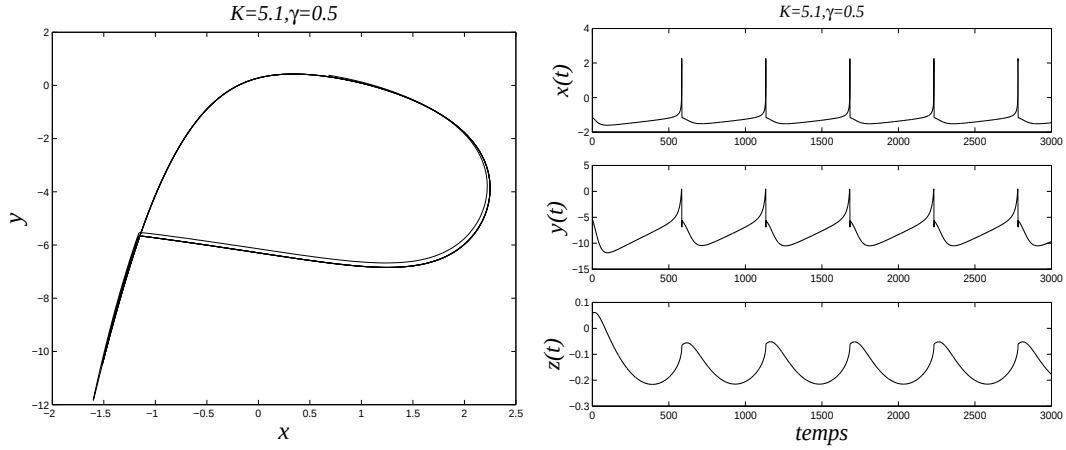


FIGURE 4.5: La deuxième solution de type 'spiking' ($\epsilon = 0.001$)

Chapitre 5

Dynamique rapide

Le système de Hindmarsh-Rose-3D est :

$$(I_0) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 - z \\ \dot{y} = \gamma(1 - 5x^2 - y) \\ \dot{z} = \epsilon(4x + K - z) \end{cases}$$

Ce système est un système lent-rapide avec deux variables rapides x et y et une variable lente, la variable z .

En annulant la troisième équation du système I_0 , on obtient le système rapide :

$$(I) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 - z_0 \\ \dot{y} = \gamma(1 - 5x^2 - y) \\ \dot{z} = 0 \Rightarrow z = z_0 \text{ (} z_0 \text{ une constante)} \end{cases}$$

5.1 Analyse locale :

Dans ce paragraphe, on cherche à étudier les différentes bifurcations du système rapide, c'est à dire du système (I) dans lequel on considère z comme paramètre.

5.1.1 Recherche des points d'équilibre.

En annulant le champ relatif au système (I) , on obtient une équation du troisième degré en x , où z_0 est considéré comme un paramètre :

$$x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0 \tag{5.1}$$

*Le cas $z_0 = 0$, correspondant au plan xoy , a été étudié dans le chapitre Modèle de Hindmarsh-Rose-2D, où l'équation (5.1) s'écrit :

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0, \quad (5.2)$$

et les points d'équilibre du système (I) sont les points A , B et C .

Pour z_0 quelconque

Il s'agit de trouver les racines de l'équation :

$$x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0$$

On pose : $Z = z_0 + \frac{5}{27}$ et $Z' = z_0 - 1$.

Le tableau de variations de la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + z_0 - 1$ est donné par :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f						

- **Pour $z_0 + \frac{5}{27} = 0$** , dans ce cas $z_0 - 1 = -\frac{32}{27}$, l'équation $x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0$ admet trois racines réelles dont une est double. Elles sont données par :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2}{3} \\ x_1 = x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

- **Pour $z_0 - 1 = 0$** , l'équation : $x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0$ s'écrit : $x^3 + 2x^2 = 0$, et admet trois racines réelles dont une est double. Elles sont données par :

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

- **Pour** $z_0 \in]-\frac{5}{27}, 1[$, l'équation $x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0$ admet trois racines réelles, données par la méthode de Cardan.

$$\begin{cases} x_0(z_0) = u + \bar{u} - \frac{2}{3} \\ x_1(z_0) = j u + \overline{j u} - \frac{2}{3} \\ x_2(z_0) = j^2 u + \overline{j^2 u} - \frac{2}{3} \end{cases}$$

où $u = \sqrt[3]{\frac{(\frac{11}{27} - z_0) + i \sqrt{|\Delta(z_0)|}}{2}}$, $\Delta(z_0) = z_0^2 - \frac{22}{27} z_0 - \frac{5}{27}$ et $j = e^{i \left(\frac{2\pi}{3} \right)}$

Les trois racines x_0 , x_1 et x_2 sont localisées respectivement dans les intervalles $[-2, -\frac{4}{3}]$, $[-\frac{4}{3}, 0]$ et $[0, \frac{2}{3}]$.

Dans la figure 1, nous représentons la localisation des trois racines dans le cas où $z_0 = -\frac{4}{27}$.

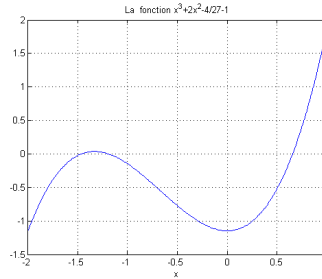


FIGURE 5.1: La fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + z_0 - 1$ pour $z_0 = -\frac{4}{27} \in]-\frac{5}{27}, 1[$

- **Pour** $z_0 \in]1, \infty[$, dans ce cas $z_0 > -\frac{5}{27}$ et l'équation $x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0$ possède une solution réelle négative (voir tableau de variations de la fonction f), donnée par la méthode de Cardan :

$$x_0(z_0) = \sqrt[3]{\frac{(\frac{11}{27} - z_0) + \sqrt{\Delta(z_0)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{(\frac{11}{27} - z_0) - \sqrt{\Delta(z_0)}}{2}} - \frac{2}{3}$$

où : $\Delta(z_0) = z_0^2 - \frac{22}{27} z_0 - \frac{5}{27}$

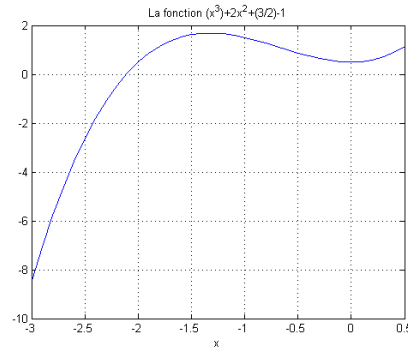


FIGURE 5.2: La fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + z_0 - 1$, pour $z_0 = \frac{3}{2} \in]1, \infty[$

- **Pour** $z_0 \in]-\infty, -\frac{5}{27}[$, dans ce cas $z_0 < 1$, l'équation $x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0$ admet une racine positive (voir tableau de variations de la fonction f), donnée par la méthode de Cardan :

$$x_0(z_0) = \sqrt[3]{\frac{(\frac{11}{27} - z_0) + \sqrt{\Delta(z_0)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{(\frac{11}{27} - z_0) - \sqrt{\Delta(z_0)}}{2}} - \frac{2}{3}$$

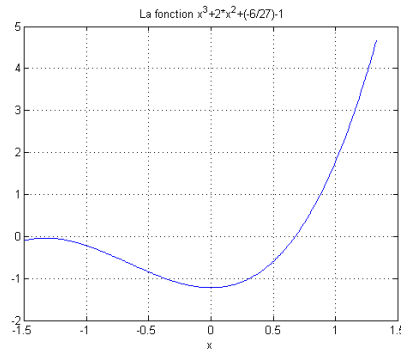


FIGURE 5.3: La fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + z_0 - 1 = 0$ pour $z_0 = -\frac{6}{27} \in]-\infty, -\frac{5}{27}[$

5.1.2 Nature des points d'équilibre.

On notera $\overline{X}(x)$ un point d'équilibre du système (I) de première coordonnée x , pouvant être un des points x_0 , x_1 , ou x_2 .

Afin de déterminer la nature du points d'équilibre $\overline{X}(x)$, on calcule la trace et le déterminant du linéarisé de ce système aux points d'équilibre.

On pose : $a = 3x(2 - x)$.

La matrice jacobienne au point d'équilibre $\overline{X}(x)$ est donné par :

$$J_0 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -10\gamma x & -\gamma \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique relative au polynôme caractéristique de J_0 est donnée par :

$$|J_0 - \lambda I| = \lambda^2 + (\gamma - a)\lambda + \gamma(10x - a) = 0, \quad (5.3)$$

dont le discriminant $\Delta(\gamma)$ est donné par :

$$\Delta(\gamma) = \gamma^2 + 2\gamma(a - 20x) + a^2, \quad (5.4)$$

Le discriminant Δ' de $\Delta(\gamma)$ est donné par :

$$\Delta' = 40x^2(3x + 4), \quad (5.5)$$

On pose :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= a - \gamma & \text{la trace de } J_0 \text{ au point } x_0 \\ Det(J_0) &= \gamma(10x - a) & \text{le déterminant de } J_0 \text{ au point } x_0. \end{cases}$$

- **Pour** $z_0 = -\frac{5}{27}$, le système admet deux points d'équilibre $\bar{X}(x)$, le premier de première coordonnée $x_0 = \frac{2}{3}$ et l'autre $x_1 = -\frac{4}{3}$.

On pose $\gamma_R = \frac{8}{3}$

1. **Au point** $x_0 = \frac{2}{3}$,

$$\begin{cases} \text{Tr}(J_0) &= \gamma_R - \gamma \\ \text{Det}(J_0) &= 4\gamma > 0. \end{cases}$$

Lorsque le discriminant de $\Delta(\gamma)$ du polynôme caractéristique est positif, les deux racines réelles notées γ_1 et γ_2 sont :

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \frac{2}{3} (16 - 4\sqrt{15}) \approx 0.3387 \\ \gamma_2 &= \frac{2}{3} (16 + 4\sqrt{15}) \approx 20.9946 \end{cases}$$

Le signe du discriminant $\Delta(\gamma)$ du polynôme caractéristique déterminera la nature du point $\bar{X}(\frac{2}{3})$ ainsi que sa stabilité :

γ	0	γ_1	γ_R	γ_2	$+\infty$
$\bar{X}(\frac{2}{3})$ est un	noeud instable	foyer instable	foyer stable	noeud stable	

- Pour $\gamma \in]-\infty, \gamma_1[$, $\Delta(\gamma) > 0$ et $\text{Tr}(J_0) > 0$ car $\gamma < \gamma_R$ donc le point $\bar{X}(\frac{2}{3})$ est un **noeud** instable .
- Pour $\gamma \in]\gamma_1, \gamma_R[$, $\Delta(\gamma) < 0$ et $\text{Tr}(J_0) > 0$ car $\gamma < \gamma_R$ donc le point $\bar{X}(\frac{2}{3})$ est un **foyer** instable .

- pour $\gamma \in]\gamma_R, \gamma_2], \Delta(\gamma) < 0$ et $Tr(J_0) < 0$ car $\gamma > \gamma_R$ donc le point $\bar{X}(\frac{2}{3})$ est un foyer stable .
- Pour $\gamma \in]\gamma_2, \infty[, \Delta(\gamma) > 0$ et $Tr(J_0) < 0$ car $\gamma > \gamma_R$ donc le point $\bar{X}(\frac{2}{3})$ est un noeud stable .

En plus, $\bar{X}(\frac{2}{3})$ est un centre pour $\gamma = \gamma_R$ dont les valeurs propres sont :
 $\lambda_{1,2} = \pm i 4\sqrt{\frac{2}{3}}$, donc ici possibilité de bifurcation de Hopf.

2. **Au point** $x_1 = -\frac{4}{3}$,

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= -\frac{40}{3} - \gamma \\ Det(J_0) &= 0 \end{cases}$$

Comme $Det(J_0) = 0$ implique qu'au moins une des valeurs propres est nulle, soit λ_1 .

$\bar{X}(-\frac{4}{3})$ est donc un point non hyperbolique.

Comme $Tr(J_0) = -\frac{40}{3} - \gamma = \lambda_1 + \lambda_2$ et donc $\lambda_2 = -(\frac{40}{3} + \gamma)$

- **Pour** $z_0 - 1 = 0$, le système admet deux points d'équilibre $\bar{X}(x)$, le premier de première coordonnée $x_0 = 0$ et l'autre $x_1 = -2$.

1. **Au point** $x_0 = 0$,

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= -\gamma \\ Det(J_0) &= 0 \end{cases}$$

Comme $Det(J_0) = 0$ implique qu'au moins une des valeurs propres est nulle, soit λ_1 .

Aussi, $Tr(J_0) = -\gamma = \lambda_1 + \lambda_2$ et donc $\lambda_2 = -\gamma$

$\overline{X}(0)$ est donc un point non hyperbolique.

2. **Au point** $x_1 = -2$, on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= -24 - \gamma < 0 \\ Det(J_0) &= 4\gamma > 0 \end{cases}$$

Le discriminant $\Delta(\gamma)$ est positif pour tout γ , donc le point d'équilibre $\overline{X}(-2)$ est un noeud stable ($Tr(J_0) < 0$).

– **Pour** $z_0 \in]-\frac{5}{27}, 1[$, le système admet trois points d'équilibre $\overline{X}(x)$, le premier de première coordonnée x_0 le deuxième x_1 et le troisième x_2 .

1. **Au point** $-2 < x_0 < -\frac{4}{3}$, on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= 6x_0 - 3x_0^2 - \gamma < 0 \\ Det(J_0) &= \gamma x_0(4 + 3x_0) > 0 \end{cases} \quad \forall \gamma \text{ car } x_0 \text{ est négatif}$$

Le point d'équilibre $\overline{X}(x_0)$ est donc un foyer ou noeud stable.

En plus, le discriminant $\Delta(\gamma)$ du polynôme caractéristique est positif car son discriminant Δ' est négatif, le point d'équilibre $\overline{X}(x_0)$ est donc un noeud stable.

2. **Au point** $-\frac{4}{3} < x_1 < 0$, on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= 6x_1 - 3x_1^2 - \gamma < 0 \\ Det(J_0) &= \gamma x_1(4 + 3x_1) < 0 \end{cases} \quad \forall \gamma \text{ car } x_1 \text{ est négatif}$$

Le point d'équilibre $\overline{X}(x_1)$ est un col.

3. **Au point** $0 < x_2 < \frac{2}{3}$

1. Pour $\gamma = 3$, on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= -3(x_2 - 1)^2 < 0 \\ Det(J_0) &= 3x_2(4 - 3x_2) > 0 \end{cases}$$

Le point d'équilibre $\bar{X}(x_2)$ est un noeud ou foyer stable.

2. Pour $\gamma > 3$, on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= 6x_2 - 3x_2^2 - \gamma < 0, \\ Det(J_0) &= \gamma x_2(4 - 3x_2) > 0 \end{cases}$$

Le point d'équilibre $\bar{X}(x_2)$ est un foyer ou noeud stable.

3. Pour $\gamma < 3$,

on pose $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ les racines de $Tr(J_0)$ au point x_2

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 &= 1 - \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} > 0 \\ \tilde{x}_2 &= 1 + \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= -3(x_2 - \tilde{x}_2)(x_2 - \tilde{x}_1) \\ Det(J_0) &= \gamma x_2(4 - 3x_2) > 0 \end{cases}$$

$Det(J_0)$ est positif, donc le point d'équilibre $\bar{X}(x_2)$ est un noeud ou foyer.

On a $\tilde{x}_2 > x_2 \quad \forall \gamma$ car $\tilde{x}_2 > 1$, donc $Tr(J_0)$ au point x_2 est du même signe que $(x_2 - \tilde{x}_1)$.

Comme $Tr(J_0) = 3x_2(2 - x_2) - \gamma$, on a l'équivalence suivante :

$$\tilde{x}_1 < x_2 \Leftrightarrow \gamma < 3x_2(2 - x_2)$$

On pose $\gamma_c = 3x_2(2 - x_2)$.

On peut facilement montrer que $0 < \gamma_c < 2.66$ pour $0 < x_2 < \frac{2}{3}$

Donc pour $\gamma < \gamma_c$, $x_2 > \tilde{x}_1$ et donc $Tr(J_0) > 0$ et le point d'équilibre $\bar{X}(x_2)$ est un noeud ou foyer instable.

Pour $\gamma_c < \gamma < 3$, $x_2 < \tilde{x}_1$ et donc $Tr(J_0) < 0$, et le point d'équilibre $\bar{X}(x_2)$ est un noeud ou foyer stable.

En plus, le discriminant $\Delta(\gamma)$ du polynôme caractéristique est donné par :

$$\Delta(\gamma) = \gamma^2 + 2\gamma(a - 20x_2) + a^2$$

son discriminant Δ' est donné par :

$$\Delta' = 40x_2^2(3x_2 + 4) > 0,$$

donc les deux racines γ de $\Delta(\gamma)$ sont données par :

$$\begin{cases} \gamma_1 = x_2 \left(14 + 3x_2 + 2\sqrt{(30x_2 + 40)} \right) \\ \gamma_2 = x_2 \left(14 + 3x_2 - 2\sqrt{(30x_2 + 40)} \right) \end{cases}$$

Graphiquement on observe $0 < \gamma_1 < 21$ et $0 < \gamma_2 < 0.35$ et on a vérifié que $\gamma_2 - \gamma_c < 0$, et $\gamma_1 - \gamma_c > 0$.

Regardons donc le signe de $\Delta(\gamma)$ pour affirmer la nature du point d'équilibre $\bar{X}(x_2)$,

En effet :

γ	0	γ_2	γ_c	γ_1	$+\infty$
$\overline{X}(x)$ est un	noeud instable	foyer instable	foyer stable	noeud stable	

Remarque 5. Si $\gamma = \gamma_c$ alors $x_2 = \tilde{x}_1$ et donc $Tr(J_0) = 0$

En plus, $\overline{X}(x_2)$ est un centre pour $\gamma = \gamma_c$ dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\gamma_c (3x_2^2 + 4x_2)},$$

donc ici possibilité de bifurcation de Hopf.

- **Pour** $z_0 \in]1, +\infty[$, le système admet un point d'équilibre $\overline{X}(x)$, de première coordonnée négative $x < -2$ (voir tableau de variations).

Au point x , on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= 6x - 3x^2 - \gamma < 0 \quad (\text{car } x < 0) \\ Det(J_0) &= \gamma x (4 + 3x) > 0 \end{cases}$$

Le point d'équilibre $\overline{X}(x)$ est un foyer ou noeud asymptotiquement stable.

Le discriminant $\Delta(\gamma)$ du polynôme caractéristique $|J_0 - \lambda I|$ est positif car son discriminant Δ' est négatif, donc le point d'équilibre $\overline{X}(x)$ est un noeud stable.

- **Pour** $z_0 \in]-\infty, -\frac{5}{27}[$, le système admet un point d'équilibre $\overline{X}(x)$, de première coordonnée positive $x, x \in]\frac{2}{3}, +\infty[$

Au point x , on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= 6x - 3x^2 - \gamma \\ Det(J_0) &= \gamma x (4 + 3x) > 0 \end{cases}$$

Le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un foyer ou noeud.

1. Pour $\gamma = 3$, on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= -3 (x - 1)^2 < 0 \\ Det(J_0) &= 3 x(4 + 3x) > 0 \end{cases}$$

Le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un noeud ou foyer asymptotiquement stable.

2. Pour $\gamma > 3$, on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= 6x - 3x^2 - \gamma < 0, \\ Det(J_0) &= \gamma x(4 + 3x) > 0 \end{cases}$$

Le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un foyer ou noeud asymptotiquement stable.

3. Pour $\gamma < 3$,

On pose $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ les racines de $Tr(J_0)$:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 &= 1 - \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} \\ \tilde{x}_2 &= 1 + \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} \end{cases}$$

telles que :

$$\begin{cases} Tr(J_0) &= -3 (x - \tilde{x}_2) (x - \tilde{x}_1) \\ Det(J_0) &= \gamma x(4 + 3x) > 0 \end{cases}$$

$Det(J_0)$ est positif, donc le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un noeud ou foyer.

On a l'équivalence suivante :

$$(Tr(J_0) = 3x(2-x) - \gamma) < 0 \Leftrightarrow \gamma > 3x(2-x),$$

1er cas : Si $3x(2-x) < 0$, i.e $x > 2$, alors on a :

$$\begin{cases} Tr(J_0) < 0 \\ Det(J_0) > 0 \end{cases}$$

donc le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un noeud ou foyer stable.

2ème cas : Si $3x(2-x) > 0$, i.e $x < 2$, alors $x \in]\frac{2}{3}, 2[$

Comme $Tr(J_0) = -3(x - \tilde{x}_2)(x - \tilde{x}_1)$,

1er sous-cas : $\tilde{x}_2 < 2$, $\Leftrightarrow 1 + \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} < 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} < 1 \Leftrightarrow 3(3-\gamma) < 9$

$\Leftrightarrow (3-\gamma) < 3 \Leftrightarrow \gamma > 0$ est toujours vrai, et on conclut que $\tilde{x}_2 \in]\frac{2}{3}, 2[$

2ème sous-cas : $\tilde{x}_1 > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} \Leftrightarrow 3(3-\gamma) < 1 \Leftrightarrow 3-\gamma < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \gamma > \frac{8}{3}$

Si $\gamma < \frac{8}{3}$ alors $\tilde{x}_1 \notin]\frac{2}{3}, 2[$ et donc le signe de $Tr(J_0)$ est le signe de $-3(x - \tilde{x}_2)$:

$-3(x - \tilde{x}_2) < 0$ si $\tilde{x}_2 < x < 2$, et le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un noeud ou foyer stable.

$-3(x - \tilde{x}_2) > 0$ si $\frac{2}{3} < x < \tilde{x}_2$ le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un noeud ou foyer instable.

$Tr(J_0) = 0$ pour $x = \tilde{x}_2 = 1 + \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3}$, ici, possibilité de bifurcation de Hopf pour :

$$\begin{cases} \gamma < \frac{8}{3} \\ x = 1 + \frac{\sqrt{3(3-\gamma)}}{3} \end{cases}$$

Si $\frac{8}{3} < \gamma < 3$

$Tr(J_0) = -3(x - \tilde{x}_1)(x - \tilde{x}_2) < 0$ pour $x \in]\frac{2}{3}, \tilde{x}_1[\cup]\tilde{x}_2, 2[$ et le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un noeud ou foyer stable.

$Tr(J_0) = -3(x - \tilde{x}_1)(x - \tilde{x}_2) > 0$ pour $x \in]\tilde{x}_1, \tilde{x}_2[$ et le point d'équilibre $\bar{X}(x)$ est un noeud ou foyer instable.

$Tr(J_0) = 0$ pour

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{3} < \gamma < 3 \\ x = \tilde{x}_1 \end{array} \right.$$

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{3} < \gamma < 3 \\ x = \tilde{x}_2 \end{array} \right.$$

donc pour les deux cas, possibilité de bifurcation de Hopf.

5.2 Etude des bifurcations

Existence d'une orbite périodique.

On pose $f = (f_1, f_2)$ la fonction qui représente le système (I) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 - z_0 \\ f_2 = \dot{y} = \gamma(1 - 5x^2 - y) \end{array} \right.$$

On a :

$$divf = Tr(J_0) = -3x^2 + 6x - \gamma \quad (5.6)$$

Comme dans le cas $z_0 = 0$, le critère de Bendixson¹ affirme la possibilité d'existence d'une orbite périodique pour $\gamma < 3$.

1. Chapitre : Le modèle de Hindmarsh-Rose-2D

5.2.1 Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf

On applique le changement de variable : $(x - x_2, y - y_2)$, et on obtient alors le système (I_1) équivalent au système (I) , pour lequel l'origine est le point d'équilibre.

$$(I_1) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2(1 - x_2) - 3x_2x(x_2 - 2) \\ \dot{y} = -5\gamma(x^2 + x_2^2 + 2x_2x) - \gamma y \end{cases}$$

On rappelle que :

1. Pour $z_0 \in]-\frac{5}{27}, 1[$, le point d'équilibre (foyer) $\bar{X}(x)$ change de comportement pour la valeur de $\gamma = \gamma_c = 3x(2 - x)$ avec $0 < x < \frac{2}{3}$

2. Pour $z_0 = -\frac{5}{27}$, le point d'équilibre (foyer) $\bar{X}(x)$ pour $x = \frac{2}{3}$ change de stabilité pour la valeur de $\gamma = \gamma_R = \frac{8}{3}$.

Pour $z_0 \in]-\frac{5}{27}, 1[$ et pour la valeur de $\gamma \neq \gamma_c$, le point d'équilibre est un foyer dont les deux valeurs propres complexes conjuguées sont notées : $\lambda(\gamma) = Re(\lambda(\gamma)) \pm i Im(\lambda(\gamma))$, et donc la trace $Tr(J_0)$ s'écrit :

$$Tr(J_0) = \lambda(\gamma) + \overline{\lambda(\gamma)}, \text{ et donc } Tr(J_0) = 2 Re(\lambda(\gamma)).$$

Sachant que pour $\gamma = \gamma_c$, $Tr(J_0) = 0$, donc $Re(\lambda(\gamma_c)) = 0$.

En plus, on dérive par rapport au paramètre γ le polynôme caractéristique associé à la matrice jacobienne lequel est donné par :

$$|J_0 - \lambda I| = \lambda^2 + (\gamma - a)\lambda + \gamma x_2(4 + 3x_2) = 0, \text{ pour obtenir :}$$

$$2\lambda(\gamma) \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} + (\gamma - a) \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} + \lambda(\gamma) + x_2(4 + 3x_2) = 0 \quad (5.7)$$

Comme chacune des valeurs propres s'écrit : $\lambda(\gamma) = Re(\lambda(\gamma)) \pm i Im(\lambda(\gamma))$, et en dérivant cette équation par rapport à γ celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} = \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} \pm i \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma},$$

L'équation (5.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} & Re(\lambda(\gamma)) + i Im(\lambda(\gamma)) + 2 Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + 2i Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + 2i Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} \\ & - 2Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - a) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + i(\gamma - a) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + x_2(4 + 3x_2) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Après séparation des parties réelle et imaginaire, l'équation (5.8) s'écrira comme un système de deux équations :

$$(II) \begin{cases} Re(\lambda(\gamma)) + 2 Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} - 2Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - a) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + x_2(4 + 3x_2) = 0 \\ 2Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + 2 Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - a) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + Im(\lambda(\gamma)) = 0 \end{cases}$$

En utilisant le résultat trouvé précédemment $Re(\lambda(\gamma_c)) = 0$, le système précédent s'écrira :

$$(II) \begin{cases} - 2Im(\lambda(\gamma_c)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma_c - a) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + x_2(4 + 3x_2) = 0 \\ 2 Im(\lambda(\gamma_c)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma_c - a) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + Im(\lambda(\gamma_c)) = 0. \end{cases}$$

Rappelons que le produit des valeurs propres de J_0 n'est autre que le déterminant de celui-ci, il est donné par :

$$Det(J_0) = (Re)^2(\lambda(\gamma_c)) + (Im)^2(\lambda(\gamma_c)) = Im^2(\lambda(\gamma_c)) = \gamma_c x_2(4 + 3x_2),$$

et comme $\gamma_c = a$, alors le système (II) s'écrira :

$$(II) \begin{cases} - 2Im(\lambda(\gamma_c)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + \frac{(Im)^2(\lambda)}{\gamma_c} = 0 \\ 2 Im(\lambda(\gamma_c)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + Im(\lambda(\gamma_c)) = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation de ce système donne :

$$\frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma}(\gamma_c) = -\frac{1}{2}$$

Proposition 3. *Pour $z_0 \in]-\frac{5}{27}, 1[$, les conditions du théorème de Hopf sont vérifiées :*

$$\begin{cases} Re(\lambda_{1,2})(\gamma_c) = 0 \\ \frac{\partial Re(\lambda_{1,2})}{\partial \gamma}(\gamma_c) \neq 0 \end{cases}$$

$(0, \gamma_c)$ est un point de bifurcation de HOPF.

Pour $z_0 = -\frac{5}{27}$ et pour la valeur de $\gamma \neq \gamma_R$, le point d'équilibre est un foyer dont les deux valeurs propres complexes conjuguées sont notées : $\lambda(\gamma) = Re(\lambda(\gamma)) \pm i Im(\lambda(\gamma))$, et donc la trace $Tr(J_0)$ s'écrit :

$$Tr(J_0) = \lambda(\gamma) + \overline{\lambda(\gamma)} = 2 Re(\lambda(\gamma)).$$

Sachant que pour $\gamma = \gamma_R$, $Tr(J_0) = 0$, donc $Re(\lambda(\gamma_R)) = 0$.

En plus, on dérive par rapport au paramètre γ le polynôme caractéristique associé à la matrice jacobienne lequel est donné par :

$$|J_0 - \lambda I| = \lambda^2 + (\gamma - \gamma_R) \lambda + 4\gamma = 0, \text{ pour obtenir :}$$

$$2\lambda(\gamma) \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} + (\gamma - \gamma_R) \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} + \lambda(\gamma) + 4 = 0 \quad (5.9)$$

Comme chacune des valeurs propres s'écrit : $\lambda(\gamma) = Re(\lambda(\gamma)) \pm i Im(\lambda(\gamma))$, et en dérivant cette équation par rapport à γ celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} = \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} \pm i \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma},$$

L'équation (5.9) s'écrit :

$$Re(\lambda(\gamma)) + i Im(\lambda(\gamma)) + 2 Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + 2i Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + 2i Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma}$$

$$- 2Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - \gamma_R) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + i (\gamma - \gamma_R) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + 4 = 0. \quad (5.10)$$

Après séparation des parties réelle et imaginaire, l'équation (5.10) s'écrira comme un système de deux équations :

$$(II) \begin{cases} Re(\lambda(\gamma)) + 2 Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} - 2Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - \gamma_R) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + 4 = 0 \\ 2Re(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + 2 Im(\lambda(\gamma)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - \gamma_R) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + Im(\lambda(\gamma)) = 0 \end{cases}$$

En utilisant le résultat trouvé précédemment $Re(\lambda(\gamma_R)) = 0$, le système précédent s'écrira :

$$\begin{cases} - 2Im(\lambda(\gamma_R)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - \gamma_R) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + 4 = 0 \\ 2 Im(\lambda(\gamma_R)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + (\gamma - \gamma_R) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + Im(\lambda(\gamma_R)) = 0. \end{cases}$$

Rappelons que le produit des valeurs propres de J_0 n'est autre que le déterminant de celui-ci, il est donné par :

$$Det(J_0) = Re^2(\lambda(\gamma_R)) + Im^2(\lambda(\gamma_R)) = Im^2(\lambda(\gamma_R)) = 4 \gamma_R = \frac{32}{3},$$

le système (II) s'écrira :

$$(II) \begin{cases} - 2Im(\lambda(\gamma_R)) \frac{\partial Im(\lambda)}{\partial \gamma} + \frac{3 Im^2(\lambda)}{8} = 0 \\ 2 Im(\lambda(\gamma_R)) \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma} + Im(\lambda(\gamma_R)) = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation de ce système donne :

$$\frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \gamma}(\gamma_R) = -\frac{1}{2}$$

Proposition 4. *Pour $z_0 = -\frac{5}{27}$, les conditions du théorème de Hopf sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})(\gamma_R) = 0 \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{1,2})}{\partial \gamma}(\gamma_R) \neq 0 \end{cases}$$

$(0, \gamma_R)$ est un point de bifurcation de HOPF.

Pour $z_0 \in]-\infty, -\frac{5}{27}[$, le même raisonnement que pour les valeurs de z_0 , citées ci-dessus pour lesquelles les conditions du théorème de Hopf ont été vérifiées, on retrouve une bifurcation de Hopf pour tout $z_0 \in]-\infty, -\frac{5}{27}[$.

5.2.2 Bifurcation pli

Dans le paragraphe sur la 'Nature des points d'équilibre', nous avons trouvé que pour $z_0 = -\frac{5}{27}$ et au point $x = -\frac{4}{3}$, le point d'équilibre $\bar{X}(-\frac{4}{3})$ possède une valeur propre nulle et une autre négative.

De même pour $z_0 = 1$, au point $x = 0$ le point d'équilibre $\bar{X}(0)$ possède une valeur propre nulle et une autre négative.

D'après le théorème² de la bifurcation noeud-col en dimension 2, le système (I) est localement topologiquement équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{u} = z_0 + \sigma u^2, & \sigma = \pm 1 \\ \dot{v} = -v \end{cases}$$

qui est la forme normale de la bifurcation noeud-col.

Dans ce cas, on a une bifurcation noeud-col au point $(\bar{X}(-\frac{4}{3}), -\frac{5}{27})$ et une autre au point de bifurcation $(\bar{X}(0), 1)$.

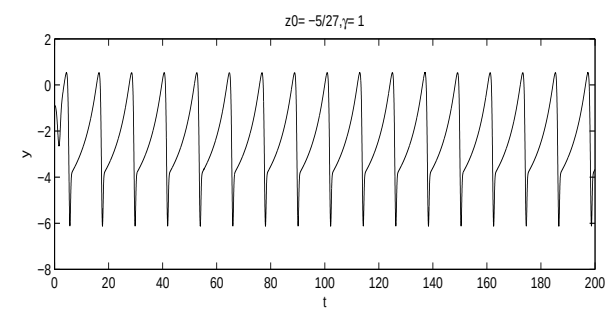
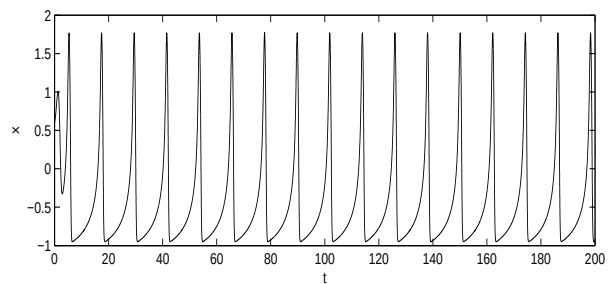
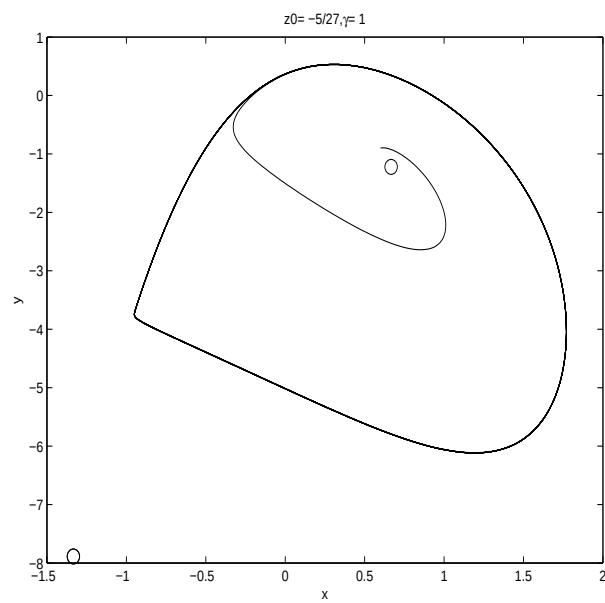
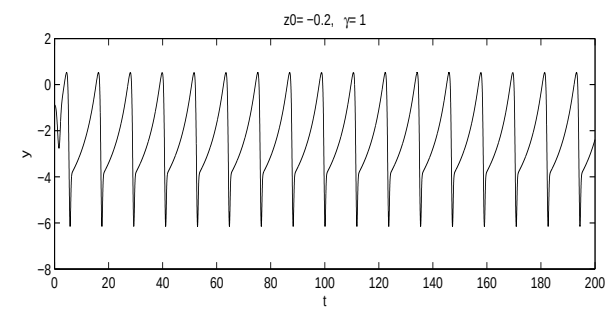
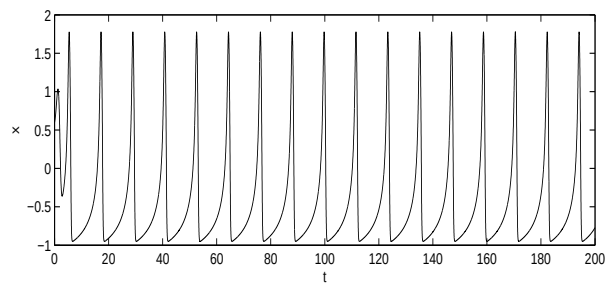
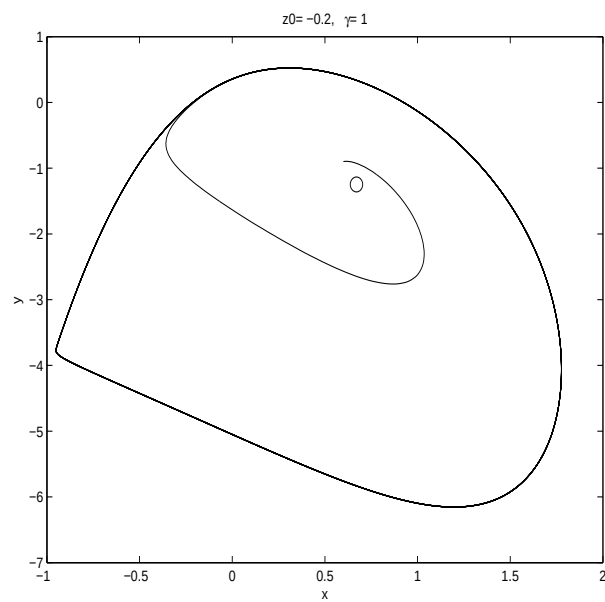
En effet, l'étude de la nature des points d'équilibre nous a révélé que pour $z \in]-\infty, -\frac{5}{27}[$, le système (I) possède une seule racine positive, à la valeur $z_0 = -\frac{5}{27}$, le système (I) admet une racine positive $x = \frac{2}{3}$ et une autre racine double $x = -\frac{4}{3}$.

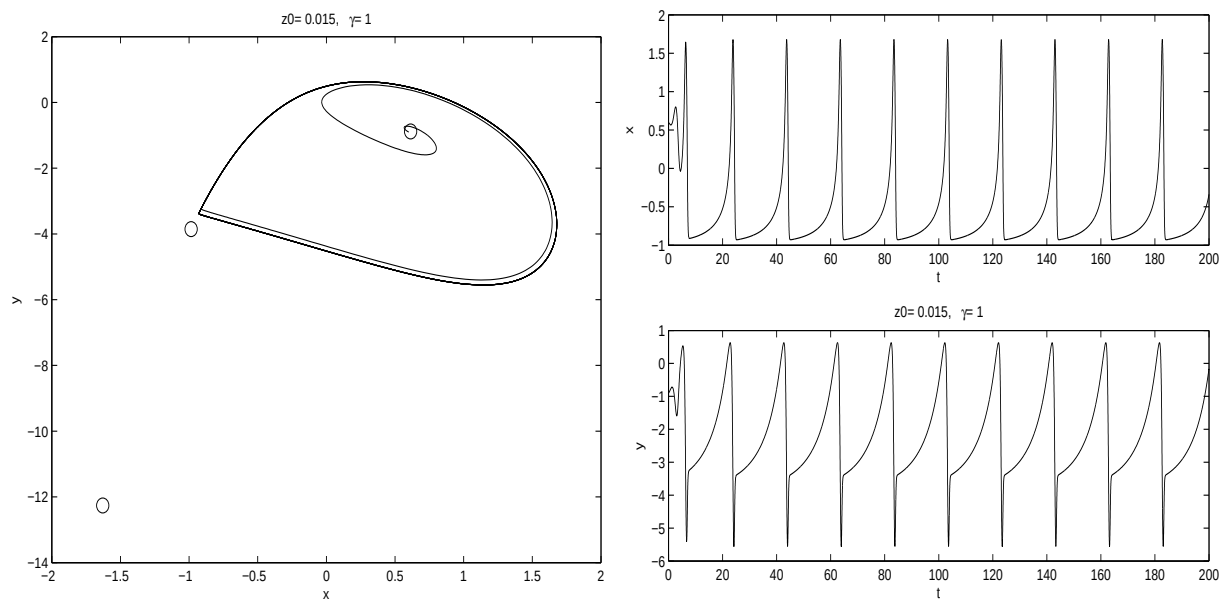
On a donc à cette valeur de paramètre, apparition d'un autre point d'équilibre et pour $z_0 \in]-\frac{5}{27}, 1[$, le système admet trois racines réelles. Le point d'équilibre qui est double en $z_0 = -\frac{5}{27}$ se scinde en deux pour $z_0 > -\frac{5}{27}$.

De même pour $z_0 \in]1, +\infty[$, le système admet un point d'équilibre et pour $z_0 = 1$ un nouveau point d'équilibre apparaît qui se scinde en deux, donnant lieu à trois points d'équilibre pour $z < 1$.

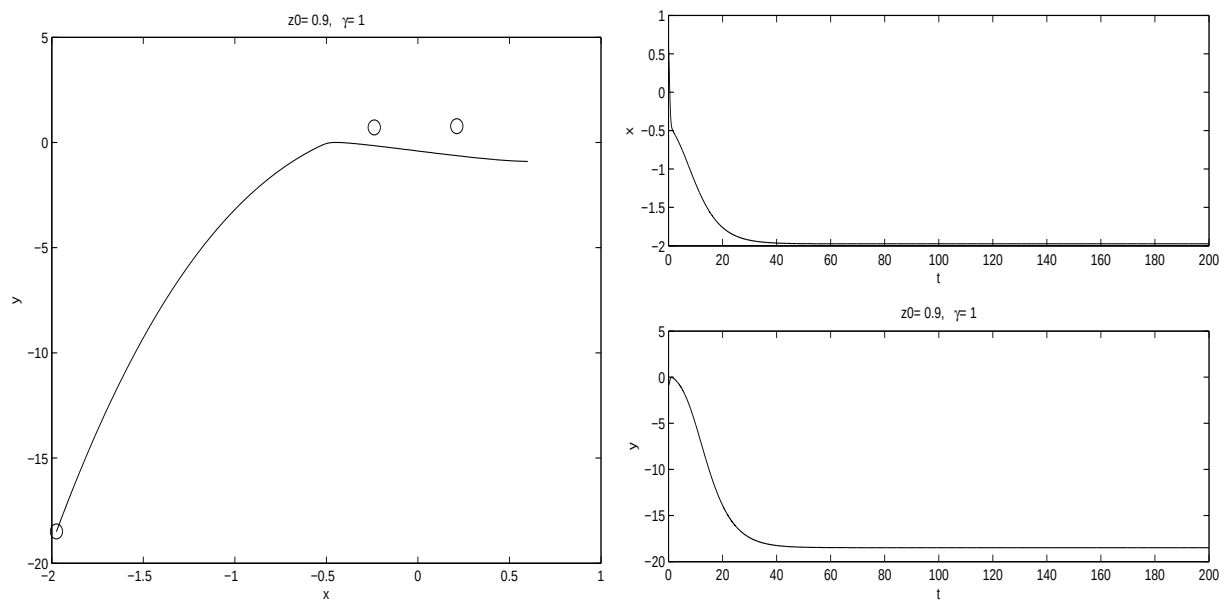
Dans les figures ci-dessous, nous observons cette bifurcation noeud-col pour $\gamma = 1$ et trois valeurs de z_0 , $z_0 = -0.285$, $z_0 = -\frac{5}{27}$ et $z_0 = 0.015$

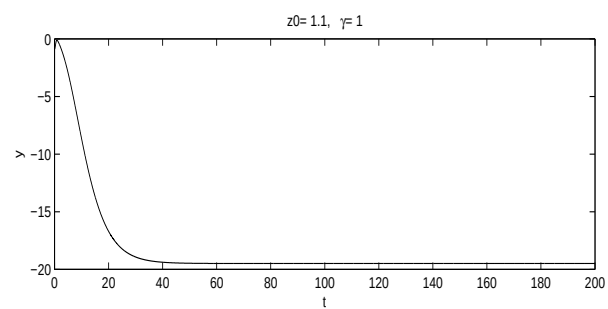
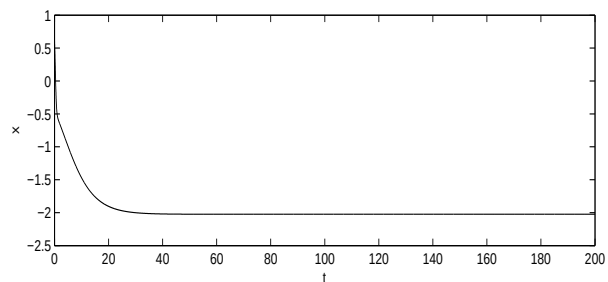
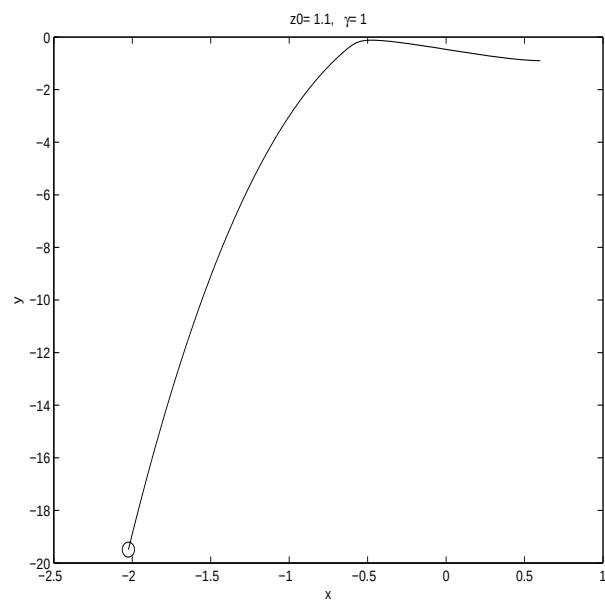
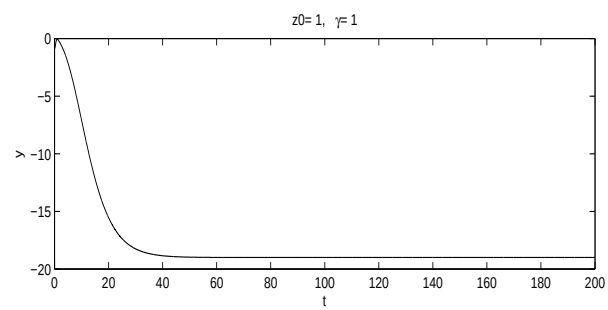
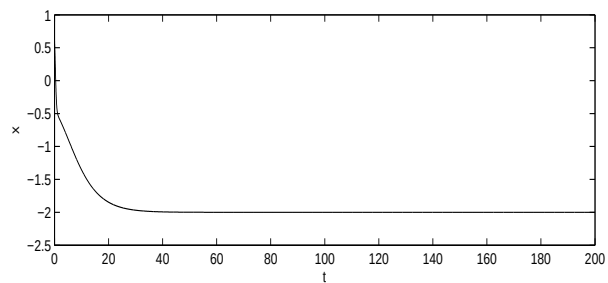
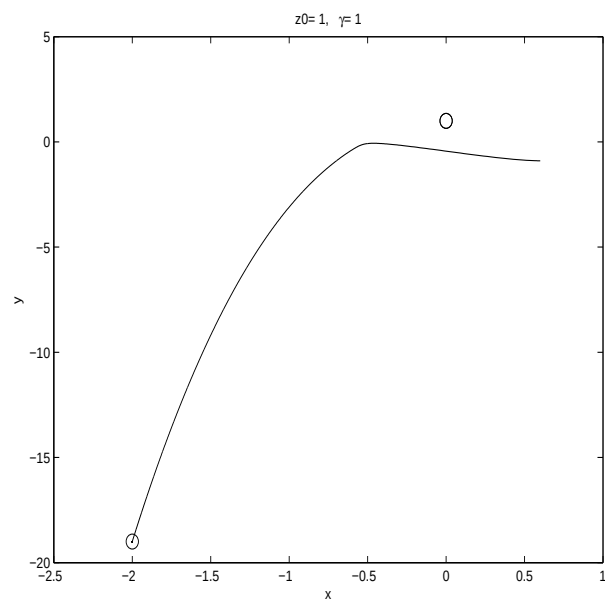
2. Chapitre : Quelques rappels, Bifurcation pli ou bifurcation noeud-col





Cette bifurcation est aussi observée dans les figures ci-dessous pour $\gamma = 1$ et $z_0 = 0.9$, $z_0 = 1$ et $z_0 = 1.1$





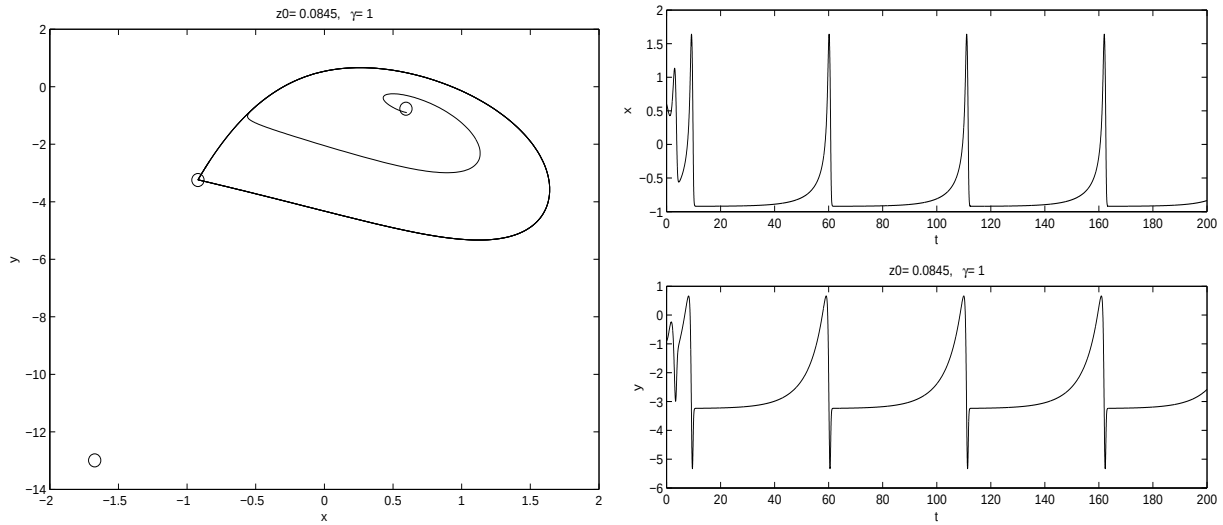
5.2.3 Bifurcation homocline

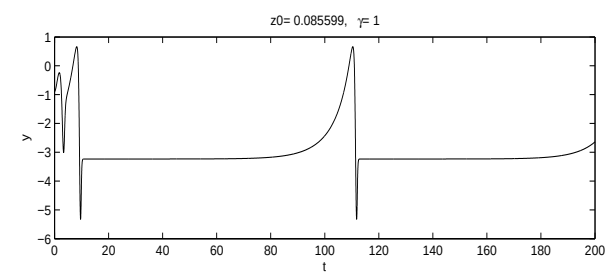
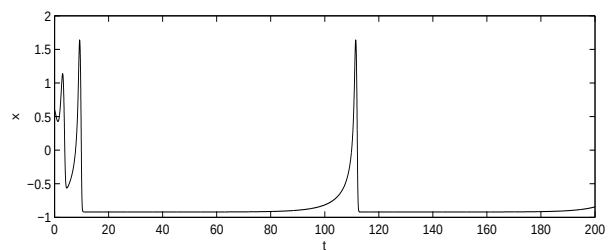
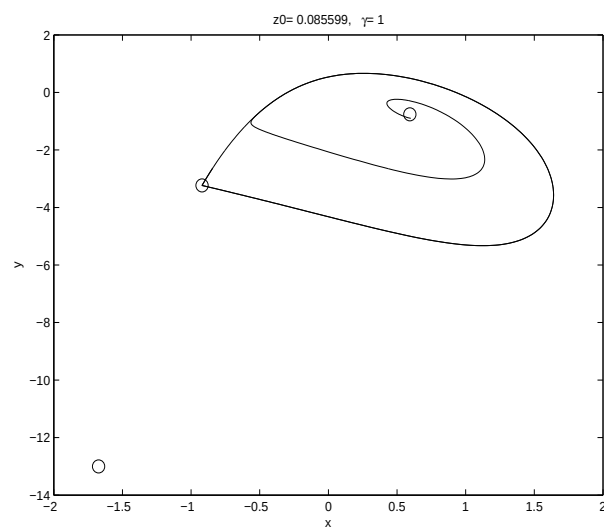
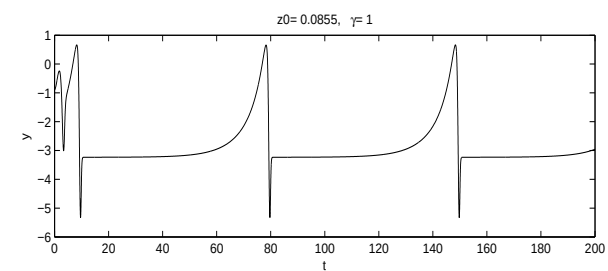
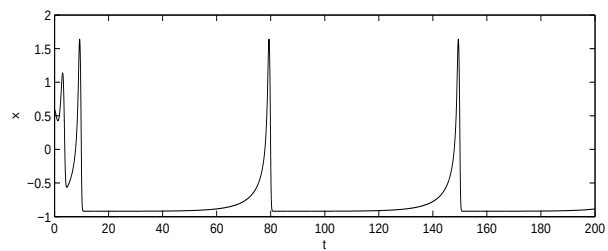
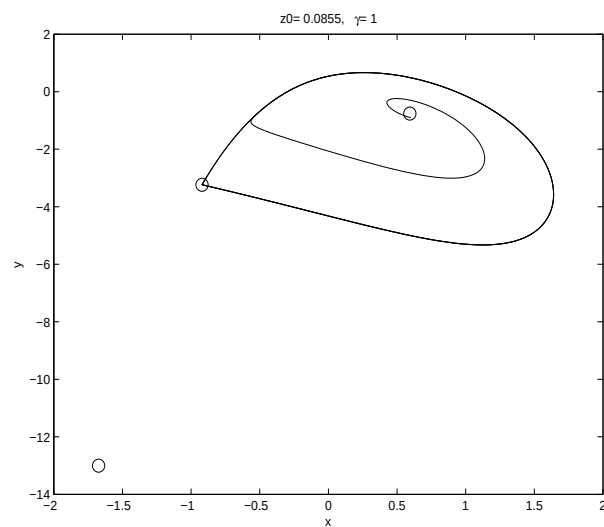
Nous avons montré dans les paragraphes précédents, que lorsque $z \in]-\frac{5}{27}, 1[$, il y a trois points d'équilibre, un stable, un col et un foyer entouré d'un cycle limite stable ($\gamma < 3$).

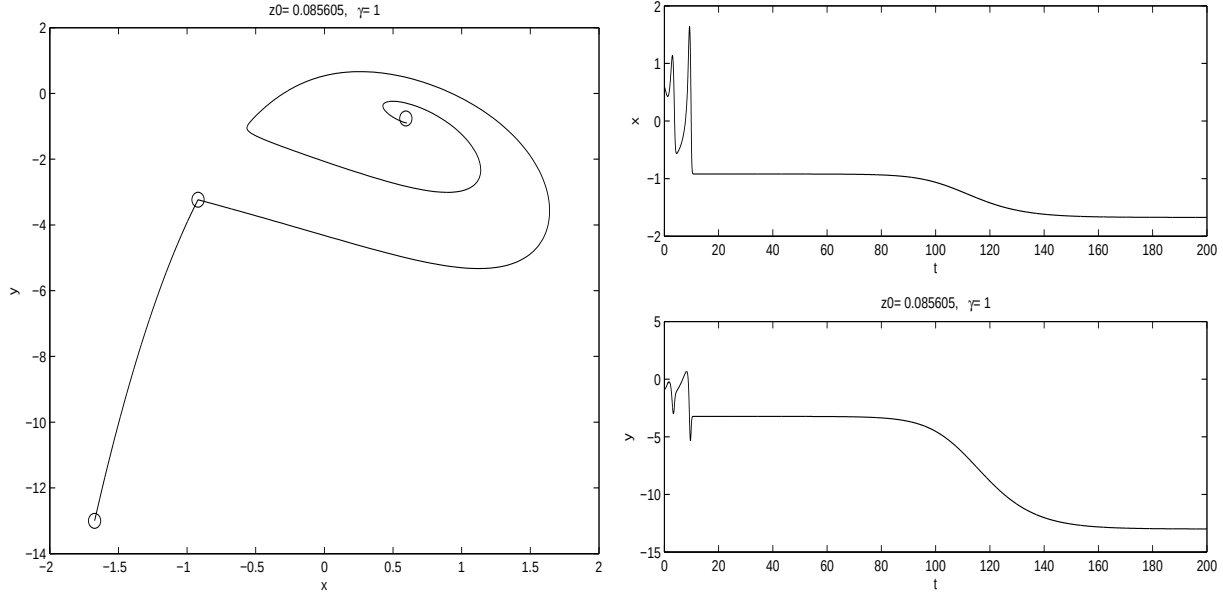
Dans ce cas, l'amplitude de l'orbite périodique croît jusqu'à atteindre le point col et disparaît, sa période tendant vers l'infini lorsque la paramètre tend vers le paramètre de bifurcation.

Nous avons observé numériquement une bifurcation homocline à la valeur $z_0 = z_h = 0.085605$.

En effet, on observe sur les figures ci-dessus qu'au fur et à mesure que z approche la valeur de $z_h = 0.0856008$, le cycle limite s'approche du point col et finit par le toucher au point z_h donnant lieu à une bifurcation homocline.







Si on continue d'augmenter z , la connexion homocline se casse et la variété stable du col forme une connexion hétérocline avec le point instable ; il y a trois points d'équilibre : un point stable, un point instable séparés par un col.

Donc, lorsque la valeur de z atteint la valeur z_h de bifurcation, le cycle devient une orbite homocline et la période de ce cycle devient grande au fur et à mesure que l'on s'approche de z_h .

La période du cycle limite est la somme de deux périodes T_1 et T_2 :

T_1 étant le temps requis pour une rotation et T_2 le temps passé dans le voisinage du col.

Lorsque z augmente, T_1 reste relativement constante alors que T_2 tend vers l'infini quand z approche z_h .

Dans notre cas, la bifurcation homocline explique comment un cycle limite correspondant à des oscillations dits "spiking" disparaît.

5.3 Dynamique du système tridimensionnel lent-rapide de Hindmarsh-Rose

Dans ce paragraphe, nous cherchons à comprendre la dynamique de la trajectoire dite bursting qui passe de l'état de repos à l'état actif du neurone représenté par les oscillations en salves.

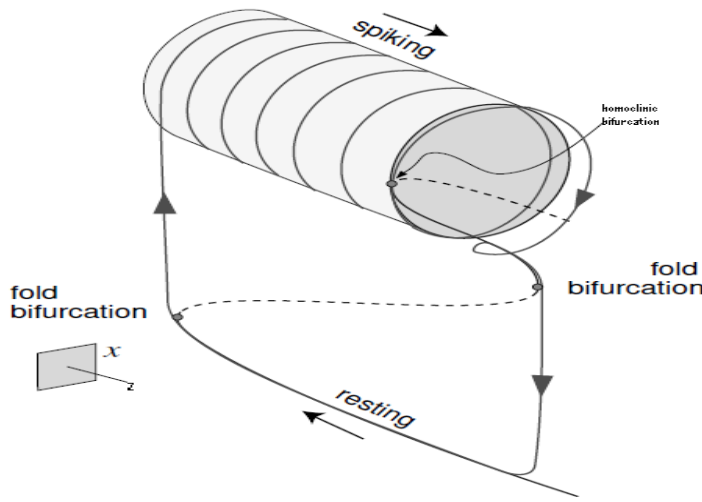


FIGURE 5.4: Le 'spiking' ou cycle limite disparaît via la bifurcation homocline.[Izh07]

En résumé, on a trouvé que pour les valeurs de $z \in]-\frac{5}{27}, z_h[$, les points d'équilibre de la dynamique rapide sont formés d'un noeud stable, d'un col et d'un noeud (ou foyer) instable entouré d'un cycle limite stable.

Les points col et noeud disparaissent à gauche à la valeur de $z_0 = -\frac{5}{27}$ dans une bifurcation pli et à droite en $z_0 = 1$ dans autre une bifurcation pli.

Nous avons aussi observé numériquement que le cycle limite disparaît à z_h par une bifurcation homocline.

Dans ce qui suit nous décrivons le scénario observé dans la figure ci-dessus :

Si on suppose que l'on se trouve sur un point voisinage d'un point d'équilibre stable qui correspond à l'état de quiescence du neurone, z décroît lentement et on suit cette branche de points d'équilibre jusqu'à atteindre la valeur de la bifurcation noeud-col.

Ici le système fait un saut vers la surface des cycles limites stables qui correspond à la

phase active du neurone.

Par la suite z croît lentement jusqu'à la valeur de la bifurcation homocline.

A ce moment, l'orbite périodique cesse d'exister et le système fait un saut vers le point d'équilibre attractif.

Ce phénomène se répète donnant lieu à la séquence de bursts.

Dans les figures ci-dessous, nous traçons la trajectoire du système de Hindmarsh-Rose-3D, pour les différents temps qui donnent naissance à une trajectoire du type bursting.

Si on prend une condition initiale du système de Hindmarsh-Rose-3D proche du noeud stable, la trajectoire est d'abord attirée vers la courbe des points singuliers attractifs.

Elle se colle à cette courbe qu'elle parcourt sous l'effet de la dynamique lente jusqu'à un point instable de la courbe, à ce moment elle rejoint la surface formée de cycles limites de la dynamique rapide en traversant le plan $\dot{z} = 0$ (transition du cycle d'hystérèse).

Elle remonte en spirale autour de cette surface sous l'effet de la dynamique lente (qui a changé de signe) jusqu'à son bord où le cycle limite disparaît par bifurcation homocline.

A ce moment (seconde transition du cycle d'hystérèse) la trajectoire saute, en traversant le plan $\dot{z} = 0$, pour rejoindre un voisinage de la branche des points singuliers attractifs, puis z décroît de nouveau et on reprend le cycle d'hystérèse.

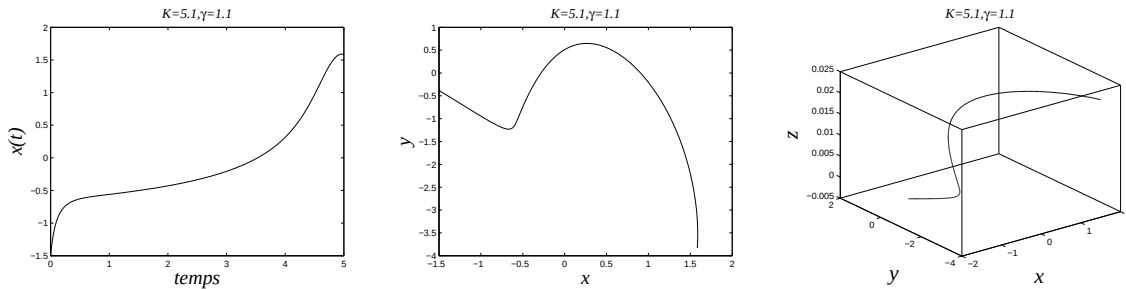


FIGURE 5.5: La trajectoire pour le temps 5

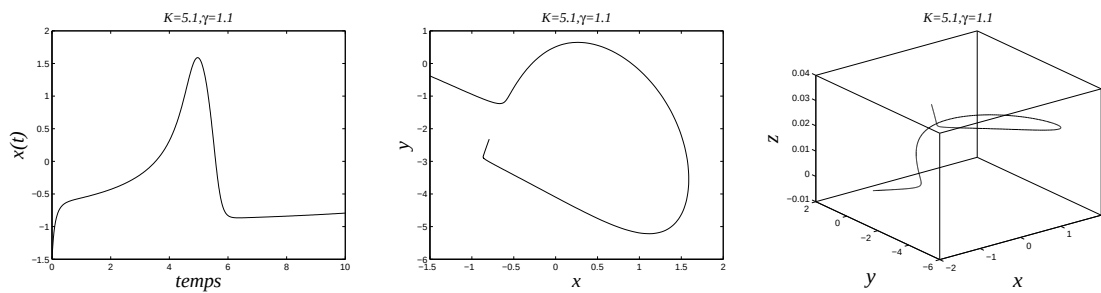


FIGURE 5.6: La trajectoire pour le temps 10

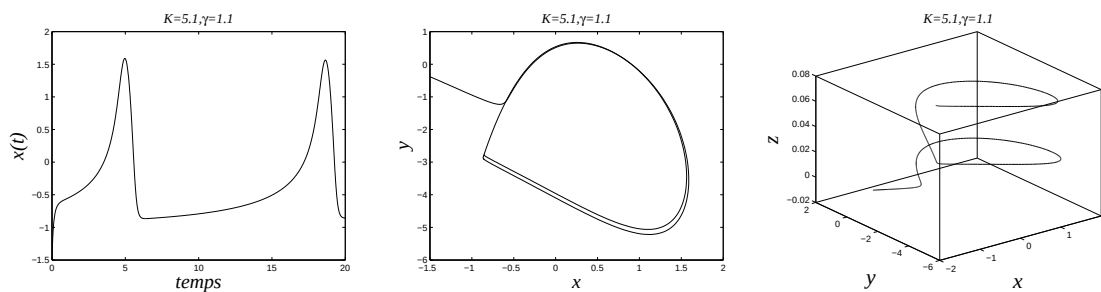


FIGURE 5.7: La trajectoire pour le temps 20

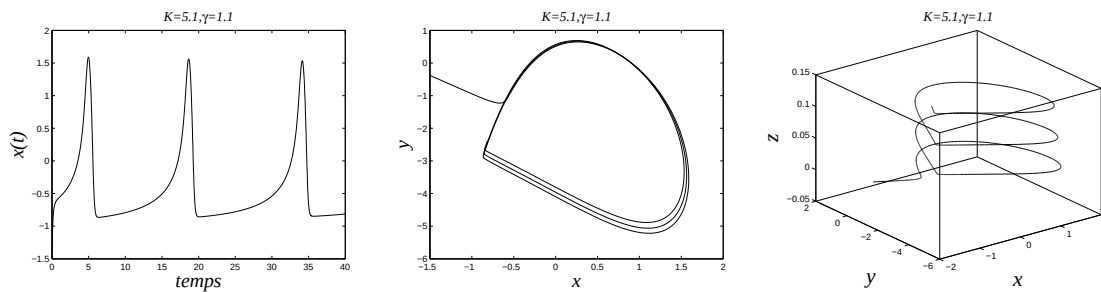


FIGURE 5.8: La trajectoire pour le temps 40

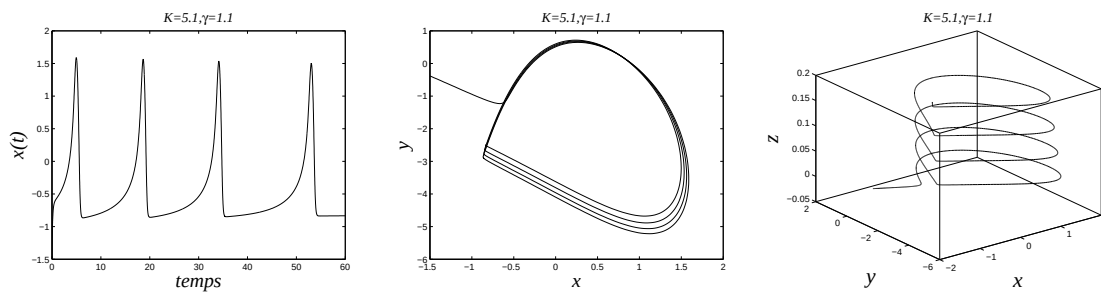


FIGURE 5.9: La trajectoire pour le temps 60

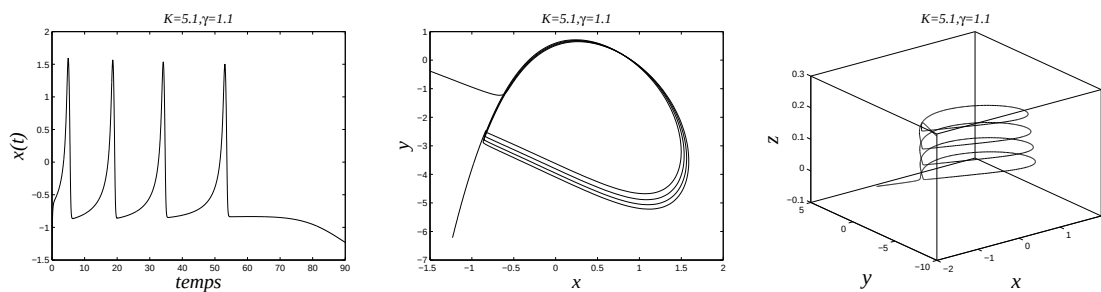


FIGURE 5.10: La trajectoire pour le temps 90

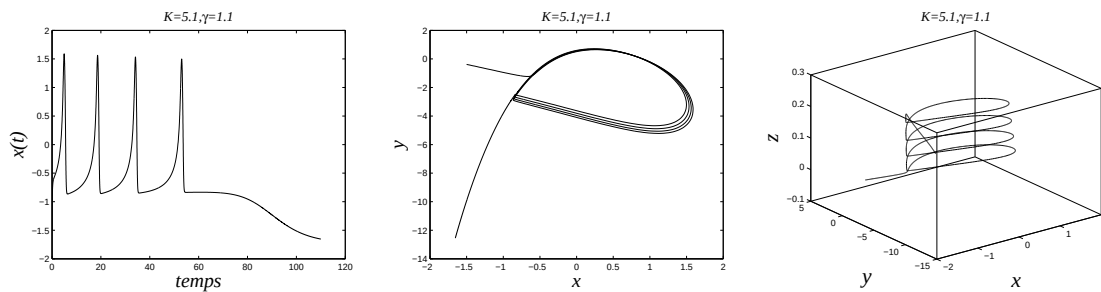


FIGURE 5.11: La trajectoire pour le temps 110

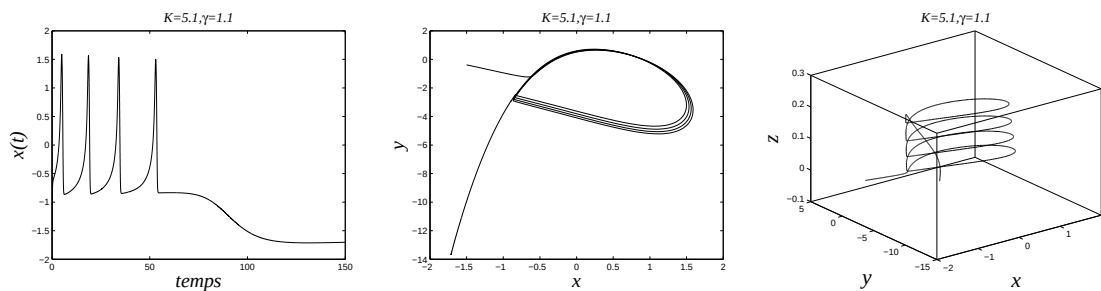


FIGURE 5.12: La trajectoire pour le temps 150

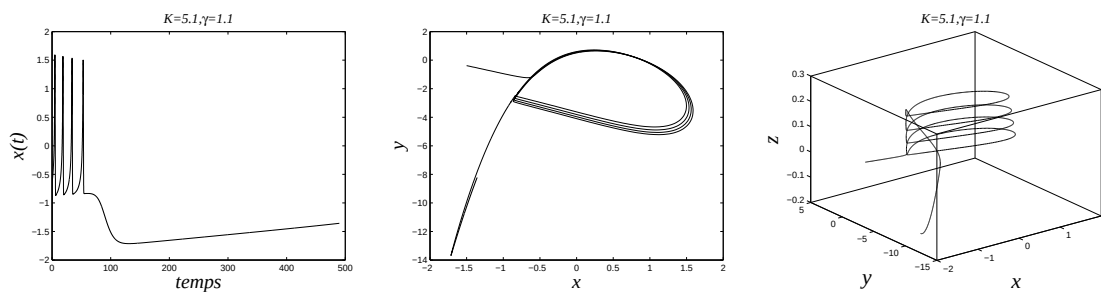


FIGURE 5.13: La trajectoire pour le temps 490

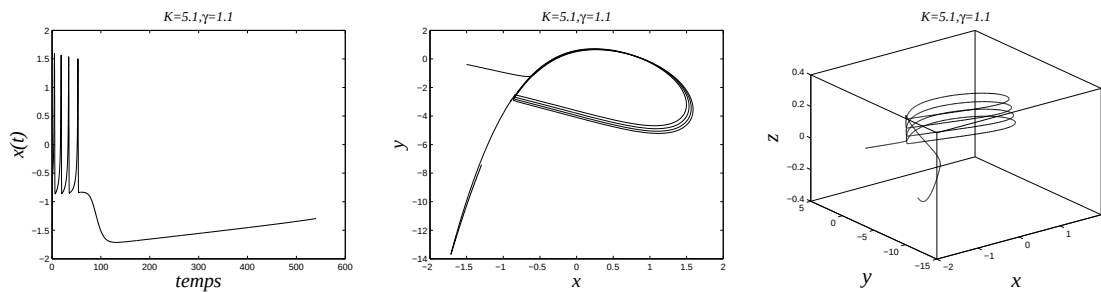


FIGURE 5.14: La trajectoire pour le temps 540

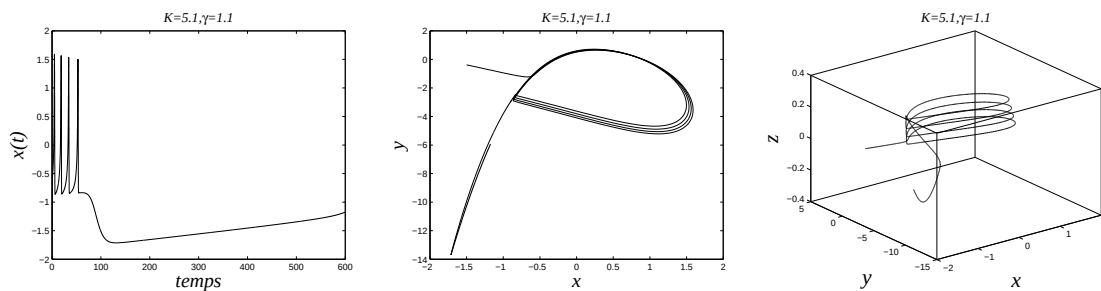


FIGURE 5.15: La trajectoire pour le temps 600

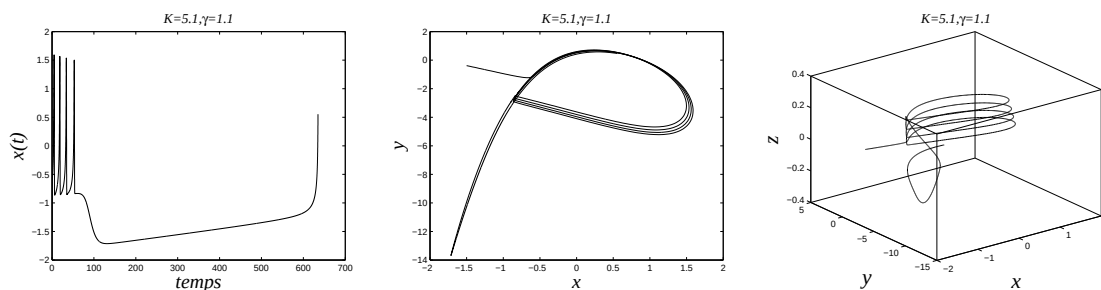


FIGURE 5.16: La trajectoire pour le temps 635

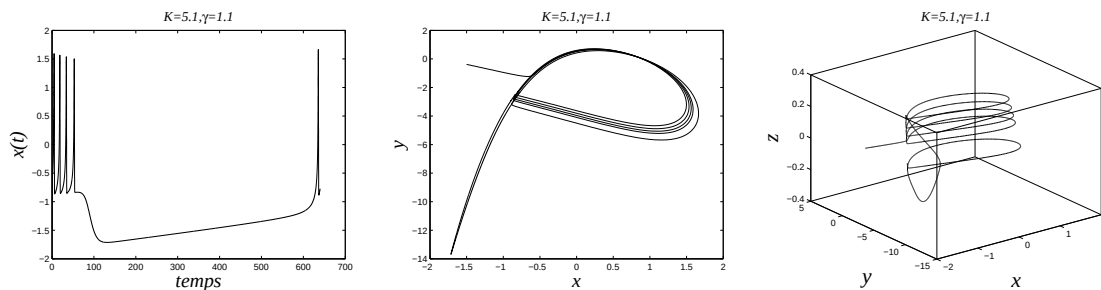


FIGURE 5.17: La trajectoire pour le temps 640

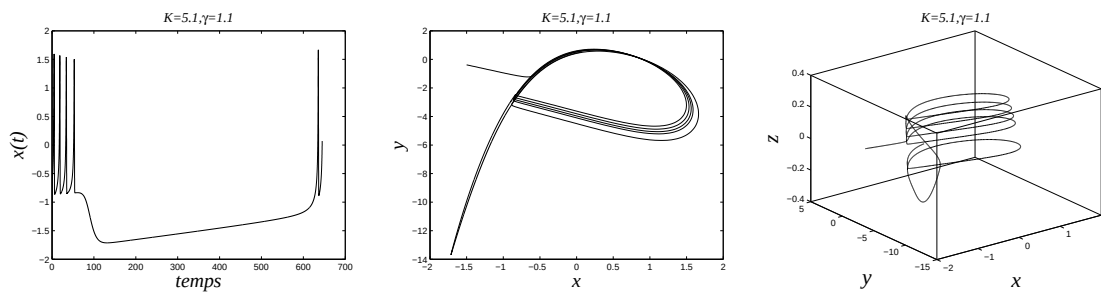


FIGURE 5.18: La trajectoire pour le temps 645

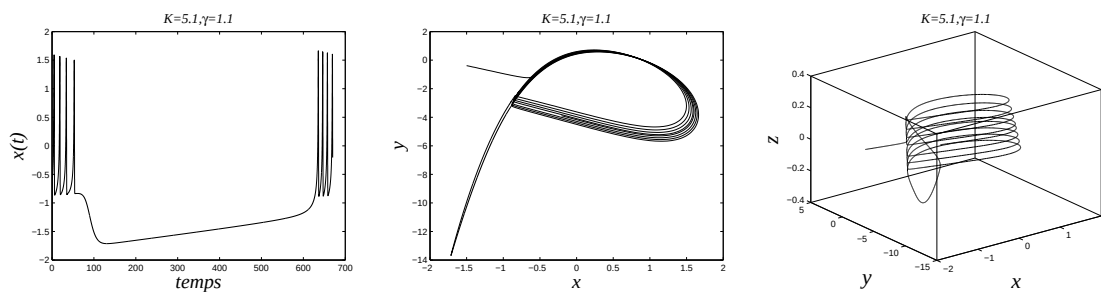


FIGURE 5.19: La trajectoire pour le temps 670

Conclusion

Dans ce travail, nous avons commencé par présenter quelques notions de la neurophysiologie permettant de comprendre le fonctionnement d'un neurone.

Nous nous sommes intéressé à l'étude du modèle de Hindmarsh-Rose qui reproduit un certain nombre de fonctionnement classique d'un neurone tel que l'émission régulière du potentiel d'action ou 'spiking' et les oscillations en salves ou 'bursting'.

Ce modèle est aussi un modèle lent-rapide dont les deux premières variables sont rapides et la troisième lente.

Nous nous sommes ensuite intéressé à l'étude analytique du modèle de Hindmarsh-Rose bidimensionnel et le modèle tridimensionnel.

L'étude de la bifurcation de Hopf nous a permis de montrer, pour certaines valeurs des paramètres, l'existence de cycles limites en 2D et 3D.

La seconde partie de ce travail a consisté à étudier le système rapide, la variable lente étant considérée dans ce cas comme un paramètre.

Ce modèle présente un comportement riche du point de vue de la dynamique.

Nous avons montré que ce modèle présente plusieurs types de bifurcations : la bifurcation noeud-col, la bifurcation de Hopf et la bifurcation homocline.

L'existence d'une orbite homocline a été montré numériquement.

Enfin, à travers l'étude du système rapide, nous avons reproduit et expliqué le phénomène des oscillations en salves dit 'bursting' qui est lié aux différentes bifurcations observées dans ce modèle.

Bibliographie

- [AAA07] E. Azoulay, J. Avignant, and G. Auliac. *Les mathématiques en licence, Tome1, Cours et exercices corrigés*. Ediscience edition, 2007.
- [A.B06] A.Boukabou. Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches, 2006.
- [Arn74] V. I. Arnold. *Equations différentielles ordinaires*. Mir, moscou, 1st edition, 1974.
- [Arn86] V. I. Arnold. *Catastroph theory*. Springer-verlag, 2nd edition, 1986.
- [BG10] S Benzonie-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles, cours et exercices corrigés*. Dunod, 2nd edition, 2010.
- [BR05] A. Borisyuk and J. Rinzel. Understanding neuronal dynamics by geometrical dissection of minimal models. 2005.
- [Bre92] F. Brethommier. Intégration neuronal dans le système auditif, 1992.
- [Bri09] J. Bricmont. Introduction à la dynamique non linéaire, 2009.
- [CLW94] Shui-Nee Chow, Chengzhi Li, and Duo Wang. *Normal forms and Bifurcations of planar Vector Fields*. Cambridge university press edition, 1994.
- [CwTG⁺04] Yinhe Cao, Wen wen Tung, J. B. Gao, V. A. Protopopescu, and L. M. Hively. Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy. 2004.
- [EC00] Alice E.Milne and Zaid.S. Chalabi. Control analysis of the rose-hindmarsh for neuronal activity, 2000.
- [Gai03] V. A. Gaiko. *Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem*. Kluwer academic publishers edition, 2003.
- [HAL69] J.K. HALE. *Ordinary differential equations*. Springer-verlag, 1st edition, 1969.
- [HR84] J. L. Hindmarsh and R. M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. 1984.
- [HS10] A. J. Homburg and B. Sandstede. Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields. 2010.
- [Izh07] E. M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience : The geometry of Excitability and Bursting*. The mit press, 1st edition, 2007.

- [JI93] J.Guckenheimer and I.S.Labouriau. Bifurcation of the hodgkin and huxley equations : a new twist, 1993.
- [J.P05] J.P.Françoise. *Oscillations en biologie*. 2005.
- [KF77] A. Kolmogorov and S. Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Mir moscou, 2nd edition, 1977.
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblatt. *Modern Theory dynamical Systems*. Cambridge university press, 8th edition, 1995.
- [Lan06] E.De Lange. Neuron models of the generic bifurcation type : network analysis and data modeling, 2006.
- [L.B10] L.Buhry. Estimation de paramètres de modèles de neurones biologiques sur une plate-forme de snn (spiking neural network) implantés. 2010.
- [L.P69] L.Pontriaguine. *Equations différentielles ordinaires*. Mir, moscou edition, 1969.
- [N.C09] N.Corson. Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité, 2009.
- [Oud04] Ward T. Oud. Synchronization in an ensemble of hindmarsh and rose oscillators : using control-theory in neuroscience. Calculations semipassivity of a single system, 2004.
- [Per02] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. 2002.
- [PG05] P.Benoist-Gueutal. *Mathématiques pour la physique, introduction à la théorie qualitative des systèmes dynamiques*. de boeck, 1st edition, 2005.
- [PM01] H. Paugam-Moisy. Réseaux de neurones temporels : dynamique et apprentissage. 2001.
- [R.B95] R.Bebbouchi. *Equations différentielles perturbées et analyse non standard*. Opu edition, 1995.
- [SH00] Ronald W. Shonkwiler and James Herod. *Mathematical biology An introduction with Maple and Matlab*. 2nd edition, 2000.
- [S.L03] S.Laouar. Etude de la convection naturelle transitoire et bidimensionnelle dans une enceinte parallélépipédique allongée de section droite carrée « bifurcation vers le chaos », 2003.
- [Str94] S. H. Strogatz. *Non linear dynamics and chaos, with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Advanced book program, perseus books edition, 1994.
- [Tu94] P N.V. Tu. *Dynamical systems, an introduction with applications in economics and biology*. Springer verlag, 2nd edition, 1994.
- [Vid07] A. Vidal. Relaxation et oscillations en salves, 2007.
- [Wig00] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer, 2nd edition, 2000.

- [Y.K04] Y.Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume Springer, Applied mathematical sciences. 3rd edition, 2004.