



Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne
Faculté de Mathématiques
Département d'Analyse

Résumé du Mémoire de Magister en Mathématiques
Option : Equations Aux Dérivées Partielles

Présenté par

ARIES Mohamed Es-Salih

Thème

**COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN
PROBLEME EN VISCOELASTICITE**

Résumé

Dans ce travail, que nous présentons sous forme de mémoire, nous étudions la stabilisation de quelques problèmes en viscoélasticité. Nous considérons la première équation du problème (P) avec des conditions aux limites et initiales et nous étudions l'existence et l'unicité de la solution. Nous rappelons les résultats de l'étude du comportement asymptotique de la solution et nous développons le cas où $a=0$. Ensuite nous considérons l'équation des ondes à travers un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière composée de deux parties disjointes, avec des conditions de type Cauchy Ventcel. On s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique de la solution du problème suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + b(x) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v + c(x)v_t = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{\Sigma} = v \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1) \text{ dans } \Omega \times \Gamma. \end{array} \right.$$

Plusieurs cas ont été étudiés. Le premier cas correspond à une dissipation linéaire dans le domaine et sur la frontière ($a=1$, $b=0$ et $c=1$), le deuxième cas correspond à une dissipation linéaire et une dissipation faible dans le domaine ($a=1$, $b=1$ et $c=0$) et enfin le troisième cas ou on ne considère qu'une dissipation faible dans le domaine qui est représentée par un terme mémoire. On montre dans les trois cas que la solution décroît exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini pourvu que la fonction de relaxation h soit décroissante. Le troisième cas signifie qu'avec seulement une dissipation faible représentée par un terme mémoire, on peut conduire le système vers le repos ou bien l'état d'équilibre.

I. INTRODUCTION

Dans ce travail, que nous présentons sous forme de mémoire de magistère, nous étudions la stabilisation de quelques problèmes en viscoélasticité. On considère l'équation des ondes à travers un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, avec des conditions de type Cauchy Ventcel. Ce problème a été étudié par [11] où l'auteur a étudié le comportement asymptotique de l'énergie associée à la solution du problème semilinéaire dissipatif de Cauchy-Ventcel suivant:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v + g(v) + b(x)v_t = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{\Sigma} = v \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1) \text{ dans } \Omega \times \Gamma. \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Cette equation modelise les vibrations asymptotiques d'un corps élastique avec un raidisseur mince sur le bord. Sous certaines hypothèses sur les fonctions a , b , f et g , il a été démontré que la solution décroît exponentiellement vers zéro lorsque le temps tends vers l'infini. Dans notre travail on considère le problème (P_1) avec plusieurs variantes des fonctions a , b , f et g

Dans le deuxième chapitre, on rappelle quelques notions et définitions d'analyse fonctionnelles nécessaire pour notre étude.

Dans le troisième chapitre on rappelle les résultats du travail [10] concernant le problème d'une seule équation à savoir la première avec $f(u)$ remplacé par un terme mémoire $\int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds$ et $a \equiv 1$, on démontre sous certaines hypothèses que le problème admet une seule solution. Le cas $a \equiv 0$ a été développé, plus précisément on montre qu'en l'absence de dissipation interne, la dissipation faible représentée par le terme mémoire con-

duit le système vers le repos.

Dans les chapitres quatre, cinq et six suivants, on considère le problème suivant:

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + b(x) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v + c(x)v_t = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{\Sigma} = v \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1) \text{ dans } \Omega \times \Gamma. \end{array} \right.$$

où plusieurs cas seront étudiés.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du problème (P_2) dans le cas où $a \equiv 1$, $c \equiv 1$ et $b \equiv 0$. On démontre que l'énergie classique définie par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\sigma$$

est décroissante et vérifie $E(t) \leq E(0)$ lorsque $E(0) > 0$

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude de la stabilisation du problème (P_2) dans le cas $a \equiv 1$, $c \equiv 0$ et $b \equiv 1$, on démontre que l'énergie classique définie ci dessus décroît exponentiellement vers zéro lorsque le temps vers l'infini sous l'hypothèse suivante sur le noyau:

$$h'(t) \leq -\delta h(t), \quad \forall t \geq 0$$

Dans le **sixième chapitre**, on étudie le problème (P_2) dans le cas où on a une dissipation faible interne c'est à dire le cas : $a \equiv 0$, $c \equiv 0$ et $b \equiv 1$ on démontre que l'énergie classique définie ci dessus décroît exponentiellement vers zéro lorsque le temps vers l'infini. En d'autres termes, la dissipation faible représentée par le terme mémoire est suffisante pour stabiliser le système.

II. PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre consacré aux rappels, nous avons regroupé les notions essentielles d'analyse fonctionnelle nécessaire à la compréhension des énoncés et démonstrations des problèmes qui forment le thème de ce mémoire. De même que les résultats fondamentaux, qui concernent la topologie faible, les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev, les applications de dualité, les opérateurs de pénalisation et d'autres théorèmes classiques. Ces notions et ces résultats représentent un outil important pour notre étude

III. EQUATION DES ONDES AVEC UN TERME NON LOCAL EN TEMPS ET UNE DISSIPATION INTERNE FAIBLE

3.1 Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'une équation intégrale-différentielle. On montrera que l'énergie du système décroît exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini, en présence d'une dissipation linéaire, pourvu que le noyau dans le terme mémoire est aussi exponentiellement décroissant. De nouvelles hypothèses seront considérées. Nous considérerons le problème de l'équation des ondes suivante avec un terme non local en temps et une dissipation interne faible.

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} + u_t = \Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ sera fixée plus loin.

Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité, (voir [15] – [3] pour la discussion de l'origine de ces modèles).. Dans tous ces travaux l'hypothèse suivante sur le terme noyau

$$h'(t) \leq -\eta h(t), \quad \forall t \geq 0$$

a été imposée.

Dans ce travail on donnera un taux de convergence explicite pour la solution du problème (P_1) . C'est l'objectif de ce chapitre. On montrera que la solution est exponentiellement asymptotiquement stable pourvu que le noyau qui apparaît dans le terme mémoire soit aussi exponentiellement décroissant vers zéro. De plus, nous remplaçons l'hypothèse ci-dessus qui est fréquemment utilisée par les conditions

$$h'(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad e^{\alpha t} h(t) \in L^1(0, \infty), \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Aucune autre condition sur la dérivée de $h(t)$ n'a été supposée. Dans ce travail nous démontrons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution et nous étudierons le cas où $a = 0$ ou nous développerons les calculs pour montrer que l'énergie associée est exponentiellement décroissante. Ce qui signifie que la dissipation faible représentée par le terme mémoire est suffisante pour mener le système vers le repos

3.2 Existence et Unicité:

Théorème 1:

Supposons que la fonction h est continue et que $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Alors le problème (1) admet une solution unique telle que

$$u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Preuve: Dans cette section, on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (1), en utilisant la méthode de Galerkin

3.3 Comportement asymptotique

Nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait à :

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad & h'(t) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \text{(A2)} \quad & 1 - \int_0^\infty h(s) ds = 1 - \bar{h} = l > 0, \\ \text{(A3)} \quad & e^{\alpha t} h(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{pour} \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Ensuite, on définit l'énergie classique associée à (1) par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

Théorème 2:

Si les hypothèses (A1) – (A3) sont satisfaites, alors l'énergie associée à (P_1) décroît de façon exponentielle vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives C et $\beta > 0$

telles que

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve:

La différentiation de $E(t)$ par rapport à la variable t donne

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx.$$

Nous définissons l'énergie modifiée

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t),$$

De (2) et (3) on obtient,

$$\frac{de}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t).$$

Remarquons que de l'hypothèse (A1) on a

$$\frac{de}{dt} \leq 0, \quad t \geq 0$$

De plus, de la définition de $e(t)$ et $(h \square \nabla u)(t)$ et de l'hypothèse (A2), on montre qu' il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$E(t) \leq Me(t), \quad t \geq 0.$$

Ensuite, on introduit les fonctionnelles

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int_{\Omega} u_t u dx \\ \Psi(t) &= \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\ H_{\alpha}(t) &= e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \quad \text{où } \alpha > 0 \\ V(t) &= e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Psi(t)\end{aligned}$$

avec $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta > 0$ qui seront choisis par la suite. On vérifie que

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &\leq -(1-\varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} (h' \square \nabla u)(t) - \varepsilon \Phi(t) - \alpha \eta \Psi(t) - \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-l)}{2} \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.\end{aligned}$$

Si on choisit α tel que

$$\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds < \frac{1}{1-l}$$

alors, on peut choisir η tel que

$$\frac{\varepsilon(1-l)}{2} < \eta < \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right)^{-1}.$$

et on montre l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &\leq - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) - 2(1-l)\mu \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &- (1-\varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \Phi(t) - \alpha \eta \Psi(t) - \mu (h \square \nabla u)(t) \\ &- \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-l)}{2} - 2\mu \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.\end{aligned}$$

Finalement, nous choisissons μ suffisamment petite telle que le coefficient entre crochet soit positif. Par conséquent, il existe une constante positive $\beta > 0$ telle que

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -\beta V(t), \quad t \geq 0.$$

On en déduit que

$$V(t) \leq V(0)e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

De la définition de $V(t)$ et de $e(t)$, on conclut l'assertion du Théorème 1.1. La preuve est ainsi achevée.

3.4 Le cas $a = 0$: (absence de dissipation)

Si h satisfait à la condition supplémentaire $|h'(t)|e^{\sigma t} \in L^1(0, \infty)$ pour certaines valeurs de $\sigma > 0$, alors il est possible de démontrer la décroissance exponentielle de l'énergie sans la dissipation interne qui est le cas $a = 0$. La situation est plus intéressante que le premier cas étudié à partir du moment que seule la dissipation faible présentée par le terme mémoire intervient. On aurait montré que le terme mémoire tout seul est suffisant pour conduire le système vers l'équilibre de manière exponentielle. La démonstration ressemble à celle faite dans le théorème précédent, il suffit de montrer comment compenser le terme $-\int_{\Omega} |u_t|^2 dx$ dans (2) qu'on perdra en choisissant $a = 0$. Pour arriver à cette fin premièrement on introduit les fonctionnelles

$$\begin{aligned} \Phi(t) &:= \int_{\Omega} u_t u dx \\ \Lambda(t) &:= - \int_{\Omega} u_t \int_0^t h(t-s) (u(t) - u(s)) ds dx \\ L(t) &:= e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Lambda(t) \end{aligned}$$

$$\Psi(t) = \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$$

où

$$H_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds$$

et on montre le résultat suivant:

Proposition 3: Il existe deux constantes positives ρ_1 et ρ_2 telles que

$$\rho_1 e(t) \leq L(t) \leq \rho_2 e(t) \quad \text{tout } t \geq 0$$

On pose

$$V(t) = e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Lambda(t)$$

$$W(t) = V(t) + \mu \Gamma(t) = e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \delta \Psi(t) + \eta \Lambda(t) + \mu \Gamma(t)$$

où

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \int_0^t \tilde{H}_{\sigma}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$$

avec

$$\tilde{H}_{\sigma}(t) = e^{-\sigma t} \int_t^{+\infty} |h'(s)| e^{\sigma s} ds.$$

On montre le résultat suivant:

Proposition 4: Il existe des constantes positives ξ_1, ξ_2 .. telles que

$$\xi_1 [E(t) + h \square \nabla u(t)] \leq W(t) \leq \xi_2 [E(t) + h \square \nabla u(t) + \Gamma(t)]$$

pour tout $t \geq 0$

Pour la décroissance de l'énergie calculons

$$\frac{dW}{dt} = \frac{de}{dt} + \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} + \delta \frac{d\Psi}{dt} + \eta \frac{d\Lambda}{dt} + \mu \frac{d\Gamma}{dt}$$

On montre que

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \leq & - \left(\int_0^t h(s) ds - \varepsilon - \eta \delta_3 \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left(\frac{1}{2} h(t) + \frac{\varepsilon}{2} - (1-l) \delta_1 \eta - \mu \tilde{H}_{\sigma}(0) \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \sigma \Gamma(t) - \alpha \delta \\ & - \left[-\eta \frac{\bar{h}}{4\delta_1} - \eta \bar{h} \right] h \square \nabla u(t) - \left[\frac{C_p h(0)}{4\delta_3} - \frac{1}{2} \right] h' \square \nabla u(t) + \mu h \square \nabla u(t) - \mu h \square \nabla u(t) \\ & - \left[\mu \int_{\Omega} \int_0^t |h'(t-s)| |\nabla u(s)|^2 ds dx - \varepsilon \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx - \delta \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \right] \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité suivante

$$(h \square \nabla u)(t) \leq 2(1-l) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx$$

On trouve

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \leq & - (h_0 - \varepsilon - \eta\delta_3) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left(\frac{\varepsilon}{2} - (1-l)\delta_1\eta - \mu\tilde{H}_{\sigma}(0) - 2\mu(1-l) \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \sigma\Gamma(t) - \alpha\delta\Psi(t) \\ & - \left[\mu - \eta\frac{\bar{h}}{4\delta_1} - \eta\bar{h} \right] h\Box\nabla u(t) - \left[\left(\delta - \frac{\varepsilon\bar{h}}{2} - 2\mu \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \right] \end{aligned}$$

Pour $\delta_1 = \frac{1}{4}$, $\eta = \frac{\mu}{4\bar{h}}$, $2\mu + \frac{\varepsilon\bar{h}}{2} = \delta$ $\varepsilon < \frac{h_0}{4}$, $\delta_3 < \min\left(\frac{4}{2C_p h(0)}, \frac{h_0}{2\eta}\right)$, nous avons
 $2\mu(1-l) < \frac{\varepsilon}{16}$, $\mu < \frac{\varepsilon}{16\tilde{H}_{\sigma}(0)}$ et $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{8\eta(1-l)}$

$$\frac{dW}{dt} \leq -\frac{h_0}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \sigma\Gamma(t) - \alpha\delta\Psi(t) - \frac{\mu}{2} h\Box\nabla u(t)$$

on en déduit qu'il existe une constante $C_1 = \min(h_0, \varepsilon, \sigma, \alpha\delta, \mu) > 0$ telle que:

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} & \leq -C_1 \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \Gamma(t) + \delta\Psi(t) + \frac{1}{2} h\Box\nabla u(t) \right) \\ & \leq -C_1 \left[E(t) + \frac{1}{2} (h\Box\nabla u)(t) + \Gamma(t) \right] \leq -\frac{C_1}{\xi_2} W(t) \end{aligned}$$

Ce qui démontre que $W(t) \leq C e^{-\frac{C_1}{\xi_2} t}$ et par la suite $E(t) \leq E(0) e^{-\kappa t}$ avec $\kappa > 0$.

IV. EQUATION DES ONDES AVEC DES CONDITIONS de TYPE CAUCHY VENTCEL

4.1 Introduction

On considère le domaine suivant : $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ou $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$
 posons $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[$ et $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[$ et $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma$
 Soit le système suivant :

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + b(x) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds &= 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, \infty[\\ v_{tt} - \Delta_T v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + c(x)v_t &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[\\ u|_{\Sigma} &= v \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\ u(0, x) &= u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x) \\ v(0, x) &= v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x) \end{aligned}$$

l'énergie classique associée est

$$E(t, u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\sigma$$

Dans cette partie nous supposons que $a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$ et $c(x) = 1$ soit

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + u_t &= 0 \quad \text{sur } \Omega \times]0, \infty[\\ v_{tt} - \Delta_T v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + v_t &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[\\ u|_{\Sigma} &= v \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\ u(0, x) &= u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x) \\ v(0, x) &= v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x) \end{aligned}$$

On multiplie la première équation du problème (3) par u_t et on intègre sur Ω , il vient :

$$\begin{aligned} (u_{tt}, u_t)_{0,\Omega} - (\Delta u, u_t)_{0,\Omega} + (u_t, u_t)_{0,\Omega} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\sigma &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\sigma &= 0 \end{aligned}$$

mais $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -v_{tt} + \Delta_T v - v_t$ sur Γ_1 et $u|_{\Sigma} = v$; $u_t|_{\Sigma} = v_t$ En posant

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma$$

on remarque que

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma$$

Si on suppose de plus que $E(0) > 0$, il s'ensuit que

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t > 0$$

ce qui montre que l'énergie associée au problème () est décroissante.

V. EQUATION DES ONDES AVEC DES CONDITIONS de TYPE CAUCHY
VENTCEL

Dans cette partie nous considérons le problème (P) avec les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} a(x) &\equiv 1 \\ \text{et } c(x) &= 0 \\ b &\in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{et vérifiant } b \equiv 1 \quad \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

Une dissipation interne et une dissipation interne faible (représentée par un terme mémoire)

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + u_t + b(x) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, \infty[\\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[\\ u|_{\Sigma} &= v \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\ (u(0), v(0)) &= (u_0, v_0) \quad \text{et } (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1) \end{aligned}$$

Premier cas: la fonction de relaxation $h(t)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad h'(t) &\leq -\gamma h(t) \\ \text{(A2)} \quad e^{\alpha t} h(t) &\in L^1(\mathbf{0}, \infty) \quad \text{pour tout } \alpha > 0 \\ \text{(A3)} \quad 0 &< \int_0^t h(s) ds < 1 \quad \text{pour tout } t > 0 \end{aligned}$$

On pose

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma$$

on peut écrire

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\omega} \nabla u_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx$$

on remarque que le dernier terme ne garde pas de signe constant. On définit l'énergie modifiée en posant

$$\begin{aligned}
e(t) &= E(t) + \frac{1}{2} (h \square \nabla u(t)) - \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\
e(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} h \square \nabla u(t) - \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1}^{\Omega} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1}^{\Omega} |\nabla_T v|^2 d\sigma
\end{aligned}$$

d'où la dérivée de l'énergie modifiée par rapport au temps:

$$\frac{de}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} h' \square \nabla u(t) - \frac{h(t)}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx$$

Comme $h' \leq 0$, on en déduit que $\frac{d}{dt}e(t) \leq 0$ et l'énergie est décroissante si de plus $E(0) > 0$, on a $E(t) \leq Me(0) \dots$ De plus on démontre le résultat suivant:

Proposition: S'il existe un nombre $t_0 > 0$ tel que $h(t) \geq m > 0$, on a

$$E(t) \leq Ce^{-t} \text{ pour tout } t \geq t_0$$

Preuve: On écrit la dérivée de l'énergie modifiée sous la forme

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (h' \square \nabla u(t)) - \frac{h(t)}{4} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx - \frac{h(t)}{4} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx$$

On montre que:

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &\leq -\min\left(\gamma, \frac{m}{2}, \frac{m}{4}\right) \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1}^{\Omega} |u_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} h \square \nabla u(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1}^{\Omega} |\nabla_T u(t)|^2 d\sigma \right] \\
\frac{de}{dt} &\leq -Ce(t)
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que l'énergie décroît exponentiellement avec une dissipation linéaire sur le domaine Ω et une dissipation faible représentée par un terme mémoire sur le domaine Ω .

Deuxième cas: On supposera dans ce cas que la fonction de relaxation $h(t)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$(A1) \quad h'(t) \leq 0$$

$$(A2) \quad e^{\alpha t} h(t) \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour tout } \alpha > 0$$

$$(A3) \quad 0 < \int_0^t h(s) ds < 1 \quad \text{pour tout } t > 0$$

Ensuite, on introduit les fonctionnelles suivantes:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \int_{\Omega} u_t u dx \quad . \quad \Phi_2(t) = \int_{\Gamma_1} v_t v d\sigma \\ \Psi_1(t) &= \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \quad ; \quad \Psi_2(t) = \int_{\Gamma_1} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) |\nabla_T v(s)|^2 ds d\sigma \\ \text{avec } H_{\alpha}(t) &= e^{-\alpha t} \int_t^{\infty} h(s) e^{\alpha s} ds, \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

et on pose:

$$V(t) = e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Psi(t)$$

$$\text{avec } \Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$$

$$\text{et } \Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$$

Proposition 4: Il existe des constantes positives α, β .. telles que

$$\alpha [E(t) + h \square \nabla u(t)] \leq V(t) \leq \beta [E(t) + h \square \nabla u(t) + \Psi(t)]$$

pour tout $t \geq 0$

Pour la décroissance de l'énergie, on calcule les dérivées des fonctionnelles $e(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $V(t)$, et on étudiera la décroissance de l'énergie, pour cela estimons la dérivée par rapport au

temps de la fonctionnelle V : on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t) &= \frac{d}{dt} e(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \Phi(t) + \eta \frac{d}{dt} \Psi(t) \\
\frac{d}{dt} V(t) &\leq - \left(\frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{2} \right) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon \right) \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma \\
&\quad - \left[\varepsilon - \eta \int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma \\
&\quad - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon C_p}{2} + \frac{h(t)}{2} - \eta \left(\int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) - 2(1-l)\mu \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&\quad - \eta \alpha \Psi(t) - \mu h \square \nabla u(t) - \left(\eta - \varepsilon \frac{\bar{h}}{2} - 2\mu \right) \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon < \min \left(\frac{1}{6}, \sqrt{\frac{4h(0)}{4C_p - 1}} \right)$, $\frac{\varepsilon \bar{h}}{2} < \eta < \frac{\varepsilon}{4\bar{l}}$ avec $\bar{l} = \int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds$ et $\bar{h} = \int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds$,

il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\frac{d}{dt} V(t) \leq -C_2 \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma + \Psi(t) + h \square \nabla u(t) \right]$$

on en déduit d'après la proposition (4) que

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &\leq -C_2 \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma + \Psi(t) + h \square \nabla u(t) \right) \\
&\leq -C_2 \left[E(t) + \frac{1}{2} (h \square \nabla u)(t) + \Psi(t) \right] \leq -\frac{C_2}{\beta} V(t)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que $V(t) \leq C e^{-\frac{C_2}{\beta} t}$ et par la suite $E(t) \leq E(0) e^{-\kappa t}$ avec $\kappa > 0$, ce qui signifie que l'énergie associée est exponentiellement décroissante lorsque le temps tend vers l'infini

VI. EQUATION DES ONDES AVEC DES CONDITIONS de TYPE CAUCHY VENTCEL

6.1 Introduction:

Dans cette partie nous considérons le problème (P_2) avec les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} a(x) &\equiv 0 \\ \text{et } c(x) &= 0 \\ b \in \mathcal{D}(\Omega) \quad &\text{et vérifiant } b \equiv 1 \text{ sur } \Omega \end{aligned}$$

Dans ce cas on ne considère qu'une seule dissipation interne faible sur une partie du domaine représentée par un terme mémoire.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + b(x) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, \infty[\\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[\\ u|_{\Sigma} &= v \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\ (u(0), v(0)) &= (u_0, v_0) \text{ et } (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1) \end{aligned}$$

On supposera que la fonction de relaxation $h(t)$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad &h'(t) \leq -\gamma h(t) \\ \text{(A2)} \quad &e^{\alpha t} h(t) \in L^1(\mathbf{0}, \infty) \quad \text{pour tout } \alpha > 0 \\ \text{(A3)} \quad &0 < \int_0^t h(s) ds < 1 \quad \text{pour tout } t > 0 \end{aligned}$$

On pose

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma$$

6.2 Comportement asymptotique

On pose

$$E(t, u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\sigma$$

et on a

$$\frac{dE}{dt} = + \int_{\Omega} \nabla u_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx$$

On remarque que le terme de droite de cette égalité ne garde pas de signe constant. On introduit l'opérateur suivant:

$$(h \square \nabla u(t)) = \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx$$

Un simple calcul permet d'écrire,

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} h \square \nabla u(t) - \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \right\} + \frac{1}{2} h' \square \nabla u(t) - \frac{h(t)}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx$$

On définit l'énergie modifiée en posant

$$\begin{aligned} e(t) &= E(t) + \frac{1}{2} (h \square \nabla u(t)) - \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ e(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} h \square \nabla u(t) - \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\sigma \end{aligned}$$

d'où la dérivée de l'énergie modifiée par rapport au temps:

$$\frac{de}{dt} = + \frac{1}{2} h' \square \nabla u(t) - \frac{h(t)}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx$$

Comme $h' \leq 0$, on en déduit que $\frac{d}{dt}e(t) \leq 0$ et l'énergie est décroissante si de plus $E(0) > 0$, on a $E(t) \leq E(0)$. Pour connaître le taux de décroissance de l'énergie ? De plus on démontre le résultat suivant:

Proposition: S'il existe un nombre $t_0 > 0$ tel que $h(t) \geq m > 0$, on a

$$E(t) \leq Ce^{-t} \text{ pour tout } t \geq t_0$$

VII. *CONCLUSION*

Dans ce travail, nous avons montré que la dissipation faible produite par le terme mémoire seul est suffisante pour qu'on ait décroissance exponentielle et ramener le système vers l'état d'équilibre. Ceci est rendu possible par les nouvelles fonctionnelles que nous avons introduit. On projete de généraliser ces travaux au cas ou le noyau h n'est pas nécessairement décroissant c'est à dire vérifiant les conditions suivantes:

$$h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et

$$[h'(t) + \gamma h(t)] e^{\alpha t} \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

VIII. REFERENCES

- [1] **M.M. Cavalcanti, M. Aassila and J.A. Soriano**, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, SIAM J. Control Opt., 38 (5) (2000) 1581-1602.
- [2] H. Engler, Weak solutions of a class of quasilinear hyperbolic integrodifferential equations describing viscoelastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal., 113 (1991), 1-38.
- [3] M. Fabrizio and A. Morro, "Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity", SIAM Stud. Appl. Math., Philadelphia 1992.
- [4] K.B. Hannsgen and R. L. Wheeler, Behavior of the solutions of a Volterra equation as a parameter tends to infinity, J. Integral Eqs., 7 (1984), 229-237.
- [5] W.J. Hrusa, Global existence and asymptotic stability for a nonlinear hyperbolic Volterra equation with large initial data, SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), 110-134.
- [6] W.J. Hrusa and M. Renardy, On wave propagation in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math., 43 (1985), 237-254.
- [7] W.J. Hrusa and M. Renardy, On a class of quasilinear partial integrodifferential equations with singular kernels, J. Diff. Eqs., 64 (1986), 195-220.
- [8] W.J. Hrusa and M. Renardy, A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 257-269.
- [9] S.O. Londen, An existence result for a Volterra equation in a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., 235 (1978), 285-304.
- [10] **M. Medjden and N.-e. Tatar**, On the wave equation with a temporal non-local term and a weak dissipation, Submitted.
- [11] **A. Khemmoudj, M. Medjden**, Exponential Decay for the semilinear Cauchy-Ventcel Problem with Localized Damping. Bol. Soc. Mat. 22 2 (2004); 97-116.
- [12] **M. Medjden and N.-e. Tatar**, *On the wave equation with a temporal non-local term and a weak dissipation, Dynamic Systems and Applications December 2007, Volume 16, Number 4.*

- [13] J. Prüss, "Evolutionary Integral Equations and Applications", Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [14] M. Renardy, Some remarks on the propagation and non-propagation of discontinuities in linearly viscoelastic liquids, *Rheol. Acta*, 21 (1982), 251-254.
- [15] M. Renardy, Coercive estimates and existence of solutions for a model of one-dimensional viscoelasticity with a nonintegrable memory function, *J. Integral Eqs. Appl.*, 1 (1988), 7-16.
- [16] M. Renardy, W.J. Hrusa and J.A. Nohel, "Mathematical Problems in Viscoelasticity", in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics No. 35, John Wiley and Sons, New York 1987.
- [17] Q. Tieu, Asymptotic behavior of a class of abstract integrodifferential equations and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 233 (1999), 130-147.
- [18] **M.M. Cavalcanti, M. Aassila and J.A. Soriano**, *Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain*, *SIAM J. Control Opt.*, 38 (5) (2000) 1581-1602.