

N° d'ordre :

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTÉ DES SCIENCES- PHYSIQUE**



**Mémoire  
présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER  
en PHYSIQUE**

**Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies**

**Par Lyes DJEBARNI**

**THÈME**

**Investigation Numérique du mode acoustique  
associé à différents modèles de plasma**

Soutenu publiquement le / / 2011, devant le jury composé de :

Mme.	A. HAMICI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Présidente
Mr.	M. TRIBECHE	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse
Melle	R. ROUAIGUIA	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur
Mr.	M. DEBIANE	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur

# *Remerciements*

Le travail présenté dans cette thèse a été entièrement réalisé au sein de l'équipe de Physique des Plasmas du Laboratoire de Physique Théorique de la Faculté des Sciences- Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne (USTHB) d'Alger.

Je remercie vivement le **Professeur M. TRIBECHE**, mon directeur de thèse, avec qui j'ai pris grand plaisir à travailler, dans la rigueur et la bonne humeur. Outre la confiance qu'il m'a témoignée, il a constamment suivi la progression de mon travail pour le mener à bien et à terme. Qu'il trouve ici à travers ces quelques lignes l'expression de mon profond respect et de ma très haute considération.

Je remercie vivement le **Docteur A. H. HAMICI**, Maître de Conférences du laboratoire de Physique Théorique, qui nous a honorés en acceptant de présider le jury de la présente thèse.

Mes remerciements les plus vifs vont également au **Docteur L. ROUAIGUIA**, Maître de Conférences du laboratoire de Physique Théorique, ainsi qu'au **Docteur M. DEBIANE**, Maître de Conférences du laboratoire de Mécanique des Fluides, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté et porté à ce travail en acceptant de prendre part au jury de la présente thèse.

Je remercie le **Docteur K. AOUTOU** pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues et surtout pour son aide précieuse lors d'une première lecture de ce manuscrit.

Mes vifs remerciements vont également à tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique, particulièrement aux membres de notre groupe de recherche (Younsi, Berbri, Amour, Boubakour, Ghebache, Mayout, Benzekka, Boukhalfa, Bacha) et à ceux de l'équipe de Physique du Solide avec lesquels nous avons beaucoup interagi.

---

Que tous mes amis et mes collègues de la Faculté de Physique soient remerciés pour leur amitié et disponibilité.

Finalement, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon père, ma mère, mes sœurs, mes frères et à tous mes proches pour leur inestimable affection, leur soutien et leurs encouragements sans cesse renouvelés. A tous ces derniers, j'exprime ma reconnaissance et ma profonde gratitude.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Introduction à la physique des plasmas</b>	<b>8</b>
1.1 Définition et terminologie . . . . .	8
1.1.1 Équilibre thermodynamique . . . . .	8
1.1.2 Longueur de Debye . . . . .	8
1.1.3 Fonction de distribution des vitesses . . . . .	9
1.1.4 Fréquence plasma . . . . .	10
1.1.5 Ondes dans les plasmas . . . . .	10
1.2 Eléments de la théorie du plasma . . . . .	10
1.2.1 Le modèle fluide du plasma . . . . .	10
1.2.2 Théorie cinétique du plasma . . . . .	12
1.3 Équation de Korteweg- de Vries . . . . .	14
1.4 Quelques notions sur la statistique non extensive . . . . .	16
1.4.1 Formalisme . . . . .	17
1.4.2 La forme entropique d'équiprobabilité . . . . .	18
1.4.3 Mécanique statistique non extensive et thermodynamique . . . . .	20
1.4.4 Application . . . . .	24
<b>2 Onde acoustique ionique solitaire associée à un plasma contenant des électrons non extensifs</b>	<b>25</b>
2.0.5 Présentation physique du problème . . . . .	25
2.0.6 Equations de base du modèle . . . . .	26
2.0.7 Résultats numériques . . . . .	29
2.0.8 Analyse faiblement non linéaire . . . . .	34
2.0.9 Equation de Korteweg- de Vries (K- dV) . . . . .	35

2.0.10	Equation de Korteweg- de Vries modifiée (MK- dV) . . . . .	36
2.0.11	Equation de Korteweg- de Vries généralisée (GK- dV) . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Approche dynamique des gaz de l'onde acoustique ionique dans un plasma non extensif</b>	<b>40</b>
3.1	Présentation physique du problème . . . . .	40
3.2	Modèle théorique et équations de base . . . . .	41
3.3	Solution stationnaire . . . . .	42
3.4	Résultats numériques et discussion . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Onde acoustique électronique solitaire associée à un plasma contenant des électrons non extensifs</b>	<b>55</b>
4.0.1	Présentation physique du problème . . . . .	55
4.0.2	Équations de base du modèle . . . . .	56
4.0.3	Résultats numériques et discussion . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Influence du piégeage non extensif sur les solitons acoustiques ioniques</b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	Modèle théorique . . . . .	64
5.3	Influence du piégeage non extensif sur les solitons acoustiques ioniques . . .	66
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>
	<b>Index</b>	<b>80</b>

# Introduction

La physique des plasmas [1] est l'étude des états ionisés de la matière. Les plasmas se produisent quand la matière est chauffée à une température plus grande que  $10^4$  degrés Celsius. On dit souvent que 99% de la matière visible de l'univers est à l'état plasma, c'est-à-dire, sous la forme d'un gaz électrisé où les atomes sont dissociés en ions positifs et en électrons. On rencontre les plasmas dans les étoiles, les ceintures de Van Allen, le vent solaire et dans l'atmosphère où le plasma se manifeste par la lueur des aurores boréales. D'autre part, dans notre vie quotidienne, les plasmas sont rencontrés sous la forme d'un gaz conducteur à l'intérieur des tubes fluorescents ou dans les néons. Il semblerait que nous vivons dans le 1% restant de l'univers et ceci peut être exprimé par l'équation de Saha. Celle ci indique que la quantité d'ionisation à prévoir dans un gaz en équilibre thermodynamique est donné par

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-\frac{U_i}{k_B T}}$$

ou  $n_i$  et  $n_n$  sont, respectivement, la densité (nombre de particules par unité de volume) des atomes ionisés et des atomes neutres,  $T$  est la température du gaz en degrés Kelvin (K),  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $U_i$  est l'énergie d'ionisation du gaz, c'est à dire, l'énergie requise pour arracher les électrons de l'atome neutre. Pour l'air à la température ambiante, nous avons  $n_n = 3 \times 10^{25} m^{-3}$ ,  $T \approx 300K$  et  $U_i = 14.5eV$  (pour l'azote), l'ionisation partielle  $n_i/n_n \approx 10^{-122}$  prévue par l'équation de Saha est négligeable. Avec l'augmentation de la température, le plasma devient entièrement ionisé et c'est pour cette raison que les plasmas existent dans les corps célestes avec des températures de plusieurs millions de degrés. Cependant, tout gaz ionisé n'est forcément pas à l'état plasma car n'importe quel gaz possède toujours un certain degré d'ionisation. Une définition correcte de l'état plasma peut s'énoncer comme suit: un plasma est un gaz quasi- neutre, composé de particules chargées et de particules neutres qui exhibent un comportement collectif. La neutralité des charges libres implique l'équilibre entre ces charges (autant de charge négative que de charge positive). Le comportement collectif dans un plasma est la réaction d'ensemble de ce système - lors d'une perturbation intérieur ou extérieur- qui tend instantanément à réorganiser les particules pour maintenir la condition de la neutralité des charges électriques. La physique des plasmas implique le concours de plusieurs domaines scientifiques tels que la chimie, la physique de la matière condensée, la biologie moléculaire, la dynamique des fluides...etc. Le but de la physique des plasmas est de décrire les processus élémentaires dans la matière ionisée. Celle ci est fondée selon des principes bien connus au niveau

microscopique. La description des plasmas comporte typiquement l'utilisation des équations de Maxwell pour les champs électromagnétiques, les équations de Liouville ou de Boltzmann pour modéliser la dynamique des électrons et des ions. Des approximations plus simples basées sur la description fluide pour les électrons et les ions sont également employées. Les plasmas sont le siège d'interactions des particules chargées qui les composent avec les champs électromagnétiques, de densités de charges et de courants liés à ces particules. Un certain nombre d'avancées importantes dans la compréhension de ces phénomènes ont été faites. Cependant, nous sommes loin de pouvoir faire des prévisions quantitatives du comportement du plasma. Le défi intellectuel en physique des plasmas est de comprendre le comportement macroscopique complexe des plasmas et de trouver les principes qui régissent leur comportement microscopique, tout en donnant le lien qui prévaut entre les deux niveaux de comportement. Le développement de la physique des plasmas durant les trois dernières décennies est dû à différentes applications telles que la fusion thermonucléaire ou la science de l'espace.

Au cours de ces deux dernières décades, une attention particulière a été accordée à la généralisation non extensive de l'entropie de Boltzmann, Gibbs et Shannon (BGS), reconnue d'abord par Renyi [2] et proposée bien plus tard par Tsallis [3]. Cette généralisation est due au fait qu'il est maintenant admis que le formalisme BGS ne décrit pas correctement les systèmes dont les interactions sont de longue portée. Pour cela, Tsallis a proposé une nouvelle forme d'entropie appelée alors la  $q$ -entropie. L'une des propriétés les plus remarquables du formalisme non extensif réside dans le fait que la fonction de distribution qui maximise la  $q$ -entropie est de nature non Maxwellienne. L'entropie de Tsallis a été utilisée avec un grand succès en physique des plasmas [4]-[16] et a même servi comme assise théorique pour les fonctions de distribution de type kappa (fonctions de distributions qui décrivent les particules suprathermiques). Il a été montré que ce type de distribution est une conséquence de l'entropie généralisée de Tsallis [3].

Le but du présent mémoire de Magister consiste à revisiter les modes acoustique non linéaires dans le contexte du formalisme non extensif. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux conditions d'existence et de réalisation des modes acoustiques solitaires. Ces structures qui peuvent être perçues comme «les modes normaux non linéaires» d'un plasma sont alors étudiées grâce à la méthode bien connue de Sagdeev [17] ou méthode du pseudo-potential (amplitude arbitraire), à la technique de la perturbation réductive de Washimi et Taniuti [18] (amplitude faible mais finie) et à l'approche dynamique des gaz. L'accent sera

alors mis sur l'influence inhérente à la dynamique des électrons non extensifs sur de tels systèmes. Le présent mémoire de Magister est composé de cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous définirons les concepts de base d'un plasma et introduirons les équations de base du modèle fluide standard que nous aurons à utiliser dans différentes parties de ce mémoire. Nous donnerons ensuite des rappels sur l'équation différentielle non linéaire classique de Korteweg- de Vries (K- dV) et sur le système d'équations Vlassov- Poisson. Nous décrirons leurs propriétés et insisterons sur les phénomènes qui les caractérisent. Nous terminerons ce chapitre par des définitions sur la statistique non extensive.

Le deuxième chapitre sera consacré à la généralisation du modèle bien connu (devenu, depuis, un modèle presque à caractère pédagogique) de l'onde acoustique ionique dans un plasma contenant des électrons non extensifs. Le modèle fluide sera utilisé pour étudier le comportement non linéaire de l'onde acoustique ionique solitaire associée à notre modèle de plasma. En régime faiblement non linéaire, nous établirons des équations de type Korteweg- de Vries (KdV), Korteweg- de Vries modifiée (MKdV) et Korteweg- de Vries généralisée (GKdV).

Dans le troisième chapitre de ce mémoire, nous reprendrons l'étude de l'onde acoustique ionique d'amplitude arbitraire dans un plasma composé d'une seule espèce d'ions et d'électrons non extensifs en utilisant l'approche de la dynamique des gaz pour les ions et une méthode mathématique différente pour décrire le pseudo- potentiel de Sagdeev. Celle ci, appelée méthode de Bernoulli, nous permettra de mettre en évidence l'existence de différents modes d'oscillations et d'étudier l'évolution du nombre de Mach critique en fonction du paramètre non extensif.

Au cours de quatrième chapitre, nous nous intéresserons à l'onde acoustique électronique (oscillation de Langmuir). Le plasma sera composé d'électrons froids, d'électrons chauds non extensifs et d'ions immobiles ne participant qu'à la neutralité de la charge électrique du plasma de base. Nous montrerons alors qu'à cause de la déviation des électrons de leur équilibre thermodynamique Maxwellien, les ondes acoustiques électroniques solitaires peuvent exhiber un comportement aussi bien compressif (potentiel électrostatique positif) que raréfactif (potentiel électrostatique négatif). Nous rechercherons alors dans quelle mesure et sous quelles conditions la non extensivité des électrons peut-elle affecter et modifier le mode acoustique électronique.

Le cinquième et dernier chapitre constituera une généralisation du phénomène de piégeage des particules (ici des électrons) dans le contexte de la nouvelle statistique de Tsallis. Nous nous inspirerons des célèbres travaux de H. Schamel pour établir une fonction de distribu-

tion des électrons piégés non extensifs que nous appliquerons de manière succincte à l'onde acoustique ionique.

Nous terminerons notre manuscrit par une conclusion et une présentation succincte de nos perspectives.

# 1

## Introduction à la physique des plasmas

### 1.1 Définition et terminologie

#### 1.1.1 Équilibre thermodynamique

Un gaz est en état d'équilibre thermodynamique lorsque les électrons et les ions sont décrits par la même distribution (distribution Maxwellienne) et caractérisée par les mêmes paramètres. Dans ce cas, le milieu est en équilibre avec son environnement et rayonne et absorbe l'énergie avec le même taux. Son spectre de radiation est alors similaire à celui du corps noir. Il arrive parfois que les ions et les électrons ne soient pas à la même température et sont donc hors équilibre thermodynamique avec leur environnement.

#### 1.1.2 Longueur de Debye

De manière générale, le potentiel électrostatique créé par une particule chargée et isolée est donné par ( $1/4\pi\epsilon_0 \rightarrow 1$ )

$$\Phi = q/r \tag{1.1}$$

Dans un plasma, la situation est différente car une charge test  $q$  attire les charges de signe opposé qui tentent d'écranter le potentiel qu'elle crée au sein du plasma et qui est donné par[1]

$$\Phi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \tag{1.2}$$

où  $\lambda_D$  est appelé longueur de Debye. Pour un plasma à deux composantes (électrons et protons), cette longueur de Debye vaut

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{8\pi n e^2}} = 4.9 \sqrt{\frac{T}{n}} \quad (1.3)$$

$n$  représente la densité électronique (ou ionique) exprimée en  $\text{cm}^{-3}$ ,  $T$  est la température en degré Kelvin, et  $k_B$  la constante de Boltzmann ( $1.38 \cdot 10^{-16}$  ergs/K). Notons qu'il est de tradition en physique des plasmas d'exprimer la température en unité d'énergie et de faire donc abstraction de la constante  $k_B$ . La longueur de Debye mesure en fait le rayon de la sphère d'influence de la charge test dans le plasma.

### 1.1.3 Fonction de distribution des vitesses

Considérons un ensemble de particules dont la distribution des vitesses est décrite par  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ . La quantité  $f d\mathbf{v} d\mathbf{r}$  représente le nombre de particules dont le vecteur vitesse et le vecteur position sont compris, respectivement, entre  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$  et  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ . La densité des particules (ou nombre de particules par unité de volume) est alors donnée par

$$n(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} \quad (1.4)$$

D'après le théorème  $H$  de Boltzmann, sous l'action de collisions binaires, la distribution des vitesses la plus probable à laquelle doit obéir un gaz idéal, est la distribution de Maxwell définie par [1]

$$n f(\mathbf{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T} \quad (1.5)$$

où  $m$  est la masse de la particule considérée (électron ou ion) et  $T$  sa température cinétique. Bien que la distribution de Maxwell soit difficile à réaliser dans les plasmas de laboratoire à cause des interactions entre particules et de l'interaction plasma- paroi, il est parfois plus simple de supposer que le plasma est décrit (approximativement) par une distribution des vitesses Maxwellienne. Sinon, on sera amenés à procéder à l'intégration numérique d'équations cinétiques (équation de Vlasov, de Boltzmann ou de Fokker- Planck) souvent très complexes.

### 1.1.4 Fréquence plasma

A cause de la nature des forces qui s'exercent entre les particules chargées du plasma (force de longue portée), ce dernier se comporte comme un système d'oscillateurs couplés avec une fréquence caractéristique appelée fréquence plasma  $\omega_p$  et définie par

$$\omega_p = 2\pi f_p = \left( \frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.6)$$

### 1.1.5 Ondes dans les plasmas

Le plasma peut être le siège d'un grand nombre d'oscillations. Ces ondes, linéaires ou non linéaires, peuvent se propager dans ce milieu. L'aspect linéaire provient d'un certain nombre d'approximations faites dans le cas d'ondes de faible amplitude. Ces ondes peuvent être soit de nature électrostatique ou électromagnétique. Leurs fréquences dépendent des particules chargées (électron ou ion) auxquelles ces oscillations sont associées. On parlera d'ondes de hautes fréquences (par rapport aux fréquences plasma) dans le cas des électrons et de basse fréquence dans le cas des ions.

## 1.2 Eléments de la théorie du plasma

### 1.2.1 Le modèle fluide du plasma

Une simple description de la majeure partie des phénomènes observés dans les plasmas peut être obtenue grâce au modèle dit fluide. Dans ce modèle, le caractère individuel des particules ainsi que la nature microscopique des processus sont occultés. Ne subsistent alors que les grandeurs macroscopiques (vitesse moyenne, densité de particules, flux de particules...) obtenues à partir des moments de la fonction de distribution des vitesses (la densité est le moment d'ordre zéro, la vitesse moyenne est un moment d'ordre un...etc). Les particules d'une même espèce (les électrons par exemple) sont alors supposées se déplacer avec la même vitesse fluide (leur vitesse moyenne) et avoir la même densité numérique. Ce modèle reste valable aussi longtemps que le nombre de particules mises en jeu est important. Cependant, il ne peut décrire certains processus microscopiques tels le phénomène d'amortissement Landau qui dépend des détails de la fonction de distribution des vitesses. Nous allons dans ce qui suit rappeler de manière succincte les équations de base du modèle fluide.

**Equation de continuité**

La conservation de la matière exige que le nombre totale de particules  $N$  contenues dans un volume  $V$  ne change que s'il y a un flux net de particules traversant la surface  $S$  qui entoure ce volume. Cette conservation se traduit par l'équation dite de continuité suivante

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (1.7)$$

où  $n = N/V$  et  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse moyenne de l'espèce de particules considérée.

**Équation du mouvement d'un fluide**

L'équation du mouvement d'une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , soumise à l'action d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  et d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , est donnée par

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.8)$$

L'équation du mouvement d'un élément fluide est alors donnée par

$$n_s m_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{u}_s$  est la vitesse fluide des particules d'espèce  $s$ . Pour rendre compte du caractère fluide de l'équation du mouvement, il est de coutume de calculer la force par unité de volume. Notons que dans l'équation de mouvement précédente, nous pouvons toujours tenir compte de l'action d'autres forces telles celle due à un gradient de pression, le poids de l'élément fluide, la force ponderomotrice...etc.

**Équation d'état**

Les équations de continuité et du mouvement font parties d'une hiérarchie infinie, car le terme d'ordre inférieur fait intervenir un terme d'ordre supérieur. Un tel modèle admet un système d'équations fini quand on impose une relation de fermeture. Pour cela, on peut utiliser l'équation d'état thermodynamique qui relie la densité numérique  $n$  et la pression  $p$  définie par

$$p = C n^\gamma$$

où  $C$  est une constante et  $\gamma = C_p/C_v$  le rapport des chaleurs spécifiques. Dans le cas où le plasma peut être assimilé à un gaz parfait, nous avons

$$p = nk_B T$$

### Equation de Poisson

Un plasma contient des charges dont les mouvements induisent des courants et des champs électromagnétiques. Il est donc tout à fait naturel que le modèle fluide soit couplé aux équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

où  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  représentent, respectivement, les densités de charges et de courant. La première équation est l'une des équations les plus importantes de la physique des plasmas. Elle peut être réécrite sous la forme suivante

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

mieux connue sous le nom d'équation de Poisson, où  $\phi$  est le potentiel électrostatique et  $\rho = \sum_s n_s q_s$  la charge par unité de volume.

### 1.2.2 Théorie cinétique du plasma

La base de la théorie de la physique des plasmas est la théorie cinétique. Dans cette théorie, on définit une fonction  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  telle que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  représente le nombre probable de particules (d'une espèce donnée) dans le volume élémentaire  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ , autour du point  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  dans l'espace de phase, à l'instant  $t$ , où  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  est le vecteur position et  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  le vecteur vitesse. La densité numérique ou nombre de particules (électrons ou ions) par unité de volume d'une espèce donnée, est alors définie par

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (1.12)$$

## Équations de la théorie cinétique

L'équation fondamentale qui régit l'évolution, dans l'espace des phases, de la fonction de distribution  $f_s$  est l'équation de Boltzmann donnée par

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_s + \frac{\mathbf{F}}{m_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{F}$  représente la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur la particule d'espèce  $s$ ,  $\left( \frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c$  est le terme de collision et

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} &= \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} &= \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z} \end{aligned} \quad (1.14)$$

En réalité, l'équation de Boltzmann n'est autre que la dérivée totale  $\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{dt}$ . Cette dérivée totale peut être perçue comme le taux de changement vu dans un repère se déplaçant avec les particules, la différence est que nous devons maintenant considérer des particules se déplaçant dans un espace  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  à six dimensions. En l'absence de collisions, l'équation de Boltzmann se réduit à l'équation dite de Vlasov. Dans un plasma suffisamment chaud, les collisions peuvent être négligées. Si, en outre, la force  $\mathbf{F}$  est purement électromagnétique, l'équation précédente peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_s + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.15)$$

appelée équation de Vlasov. C'est généralement l'équation la plus étudiée dans la théorie cinétique. Notons au passage qu'en présence de collisions entre particules chargées et particules neutres, le terme collisionnel  $(\partial f / \partial t)_c$ , peut être approché par

$$\left( \frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c = \frac{f_n - f_s}{\tau} \quad (1.16)$$

appelé terme de collision de Krook.  $\tau$  représente le taux de collision. Dans l'approximation électrostatique, la force  $\mathbf{F}$  qui s'exerce sur une particule de charge  $q_s$  est donnée par

$$\mathbf{F} = -q_s \nabla \phi \quad (1.17)$$

où  $\phi$  est le potentiel moyen donné par (systèmes MKSA et CGS)

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\sum_s q_s \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\epsilon_0} = 4\pi \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (1.18)$$

La sommation porte sur toutes les espèces de particules présentes dans le plasma. Le caractère non linéaire du troisième terme de l'équation de Vlassov est manifeste. Il fait intervenir la force électrostatique, elle même fonction de  $f_s$ .

### 1.3 Équation de Korteweg- de Vries

La non linéarité et la dispersion sont les propriétés caractéristiques les plus importantes d'un plasma. C'est pourquoi, nous allons introduire et discuter une équation différentielle partielle (EDP) non linéaire classique, connue sous le nom d'équation de Korteweg- de Vries (KdV). Celle-ci apparaît dans une variété de situations physiques et est donnée par [17]

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + aU \frac{\partial U}{\partial \xi} + b \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.19)$$

où  $\xi$  et  $\tau$  sont des variables indépendantes,  $a$  et  $b$  des constantes réelles non nulles et  $U$  une grandeur caractéristique du plasma (densité, potentiel, vitesse fluide...etc). L'équation (1.19) est à la fois non linéaire et dispersive, le terme convectif  $U\partial U/\partial \xi$  traduit la non linéarité tandis que  $\partial^3 U/\partial \xi^3$  reflète la dispersion. Historiquement, l'équation (1.19) fut établie par Korteweg et de Vries en relation avec un problème d'ondes de surface dans un canal d'eau à profondeur finie. Plus tard, Gardner et Morikawa [19] établirent une équation analogue à partir d'un modèle hydro- magnétique de plasma froid pour décrire le comportement de perturbations se propageant perpendiculairement à un champ magnétique avec une vitesse proche de celle d'Alfven. D'autres auteurs montrèrent que (1.19) pouvait aussi bien décrire la propagation unidimensionnelle d'ondes acoustiques dans les cristaux que fournir une description faiblement non linéaire de perturbations sonores se propageant à une vitesse voisine de celle du son [18]. Et c'est à partir de là et dans un effort de généralisation que Su et Gardner [20] montrèrent que (1.19) pouvait s'appliquer à une large classe de systèmes dispersifs et faiblement non linéaires à l'instar de l'équation de Burgers dans les milieux dissipatifs et faiblement non linéaires. L'équation (1.19) peut être réécrite sous la forme généralement rencontrée dans la littérature

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.20)$$

moyennant les changements de variables  $\xi \rightarrow \xi b^{1/3}$  et  $U \rightarrow U/ab^{-1/3}$ . Notons que pour des ondes acoustiques ioniques se propageant avec une vitesse proche de celle du son, le terme  $U\partial U/\partial \xi$  de l'équation (1.20) provient du terme non linéaire convectif  $\mathbf{v}_i \cdot \nabla v_i$  de

l'équation de mouvement des ions. Remarquons que si le terme dispersif  $\partial^3 U / \partial \xi^3$  est omis dans l'équation (1.20), alors l'équation  $\partial U / \partial \tau + U \partial U / \partial \xi = 0$  admettra comme solution

$$U(\xi, \tau) = U(\xi - U(\xi, \tau), 0) \quad (1.21)$$

Celle-ci indique que toute perturbation initiale se déformera de manière continue dans les régions où  $\partial U(\xi, 0) / \partial \xi < 0$  et éventuellement deviendra physiquement inacceptable. En réalité, le terme dispersif de l'équation (1.20) limite et prévient cette déformation illimitée. Avant d'aller plus loin, il convient de discuter les solutions solitaires de l'équation (1.20). A ce propos, moyennant le changement de variable  $\chi = \xi - c\tau$  où  $c$  est une constante, l'équation (1.20) peut être deux fois intégrée pour obtenir

$$\left[ \frac{dU(\chi)}{d\chi} \right]^2 = \frac{1}{3} U^2(\chi) [3c - U(\chi)] \quad (1.22)$$

où les conditions aux limites  $U(\chi) \rightarrow 0$ ,  $dU(\chi)/d\chi \rightarrow 0$  et  $d^2U(\chi)/d\chi^2 \rightarrow 0$  lorsque  $|\chi| \rightarrow \infty$  ont été utilisées. L'équation (1.22) peut alors être intégrée pour donner

$$U(\xi - c\tau) = 3c \operatorname{Sech}^2 \left[ \sqrt{c/2} (\xi - c\tau) \right] \quad (1.23)$$

Dans l'équation (1.23), la hauteur, la largeur et la vitesse du pulse sont proportionnelles à  $c$ ,  $c^{-1/2}$  et  $c$  respectivement. De nombreuses études numériques [21] de l'équation (1.20) indiquent que les solutions en ondes solitaires (soliton) données par (1.23) jouent un rôle intrinsèque dans l'évolution temporelle du système pour une variété de conditions initiales. Pour des données initiales localisées, un nombre fini de solitons émergent avec différentes hauteurs  $3c_1, 3c_2 \dots$  etc., chaque soliton se propageant vers la droite. Ces solitons interagissent en préservant leurs identités. Lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , les solitons se réarrangent dans l'ordre des hauteurs croissantes (le plus grand soliton se trouvant alors à l'extrême droite). L'investigation expérimentale des propriétés de la solution en onde solitaire de l'équation (1.20) a été réalisée par Ikezi *et al.* [22], [23]. Ils ont alors rapporté l'existence d'un désaccord entre l'observation expérimentale et la description théorique basée sur une image simplifiée du soliton de Korteweg de Vries. Plus tard, certains auteurs ont tenté de réduire cet écart en prospectant l'effet d'une température ionique finie [24] et l'effet des grandes amplitudes [25]. Un soliton résulte de l'équilibre de deux effets : la non linéarité et la dispersion [26]. La non linéarité en couplant différents modes  $(\omega_1, k_1)$ ,  $(\omega_2, k_2)$  donne naissance à d'autres modes d'ordre supérieur  $(\omega_1 + \omega_2, k_1 + k_2)$ . Ce processus donne lieu au phénomène bien connu de la déformation de l'onde (wave steepening) : le bord d'attaque de l'onde se déforme à mesure que la perturbation se déplace. Au cas où elle ne serait

pas stoppée par un quelconque autre phénomène physique, cette déformation donne lieu au déferlement de l'onde : en une position  $x$  donnée, l'amplitude de l'onde prend différentes valeurs, une situation qui est non physique. La dispersion est justement l'un des phénomènes qui préviennent le déferlement et l'empêchent de se produire. Considérons deux modes normaux quelconques du plasma,  $(\omega_1, k_1)$ ,  $(\omega_2, k_2)$ . Ces deux modes, par définition, satisfont la relation de dispersion  $D(\omega_{1,2}, K_{1,2}) = 0$ . A cause de la dispersion, l'onde de battement (the beat wave)  $(\omega_1 + \omega_2, k_1 + k_2)$  peut ne pas satisfaire la relation de dispersion  $D(\omega_{1,2}, K_{1,2}) \neq 0$  et donc ne constituera pas un mode normal du système. Le couplage non linéaire à des ordres supérieurs est alors stoppé. La non linéarité et la dispersion sont donc les ingrédients nécessaires pour l'obtention de solutions solitaires dans le cas d'une onde non linéaire. Cependant, quoique la plupart des ondes dans les plasmas présentent de la dispersion et que le plasma lui-même se comporte comme un milieu non linéaire, seulement un nombre restreint d'ondes est connu pour admettre des solutions en soliton. Les ondes acoustiques ioniques exhibent de telles solutions localisées et ont été largement investies tant sur le plan théorique qu'expérimentale. D'ailleurs la redécouverte de l'équation de Korteweg- de Vries pour ce type d'onde dans les plasmas a été l'un des résultats les plus marquants [27].

## 1.4 Quelques notions sur la statistique non extensive

On sait que malgré son grand succès, la mécanique statistique de Boltzmann-Gibbs n'est pas réellement universelle. Une classe des ensembles physiques impliquant des interactions à longue portée ou des structures multi-fractales peuvent à peine être traitées dans le cadre de la mécanique statistique traditionnelle. Une généralisation non extensive récente de la théorie de Boltzmann-Gibbs (BG), désignée sous le nom de mécanique statistique non extensive, permet d'analyser de tels systèmes. Ce renouveau dans les bases de la mécanique statistique a été lancé par la proposition de Tsallis d'une entropie non extensive en 1988 [2]. Plus tard il s'est avéré qu'une thermodynamique généralisée confirmée peut être construite sur la base de l'entropie de Tsallis, et depuis, nous avons été témoins d'une profusion des recherches à ce sujet.

La mécanique statistique non extensive est un domaine toujours en rapide développement, même au niveau fondamental. Cependant, quelques structures remarquables et une variété d'applications intéressantes ont déjà fait leur apparition. Par conséquent, il semble tout à fait opportun de rappeler brièvement ces développements. Que pouvons-nous dire au sujet de la mécanique statistique de BG et de la thermodynamique standard? Une croy-

ance existe, parmi un bon nombre de physiciens aussi bien que parmi d'autres scientifiques, que ces deux formalismes reliés ensemble soient éternels, omniprésents et universels. Après la grande réussite des applications de la thermodynamique standard et après le raccordement de Boltzmann de l'entropie macroscopique de Clausius à la théorie des probabilités, la statistique de BG est considérée comme étant l'un des piliers de la science moderne.

Avant d'entrer dans le formalisme thermodynamique statistique non extensif, mentionnons certaines anomalies thermodynamiques. Il est de nos jours bien connu qu'il existe une variété de systèmes physiques pour lesquels la statistique de BG ne peut être appliquée (ferromagnétisme, turbulence bidimensionnelle d'un plasma d'électrons, diffusion anormale de Levy, systèmes granulaires, thermalisation anormale de phonon-électron, neutrinos solaires, vitesses particulières des galaxies...etc). Certains de ces exemples semblent être hors du domaine de validité du formalisme standard, d'autres sont considérés comme exemples de controverse.

### 1.4.1 Formalisme

#### Entropie

L'information détaillée sur le système mécanique microscopique est donnée par la fonction entropie. C'est par elle que le raccordement de la thermodynamique aux lois macroscopiques sera établi. Cette fonction particulière est déterminée par un type spécifié (ou la géométrie) de l'occupation de l'espace des phases (l'espace de Hilbert ou l'espace analogue). La géométrie de cette structure dépend non seulement de la dynamique microscopique à laquelle le système obéit, mais également aux conditions initiales auxquels le système est placé à  $t = 0$ . En terme familier, nous pouvons réaliser la détermination microscopique de la dynamique du système, tandis que les conditions initiales déterminent la région dans laquelle elle peut se réaliser. Ce point de vue est conforme à la perspective d'Einstein sur la mécanique statistique classique, et particulièrement avec sa critique [28], [29] du célèbre principe de Boltzmann

$$S = k \log W \tag{1.24}$$

Cependant, le problème est que, jusqu'ici, il n'y a aucune façon systématique pour déterminer de façon unique la fonction de l'entropie. On s'attend à ce que l'optimisation (maximisation) de cette entropie et sous des contraintes physiquement appropriées fournisse la distribution correcte de probabilité pour les états microscopiques de l'état stationnaire macro-

scopique du système. Boltzmann, puis Gibbs, ont proposé la forme célèbre de la base de la mécanique statistique standard. Cette forme (dans sa version discrète) est exprimée par la formule de Shannon

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^w p_i \ln p_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^w p_i = 1 \quad (1.25)$$

Quand les états microscopiques sont équiprobables (c.-à-d.,  $p_i = 1/W, \forall i$ ), l'entropie (1.25) prend son maximum représenté par l'équation.(1.24). La forme (1.25) a été utilisée avec grand succès. La généralisation de la statistique de BG inspirée par les multi- fractales a été donnée par Tsallis [3] sous la forme suivante

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^w p_i^q}{q - 1} \quad (q \in R) \quad (1.26)$$

Avec  $p_i^q = p_i e^{(q-1) \ln p_i} \sim p_i [1 + (q-1) \ln p_i]$ . Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi  $k = 1$ . On vérifie que dans la limite  $q \rightarrow 1$ ,  $S_q$  se réduit à  $S_{BG}$ . La forme de l'entropie  $S_q$  (1.26) est non négative et prend un extremum quand les états microscopiques sont équiprobables ( $p_i = 1/W, \forall i$ ), donnée par

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (1.27)$$

où  $W^{1-q} = \sum_{i=1}^w p_i^q$ .  $S_q$  prend son maximum pour  $q > 0$  et minimum pour  $q < 0$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux systèmes indépendants, alors la probabilité pour que  $A$  et  $B$  soient dans le même état microscopique est  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$  ( $\forall i, j$ ), impliquant que l'entropie correspondante vérifie l'égalité suivante

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B) \quad (1.28)$$

L'entropie  $S_q$  est dite sub-extensive pour  $q > 1$  et super-extensive pour  $q < 1$  et se réduit à  $S_{BG}$  dans la limite  $q \rightarrow 1$ .

## 1.4.2 La forme entropique d'équiprobabilité

### Équations différentielles ordinaires

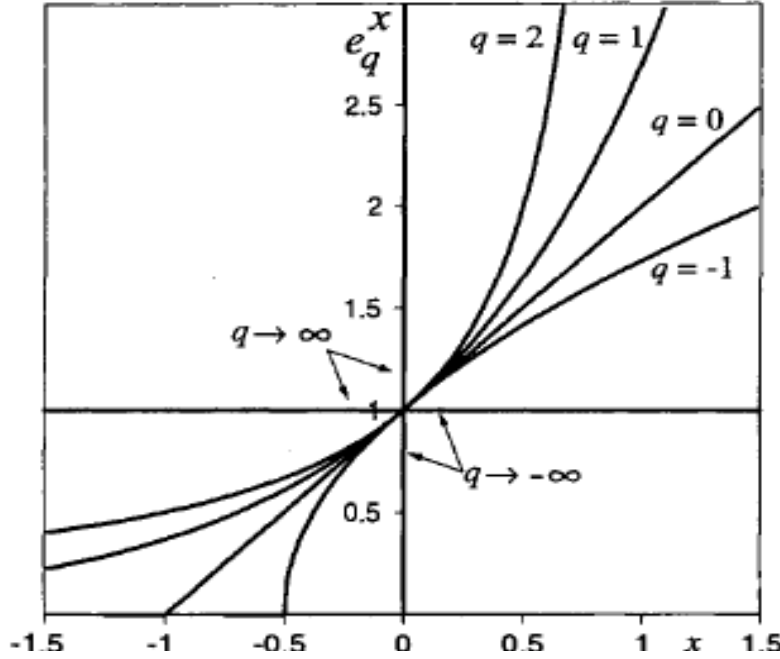
Considérons l'équation différentielle suivante

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (1.29)$$

avec la condition initiale  $y(x = 0) = 1$ . La solution générale de l'équation différentielle (1.29) est donnée par

$$y_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (1.30)$$

Cette solution est noté  $e_q^x$  ( $q$  exponentielle, avec  $e_1^x = e^x$ ) et dont les variations sont représentées sur la figure 1



**Figure 1:** Fonction  $q$ - exponentielle pour des valeurs typiques de  $q$ . Pour  $q > 1$ , cette fonction est définie dans l'intervalle  $[-\infty, (q - 1)^{-1}]$ , et diverge lorsque  $x \rightarrow (q - 1)^{-1}$ . Pour  $q < 1$ , cette fonction est définie sur tous les  $x$ , mais est nul pour  $x < -(1 - q)^{-1}$ . Dans la limite  $x \rightarrow 0$ ,  $e_q^x \sim 1 + x (\forall q)$ . Cette figure a été reproduite à partir du livre: M. Gell-Mann et C. Tsallis, "*Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications*" (Oxford, University Press, 2004), p. 6.

Sa fonction inverse est donnée par

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x \quad (1.31)$$

noté  $\ln_q x$  avec  $\ln_1 x = \ln x$  et qui satisfait à la propriété de la pseudo additivité suivante

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q(x_A) + \ln_q(x_B) + (1 - q) \ln_q(x_A) \ln_q(x_B) \quad (1.32)$$

En identifiant l'équation (1.31) avec l'équation (1.27), l'entropie de Tsallis peut être généralisée à la forme suivante

$$S_q = \ln_q W \quad (1.33)$$

Rappelons que les cas  $q \rightarrow -\infty$  et  $q = 0$  figurent parmi les cas possibles.

### Additivité

Soit un système composé de sous-ensembles  $A$  (avec  $W_A$  possibilités) et  $B$  (avec  $W_B$  possibilités), dont les probabilités communes sont  $p_{ij}^{A+B}$  ( $i = 1, 2, \dots, W_A; j = 1, 2, \dots, W_B$ ). On définit la probabilité marginale

$$p_i^A \equiv \sum_{j=1}^{w_B} p_{ij}^{A+B} \quad (1.34)$$

avec  $\sum_{i=1}^{w_A} p_i^A = 1$ , et

$$p_j^B \equiv \sum_{i=1}^{w_A} p_{ij}^{A+B} \quad (1.35)$$

avec  $\sum_{j=1}^{w_B} p_j^B = 1$ . En général,  $p_i^A p_j^B \neq p_{ij}^{A+B}$ , sinon  $A$  et  $B$  seraient indépendants au sens de la probabilité. Dans l'autre cas, ils sont dépendants ou corrélés. Soient

$$S_q(A) \equiv S_q(\{p_i^A\}) \quad (1.36)$$

et

$$S_q(B) \equiv S_q(\{p_j^B\}) \quad (1.37)$$

On peut alors définir l'entropie conditionnelle  $p(A/B)$  et  $p(B/A)$  si et seulement si  $A$  et  $B$  sont indépendants. En posant  $S_q(A/B) = S_q(A)$  et  $S_q(B/A) = S_q(B)$ , on peut démontrer que [30], [31]  $S_q(A+B) \equiv S_q(\{p_{ij}^{A+B}\})$ , en générale satisfait à

$$\begin{aligned} S_q(A+B) &= \{S_q(A) + S_q(A/B) + (1-q)S_q(A)S_q(B/A) \\ &= S_q(B) + S_q(B/A) + (1-q)S_q(B)S_q(A/B)\} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Quand  $A$  et  $B$  sont indépendants, cette dernière équation nous donne l'équation (1.28) précédente. Les diverses caractérisations de  $S$  que nous avons présentées devraient fournir une intuition raisonnable de son contenu physique et mathématique.

### 1.4.3 Mécanique statistique non extensive et thermodynamique

La détermination de la distribution la plus probable dans le cadre de la statistique classique, repose sur le fait que le système est en contact avec un thermostat, à savoir l'ensemble canonique et la considération des contraintes suivantes

$$\sum_{i=1}^w p_i = 1 \quad (1.39)$$

$$\sum_{i=1}^w p_i E_i = U \quad (1.40)$$

où  $\{E_i\}$  est l'énergie de l'état  $i$  que peut occuper le système,  $U$  est l'énergie interne du système possédant une valeur fixe et finie. Ainsi l'optimisation de l'entropie  $S_{BG}$

$$S_{BG} = k \sum p_i \ln p_i \quad (1.41)$$

conduit à l'expression de la distribution la plus probable

$$p_i = e^{-\beta \varepsilon_i} / Z_{BG} \quad (1.42)$$

$$Z_{BG} = \sum_l^w e^{-\beta \varepsilon_l} \quad (1.43)$$

Dans la statistique non extensive, la détermination de la distribution la plus probable du système repose sur une nouvelle définition de l'énergie interne du système qui dépend du paramètre non extensif  $q$

$$\sum_{i=1}^w p_i E_i = U_q \quad (1.44)$$

où  $E_i$  est l'énergie de l'état  $i$  du système et  $U_q$  son énergie interne. Par contre, la contrainte (1.39) reste inchangée. Dans le but d'optimiser l'entropie

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^w p_i^q}{q-1} \quad (q \in R) \quad (1.45)$$

on introduit les facteurs de Lagrange  $\alpha$  et  $\beta$  et la fonction

$$\phi_q = \frac{S_q}{k} + \alpha \sum_{i=1}^w p_i - \alpha \beta (q-1) \sum_{i=1}^w p_i E_i \quad (1.46)$$

Cette fonction possède un extremum déterminé à partir de  $\partial \phi_q / \partial p_i = 0, \forall i$ . On obtient alors

$$p_i = \frac{[1 - \beta(q-1)E_i]^{1/(q-1)}}{Z_q} \quad (1.47)$$

avec

$$Z_q = \sum_{l=1}^w [1 - \beta(q-1)E_l]^{1/(q-1)} \quad (1.48)$$

Ainsi, la fonction de distribution stationnaire (méta-équilibre) est la fonction  $q$ -exponentielle ( $e_q^x$ ). Cependant, la contrainte (1.39) n'est pas adéquate pour des situations anormales telles que la symétrie de Lévy (la super diffusion). En effet, la contrainte normale pour un tel problème, en principe, devrait fixer  $\int dx x^2 p_q(x)$  (rappelons que la symétrie

impose  $\int dx xp_q(x) = 0$ ), mais qui diverge pour l'optimisation de  $p_q$  ( qui s'avère être  $e_q^{-\beta x^2}$ ). Il a été remarqué qu'un autre choix de  $p_i^q$  peut être utilisé dans la contrainte en fixant  $\sum_{i=1}^w p_i^q E_i$ . Ce choix [32]-[35] a simultanément résolu les deux difficultés mentionnées:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 [p_q(x)]^q$ . Cependant, de nouvelles difficultés mathématiques émergent avec ce choix de la contrainte. Celles ci sont principalement: (1) La non invariance de la distribution meta- équilibre par le changement de niveau zéro pour les énergies  $\{E_i\}$ , (2)  $\sum_{i=1}^w p_i^q$  diffère généralement de l'unité, (3) Les hypothèses  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$  et  $E_{ij}^{A+B} = E_i^A + E_j^B$  ne donnent pas  $U_q^{A+B} = U_q^A + U_q^B$ . Au vu de ces difficultés mathématiques, il est devenu inacceptable que la contrainte appliquée à une constante ne puisse pas reproduire cette même constante. Ceci a naturellement conduit à donner une formulation définitive de la théorie, introduite en 1998 [36] et qui est actuellement utilisée. La contrainte (1.40) se généralise comme suit

$$\langle H \rangle_q = \frac{\sum_{i=1}^w p_i^q E_i}{\sum_{j=1}^w p_j^q} = U_q \quad (1.49)$$

Cette forme de contrainte de l'énergie s'est avérée appropriée pour lever les trois difficultés qui subsistent simultanément.

En théorie cinétique des gaz, la distribution la plus probable est remplacée par une fonction de distribution des vitesses. Dans sa version la plus classique, cette fonction est la fonction de distribution des vitesses de Maxwell- Boltzmann qui caractérise l'équilibre thermodynamique. La détermination de cette distribution repose sur le fait que les trois composantes de la vitesse ne sont pas corrélées. Cependant, cette propriété ne tient pas dans les systèmes dotés d'interactions à longue portée comme le cas d'un plasma. Afin d'établir l'expression de la fonction de distribution des vitesses en tenant compte des corrélations entre les différentes composantes, on utilise le formalisme non extensif. Pour simplifier le problème, considérons le cas à deux dimensions

$$F \left( \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) d^2v = e_q(f^{q-1}(v_x) \ln_q f(v_x) + f^{q-1}(v_y) \ln_q f(v_y)) dv_x dv_y \quad (1.50)$$

où

$$e_q(f) = [1 + (1 - q)f]^{1/(q-1)} \quad (1.51)$$

$$\ln_q(f) = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (1.52)$$

On vérifie aisément que  $e_q(\ln_q(f)) = \ln_q(e_q f) = f$  et  $\frac{d}{dx} \ln_q(f) = f^{-q} \frac{df}{dx}$ . En dérivant  $\ln_q(F)$  par rapport à  $v_x$ , nous obtenons

$$\frac{\partial \ln_q(F)}{\partial x} = \frac{\partial(e_q(f^{q-1}(v_x) \ln_q f(v_x) + f^{q-1}(v_y) \ln_q f(v_y)))}{v_x} \quad (1.53)$$

ou de façon équivalente,

$$\frac{v_x F'(\chi)}{\chi F^q(\chi)} = \frac{\partial}{\partial v_x} \{f^{q-1}(v_x) \ln_q f(v_x)\} \quad (1.54)$$

avec  $\chi = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . En introduisant la notation abrégée suivante

$$\Phi(\chi) = \frac{1}{\chi} \frac{F'(\chi)}{F^q(\chi)} \quad (1.55)$$

nous réécrivons l'équation (1.54) comme suit

$$\Phi(\chi) = \frac{1}{v_x} \{f^{q-1}(v_x) \ln_q f(v_x)\} = \frac{1}{v_y} \{f^{q-1}(v_y) \ln_q f(v_y)\} \quad (1.56)$$

On peut choisir  $\Phi(\chi) = -m\gamma$ , où  $m$  représente la masse de la particule et  $\gamma$  une constante arbitraire. Bien entendu, l'introduction de  $m$  à cet endroit est dictée uniquement par la connaissance de la limite Maxwellienne. En utilisant la transformation suivante(1.52)

$$f^{q-1}(v_x) \ln_q f(v_x) = \ln_{q^*} f(v_x) \quad (1.57)$$

où  $q^* = 2 - q$ , nous avons

$$\ln_{q^*} f(v_x) = -\frac{m\gamma}{2} v_x^2 + \ln_{q^*} A \quad (1.58)$$

En faisant agir la  $q$ - exponentielle des deux côtés de l'équation (1.58), il s'ensuit que

$$f(v_x) = [1 + (1 - q^*)(-\frac{m\gamma}{2} v_x^2 + \ln_{q^*} A)]^{1/(1-q^*)} \quad (1.59)$$

En définissant le paramètre  $\beta$  comme suit

$$\beta = \frac{\gamma}{1 + (1 - q^*) \ln_{q^*} A} = \frac{\gamma}{A^{1-q^*}} \quad (1.60)$$

nous obtenons l'expression générale de la fonction de distribution des vitesses largement utilisée en physique des plasmas

$$f(v_x) = A_q \left[ 1 - (q - 1) \frac{\beta m v_x^2}{2} \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (1.61)$$

où  $A_q$  est la constante de normalisation donnée par

$$A_q = \left( \frac{1+q}{2} \right) \frac{\Gamma(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \sqrt{\frac{m(q-1)}{2\pi kT}} \quad (1.62)$$

#### 1.4.4 Application

Nous présentons une liste non exhaustive des applications ou des connexions à la mécanique statistique non extensive qui ont été étudiées dans la littérature. Chaque cas mérite, cependant, une analyse séparée. En astrophysique et dans la cosmologie, les connexions ont été établies avec les modèles polytropiques et d'autres modèles des systèmes autogravitants. En physique des hautes énergies, des connexions ont été établies avec la distribution des impulsions transversales dans les jets des hadrons produits par annihilation électron-positron avec de fortes collisions des noyaux. En chimie la loi d'Arrhenius a été généralisée à la diffusion anormale.

Pour clore ce chapitre, notons que plusieurs questions restent jusqu'à présent sans réponse et font actuellement l'objet d'une intense investigation [37], [38].

## 2

# Onde acoustique ionique solitaire associée à un plasma contenant des électrons non extensifs

### 2.0.5 Présentation physique du problème

Le mode acoustique ionique est l'un des modes normaux (ou propres) du plasma. Il a fait l'objet d'une vaste investigation sur le plan théorique et expérimental [4]. La théorie non linéaire pour ce type d'onde a été développée pour la première fois par Sagdeev [39]. Ce dernier a montré que sa dynamique est analogue à celle d'un oscillateur harmonique. Il a été alors établi que l'onde acoustique ionique pouvait exister aussi bien sous forme d'ondes périodiques ou d'ondes localisées. La première observation expérimentale de l'onde acoustique ionique solitaire a été réalisée par Ikezi [22] qui a d'ailleurs rapporté l'existence d'un écart entre les observations expérimentales et les résultats prévus par l'équation K-dV. Dans le but de réduire cet écart, plusieurs modèles ont alors été proposés pour tenir compte soit de l'effet de la température finie des ions [40], [41], soit d'une population d'électrons piégés [42], [28], soit des ordres supérieurs de la non linéarité [43].

Au cours des dernières années, une grande attention a été prêtée à la mécanique statistique non extensive basée sur les déviations de la mesure entropique de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS). Une généralisation non extensive appropriée de l'entropie BGS pour l'équilibre statistique a été d'abord reconnue par Renyi [2] et subséquemment proposée par Tsallis [3]. Elle prolonge convenablement l'additivité standard des entropies au cas non linéaire et non extensif où un paramètre particulier, l'indice entropique  $q$ , caractérise le degré de non extensivité du système considéré ( $q = 1$  correspond à la statistique extensive

standard BGS). Cette entropie non additive a été utilisée avec succès dans un large éventail de phénomènes caractérisés par la non extensivité [44]-[50]. Il est admis que la distribution de Maxwell issue de la statistique de Boltzmann-Gibbs est universellement valable pour les systèmes macroscopiques en équilibre. Cependant, pour les systèmes dont l'interaction est à longue portée, tels les systèmes gravitationnels et les plasmas, où les états stationnaires hors équilibre existent, la distribution Maxwellienne pourrait être inadéquate pour décrire de tels états. D'ailleurs, récemment et en raison d'un défaut de fondement théorique de la fonction de distribution suprathermique ou kappa (elle ne peut être établie de manière formelle), une approche non extensive a été suggérée [51]-[53]. Il a été démontré que des distributions très proches des distributions de type kappa sont la conséquence de l'entropie généralisée. Notons au passage que de nombreux travaux théoriques se sont intéressés récemment aux effets des particules suprathermiques sur différents types de processus collectifs linéaires et non linéaires dans les plasmas [54]-[67]. Les résultats d'une expérience de propagation d'ondes électrostatiques planes dans un plasma thermique non collisionnel, sont en faveur d'une classe de distributions de Tsallis dont le paramètre non extensif  $q$  est plus petit que l'unité [4]. Des expressions analytiques pour l'onde non amortie et amortie (amortissement Landau) ont été établies dans le contexte de la statistique non extensive de Tsallis. Un bon accord avec les données expérimentales a été atteint [4]. Par conséquent, il nous semble opportun d'étudier, dans ce chapitre, les ondes acoustiques ioniques solitaires non linéaires dans le contexte de la nouvelle statistique de Tsallis. En fait, notre étude complète les récents travaux de Dubinova et Dubinov [68].

## 2.0.6 Equations de base du modèle

Considérons un plasma non collisionnel et non magnétisé, composé d'ions froids et d'électrons non extensifs de densité  $n_i$  et  $n_e$ , respectivement. En l'absence de toute perturbation, la condition de quasi-neutralité de la charge requiert  $n_{e0} = n_{i0}$ . La propagation unidimensionnelle de l'onde acoustique ionique dans un tel plasma est alors gouvernée par le système d'équations fluides suivant

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$m_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e (n_i - n_e) \quad (2.3)$$

où  $\varphi$  est le potentiel électrostatique et le reste des variables a déjà été défini. Pour modéliser l'effet des électrons non extensifs, nous nous référons à la fonction de distribution unidimensionnelle donnée par [69] (obtenue en maximisant l'entropie de Tsallis)

$$f_e(v_x) = C_q \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{m_e v_x^2}{2T_e} - \frac{e\varphi}{T_e} \right] \right\}^{1/(q-1)} \quad (2.4)$$

où  $C_q$  est la constante de normalisation et est donnée par

$$C_q = \begin{cases} n_{e0} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{\Gamma(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{m_e(1-q)}{2\pi T_e}} & \text{pour } -1 < q < 1 \\ n_{e0} \left(\frac{1+q}{2}\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{q-1}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \sqrt{\frac{m_e(q-1)}{2\pi T_e}} & \text{pour } q > 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

$q$  est le paramètre non extensif et  $\Gamma$  la fonction gamma standard. Notons que pour  $q < -1$ , la distribution (2.4) est non normalisable. Dans la limite  $q \rightarrow 1$ , la fonction de distribution des vitesses (2.4) se réduit à la fonction de distribution des vitesses bien connue de Maxwell-Boltzmann, donnée par

$$f_e(v_x) = \frac{n_{e0}}{(2\pi T_e/m_e)^{1/2}} \exp\left(-\frac{v_x^2 - 2e\varphi/m_e}{2T_e/m_e}\right) \quad (2.6)$$

Il est important de mentionner que pour  $q > 1$ , la fonction de distribution des vitesses (2.4) exhibe une coupure thermique donnée par

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e(q-1)} + \frac{2e\varphi}{m_e}} \quad (2.7)$$

La densité numérique des électrons est obtenue en intégrant  $f_e(v_x)$  sur le domaine des vitesses correspondantes, à savoir

$$n_e(\varphi) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(v_x) dv_x & \text{pour } -1 < q < 1 \\ \int_{-v_{\max}}^{+v_{\max}} f_e(v_x) dv_x & \text{pour } q > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous obtenons alors la densité numérique suivante

$$n_e(\varphi) = n_{e0} \left\{ 1 - (q-1) \frac{e\varphi}{kT_e} \right\}^{1/(q-1)+1/2} \quad (2.9)$$

En adoptant le système de normalisation suivant  $N_{j=i,e} = n_j/n_{j0}$ ,  $X = x/\lambda_{De}$ ,  $V_i = v_i/C_s$ ,  $\Phi = e\varphi/T_e$ ,  $T = \omega_{pi}t$ , où  $\lambda_{De} = (T_e/4\pi n_{e0}e^2)^{1/2}$  est la longueur de Debye électronique,  $\omega_{pi} = (4\pi n_{e0}e^2/m_i)^{1/2}$  la pulsation propre des ions et  $C_s = \omega_{pi}\lambda_{De}$  la vitesse acoustique, les équations (2.1),(2.2) et (2.3) peuvent être réécrites sous la forme

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial (N_i V_i)}{\partial X} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = N_e - N_i \quad (2.12)$$

avec

$$N_e = [1 + (q - 1)\Phi]^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

Pour étudier les ondes acoustiques ioniques solitaires d'amplitude arbitraire et indépendantes du temps, les équations (2.10) - (2.12) sont réécrites en introduisant la variable  $\xi = X - MT$ , où  $M$  est appelé nombre de Mach (vitesse du soliton /  $C_s$ ). En imposant des conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ( $\Phi \rightarrow 0$ ,  $V_i \rightarrow 0$ ,  $N_i \rightarrow 1$  lorsque  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ), nous obtenons

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\Phi/M^2}} \quad (2.14)$$

En portant la relation (2.14) dans l'équation de Poisson (2.12), en multipliant chaque membre de l'équation résultante par  $d\Phi/d\xi$ , en intégrant une fois par rapport à  $\Phi$  et en imposant les conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ( $\Phi \rightarrow 0$ ,  $d\Phi/d\xi \rightarrow 0$  lorsque  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ), nous obtenons la quadrature suivante

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 + V(\Phi) = 0 \quad (2.15)$$

où

$$V(\Phi) = -M^2 \left\{ -1 + \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{M^2}} \right\} - \frac{2}{3q-1} \left\{ -1 + [1 + (q-1)\Phi]^{\frac{1}{q-1} + \frac{3}{2}} \right\} \quad (2.16)$$

Le potentiel  $V(\Phi)$  est dit potentiel de Sagdeev ou pseudo-potential. L'équation (2.15) peut être interprétée comme étant l'équation du mouvement d'une pseudo-particule de position  $\Phi$ , de vitesse  $d\Phi/d\xi$  et de masse unité, oscillant dans un potentiel  $V(\Phi)$ . Il est clair que  $V(\Phi) = dV(\Phi)/d\Phi = 0$  en  $\Phi = 0$ . Dans le but de satisfaire les conditions d'existence d'une solution solitaire de l'onde acoustique ionique, le pseudo-potential  $V(\Phi)$  doit satisfaire les conditions suivantes: (i)  $[d^2V(\Phi)/d\Phi^2]_{\Phi=0} < 0$  (on dit alors que le point fixe à l'origine est instable); (ii)  $V(\Phi)$  admet un extremum  $\Phi_m$  (un maximum ou un minimum) non nul tel que  $V(\Phi_m) \geq 0$ ; (iii)  $V(\Phi) < 0$  lorsque  $\Phi$  varie de 0 à  $\Phi_m$ . La deuxième condition signifie simplement qu'une quasi-particule d'énergie totale nulle sera réfléchiée à la position  $\Phi = \Phi_m$ .

La troisième condition signifie que la quasi-particule effectue des oscillations entre 0 et  $\Phi_m$  dans le puits de potentiel  $V(\Phi)$ . La condition (i) impose au nombre de Mach de satisfaire

$$M^2 > \frac{2}{q+1} \quad (2.17)$$

Il s'ensuit que pour  $q > 1$  ( $-1 < q < 1$ ), la limite inférieure  $M_{\min} = [2/(q+1)]^{1/2}$  est plus petite (plus grande) que sa contrepartie Maxwellienne,  $M_{\min} = 1$ , indiquant la possibilité d'existence de solitons subsoniques (voir figure 2). La condition (i) est nécessaire mais non suffisante pour délimiter tout le domaine des nombres Mach admissibles. La limite supérieure de  $M$  peut être en fait déterminée à partir de la condition  $V(\Phi_c) \geq 0$ , où  $\Phi_c = M^2/2$  est la valeur maximale de  $\Phi$  pour laquelle la densité des ions froids  $N_i$  reste réelle. Nous obtenons alors

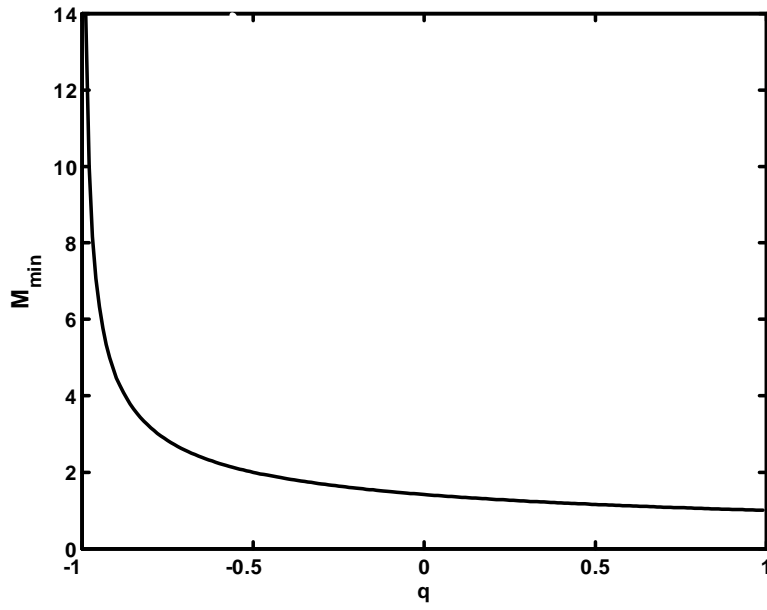
$$M^2 + \frac{2}{3q-1} \left\{ -1 + \left[ 1 + (q-1) \frac{M^2}{2} \right]^{\frac{3q-1}{2(q-1)}} \right\} \geq 0 \quad (2.18)$$

En utilisant l'équation transcendante précédente, on peut voir que pour  $q < 1$  (Fig.3) ou  $q > 1$  (Fig.4), la limite supérieure  $M_{\max}$  diminue à mesure que les électrons s'éloignent de leur équilibre thermodynamique.

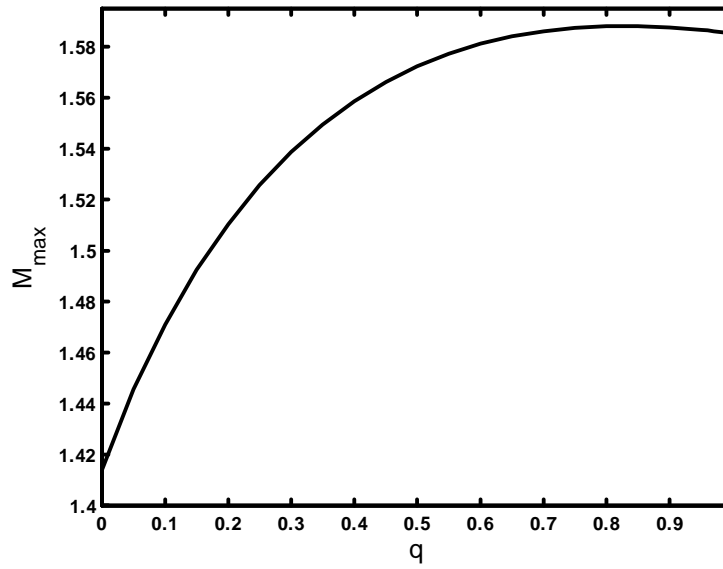
### 2.0.7 Résultats numériques

Nous procédons maintenant à la présentation de nos résultats numériques. L'équation (2.15) est alors intégrée grâce à un schéma numérique propre aux problèmes à valeurs initiales. Pour amorcer l'intégration, les conditions initiales suivantes  $\Phi_0 = \Phi(\xi = 0) = 0$  et  $E_0 = -(d\Phi/d\xi)(\xi = 0) = 10^{-10}$  ont été choisies. A titre comparatif, nous avons tracé la variation spatiale de  $\Phi$  pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q$  (Fig. 5). Les paramètres suivants  $q = 2.2, 2.3, \text{ et } 2.4$ , avec  $M = 0.8$  ont été choisis de sorte que les conditions (2.17) et (2.18) sont satisfaites. Le potentiel électrostatique exhibe une structure solitaire localisée en régime subsonique comme l'atteste le potentiel associé (Fig. 6). A mesure que le paramètre  $q$  augmente (le caractère non extensif du plasma devient important) l'amplitude du soliton augmente alors que sa largeur se rétrécit, c.-à-d., l'augmentation des valeurs de  $q$  rend la structure plus pointue. Par conséquent, des solitons acoustiques ioniques cornues peuvent apparaître lorsque les électrons s'éloignent de leur équilibre thermodynamique de Maxwell-Boltzmann. Le cas  $0 < q < 1$  (Fig. 7) avec  $M = 1.3$  fournit qualitativement les mêmes résultats mais avec un décalage net de l'amplitude du soliton

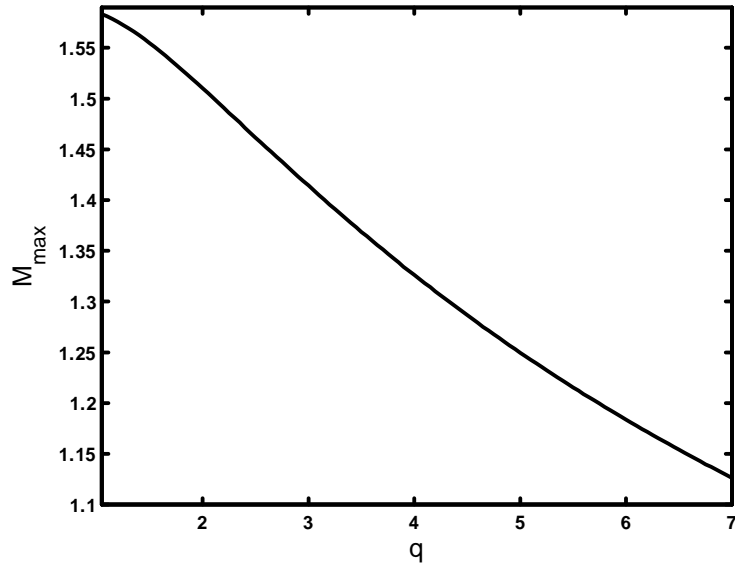
vers des valeurs plus élevées. La densité des électrons (Fig. 8) adopte le même profil localisé. Cette localisation (accumulation) provoquée par un équilibre des forces électrostatiques agissant sur les électrons est moins effective pour des valeurs plus petites de l'indice  $q$  (notons que nous traitons le cas  $0 < q < 1$ ). Il s'avère que la non extensivité contribue à la diminution de  $N_e$  dans le région de la localisation des solitons (Fig. 8), expulsant localement les électrons hors de cette région. Considérons maintenant le cas  $-1 < q < 0$ . Nos résultats indiquent que notre modèle de plasma ne peut admettre que des ondes acoustiques ioniques solitaires de type raréfactif requérant des valeurs du nombre de Mach  $M$  relativement élevées (à comparer avec les résultats de la figure 2). Ces résultats sont tracés sur la figure 9 pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q = -0.78, -0.74, -0.70$  et  $M = 3.2$ . A mesure que la non extensivité électronique devient importante ( $q \rightarrow -1$ ), la structure raréfactive devient plus profonde alors que sa largeur augmente légèrement, à l'inverse du cas étudié pour  $q > 0$ .



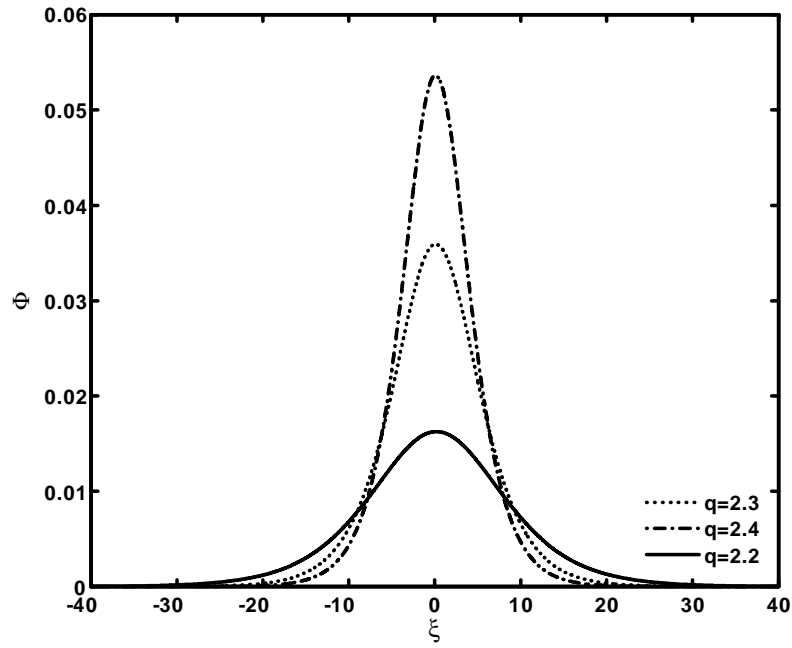
**Figure 2:** Variation de la limite inférieure  $M_{\min}$  du nombre de Mach en fonction du paramètre non extensif  $q$ .



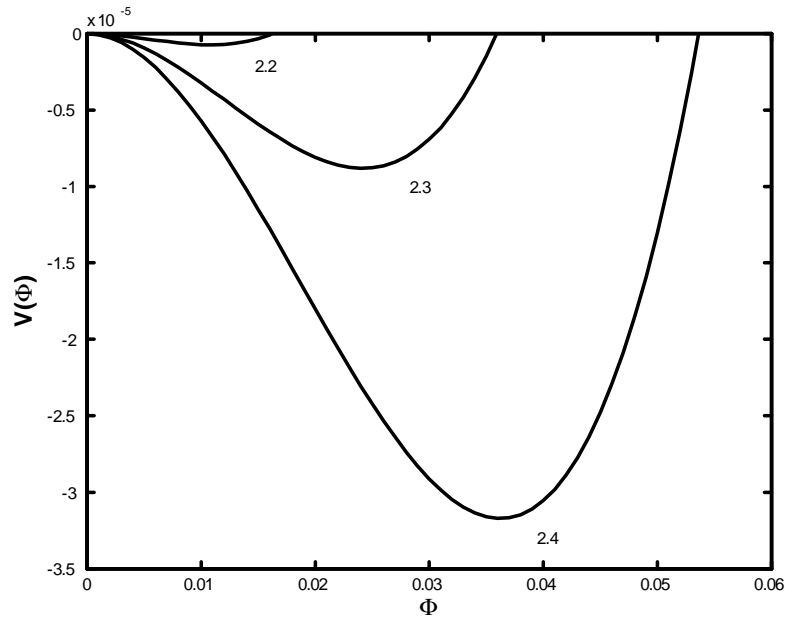
**Figure 3:** Variation de la limite supérieure  $M_{\max}$  du nombre de Mach en fonction du paramètre non extensif  $q$ ,  $0 \leq q \leq 0.999$ .



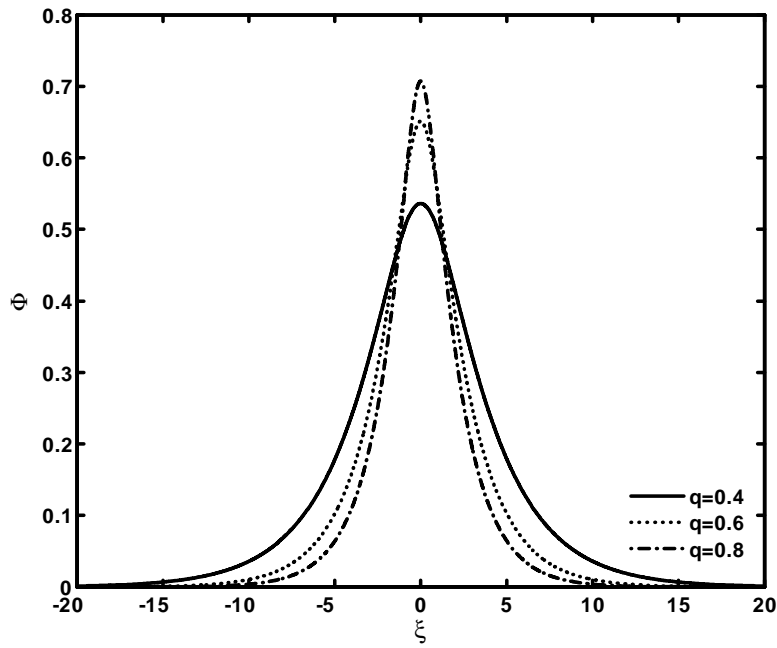
**Figure 4:** Variation de la limite supérieure  $M_{\max}$  des valeurs du nombre de Mach permises en fonction de  $q$ ,  $1.05 \leq q \leq 7$ .



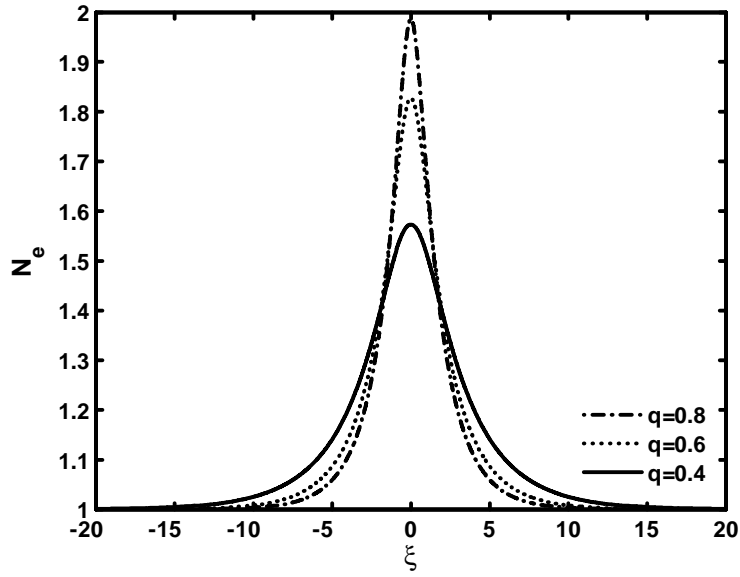
**Figure 5:** Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs de  $q$ , avec  $M = 0.8$ .



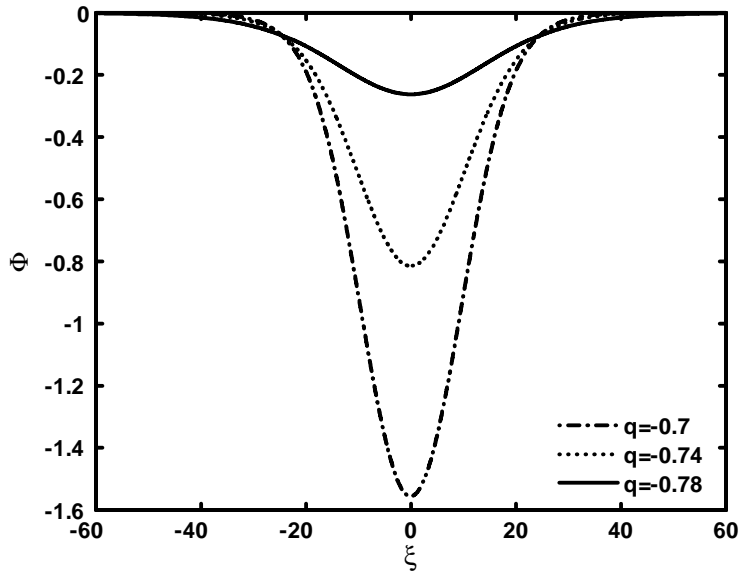
**Figure 6:** Potentiel de Sagdeev  $V(\Phi)$  associé à la structure localisée de la figure 5.



**Figure 7:** Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs de  $q$ , avec  $M = 1.3$ .



**Figure 8:** Profil spatial de la densité des électrons  $N_e$  pour différentes valeurs de  $q$ , avec  $M = 1.3$ .



**Figure 9:** Potentiel électrostatique solitaire raréfactive  $\Phi$  associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs de  $q$ , avec  $M = 3.2$ .

### 2.0.8 Analyse faiblement non linéaire

Dans la limite des faibles amplitudes ( $\Phi \ll 1$ ), la solution solitaire localisée de l'équation (2.15) peut être obtenue de manière explicite en effectuant un développement en séries de

puissances de  $V(\Phi)$ . Nous obtenons alors

$$V(\Phi) \simeq A_1\Phi + A_2\Phi^2 + A_3\Phi^3 + 0(\Phi^4) \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= \frac{1}{2M^2} - \frac{q+1}{4} \\ A_3 &= \frac{q^2 - 2q - 3}{24} + \frac{1}{2M^4} \end{aligned} \quad (2.20)$$

La solution de l'équation (2.15) est alors donnée par

$$\Phi(\xi) = \Phi_m \operatorname{sech}^2(\xi/\Delta) \quad (2.21)$$

où  $\Phi_m = -A_2/A_3$  et  $\Delta = (-2/A_2)^{1/2}$  représentent, respectivement, l'amplitude et la largeur du soliton. Par conséquent, la solution faiblement non linéaire (2.21) ne peut exister que si  $A_2 < 0$  ou  $M^2 > 2/(q+1)$ . Cette structure sera de nature compressive si  $A_3 > 0$  ou  $M^4(q^2 - 2q - 3) + 12 > 0$ . Ceci veut dire que (en référence au signe du polynôme  $q^2 - 2q - 3$ )

$$\begin{cases} M^4 < -\frac{12}{q^2 - 2q - 3} & \text{pour } -1 < q < 3 \\ M^4 > -\frac{12}{q^2 - 2q - 3} & \text{pour } q > 3. \end{cases}$$

### 2.0.9 Equation de Korteweg- de Vries (K- dV)

Dans le but d'étudier la dynamique des ondes acoustiques ioniques solitaires de faible amplitude ( $\Phi < M^2/2$ ), nous établissons à partir des équations (2.10), (2.11) et (2.12) l'équation classique de Korteweg-de Vries (K-dV) en utilisant la technique de la perturbation réductive, basée sur le changement de variable suivant [18]

$$\zeta = \epsilon^{1/2}(X - v_0T) \quad \text{et} \quad \tau = \epsilon^{3/2}T \quad (2.22)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre mesurant la faiblesse de l'amplitude ou de la dispersion et  $v_0$  la vitesse de phase linéaire. Les variables  $N_i$ ,  $V_i$  et  $\Phi$  sont alors développées en séries de puissances de  $\epsilon$  autour de leurs valeurs d'équilibres

$$\Phi = \epsilon\Phi^{(1)} + \epsilon^2\Phi^{(2)} + \dots \quad (2.23)$$

$$V_i = \epsilon V_i^{(1)} + \epsilon^2 V_i^{(2)} + \dots \quad (2.24)$$

$$N_i = 1 + \epsilon N_i^{(1)} + \epsilon^2 N_i^{(2)} + \dots \quad (2.25)$$

A l'ordre le plus faible en  $\epsilon$ , les équations (2.10), (2.11) et (2.12) donnent,  $N_i^{(1)} = \Phi^{(1)}/v_0^2$ ,  $V_i^{(1)} = \Phi^{(1)}/v_0$  et  $v_0^2 = 2/(q+1)$ . A l'ordre supérieur, nous obtenons les équations suivantes

$$\frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_i^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (N_i^{(1)} V_i^{(1)}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial V_i^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \zeta} + V_i^{(1)} \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^2} = -N_i^{(2)} + \left(1 + \frac{(q-1)}{2}\right) \Phi^{(2)} + \left(1 + \frac{(q-1)}{2}\right) \left(1 - \frac{(q-1)}{2}\right) \frac{(\Phi^{(1)})^2}{2} \quad (2.28)$$

En exprimant  $N_i^{(2)}$  et  $\Phi^{(2)}$  à partir de l'équation (2.28) et en injectant le résultat dans l'équation combinée des équations (2.26) et (2.27), nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \tau} + A \Phi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} B \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^3} = 0 \quad (2.29)$$

où

$$A = \frac{3}{2v_0} - \frac{v_0^3}{2} \left(1 - \frac{(q-1)^2}{4}\right)$$

$$B = v_0^3$$

et dont la solution stationnaire et localisée est donnée par

$$\Phi^{(1)} = \Phi_m \operatorname{sech} h^2 \left[ \frac{(\zeta - u_0 \tau)}{\delta} \right] \quad (2.30)$$

$\Phi_m = 3u_0/A$  et  $\delta = \sqrt{2B/u_0}$  représentent, respectivement, l'amplitude et la largeur du soliton et  $u_0$  est la vitesse du soliton normalisée. A partir de la solution (2.30), il est évident que l'onde acoustique ionique solitaire (faiblement non linéaire) est compressive si  $A > 0$  et raréactive si  $A < 0$ . Notons que les solutions faiblement non linéaires conservent, de manière générale, certaines de leurs propriétés lorsque la non linéarité devient importante. Quand  $q \rightarrow 1$ , l'équation (2.29) se réduit à l'équation K- dV classique de l'onde acoustique ionique dans un plasma comportant des ions froids et des électrons Maxwellien.

### 2.0.10 Equation de Korteweg- de Vries modifiée (MK- dV)

Avant de procéder à l'établissement de l'équation MK- dV, une analyse de la solution solitaire précédente est important. En effet, pour une valeur particulière ou critique du

paramètre  $q$  ( $q = 1/2$ ), le coefficient  $A$  s'annule et dans ce cas l'amplitude de la solution stationnaire devient singulière (tend vers l'infini), ce qui rend l'analyse précédente inadéquate pour décrire le comportement de l'onde acoustique ionique. Un nouveau traitement est alors nécessaire pour établir l'équation d'évolution de l'onde acoustique ionique faiblement non linéaire. Pour cela, introduisons le changement de variables suivant

$$\tau = \epsilon^3 T \quad (2.31)$$

$$\zeta = \epsilon(X - v_0 T) \quad (2.32)$$

Nous utiliserons le même développement en séries de puissances (2.23), (2.24) et (2.25). A l'ordre le plus petit en  $\epsilon$ , le système d'équations (2.10), (2.11) et (2.12) donnent  $N_i^{(1)} = \Phi^{(1)}/v_0^2$ ,  $V_i^{(1)} = \Phi^{(1)}/v_0$  et  $v_0^2 = 2/(q+1)$ . A l'ordre  $\epsilon^2$ , nous obtenons

$$-v_0 \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_i^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (N_i^{(1)} V_i^{(1)}) = 0 \quad (2.33)$$

$$-v_0 \frac{\partial V_i^{(2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \zeta} + V_i^{(1)} \frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.34)$$

$$N_i^{(2)} = \left(1 + \frac{(q-1)}{2}\right) \Phi^{(2)} + \left(1 + \frac{(q-1)}{2}\right) \left(1 - \frac{(q-1)}{2}\right) \frac{(\Phi^{(1)})^2}{2} \quad (2.35)$$

Compte tenu des conditions aux limites  $V_i^{(1,2)} = N_i^{(1,2)} = \Phi^{(2)} = 0$  quand  $|\zeta| \rightarrow \infty$ , le système d'équations (2.33), (2.34), (2.35) conduit à la relation suivante

$$\left(\frac{3}{v_0^4} - 1 + \frac{(q-1)^2}{4}\right) \Phi^{(2)} = 0 \quad (2.36)$$

A l'ordre  $\epsilon^3$ , nous avons les relations suivantes

$$\frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial N_i^{(3)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_i^{(3)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial (N_i^{(1)} V_i^{(2)})}{\partial \zeta} + \frac{\partial (V_i^{(1)} N_i^{(2)})}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial V_i^{(3)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial (V_i^{(2)} V_i^{(1)})}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^2} = & - \left\{ N_i^{(3)} - \left(1 + \frac{(q-1)}{2}\right) \Phi^{(3)} - \left(1 - \frac{(q-1)}{4}\right) (\Phi^{(1)} \Phi^{(2)}) \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{(q-1)^2}{4}\right) \left(1 - \frac{3(q-1)}{2}\right) \frac{(\Phi^{(1)})^3}{6} \right\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

à partir desquelles nous établissons

$$\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^3} = \left\{ \frac{2}{v_0} \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial(N_i^{(1)} N_i^{(2)})}{\partial \zeta} + \frac{2}{v_0} \frac{\partial(N_i^{(1)} V_i^{(2)})}{\partial \zeta} - \left(1 - \frac{(q-1)^2}{4}\right) \frac{\partial(\Phi^{(1)} \Phi^{(2)})}{\partial \zeta} - \left(1 - \frac{(q-1)^2}{4}\right) \left(1 - \frac{3(q-1)}{2}\right) \frac{(\Phi^{(1)})^2}{2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \zeta} \right\} \quad (2.40)$$

D'après les équations (2.33) et (2.34), nous avons

$$\frac{\partial(N_i^{(1)} N_i^{(2)})}{\partial \zeta} = \frac{1}{v_0^4} \frac{\partial(\Phi^{(1)} \Phi^{(2)})}{\partial \zeta} + \frac{1}{v_0^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{(q-1)^2}{4} \right) \frac{\partial(\Phi^{(1)})^3}{\partial \zeta} \quad (2.41)$$

$$\frac{2}{v_0} \frac{\partial(N_i^{(1)} V_i^{(2)})}{\partial \zeta} = \frac{\partial(N_i^{(1)})^3}{\partial \zeta} + \frac{2}{v_0^4} \frac{\partial(\Phi^{(1)} \Phi^{(2)})}{\partial \zeta} \quad (2.42)$$

En injectant les équations (2.41) et (2.42) dans l'équation (2.40) et en faisant appel à la condition (2.36), nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \tau} + C(\Phi^{(1)})^2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} B \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^3} = 0 \quad (2.43)$$

où

$$C = \frac{3}{2v_0^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{(q-1)^2}{4} \right) + \frac{3v_0}{2} - \frac{3}{2v_0^2} \left( 1 - \frac{(q-1)^2}{4} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3(q-1)}{2} \right)$$

$$B = v_0^3$$

L'équation (2.43) est dite équation modifiée de Korteweg- de Vries (MK- dV) et admet, en régime, stationnaire une solution de la forme

$$\Phi^{(1)} = \Phi_m \operatorname{sech} \left( \frac{\zeta - u_0 \tau}{\delta} \right) \quad (2.44)$$

où  $\Phi_m = \pm \sqrt{6(u_0/C)}$ ,  $\delta = \sqrt{B/2u_0}$  et  $u_0$  représentent, respectivement, l'amplitude, la largeur et la vitesse du soliton.

### 2.0.11 Equation de Korteweg- de Vries généralisée (GK- dV)

Dans les deux sections précédentes, nous avons montré l'inadéquation de l'équation de type K- dV pour une valeur singulière de  $q$ . En cette valeur particulière, le potentiel électrostatique de l'onde acoustique ionique est décrit par une équation de type MK- dV. On montre dans cette section que l'évolution de l'onde acoustique ionique peut être décrite par une

équation de type Korteweg- de Vries généralisé (GK- dV) qui recouvre les équations de type K- dV et mK- dV. En utilisant le changement de variable précédent (2.31), (2.32) et avant d'aller plus loin, il est important d'analyser le terme de droite de l'équation de Poisson suivant

$$-N_i^{(2)} + N_e^{(2)} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{v_0^4} - \left( 1 - \frac{(q-1)^2}{4} \right) \right\} (\Phi^{(1)})^2 \quad (2.45)$$

Quand  $q$  est loin de sa valeur critique, le coefficient de  $(\Phi^{(1)})^2$  est supposé d'ordre  $\epsilon$ . Comme  $(\Phi^{(1)})^2$  est d'ordre  $\epsilon^2$ , la contribution du terme précédent est donc d'ordre  $\epsilon^3$  dans l'équation de Poisson (2.39) qui peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^2} = -N_i^{(2)} + N_e^{(2)} - N_i^{(3)} + N_e^{(3)} \quad (2.46)$$

Exprimons alors  $-N_i^{(3)} + N_e^{(3)}$  en fonction des autres termes de l'équation (2.46) et injectons le résultat dans l'équation qui résulte de la combinaison des équations (2.37) et (2.38). En négligeant la contribution des termes d'ordre supérieur à celui de  $\epsilon^3$ , nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \tau} + C(\Phi^{(1)})^2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \zeta} + A\Phi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}B \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^3} = 0 \quad (2.47)$$

où

$$C = \frac{3}{2v_0^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{(q-1)^2}{4} \right) + \frac{3v_0}{2} - \frac{3}{2v_0^2} \left( 1 - \frac{(q-1)^2}{4} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3(q-1)}{2} \right) \quad (2.48)$$

$$B = v_0^3 \quad (2.49)$$

$$A = \frac{3}{2v_0} - \frac{v_0^3}{2} \left( 1 - \frac{(q-1)^2}{4} \right) \quad (2.50)$$

et dont la solution stationnaire est donnée par

$$\Phi^{(1)} = 6 \left( \frac{u_0}{A} \right) \frac{1}{1 + \left( 1 + \frac{4Cu_0}{BA} \right)^{1/2} \cosh \left( \sqrt{\frac{2u_0}{B}} (\zeta - u_0\tau) \right)} \quad (2.51)$$

L'équation GK- dV (2.47) est plus générale que l'équation K- dV et mK- dV et peut servir comme équation d'évolution pour le potentiel électrostatique spécialement au voisinage de la valeur critique de  $q$ . Le terme non linéaire de l'équation d'évolution (2.47) peut être considéré comme une passerelle entre les termes non linéaires des équations K- dV et mK- dV.

# 3

## Approche dynamique des gaz de l'onde acoustique ionique dans un plasma non extensif

### 3.1 Présentation physique du problème

L'onde acoustique ionique est l'un des modes de base susceptible de se propager dans un plasma. Ce mode a fait l'objet d'une vaste investigation tant sur le plan expérimental que théorique. Plusieurs modèles théoriques ont été élaborés parmi lesquels nous citons l'approche perturbative qui tient compte de l'aspect faiblement non linéaire et dispersif du plasma conduisant à des équations de type K- dV ou K- dV modifié. Une approche plus exacte repose sur la prise en compte complète de l'aspect non linéaire et dispersif du plasma. Historiquement, le premier travail pionnier sur l'onde acoustique ionique est du à R. Z. Sagdeev [70]. Ce dernier a établi une équation de conservation de l'énergie analogue à celle d'un oscillateur en mécanique classique. Il a montré que l'onde acoustique ionique peut se propager sous la forme d'un soliton si le nombre de Mach  $M$  vérifie la condition  $1 < M < 1.58$  ( $M =$  vitesse du soliton/ vitesse acoustique). Depuis, l'accent a été mis sur d'autres modèles beaucoup plus évolués pour rapprocher au mieux le modèle de Sagdeev des résultats expérimentaux. Ces modèles tiennent compte des effets de la température des ions, des équations d'état des espèces de particules du plasma, de la présence de deux espèces ioniques, de l'effet de l'inertie de l'électron....etc. Cependant, ces modèles introduisent plus de complexités algébriques et deviennent moins tractables analytiquement, ce qui rend l'analyse plus difficile, voir impossible dans certains cas de figures. C'est pourquoi, d'autres approches

ont vu le jour à l'instar de celle dite approche dynamique des gaz [71]-[72]. Récemment introduite par McKenzie [73]-[75], elle repose essentiellement sur la résolution de l'équation du mouvement, réduite à une équation de type Bernoulli et qui nous permet de choisir la branche physique reliant la densité au potentiel électrostatique. L'équation de Poisson sera exprimée soit en terme de vitesse, soit en terme de densité [76]-[79]. On se propose, dans ce chapitre, d'étudier l'onde acoustique ionique en faisant appel à cette approche. Nous supposons des électrons non extensifs décrits par une fonction de distribution de Tsallis et des ions fluides adiabatiques décrits par une équation d'état reliant la pression à la densité. L'effet du paramètre non extensif  $q$  des électrons et de l'indice adiabatique  $\gamma$  des ions sur l'amplitude du soliton acoustique ionique sera étudié.

## 3.2 Modèle théorique et équations de base

Considérons un plasma non collisionnel, composé d'électrons non extensifs (de masse  $m_e$ , de charge électrique  $e < 0$  et de température  $T_{0e}$ ) et d'une seule espèce d'ions fluides (de masse  $m_i$ , de charge électrique  $-e > 0$  et la température  $T_{i0}$ ). Les électrons sont supposés suivre la loi de distribution de Tsallis caractérisée par le paramètre non extensif  $q$ . La condition de quasi-neutralité de la charge est donnée par  $n_{e0} = n_{i0} = n_0$ . La dynamique de l'onde acoustique ionique est alors régie par des équations similaires à celles du chapitre précédent avec, cependant, un terme supplémentaire (dans l'équation de mouvement des ions) dû au gradient de pression et une notation différente pour la charge électrique de l'électron (notée  $e < 0$  pour pouvoir nous situer par rapport à des travaux antérieurs). Ces équations sont données par

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$m_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_i} \frac{\partial P_i}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_i - n_e) \quad (3.3)$$

où  $P_i$  représente la pression cinétique des ions assimilés à un gaz et les autres variables ont déjà été définies. Le système (3.1)-(3.3) est complété par l'équation d'état adiabatique suivante

$$P_i = T_{i0} n_0 (n_i/n_0)^\gamma \quad (3.4)$$

La densité électronique est donnée par

$$n_e = n_{e0} \left[ 1 - (q-1) \frac{e\varphi}{T_{e0}} \right]^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

En adoptant le système de variables adimensionnelles suivant:  $N_{i,e} = n_{i,e}/n_0$ ,  $X = x/\lambda_D$ ,  $V_i = v_i/\omega_{pi}\lambda_D$ ,  $\Phi = e\varphi/T_{e0}$  et  $T = \omega_{pi}t$ , où  $\lambda_D = (T_{e0}/4\pi n_0 e^2)^{\frac{1}{2}}$  est la longueur de Debye et  $\omega_{pi} = (4\pi n_0 e^2/m_i)^{\frac{1}{2}}$  la fréquence plasma ionique, les équations (3.1)-(3.3) deviennent

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial (N_i V_i)}{\partial X} = 0 \quad (3.6)$$

$$\left( \frac{\partial V_i}{\partial T} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial X} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial X} - \frac{\tau}{(\gamma-1)} \frac{\partial N_i^{\gamma-1}}{\partial X} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = N_i - [1 - (q-1)\Phi]^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

avec

$$\tau = \gamma \frac{T_{i0}}{T_{e0}} \quad (3.9)$$

### 3.3 Solution stationnaire

Dans le but d'analyser les propriétés de l'onde acoustique ionique d'amplitude arbitraire susceptible de se propager dans notre modèle de plasma, on introduit le changement de variable suivant  $\xi = X - MT$ . Le système d'équations différentielles aux dérivées partielles (3.6)-(3.8) se réduit au système d'équations différentielles ordinaires suivantes

$$-M \frac{dN_i}{d\xi} + \frac{d(N_i V_i)}{d\xi} = 0 \quad (3.10)$$

$$-M \frac{dV_i}{d\xi} + V_i \frac{dV_i}{d\xi} = \frac{d\Phi}{d\xi} - \frac{\tau}{(\gamma-1)} \frac{dN_i^{\gamma-1}}{d\xi} \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} = N_i - [1 - (q-1)\Phi]^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

En intégrant l'équation de continuité (3.10) et en supposant  $N_i \rightarrow 1$  lorsque  $V_i \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$N_i = \frac{M}{M - V_i} \quad (3.13)$$

Il est important de noter que dans le repère lié à l'onde, le plasma non perturbé se déplace à une vitesse  $-M$ . Par conséquent, il est plus raisonnable à première vue d'utiliser la condition  $\lim_{V_i \rightarrow -M} N_i = 1$  (voir, à titre d'exemple, [80]). Cependant, pour le plasma non perturbé qui n'est pas en mouvement dans le référentiel du laboratoire, il est plus correct d'employer la condition  $\lim_{V_i \rightarrow 0} N_i = 1$  (voir [70]-[71]). En utilisant l'équation (3.13), la vitesse  $V_i$  peut être écrite sous la forme

$$V_i = M(1 - 1/N_i) \quad (3.14)$$

En tenant compte des conditions aux limites  $\lim_{V_i \rightarrow 0} N_i = 1$  et  $\lim_{V_i \rightarrow 0} \Phi = 0$ , l'intégration de l'équation du mouvement (3.11) aboutit à

$$-MV_i + \frac{V_i^2}{2} = \Phi + \frac{\tau}{(\gamma - 1)}(1 - N_i^{\gamma-1}) \quad (3.15)$$

Dans la méthode du pseudo-potentiel ou de Sagdeev, la densité  $N_i$  ou la vitesse  $V_i$  sont habituellement exprimées en fonction du potentiel électrostatique  $\Phi$ . Cependant et au vu de l'équation (3.15), il est quasi-impossible d'exprimer cette dépendance pour une valeur donnée de  $\gamma$ . Par contre, dans l'approche dynamique des gaz, la substitution de l'équation (3.14) dans (3.15) permet d'écrire le potentiel électrostatique sous la forme

$$\Phi = \frac{\tau}{(\gamma - 1)}(N_i^{\gamma-1} - 1) + \frac{M^2}{2}\left(\frac{1}{N_i^2} - 1\right) \quad (3.16)$$

Il est important de noter que le plasma loin de toute perturbation ( $\Phi = 0$ ) vérifie la neutralité de charge  $N_e = N_i = 1$ . L'équation (3.16) présente deux solutions dont l'une est purement mathématique (ne passe pas par le point de neutralité) et l'autre physique (passe par le point de neutralité). Les figures 10a et 10b montrent la variation du potentiel électrostatique  $\Phi$  en fonction de la densité ionique  $N_i$ . On peut remarquer l'existence d'un minimum  $\Phi_{\min}$  déduit à partir de

$$\frac{d\Phi}{dN_i} = -\frac{M^2 - \tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^3} = 0 \quad (3.17)$$

et qui admet comme solution

$$N_i = (M^2/\tau)^{\frac{1}{\gamma+1}} \quad (3.18)$$

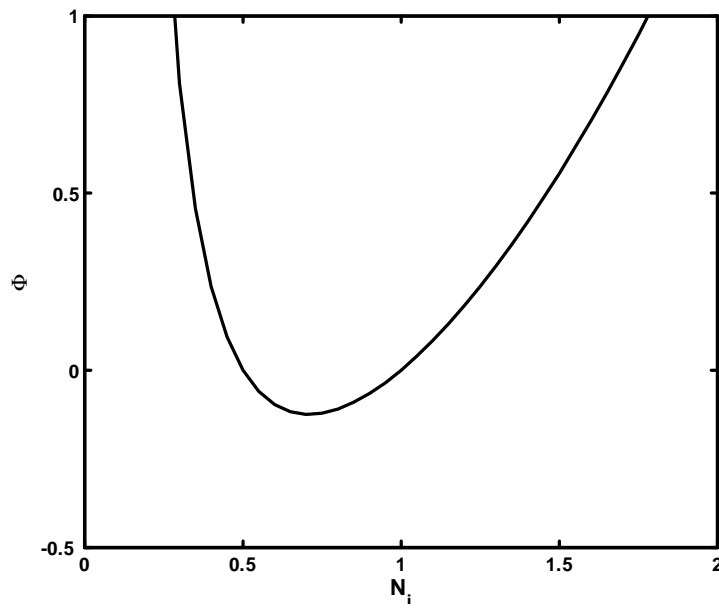
Ce minimum est donné par

$$\Phi_{\min} = \frac{\tau}{(\gamma - 1)} \left[ \left( \frac{M^2}{\tau} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - 1 \right] + \frac{M^2}{2} \left[ \left( \frac{M^2}{\tau} \right)^{\frac{-2}{\gamma+1}} - 1 \right] \quad (3.19)$$

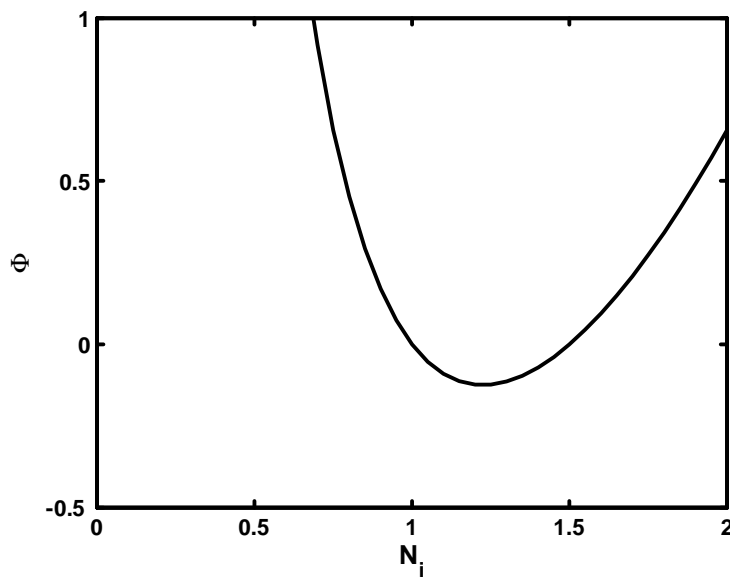
Pour  $N_i = (M^2/\tau)^{\frac{1}{\gamma+1}}$ , la dérivée seconde du potentiel

$$d^2\Phi/dN_i^2 = (\gamma + 1)M^2/N_i^4 > 0 \quad (3.20)$$

est positive. A partir de l'équation (3.18) et pour  $M < \sqrt{\tau}$ , on peut conclure que la branche physique passant par le point de neutralité ( $N_i = 1$ ) est celle à allure croissante à partir de  $\Phi_{\min}$  (figure 10a). Par contre pour  $M > \sqrt{\tau}$  (figure 10b), la branche physique est celle à allure décroissante jusqu'à  $\Phi_{\min}$ .



**Figure 10a:** Variation du potentiel électrostatique  $\Phi$  en fonction de la densité ionique  $N_i$ , avec  $\tau = 1$ ,  $\gamma = 3$  et  $M = 0.5$ .



**Figure 10b:** Variation du potentiel électrostatique  $\Phi$  en fonction de la densité ionique  $N_i$ , avec  $\tau = 1$ ,  $\gamma = 3$  et  $M = 1.5$ .

En faisant intervenir la dérivée par rapport à la densité  $N_i$ , nous obtenons à partir de l'équation de Poisson (3.12)

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \frac{d\Phi}{dN_i} \frac{d^2N_i}{d\xi^2} + \frac{d^2\Phi}{dN_i^2} \left( \frac{dN_i}{d\xi} \right)^2 \quad (3.21)$$

avec

$$\frac{d^2\Phi}{dN_i^2} = \frac{3M^2 + (\gamma - 2)\tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^4} \quad (3.22)$$

En utilisant les expressions (3.16), (3.17) et (3.22), l'équation de Poisson se réduit à une équation différentielle non linéaire de second ordre par rapport à  $N_i$  de la forme

$$\begin{aligned} & -\frac{M^2 - \tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^3} \left( \frac{d^2N_i}{d\xi^2} \right) + \frac{3M^2 + (\gamma - 2)\tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^4} \left( \frac{dN_i}{d\xi} \right)^2 \\ & = N_i - \left\{ 1 - (q - 1) \left[ \frac{\tau}{(\gamma - 1)} (N_i^{\gamma-1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left( \frac{1}{N_i^2} - 1 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

En introduisant le changement  $Z(N_i) = dN_i/d\xi$ , l'équation différentielle (3.23) se réécrit sous une forme dite de Bernoulli [81]:

$$\frac{dZ}{dN_i} + \frac{g(N_i)}{f_1(N_i)} Z = \frac{f_2(N_i)}{f_1(N_i)} \frac{1}{Z} \quad (3.24)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(N_i) &= -\frac{M^2 - \tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^3} \\ f_2(N_i) &= N_i - \left\{ 1 - (q - 1) \left[ \frac{\tau}{(\gamma - 1)} (N_i^{\gamma-1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left( \frac{1}{N_i^2} - 1 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \\ g(N_i) &= \frac{3M^2 + (\gamma - 2)\tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^4} \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'équation différentielle (3.24) est un cas particulier de l'équation différentielle de Bernoulli [81] ( $n = -1$ ). La solution générale s'écrit sous la forme

$$Z^2 = \left[ C_1 + 2 \int \exp \left( 2 \int \frac{g(N_i)}{f_1(N_i)} dN_i \right) \frac{f_2(N_i)}{f_1(N_i)} dN_i \right] \exp \left( -2 \int \frac{g(N_i)}{f_1(N_i)} dN_i \right) \quad (3.26)$$

où  $C_1$  est une constante d'intégration déterminée à partir des conditions initiales. Dans notre cas et à partir de la condition  $Z(1) = 0$ , nous obtenons  $C_1 = 0$ . Sachant que  $g(N_i) = df_1/dN_i$ , l'équation (3.26) se réduit à l'expression suivante

$$Z^2 = \frac{1}{f_1(N_i)^2} \left[ 2 \int f_1(N_i) f_2(N_i) dN_i \right] \quad (3.27)$$

En remplaçant  $f_1(N_i)$  et  $f_2(N_i)$  par leurs expressions respectives, nous obtenons

$$Z^2 = \frac{N_i^6}{(-M^2 + \tau N_i^{\gamma+1})^2} \left\{ 2 \int \frac{-M^2 + \tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^3} \left( N_i - \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{\tau}{(\gamma-1)} (N_i^{\gamma-1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left( \frac{1}{N_i^2} - 1 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} \right) dN_i \right\} \quad (3.28)$$

L'intégration de l'équation de Bernoulli (3.28) nous permet d'obtenir l'expression exacte de  $N_i(\xi)$  à partir de la forme implicite suivante

$$\xi + C_2 = \int Z(N_i) dN_i \quad (3.29)$$

où  $C_2$  est une constante d'intégration. La forme implicite (3.29) et l'équation (3.27) forment une solution exacte du problème non linéaire de l'onde acoustique ionique. L'équation (3.23) peut d'ailleurs se réécrire sous la forme quadratique suivante (qui nous rappelle à bien des égards celle de Sagdeev)

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dN_i}{d\xi} \right)^2 + U(N_i) = 0 \quad (3.30)$$

où  $U(N_i)$  est dit (cette fois ci) pseudo- potentiel de Bernoulli et est donné par

$$U(N_i) = -\frac{1}{f_1(N_i)^2} \int f_1(N_i) f_2(N_i) dN_i \quad (3.31)$$

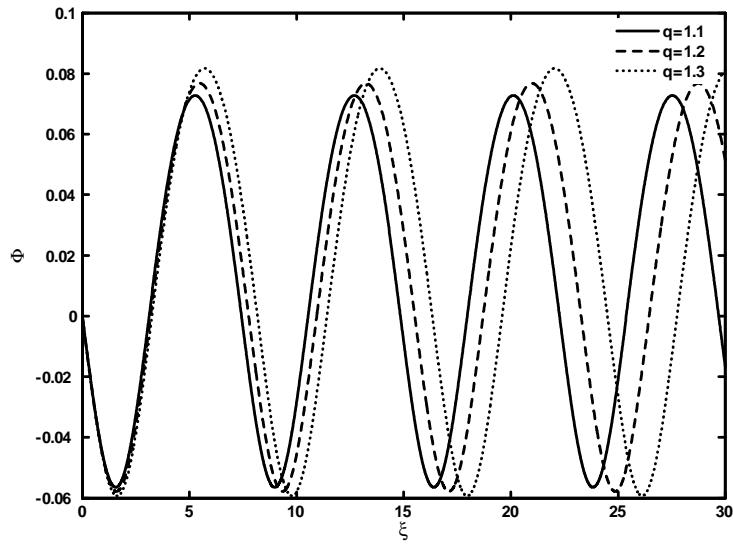
L'équation (3.30) décrit la dynamique d'une pseudo- particule de masse unité, de pseudo-coordonnée  $N_i$ , ayant une pseudo- vitesse  $dN_i/d\xi$  et plongée dans un potentiel  $U$ . Ce dernier vérifie la condition  $U(1) = 0$  et est donné par

$$U(N_i) = \frac{-N_i^6}{(-M^2 + \tau N_i^{\gamma+1})^2} \left\{ \int \frac{-M^2 + \tau N_i^{\gamma+1}}{N_i^3} \left( N_i - \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{\tau}{(\gamma-1)} (N_i^{\gamma-1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left( \frac{1}{N_i^2} - 1 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}} dN_i \right) \right\} \quad (3.32)$$

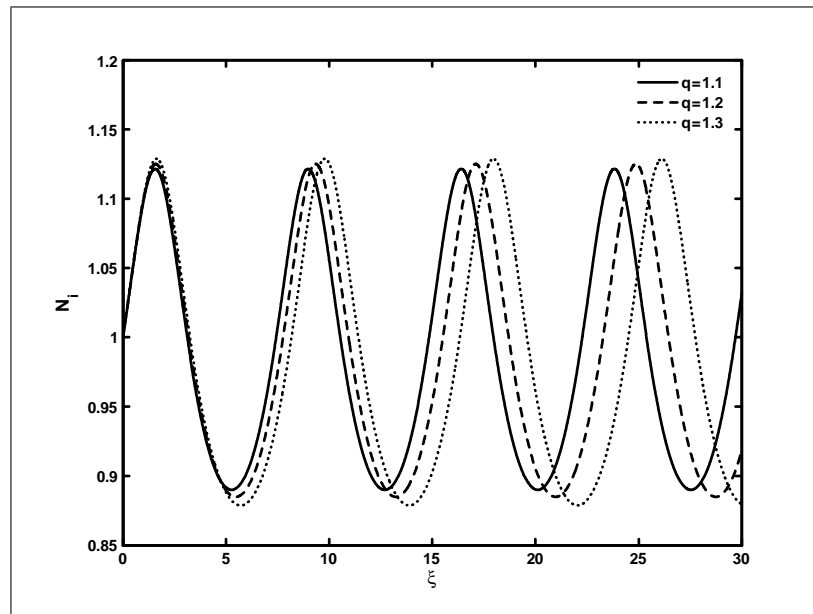
Afin de délimiter le domaine d'existence des solutions solitaires de l'équation (3.30), il est important d'analyser  $U(N_i)$ . Mais comme ce dernier ne possède pas de forme exacte (autre que la forme intégrale précédente), il sera étudié conjointement avec  $N_i$  solution numérique de l'équation différentielle (3.23).

### 3.4 Résultats numériques et discussion

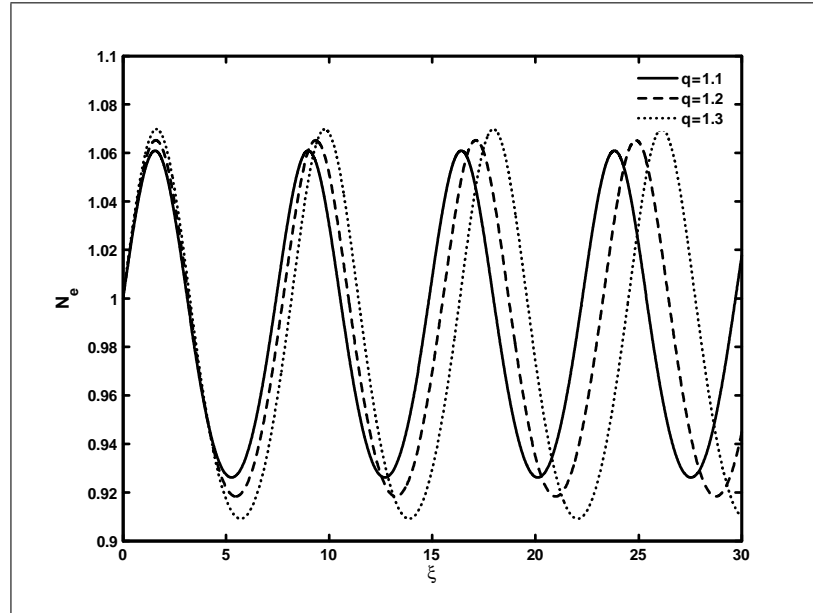
Afin d'étudier les propriétés de l'onde acoustique ionique susceptible de se propager dans notre modèle de plasma, nous avons procédé à une intégration numérique de l'équation (3.23) pour déterminer le profil de la densité ionique, le potentiel étant déterminé à partir de l'équation (3.16) et les profils des températures  $T_i$  et  $T_e$  déduits à partir de  $T_i = (\tau/\gamma)N_i^{\gamma-1}$  et  $T_e = N_e^{\gamma-1}$ . En régime subsonique ( $M < 1$ ),  $\Phi$ ,  $N_i$  et  $N_e$  exhibent un comportement oscillatoire, périodique et non symétrique (par rapport à  $\xi$ ) comme l'attestent, respectivement, les figures 11, 12 et 13. L'amplitude de la fluctuation augmente à mesure que les électrons s'écartent de leur équilibre thermodynamique Maxwellien. Notons que ces structures réapparaissent dans le cas  $M > 1$  et  $-1 < q < 1$ . En régime supersonique ( $M > 1$ ) et pour  $q > 1$ , le potentiel électrostatique exhibe un profil solitaire raréfactif (Fig. 14) se traduisant par une compression dans les profils de la densité électronique (Fig. 15) et ionique (Fig. 16). L'allure en forme de puits (Fig. 17) du pseudo-potentiel de Bernoulli confirme la nature solitaire des structures précédentes. Les températures électronique (Fig. 18) et ionique (Fig. 19) adoptent le même profil solitaire et augmentent à mesure que les électrons dévient de leur équilibre Maxwellien. Dans le cas  $0 < q < 1$ , apparaît une structure à deux niveaux formée d'un soliton compressif et d'une double-couche raréfactif (Fig. 20) comme l'atteste le pseudo-potentiel associé (Fig. 21). A mesure que  $q \rightarrow 1$  (équilibre Maxwellien) la double structure disparaît alors que le soliton compressif persiste. La figure 22 montre la variation du nombre de Mach maximal  $M_{cr}$  pour lequel les structures solitaires existent. Ces valeurs sont déterminées à partir de la condition  $U(N_{i\max}) > 0$ . Pour  $q \sim 1$ ,  $\gamma = 5/3$  et  $\tau \approx 0$ , nous avons  $M_{cr} \simeq 1.58$  (cas proche de celui des électrons Maxwelliens).  $M_{cr}$  augmente et devient plus grand que son analogue Maxwellien pour les grandes valeurs de  $q > 1$ .



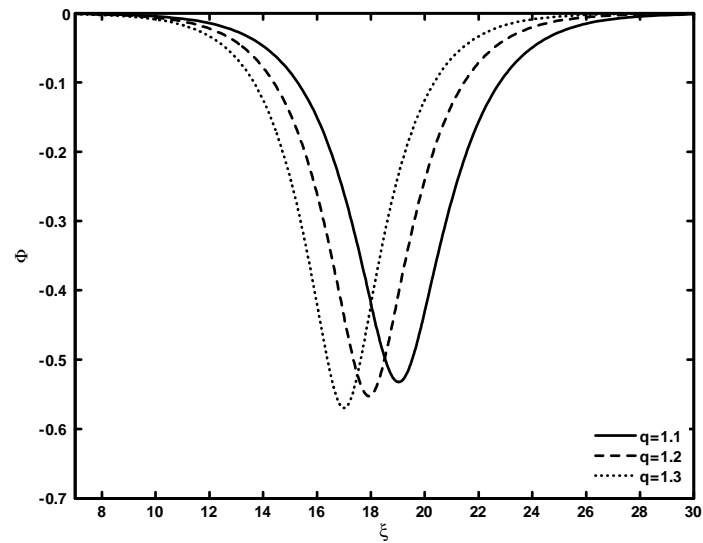
**Figure 11:** Profile oscillatoire du potentiel électrostatique  $\Phi(\xi)$  pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q$ , avec  $\gamma = 5/3$ ,  $\tau = 0.01$  et  $M = 0.75$ .



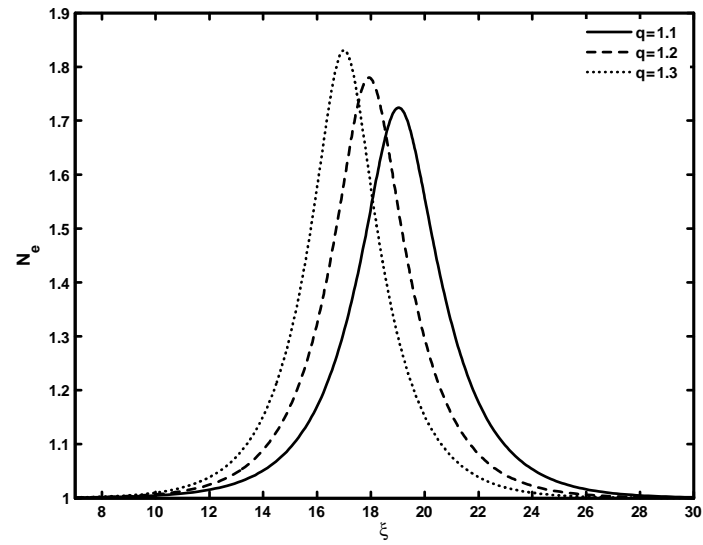
**Figure 12:** Profile oscillatoire de la densité ionique  $N_i(\xi)$  pour les mêmes paramètres que la figure 11.



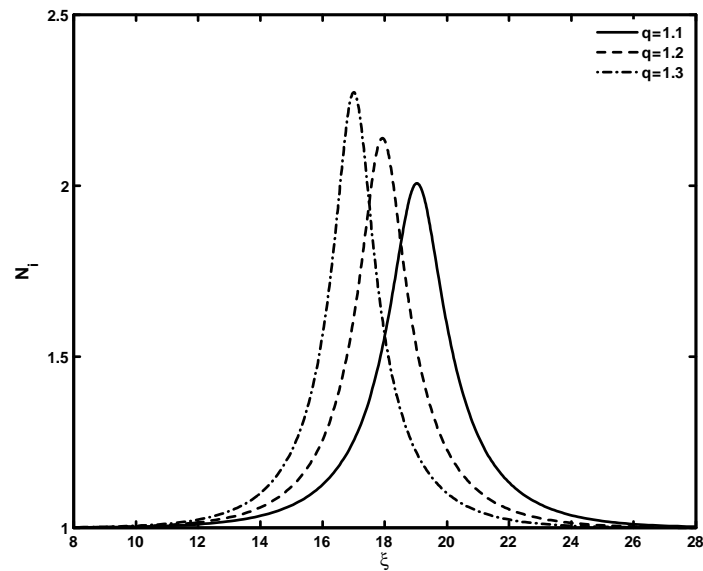
**Figure 13:** Profile oscillatoire de la densité électronique  $N_e(\xi)$  pour les mêmes paramètres que la figure 11.



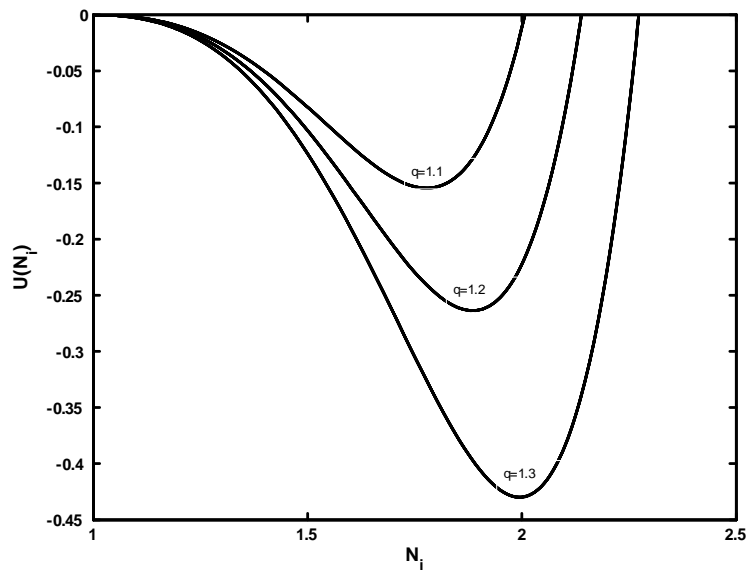
**Figure 14:** Profile solitaire du potentiel électrostatique  $\Phi(\xi)$  associé à l'onde acoustique ionique pour différentes valeurs du paramètre non extensif, avec  $\gamma = 5/3$ ,  $\tau = 0.01$  et  $M = 1.2$ .



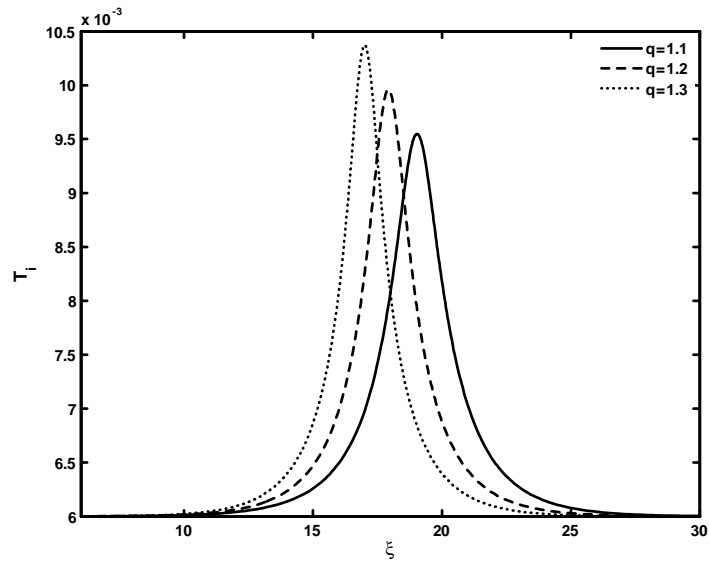
**Figure 15:** Profile spatial de la densité électronique  $N_e(\xi)$  pour les mêmes paramètres que ceux de la figure 14.



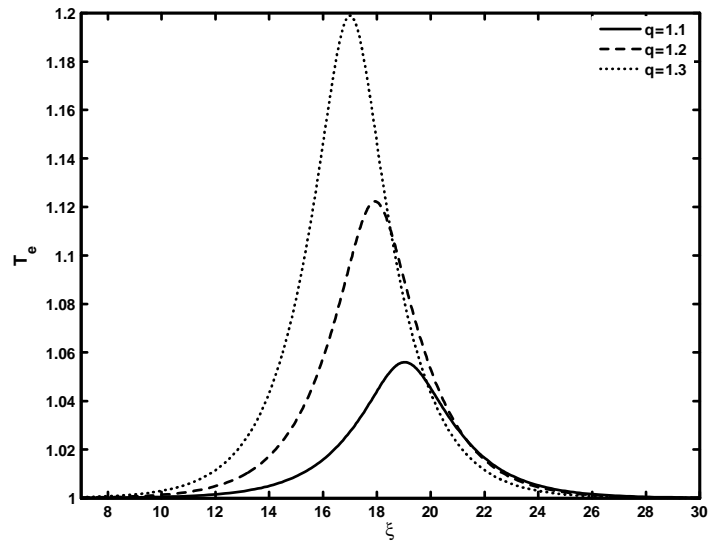
**Figure 16:** Profile spatial de la densité ionique  $N_i(\xi)$  pour les mêmes paramètres que ceux de la figure 14.



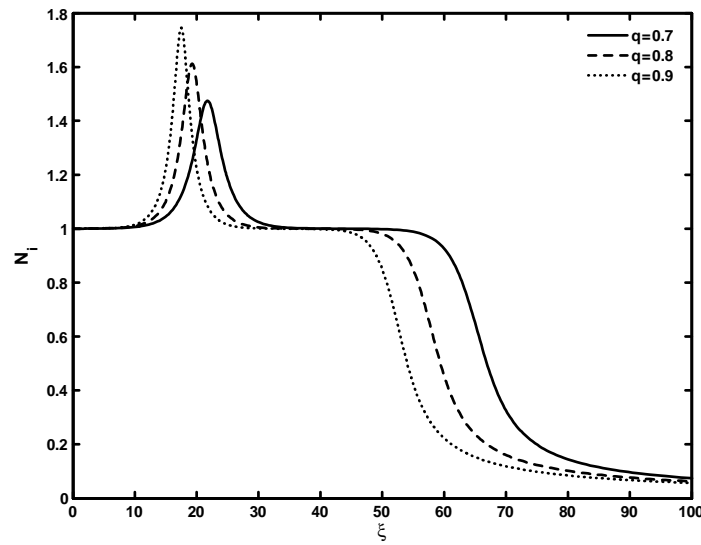
**Figure 17:** Pseudo potentiel  $U(N_i)$  associé au soliton de la figure 16 pour les memes parametres de la figure 14.



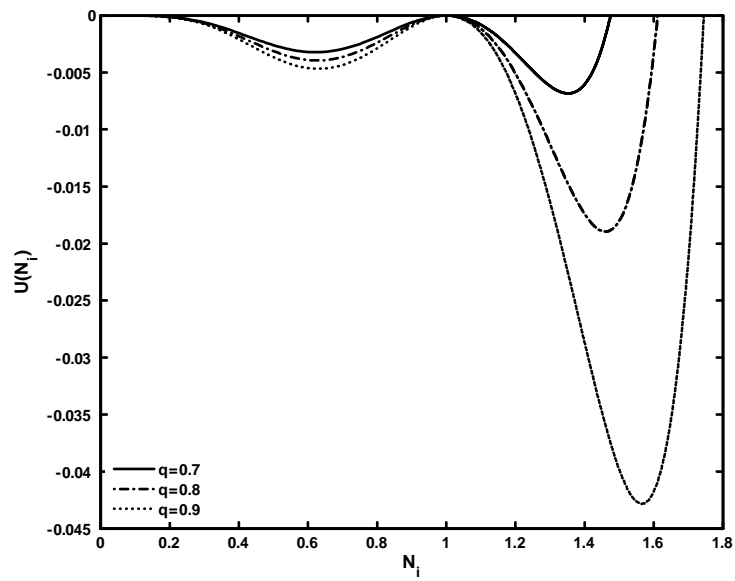
**Figure 18:** Profile spatial de la température ionique  $T_i(\xi)$  pour les mêmes paramètres que ceux de la figure 14.



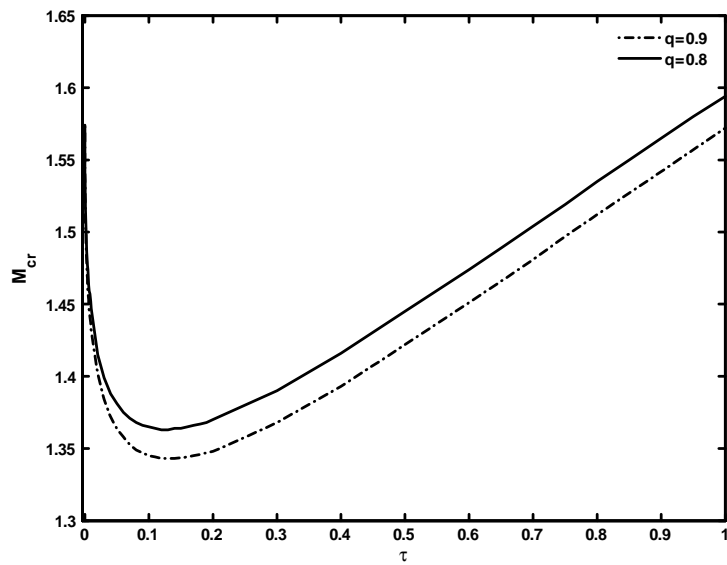
**Figure 19:** Profil spatial de la température électronique  $T_e(\xi)$  pour les mêmes paramètres que ceux de la figure 14.



**Figure 20:** Structure à deux niveaux indiquant la coexistence d'un soliton compressif et d'une double-couche raréfiante, avec  $M = 1.2$ .



**Figure 21:** Potentiel de Bernoulli  $U(N_i)$  associé à la structure à deux niveaux de la figure 20.



**Figure 22:** Tracé de  $M_{cr}$ , avec  $\gamma = 5/3$ .

# 4

## Onde acoustique électronique solitaire associée à un plasma contenant des électrons non extensifs

### 4.0.1 Présentation physique du problème

L'onde acoustique électronique est l'un des processus collectifs les plus importants d'un plasma. Cette onde est, en comparaison avec les oscillations plasma ioniques, une onde de haute fréquence. Elle se développe dans les plasmas ayant, en plus des ions chargés positivement, deux populations d'électrons avec des températures nettement différentes (disparates) [82]-[84]. Les électrons relativement froids oscillent sur un fond thermalisé d'électrons chauds non inertiels fournissant la force de rappel (rappelons qu'à l'instar du mouvement d'un ressort, les ingrédients d'une oscillation sont l'inertie et les forces de rappel). L'onde acoustique électronique peut également exister dans les plasmas dont les ions sont plus chauds que les électrons [85]. Durant la dernière décade, les ondes acoustiques électroniques ont fait l'objet d'une intense investigation. Elles ont été proposées pour expliquer les observations spatiales d'ondes solitaires à potentiel positif [86] ou à potentiel négatif [87]. Des tentatives ont été faites pour expliquer le bruit électrostatique à large bande (une activité commune du plasma dans la couche limite de la région magnetotail terrestre) comme étant des structures solitaires acoustiques électroniques avec un potentiel négatif dans un plasma à deux températures électroniques [88]. Plus récemment, Verheest et *al.* [89] ont montré que l'inclusion de l'inertie des électrons chauds peut donner naissance à des solitons acoustiques électroniques de type compressif et rendre l'analyse beaucoup plus complexe [90]. Notons qu'au cours de ces dernières années de nombreux travaux ont traité

d'un aspect ou d'un autre concernant les ondes acoustiques électroniques (nous ne citons qu'un nombre représentatif) [91]-[93]. Cependant, la majeure partie de ces travaux fait appel à la statistique extensive (Boltzmann-Gibbs-Shannon) (BGS). Motivés par nos résultats sur les ondes acoustiques ioniques, on se propose dans le présent chapitre de revisiter les ondes acoustiques électroniques dans le cadre de la statistique de Tsallis. Nous inspirant des travaux précédents, notre modèle de plasma sera composé d'ions immobiles, d'électrons froids fluides et d'électrons chauds non extensifs.

## 4.0.2 Équations de base du modèle

Considérons un plasma non collisionnel et non magnétisé composé d'électrons froids fluides, d'électrons chauds non extensifs et d'ions stationnaires (jouant le rôle d'un fond neutralisant) de densités, respectives,  $n_c$ ,  $n_e$  et  $n_i$ . En l'absence de toute perturbation, la condition de quasi-neutralité de la charge requiert  $n_{c0} + n_{e0} = n_{i0}$  ou  $\alpha = n_{e0}/n_{c0} = n_{i0}/n_{c0} - 1$ . La dynamique de l'onde acoustique électronique unidimensionnelle associée à un tel modèle de plasma est gouvernée par les équations adimensionnelles suivantes

$$\frac{\partial N_c}{\partial T} + \frac{\partial (N_c V_c)}{\partial X} = 0 \quad (4.1)$$

$$\left( \frac{\partial U_c}{\partial T} + U_c \frac{\partial U_c}{\partial X} \right) = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \frac{1}{\alpha} N_c + N_e - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.3)$$

où  $j = c, e, i$  représente, respectivement, les électrons froids, les électrons non extensifs et les ions stationnaires.  $e$  est la charge élémentaire,  $m_j$  la masse et  $T_j$  la température de la particule d'espèce  $j$ . Le potentiel électrostatique  $\Phi$ , la vitesse fluide de l'électron froid  $U_c$  et les densités de particules  $N_j$  sont normalisés, respectivement, par  $T_e/e$ ,  $C_e = (T_e/\alpha m_e)^{1/2}$  et  $n_{j0}$ . Le temps  $T$  et la variable d'espace  $X$  sont en unités de la période plasma électronique  $\omega_{pe}^{-1} = (m_e/4\pi n_{e0} e^2)^{1/2}$  et du rayon de Debye  $\lambda_{De} = (T_e/4\pi n_{e0} e^2)^{1/2}$ .  $N_e$  est la densité des électrons non extensifs chauds et est donnée par [10], [69]

$$N_e = n_e/n_{e0} = \left\{ 1 + (q-1) \frac{e\varphi}{kT_e} \right\}^{1/(q-1)+1/2} \quad (4.4)$$

Pour étudier les ondes acoustiques électroniques solitaires d'amplitude arbitraire et indépendantes du temps, les équations (4.1) - (4.3) sont réécrites en introduisant la variable

$\xi = X - MT$ , où  $M$  est le nombre de Mach (vitesse du soliton  $/C_s$ ). En imposant des conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ( $\Phi \rightarrow 0$ ,  $V_c \rightarrow 0$ ,  $N_c \rightarrow 1$  lorsque  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ), nous obtenons à partir des équations (4.1) et (4.2)

$$N_c = \frac{M}{\sqrt{M^2 + 2\alpha\Phi}} \quad (4.5)$$

En portant la relation (4.5) dans l'équation de Poisson (4.3), en multipliant chaque membre de l'équation résultante par  $d\Phi/d\xi$ , en intégrant une fois par rapport à  $\Phi$  et en imposant les conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ( $\Phi \rightarrow 0$ ,  $d\Phi/d\xi \rightarrow 0$  lorsque  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ), nous obtenons la quadrature suivante

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 + V(\Phi) = 0 \quad (4.6)$$

où  $V(\Phi)$  est le potentiel de Sagdeev [39] et est donné par

$$V(\Phi) = \frac{M^2}{\alpha^2} \left( 1 - \sqrt{1 + 2\alpha\Phi/M^2} \right) + (1 + 1/\alpha)\Phi - \frac{2}{3q - 1} \left( -1 + [1 + (q - 1)\Phi]^{\frac{1}{q-1} + \frac{3}{2}} \right) \quad (4.7)$$

### 4.0.3 Résultats numériques et discussion

En procédant de la même manière que précédemment, il est possible de délimiter le domaine des nombres de Mach admissibles. La condition  $[d^2V/d\Phi^2]_{\Phi=0} < 0$  pour l'existence des ondes acoustiques électroniques solitaires se traduit par

$$M^2 > \frac{2}{q + 1} \quad (4.8)$$

Par conséquent, la limite inférieure  $M_{\min}$  est donnée par

$$M_{\min} = \sqrt{\frac{2}{q + 1}} \quad (4.9)$$

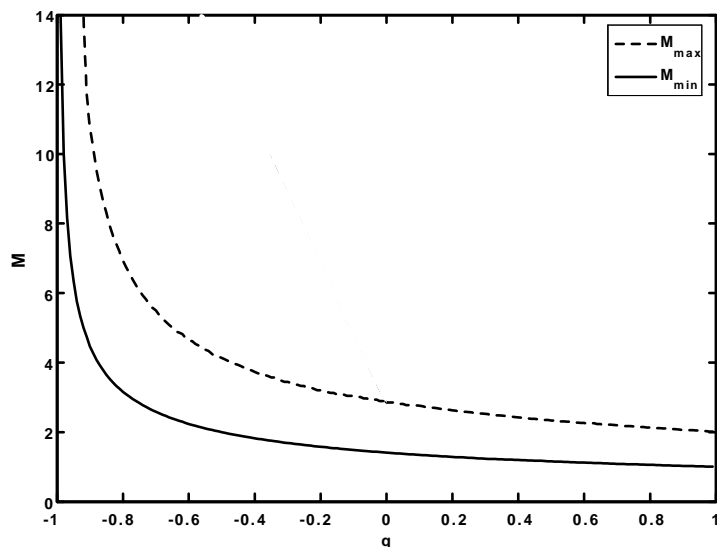
Il s'ensuit que pour  $q > 1$  ( $-1 < q < 1$ ), la limite inférieure  $M_{\min} = [2/(q + 1)]^{1/2}$  est plus petite (plus grande) que son analogue Maxwellienne ( $q \rightarrow 1$ ),  $M_{\min} = 1$ , indiquant ainsi la possibilité d'existence de solitons acoustiques électroniques de type subsonique ( $M < 1$ ). La limite supérieure de  $M$  peut être déterminée à partir de la condition  $V(\Phi_c) \geq 0$ , où  $\Phi_c = -M_{\max}^2/2\alpha$  est la valeur minimale de  $\Phi$  pour laquelle la densité des électrons froids  $N_c$  est réelle. Nous obtenons alors l'équation transcendante suivante

$$V(\Phi_c) = \frac{M_{\max}^2}{\alpha^2} - (1 + 1/\alpha) \frac{M_{\max}^2}{2\alpha} - \frac{2}{3q - 1} \left( -1 + \left[ 1 - (q - 1) \frac{M_{\max}^2}{2\alpha} \right]^{\frac{1}{q-1} + \frac{3}{2}} \right) \geq 0 \quad (4.10)$$

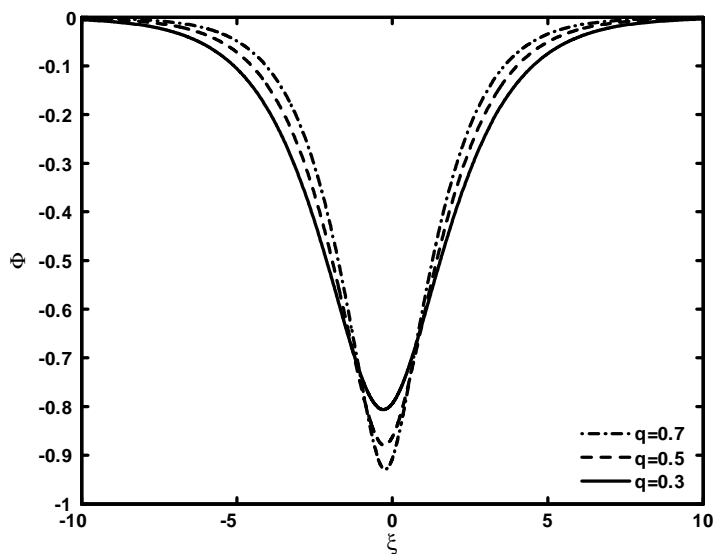
Notons que pour une distribution électronique de type Maxwell- Boltzmann ( $q \rightarrow 1$ ), l'équation précédente (4.10) se réduit à

$$1 + \frac{M_{\max}^2}{2\alpha^2}(1 - \alpha) - \exp - \left( \frac{M_{\max}^2}{2\alpha} \right) \geq 0. \quad (4.11)$$

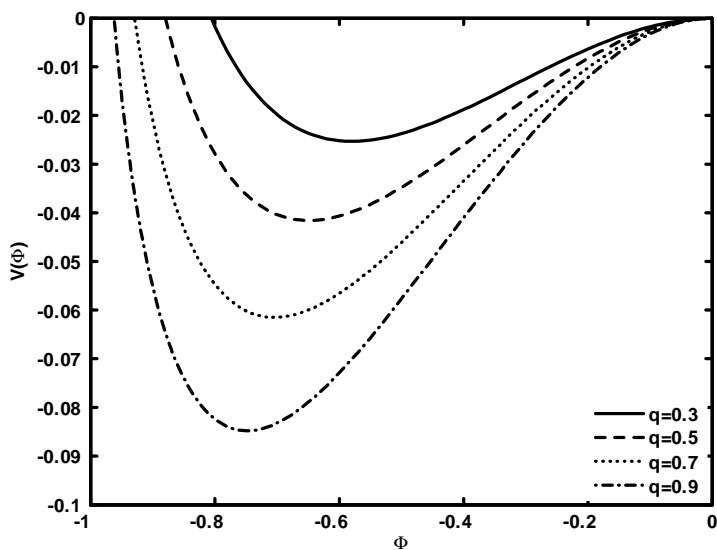
Commençons par étudier d'abord l'effet de la fraction relative des particules  $\alpha = n_{e0}/n_{c0}$  sur le domaine des nombres de Mach admissibles ( $M_{\min} < M < M_{\max}$ ). Nous avons constaté que pour  $q = 0.5$  et  $\alpha = 2, 4, 10$  et  $50$ , les solitons acoustiques électroniques peuvent exister, respectivement, dans les gammes  $1.15 < M < 3.3$ ,  $1.15 < M < 2.7$ ,  $1.15 < M < 2.4$  et  $1.15 < M < 2.3$ . Il s'avère donc que le domaine des nombres de Mach admissibles se rétrécit à mesure que le nombre relatif d'électrons non extensifs augmente. Pour une valeur constante de  $\alpha = 50$ , la figure 23 indique que les limites supérieure  $M_{\max}$  et inférieure  $M_{\min}$ , sont décalées vers les valeurs inférieures quand les électrons évoluent en direction de leur équilibre thermodynamique ( $q \rightarrow 1$ ). Le processus de "Maxwellisation" de la composante non extensive ne favorise donc pas la propagation des ondes acoustiques électroniques. Nous avons tracé la variation spatiale de  $\Phi$  pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q = 0.3, 0.5$  et  $0.7$  (Fig. 24). Le potentiel électrostatique exhibe un profil spatialement localisé en régime supersonique comme l'atteste d'ailleurs la structure en forme de puits du potentiel de Sagdeev (Fig. 25). De plus, nos résultats numériques révèlent qu'à mesure que le paramètre  $q$  diminue (le caractère non extensif du plasma devient important), l'amplitude du soliton diminue alors que sa largeur augmente, contrairement aux effets suprathermiques qui rendent la structure solitaire plus pointue [94]. Ceci peut être attribué au fait que les électrons sont localement expulsés (Fig. 26) et poussés hors de la région de localisation du soliton à mesure que les électrons chauds et non extensifs évoluent vers leur équilibre thermodynamique ( $q \rightarrow 1$ ). Le cas  $-1 < q < 0$  (Figs. 27 et 28), avec  $M = 4.5$  et  $\alpha = 2$ , fournit qualitativement les mêmes résultats. Notons que nos résultats peuvent être utiles dans la compréhension des structures non linéaires localisées dans différentes régions de la magnétosphère [95].



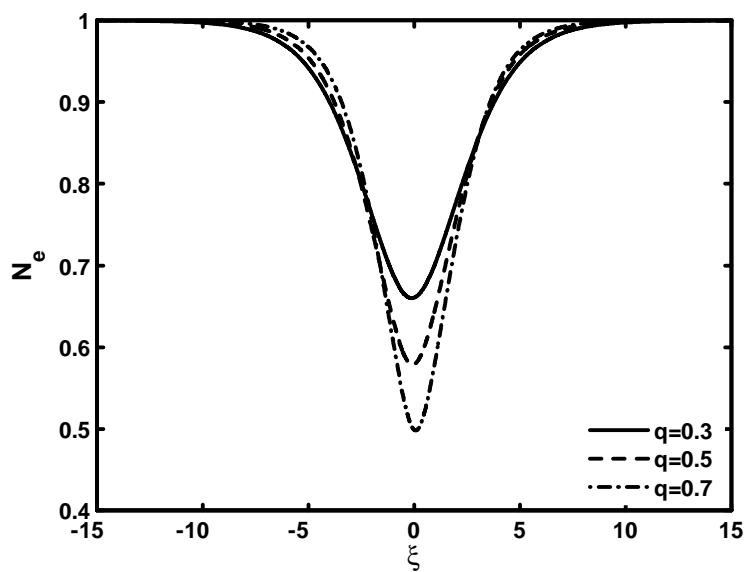
**Figure 23:** Variation du domaine des nombres de Mach admissibles  $[M_{\min}, M_{\max}]$  en fonction du paramètre non extensif  $q$ , avec  $\alpha = 50$ .



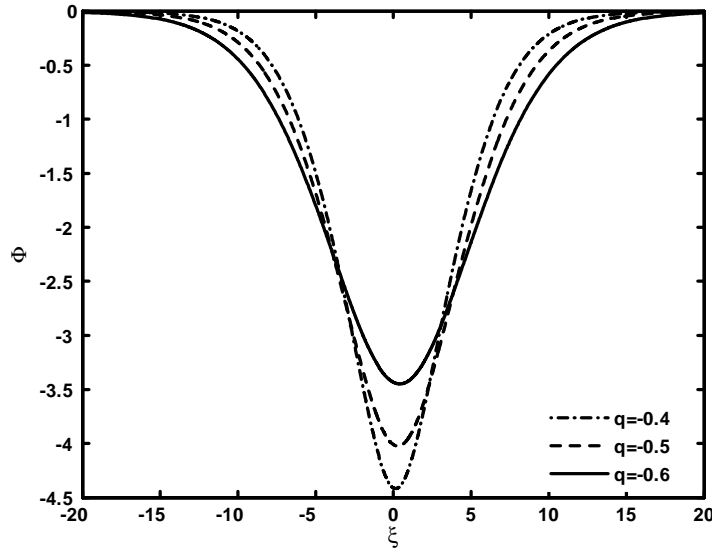
**Figure 24:** Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l'onde acoustique électronique pour différentes valeurs du paramètre  $q > 0$ , avec  $M = 4.5$  et  $\alpha = 2$ .



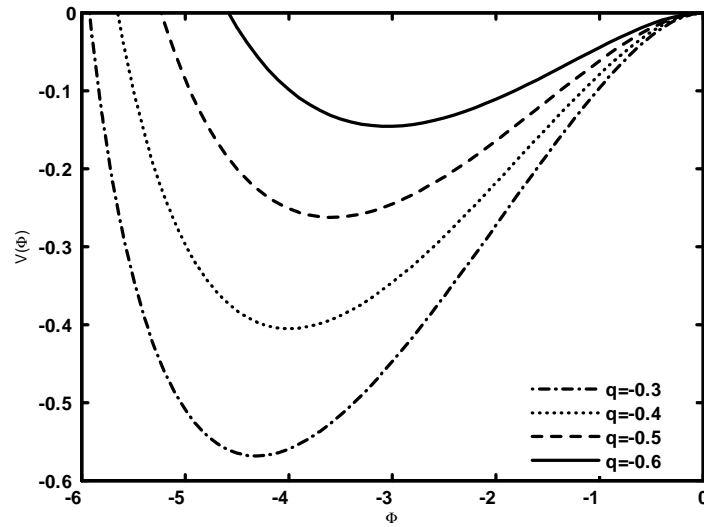
**Figure 25:** Potentiel de Sagdeev  $V(\Phi)$  pour différentes valeurs du paramètre non extensif, avec  $M = 2$  et  $\alpha = 2$ .



**Figure 26:** Profil spatial de la densité des électrons  $N_e$  pour différentes valeurs du paramètre non extensif, avec  $\alpha = 2$  et  $M = 4.5$ .



**Figure 27:** Potentiel électrostatique solitaire  $\Phi$  associé à l'onde acoustique électronique pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q < 0$ , avec  $M = 4.5$  et  $\alpha = 2$ .



**Figure 28:** Potentiel de Sagdeev  $V(\Phi)$  pour différentes valeurs du paramètre  $q < 0$  avec  $M = 4.5$  et  $\alpha = 2$ .

Dans la limite des faibles amplitudes ( $\Phi \ll 1$ ), la solution solitaire localisée de l'équation (4.6) peut être obtenue de manière explicite en effectuant un développement en séries de puissances de  $V(\Phi)$ . Nous obtenons alors

$$V(\Phi) = A_2\Phi^2 + A_3\Phi^3 + o(\Phi^4) \quad (4.12)$$

où

$$A_2 = \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{q+1}{2} \right) \quad (4.13)$$

$$A_3 = -\frac{1}{8} - \frac{q}{12} + \frac{q^2}{24} - \frac{\alpha}{2M^4} \quad (4.14)$$

En effectuant les étapes nécessaires pour résoudre l'équation (4.6), nous obtenons

$$\Phi(\chi) = \Phi_m \operatorname{sech} \left( \frac{\chi - \chi_0}{\Delta} \right) \quad (4.15)$$

avec

$$\Phi_m = -A_2/A_3 \quad \text{et} \quad \Delta = (-2/A_2)^{1/2} \quad (4.16)$$

La solution (4.15) représente l'onde acoustique électronique solitaire stationnaire de faible amplitude à condition que  $A_2 < 0$  ou  $M^2 > 2/(q+1)$ . Si maintenant nous poussons le développement jusqu'à l'ordre 4, à savoir

$$V(\Phi) = A_2\Phi^2 + A_3\Phi^3 + A_4\Phi^4 + o(\Phi^5) \quad (4.17)$$

avec

$$A_4 = \frac{5\alpha^2}{8M^6} - \frac{q^3}{64} + \frac{11q^2}{192} - \frac{q}{192} - \frac{5}{64} \quad (4.18)$$

il devient possible d'envisager une solution en double-couches (de faible amplitude) de (4.6). Celle-ci existe seulement si les conditions suivantes sont satisfaites: (i)  $V(0) = V(\Phi_m) = 0$ ; (ii)  $(dV/d\Phi)_{\Phi=0} = (dV/d\Phi)_{\Phi=\Phi_m} = 0$ ; et  $(d^2V/d\Phi^2)_{\Phi=0, \Phi_m} < 0$ , où 0 et  $\Phi_m$  sont deux points extrêmes de  $V(\Phi)$ . En appliquant les deux premières conditions aux limites, nous obtenons

$$2\Phi_m = -A_3/A_4 \quad (4.19)$$

$V(\Phi)$  peut alors être réécrit sous la forme

$$V(\Phi) = A_4\Phi^2(\Phi_m - \Phi)^2 \quad (4.20)$$

La solution en double-couches de (4.6) est alors donnée par

$$\Phi(\xi) = \frac{\Phi_m}{2} [1 - \tanh(2\xi/\Delta)] \quad (4.21)$$

où  $\Delta = \sqrt{(-8/A_4)/|\Phi_m|}$  représente la largeur de la double-couche à condition que

$$A_4 < 0 \quad \text{ou} \quad M^6 > \frac{(120\alpha^2 - q - 3q^2)}{15 - 11q^2} \quad (4.22)$$

Il est évident que le domaine des nombres de Mach  $M$  admissibles dépend rigoureusement des paramètres du plasma, en particulier, de degré de non extensivité des électrons.

# 5

## Influence du piégeage non extensif sur les solitons acoustiques ioniques

### 5.1 Introduction

Le piégeage des particules[96]-[100] est un phénomène commun aussi bien dans les plasmas de l'espace que dans ceux des laboratoires. Le piégeage veut dire qu'une partie des particules du plasma est confinée dans une région finie de l'espace des phases. C'est un effet non linéaire qu'on ne peut, par conséquent, décrire au moyen de la théorie linéaire. Le concept de la théorie linéaire des ondes basée sur la prescription de Landau ou de van Kampen (utilisant la théorie de Vlasov) devient complètement inapplicable pour la propagation des modes en présence de particules résonantes avec des vitesses de phase proches du domaine thermique. La présence de telles particules non isothermiques peut modifier de manière significative les caractéristiques de propagation d'une onde. La première méthode analytique de construction des structures d'équilibre en présence de particules piégées, a été donnée par Bernstein, Greene et Kruskal (BGK)[101]. Plus tard et pour lever les difficultés de la méthode BGK, Schamel a développé une méthode différente de construction de solutions d'équilibre, appelée méthode du pseudo-potentiel[25], [42], [102]-[104]. Les travaux de Schamel et les publications subséquentes ont alors imprimé un grand essor à la théorie des trous ou vortex dans l'espace des phases. Plus récemment, certains travaux théoriques se sont intéressés à l'influence du piégeage non-Maxwellien sur différents types de processus linéaires et non linéaires dans les plasmas[102]-[107]. Motivés par leurs résultats et conclusions, on se propose dans le présent chapitre de revisiter le piégeage électronique dans le contexte théorique de la statistique de Tsallis[3] (Tsallis  $q$ -entropy). Rappelons que cette

dernière a été utilisée avec succès en physique des plasmas[4]-[12]. Nous nous inspirerons de la méthode de Schamel[25], [42], [102]-[106] de construction des solutions d'équilibre. Celle ci est aussi générale que la méthode BGK et permet l'incorporation de distributions plus physique. Cette méthode, appelée méthode du pseudo-potentiel, décrit les solutions de l'équation cinétique de Vlasov en termes de constantes du mouvement et permet d'obtenir le potentiel self- consistant en résolvant l'équation de Poisson.

## 5.2 Modèle théorique

Nous allons nous intéresser aux ondes acoustiques ioniques solitaires d'amplitude arbitraire (sans approximation) dans un plasma comprenant des électrons piégés non extensifs. Ces derniers sont modélés par la fonction de distribution de type- Schamel suivante

$$f_e = f_{ef} + f_{et} \quad (5.1)$$

où

$$f_{ef}(v) = C_q \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{m_e v^2}{2T_{ef}} - \frac{e\phi}{T_{ef}} \right] \right\}^{1/(q-1)} \quad \text{pour } |v| > \sqrt{\frac{2e\phi}{m_e}} \quad (5.2)$$

$$f_{et}(v) = C_q \left\{ 1 - \beta(q-1) \left[ \frac{m_e v^2}{2T_{ef}} - \frac{e\phi}{T_{ef}} \right] \right\}^{1/(q-1)} \quad \text{pour } |v| \leq \sqrt{\frac{2e\phi}{m_e}} \quad (5.3)$$

et  $C_q$  est la constante de normalisation. Ici et dans ce qui suit,  $j = e, i$  représente les électrons et les ions,  $\phi$  est le potentiel électrostatique,  $q_{j=e,i} = \mp e$  sont les charges électriques,  $T_j$  les températures, et  $m_j$  les masses. L'indice  $f(t)$  représente la contribution des électrons libres (piégés).  $\beta$  est un paramètre qui détermine le nombre d'électrons piégés et est défini comme étant le rapport de la température des électrons libres  $T_{ef}$  sur celle des électrons piégés  $T_{et}$ , i.e.,  $|\beta| = T_{ef}/T_{et}$ . Rappelons que le paramètre  $q$  représente le degré de non extensivité. Notons que pour  $q < -1$ , la distribution (5.1) est non normalisable. Dans le cas limite extensif ( $q \rightarrow 1$ ), la distribution (5.1) se réduit à la distribution bien connue de Schamel. Notons qu'en fonction du signe (positif ou négatif) de  $\beta$  et de la valeur de  $q$  ( $q > 1$  ou  $-1 < q < 1$ ), la distribution (5.1) exhibe des coupures thermiques qui, lorsqu'elles existent, sont résumées comme suit

a- Pour  $\beta > 0$  et  $q > 1$ , (5.2) et (5.3) exhibent des coupures thermiques données, respectivement, par

$$v_{\max 1} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e(q-1)} + \frac{2e\phi}{m_e}} \quad (5.4)$$

$$v_{\max 2} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e\beta(q-1)} + \frac{2e\phi}{m_e}} \quad (5.5)$$

b- Pour  $\beta < 0$  et  $q > 1$ , (5.2) exhibe une coupure thermique donnée par

$$v_{\max 1} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e(q-1)} + \frac{2e\phi}{m_e}} \quad (5.6)$$

c- Pour  $\beta < 0$  et  $-1 < q < 1$ , (5.3) exhibe une coupure thermique donnée par

$$v_{\max 2} = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e\beta(q-1)} + \frac{2e\phi}{m_e}} \quad (5.7)$$

Dans ce qui suit et sans perte de généralité, nous considérerons le cas  $\beta > 0$ . En intégrant  $f_e(v)$  sur tout l'espace des vitesses

$$n_e(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(v) dv = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2e\phi/m_e}} f_{ef} dv + \int_{-\sqrt{2e\phi/m_e}}^{\sqrt{2e\phi/m_e}} f_{et} dv + \int_{\sqrt{2e\phi/m_e}}^{+\infty} f_{ef} dv, & \text{for } -1 < q < 1 \\ \int_{-v_{\max 1}}^{-\sqrt{2e\phi/m_e}} f_{ef} dv + \int_{-\sqrt{2e\phi/m_e}}^{\sqrt{2e\phi/m_e}} f_{et} dv + \int_{\sqrt{2e\phi/m_e}}^{+v_{\max 1}} f_{ef} dv, & \text{for } q > 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

nous obtenons

$$N_e = n_e/n_{e0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{\Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2})} \left\{ {}_2F_1 \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{1-q} - \frac{3}{2}; \frac{1}{1-q} + \frac{1}{2}; 1 - (1-q)\Phi \right] \right. \\ \left. + \frac{2\Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2})} \sqrt{(1-q)\Phi} {}_2F_1 \left[ \frac{1}{1-q}, 1; \frac{3}{2}; \beta(1-q)\Phi \right] \right\} \quad (5.9)$$

pour  $-1 < q < 1$ , et

$$N_e = n_e/n_{e0} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{1-q} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{1-q})\Gamma(\frac{1}{1-q} + 2)} (1 + \Phi(q-1))^{-1/2} \right. \\ \left. {}_2F_1 \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{1-q} + 1; \frac{1}{1-q} + 2; \frac{1}{1 + (q-1)\Phi} \right] \right. \\ \left. + \frac{2\Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{1-q})} (1+q)\sqrt{(1-q)\Phi} {}_2F_1 \left[ \frac{1}{1-q}, 1; \frac{3}{2}; \beta(1-q)\Phi \right] \right\} \quad (5.10)$$

pour  $q > 1$ . La quantité  $\Gamma$  est la fonction gamma standard,  $\Phi = e\phi/T_e$  est le potentiel électrostatique adimensionnel, et

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0 \quad (5.11)$$

représente la fonction hyper- géométrique [108] et  $\text{Re}(x)$  est la partie réelle de  $x$ . Notons que pour  $q > 1$  et  $\beta > 0$ ,  $|v_{\max 2}|$  se trouve en dehors de la zone de piégeage  $|v| \leq \sqrt{\frac{2e\phi}{m_e}}$  et, en tant que tel, n'est pas requis dans le calcul de (5.8).

### 5.3 Influence du piégeage non extensif sur les solitons acoustiques ioniques

Examinons maintenant de manière succincte les effets du piégeage non extensif des électrons sur les ondes acoustiques ioniques solitaires d'amplitude arbitraire. Le plasma est composé d'ions fluides froids et d'électrons piégés non extensifs de densités  $n_i$  et  $n_e$ , respectivement. A l'équilibre, nous avons  $n_{e0} = n_{i0}$ . La dynamique des oscillations acoustiques ioniques est alors gouvernée par les équations adimensionnelles suivantes

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial(N_i V_i)}{\partial X} = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = N_e - N_i \quad (5.14)$$

Le potentiel électrostatique  $\Phi$ , la vitesse fluide des ions  $V_i$ , et les densités numériques des particules  $N_j$  sont normalisés (rendus adimensionnels) par  $T_e/e$ ,  $C_i = (T_e/m_i)^{1/2}$ , et  $n_{j0}$ , respectivement. Les variables temporelle  $T$  et d'espace  $X$  sont en unités de la période plasma ionique  $\omega_{pi}^{-1} = (m_i/4\pi n_{e0}e^2)^{1/2}$  et la longueur de Debye électronique  $\lambda_{De} = (T_e/4\pi n_{e0}e^2)^{1/2}$ , respectivement. Dans le but d'étudier les ondes solitaires indépendantes du temps et d'amplitude arbitraire, nous supposons que toutes les variables dans (5.12)-(5.14) dépendent seulement d'une seule variable  $\xi = X - MT$  (où  $\xi$  est normalisé par  $\lambda_{De}$  et  $M =$  vitesse de l'onde solitaire /  $C_i$ ). Moyennant les conditions aux limites appropriées suivantes  $\Phi \rightarrow 0$ ,  $V_i \rightarrow 0$ , et  $N_i \rightarrow 1$  lorsque  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , les équations (5.12) et (5.13) peuvent être intégrées pour donner

$$N_i = \left(1 - \frac{2\Phi}{M^2}\right)^{-1/2} \quad (5.15)$$

En substituant  $N_i$  à partir de (5.15) dans l'équation de Poisson (5.14), et en multipliant chaque membre de l'équation résultante par  $d\Phi/d\xi$ , en intégrant une fois et en imposant les conditions aux limites propres aux solutions localisées  $\Phi \rightarrow 0$  and  $d\Phi/d\xi \rightarrow 0$  lorsque  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , nous obtenons la quadrature

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 + V(\Phi) = 0 \quad (5.16)$$

où  $V(\Phi)$  est le potentiel de Sagdeev [39] donné par

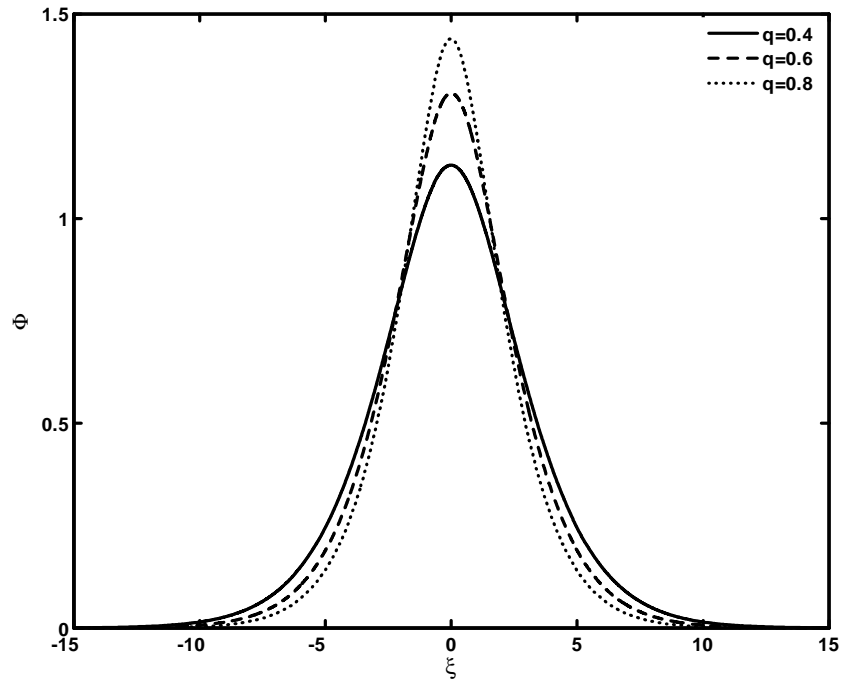
$$\begin{aligned} V(\Phi) = & \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{1-q})}{(\frac{1}{2} + \frac{3(q-1)}{4})\Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2})} {}_2F_1 \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{1-q} - \frac{3}{2}, \frac{1}{1-q} - \frac{1}{2}; 1 + (q-1)\Phi \right] \right. \\ & - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{\Gamma(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2})} \Phi^{3/2} {}_2F_1 \left[ \frac{1}{1-q}, 1, \frac{5}{2}; -\beta(q-1)\Phi \right] \\ & \left. - M^2 \left( \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{M^2}} - 1 \right) + \frac{3.55}{(3q-1)\sqrt{\pi}} \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

pour  $-1 < q < 1$ , et

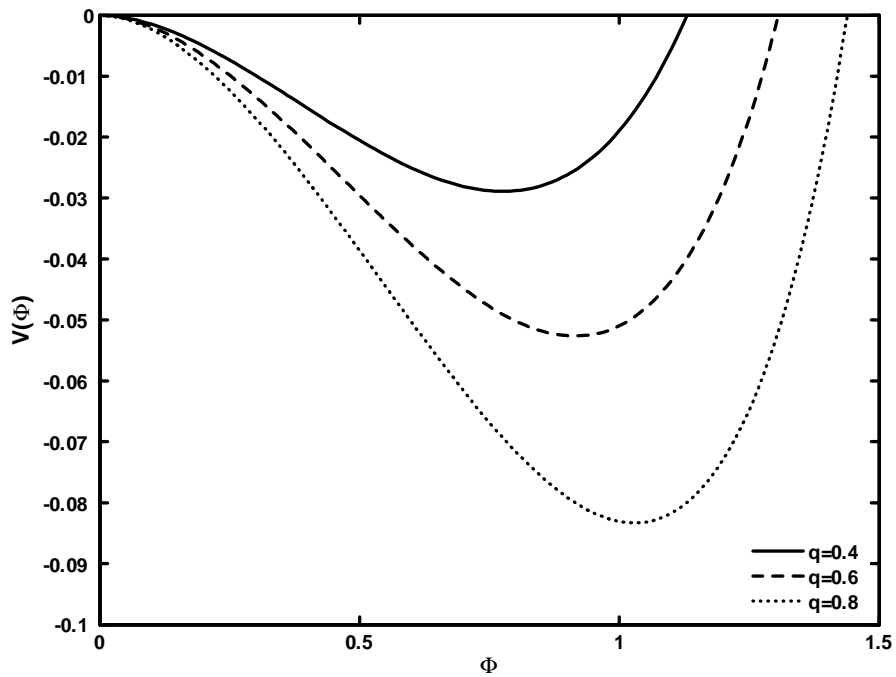
$$\begin{aligned} V(\Phi) = & -\frac{\sqrt{1 + (q-1)\Phi}\Gamma(\frac{1+q}{2(q-1)})(q+1)}{\sqrt{\pi}q(q-1)} \left\{ {}_2F_1 \left[ -\frac{1}{2}; \frac{q}{q-1}, \frac{2q-1}{q-1}; \frac{1}{1 + (q-1)\Phi} \right] \right. \\ & - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{2})(q+1)\sqrt{q-1}}{\Gamma(\frac{1}{1-q})} \Phi^{3/2} {}_2F_1 \left[ \frac{1}{q-1}; 1, \frac{5}{2}; -\beta(q-1)\Phi \right] \\ & \left. - M^2 \left( \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{M^2}} - 1 \right) + \frac{\Gamma(\frac{1+q}{2(q-1)})(q+1)}{\sqrt{\pi}q(q-1)} {}_2F_1 \left[ -\frac{1}{2}; \frac{q}{q-1}, \frac{2q-1}{q-1}; 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.18)$$

pour  $q > 1$ . Les variations de  $\Phi$  (obtenues en résolvant (5.16)) pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q = 0.4$  (trait plein),  $0.6$  (tirets), et  $0.8$  (pointillés) sont représentées sur la figure 29. Le potentiel électrostatique exhibe des ondes acoustiques ioniques solitaires localisées comme l'atteste la structure en forme de puits du pseudo-potentiel (Fig.30). Les paramètres suivants  $\beta = 0.02$  et  $M = 1.9$  ont été utilisés. Nos résultats montrent que les caractéristiques spatiales de ces structures localisées sont affectées de manière significative par les effets non extensifs des électrons. On peut remarquer qu'à mesure que  $q$  décroît, c. à d. le caractère non extensif du plasma devient plus significatif, la largeur du pulse solitaire augmente tandis que son amplitude diminue. Par conséquent, les effets non extensifs peuvent

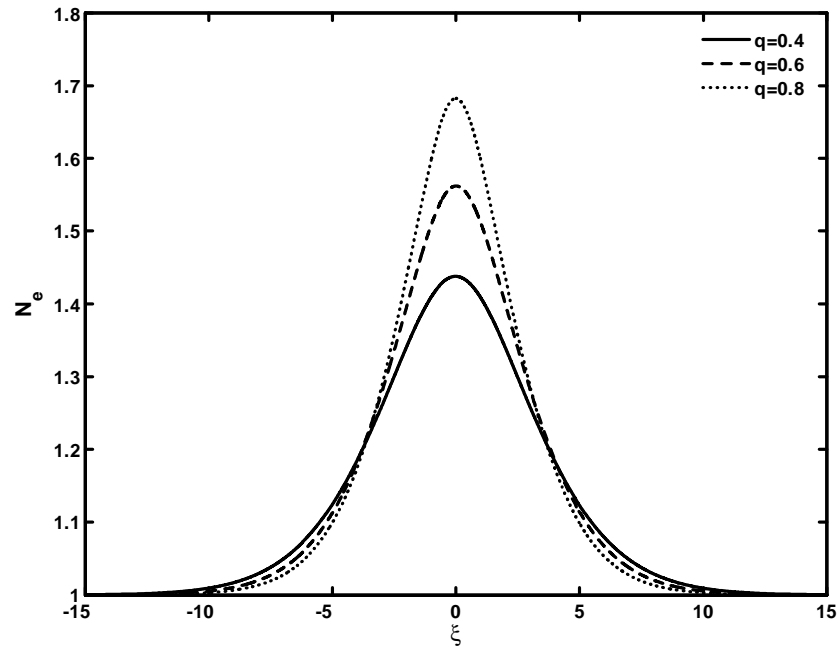
rendre la structure solitaire acoustique ionique moins pointue. Ceci peut être attribué au fait qu'au fur et à mesure que les électrons évoluent loin du piégeage Maxwellien, les électrons sont localement expulsés (Fig. 31) et repoussés à l'extérieur de la région de localisation du soliton. La figure 32 (à comparer avec les figures 29 et 30) avec  $M = 1.3$  et  $\beta = 1.5$ , indique que le cas  $q > 1$  donne des résultats inverses et peut être inattendus: lorsque  $q$  augmente, l'amplitude du soliton augmente alors que sa largeur diminue. En maintenant fixe la valeur du paramètre non extensif  $q$ , les effets du paramètre de piégeage  $\beta$  sur les ondes acoustiques ioniques solitaires sont alors analysés. Les figures 32 et 33 révèlent que le piégeage et sa nature non extensive peuvent agir concurremment pour influencer les états des particules piégées.



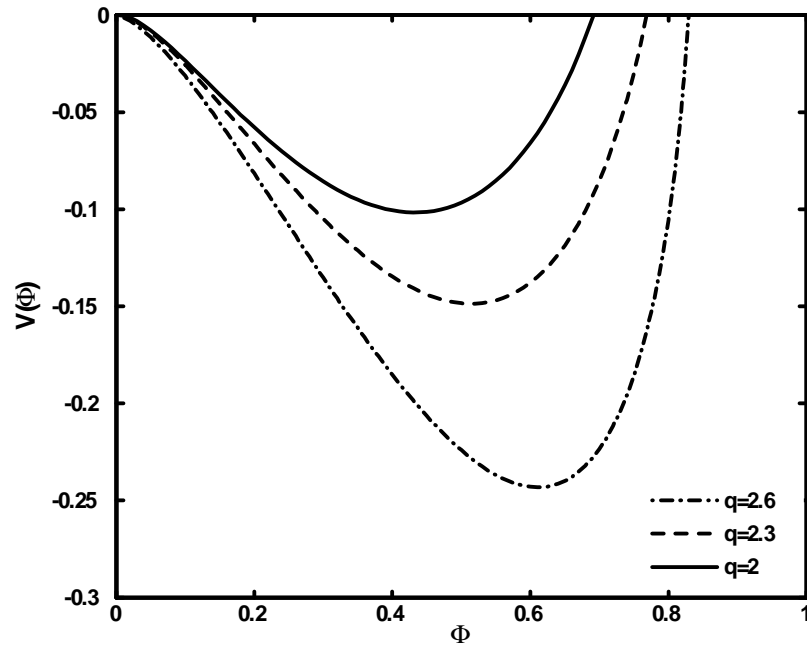
**Figure 29:** Onde acoustique ionique solitaire  $\Phi$  pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q$ , avec  $\beta = 0.02$  et  $M = 1.9$ .



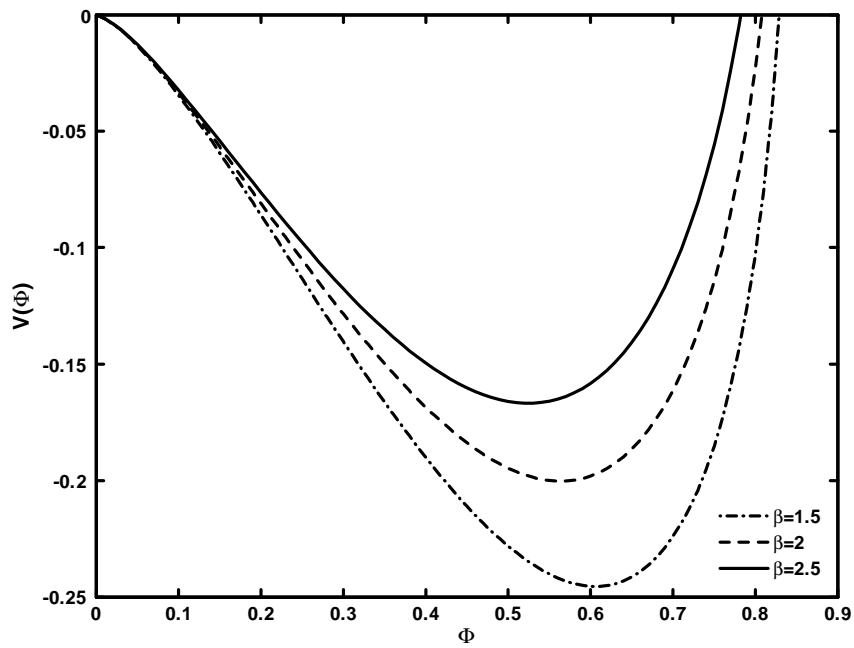
**Figure 30:** Pseudo-potentiel associé à la structure localisée de la figure 29.



**Figure 31:** Profile de la densité électronique pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q$ , avec  $\beta = 0.02$  et  $M = 1.9$ .



**Figure 32:** Tracé du pseudo-potential pour différentes valeurs du paramètre non extensif  $q > 1$ , avec  $M = 1.3$  et  $\beta = 1.5$ .



**Figure 33:** Tracé du pseudo-potential pour différentes valeurs du paramètre de piégeage  $\beta$ , avec  $M = 1.3$  et  $q = 1.9$ .

# Conclusion

Pour conclure, nous avons revisité les modes acoustiques habituels non linéaire dans le cadre du nouveau formalisme non extensif de Tsallis. Ce dernier consiste en une généralisation non extensive de l'entropie de Boltzmann, Gibbs et Shannon (BGS). Cette généralisation a été rendue nécessaire par le fait qu'il est maintenant admis que le formalisme BGS ne décrit pas correctement les systèmes dont les interactions sont de longue portée. A ce propos, nous avons analysé les ondes acoustiques ioniques et électroniques. Nos résultats ont révélé que la non extensivité peut affecter de manière notable ces deux modes non linéaires. Nous avons alors généralisé le concept de piégeage des particules et proposé une nouvelle fonction de distribution des vitesses.

Le premier chapitre de cette thèse a d'abord porté sur la définition des concepts de base du plasma habituel à deux composantes. Nous avons alors décrit leurs propriétés intrinsèques et énuméré les différents processus physiques qui les caractérisent. Nous avons brièvement introduit la statistique non extensive de Tsallis, ses principaux concepts ainsi que ses applications dans différents domaines de la science.

Dans le second chapitre, nous avons abordé le problème des ondes acoustiques ioniques solitaires d'amplitude arbitraire dans un plasma à deux composantes avec une distribution électronique non extensive. Nos résultats ont révélé que la nature et l'amplitude d'une onde solitaire dans un tel plasma, dépendent sensiblement du paramètre non extensif  $q$ . En particulier, nous avons noté qu'en raison de la composante électronique non extensive, notre modèle de plasma pouvait admettre aussi bien des solitons acoustiques ioniques compressifs que des solitons raréfactifs. Pour  $q > 1$  ( $-1 < q < 1$ ), la limite inférieure des nombres de Mach admissible est plus petite (plus grande) que son analogue Maxwellienne, permettant ainsi la possibilité d'existence de solitons acoustiques ioniques subsoniques ( $M < 1$ ). Pour  $-1 < q < 0$ , notre analyse numérique a montré que notre modèle de plasma ne peut admettre que des structures raréfactives faisant intervenir des nombres de Mach relativement élevés.

Par ailleurs, nous avons établi les équations classiques de type Korteweg- de Vries, Korteweg- de Vries modifié et Korteweg- de Vries généralisé.

Dans le chapitre trois et en guise de complément au chapitre deux, nous avons fait appel au modèle de la dynamique des gaz pour palier aux insuffisances du modèle de Sagdeev déjà développé dans le chapitre deux. Les équations de base non linéaires sont établies et résolues exactement grâce à la méthode du pseudo- potentiel de Bernoulli. Ceci nous a permis de déduire une relation de dispersion de l'onde acoustique ionique acoustique à partir de laquelle nous avons pu déterminer la vitesse linéaire de l'onde ionique acoustique de notre modèle de plasma.

Au cours du quatrième chapitre, nous avons abordé le problème des ondes acoustiques électroniques solitaires d'amplitude arbitraire dans un plasma à trois composantes: des électrons froids fluides, des électrons chauds non extensifs et des ions stationnaires. A l'instar des chapitres précédents, nous nous sommes intéressés aux modifications que pouvait introduire la composante non extensive sur ce type d'onde.

Dans le cinquième et dernier chapitre, nous avons revisité le phénomène de piégeage des particules (des électrons) dans le contexte non extensif de Tsallis en nous inspirant des travaux pionniers de Schamel. Nous avons proposé une nouvelle fonction de distribution des électrons dont une fraction est piégée dans le potentiel de l'onde. Celle ci nous a permis d'établir la densité des électrons piégés et non extensifs. Nous avons alors (et en guise d'application) étudié l'influence de ce type de piégeage sur les ondes acoustiques ioniques solitaires. Rappelons qu'il est communément admis que les plasmas fortement excités au moyen de faisceaux de particules, à défaut d'évoluer vers des états turbulents, évoluent le plus souvent vers des états cohérents avec piégeage de particules. Nos résultats ont alors révélé que dans un tel plasma, des structures solitaires peuvent exister.

Nous estimons atteints les objectifs que nous nous sommes fixés au début de ce travail de recherche. L'intérêt de nos résultats est à rechercher dans cette quête perpétuelle des théoriciens à trouver un ajustement acceptable entre les résultats théoriques et expérimentaux. La flexibilité fournie par le paramètre non extensif  $q$  permet, justement, d'entrevoir un bon accord entre la théorie et l'expérience.

Les perspectives de la présente thèse (dans la mesure où celles ci sont faisables) sont nombreuses. On peut, à titre d'exemple, envisager d'étendre notre étude au cas des oscillations collectives dans un plasma relativiste. D'autres concepts de base classiques pourraient, en outre, être revisités dans le cadre de cette nouvelle statistique.

# Bibliographie

- [1] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Plenum Press, New York, 1974).
- [2] A. Renyi, *Acta Math. Hungarai* 6, 285 (1995).
- [3] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* 52, 479 (1988).
- [4] J. A. S. Lima, R. Silva et J. Santos, *Phys Rev. E* 61, 3260 (2000).
- [5] R. Silva, J. S. Alcaniz et J. A. S. Lima, *Physica A* 356, 509 (2005).
- [6] J. L. Du, *Phys. Lett. A* 329, 262 (2004).
- [7] L. Y. Liu et J. L. Du, *Physica A* 387, 4821 (2008).
- [8] Z. Liu, L. Liu et J. Du, *Phys Plasmas* 16, 072111 (2009).
- [9] M. Tribeche, L. Djebarni et R. Amour, *Phys. Plasmas* 17, 042114 (2010).
- [10] R. Amour et M. Tribeche, *Phys. Plasmas* 17, 063702 (2010).
- [11] M. Tribeche et L. Djebarni, *Phys. Plasmas* 17, 124502 (2010).
- [12] L. Ait Gougam et M. Tribeche, *Astrophys. Space Sci.* 331, 181 (2011).
- [13] R. Amour et M. Tribeche, *Phys. Plasmas* (2011, sous presse).
- [14] R. Amour et M. Tribeche, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* (2011, sous presse).
- [15] A. S. Bains, M. Tribeche et T. S. Gill, *Phys. Plasmas* (2011, sous presse).
- [16] M. Tribeche et A. Merriche, *Phys. Plasmas* (2011, sous presse).

- 
- [17] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear plasma Theory* (Academicpress, NewYork, 1972), p. 15.
- [18] H. Washimi et T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 996 (1966).
- [19] C. S. Gardner et G. K. Morikawa, *Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves*, New York Univ, Courant Inst. Math. Sci. Res. Rep. NYO-9082 (1960).
- [20] C. H. Su et C. S. Gardner, *J. Math. Phys.* **10**, 536 (1969).
- [21] N. J. Zabusky et M.D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
- [22] H. Ikezi, R. J. Taylor et R. D. Baker, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 11 (1970).
- [23] H. Ikezi, *Phys. Fluids* **16**, 1668 (1973).
- [24] Y. Kato, M. Tajiri et T. Taniuti, *Phys. Fluids* **15**, 865 (1972).
- [25] H. Schamel, *J. Plasma Phys.* **9**, 377 (1973).
- [26] M. Q. Tran, *Phys. Scr.* **20**, 317 (1979).
- [27] Y. H. Ichikawa, *Phys. Scr.* **20**, 296 (1979).
- [28] E. G. D. Cohen, *Physica A* **305**, 19 (2002).
- [29] A. Einstein, *Annalen der Physik* **33**, 1275 (1910), Oxford University Press, 1982.
- [30] C. Tsallis, C. P. W. Lamberti, et D. Prato, *Physica A* **295**, 158 (2001).
- [31] S. Abe et A. K. Rajagopal, *Physica A* **289**, 157 (2001).
- [32] P. A. Alemany et D. H. Zanette, *Phys. Rev. E* **49**, R956 (1994).
- [33] M. O. Caceres et C. E. Budde, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2589 (1996).
- [34] D. Prato et C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **60**, 2398 (1999).
- [35] C. Tsallis, S V. F. Levy, A. M. C. de Souza et R. Maynard, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3589 (1995).
- [36] C. Tsallis, R. S. Mendes et A. R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).

- 
- [37] L. G. Moyano, F. Baldovin et C. Tsallis. "Zeroth Principle of Thermodynamics in Aging Quasi-stationary States." (<http://lanl.arXiv.org/abs/cond-mat/0305070>).
- [38] C. Tsallis, "Comment on A Critique of g-Entropy for Thermal Statistics by M. Nauenberg." (<http://lanl.arXiv.org/abs/cond-mat/0304696>).
- [39] R. Z. Sagdeev, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol. 4, p. 23.
- [40] F. D. Tappert, *Phys. Fluids* 15, 2446 (1972).
- [41] S. Tagare, *Plasma Phys.* 15, 1247 (1973).
- [42] H. Schamel, *Plasma Phys.* 14, 905 (1972).
- [43] S. Watanabe, *J. Phys. Soc. Jpn.* 44, 611 (1978).
- [44] G. Kaniadakis, *Phys. Lett. A* 288, 283 (2001).
- [45] M. P. Leubner et Z. Voros, *Nonlin. Processes Geophys.* 12, 171 (2005).
- [46] M. P. Leubner, *Nonlin. Processes Geophys.* 15, 531 (2008).
- [47] H. J. Haubold et D. Kumar, *Astroparticle Phys.* 29, 70 (2008).
- [48] N. G. de Almeida, *Physica A* 387, 2745 (2008).
- [49] G. Livadiotis, *J. Math. Chem.* 45, 930 (2009).
- [50] R. Hanel et S. Thurner, *Phys. Lett. A* 373, 1415 (2009).
- [51] M. P. Leubner, *Astrophys. Space Sci.* 282, 573 (2002).
- [52] M. P. Leubner, *Phys. Plasmas* 11, 1308 (2004).
- [53] M. P. Leubner, *Astrophys. J.* 604, 469 (2004).
- [54] R. L. Mace, G. Amey et M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas* 6, 44 (1999).
- [55] M. A. Hellberg et R. L. Mace, *Phys. Plasmas* 9, 1495 (2002).
- [56] M. A. Hellberg, R. L. Mace et T. Cattaeert, *Space Sci. Rev.* 121, 127 (2005).

- 
- [57] K. Aoutou, M. Tribeche et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **15**, 013702 (2008).
- [58] B. Basu, *Phys. Plasmas*. **15**, 042108 (2008).
- [59] S. Younsi et M. Tribeche, *Phys. Plasmas* **15**, 073706 (2008).
- [60] H. Hakimi Pajouh et H. Abbasi, *Phys. Plasmas* **15**, 103705 (2008).
- [61] N. S. Saini et I. Kourakis, *Phys. Plasmas* **15**, 123701 (2008).
- [62] T. K. Baluku et M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas* **15**, 123705 (2008).
- [63] M. Tribeche, S. Mayout et R. Amour, *Phys. Plasmas* **16**, 043706 (2009).
- [64] N. S. Saini, I. Kourakis et M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas* **16**, 062903 (2009).
- [65] K. Aoutou, M. Tribeche et T. H. Zerguini, *Phys. Plasmas* **16**, 083701 (2009).
- [66] M. Tribeche and N. Boubakour, *Phys. Plasmas* **16**, 084502 (2009).
- [67] Z. Liu and J. Du, *Phys. Plasmas* **16**, 123707 (2009).
- [68] I. B. Dubinova et A. E. Dubinov, *Tech. Phys. Lett.* **32**, 575 (2006).
- [69] R. Silva, Jr. A. R. Plastino et J. A. S. Lima, *Phys. Lett.* **249**, 401 (1998).
- [70] A. A. Vedenov, E. P. Velikhov et R. Z. Sagdeev, *Yadem. Sintez.* **1**, 82 (1961).
- [71] A. E. Dubinov et I. D. Dubinova, *J. Plasma Phys.* **5**, 715 (2005).
- [72] I. D. Dubinova, *Vopr: Atom. Nauki Tekh., Ser. Teor. Prikl. Fiz.* **3**, 18 (2005).
- [73] J. F. McKenzie, *Phys. Plasma.* **3**, 800 (2002).
- [74] J. P. McKenzie, F. Verheest, T. Bt Doyle et M. A. Hellberg, *Phys. Plasma* **5**, 1762 (2004).
- [75] J. P. McKenzie, T. B. Doyle, M. K. Hellberg et F. Verheest, *J. Plasma Phys.* **2**, 163 (2005).
- [76] C. R. Johnston et M. Epstein, *Phys. Plasma* **3**, 906 (2000).

- 
- [77] M. Ya. Ivanov, *Fiz. Plazrny.* **2**, 384 (1982).
- [78] M. Ya. Ivanov, *Fiz. Plazmy.* **3**, 607 (1982).
- [79] A. E. Dubinov, *Fiz. Plazmy.* **3**, 239 (2007).
- [80] A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, et R. V. Polovon, *Plasma Electrodynamics*, Nauka, Moscow (1974).
- [81] V. F. Zaitsev et A. D. Polyanin, *Handbook on Ordinary Differential Equations*, Fizmatlit, Moscow (2001).
- [82] K. Watanabe et T. Taniuti, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43**, 1819 (1977).
- [83] R. L. Tokar et S. P. Gary, *Geophys. Res. Lett.* **11**, 1180 (1984).
- [84] S. P. Gary et R. L. Tokar, *Phys. Fluids.* **28**, 2439 (1985).
- [85] B. D. Fried et R. W. Gould, *Phys. Fluids.* **4**, 139 (1961).
- [86] S. G. Tagare, S. V. Singh, R. V. Reddy et G. S. Lakhina, *Nonlinear Proc. Geophys.* **11**, 215 (2004).
- [87] M. Berthomier, R. Potelette, M. Malingre et Y. Khotyaintsev, *Phys. Plasmas.* **7**, 2987 (2000).
- [88] R. L. Mace, S. Baboolal, R. Bharuthram et M. A. Hellberg, *J. Plasma Phys.* **45**, 323 (1991).
- [89] F. Verheest, T. Cattaert et M. A. Hellberg, *Space Sci. Rev.* **121**, 299 (2005).
- [90] F. Verheest, M. A. Hellberg et G. S. Lakhina, *Astrophys. Space Sci. Trans.* **3**, 15 (2007).
- [91] S. V. Singh et G. S. Lakhina, *Planet. Space Sci.* **49**, 107 (2001).
- [92] T. Cattaert, F. Verheest et M. A. Hellberg, *Phys. Plasmas.* **12**, 042901 (2005).
- [93] G. S. Lakhina, A. P. Kakad, S. V. Singh et F. Verheest, *Phys. Plasmas.* **15**, 062903 (2008).
- [94] S. Younsi et M. Tribeche, *Astrophys. and Space Sci.* **330**, 295 (2010).

- 
- [95] S. V. Singh et G. S. Lakhina, *Nonlinear Process. Geophys.* **11**, 275 (2004).
- [96] H. L. Berk et K. V. Roberts, *Phys. Fluids* **10**, 1595 (1967).
- [97] R. L. Morse et C. W. Nielson, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1087 (1969).
- [98] A. V. Gurevich, *Sov. Phys. JETP* **26**, 575 (1968).
- [99] H. L. Berk, C. E. Nielsen, et K. V. Roberts, *Phys. Fluids* **13**, 980 (1970).
- [100] M. Kako, T. Taniuti, et T. Watanabe, *J. Phys. Soc. Jpn.* **31**, 1820 (1971).
- [101] I. B. Bernstein, J. M. Greene, et M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **108**, 546 (1957).
- [102] H. Schamel, *J. Plasma Phys.* **13**, 139 (1975).
- [103] H. Schamel, *Phys. Plasmas* **7**, 4831 (2000).
- [104] H. Schamel, *Physics Reports* **140**, 161 (1986).
- [105] A. Mushtaq et H. A. Shah, *Phys. Plasmas* **13**, 012303 (2006).
- [106] N. Rubab, G. Murtaza, et A. Mushtaq, *Phys. Plasmas* **13**, 112104 (2006).
- [107] H. Abbasi et H. H. Pajouh, *Phys. Plasmas* **14**, 012307 (2007).
- [108] *Handbook of Mathematical Functions*, 10th ed., edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun (National Bureau of Standards, Gaithersburg, 1972).
- [109] C-Y. Tsai, L-W. Teng, C-T. Liao, et I. Lin, *AIP Conf. Proc.* **1041**, 45 (2008).

