

N° d'orde : 31/2017-C/MT.

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



THÈSE  
PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
DOCTORAT 3<sup>ème</sup> CYCLE (LMD).

EN : MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES ET ACTUARIAT

Par : LACHEMOT Tassadit

Sujet

**File d'attente avec rappels à serveur non fiable et deux types de clients.**

Soutenue publiquement, le 21/05/2017, devant le jury composé de :

M <sup>me</sup> :K. DJABALLAH	Professeur à l'U.S.T.H.B	Présidente.
M <sup>me</sup> :H. SAGGOU	Professeur à l'U.S.T.H.B	Directrice de thèse.
M <sup>r</sup> : K. ABBAS	Professeur à l'Univ.Bejaia	Examinateur .
M <sup>r</sup> : A. AISSANI	Professeur à l'U.S.T.H.B	Examinateur.
M <sup>r</sup> : E. BOURENNANE	Professeur à l'Univ Bourgogne France.	Examinateur.
M <sup>me</sup> :M. OURBIH-TARI	Professeur au Centre Universitaire Morsli Abdellah, Tipaza.	Examinatrice .

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>4</b>
<b>Liste des abréviations</b>	<b>5</b>
<b>Remerciements</b>	<b>6</b>
<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Notes Bibliographiques</b>	<b>13</b>
<b>2 Files d'attente avec rappels</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Processus Stochastique . . . . .	20
2.2.1 Processus de Markov . . . . .	20
2.2.2 Processus de Poisson . . . . .	21
2.3 Files d'attente classiques . . . . .	22
2.3.1 Description du modèle d'attente classique . . . . .	22
2.3.2 Loi de Little . . . . .	26
2.4 Analyse mathématique d'un système de files d'attente . . . . .	26
2.4.1 Modèles Markoviens . . . . .	27
2.4.2 Modèles non Markoviens . . . . .	27
2.5 Caractéristiques d'un système de files d'attente . . . . .	27
2.6 Files d'attente avec Rappels . . . . .	29
2.6.1 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite. . . . .	29

## Table des matières

---

2.6.2	Système $M/G/1$ avec rappels . . . . .	30
2.6.3	Files d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec rappels et groupes impatientes . . . . .	32
2.6.4	Modèle de système fondé sur la théorie de files d'attente avec rappels	33
2.7	Conclusion . . . . .	34
<b>3</b>	<b><math>M/G/1</math> avec rappels et réparation immédiate</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	Description du modèle . . . . .	36
3.3	Analyse stationnaire du système . . . . .	37
3.4	Solution du système d'équations . . . . .	39
3.5	Mesures de Performance . . . . .	41
3.6	Décomposition Stochastique . . . . .	44
3.7	Conclusion . . . . .	44
<b>4</b>	<b><math>M/G/1</math> avec rappels, clients récurrents et réparations retardées</b>	<b>45</b>
4.1	Introduction . . . . .	46
4.2	Notation et Modèle Mathématique . . . . .	46
4.3	Analyse stationnaire du système . . . . .	48
4.4	Solution du système d'équations . . . . .	50
4.5	Mesures de performance . . . . .	58
4.6	Cas particulier . . . . .	62
4.6.1	Premier cas : absence du délai . . . . .	62
4.6.2	Deuxième cas : Absence de pannes . . . . .	63
4.6.3	Troisième cas : Absence de clients récurrents et absence de pannes .	63
4.7	Décomposition stochastique . . . . .	64
4.8	Résultats Numérique . . . . .	64
4.9	Conclusion . . . . .	68
<b>5</b>	<b><math>M^{[X]}/G/1</math> avec rappels, clients récurrents, réparations retardées et pertes</b>	<b>69</b>
5.1	Introduction . . . . .	70
5.2	Description du modèle . . . . .	70
5.3	Analyse stationnaire du système . . . . .	73

## Table des matières

---

5.4	Solution du système d'équations . . . . .	75
5.5	Mesures de performance . . . . .	80
5.6	Mesures de fiabilité . . . . .	82
5.7	Conclusion . . . . .	82
	<b>Conclusion générale</b>	<b>83</b>
	<b>Annexe</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

# Table des figures

2.1	Système de file d'attente . . . . .	22
2.2	Une réalisation d'un processus de Poisson . . . . .	23
2.3	Schéma illustratif d'un système d'attente avec rappels. . . . .	29
4.1	Variation de $P_{0K}$ en fonction de $\eta$ .(a) L'effet du paramètre $l$ et (b) L'effet du paramètre $\mu$ . . . . .	65
4.2	Variation de $P_{0K}$ en fonction de $\mu$ .(c) L'effet du paramètre $l$ et (d) L'effet du paramètre $\eta$ . . . . .	65
4.3	Variation de $E[N_T]$ en fonction de $\mu$ .(a) L'effet du paramètre $\eta$ et (b) L'effet du paramètre $l$ . . . . .	67
4.4	Variation de $E[N_T]$ en fonction de $\eta$ .(c) L'effet du paramètre $l$ et (d) L'effet du paramètre $\mu$ . . . . .	67
4.5	Variation de $P_{0K}$ et $E[N_T]$ en fonction des paramètres $(\nu, \mu)$ . . . . .	68
4.6	Variation de $P_{0K}$ et $E[N_T]$ en fonction des paramètres $(\eta, \mu)$ . . . . .	68

# Liste des abréviations

**GSPN** Generalized Stochastic Petri Nets.

**MOSEL** MOdeling Specification and Evaluation.

**LST** Laplace-Stieljes Transform.

**PGF** Probability Generating Function.

**LAN** Local Area Network.

# Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à Madame H.SAGGOU qui a bien voulu prendre en charge la direction de cette thèse, pour sa disponibilité et ses précieux conseils.

Je remercie très chaleureusement le Professeur BOURENNANE pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire LE2I Université de Bourgogne, je tiens également à le remercier pour sa disponibilité et pour ses précieux conseils.

Je remercie le Professeur K. DJABALLAH d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie également monsieur K. ABBAS et le Professeur A. AISSANI de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

Je remercie Madame OURBIH-TARI perfectionniste en langue Anglaise pour avoir accepté de lire et de corriger notre travail et pour avoir accepté d'être membre ce jury.

Je remercie toute ma famille et mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté pendant ces années de thèse.

Je remercie mon cher mari pour son aide et sa compréhension.

Je dédie ce travail à mes chers parents qui m'ont toujours encouragé et soutenu.

# Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude analytique des performances d'un système de files d'attente non markovien avec rappels à serveur non fiable et deux types de clients. Le système contient **au moins  $K$  clients**. Les deux types de clients sont caractérisés par la propriété qu'un client qui trouve à son arrivée le serveur occupé ou en panne quitte le système et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit en orbite. Le serveur est sujet à des pannes actives et **réparation retardée**. A la fin d'une réparation le serveur est immédiatement prêt à continuer son service restant.

En utilisant la méthode de la variable supplémentaire, ce travail établit des formules explicites et exploitables, des fonction génératrices des états du système en régime stationnaire permettant de trouver la décomposition stochastique du modèle étudié. Aussi, des résultats numériques sont donnés pour illustrer l'influence des paramètres sur les performances du système.

**Mots clés** : Deux types de clients, rappel général, panne, délai, réparation, méthode de variable supplémentaire, décomposition stochastique.

# Introduction

**L**A théorie des files d'attente, ou queues est un des outils analytiques les plus puissants pour la modélisation de systèmes de logistique et de communication. Cette théorie a pour objet l'étude des systèmes ou des entités, appelées clients qui cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées, afin d'en obtenir un service. La demande concurrente d'une même ressource par plusieurs clients engendre des délais dans la réalisation des services et la formation de files de clients désireux d'accéder à une ressource indisponible. L'analyse théorique de tels systèmes permet d'établir à l'avance les performances du système, d'identifier les éléments critiques ou encore d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement.

La théorie des files d'attente tire son origine des recherches de l'ingénieur Danois Erlang entre 1909 et 1920, c'est-à-dire bien avant les années trente quand Feller introduit le concept de "processus de naissance et de mort". Ce dernier étudiait le concept de file d'attente des systèmes téléphoniques dans un centre d'appel de Copenhague. Depuis, plusieurs mathématiciens et informaticiens se sont intéressés aux systèmes de files d'attente et ont développé des modèles mathématiques de cette théorie. Malheureusement, les publications sur la théorie des files d'attente ont adopté un langage de plus en plus mathématique, ce qui a freiné son utilisation. Ce ralentissement n'a pas duré longtemps vu que les praticiens ont commencé à appliquer la théorie des files d'attente à l'évaluation des performances correspondant aux observations réelles. Une évolution rapide de cette théorie a été appliquée pour l'évaluation des performances des systèmes informatiques et des réseaux de communications [69]. Les chercheurs oeuvrant dans cette branche d'activité ont élaboré plusieurs nouvelles méthodes qui ont été ensuite appliquées avec succès dans d'autres domaines, notamment dans le secteur de fabrication et celui de production. Grâce à ces développe-

## Introduction

---

ments la théorie des files d'attente est aujourd'hui largement utilisée et ses applications sont multiples.

Cette théorie classique s'est très vite montrée inefficace face à des systèmes réels de plus en plus complexes. Dès la fin des années 1940, des chercheurs tels que Kosten (1947)[70] et Wilkinson (1956) [110] ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente qui ne permettait pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes téléphonique où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication.

Ce phénomène de répétition des appels a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit avec rappels, ces modèles sont caractérisés par le fait que le client qui arrive et trouve le serveur occupé rejoint une file supplémentaire de clients appelée "orbite" et réessaye ultérieurement de rejoindre le serveur tout en respectant une politique de rappels. Si par contre le client arrive et trouve le serveur libre, il est servi et quitte le système. Ces modèles sont d'un usage courant dans la modélisation des systèmes téléphoniques où un appel trouvant la ligne occupée rappelle ultérieurement après un temps aléatoire. Ces modèles s'appliquent aussi dans la modélisation de l'atterrissage des avions dans une piste où un avion ne trouvant pas la piste libre reste en "orbite" un temps aléatoire jusqu'à ce que la tour de contrôle lui donne le signal d'atterrissage. Ce type de modèle se rencontre également dans la modélisation de protocoles de communication, tels que CSMA (Carrier Sense Multiple Access).

Parmi les premiers travaux de recherches sur les files d'attente avec rappels, on trouve ceux de Kosten (1947)[70], Cohen (1957) [34], Wilkinson (1956)[110] et Riordan (1962). Plusieurs exemples d'applications réelles de différents domaines ont été citées par Yang et Templeton (1987)[105]. Les résultats récents sont résumés dans les travaux de Aissani (1994)[3], Falin et Templeton (1997)[38], Artalejo et Gomèz-Corral (2008)[16] et dans les travaux bibliographiques de Artalejo (1999 et 2010).

Pour le système de files d'attente avec rappels il est nécessaire de fixer une politique de rappels. Beaucoup de systèmes d'attente avec rappels fonctionnent sous la politique

## Introduction

---

du rappel classique où l'intervalle entre deux rappels successifs est de distribution exponentielle avec un taux  $n\alpha$  où  $n$  est le nombre de clients en orbite. Cependant, plusieurs applications dans les systèmes et réseaux de communication montrent l'existence de situations où le taux de rappels est indépendant du nombre de clients en orbite, c'est à dire le taux est  $(1 - \delta_{0,n})\alpha$ , où  $\delta_{i,j}$  est la fonction Kronecker, cette deuxième politique de rappels est introduite par Fayolle (1986) [44] sous rappel constant. La troisième politique est une combinaison des deux précédentes qui est appelée politique linéaire (appelée aussi politique versatile), cette dernière a été introduite par Artalejo et Gomez-Correl (2008)[16], Kernane et Aissani (2006)[64].

Depuis les travaux de Aissani (1988) [1], Kulkarni et Choi (1990)[71] une attention considérable a été accordée à l'analyse des systèmes avec rappels sujets à des pannes et réparations. Les interruptions de service mènent à la croissance des temps d'attente pour les clients abonnés au système et il résulte l'impatience des clients. Pour la littérature en rapport voir Aissani (1993)[2], Aissani et Artalejo (1998)[5], Yang et Li (1994)[104], Wang et Cao (2001) [107], Krishna et al (2002) [72].

D'autre part, Boxma et Cohen (1991)[26] ont étudié une file d'attente  $M/G/1$  avec rappels où il y a un nombre fixe de clients permanents présents qui rejoignent la file à l'achèvement de leur service. Ce système avec clients permanents dans le contexte d'essais répétés a été analysé par Farahmand (1996)[41] du point de vue d'essais répétés classique et constant, Moreno (2004) [89] a généralisé le deuxième cas en considérant une distribution de service différente pour les deux types de clients et loi de rappels générale pour les clients transitoires.

Ce travail de thèse constitue une extension de celui effectué par Moreno.

Parmi les approches permettant d'étudier les systèmes de files d'attente avec rappels, on rencontre celle basées sur la propriété de décomposition stochastique. Le concept général de cette propriété dans un système d'attente  $M/G/1$  avec rappels est défini de la manière suivante : le nombre de clients se trouvant dans le système à une date aléatoire est distribué comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes où plus, une de ces variables représente le nombre de clients se trouvant dans le système  $M/G/1$  classique.

## Introduction

---

Dans le cas où le système est en régime stationnaire on a la décomposition suivante pour la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système  $M/G/1$  avec rappel

$$\pi(z) = Q(z)\chi(z)$$

où  $Q(z)$  est la fonction génératrice de la distribution du nombre de clients dans un système  $M/G/1$  classique sans rappel (formule de Pollaczek Khintchine) voir section 2.6.2.  $\chi(z)$  est la fonction génératrice de distribution stationnaire du nombre de clients dans le système étant donné que le serveur est en rappel. Dans notre travail nous avons établi la décomposition stochastique suivante

$$\pi(z) = \pi_0(z)\chi(z)$$

où  $\pi_0(z)$  est la fonction génératrice de la distribution du nombre de clients dans le système  $M/G/1$  classique à serveur non fiable sans rappels.  $\chi(z)$  est la fonction génératrice de la distribution du nombre de clients dans le système sachant que le serveur est en rappels ou occupé par un client permanent.

Dans cette thèse, nous avons étudié un nouveau modèle de files d'attente avec rappels à serveur non fiable et deux types de clients. Ce travail est une extension des travaux de Boxma (1991)[26], Farahmand (1996)[41] et Moreno (2004) [89]. Cette thèse est structurée de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré à un état de l'art de la théorie des files d'attente, notamment avec rappels et pannes.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les concepts de bases sur les files d'attente classiques et files d'attente avec rappels. Ce chapitre sera également consacré à l'étude de la file  $M/G/1$  avec rappels, nous donnons la condition d'érgodicité , les distributions stationnaires en terme de fonctions génératrices, la décomposition stochastique du nombre de clients dans le système et quelques autres mesures de performance. Nous achevons ce chapitre en donnant des exemples réels fondés sur la théorie des files d'attente avec rappels.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du système d'attente  $M/G/1$  avec rappels et réparations immédiates. Les temps de rappels sont de loi générale.

Dans le chapitre 4, nous étudions le système de files d'attente  $M/G/1$  avec rappels de loi générale, réparations retardées et deux types de clients. En utilisant la méthode de

## Introduction

---

la variable supplémentaire nous avons obtenu des formules explicites et exploitables des fonctions génératrices des états du système en régime stationnaire permettant de mettre en évidence la décomposition stochastique du modèle étudié. Aussi, des résultats numériques sont donnés pour illustrer l'influence des paramètres sur les performances du système.

Le chapitre 5 concerne l'analyse des performances du système d'attente  $M^{[X]}/G/1$  avec rappels, serveur non fiable, deux types de clients et perte.

# 1

## Notes Bibliographiques

L'histoire de la théorie des files d'attente remonte à plus d'un siècle. Selon Bhat [23], le premier article sur le sujet semble être le document de Johannsen "Waiting Times and Number of Calls" (un article publié en 1907 et réimprimé dans *Post Office Electrical Engineers Journal*, London, Octobre, 1910). Le document de Erlang (1909) intitulé "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations" a une importance historique. 20 ans plus tard, les papiers d'Erlang contiennent certaines techniques et concepts les plus importants dans la théorie des files d'attente, par exemple, la notion de stabilité du système et la méthode d'élaboration des équations d'état ou de balance (plus tard appelées équations Chapman-Kolmogorov).

Molina [88] a publié un article intitulé "Application of the Theory of Probability to telephones Trunking Problems". Un an plus tard, Fry [48] en développant les travaux antérieurs d'Erlang a publié le livre "Probability and its Engineering Uses".

Au cours des deux prochaines décennies, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à ces problèmes et ont développé des modèles généraux qui pourraient être utilisées dans des situations plus complexes.

## Chapitre 1 : Notes Bibliographiques

---

Le terme "queueing system" est utilisé pour la première fois en 1951 par Kendall dans son article intitulé "Some problems in the Theory of Queues" publié dans le journal of the Royal Statistical Society.

Le même auteur en 1953 a introduit la notation de files d'attente  $A \setminus B \setminus C$  et elle a été étendue par Lee[76].

Finch [45], a étudié l'effet de la taille de la salle d'attente sur les mesures de performance des files d'attente simples. Le premier ouvrage sur la théorie des files d'attente a été publié en 1958, "queues, inventories, and maintenance" par Morse [90]. Dans la même année Haight [52] a introduit le concept de file d'attente groupées et file d'attente parallèles. White et Christie[108] ont été les premiers à introduire la notion de pannes de serveur. En 1961 John Little[79] a publié la preuve de sa célèbre formule appliquée dans la théorie des files d'attente appelé Formule de LITTLE.

Depuis, le premier article de Kleinrock (1961)[68] intitulé "Information Flow in large Communication Nets". La théorie des files d'attente est devenu une classe importante pour l'évaluation des performances des réseaux de communication. Depuis, plusieurs types de systèmes ont été étudié et une multitude croissance rapide des publications, y compris ; Fishman (1974)[46], Forêt, Mani, Richard et Fernando (1975)[47], Leonard (1976), Stephen (1983)[100], Lazowska, Zahorjan et Sevcik (1986)[74] et (1996)[75] et Walrand (1988)[106],...etc.

Depuis Skinner (1967)[99], la file  $M/G/1$  a connu un grand essor, ce qui explique son utilisation par plusieurs auteurs tels que : Jacob et Madhusoodanan (1987)[54], Choi et Park (1990)[30], Cao (1994)[28], Madan (1994)[82], Atencia, Fortes, Moreno et Sanchez (2006)[17].

Beja et Teller [22] en 1975 ont étudié des Systèmes de files d'attentes markoviennes à plusieurs types de service. D'autre études relatives à ce modèle sont apparues plus tard, voir Sen et Jain (1990), Madan (1991)[81], Gail, Hantler et Taylor (1992)[49], Whitt (1999)[109], Hur et Park (1999)[53], ke (2003)[60], Bocharov, Manzo et Pechinkin (2005)[24], Mishra et yadav (2009)[86].

## Chapitre 1 : Notes Bibliographiques

---

Au cours des 30 dernières années, un nombre important d'ouvrages sur l'application de la théorie des files d'attente ont été publiés : Borovkov (1984)[25], Kashyap et Chandhry (1988)[59], Nelson (1995)[91], Bunday (1996)[27], Gross et Harris (1998)[51], Daigle (2005)[36] et Mark (2010)[84].

Artalejo (1997)[13] a considéré une file  $M/G/1$  avec rappels constants et politiques de vacances exhaustive.

Aissani et Artalejo (1998)[5] ont étudié un système de file d'attente avec rappels à un seul serveur et serveur non fiable.

Aissani (2000)[6] a considéré une file d'attente avec rappels constants, arrivées par lots et vacances exhaustives du serveur. Les temps de service et les périodes de vacances sont arbitrairement distribués, il a obtenu les fonctions génératrices partielles du nombre de clients dans le système et dans l'orbite en régime stationnaire.

Wang et Cao (2001)[107] ont analysé une file d'attente  $M/G/1$  sous une politique classique de rappels où le serveur est soumis à des pannes, le client dont son service est interrompu ne quitte pas le serveur, il continue le reste de son service juste après la réparation. Des mesures de performance du système et des indices de fiabilité sont obtenus.

Djellab (2002)[35] a considéré la file  $M/G/1$  avec rappels et serveur non fiable. Elle a utilisé la propriété de décomposition stochastique pour approximer les performances de ce modèle.

Krishna et al (2002)[72] ont étudié la file d'attente  $M/G/1$  avec rappels constants et Bernoulli feedback et pannes de serveur. Ils ont obtenu la condition de stabilité de ce système. Diverses mesures de performance sont obtenues.

Almási et al (2005)[10], ont proposé l'utilisation de la méthode MOSEL pour étudier un système d'attente avec un nombre fini de source de clients homogènes et serveur non fiable. Un an plus tard, Szekli et al (2006)[102] ont considéré le cas d'un système d'attente à un nombre fini de source de clients hétérogènes.

Wu et al (2005)[111] ont considéré une file d'attente  $M/G/1$  avec rappels à deux orbites, la première orbite avec une discipline  $FCFS$  et la seconde est réservée spécifiquement aux clients dont leurs services sont interrompus. Le temps de réparation et le temps de rappels de la première orbite est de distribution générale tandis que le rappel de la seconde orbite est de distribution exponentielle. Les clients de la seconde orbite restent persistants jusqu'à l'aboutissement de leur service.

Atencia et al (2006)[18] ont analysé un système avec rappels sujet à des pannes actives où le client dont son service est interrompu a la possibilité de rejoindre l'orbite avec une probabilité  $p$  (client impatient) ou de rester en position de service avec une probabilité  $1 - p$  pour accomplir son service restant (client patient). Deux disciplines pour accéder au serveur depuis l'orbite sont considérées : rappels classiques et rappels constants. Pour chaque système, différentes caractéristiques ont été évaluées en utilisant la technique de la variable supplémentaire.

Sherman et Kharoufeh (2006)[98] ont analysé la file d'attente  $M/M/1$  avec rappels à serveur non fiable avec une orbite à capacité infinie et une file d'attente normale. Les clients rejoignent l'orbite si seulement si leur services sont interrompus par des pannes. La condition de stabilité ainsi que plusieurs résultats de décomposition stochastiques ont été établis.

Li et Wang (2006)[78] ont obtenu la condition de stabilité et certaines mesures de fiabilité du système d'attente  $M/G/1$  avec rappels, service à deux phases, Bernoulli feedback et serveur non fiable.

Kernane et Aissani (2006)[64] ont étudié la stabilité de files d'attente avec la politique versatile de rappels. Ils ont obtenu pour divers modèles de files d'attente avec rappels des conditions suffisantes de stabilité en utilisant la convergence couplée au sens fort.

Gharbi et Ioualalen (2006)[50] en utilisant la méthode  $GSPN$  (*Generalized Stochastic Petri Nets*), ils ont donné une analyse détaillée des systèmes avec rappels à source finie et plusieurs serveurs sujets à des pannes et réparations aléatoires.

Mokaddis, Metwally et Zaki (2007)[87] ont étudié une file d'attente  $M/G/1$  avec rap-

pels, Bernoulli feedback, vacance simple et orbite *FCFS* où le serveur est sujet à des pannes. Le temps de rappel est de distribution arbitraire. Certaines mesures de performance sont obtenues.

Kim, Klimenok et Orlovsky (2007)[66] ont considéré une file d'attente *BMAP/PH/N* avec rappels à plusieurs serveurs non fiable. Les serveurs sont identiques et indépendants les uns des autres, les serveurs occupés sont sujets à des pannes et des réparations. Le flux de pannes est décrit par un processus des arrivées Markovien (MAP), une période de réparation commence immédiatement, cette période est d'une distribution de type PH. Le client dont le service a été interrompu rejoint l'orbite avec une probabilité  $p$  ou quitte le système avec une probabilité  $1 - p$ . La condition d'érgodicité, la distribution stationnaire, les principales caractéristiques et performances du système ont été obtenues. Des exemples numériques illustratifs ont été présentés.

Atencia, Allende et Moreno (2008)[19] ont considéré une file d'attente  $M^{[X]}/G/1$  avec rappels sujet à des pannes actives où la durée du rappel est exponentielle et indépendante du nombre de clients qui demandent un service. Le client dont le service est interrompu reste en service pour le reprendre après la réparation. Ils ont étudié le comportement asymptotique par rapport au taux de rappels et une décomposition stochastique a été établie.

Aissani (2008)[8] a considéré la file d'attente  $M/G/1$  avec la politique de rappels constante et vacances du serveur ; les temps de rappels, les temps de service et les temps de vacances sont distribués arbitrairement. La distribution du nombre de clients dans le système en régime stationnaire est obtenue en terme de fonction génératrice partielle et une approximation pour une telle distribution est obtenue pour le régime chargé.

Jain et Bhargave (2008)[55] ont étudié la file d'attente avec rappels à serveur non fiable et deux types de clients (prioritaire et non prioritaire). Les deux types de clients arrivent en groupe selon un flux Poissonien, la taille est géométriquement distribuée. Les clients prioritaires qui trouvent le serveur occupé sont mis en file d'attente et sont ensuite servis conformément avec la discipline *FCFS*, par contre les clients non prioritaires quittent le système et réessaient après un temps aléatoire. Le serveur est sujet à des pannes, les

temps de réparation et les temps de service sont supposés de loi générale. Ils ont obtenu la condition de stabilité et en utilisant la technique de la variable supplémentaire, ils ont obtenu les performances du système. La période d'activité du modèle  $GI/GI/1$  avec rappels et serveur non fiable a été examinée par Oukid et Aissani (2009)[95].

Choudhury et Tadj (2009)[31] ont effectué une analyse approfondie pour la file d'attente  $M/G/1$  à deux phases de service. Ils ont introduit dans ce modèle le concept de délai avant réparation (réparation retardée). Un an plus tard Choudhury et al (2010)[32] ont rajouté deux nouveaux concepts qui sont le rappel et l'arrivée par groupes.

Kalyanaraman et Seenivasan (2011) [57] ont considéré un système de file d'attente avec rappels à deux serveurs non fiables et pertes des clients. Si un client trouve les deux serveurs occupés, il quitte le système avec la probabilité  $p$  et avec la probabilité  $1 - p$  il entre en orbite. Les serveurs sont sujets à des pannes actives et réparations immédiates. La stabilité du système a été obtenue et quelques résultats numériques sont également présentés.

Choudhury et Ke (2012)[33] ont traité le comportement de la file  $M^X/G/1$  avec temps de rappels général, vacances de Bernoulli et serveur non fiable sous le régime stationnaire.

# 2

## Files d'attente avec rappels

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Processus Stochastique</b>	<b>20</b>
2.2.1	Processus de Markov	20
2.2.2	Processus de Poisson	21
<b>2.3</b>	<b>Files d'attente classiques</b>	<b>22</b>
2.3.1	Description du modèle d'attente classique	22
2.3.2	Loi de Little	26
<b>2.4</b>	<b>Analyse mathématique d'un système de files d'attente</b>	<b>26</b>
2.4.1	Modèles Markoviens	27
2.4.2	Modèles non Markoviens	27
<b>2.5</b>	<b>Caractéristiques d'un système de files d'attente</b>	<b>27</b>
<b>2.6</b>	<b>Files d'attente avec Rappels</b>	<b>29</b>
2.6.1	Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite.	29
2.6.2	Système $M/G/1$ avec rappels	30
2.6.3	Files d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec rappels et groupes impatientes	32
2.6.4	Modèle de système fondé sur la théorie de files d'attente avec rappels	33
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler quelques concepts et outils de base qui seront utilisés dans la suite de notre thèse. Premièrement nous donnons une description générale du modèle de files d'attente classiques. Ensuite, nous nous intéresserons particulièrement aux files d'attente avec rappels. Par la suite nous présenterons quelques phénomènes modélisés par des systèmes d'attente avec rappels que nous avons extrait de l'article de Yang et Templeton [105]

## 2.2 Processus Stochastique

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent par des évènements survenant un par un à des instants aléatoires successifs. L'évolution temporelle de tels phénomènes peut se modéliser par des processus appelés **Processus Stochastiques**.

**Définition 1.** *Un processus stochastique peut être défini comme un ensemble de phénomènes produit par le hasard dans le temps, et dont l'évolution peut être décrite à l'aide de variables aléatoires.*

*Mathématiquement, un processus  $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  est une collection de variables aléatoires indexée par un paramètre  $t$  et définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$ .*

*La variable aléatoire  $X_t$  représente l'état du processus au temps  $t$ , l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelé l'espace des états du processus et sera noté  $E$ . Les processus stochastiques peuvent être classifiés en se basant sur ces deux quantités :*

- L'espace d'état  $E$ .
- L'indice  $t$  désignant le temps,  $t \in \mathbb{T}$ .

### 2.2.1 Processus de Markov

Un processus stochastique  $\{X_t, t \geq 0\}$  possède la propriété de Markov si pour les instants  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  et les états  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$ , on a :

$$P\{X_{t_{n+1}} = j \mid X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_n} = i\} = P\{X_{t_{n+1}} = j \mid X_{t_n} = i\}$$

Cette propriété Markovienne signifie qu'étant donné l'ensemble des états passés et l'état présent du système, la probabilité d'un état actuel, c'est à dire, l'état courant résume a lui

seul l'historique de ce système et il est susceptible d'influencer son évolution future, nous parlons dans ce cas de processus sans mémoire.

Les processus de Markov peuvent être classifiés suivant la nature de l'espace d'état ainsi que l'espace des temps sur lequel est défini le paramètre  $t$ . Les processus de Markov forment ces quatres classes :

Nature du paramètre $t$	Espace d'état	
	Discret	Continu
Discret	Chaîne de Markov à temps discret	Processus de Markov à temps discret
Continu	Chaîne de Markov à temps continu	Processus de Markov à temps continu

TABLE 2.1 – Les différentes classes de processus de Markov.

### 2.2.2 Processus de Poisson

Le processus ponctuel de Poisson est un processus stochastique qui associe une distribution de probabilité aux configurations de points sur  $\mathbb{R}_+$ . Ces points modélisent par exemple ; les instants d'arrivée d'appels dans un central téléphonique.

**Définition 2.** *Un processus aléatoire  $\{N_t, t \geq 0\}$  à valeurs entières ( $N_t \in \mathbb{N}$  pour tout  $t \geq 0$ ) est un processus de comptage si :*

- $N_0 = 0$ ;
- Pour tout  $s < t, N_s < N_t$ ;
- pour tout  $s < t, N_t - N_s$  est le nombre d'occurrences d'un certain évènement dans l'intervalle  $]s, t]$ .

**Définition 3.** *Un processus aléatoire  $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus de Poisson si :*

- $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus de comptage ;
- $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus à accroissement indépendants

$$P\{N_h - N_t = n, N_t - N_s = m\} = P\{N_h - N_t = n\}P\{N_t - N_s = m\} \quad \text{pour tout } s < t < h,$$

- $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus stationnaire

$$P\{N_{t+s} - N_s = n\} = P\{N_t = n\} \quad \text{pour tout } s < t,$$

- pour tout  $t > 0$ , la variable aléatoire  $N_t$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$

$$P\{N_t = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

-  $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus à évènements rares si :

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} P\{[N_h > 0]\} = 0 \quad \text{et si} \quad \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{P\{N_h > 1\}}{P\{N_h = 1\}} = 0$$

## 2.3 Files d'attente classiques

### 2.3.1 Description du modèle d'attente classique

Un phénomène d'attente se produit à chaque fois que certaines unités appelée 'clients' se présentent d'une manière aléatoire à des stations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

Ce phénomène d'attente peut être décrit comme un système composé d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente, de capacité fini ou infini, dans lequel attendent les clients pas encore servis. Les clients se font servir selon des règles spécifiées et quittent le système.

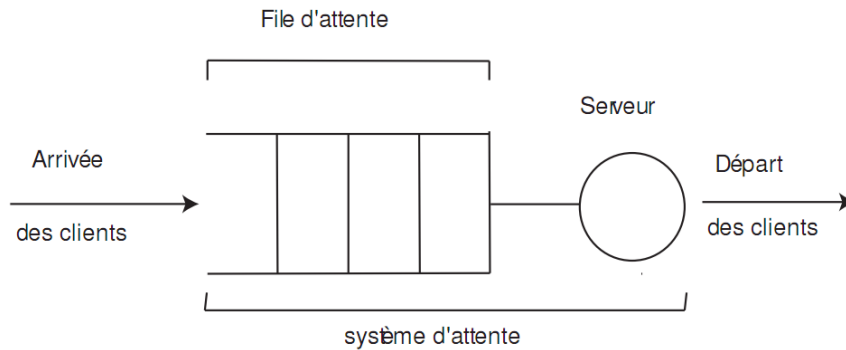


FIGURE 2.1 – Système de file d'attente

Les recherches sur les files d'attente ont débuté avec les travaux d'Erlang (1909) sur les systèmes téléphoniques. Dans ce cas, les appels téléphoniques représentent les clients, et les durées de communications sont les temps de service. Mais depuis, leur usage est étendue à d'autres situations pratiques. Les clients peuvent être des machines, des messages, ..., de même que les serveurs peuvent être des réparateurs, processeurs, etc.

## Chapitre 2 : Files d'attente avec rappels

---

L'identification des systèmes de files d'attente classiques se base principalement sur trois éléments : le processus stochastique des arrivées, le mécanisme de service et la discipline d'attente.

### Processus d'arrivée

Le processus d'arrivée spécifie les instants auxquels les clients arrivent dans le système. Souvent dans les systèmes d'attente, le processus des arrivées est un processus de Poisson, ou bien, de manière équivalente, les temps inter-arrivées suivent une distribution exponentielle.

Le processus de Poisson peut être caractérisé de plusieurs manières différentes. Une réalisation peut être spécifiée par une suite croissante de nombres réels positifs,

$$T_0 = 0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$$

désignant les instants d'arrivée des événements (clients).

Soit une suite de variables aléatoires positives  $A_1, A_2, A_3, \dots$  indépendantes et identiquement distribuées, on considère  $A_n = T_n - T_{n-1}$  le temps écoulé entre la  $(n-1)^{\text{ième}}$  et la  $n^{\text{ième}}$  arrivée d'un certain événement, comme par exemple les appels dans un central téléphonique, l'atterrissage des avions dans un aéroport, l'occurrence d'accidents dans une entreprise...etc.

Notons par

$$T_0 = 0 \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n A_k \quad n = 1, 2, \dots$$



FIGURE 2.2 – Une réalisation d'un processus de Poisson

Alternativement, on peut décrire une réalisation en supposant la variable aléatoire  $N_t$  défini pour tout  $t \geq 0$  par

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, T_n \leq t\} = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}$$

## Chapitre 2 : Files d'attente avec rappels

---

Inversement, les  $T_n$  se déduisent des  $N_t$  par la relation

$$T_n = \inf\{t \geq 0, N_t = n\}$$

La variable aléatoire  $N_t$  représente le nombre d'évènement se produisant dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ .

Le processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  si et seulement si les variables aléatoires  $A_n$  sont indépendantes de même loi exponentielle  $\varepsilon(\lambda)$  de fonction de distribution  $P\{A_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$

La variable aléatoire  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .

$$P\{N_t = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Pour tout  $t \geq 0$ , on définit la variable aléatoire  $\xi_t$  par

$$\xi_t \equiv \text{le temps qui sépare l'instant } t \text{ de la prochaine arrivée}$$

Plus précisément,  $\xi_t$  est donnée par

$$\xi_t = T_{N_t} - t$$

$\xi_t$  est appelée *le temps résiduel d'arrivée au temps t*. La variable aléatoire  $\xi_t$  possède la même distribution exponentielle de moyenne  $1/\lambda$  si le processus de comptage  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est de Poisson de paramètre  $\lambda$ . C'est à dire  $P\{\xi_t \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ , indépendamment de  $t$ .

### Processus de service

Les temps de service nécessaire au traitement des clients sont supposés être des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La description du processus de service revient alors à préciser la loi de probabilité de ces variables aléatoires. Le nombre de serveurs correspond au nombre maximal de clients pouvant être traités simultanément.

### Capacité du système

La capacité d'accueil d'un système de files d'attente correspond au nombre maximal de clients pouvant être présents dans le système à un instant quelconque. Elle est égale à la somme du nombre de serveurs et du nombre de places d'attente disponibles. Lorsque la capacité de la file est limitée et qu'un client arrive alors que cette dernière est pleine, le client est perdu.

### Discipline d'attente

La discipline d'attente détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les discipline les plus courantes sont :

- FIFO (first in first out) ou FCFS (first come, first served) ou PAPS (premier arrivé, premier servi) : c'est la discipline dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que dans le deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur, termine avant lui. En français, le terme PAPS comporte une ambiguïté, puisqu'il ne peut différencier une file "premier arrivé, premier servi" d'une file "premier arrivé, premier sorti".
- LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served) ou DAPS (dernier arrivé, premier servi). Les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file monoserveur.
- RANDOM (aléatoire) le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.

### Notation de Kendall

Est une notation qui permet de décrire un système d'attente à l'aide de six paramètres. Elle porte le nom du mathématicien *David George Kendall*, qui l'a introduite en 1953. La forme générale de cette notation est la suivante :  $A \setminus B \setminus c \setminus K \setminus m \setminus S$ , où

- A : distribution d'inter-arrivée.
- B : distribution de service.

- $c$  : nombre de serveurs.
- $K$  : capacité de la file.
- $m$  : population des usagers
- $S$  : discipline de service.

Lorsque les trois derniers éléments de la notation de Kendall ne sont pas précisés, il est sous entendu que  $K = +\infty$ ,  $m = +\infty$  et  $S = \text{FIFO}$ .

### 2.3.2 Loi de Little

La loi de Little est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime stationnaire du système. Aucune hypothèse sur les variables aléatoires qui caractérisent le système (temps d'interarrivées, temps de service,...) n'est nécessaire. La seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable. Elle énonce simplement que :

Le nombre de clients dans le système = Taux d'arrivée  $\times$  temps de réponse moyen

## 2.4 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

Dans l'étude mathématique d'un système de files d'attente, on s'intéresse généralement à l'évolution temporelle du processus stochastique  $\{N(t), t \geq 0\}$ , qui représente le nombre de clients se trouvant dans le système à l'instant  $t$ .

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état  $P_n(t) = P(N(t) = n)$ , qui définissent le régime transitoire du processus stochastique  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

Si on cherche à faire des maths, l'étude du régime transitoire pose de nombreuses questions mathématiques intéressantes.

Le Manager ou praticien, n'est pas intéressé par le régime transitoire, car ce qui l'intéresse c'est d'aboutir à un système stable.

- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(N(+\infty) = n) = P(N = n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelée distribution stationnaire du processus  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

### 2.4.1 Modèles Markoviens

Ces modèles sont caractérisés par le fait que les deux quantités stochastiques principales qui sont les temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées (Modèle  $M/M/c$ ). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de l'évolution temporelle du processus markovien  $\{N(t), t \geq 0\}$  est complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire.

### 2.4.2 Modèles non Markoviens

Ils sont caractérisés par l'absence de l'exponentialité pour l'une ou pour les deux principales quantités stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service. Dans ce cas l'étude mathématique de tels systèmes est très délicate. On essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes :

**Méthode de chaîne de Markov induite :** C'est la méthode la plus utilisée en littérature [6, 33, 89], elle a été élaborée par Kendall(1953)[63]. Elle consiste à choisir une séquence d'instantanés  $1, 2, 3, \dots, n$  (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite  $\{N_n, n \geq 0\}$ , où  $N_n = N(n)$ , soit markovienne et homogène.

**Méthode de la variable supplémentaire :** Elle consiste à compléter l'information sur le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus  $\{N(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \dots\}$ . Les variables  $\xi_i(t), i \in \{1, 2, \dots, n\}$  dites supplémentaires (auxiliaires).

**Simulation :** C'est une méthode de programmation sur ordinateur. Elle permet d'étudier des systèmes plus complexes, de prévoir leur comportement et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, et ne peuvent être utilisés que par une bonne précision.

## 2.5 Caractéristiques d'un système de files d'attente

Les clients arrivent selon un processus stochastique de taux  $\lambda$ , l'espérance de la durée séparant deux arrivées successives est  $\frac{1}{\lambda}$ .

Les clients se font servir suivant un processus stochastique de taux  $\beta$ . De ce fait, l'espérance

## Chapitre2 : Files d'attente avec rappels

---

de la durée de service est  $\frac{1}{\beta}$ .

L'intensité du trafic s'exprime de la manière suivante.

$$\rho = \frac{\lambda}{\beta}$$

La distribution stationnaire du processus stochastique introduit permet d'obtenir les caractéristiques d'exploitation du système, telles que : le temps d'attente d'un client dans la file d'attente, le temps de séjour d'un client dans le système, le taux d'occupation de service, la durée de la période d'activité (durée de cycle d'activité) et les mesures de performance suivante :

$\bar{L}$  : nombre moyen de clients dans le système.

$\bar{N}$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente.

$\bar{W}_s$  : temps moyen, de séjour d'un client dans le système.

$\bar{W}$  : temps moyen d'attente d'un client dans la file d'attente.

## 2.6 Files d'attente avec Rappels

Les modèles de files d'attente avec rappels sont caractérisés par la propriété qu'un client qui arrive trouve le serveur occupé rejoint une file supplémentaire de clients appelée "orbite" et réessaye ultérieurement de rejoindre le serveur tout en respectant la politique de rappels. Si par contre le client arrive et trouve le serveur libre il est servi et quitte le système. Dans la littérature des modèles d'attente avec rappels, on trouve trois politiques de rappels.

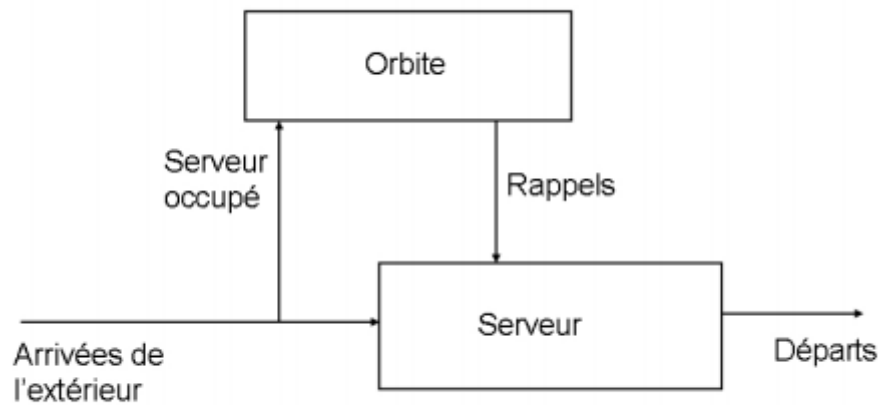


FIGURE 2.3 – Schéma illustratif d'un système d'attente avec rappels.

### 2.6.1 Politiques d'accès au serveur à partir de l'orbite.

**Politique de rappels classiques :** représente la politique la plus décrite dans la théorie classique des files d'attente avec rappels, elle est caractérisé par le fait que chaque source (clients) dans l'orbite rappelle après un temps exponentiellement distribué avec un paramètre  $\alpha_1$ . Donc , il ya une probabilité  $j\alpha_1 dt + o(dt)$  d'un nouveau rappel dans le prochain intervalle  $(t, t + dt)$  sachant que  $j$  clients sont en orbite à l'instant  $t$ . Cette politique a été motivée par des application dans la modilisation du comportement stochastique des abonnés dans les réseaux téléphoniques depuis les années 1940.

**Politique de rappels constants :** a été introduite par Fayolle (1986)[44] dans son modèle de type  $M/M/1$ , où uniquement le client en tête de la file en orbite peut demander

un service après un temps de rappels exponentiellement distribué de paramètre  $\alpha_2$ . Dans ce cas, la probabilité d'un rappel durant  $(t, t + dt)$  sachant que l'orbite est non vide, est  $\alpha_2 dt + o(dt)$ .

**Politique de rappels linéaires (versatile) :** traite les deux cas précédents d'une manière unifiée, la probabilité d'un rappel durant  $(t, t + dt)$  sachant que  $j$  clients sont en orbite à l'instant  $t$  est  $(\alpha_2(1 - \delta_{0j}) + j\alpha_1)dt + o(dt)$ .

### 2.6.2 Système $M/G/1$ avec rappels

Le modèle  $M/G/1$  avec rappels est le modèle le plus étudié par les spécialistes et il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés [1, 6, 7, 8, 13, 31, 35, 43, 89, 104].

Soit  $\lambda$  le taux du flot poissonnien des appels primaires. La durée de service est de loi générale, de moyenne  $\frac{1}{\beta}$ , de distribution  $B(x)$ , de transformée de Laplace-Stieltjes  $L_B(s)$  et deux premiers moments  $\beta_1, \beta_2$ . La durée entre deux rappels successifs d'une même source (orbite) est exponentielle de paramètre  $\alpha$ . La description du système est la suivante : on suppose que à l'instant  $\tau_{i-1}$  le  $(i-1)^{\text{ème}}$  appel (client) termine son service (les appels sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre, même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent pas occuper le service immédiatement, donc l'appel suivant n'entre en service qu'après une durée de temps  $R_i$  (durée de rappel) pendant laquelle le serveur (canal) est libre, bien qu'en général il y ait des clients qui attendent. A l'instant  $\zeta_i = \tau_{i-1} + R_i$ , le  $i^{\text{ème}}$  client débute son service pour une durée de temps  $S_i$ , tous les appels qui arrivent durant ce temps de service n'influent pas sur le processus. A l'instant  $\tau_i = \zeta_i + S_i$ , le  $i^{\text{ème}}$  client achève son service et le serveur devient encore libre et ainsi de suite.

#### Variable supplémentaire

Le premier résultat sur le système  $M/G/1$  avec rappels en utilisant la méthode de la variable supplémentaire (variable auxiliaire), a été obtenu par Keilson et al [61]. Ils ont obtenu les probabilités d'état et les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système. L'état du système peut être décrit par le processus

$$X(t) = \begin{cases} N(t), & \text{si } S(t)=0; \\ \{S(t), N(t), \xi(t)\}, & \text{si } S(t)=1. \end{cases}$$

## Chapitre2 : Files d'attente avec rappels

---

où,  $S(t)$  représente l'état du serveur, 0 si le serveur est libre ou 1 si le serveur est actif. Si  $S(t) = 1$  on définit la variable aléatoire  $\xi(t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , qui désigne la durée de service écoulé à l'instant  $t$ .  $N(t)$  représente le nombre de clients dans l'orbite à l'instant  $t$ . Notons par

$$P_{0n}(t) = P(S(t) = 0, N(t) = n), \quad n \geq 0$$

et

$$P_{1n}(t, x) = P(S(t) = 1, N(t) = n, x < \xi(t) \leq x + dx), \quad n > 0$$

Si  $\rho = \frac{\lambda}{\beta} < 1$ , le système est stable. La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \frac{(1 - k^{(1)}(1))(1 - z)k(z)}{k(z) - z} \frac{\phi(z)}{\phi(1)} \\ &= \frac{(1 - \rho)(1 - z)k(z)}{k(z) - z} \frac{\phi(z)}{\phi(1)} \end{aligned}$$

où

$$\phi(z) = \exp\left\{ \frac{-\lambda}{\beta} \int_0^z \frac{1 - k(x)}{x - k(x)} dx \right\}$$

avec

$$k(x) = L_B(\lambda - \lambda x)$$

$k^{(1)}(1)$  est la 1<sup>er</sup> dérivée de  $k(x)$  au point  $x = 1$ .

On aura alors

$$\pi(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)k(z)}{k(z) - z} \exp\left\{ \frac{-\lambda}{\beta} \int_0^z \frac{1 - k(x)}{x - k(x)} dx \right\}$$

Cette formule, appelée **décomposition stochastique**, signifie que le nombre de clients dans un système  $M/G/1$  avec rappels est distribué comme une somme de deux variables aléatoires indépendantes  $L_\infty$  et  $L_o$ .

Si on note  $\bar{L}$  le nombre moyen de clients dans le système, alors  $\bar{L} = \bar{L}_\infty + E(L_o)$ , où  $L_o$  est la variable aléatoire de fonction génératrice  $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$ , qui coïncide avec la distribution conditionnelle du nombre de clients dans l'orbite sachant que le serveur est libre.  $\bar{L}_\infty$  représente le nombre moyen de clients dans le système  $M/G/1$  classique avec un espace d'attente.

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)k(z)(1 - z)}{k(z) - z} \quad (2.1)$$

Cette formule n'est que la formule de **Pollaczek-Khintchine** pour le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  (FIFO,  $\infty$ ).

### Mesures de Performance

Ces mesures de performance du système  $M/G/1$  avec rappels sont données dans l'article de Yang et Templeton (1987)[105].

- Nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{L} = \rho + \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\beta(1-\rho)}$$

- Nombre moyen de clients dans l'orbite :

$$\bar{N} = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\beta(1-\rho)}$$

- Temps moyen d'attente et le nombre moyen de rappels : Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps d'entrée dans le système jusqu'au temps du commencement du service. Pour trouver le temps moyen d'attente  $\bar{W}$ , on utilise la formule de Little  $\bar{L} = \lambda \bar{W}$ , on obtient

$$\bar{W} = \frac{\lambda \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\beta(1-\rho)}$$

Une fois  $\bar{W}$  obtenu, il est facile de déduire  $\bar{r}$ , le nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{r} = \beta \bar{W} = \frac{\lambda \beta \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{1-\rho}$$

### 2.6.3 Files d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec rappels et groupes impatients

Le premier modèle de rappels avec arrivées en groupes a été étudié par Falin [39], qui a supposé la règle suivante : *Si le serveur est occupé à l'arrivée d'un groupe, alors la totalité du groupe rejoint l'orbite et si le serveur est libre, alors un des arrivants commence son service et le reste rejoint l'orbite.* Ce type de modèle peut être utilisé pour évaluer la performance des réseaux locaux à bus opérant sous le protocoles comme le CSMA (Carrier Sense Multiple Access). Dans le cas d'un modèle de rappels et groupes impatients, à l'arrivée d'un groupe primaire, si le serveur est occupé, le groupe entre en orbite avec une probabilité  $p$ , sinon il quitte le système avec une probabilité  $1-p$ . Par contre si le serveur est libre, l'un des clients sera pris en charge par le serveur et le reste du groupe rejoint l'orbite. Beaucoup de travaux sur rappels et arrivées en groupes ont été étudié par de nombreux chercheurs, voir [6, 7, 15, 19, 32, 33].

### 2.6.4 Modèle de système fondé sur la théorie de files d'attente avec rappels

Aujourd'hui il existe une littérature abondante sur les systèmes avec rappels où des exemples concrets ont été abordés : Yang et Templeton (1987)[105], Falin et Templeton (1997)[38], Wu et al (2005)[111]. Nous présentons quelques exemples que nous avons extrait de l'article [105].

#### Problème de réservation

Considérons un restaurant dans lequel la plupart des réservations sont faites par des appels téléphoniques. Il n'y a qu'une seule ligne qui est consacrée à répondre aux demandes de réservation. Ainsi, si un client appelle au restaurant et trouve la ligne occupée, il tentera à nouveau son appel après une certaine période de temps aléatoire avec une certaine probabilité  $p$ . En pratique, si  $p < 1$  cet exemple est modélisé par une  $M/G/1$  avec rappels et perte de clients, si  $p \rightarrow 1$  il devient une  $M/G/1$  avec rappels et sans perte de client. L'étude de ce genre de problèmes permet de prédire le temps d'attente du client, le nombre de clients perdus dû à ce blocage.

#### Réseau locaux CSMA

Le protocole de communication couramment utilisés dans les réseaux locaux de bus partagés (LAN) est le CSMA non persistant (Carrier Sense Multiple Access). Le réseau LAN est composé de  $n$  stations ou processeurs qui sont connectées entre eux par un bus unique. Des messages de longueur variable arrivent à la station. A la réception tous les messages sont divisés en paquets. Si les paquets trouvent le bus libre, l'un des paquets est transmis par ce bus à sa destination et les autres sont stockés dans le tampon pour une transmission ultérieur. Sinon tous les flits sont stockés dans le tampon et la station peut reconsulter le bus à nouveau après une période aléatoire.

Ce problème peut être modélisé comme un système d'attente avec rappels à un seul serveur, qui est le bus, et les tampons des stations représentent l'orbite.

#### Système informatique à temps réel

Considérons un système informatique à temps réel composé de  $S$  ports et de  $M$  terminaux. Pour qu'un terminal soit connecté à un ordinateur (poste), il faut exactement un

seul port. Des étudiants arrivent dans un centre de calcul pour utiliser l'ordinateur. Si un des étudiants trouve un poste libre il l'occupe et envoie un message à un commutateur pour un accès à un port libre, si la réponse est positive le poste est connecté. Si la réponse est négative, le message reste en file d'attente jusqu'à ce qu'il y ait un port libre. Si un étudiant trouve tous les postes occupés, il quitte le système et revient ultérieurement après un temps aléatoire.

Dans cet exemple, nous avons une file d'attente avec rappels à multi-serveur avec des position d'attente (si  $M > S$ ) et une capacité d'orbite infinie.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé et présenté les concepts et techniques de base de la théorie des files d'attente (classique et avec rappels). Nous avons cité des exemples concrets qui peuvent être modélisés par des systèmes d'attente avec rappels.

# 3

## $M/G/1$ avec rappels et réparation immédiate

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Description du modèle</b>	<b>36</b>
<b>3.3</b>	<b>Analyse stationnaire du système</b>	<b>37</b>
<b>3.4</b>	<b>Solution du système d'équations</b>	<b>39</b>
<b>3.5</b>	<b>Mesures de Performance</b>	<b>41</b>
<b>3.6</b>	<b>Décomposition Stochastique</b>	<b>44</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions un modèle d'attente avec des temps de rappels de distribution générale. Ce type de modèles s'inspire de l'observation des phénomènes de rappels dans des systèmes informatiques et de télécommunication, où les temps de rappels ne sont plus de distribution exponentielle. Kapyrin [58] en 1977 est le premier qui a généralisé la distribution de temps de rappels. Par la suite de nombreux travaux ont été publiés dans ce contexte voir [17, 33].

En particulier ce chapitre est consacré à l'étude de la file d'attente  $M/G/1$  avec rappels de loi générale et réparation immédiate.

## 3.2 Description du modèle

Nous considérons une file d'attente  $M/G/1$  avec rappels généraux et pannes actives, les hypothèses suivantes décrivent le modèle mathématique.

1. La capacité de l'orbite est infinie.
2. Processus des arrivées.

Les clients arrivent de l'extérieur suivant un flux poissonien de taux  $\lambda$ . Si un client trouve le serveur libre à son arrivée, il commence son service immédiatement et quitte le système après achèvement du service. Sinon il rejoint l'orbite suivant une discipline *FCFS*.

La politique d'accès au serveur à partir de l'orbite, est la suivante : seul le client en tête de file de l'orbite est autorisé à accéder au service. Nous supposons que les temps inter-rappels sont régis par une fonction de répartition  $A(x)$ , de densité  $a(x)$  et de transformée de Laplace-Stieltjes  $L_A(s)$ .

3. Processus de service.

Les temps de service des clients sont indépendants et identiquement distribués avec une distribution générale  $B(x)$ , de densité  $b(x)$ , de transformée de Laplace-Stieltjes  $L_B(s)$  et les deux premiers moments  $\beta_1, \beta_2$ .

4. Processus de pannes

Nous supposons que le serveur est sujet à des pannes actives et Poissoniennes de paramètres  $\mu$ . Si le serveur tombe en panne, la réparation commence immédiatement.

La durée de réparation est de distribution  $C(x)$ , de densité  $c(x)$ , de transformée de Laplace-Stieltjes  $L_C(s)$  et les deux premiers moment  $\gamma_1, \gamma_2$ .

Nous supposons que les temps inter-arrivées, les temps de rappels, les temps de service, les temps de panne et les temps de réparation sont mutuellement indépendants. L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit par le processus stochastique

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{S(t), N(t), \xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t)\}$$

avec un espace d'état  $\{0, 1, 2\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^3$ .

$S(t)$  représente l'état du serveur à l'instant  $t$ .

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre;} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé;} \\ 2, & \text{si le serveur est en réparation.} \end{cases}$$

$N(t)$  représente le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ . Si  $S(t) = 0$  et  $N(t) > 0$ , alors  $\xi_0(t)$  représente le temps de rappel écoulé. Si  $S(t) = 1$ , alors  $\xi_1(t)$  représente le temps de service écoulé. Si  $S(t) = 2$ , alors  $\xi_2(t)$  représente le temps de réparation écoulé.

Les taux conditionnels de completion pour les rappels des clients, service des clients et réparation sont respectivement :

$$\alpha(x) = \frac{a(x)}{1 - A(x)}, \quad \beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}, \quad \gamma(y) = \frac{c(y)}{1 - C(y)}.$$

### 3.3 Analyse stationnaire du système

Nous étudions dans cette section la distribution de système en régime stationnaire. Pour le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$ , nous définissons les densités de probabilités :

$$P_{0,n}(t, x)dx = P\{N(t) = n, S(t) = 0, x \leq \xi_0(t) < x + dx\} \quad n \geq 1$$

$$P_{1,n}(t, x)dx = P\{N(t) = n, S(t) = 1, x \leq \xi_1(t) < x + dx\} \quad n \geq 0$$

$$P_{2,n}(t, x)dx = P\{N(t) = n, S(t) = 2, x \leq \xi_2(t) < x + dx\} \quad n \geq 0$$

et la probabilité

$$P_{00}(t) = P\{N(t) = 0, S(t) = 0\}$$

Nous supposons que la condition de stabilité est vérifiée, dans ce cas on peut écrire :

$$P_{00} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{00}(t), \quad P_{0,n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{0,n}(t, x), \quad P_{1,n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{1,n}(t, x) \text{ et } P_{2,n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{2,n}(t, x)$$

En utilisant la technique de la variable supplémentaire, nous obtenons le système d'équations suivants :

$$\lambda P_{00} = \int_0^{\infty} \beta(x) P_{1,0}(x) dx \quad n = 0 \quad (3.1)$$

Pour  $n \geq 1$ , nous avons

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \lambda + \alpha(x) \right] P_{0,n}(x) = 0 \quad (3.2)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \lambda + \mu + \beta(x) \right] P_{1,n}(x) = \lambda P_{1,n-1}(x) + \int_0^{\infty} \gamma(y) P_{2,n}(x, y) dy \quad (3.3)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} + \lambda + \gamma(y) \right] P_{2,n}(x, y) = \lambda P_{2,n-1}(x, y) \quad (3.4)$$

Pour  $n = 0$ , nous avons

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \lambda + \mu + \beta(x) \right] P_{1,0}(x) = \int_0^{\infty} \gamma(y) P_{2,0}(x, y) dy \quad (3.5)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} + \lambda + \gamma(y) \right] P_{2,0}(x, y) = 0 \quad (3.6)$$

Les conditions aux limites

$$P_{0,n}(0) = \int_0^{\infty} \beta(x) P_{1,n}(x) dx \quad n \geq 1 \quad (3.7)$$

$$P_{1,n}(0) = \lambda \int_0^{\infty} P_{0,n}(x) dx + \int_0^{\infty} \alpha(x) P_{0,n+1}(x) dx \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

$$P_{1,0}(0) = \lambda P_{00} + \int_0^{\infty} \alpha(x) P_{0,1}(x) dx \quad (3.9)$$

$$P_{2,n}(x, 0) = \mu P_{1,n}(x) \quad n \geq 0 \quad (3.10)$$

La condition de normalisation

$$\begin{aligned} P_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{0,n}(x) dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{1,n}(x) dx \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_{2,n}(x, y) dx dy = 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.4 Solution du système d'équations

La distribution en régime stationnaire du système est décrite par le théorème suivant en terme de fonctions génératrices.

**Théorème 3.4.1.** *Si  $\rho < 1$ , alors*

$$P_0(z, x) = \frac{\lambda z(1 - k(z))}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \times \left[ 1 - \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)} \right] (1 - A(x)) \exp(-\lambda x) \quad (3.12)$$

$$P_1(z, x) = \frac{\lambda(1 - z)L_A(\lambda)}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \times \left[ 1 - \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)} \right] (1 - B(x)) \exp(-G(\lambda(1 - z))x) \quad (3.13)$$

$$P_2(z, x, y) = \frac{\mu\lambda(1 - z)L_A(\lambda)}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \times \left[ 1 - \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)} \right] (1 - B(x)) \exp(-G(\lambda(1 - z))x) \times (1 - C(y)) \exp(-\lambda(1 - z)y) \quad (3.14)$$

où

$$G(x) = x + \mu(1 - L_C(x)), \quad k(z) = L_B(G(\lambda + \lambda z))$$

*Démonstration.* La preuve est basée sur la résolution du système d'équations (3.1)-(3.11).

Définissons les fonctions génératrices suivantes pour  $|z| \leq 1$

$$P_0(z, x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{0,n}(x) z^n$$

$$P_1(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n}(x) z^n$$

$$P_2(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2,n}(x) z^n$$

$$P_i(z) = \int_0^{\infty} P_i(z, x) dx, \quad i = 0, 1, 2.$$

Multipliant les équations (3.2)-(3.10) par  $z^n$  et sommant par rapport à  $n$  de 0 à  $\infty$ , on obtient les équations suivantes après quelques manipulations algébriques :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \lambda + \alpha(x) \right] P_0(z, x) = 0 \quad (3.15)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + \lambda(1 - z) + \mu + \beta(x) \right] P_1(z, x) = \int_0^\infty \gamma(x) P_2(z, x, y) dy \quad (3.16)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} + \lambda(1 - z) + \gamma(y) \right] P_2(z, x) = 0 \quad (3.17)$$

$$P_0(z, 0) = \int_0^\infty \beta(x) P_1(z, x) dx - \lambda P_{00} \quad (3.18)$$

$$P_1(z, 0) = \lambda \int_0^\infty P_0(z, x) + \frac{1}{z} \int_0^\infty \alpha(x) P_0(z, x) dx + \lambda P_{00} \quad (3.19)$$

$$P_2(z, x, 0) = \mu P_1(z, x) \quad (3.20)$$

La solution du système d'équation (3.15)-(3.20) est donnée par

$$P_0(z, x) = P_0(z, 0)(1 - A(x)) \exp(-\lambda x) \quad (3.21)$$

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)(1 - B(x)) \exp(-G(\lambda - \lambda z)x) \quad (3.22)$$

$$P_2(z, x, y) = \mu P_1(z, x)(1 - C(y)) \exp(-\lambda(1 - z)y) \quad (3.23)$$

En substituant les expressions (3.21), (3.22) dans (3.18),(3.19) nous obtenons

$$P_0(z, 0) = \frac{\lambda z P_{00}(1 - k(z))}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \quad (3.24)$$

$$P_1(z, 0) = \frac{\lambda P_{00}(1 - z)L_A(\lambda)}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \quad (3.25)$$

En utilisant la condition de normalisation, nous déterminons la probabilité  $P_{00}$

$$P_{00} + \int_0^\infty P_0(1, x) dx + \int_0^\infty P_1(1, x) dx + \int_0^\infty \int_0^\infty P_2(1, x, y) dx dy = 1 \quad (3.26)$$

On trouve

$$P_{00} = 1 - \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)} \quad (3.27)$$

et alors, le taux d'utilisation du système  $\rho$  est donné par

$$\rho = \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)}$$

Ainsi  $\rho < 1$  est la condition de stabilité du système étudié.  $\square$

Le théorème suivant donne les fonctions génératrices partielles des distributions de l'état du serveur et de la taille d'orbite.

**Théorème 3.4.2.** *Si  $\rho < 1$ , on a*

$$P_0(z) = \frac{z(1 - L_A(\lambda))(1 - k(z))}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \times \left[ 1 - \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)} \right] \quad (3.28)$$

$$P_1(z) = \frac{\lambda(1 - z)L_A(\lambda)(1 - k(z))}{[L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))][G(\lambda(1 - z))]} \times \left[ 1 - \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)} \right] \quad (3.29)$$

$$P_2(z) = \frac{\mu L_A(\lambda)(1 - L_C(\lambda(1 - z)))(1 - k(z))}{[L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))][G(\lambda(1 - z))]} \times \left[ 1 - \frac{\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda)} \right] \quad (3.30)$$

*Démonstration.* En utilisant les résultats du théorème 3.4.1 et en appliquant la définition suivantes

$$P_i(z) = \int_0^\infty P_i(z, x) dx, \quad i = 0, 1, 2.$$

nous obtenons les résultats du théorème 3.4.2  $\square$

## 3.5 Mesures de Performance

Notre objectif dans cette section est d'établir des expressions explicites pour quelques mesures de performance du système étudié. Les résultats sont résumés dans les corollaires suivants.

**Corollaire 3.5.1.** *Si le système est stable alors,*

1. *La probabilité que le serveur est libre est :  $I = 1 - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)$ .*
2. *La probabilité que le serveur est occupé est :  $B = \lambda\beta_1$ .*
3. *La probabilité que le serveur est en réparation est :  $R = \mu\lambda\beta_1\gamma_1$ .*

*Démonstration.* Nous avons,

$$I = \lim_{z \rightarrow 1} P_0(z) + P_{00}, \quad B = \lim_{z \rightarrow 1} P_1(z),$$

$$R = \lim_{z \rightarrow 1} P_2(z),$$

Nous obtenons les résultats par un calcul direct. □

Considérons maintenant certaines quantités de fiabilité du serveur.  
Soit  $A_v(t)$  la disponibilité instantanée du serveur qui est définie par :

$$A_v(t) = P\{\text{le serveur est disponible à l'instant } t\}$$

La disponibilité limite du serveur en régime stationnaire est définie par :  $A_v = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ .  
Notons par  $F_f$  la fréquence de panne (défaillance) du serveur en régime stationnaire.

**Corollaire 3.5.2.** *Si le système est stable, alors*

1. *La disponibilité limite du serveur est :  $A_v = 1 - \lambda\beta_1\mu\gamma_1$*
2. *La fréquence de panne du serveur est :  $F_f = \mu\lambda\beta_1$*

*Démonstration.* Nous obtenons facilement les résultats en considérant les équations suivantes :

$$A_v = P_0 + \lim_{z \rightarrow 1} [P_0(z) + P_1(z)]$$

$$F_f = \mu \lim_{z \rightarrow 1} P_1(z)$$

□

Notons par

$$\Phi(z) = P_{00} + P_0(z) + P_1(z) + P_2(z)$$

la fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite et par

$$\pi(z) = P_{00} + P_0(z) + zP_1(z) + zP_2(z)$$

la fonction génératrice du nombre de clients dans le système.

Nous énonçons le corollaire suivant sans preuve qui est trivial en utilisant le théorème 3.4.2

**Corollaire 3.5.3.** *Si le système est stable, alors*

$$\Phi(z) = \frac{(L_A(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1))(1 - z)}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \quad (3.31)$$

$$\pi(z) = \frac{(L_A(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1))k(z)(1 - z)}{L_A(\lambda)(1 - z)k(z) - z(1 - k(z))} \quad (3.32)$$

le nombre moyen de clients en orbite est donné par

$$L_q = \frac{2\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)(1 - L_A(\lambda)) + \lambda^2\mu\gamma_2\beta_1 + \lambda^2\beta_2(1 + \mu\gamma_1)^2}{2(L_A(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1))} \quad (3.33)$$

et le nombre moyen de clients dans le système est donné par

$$\begin{aligned} L_s &= \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1) \\ &+ \frac{2\lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)(1 - L_A(\lambda)) + \lambda^2\mu\gamma_2\beta_1 + \lambda^2\beta_2(1 + \mu\gamma_1)^2}{2(L_A(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1))} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Soit  $W_s$  le temps moyen d'attente dans le système en régime stationnaire, en appliquant la formule de LITTLE nous obtenons

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{L_s}{\lambda} = \beta_1(1 + \mu\gamma_1) \\ &+ \frac{2\beta_1(1 + \mu\gamma_1)(1 - L_A(\lambda)) + \lambda\mu\gamma_2\beta_1 + \lambda\beta_2(1 + \mu\gamma_1)^2}{2(L_A(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1))} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Une autre mesure de performance intéressante dans le contexte des files d'attente avec rappels est la moyenne de la période d'activité du système. La période d'activité du système  $L$  est définie comme étant la période qui débute à l'instant où un client arrivant trouve le système vide jusqu'à l'instant où le système redevient vide pour une autre fois. Si nous désignons par  $T_{00}$  la durée de temps pendant laquelle le système est dans l'état  $(0,0)$  alors

$$P_{00} = \frac{E(T_{00})}{\frac{1}{\lambda} + E(L)}$$

Nous avons  $E(T_{00}) = \frac{1}{\lambda}$ , donc

$$E(L) = \frac{1}{\lambda}(P_{00}^{-1} - 1)$$

En utilisant l'équation (3.27), nous obtenons

$$E(L) = \frac{\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}{L_A(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)}$$

### 3.6 Décomposition Stochastique

La propriété de décomposition stochastique des files d'attente avec rappels indique que le nombre de clients dans le système s'écrit comme somme de deux variables aléatoires indépendantes ou plus : l'une est le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  classique et l'autre est le nombre de clients dans le système de la file  $M/G/1$  avec rappels sachant que le serveur est libre (voir Yang et Templeton (1987)[105]). Aissani et Artalejo [5] ont établi la propriété de décomposition stochastique d'une file  $M/G/1$  avec rappels, pannes de durées de réparation générales et politique de rappels linéaire. Pour le modèle étudié nous avons observé la relation suivante entre les fonctions génératrices.

$$\lim_{L_A(\lambda) \rightarrow 1} \pi(z) = \pi^\infty(z)$$

où

$$\pi^\infty(z) = [1 - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)] \frac{(1-z)k(z)}{k(z) - z}$$

qui est la fonction génératrice du nombre de clients dans le système  $M/G/1/\infty$  avec pannes de serveur. Soit  $\chi(z)$  la fonction génératrice de la distribution conditionnelle du nombre de clients dans le système sachant que le serveur est libre.

$$\chi(z) = \frac{P_{00} + P_0(z)}{P_{00} + P_0(1)} = \frac{P_{00} + P_0(z)}{I}$$

avec  $I$  est donné dans le corollaire 3.5.1, en utilisant les équations (3.27) et (3.28) nous obtenons

$$\chi(z) = \frac{[L_A(\lambda) - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)][k(z) - z]}{[1 - \lambda\beta_1(1 + \mu\gamma_1)][L_A(\lambda)(1-z)k(z) - z(1-k(z))]}$$

De (3.32) on déduit que  $\pi(z) = \pi^\infty(z)\chi(z)$ , ce qui confirme que la propriété de décomposition stochastique est valable pour ce modèle.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une étude détaillée du modèle  $M/G/1$  avec rappels de loi générale et réparation immédiate. En utilisant la méthode de la variable supplémentaire, nous avons obtenu la condition d'érgodicité du système, la distribution du nombre de clients dans le système et dans l'orbite en terme de fonctions génératrices, quelques mesures de performance et la décomposition stochastique de la variable aléatoire qui représente le nombre de clients dans le système.

# 4

## $M/G/1$ avec rappels, clients récurrents et réparations retardées

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Notation et Modèle Mathématique</b>	<b>46</b>
<b>4.3</b>	<b>Analyse stationnaire du système</b>	<b>48</b>
<b>4.4</b>	<b>Solution du système d'équations</b>	<b>50</b>
<b>4.5</b>	<b>Mesures de performance</b>	<b>58</b>
<b>4.6</b>	<b>Cas particulier</b>	<b>62</b>
4.6.1	Premier cas : absence du délai	62
4.6.2	Deuxième cas : Absence de pannes	63
4.6.3	Troisième cas : Absence de clients récurrents et absence de pannes	63
<b>4.7</b>	<b>Décomposition stochastique</b>	<b>64</b>
<b>4.8</b>	<b>Résultats Numérique</b>	<b>64</b>
<b>4.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>68</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous avons introduit deux nouveaux concepts. Le premier appelé délai, il explique le problème d'attente pour une intervention (réparation) non négligeable. Le deuxième concept c'est la présence des clients récurrents, l'augmentation du nombre de ces clients dans le système conduit à la non disponibilité du serveur pour répondre au service des clients transitaires. A partir de ces deux concepts, nous étudions un modèle de files d'attente avec rappels de loi générale, deux types de clients et réparation retardée.

## 4.2 Notation et Modèle Mathématique

Nous considérons une seule file d'attente avec rappels, pannes actives, délais et réparations. Les hypothèses suivantes décrivent le modèle mathématique.

1. La capacité de l'orbite est infinie.
2. La seule file d'attente avec rappels à deux classes de clients :
  - Transitaires (appelés également clients ordinaires, transit).
  - Un nombre fini fixe  $K$  ( $K \geq 1$ ) de clients récurrents (appelés également clients permanents).

3. Processus des clients récurrents.

Il ya un nombre fixe  $K$  de clients récurrents dans le système. Après avoir reçu le service, les clients récurrents retournent immédiatement à l'orbite conformément à une discipline *FCFS*.

Nous supposons également que seul le client récurrent en tête de file de l'orbite est autorisé à accéder au service. Les temps successifs entre tentatives de rappels de tout client récurrent sont de loi exponentielle de moyenne fixe  $\gamma^{-1}$  (rappel constant).

4. Processus des arrivées des clients transitaires.

Les clients transitaires arrivent suivant un flux poissonien de taux  $\lambda$ . Si un client transitaire trouve le serveur libre à son arrivée, il commence son service immédiatement et quitte le système après achèvement du service. Sinon il rejoint l'orbite suivant une discipline *FCFS*.

Nous supposons que seul le client transitaire en tête de l'orbite est autorisé à accéder au serveur. Les temps successif d'inter-rappels de tous les clients transitaires sont

régis par une fonction de répartition  $A(x)$ , de densité  $a(x)$ , et de transformée de Laplace Stieltjes  $L_A(s)$ .

5. Processus de service

Les temps de service des clients transitoires sont indépendants et identiquement distribués de distribution  $B_1(x)$ , de densité  $b_1(x)$ , de transformée de Laplace Stieltjes  $L_{B_1}(s)$  et  $\beta_{1n}$  le moment d'ordre  $n$ .

Les durées de service des clients récurrents sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués de distribution  $B_2(x)$ , de densité  $b_2(x)$ , de transformée de Laplace Stieltjes  $L_{B_2}(s)$  et  $\beta_{2n}$  les moments d'ordre  $n$ .

6. Processus de pannes. Le serveur est sujet à des pannes actives c'est-à-dire que le serveur tombe en panne si et seulement s'il est en service. Il tombe en panne après un temps aléatoire de loi exponentielle de moyenne  $\mu^{-1}$ . Lorsque le serveur tombe en panne il n'est pas immédiatement réparé, il attend un temps appelé délai de distribution  $D(y)$ , de densité  $\psi(y)$ , de transformée de Laplace  $L_D(s)$  et les deux premiers moments  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Après la période de délai, la réparation commence immédiatement. La durée de réparation est de distribution  $C(y)$ , de densité  $c(y)$ , de transformée de Laplace Stieltjes  $L_c(s)$  et les deux premiers moments  $\gamma_1, \gamma_2$ .

Le client dont le service est interrompu reste au service. Une fois le délai et la réparation achevée, le serveur reprend le service du client.

Le serveur n'est pas autorisé à accepter de nouveaux clients jusqu'à ce que le client en service quitte le système.

Le serveur est dit bloqué s'il est occupé, en délai ou en réparation.

L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit par le processus de Markov

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{(S(t), S^*(t), N(t), \xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \xi_4(t)), t \geq 0\}$$

$S(t)$  représente l'état du serveur à l'instant  $t$ .

$S^*(t)$  représente le type de client en service à l'instant  $t$ .

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé par un client transitaire à l'instant } t; \\ 2, & \text{si le serveur est occupé par un client récurrent à l'instant } t; \\ 3, & \text{si le serveur est en réparation à l'instant } t; \\ 4, & \text{si le serveur est en délai à l'instant } t. \end{cases}$$

$$S^*(t) \begin{cases} 1, & \text{si le serveur est occupé par un client transitaire à l'instant } t; \\ 2, & \text{si le serveur est occupé par un client récurrent à l'instant } t. \end{cases}$$

$N(t)$  représente le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ .

$\xi_0(t)$  représente le temps de rappel écoulé d'un client transit à l'instant  $t$ , si  $S(t) = 0$  et  $N(t) > K$ .

$\xi_1(t)$  représente le temps de service écoulé d'un client transit à l'instant  $t$ , si  $S(t) = 1$ .

$\xi_2(t)$  représente le temps de service écoulé d'un client récurrent à l'instant  $t$ , si  $S(t) = 2$

$\xi_3(t)$  représente le temps de réparation écoulé à l'instant  $t$ , si  $S(t) = 3$

$\xi_4(t)$  représente le temps de délai écoulé à l'instant  $t$ , si  $S(t) = 4$ .

les taux conditionnels de complétion pour les rappels des clients transit, service des clients transitaires, service des récurrent, temps de réparation et délai sont respectivement :

$$\alpha(x) = \frac{a(x)}{1-A(x)}, \beta_1(x) = \frac{b_1(x)}{1-B_1(x)}, \beta_2(x) = \frac{b_2(x)}{1-B_2(x)}, \gamma(x) = \frac{c(x)}{1-C(x)} \text{ et } \theta(x) = \frac{\psi(x)}{1-D(x)}.$$

### 4.3 Analyse stationnaire du système

L'objectif de cette section est d'obtenir la distribution stationnaire de l'état du système du processus  $\{X(t), t \geq t\}$ . On peut définir les probabilités limites comme suit :

$$P_{0,K} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 0, N(t) = K\}$$

$$P_{0,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 0, N(t) = n, x < \xi_0(t) \leq x + dx\} \quad n > K$$

$$P_{1,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 1, N(t) = n, x < \xi_1(t) \leq x + dx\} \quad n \geq K$$

$$P_{2,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 2, N(t) = n, x < \xi_2(t) \leq x + dx\} \quad n \geq K - 1$$

$$P_{3,1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 3, N(t) = n, S^*(t) = 1, x < \xi_1(t) \leq x + dx, y < \xi_3(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K$$

$$P_{3,2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 3, N(t) = n, S^*(t) = 2, x < \xi_2(t) \leq x + dx, y < \xi_3(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K - 1$$

$$P_{4,1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 4, N(t) = n, S^*(t) = 1, x < \xi_1(t) \leq x + dx, y < \xi_4(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K$$

$$P_{4,2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 4, N(t) = n, S^*(t) = 2, x < \xi_2(t) \leq x + dx, y < \xi_4(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K - 1$$

En utilisant la méthode de la variable supplémentaire, nous obtenons les équations d'état à l'équilibre.

$$(\lambda + \gamma)P_{0,K} = \int_0^\infty P_{1,K}(x)\beta_1(x)dx + \int_0^\infty P_{2,K-1}(x)\beta_2(x)dx \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P_{0,n}(x) = -(\lambda + \gamma + \alpha(x))P_{0,n}(x) \quad n > K \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P_{1,n}(x) = -(\lambda + \mu + \beta_1(x))P_{1,n}(x) + \lambda(1 - \delta_{n,K})P_{1,n-1}(x) + \int_0^\infty P_{3,1,n}(x,y)\gamma(y)dy \quad n \geq K \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P_{2,n}(x) = -(\lambda + \mu + \beta_2(x))P_{2,n}(x) + \lambda(1 - \delta_{n,K-1})P_{2,n-1}(x) + \int_0^\infty P_{3,2,n}(x,y)\gamma(y)dy \quad n \geq K - 1 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}P_{3,1,n}(x,y) = -(\lambda + \gamma(y))P_{3,1,n}(x,y) + \lambda(1 - \delta_{n,K})P_{3,1,n-1}(x,y) \quad n \geq K \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}P_{3,2,n}(x,y) = -(\lambda + \gamma(y))P_{3,2,n}(x,y) + \lambda(1 - \delta_{n,K-1})P_{3,2,n-1}(x,y) \quad n \geq K - 1 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}P_{4,1,n}(x,y) = -(\lambda + \theta(y))P_{4,1,n}(x,y) + \lambda(1 - \delta_{n,K})P_{4,1,n-1}(x,y) \quad n \geq K \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}P_{4,2,n}(x,y) = -(\lambda + \theta(y))P_{4,2,n}(x,y) + \lambda(1 - \delta_{n,K-1})P_{4,2,n-1}(x,y) \quad n \geq K - 1 \quad (4.8)$$

où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases} \text{ est la fonction Kronecker.}$$

Ce système d'équations sera résolu sous les conditions limites et on obtient le système

d'équations suivant :

$$P_{0,n}(0) = \int_0^\infty P_{1,n}(x)\beta_1(x)dx + \int_0^\infty P_{2,n-1}(x)\beta_2(x)dx \quad n \geq K + 1 \quad (4.9)$$

$$P_{1,n}(0) = \int_0^\infty P_{0,n+1}(x)\alpha(x)dx + \lambda(1 - \delta_{n,K}) \int_0^\infty P_{0,n}(x)dx + \delta_{n,K}\lambda P_{0,K} \quad n \geq K \quad (4.10)$$

$$P_{2,n}(0) = \gamma(1 - \delta_{n,K-1}) \int_0^\infty P_{0,n+1}(x)dx + \gamma\delta_{n,K-1}P_{0,K} \quad n \geq K - 1 \quad (4.11)$$

$$P_{3,1,n}(x, 0) = \int_0^\infty P_{4,1,n}(x, y)\theta(y)dy \quad n \geq K \quad (4.12)$$

$$P_{3,2,n}(x, 0) = \int_0^\infty P_{4,2,n}(x, y)\theta(y)dy \quad n \geq K - 1 \quad (4.13)$$

$$P_{4,1,n}(x, 0) = \mu P_{1,n}(x) \quad n \geq K \quad (4.14)$$

$$P_{4,2,n}(x, 0) = \mu P_{2,n}(x) \quad n \geq K - 1. \quad (4.15)$$

En outre, l'équation de normalisation :

$$\begin{aligned} P_{0,K} + \sum_{n>K} \int_0^\infty P_{0,n}(x)dx + \sum_{n \geq K} \left( \int_0^\infty P_{1,n}(x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{3,1,n}(x, y)dxdy \right. \\ \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{4,1,n}(x, y)dxdy \right) + \sum_{n \geq K-1} \left( \int_0^\infty P_{2,n}(x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{3,2,n}(x, y)dxdy \right. \\ \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{4,2,n}(x, y)dxdy \right) = 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 4.4 Solution du système d'équations

Le théorème suivant décrit la distribution du système en équilibre (état stationnaire) en terme de fonctions génératrices.

**Théorème 4.4.1.** *Si  $\lambda(1 + \mu\varphi_1 + \mu\gamma_1)\{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\beta_{11} + \gamma(1 - L_A(\lambda + \gamma))\beta_{21}\} < (\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)$  alors*

$$P_0(z, x) = \frac{(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - k_1(z)) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^{K+1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \times (1 - A(x))e^{-(\lambda+\gamma)x}.$$

$$P_1(z, x) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \times (1 - B_1(x))e^{-G(\lambda(1-z))x}.$$

$$P_2(z, x) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{k_1(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times (1 - B_2(x))e^{-G(\lambda(1-z))x}.$$

$$P_{31}(z, x, y) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \mu L_D(\lambda(1 - z))(1 - B_1(x))(1 - C(y))e^{-(G(\lambda(1-z))x + \lambda(1-z)y)}.$$

$$P_{32}(z, x, y) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{k_1(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \mu L_D(\lambda(1 - z))(1 - B_2(x))(1 - C(y))e^{-(G(\lambda(1-z))x + \lambda(1-z)y)}.$$

$$P_{41}(z, x, y) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \mu(1 - D(y))(1 - B_1(x))e^{-(G(\lambda(1-z))x + \lambda(1-z)y)}.$$

$$P_{42}(z, x, y) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{k_1(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \mu(1 - B_2(x))(1 - D(y))e^{-(G(\lambda(1-z))x + \lambda(1-z)y)}.$$

$$P_{0K} = 1 - \frac{(1 + \mu\varphi_1 + \mu\gamma_1)(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))(\gamma\beta_{21} + \lambda\beta_{11})}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(1 + \gamma(1 + \mu\gamma_1 + \mu\varphi_1)\beta_{21})}$$

où

$$G(x) = x + \mu - \mu L_D(x)L_C(x)$$

et

$$k_i(x) = L_{B_i}(G(\lambda(1 - x))) \quad i = 1, 2.$$

*Démonstration.* Pour résoudre le système d'équations ((4.1)-(4.16)), nous définissons les fonctions génératrices suivantes pour  $|z| \leq 1$  :

$$P_0(z, x) = \sum_{n > K} P_{0,n}(x)z^n, \quad P_{31}(z, x, y) = \sum_{n \geq K} P_{3,1,n}(x, y)z^n \\ P_1(z, x) = \sum_{n \geq K} P_{1,n}(x)z^n, \quad P_{32}(z, x, y) = \sum_{n \geq K-1} P_{3,2,n}(x, y)z^n$$

$$P_2(z, x) = \sum_{n \geq K-1} P_{2,n}(x)z^n, \quad P_{41}(z, x, y) = \sum_{n \geq K} P_{4,1,n}(x, y)z^n$$

$$P_{42}(z, x, y) = \sum_{n \geq K-1} P_{4,2,n}(x, y)z^n.$$

On multiplie les équations (4.2) et (4.9) par  $z^n$  et on somme sur  $n$  de  $K+1$  à l'infini, et en utilisant l'équation 4.1 on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_0(z, x) = -(\lambda + \gamma + \alpha(x))P_0(z, x) \quad (4.17)$$

$$P_0(z, 0) = \int_0^\infty P_1(z, x)\beta_1(x)dx + z \int_0^\infty P_2(z, x)\beta_2(x)dx - (\lambda + \gamma)P_{0K}z^K. \quad (4.18)$$

On multiplie les équations (4.3), (4.5), (4.7), (4.10), (4.12) et (4.14) par  $z^n$  et on somme pour  $n \geq K$  on aura :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_1(z, x) = -(\lambda(1-z) + \mu + \beta_1(x))P_1(z, x) + \int_0^\infty P_{31}(z, x, y)\gamma(y)dy \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{31}(z, x, y) = -(\lambda(1-z) + \gamma(y))P_{31}(z, x, y) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{41}(z, x, y) = -(\lambda(1-z) + \theta(y))P_{41}(z, x, y) \quad (4.21)$$

$$P_1(z, 0) = z^{-1} \int_0^\infty P_0(z, x)\alpha(x)dx + \lambda \int_0^\infty P_0(z, x)dx + \lambda P_{0K}z^K \quad (4.22)$$

$$P_{31}(z, x, 0) = \int_0^\infty P_{41}(z, x, y)\theta(y)dy \quad (4.23)$$

$$P_{41}(z, x, 0) = \mu P_1(z, x). \quad (4.24)$$

On multiplie les équations (4.4), (4.6), (4.8), (4.11), (4.13) et (4.15) par  $z^n$  et en sommant pour  $n \geq K-1$  on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_2(z, x) = -(\lambda(1-z) + \mu + \beta_2(x))P_2(z, x) + \int_0^\infty P_{32}(z, x, y)\gamma(y)dy \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{32}(z, x, y) = -(\lambda(1-z) + \gamma(y))P_{32}(z, x, y) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{42}(z, x, y) = -(\lambda(1-z) + \theta(y))P_{42}(z, x, y) \quad (4.27)$$

$$P_2(z, 0) = \gamma z^{-1} \int_0^\infty P_0(z, x)dx + \gamma P_{0K}z^{K-1} \quad (4.28)$$

$$P_{32}(z, x, 0) = \int_0^\infty P_{42}(z, x, y)\theta(y)dy \quad (4.29)$$

$$P_{42}(z, x, 0) = \mu P_2(z, x). \quad (4.30)$$

La solution de chacune des équations suivantes (4.17), (4.20), (4.21), (4.26) et (4.27) est donnée par :

$$P_0(z, x) = P_0(z, 0)(1 - A(x))e^{-(\lambda+\gamma)x} \quad (4.31)$$

$$P_{31}(z, x, y) = P_{31}(z, x, 0)(1 - C(y))e^{-\lambda(1-z)y} \quad (4.32)$$

$$P_{41}(z, x, y) = P_{41}(z, x, 0)(1 - D(y))e^{-\lambda(1-z)y} \quad (4.33)$$

$$P_{32}(z, x, y) = P_{32}(z, x, 0)(1 - C(y))e^{-\lambda(1-z)y} \quad (4.34)$$

$$P_{42}(z, x, y) = P_{42}(z, x, 0)(1 - D(y))e^{-\lambda(1-z)y}. \quad (4.35)$$

En utilisant l'équation (4.33) dans l'équation (4.23) et en combinant avec l'équation (4.24) on obtient.

$$P_{31}(z, x, 0) = \mu P_1(z, x) L_D(\lambda(1-z)). \quad (4.36)$$

Remplaçant l'équation (4.35) dans l'équation (4.29) et à l'aide de l'équation (4.30) on obtient.

$$P_{32}(z, x, 0) = \mu P_2(z, x) L_D(\lambda(1-z)). \quad (4.37)$$

En utilisant les équations (4.32) et (4.36), l'équation (4.19) peut s'écrire comme suit.

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)(1 - B_1(x))e^{-G(\lambda(1-z))x}. \quad (4.38)$$

En utilisant les équations (4.34) et (4.37), l'équation (4.25) peut s'écrire comme suit.

$$P_2(z, x) = P_2(z, 0)(1 - B_2(x))e^{-G(\lambda(1-z))x}. \quad (4.39)$$

Combinant les équations (4.38), (4.39) et (4.18) on trouve.

$$P_0(z, 0) = P_1(z, 0)k_1(z) + zP_2(z, 0)k_2(z) - (\lambda + \gamma)P_{0K}z^K. \quad (4.40)$$

Remplaçant l'équation (4.31) dans l'équation (4.22) on obtient.

$$P_1(z, 0) = z^{-1}P_0(z, 0)L_A(\lambda + \gamma) + \lambda P_0(z, 0)\frac{1 - L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda + \gamma} + \lambda P_{0K}z^K. \quad (4.41)$$

Remplaçant l'équation (4.31) dans (4.28) on obtient.

$$P_2(z, 0) = \gamma z^{-1}P_0(z, 0)\frac{1 - L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda + \gamma} + \gamma P_{0K}z^{K-1}. \quad (4.42)$$

Combinant les équations (4.41), (4.42) et (4.40) on obtient.

$$P_0(z, 0) = \frac{(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - k_1(z)) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^{K+1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}}. \quad (4.43)$$

Combinant les équations (4.43),(4.42) et(4.41) on trouve.

$$P_1(z, 0) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \quad (4.44)$$

$$P_2(z, 0) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(k_1(z) - z)\gamma P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}}. \quad (4.45)$$

On remarque que toutes les probabilités du système s'écrivent en fonction de  $P_{0K}$ .

Pour le calcul de  $P_{0K}$ , nous utilisons l'équation de normalisation

$$\begin{aligned} P_{0K} + \int_0^\infty P_0(1, x)dx + \int_0^\infty P_1(1, x)dx + \int_0^\infty P_2(1, x)dx \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{31}(1, x, y)dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{32}(1, x, y)dxdy \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{41}(1, x, y)dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{42}(1, x, y)dxdy = 1 \end{aligned}$$

On trouve :

$$P_{0K} = 1 - \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))(\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1))}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))} \quad (4.46)$$

où, le taux d'utilisation du système  $\rho$  est donné par :

$$\rho = \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))(\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1))}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))} \quad (4.47)$$

Où  $k_i^{(1)}(1)$ ,  $i=1,2$  sont définis par la 1<sup>er</sup> dérivé de  $k_i(x)$  appliqué pour  $x = 1$ .

$$k_i^{(1)}(1) = \lambda(1 + \mu\gamma_1 + \mu\varphi_1)\beta_{i1}$$

Ainsi  $\rho < 1$  est la condition d'ergodicité du système étudié. □

**Théorème 4.4.2.** *Sous la condition de stabilité du système, les fonctions génératrices partielles des distributions de l'état du serveur et de taille d'orbite sont données par*

$$P_0(z) = \frac{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda(1 - k_1(z)) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^{K+1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}}$$

$$P_1(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \frac{1 - k_1(z)}{G(\lambda(1 - z))}.$$

$$P_2(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(k_1(z) - z)\gamma P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \frac{1 - k_2(z)}{G(\lambda(1 - z))}.$$

$$P_{31}(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \mu \frac{1 - k_1(z)}{G(\lambda(1 - z))} \frac{1 - L_C(\lambda(1 - z))}{\lambda(1 - z)} L_D(\lambda(1 - z)).$$

$$P_{32}(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(k_1(z) - z)\gamma P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \mu \frac{1 - k_2(z)}{G(\lambda(1 - z))} \frac{1 - L_C(\lambda(1 - z))}{\lambda(1 - z)} L_D(\lambda(1 - z)).$$

$$P_{41}(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \mu \frac{1 - k_1(z)}{G(\lambda(1 - z))} \frac{1 - L_D(\lambda(1 - z))}{\lambda(1 - z)}.$$

$$P_{42}(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(k_1(z) - z)\gamma P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)\}z - (\lambda + \gamma)\{z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)\}} \\ \times \mu \frac{1 - k_2(z)}{G(\lambda(1 - z))} \frac{1 - L_D(\lambda(1 - z))}{\lambda(1 - z)}.$$

*Démonstration.* En utilisant les résultats du théorème 4.4.1 et la définition de la fonction génératrice partielle pour chaque état du serveur on obtient les résultats

On a

$$P_0(z) = \int_0^\infty P_0(z, x) dx \quad (4.48)$$

d'après le théorème 4.4.1,

$$P_0(z, x) = P_0(z, 0)(1 - A(x)) \exp(-(\lambda + \gamma)x)$$

et

$$\int_0^{\infty} (1 - A(x))e^{-(\lambda+\gamma)x} dx = \frac{1 - L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda + \gamma}$$

De l'équation (4.48) on a la première fonction génératrice

$$P_0(z) = P_0(z, 0) \frac{1 - L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda + \gamma}$$

L'expression de  $P_0(z, 0)$  est donnée dans l'équation 4.43

Le reste des fonctions génératrices sont obtenues de la même manière en appliquant les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \int_0^{\infty} P_1(z, x) dx, & P_2(z) &= \int_0^{\infty} P_2(z, x) dx, \\ P_{31}(z) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_{31}(z, x, y) dx dy, & P_{32}(z) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_{32}(z, x, y) dx dy, \\ P_{41}(z) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_{41}(z, x, y) dx dy \text{ and } & P_{42}(z) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_{42}(z, x, y) dx dy. \end{aligned}$$

□

Les fonctions génératrices du nombre de clients transitaires et du nombre de clients en orbite et dans le système sont données dans le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4.1.** *Sous la condition de stabilité  $\rho < 1$  on a*

1. *La fonction génératrice du nombre de clients transitaires en orbite est :*

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ &\times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

2. *La fonction génératrice du nombre de clients en orbite est :*

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\{\lambda z(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))k_1(z)\}z^{K-1}}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ &\times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

3. *La fonction génératrice du nombre clients transit dans le système est donnée par :*

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{[\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))]k_1(z)}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ &\times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

4. La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \frac{k_1(z)\{\lambda(1-z) + \gamma(1-k_2(z))\}z^K}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ &\quad \times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

*Démonstration.* A présent, il est possible de calculer les fonctions génératrices du nombre de clients transit et le nombre de clients en orbite.

On note :  $N_T$ ,  $N$  le nombre de clients transit et le nombre de clients en orbite en régime stationnaire respectivement.

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \sum_{n \geq 0} P(N_T = n)z^n = \sum_{n \geq 0} P(N = n + K)z^n \\ &= P_{0K} + z^{-K}P_0(z) + \sum_{i=1}^2 z^{-(K-i+1)}\{P_i(z) + P_{3i}(z) + P_{4i}(z)\} \\ &= \frac{\lambda(1-z) + \gamma(1-k_2(z))}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ &\quad \times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{n \geq K-1} P(N = n)z^n \\ &= P_{0K}z^K + P_0(z) + \sum_{i=1}^2 \{P_i(z) + P_{3i}(z) + P_{4i}(z)\} \\ &= \frac{\{\lambda z(1-z) + \gamma(1-k_2(z))k_1(z)\}z^{K-1}}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ &\quad \times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned} \tag{4.50}$$

ainsi que les fonctions génératrices du nombre de clients transit et le nombre de clients dans le système.

On note  $L_T$  le nombre de clients transit dans le système et  $L$  le nombre de clients dans le

système.

$$\begin{aligned}
 \Psi(z) &= \sum_{n \geq 0} P(L_T = n)z^n = \sum_{n \geq 0} P(L = n + K)z^n \\
 &= k_1(z)\Omega(z) \\
 &= \frac{[\lambda(1-z) + \gamma(1-k_2(z))]k_1(z)}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\
 &\times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \tag{4.51}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \pi(z) &= \sum_{n \geq K} P(L = n)z^n \\
 &= z^K \Psi(z) \\
 &= \frac{k_1(z)\{\lambda(1-z) + \gamma(1-k_2(z))\}z^K}{[1 - L_A(\lambda + \gamma)][\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\
 &\times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

□

## 4.5 Mesures de performance

L'objectif de cette section est de déterminer les caractéristiques du modèle étudié. Les corollaires suivants donnent certaines mesures de performance en régime stationnaire.

**Corollaire 4.5.1.** – Nombre moyen de clients transit dans l'orbite

$$\begin{aligned}
 E(N_T) &= \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))[\gamma k_2^{(2)}(1)(\lambda - \lambda k_1^{(1)}(1)) + \lambda k_1^{(2)}(1)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]^2 P_{0K}} \\
 &+ \frac{\lambda(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]P_{0K}}
 \end{aligned}$$

– Nombre moyen de clients transit dans le système

$$\begin{aligned}
 E[L_T] &= \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))[\gamma k_2^{(2)}(1)(\lambda - \lambda k_1^{(1)}(1)) + \lambda k_1^{(2)}(1)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]^2 P_{0K}} \\
 &+ \frac{\lambda(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]P_{0K}} + k_1^{(1)}(1).
 \end{aligned}$$

– Nombre moyen de clients dans l'orbite

$$E[N] = \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))[\gamma k_2^{(2)}(1)(\lambda - \lambda k_1^{(1)}(1)) + \lambda k_1^{(2)}(1)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]^2 P_{0K}} \\ + \frac{\lambda(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]P_{0K}} + \frac{\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)k_1^{(1)}(1)}{\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)} + K - 1$$

– Nombre moyen de clients dans le système

$$E(L) = \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))[\gamma k_2^{(2)}(1)(\lambda - \lambda k_1^{(1)}(1)) + \lambda k_1^{(2)}(1)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]^2 P_{0K}} \\ + \frac{\lambda(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]P_{0K}} + k_1^{(1)}(1) + K$$

*Démonstration.* La démonstration de ce corollaire est basée sur quelques manipulations algébriques et l'application de la règle de l'Hopital plusieurs fois. Cependant, en dérivant l'expression (4.49) au point  $z = 1$ , on obtient la formule du nombre moyen de clients transit en orbite. En effet, soient :

$$\Gamma(z) = \lambda(1 - z)$$

$$\Lambda(z) = \gamma(1 - k_2(z))$$

$$\Delta(z) = (1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]$$

De plus

$$\Gamma'(z) = -\lambda$$

$$\Gamma''(z) = 0$$

$$\Lambda'(z) = -\gamma k_2^{(1)}(z)$$

$$\Lambda''(z) = -\gamma k_2^{(2)}(z)$$

$$\Delta'(z) = (1 - L_A(\lambda + \gamma))[(\lambda k_1^{(1)}(z) + \gamma k_2^{(1)}(z))z + \lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[1 - L_A(\lambda + \gamma)k_1^{(1)}(z)]$$

$$\Delta''(z) = (1 - L_A(\lambda + \gamma))[(\lambda k_1^{(2)}(z) + \gamma k_2^{(2)}(z))z + 2(\lambda k_1^{(1)}(z) + \gamma k_2^{(1)}(z))] + (\lambda + \gamma)k_1^{(2)}(z)L_A(\lambda + \gamma)$$

On remplace par  $z = 1$  dans les expressions précédentes, on obtient :

$$\Gamma(1) = 0, \Gamma'(1) = -\lambda, \Gamma''(1) = 0.$$

$$\Lambda(1) = 0, \Lambda'(1) = -\gamma k_2^{(1)}(1), \Lambda''(1) = -\gamma k_2^{(2)}(1)$$

$$\Delta(1) = 0, \Delta'(1) = (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))k_1^{(1)}(1) + (1 - L_A(\lambda + \gamma))\gamma k_2^{(1)}(1) - (\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)$$

$$\Delta''(1) = (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))k_1^{(2)}(1) + (1 - L_A(\lambda + \gamma))[2\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma(k_2^{(2)}(1) + 2k_2^{(1)}(1))]$$

Alors l'équation (4.49) devient

$$\Omega(z) = \frac{\Gamma(z) + \Lambda(z)}{\Delta(z)} \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K}$$

et

$$\Omega'(z) = \frac{(\Gamma'(z) + \Lambda'(z))\Delta(z) - (\Gamma(z) + \Lambda(z))\Delta'(z)}{\Delta^2(z)} \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K}$$

Au point  $z = 1$ , on trouve  $\Omega'(z) = 0/0$  qui est une forme indéterminée. Pour cela en utilisant la règle de l'Hôpital, on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega'(z) &= \frac{(\Gamma''(z) + \Lambda''(z))\Delta(z) - (\Gamma'(z) + \Lambda'(z))\Delta''(z)}{2\Delta(z)\Delta'(z)} \\ &\quad \times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

On utilise la règle de l'Hôpital une deuxième fois, on aura

$$\begin{aligned} \Omega'(z) &= \left\{ \frac{(\Gamma'''(z) + \Lambda'''(z))\Delta(z) + (\Gamma''(z) + \Lambda''(z))\Delta'(z)}{2[\Delta'(z)\Delta'(z) + \Delta(z)\Delta''(z)]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[(\Gamma'(z) + \Lambda'(z))\Delta''(z) + (\Gamma(z) + \Lambda(z))\Delta'''(z)]}{2[\Delta'(z)\Delta'(z) + \Delta(z)\Delta''(z)]} \right\} \\ &\quad \times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

et en remplaçant  $z$  par 1 on trouve

$$\begin{aligned} \Omega'(1) &= \frac{(\Gamma''(1) + \Lambda''(1))\Delta'(1) - (\Gamma'(1) + \Lambda'(1))\Delta''(1)}{2\Delta^2(1)} \\ &\quad \times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

Finalement, après quelques manipulations algébriques, on obtient.

$$\begin{aligned} \Omega'(1) &= \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))[\gamma k_2^{(2)}(1)(\lambda - \lambda k_1^{(1)}(1)) + \lambda k_1^{(2)}(1)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]^2 P_{0K}} \\ &\quad + \frac{\lambda(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)] P_{0K}} \end{aligned}$$

D'où le résultat recherché.

On a aussi

$$E[L_T] = \lim_{z \rightarrow 1} \Psi'(z), \quad E[N] = \lim_{z \rightarrow 1} \Phi'(z), \quad E[L] = \lim_{z \rightarrow 1} \pi'(z)$$

Pour obtenir les autres résultats, il suffit de suivre les mêmes étapes que précédemment tout en considérant les relations entre les fonctions génératrices tel que :

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= k_1(z)\Omega(z) \\ \pi(z) &= z^K \Psi(z) = z^K k_1(z)\Omega(z).\end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.5.2.** 1. Le temps moyen d'attente d'un client transit dans l'orbite est donné par

$$\begin{aligned}W_{T_q} &= \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))[\gamma k_2^{(2)}(1)(1 - k_1^{(1)}(1)) + k_1^{(2)}(1)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]^2 P_{0K}} \\ &+ \frac{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]P_{0K}}\end{aligned}$$

2. Le temps moyen d'attente d'un client transit dans le système est donné par

$$\begin{aligned}W_{T_s} &= \frac{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))[\gamma k_2^{(2)}(1)(1 - k_1^{(1)}(1)) + k_1^{(2)}(1)(\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1))]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]^2 P_{0K}} \\ &+ \frac{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \gamma k_2^{(1)}(1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)]P_{0K}} + \frac{k_1^{(1)}(1)}{\lambda}\end{aligned}$$

*Démonstration.* En appliquant la formule de LITTLE et les résultats du corollaire 4.5.1 on obtient

$$W_{T_q} = \frac{E[N_T]}{\lambda} \quad \text{et} \quad W_{T_s} = \frac{E[L_T]}{\lambda}$$

□

**Corollaire 4.5.3.** – Le serveur est libre avec la probabilité

$$Q_0 = \frac{1 - \lambda(1 + \mu\varphi_1 + \mu\gamma_1)\beta_{11}}{1 + \gamma(1 + \mu\varphi_1 + \mu\gamma_1)\beta_{21}}.$$

– Le serveur est occupé avec la probabilité

$$Q_1 = \frac{\lambda\beta_{11} + \gamma\beta_{21}}{1 + \gamma(1 + \mu\varphi_1 + \mu\gamma_1)\beta_{21}}.$$

– Le serveur est en réparation avec la probabilité

$$Q_2 = \frac{\mu\gamma_1(\lambda\beta_{11} + \gamma\beta_{21})}{1 + \gamma(1 + \mu\varphi_1 + \mu\gamma_1)\beta_{21}}.$$

– Le serveur est en retard avec la probabilité

$$Q_5 = \frac{\mu\varphi_1(\lambda\beta_{11} + \gamma\beta_{21})}{1 + \gamma(1 + \mu\varphi_1 + \mu\gamma_1)\beta_{21}}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le théorème 4.4.2, après calculs nous obtenons.

$$Q_0 = P_{0K} + P_0(1), \quad Q_1 = P_1(1) + P_2(1), \quad Q_2 = P_{31}(1) + P_{32}(1), \quad Q_5 = P_{41}(1) + P_{42}(1)$$

□

## 4.6 Cas particulier

Nous donnons dans cette section des cas particuliers.

### 4.6.1 Premier cas : absence du délai

Dans ce cas, le serveur est sujet à des pannes actives et réparations immédiates,  $P_{41} = P_{42} = 0$ .

La condition de stabilité est donnée comme suit :

$$\frac{(1 + \mu\gamma_1)(\lambda\beta_{11} + \gamma\beta_{21})}{1 + \gamma(1 + \mu\gamma_1)\beta_{21}} < \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma)}$$

Ce résultat est obtenu en remplaçant l'équation suivante :

$$k_i^{(1)}(1) = \lambda(1 + \mu\gamma_1)\beta_{i1}, \quad \text{for } i = 1, 2 \tag{4.53}$$

dans l'expression de  $\rho$  donné par l'équation (4.47).

en remplaçant (4.53) et l'équation suivante :

$$k_i^{(2)}(1) = \mu\lambda^2\gamma_2\beta_{i1} + \lambda^2(1 + \mu\gamma_1)^2\beta_{i2}, \quad \text{for } i = 1, 2 \tag{4.54}$$

dans les corollaires (4.5.1), (4.5.2) et (4.5.3), nous obtenons les mesures de performance du système  $M/G/1$  avec un serveur non fiable, réparation immédiate et deux types de clients.

### 4.6.2 Deuxième cas : Absence de pannes

Dans ce cas, le serveur est fiable ( $\mu = 0$ ), ce qui donne  $P_{3i} = P_{4i} = 0$  pour  $i=1,2$ . Et nous avons

$$k_i(z) = L_{B_i}(\lambda(1-z))$$

$$k_i^{(1)}(1) = \lambda\beta_{i1} \quad (4.55)$$

$$k_i^{(2)}(1) = \lambda^2\beta_{i2} \quad (4.56)$$

Dans ce cas la condition de stabilité est obtenue en remplaçant l'équation (4.55) dans l'expression de  $\rho$  donnée dans (4.47) et on obtient  $\rho = (\rho_1 + \rho_2) \frac{\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma)}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}$

où  $\rho_1 = k_1^{(1)}(1)$  et  $\rho_2 = (1 - k_1^{(1)}(1)) \frac{\gamma k_2^{(1)}(1)}{\lambda + \gamma k_2^{(1)}(1)}$

Donc la condition de stabilité est la suivante :

$$\rho_1 + \rho_2 < \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma)}$$

En utilisant (4.55) et (4.56) dans les expressions de  $W_{T_q}$  et  $W_{T_s}$  données dans le corollaire 3, nous obtenons le temps moyen d'attente d'un client transitaire en orbite et dans le système respectivement. Pour les autres mesures de performance voir l'article de Moreno (2004)[89].

### 4.6.3 Troisième cas : Absence de clients récurrents et absence de pannes

Dans ce cas, nous avons un système de files d'attente *M/G/1* avec rappels ( $\gamma = 0, \mu = 0$ ).

La condition de stabilité est donnée par :

$$\lambda\beta_{11} < 1$$

Si nous supposons dans ce cas que la distribution de service est exponentielle de paramètre  $\beta$ , alors le système devient une file *M/M/1* avec rappel, et la condition de stabilité est donnée par :

$$\frac{\lambda}{\beta} < 1$$

## 4.7 Décomposition stochastique

Dans cette section, on donne le resultat important concernant la décomposition stochastique de la distribution du nombre de clients dans le système en un point arbitraire en régime stationnaire.

**Théorème 4.7.1.** *Si  $\rho < 1$ , alors la fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par :*

$$\pi(z) = \pi_0(z)\chi(z) \quad (4.57)$$

où  $\pi_0(z)$  est la fonction génératrice de la distribution du nombre de clients dans le système  $M/G/1$  classique à serveur non fiable.

$$\pi_0(z) = \frac{(1 - k_1^{(1)}(1))k_1(z)(1 - z)}{k_1(z) - z}$$

et  $\chi(z)$  est la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système étant donné que le serveur est en rappel ou occupé par un client récurrent.

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \frac{z^K P_{0K} + P_0(z) + zP_2(z) + zP_{32}(z) + zP_{42}(z)}{P_{0K} + P_0(1) + P_2(1) + P_{32}(1) + P_{42}(1)} \\ &= \frac{(k_1(z) - z)[\lambda(1 - z) + \gamma(1 - k_2(z))]z^K}{(1 - z)\{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda k_1(z) + \gamma k_2(z)]z - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]\}(1 - k_1^{(1)}(1))} \\ &\quad \times \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)}{\lambda} P_{0K} \end{aligned}$$

## 4.8 Résultats Numérique

Dans cette section, l'effet des paramètres du système sur les principales mesures de performance est représenté graphiquement dans les figures 3.1- 3.6. La distribution de probabilité des durées de service des clients transit et clients récurrents ainsi que la durée de réparation sont supposées d'une loi exponentielle avec une moyenne  $\beta_{11} = 2$ ,  $\beta_{21} = 1$ ,  $\gamma_1$  respectivement. Nous supposons également que le temps des inter-arrivée des clients transit et la durée de délai sont régis par une distribution d'Erlang avec des paramètres  $(l_1 = 2, \nu = 1)$  et  $(l, \eta)$  respectivement. Pour le taux d'arrivée poissonien des clients transit et le taux de rappel des clients récurrents on les a fixé à  $\lambda = 0.09$ ,  $\gamma = 0.5$ .

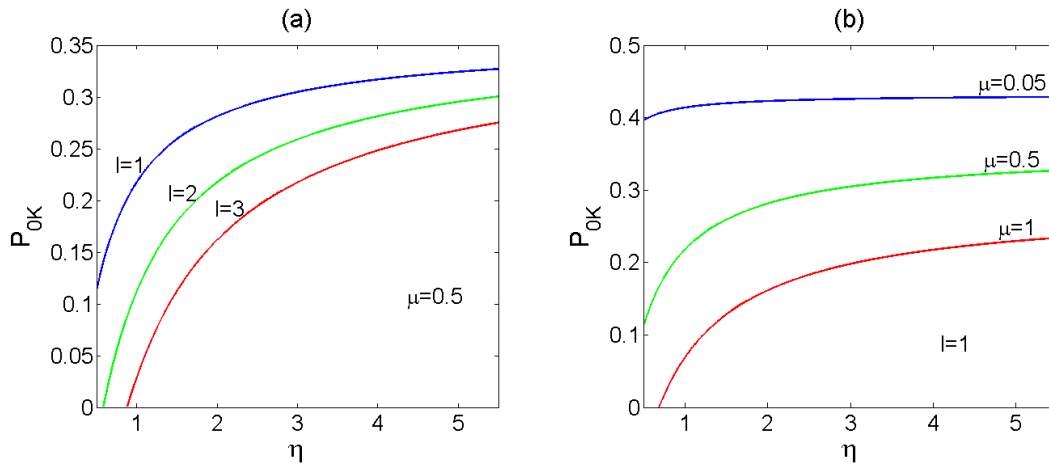


FIGURE 4.1 – Variation de  $P_{0K}$  en fonction de  $\eta$ . (a) L'effet du paramètre  $l$  et (b) L'effet du paramètre  $\mu$

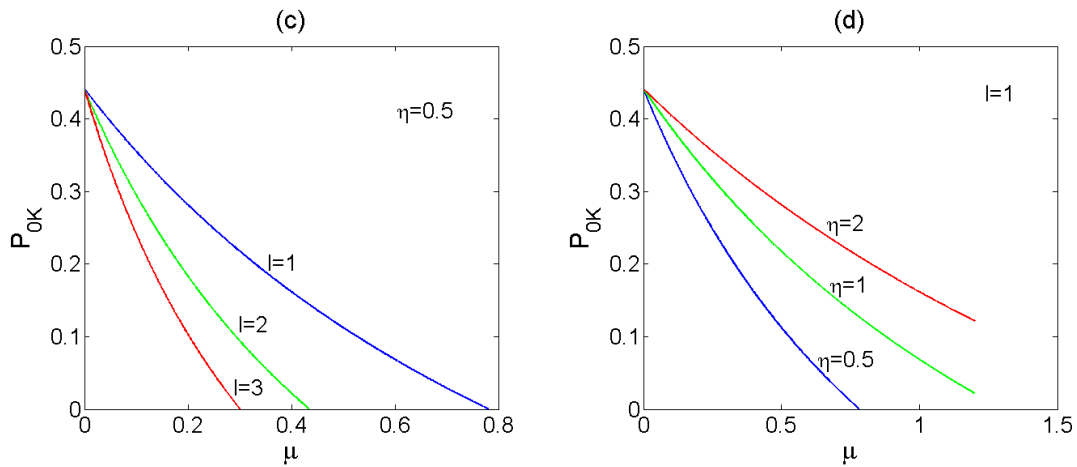


FIGURE 4.2 – Variation de  $P_{0K}$  en fonction de  $\mu$ . (c) L'effet du paramètre  $l$  et (d) L'effet du paramètre  $\eta$ .

En effet, les valeurs des paramètres du système sont toutes choisies de manière à satisfaire l'état d'équilibre (état stationnaire).

Dans les Figures (4.1)-(4.4) nous avons montré l'influence des deux paramètres de la loi d'Erlang ( $l, \eta$ ) et le taux de panne  $\mu$  sur  $P_{0K}$  et  $E(N_T)$

D'après la Figure (4.1). La probabilité  $P_{0K}$  croît lorsque la durée moyenne de délai d'attente diminue (lorsque  $\eta$  augmente et  $l$  diminue).

De la Figure (4.2) on déduit que la probabilité  $P_{0K}$  décroît lorsque le taux de panne augmente.

La figure (4.3) montre que le nombre moyen de clients transitoires en orbite augmente à chaque fois que le taux de panne augmente.

La figure (4.4) montre que le nombre moyen de clients transitoires en orbite diminue à chaque fois que la durée moyenne de délai diminue (lorsque  $\eta$  augmente et  $l$  diminue).

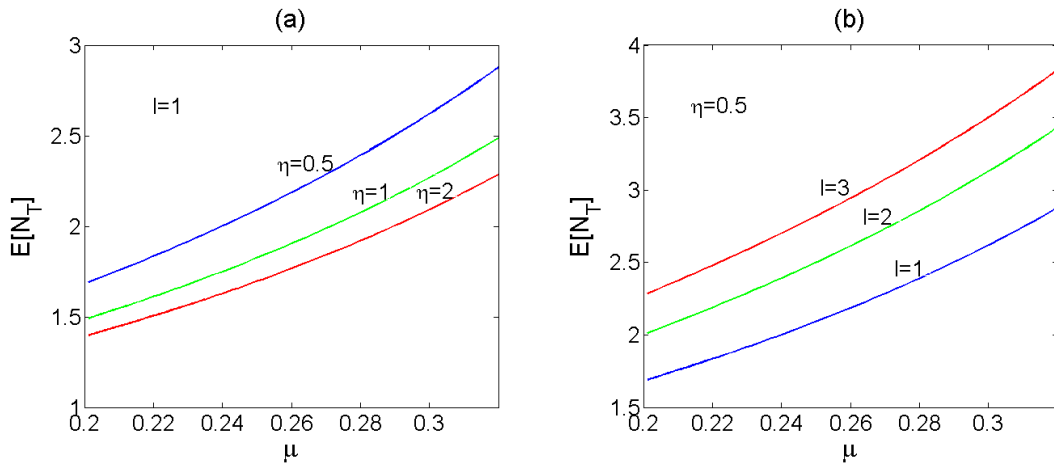


FIGURE 4.3 – Variation de  $E[N_T]$  en fonction de  $\mu$ . (a) L'effet du paramètre  $\eta$  et (b) L'effet du paramètre  $l$ .

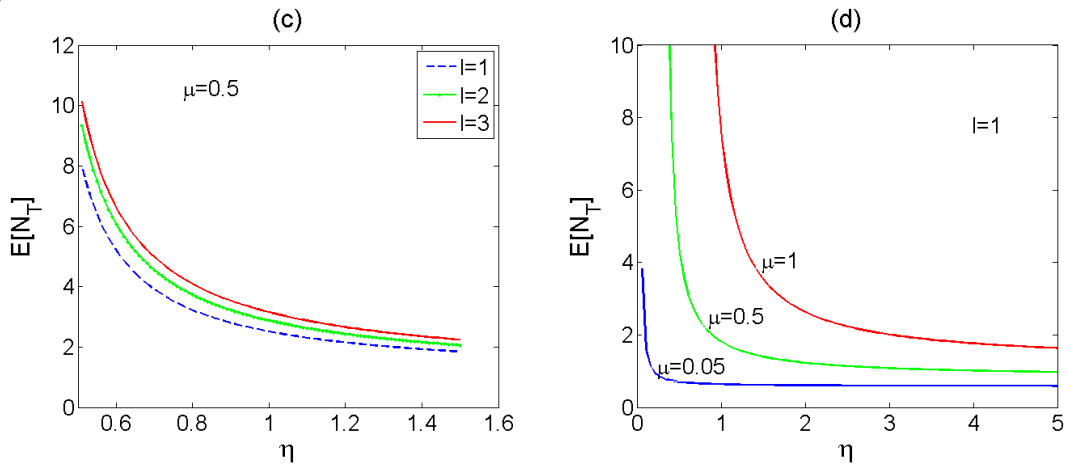


FIGURE 4.4 – Variation de  $E[N_T]$  en fonction de  $\eta$ . (c) L'effet du paramètre  $l$  et (d) L'effet du paramètre  $\mu$ .

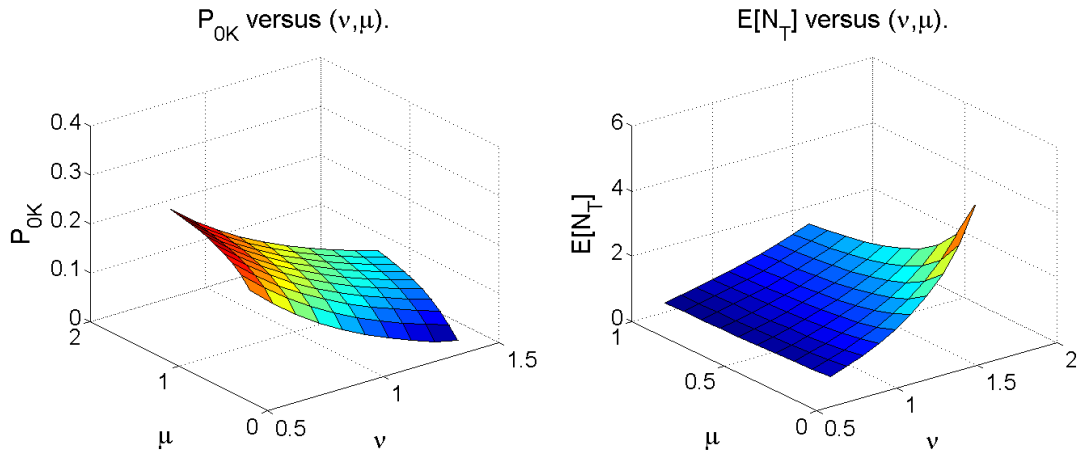


FIGURE 4.5 – Variation de  $P_{0K}$  et  $E[N_T]$  en fonction des paramètres  $(\nu, \mu)$

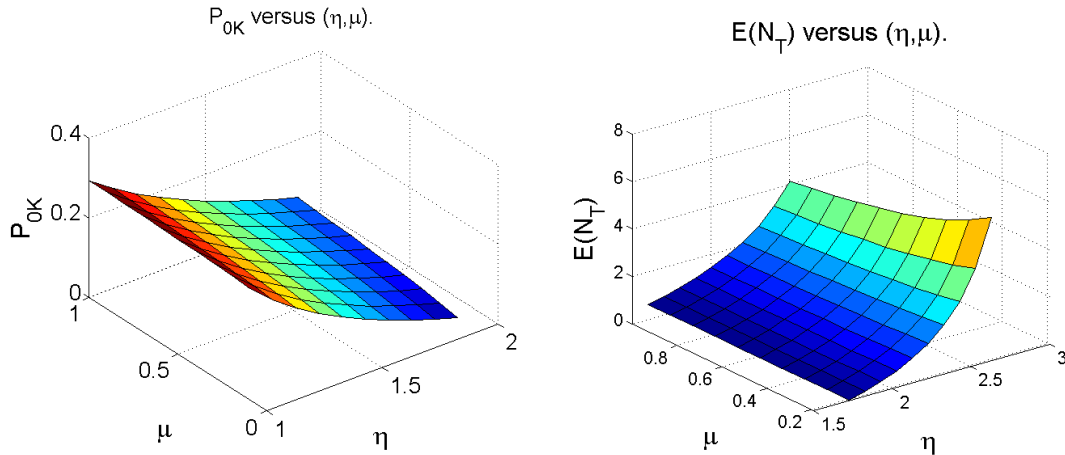


FIGURE 4.6 – Variation de  $P_{0K}$  et  $E[N_T]$  en fonction des paramètres  $(\eta, \mu)$

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le modèle  $M/G/1$  avec rappels de loi générale, réparation retardée et deux types de clients. En utilisant la méthode de la variable supplémentaire nous avons obtenu des formules explicites et exploitables. Nous avons montré l'influence des paramètres sur les mesures de performance dans des graphes illustratifs.

# 5

## $M^{[X]}/G/1$ avec rappels, clients récurrents, réparations retardées et pertes

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	70
5.2	Description du modèle . . . . .	70
5.3	Analyse stationnaire du système . . . . .	73
5.4	Solution du système d'équations . . . . .	75
5.5	Mesures de performance . . . . .	80
5.6	Mesures de fiabilité . . . . .	82
5.7	Conclusion . . . . .	82

---

## 5.1 Introduction

La première étude des systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées groupées a été proposé par Falin [39], qui a introduit une nouvelle discipline du serveur qui est la suivante : si un client ou un groupe de clients arrive et trouve le serveur occupé, en pannes, alors il quitte la zone de service et se joint à un groupe de clients en orbite suivant une discipline FCFS et répète sa tentative après un temps aléatoire jusqu'à ce qu'il parvienne à la zone de service. Ce modèle peut être utilisé pour évaluer la performance des réseaux locaux à bus en utilisant le protocole CSMA.

Dans ce chapitre, nous utilisons cette discipline pour étudier le nouveau modèle  $M^{[X]}/G/1$  à serveur non fiable.

## 5.2 Description du modèle

Nous considérons un nouveau modèle de files d'attente avec rappels, perte des clients, réparations retardées. Les hypothèses suivantes décrivent le modèle mathématique.

1. La capacité de l'orbite est infinie.
2. La seule file d'attente avec rappels à deux types de clients :
  - Clients ordinaires (Transit).
  - Clients permanents (Récurent)

### 3. Processus des clients ordinaires (transit)

Les clients transit arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux  $\lambda > 0$ . Les clients arrivent par groupe de taille aléatoire  $X$  de distribution  $P(X = n) = g_n$ ,  $n \geq 1$  de fonction génératrice  $g(z)$  et les deux premiers moments  $g_{[1]}$ ,  $g_{[2]}$ .

Le service est assuré par un seul serveur. A l'arrivée d'un groupe de transit, si le serveur est occupé, le groupe entre en orbite avec une probabilité  $p$ , sinon il quitte le système sans être servi avec une probabilité  $1 - p$ . Par contre si le serveur est libre, l'un des clients sera pris en charge par le serveur et le reste du groupe entre en orbite suivant une discipline *FCFS*. On suppose que seul le client transit à la tête de l'orbite est autorisé à accéder au serveur. Les temps successifs d'inter rappels de tous les clients transitaires sont régis par une fonction de répartition  $A(x)$ , de fonction de densité  $a(x)$  et de transformée de Laplace Stieltjes  $L_A(s)$ .

-Les temps de service des clients transit sont indépendants et identiquement distribués de distribution  $B_1(x)$ , de densité  $b_1(x)$ , de transformée de Laplace Stieltjes  $L_{B_1}(s)$  et possédant les deux premiers moments  $\beta_{11}, \beta_{12}$ .

#### 4. Processus des clients permanents

Il y a un nombre fixe  $K$  ( $K \geq 1$ ) de clients permanents. Après avoir reçu le service, les clients retournent immédiatement à l'orbite conformément à une discipline FCFS. Nous supposons également que seul le client permanent en tête de file de l'orbite est autorisé à accéder au service. les temps successifs entre les tentatives de rappels de tout client permanent sont de loi exponentielle de moyenne fixe  $\gamma^{-1}$  (rappel constant).

-Les durées de service successives des clients permanents sont indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition  $B_2(x)$ , de densité  $b_2(x)$ , de transformée de Laplace Stieltjes  $L_{B_2}(s)$  et possédant les deux premiers moments  $\beta_{21}, \beta_{22}$ .

-Le serveur est sujet à des pannes actives. Il tombe en panne après un temps aléatoire de loi exponentielle de moyenne  $\frac{1}{\mu}$ .

Après panne, le serveur n'est pas envoyé immédiatement en réparation. le serveur attend un temps aléatoire (appelé délai) pour être réparé. Ce temps aléatoire est de loi générale de fonction de répartition  $D(x)$ , de densité  $\psi(x)$ , de transformée de Laplace Stieltjes  $L_D(s)$  et les deux premiers moments  $\varphi_1, \varphi_2$ . Les durées des délais sont indépendantes et identiquement distribuées.

-Après l'achèvement du délai, la réparation commence immédiatement. Le temps requis pour sa réparation est une variable aléatoire de distribution  $C(x)$ , de densité  $c(x)$ , de transformée de Laplace Stieltjes  $L_C(s)$  et les deux premiers moments  $\gamma_1, \gamma_2$ . Les clients dont le service est interrompu restent au service. Une fois la réparation achevée le serveur reprend le service du client. Le serveur n'est pas autorisé à accepter de nouveaux clients jusqu'à ce que le client en service quitte le système.

Le serveur est dit bloqué s'il est occupé ou en réparation ou en délai. Les durées de réparations sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

**Chapitre 5 :  $M^{[X]}/G/1$  avec rappels, clients récurrents, réparations retardées et pertes**

---

- Les temps successifs des inter-rappels, de service, de réparation, de délai sont supposés être mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit par le processus de Markov suivant.

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{(S(t), S^*(t), N(t), \xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \xi_4(t)), t \geq 0\}$$

où

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé par un client transit à l'instant } t; \\ 2, & \text{si le serveur est occupé par un client récurrent à l'instant } t; \\ 3, & \text{si le serveur est en réparation à l'instant } t; \\ 4, & \text{si le serveur est en délai à l'instant } t. \end{cases}$$

$$S^*(t) \begin{cases} 1, & \text{si le serveur est occupé par un client transit à l'instant } t; \\ 2, & \text{si le serveur est occupé par un client récurrent à l'instant } t. \end{cases}$$

$N(t)$  représente le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ .

Si  $S(t) = 0$  et  $N(t) > K$ , alors  $\xi_0(t)$  représente le temps de rappel écoulé (the elapsed retrial time) du client transitaire.

Si  $S(t) = 1$ , nous définissons  $\xi_1(t)$  comme une durée écoulée du service des clients transitaires.

Si  $S(t) = 2$ ,  $\xi_2(t)$  représente la durée écoulée du service des clients récurrents.

Si  $S(t) = 3$ , nous définissons  $\xi_3(t)$  la durée écoulée de réparation.

Si  $S(t) = 4$ ,  $\xi_4(t)$  est la durée écoulée du délai.

Les taux conditionnels de complétion (the conditional completion)(achèvement) pour les rappels des clients transitaires, pour le service des clients transitaires, pour le service des récurrents, pour les temps de réparation et pour le délai sont respectivement :

$$\alpha(x) = \frac{a(x)}{1-A(x)}, \beta_1(x) = \frac{b_1(x)}{1-B_1(x)}, \beta_2(x) = \frac{b_2(x)}{1-B_2(x)}, \gamma(x) = \frac{c(x)}{1-C(x)} \text{ et } \theta(x) = \frac{\psi(x)}{1-D(x)} .$$

### 5.3 Analyse stationnaire du système

Nous définissons les probabilités limites suivantes.

$$P_{0K} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = K, S(t) = 0\}.$$

$$P_{0,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, S(t) = 0, x < \xi_0(t) \leq x + dx\} \quad n > K.$$

$$P_{1,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, S(t) = 1, S^*(t) = 1, x < \xi_1(t) \leq x + dx\} \quad n \geq K.$$

$$P_{2,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, S(t) = 2, S^*(t) = 2, x < \xi_2(t) \leq x + dx\} \quad n \geq K - 1.$$

$$P_{3,1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, S(t) = 3, S^*(t) = 1, x < \xi_1(t) \leq x + dx, y < \xi_3(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K,$$

$$P_{3,2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, S(t) = 3, S^*(t) = 2, x < \xi_2(t) \leq x + dx, y < \xi_3(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K - 1,$$

$$P_{4,1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, S(t) = 4, S^*(t) = 1, x < \xi_1(t) \leq x + dx, y < \xi_4(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K,$$

$$P_{4,2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{N(t) = n, S(t) = 4, S^*(t) = 2, x < \xi_2(t) \leq x + dx, y < \xi_4(t) \leq y + dy\} \\ n \geq K - 1,$$

Les équations d'état à l'équilibre s'écrivent

$$(\lambda + \gamma)P_{0,K} = \int_0^\infty \beta_1(x)P_{1,K}(x) + \int_0^\infty \beta_2(x)P_{2,K-1}(x)dx, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial P_{0,n}(x)}{\partial x} + (\lambda + \gamma + \alpha(x))P_{0,n}(x) = 0, \quad n \geq K + 1, \quad (5.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \mu + \beta_1(x)\right)P_{1,n}(x) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} g_j P_{1,n-j}(x) \\ + \int_0^\infty \gamma(y)P_{3,1,n}(x, y)dy, \quad n \geq K, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \mu + \beta_2(x)\right)P_{2,n}(x) &= \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} g_j P_{2,n-j}(x) \\ &+ \int_0^\infty \gamma(y)P_{3,2,n}(x,y)dy, \quad n \geq K-1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \theta(y)\right)P_{4,1,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} g_j P_{4,1,n-j}(x,y), \quad n \geq K, \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \theta(y)\right)P_{4,2,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} g_j P_{4,2,n-j}(x,y), \quad n \geq K-1, \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(x)\right)P_{3,1,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} g_j P_{3,1,n-j}(x,y), \quad n \geq K, \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(x)\right)P_{3,2,n}(x,y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} g_j P_{3,2,n-j}(x,y), \quad n \geq K-1, \quad (5.8)$$

$$P_{0,n}(0) = \int_0^\infty P_{1,n}(x)\beta_1(x)dx + \int_0^\infty P_{2,n-1}(x)\beta_2(x)dx, \quad n > K, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} P_{1,n}(0) &= \lambda \sum_{j=1}^{n-K} (1 - \delta_{n,K})g_j \int_0^\infty P_{0,n+1-j}(x)dx + \int_0^\infty \alpha(x)P_{0,n+1}(x)dx \\ &+ \lambda g_{n+1-K}P_{0,K}, \quad n \geq K, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$P_{2,n}(0) = \gamma(1 - \delta_{n,K-1}) \int_0^\infty P_{0,n+1}(x)dx + \gamma\delta_{n,K-1}P_{0,K}, \quad n \geq K-1, \quad (5.11)$$

$$P_{4,1,n}(x,0) = \mu P_{1,n}(x), \quad n \geq K, \quad (5.12)$$

$$P_{4,2,n}(x,0) = \mu P_{2,n}(x), \quad n \geq K-1, \quad (5.13)$$

$$P_{3,1,n}(x,0) = \int_0^\infty P_{4,1,n}(x,y)\theta(y)dy, \quad n \geq K, \quad (5.14)$$

$$P_{3,2,n}(x,0) = \int_0^\infty P_{4,2,n}(x,y)\theta(y)dy, \quad n \geq K-1, \quad (5.15)$$

et l'équation de normalisation

$$\begin{aligned} P_{0,K} + \sum_{n>K} \int_0^\infty P_{0,n}(x)dx + \sum_{n \geq K} \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^\infty P_{i,n+i-1}(x)dx \right. \\ \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{3,i,n+i-1}(x,y)dx dy + \int_0^\infty \int_0^\infty P_{4,i,n+i-1}(x,y)dx dy \right\} = 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

## 5.4 Solution du système d'équations

Le théorème suivant décrit la distribution des états du système en équilibre en terme de fonctions génératrices.

**Théorème 5.4.1.** *Sous la condition de stabilité nous avons :*

$$P_0(z, x) = \frac{(\lambda + \gamma)[\lambda(z - g(z)k_1(z)) + \gamma z(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ \times (1 - A(x))e^{-(\lambda + \gamma)x},$$

$$P_1(z, x) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ \times (1 - B_1(x))e^{-G(\lambda p(1 - g(z)))x},$$

$$P_2(z, x) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[k_1(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ \times (1 - B_2(x))e^{-G(\lambda p(1 - g(z)))x},$$

$$P_{3,1}(z, x, y) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ \times \mu(1 - B_1(x))(1 - C(y))L_D(\lambda p(1 - g(z)))e^{-(G(\lambda p(1 - g(z)))x + \lambda p(1 - g(z))y)},$$

$$P_{3,2}(z, x, y) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[k_1(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ \times \mu(1 - B_2(x))(1 - C(y))L_D(\lambda p(1 - g(z)))e^{-(G(\lambda p(1 - g(z)))x + \lambda p(1 - g(z))y)},$$

$$P_{4,1}(z, x, y) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ \times \mu(1 - B_1(x))(1 - D(y))e^{-(G(\lambda p(1 - g(z)))x + \lambda p(1 - g(z))y)},$$

$$P_{4,2}(z, x, y) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[k_1(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))H(z)[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)[z - L_A(\lambda + \gamma)k_1(z)]} \\ \times \mu(1 - B_2(x))(1 - D(y))e^{-(G(\lambda p(1 - g(z)))x + \lambda p(1 - g(z))y)},$$

$$P_{0K} = \frac{\lambda p g_1 [(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))(1 - \rho_1) - (\lambda g_1 + \gamma \rho_2)(1 - L_A(\lambda + \gamma))]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda g_1(1 - p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_1]}$$

où

$$G(z) = z + \mu - \mu L_D(z) L_C(z)$$

$$k_i(z) = L_{B_i}(G(\lambda p(1 - g(z)))) \quad i = 1, 2$$

*Démonstration.* Pour résoudre le système d'équations ((5.1)-(5.15)), nous définissons les fonctions génératrices partielles suivantes pour  $|z| \leq 1$  :

$$P_0(z, x) = \sum_{n > K} P_{0,n}(x) z^n; \quad P_1(z, x) = \sum_{n \geq K} P_{1,n}(x) z^n; \quad P_2(z, x) = \sum_{n \geq K-1} P_{2,n}(x) z^n;$$

$$P_{4,1}(z, x, y) = \sum_{n \geq K} P_{4,1,n}(x, y) z^n; \quad P_{4,2}(z, x, y) = \sum_{n \geq K-1} P_{4,2,n}(x, y) z^n;$$

$$P_{3,1}(z, x, y) = \sum_{n \geq K} P_{3,1,n}(x, y) z^n; \quad P_{3,2}(z, x, y) = \sum_{n \geq K-1} P_{3,2,n}(x, y) z^n; \quad g(z) = \sum_{n \geq 1} g_n z^n$$

On multiplie les équations (5.2) et (5.9) par  $z^n$  et on somme sur  $n$  de  $K + 1$  à l'infini, et en utilisant l'équation 5.1 on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_0(z, x) = -(\lambda + \gamma + \alpha(x)) P_0(z, x) \quad (5.17)$$

$$P_0(z, 0) = \int_0^\infty P_1(z, x) \beta_1(x) dx + r \int_0^\infty P_2(z, x) \beta_2(x) dx - z^K (\lambda + \gamma) P_{0K} \quad (5.18)$$

On multiplie les équations (5.3), (5.5), (5.7), (5.10), (5.12) et (5.14) par  $z^n$  et on somme pour  $n \geq K$  on aura :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_1(z, x) = -(\lambda p(1 - g(z)) + \mu + \beta_1(x)) P_1(z, x) + \int_0^\infty \gamma(y) P_{3,1}(z, x, y) dy \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{4,1}(z, x, y) = -(\lambda p(1 - g(z)) + \theta(y)) P_{4,1}(z, x, y) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{3,1}(z, x, y) = -(\lambda p(1 - g(z)) + \gamma(y)) P_{3,1}(z, x, y) \quad (5.21)$$

$$z P_1(z, 0) = \lambda g(z) \int_0^\infty P_0(z, x) dx + \int_0^\infty P_0(z, x) \alpha(x) dx + \lambda g(z) P_{0K} z^K \quad (5.22)$$

$$P_{4,1}(z, x, 0) = \mu P_1(z, x) \quad (5.23)$$

$$P_{3,1}(z, x, 0) = \int_0^\infty P_{4,1}(z, x, y) \theta(y) dy \quad (5.24)$$

## Chapitre 5 : $M^{[X]}/G/1$ avec rappels, clients récurrents, réparations retardées et pertes

---

On multiplie les équations (5.4),(5.6),(5.8),(5.11),(5.13)and (5.15) par  $z^n$  et en sommant pour  $n \geq K - 1$  on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_2(z, x) = -(\lambda p(1 - g(z)) + \mu + \beta_2(x))P_2(z, x) + \int_0^\infty P_{3,2}(z, x, y)\gamma(y)dy \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{4,2}(z, x, y) = -(\lambda p(1 - g(z)) + \theta(y))P_{4,2}(z, x, y) \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{3,2}(z, x, y) = -(\lambda p(1 - g(z)) + \gamma(y))P_{3,2}(z, x, y) \quad (5.27)$$

$$zP_2(z, 0) = \gamma \int_0^\infty P_0(z, x)dx + \gamma P_{0K}z^K \quad (5.28)$$

$$P_{4,2}(z, x, 0) = \mu P_2(z, x) \quad (5.29)$$

$$P_{3,2}(z, x, 0) = \int_0^\infty P_{4,2}(z, x, y)\theta(y)dy \quad (5.30)$$

La solution de chaqu'une des équations suivantes (5.17),(5.20),(5.21),(5.26) et (5.27) sont respectivement données par :

$$P_0(z, x) = P_0(z, 0)(1 - A(x))e^{-(\lambda+\gamma)x} \quad (5.31)$$

$$P_{4,1}(z, x, y) = P_{4,1}(z, x, 0)(1 - D(y))e^{-\lambda p(1-g(z))y} \quad (5.32)$$

$$P_{3,1}(z, x, y) = P_{3,1}(z, x, 0)(1 - C(y))e^{-\lambda p(1-g(z))y} \quad (5.33)$$

$$P_{4,2}(z, x, y) = P_{4,2}(z, x, 0)(1 - D(y))e^{-\lambda p(1-g(z))y} \quad (5.34)$$

$$P_{3,2}(z, x, y) = P_{3,2}(z, x, 0)(1 - C(y))e^{-\lambda p(1-g(z))y} \quad (5.35)$$

En utilisant l'équation (5.32), (5.24) et (5.23) on obtient.

$$P_{3,1}(z, x, 0) = \mu P_1(z, x)L_D(\lambda p(1 - g(z))) \quad (5.36)$$

l'équation (5.34), (5.30) et (5.29)on obtient.

$$P_{3,2}(z, x, 0) = \mu P_2(z, x)L_D(\lambda p(1 - g(z))) \quad (5.37)$$

En utilisant les équations (5.33) et (5.36), l'équation (5.19) peut s'écrire comme suit.

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)(1 - B_1(x))e^{-G(\lambda p(1-g(z)))x} \quad (5.38)$$

En utilisant les équations(5.35) et (5.37), l'équation (5.25) peut s'écrire comme suit.

$$P_2(z, x) = P_2(z, 0)(1 - B_2(x))e^{-G(\lambda p(1-g(z)))x} \quad (5.39)$$

Combinant les équations (5.38),(5.39) et (5.18) on trouve

$$P_0(z, 0) = P_1(z, 0)k_1(z) + zP_2(z, 0)k_2(z) - z^K(\lambda + \gamma)P_{0K} \quad (5.40)$$

En utilisant l'équation (5.31), (5.22), (5.28) et (5.40) on obtient

$$P_0(z, 0) = \frac{(\lambda + \gamma)\{\lambda(z - g(z)k_1(z)) + \gamma z(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \quad (5.41)$$

En utilisant (5.31),(5.41), (5.22)et (5.28) on trouve respectivement

$$P_1(z, 0) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \quad (5.42)$$

$$P_2(z, 0) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{k_1(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \quad (5.43)$$

l'équation (5.16) nous donne  $P_{0K}$  qui peut s'écrire sous la forme

$$P_{0K} = 1 - \rho$$

où

$$\rho = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda g_1\rho_1 + \gamma\rho_2] + \lambda p g_1(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda\rho_1 + \gamma\rho_2 - \lambda(1 - g_1)]}{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)[\lambda g_1(1 - p)\rho_1 + \gamma\rho_2 + \lambda p g_1]} \quad (5.44)$$

D'où la condition de stabilité est  $\rho < 1$  □

**Remarque 5.4.1.** .

- Si  $p = 1$  et  $g_{[1]} = 1$  ; on retrouve les résultats de notre système.
- Si  $p = 1, g_{[1]} = 1$  et  $\mu = 0$  ; on retrouve les résultats de P.Moreno (2004)[89].

**Théorème 5.4.2.** *Sous la condition de stabilité du système, les fonctions génératrices partielles des distributions de probabilité de l'état du serveur et de la taille de l'orbite sont données par*

$$P_0(z) = \frac{(1 - L_A(\lambda + \gamma))\{\lambda(z - g(z)k_1(z)) + \gamma z(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \quad (5.45)$$

$$P_1(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \cdot \frac{1 - k_1(z)}{G(\lambda p(1 - g(z)))} \quad (5.46)$$

$$P_2(z) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{k_1(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + \gamma zk_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \cdot \frac{1 - k_2(z)}{G(\lambda p(1 - g(z)))} \quad (5.47)$$

$$P_{3,1}(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + \gamma zk_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \cdot \mu L_D(\lambda p(1 - g(z))) \frac{1 - L_C(\lambda p(1 - g(z)))}{\lambda p(1 - g(z))} \frac{1 - k_1(z)}{G(\lambda p(1 - g(z)))} \quad (5.48)$$

$$P_{3,2}(z) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{k_1(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + \gamma zk_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \cdot \mu L_D(\lambda p(1 - g(z))) \frac{1 - L_C(\lambda p(1 - g(z)))}{\lambda p(1 - g(z))} \frac{1 - k_2(z)}{G(\lambda p(1 - g(z)))} \quad (5.49)$$

$$P_{4,1}(z) = \frac{(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda(1 - g(z)) + \gamma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + \gamma zk_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \cdot \mu \frac{1 - k_1(z)}{G(\lambda p(1 - g(z)))} \frac{1 - L_D(\lambda p(1 - g(z)))}{\lambda p(1 - g(z))} \quad (5.50)$$

$$P_{4,2}(z) = \frac{\gamma(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{k_1(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - L_A(\lambda + \gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + \gamma zk_2(z)] - (\lambda + \gamma)\{z - k_1(z)L_A(\lambda + \gamma)\}} \cdot \mu \frac{1 - k_2(z)}{G(\lambda p(1 - g(z)))} \frac{1 - L_D(\lambda p(1 - g(z)))}{\lambda p(1 - g(z))} \quad (5.51)$$

*Démonstration.* Ce théorème est obtenu en utilisant les résultats du théorème 5.4.1 et la définition des fonctions génératrices suivantes :

$$P_0(z) = \int_0^\infty P_0(z, x)dx, \quad P_1(z) = \int_0^\infty P_1(z, x)dx, \quad P_2(z) = \int_0^\infty P_2(z, x)dx$$

$$P_{3,1}(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{3,1}(z, x, y)dxdy, \quad P_{3,2}(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{3,2}(z, x, y)dxdy$$

$$P_{4,1}(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{4,1}(z, x, y)dxdy, \quad P_{4,2}(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{4,2}(z, x, y)dxdy$$

□

## 5.5 Mesures de performance

L'objectif de cette section est de déterminer les caractéristiques du modèle étudié.

**Proposition 5.5.1.** *Soit  $N_T, L_T, N, L$ , le nombre de clients transitoires dans l'orbite, nombre de clients transitoires dans le système, nombre de clients dans l'orbite et nombre de clients dans le système respectivement, alors : la fonction génératrice de  $N_T, L_T, N, L$ , est donné par*

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{\lambda(1-g(z))[(1-z) + (z-k_1(z))(1-p)] + \gamma(1-z)[1-k_2(z)]}{(1-L_A(\lambda+\gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda+\gamma)(z-L_A(\lambda+\gamma)k_1(z))} \\ &\quad \times \frac{(\lambda+\gamma)L_A(\lambda+\gamma)}{\lambda p(1-g(z))} P_{0K} \\ \Psi(z) &= \frac{\lambda(1-g(z))[k_1(z)(1-z) + (z-k_1(z))(1-p)] + \gamma(1-z)k_1(z)[1-k_2(z)]}{(1-L_A(\lambda+\gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda+\gamma)(z-L_A(\lambda+\gamma)k_1(z))} \\ &\quad \times \frac{(\lambda+\gamma)L_A(\lambda+\gamma)}{\lambda p(1-g(z))} P_{0K} \\ \Phi(z) &= \frac{\lambda z(1-g(z))[(1-z) + (z-k_1(z))(1-p)] + \gamma(1-z)(1-k_2(z))k_1(z)}{(1-L_A(\lambda+\gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda+\gamma)(z-L_A(\lambda+\gamma)k_1(z))} \\ &\quad \times \frac{(\lambda+\gamma)L_A(\lambda+\gamma)z^{K-1}}{\lambda p(1-g(z))} P_{0K} \\ \Upsilon(z) &= \frac{\lambda(1-g(z))[k_1(z)(1-z) + (z-k_1(z))(1-p)] + \gamma(1-z)k_1(z)[1-k_2(z)]}{(1-L_A(\lambda+\gamma))[\lambda g(z)k_1(z) + z\gamma k_2(z)] - (\lambda+\gamma)(z-L_A(\lambda+\gamma)k_1(z))} \\ &\quad \times \frac{(\lambda+\gamma)L_A(\lambda+\gamma)z^K}{\lambda p(1-g(z))} P_{0K} \end{aligned} \tag{5.52}$$

*Démonstration.*

$$\Omega(z) = E(z^{N_T}) = P_{0K} + z^{-K} \left\{ P_0(z) + \sum_{i=1}^2 z^{i-1} [P_i(z) + P_{4,i}(z) + P_{3,i}(z)] \right\}.$$

$$\Psi(z) = E(z^{L_T}) = P_{0K} + z^{-K} \left\{ P_0(z) + z \sum_{i=1}^2 [P_i(z) + P_{4,i}(z) + P_{3,i}(z)] \right\}.$$

$$\Phi(z) = P_{0K}z^K + P_0(z) + \sum_{i=1}^2 \{P_i(z) + P_{4,i}(z) + P_{3,i}(z)\}.$$

$$\Upsilon(z) = z^K \Psi(z).$$

□

**Corollaire 5.5.1.**

*Le nombre moyen de clients transitaires dans l'orbite, Le nombre moyen de clients transitaires dans le système, Nombre moyen de clients dans l'orbite et le nombre moyen de clients dans la système sont respectivement donnés par*

$$E(N_T) = \frac{\lambda g_{[1]}^2 \rho_3 (1-p) - \gamma g_{[2]} \rho_2 + \gamma \rho_4 g_{[1]}}{2g_{[1]}(\lambda g_{[1]}(1-p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})} + \frac{(1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[2]} + \gamma \rho_4 + 2(\lambda g_{[1]}\rho_1 + \gamma \rho_2)) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3}{2\{(\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))(1 - \rho_1) - (\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2)(1 - L_A(\lambda + \gamma))\}} \quad (5.53)$$

$$E(L_T) = \frac{2k'_1(1)g_{[1]}(\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2) + g_{[1]}(\lambda g_{[1]}\rho_3(1-p) + \gamma \rho_4) - \gamma g_{[2]}\rho_2}{2g_{[1]}(\lambda g_{[1]}(1-p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})} + \frac{\lambda p g_{[1]}((1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[2]} + 2\lambda g_{[1]}\rho_1 + 2\gamma \rho_2 + \gamma \rho_4) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3)}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda g_{[1]}(1-p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})P_{0K}} \quad (5.54)$$

$$E(N) = (K - 1) + \frac{2g_{[1]}(\lambda p g_{[1]} + \gamma \rho_2 \rho_1) + \lambda g_{[1]}^2(1-p)(\rho_3 + 2\rho_1) - \gamma(g_{[2]}\rho_2 - g_{[1]}\rho_4)}{2g_{[1]}\{\lambda g_{[1]}(1-p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]}\}} + \frac{\lambda p g_{[1]}[(1 - L_A(\lambda + \gamma))(2\lambda g_{[1]}\rho_1 + 2\gamma \rho_2 + \lambda g_{[2]} + \gamma \rho_4) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3]}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)\{\lambda g_{[1]}(1-p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]}\}P_{0K}} \quad (5.55)$$

$$E(L) = K + \frac{2\rho_1 g_{[1]}(\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2) + g_{[1]}(\lambda g_{[1]}\rho_3(1-p) + \gamma \rho_4) - \gamma g_{[2]}\rho_2}{2g_{[1]}(\lambda g_{[1]}(1-p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})} + \frac{\lambda p g_{[1]}((1 - L_A(\lambda + \gamma))(\lambda g_{[2]} + 2\lambda g_{[1]}\rho_1 + 2\gamma \rho_2 + \gamma \rho_4) + (\lambda + \gamma L_A(\lambda + \gamma))\rho_3)}{2(\lambda + \gamma)L_A(\lambda + \gamma)(\lambda g_{[1]}(1-p)\rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]})P_{0K}} \quad (5.56)$$

*Démonstration.* On a

$$E[N_T] = \lim_{z \rightarrow 1} \Omega'(z), \quad E[L_T] = \lim_{z \rightarrow 1} \Psi'(z), \quad E[N] = \lim_{z \rightarrow 1} \Phi'(z), \quad E[L] = \lim_{z \rightarrow 1} \Upsilon'(z)$$

avec

$$\rho_1 = \lambda p g_{[1]} (1 + \mu \gamma_1 + \mu \phi_1) \beta_{11}$$

$$\rho_2 = \lambda p g_{[1]} (1 + \mu \gamma_1 + \mu \phi_1) \beta_{21}$$

$$\rho_3 = k_1''(1)$$

$$\rho_4 = k_2''(1)$$

□

## 5.6 Mesures de fiabilité

La disponibilité (availability) est définie comme une probabilité  $A_v$  et la fréquence d'échec  $F_f$  (failure frequency) du serveur sont respectivement donnés dans le théorème suivant

**Théorème 5.6.1.** *Si  $\rho < 1$*

$$A_v = \frac{\lambda p g_{[1]} [(1 - \rho_1)(1 + \gamma \beta_{21}) + (\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2) \beta_{11}]}{\lambda g_{[1]} (1 - p) \rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]}} \quad (5.57)$$

$$F_f = \frac{\mu \lambda p g_{[1]} [\gamma (1 - \rho_1) \beta_{21} + (\lambda g_{[1]} + \gamma \rho_2) \beta_{11}]}{\lambda g_{[1]} (1 - p) \rho_1 + \gamma \rho_2 + \lambda p g_{[1]}} \quad (5.58)$$

*Démonstration.* Il suffit de remplacer (5.45), (5.46) et (5.47) dans les équations suivantes pour obtenir les résultats.

$$A_v = P_{0K} + \sum_{i=0}^2 \int_0^{\infty} P_i(1, x) dx = P_{0K} + \lim_{z \rightarrow 1} [P_0(z) + P_1(z) + P_2(z)]$$

$$F_f = \mu \int_0^{\infty} P_1(1, x) dx + \mu \int_0^{\infty} P_2(1, x) dx$$

□

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé un modèle d'attente  $M^{[X]}/G/1$  avec rappels, réparation retardée et deux types de clients.

## Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons effectué une étude analytique des performances du système  $M/G/1$  avec rappels à serveur non fiable, deux types de clients et délai.

Nous avons obtenu les caractéristiques essentielles, telles que : la condition de stabilité, le nombre moyen de clients dans le système, le nombre moyen de clients en orbite, le temps moyen d'attente des clients dans le système ainsi que la décomposition stochastique du système. De plus nous avons montré l'influence de certains paramètres sur quelques mesures de performance par des graphes illustratifs.

Nous envisageons d'analyser d'autres aspects des systèmes d'attente avec rappels à service non fiable et deux types de clients, en ajoutant d'autres paramètres tel que : la vacance de serveur, la perte des clients, des arrivées par groupe.

# Annexe

## Transformée de Laplace

lorsque la variable  $X$  de fonction de répartition  $F(x)$  est du type continu, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité  $f(x)$

$$F^*(s) = L_X(s) = E(e^{sX}) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x))e^{sx} dx = \frac{[1 - F^*(s)]}{s}$$

# Bibliographie

- [1] A.Aissani (1988), On the  $M/G/1/1$  queueing system with repeated orders and unreliable server. *Journal of Technology*, 6,98–123.
- [2] A.Aissani (1993), Unreliable queueing with repeated orders, *Microelectronics and Reliability*, 33, 2093-2106.
- [3] A. Aissani (1994), A survey on retrial queueing models. *Actes des Journées Statistiques Appliquées*. USTHB. Alger, 1-11.
- [4] A.Aissani (1994), A retrial queue with redundancy and unreliable server, *Queueing systems* 17,431-449.
- [5] A.Aissani, J.R.Artalejo (1998), On the single server retrial queue subject to breakdowns, *Queueing Systems* 30, 309-321.
- [6] A. Aissani (2000), An  $M^X/G/1$  retrial queue with exhaustive vacations, *Journal of Statistics and Management Systems*, 3(3), 269-286,
- [7] A.Aissani (2003), An  $M^X/G/1$  retrial queue with unreliable server and vacations, *Proceedings of the 17<sup>th</sup> European simulation Multiconference*.
- [8] A.Aissani (2008), Optional control of an  $M/G/1$  retrial queue with vacation, *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, vol 17(4), 487–502.
- [9] A. S.Alfa (2002), *Discrete Time Queues and Matrix-analytic Methods*, *Top*, 10(2), pp. 147–210.
- [10] B.Almási, J.Roszik, J.Sztrik (2005), Homogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs, *Mathematical and Computer Modelling* 42, 673–682.
- [11] V.Anisimov (2008), *Switching Processes in Queueing Models*. GlaxoSmithKline, UK, ISBN : 9781848210455.

- [12] J.R.Artalejo, G.I.Falin (1994), Stochastic decomposition for retrial queues, TOP 2 329-342.
- [13] J.R.Artalejo (1997), Analysis of  $M/G/1$  queue with constant repeated attempts and server vacations, Computers and Operations Research, vol.24(6), 493–504.
- [14] J.R.Artalejo, A.Gómez – Corral (1998), Analysis of stochastic clearing system with repeated attempts, Commun. Statist–Stochastic. Model, 14(3), 623–645.
- [15] J.R.Artalejo, I.Atencia (2004), On the single server Retrial queue with Batch Arrivals, Ind.J.Statist, Vol 66, Part1, p140–158.
- [16] J.R.Artalejo, A.Gómez – Corral (2008). Retrial Queueing Systems. A Computational Approach, Springer.
- [17] I.Atencia, P.Moreno (2005), A single retrial queue with general retrial times and Bernoulli schedule, Applied Mathematics and Computation 162, 855–880.
- [18] I.Atencia, I.Fortes, P.Moreno and S.Sanchez (2006), An  $M/G/1$  retrial queue with active breakdowns and Bernoulli schedule in the server, Information and Management Sciences 17(1), 1–17.
- [19] I.Atencia, G.B.Allende, P.Moreno (2008), An  $M^X/G/1$  retrial queue with server breakdowns and constant rate of repeated attempts, Annals of Operations Research 157, 225–243.
- [20] I.Atencia, I.Fortes, S.Nishimura, S.Sánchez (2010), A discrete–time retrial queueing system with recurrent customers, Comp. Oper. Res 37, 1167–1173.
- [21] M.Baruah, K.C.Madan, T.Eldabi (2013), A two stage Batch arrival queue with rene-ging during vacation and breakdown periods, Americ. J. Oper. Res, 3, 570–580.
- [22] A.Beja, A.Teller (1975), Relevant policies for Markovian queueing systems with many types of service, Management Science, 21 (9), pp. 1049-1054.
- [23] U.N.Bhat (2008), An Introduction to Queueing Theory : Modeling and analysis in application (Statistics for Industry and Technology). Birkhauser, Boston.
- [24] P.Bocharov, R.Manzo, A.V.Pechinkin (2005), Analysis of a two- phase queueing sys-tem with a Markov arrival process and losses, Journal of Mathematical Sciences, 131 (3), pp. 5606-5613.
- [25] A.Borovkov (1984), Asymptotic Methods in Queueing Theory, Wiley, New York.

## *Bibliographie*

---

- [26] O.J.Boxma, J.W.Cohen (1991), The  $M/G/1$  queue with permanent customers, IEEE Journal on Selected Areas in Communications ,9,179–184.
- [27] B.D.Bunday (1996), An introduction to queueing theory, Oxford, England : Oxford University Press.
- [28] J.Cao (1994),Reliability analysis of  $M/G/1$  queueing system with repairable service station of reliability series structure, Microelectronics and Reliability, 34(4),pp.721-725.7.
- [29] W.Chan, R.Bartoszynski, D.Pearl (1993), Queues with breakdowns and customer discouragement, Probab.Mathemat.Statist, Vol 14. Fasc1,p 77–87.
- [30] B.D.Choi, K.K.Park (1990), The  $M/G/1$  retrial queue with Bernoulli Schedule, Queueing Systems, 7(2),pp.219-228.
- [31] G.Choudhury, L.Tadj (2009), An  $M/G/1$  queue with two phases of service subject to the server breakdown and delayed repair, Appl. Mathemat. Model 33, 2699–2709.
- [32] G.Choudhury, L.Tadj, K.Deka (2010), A batch arrival retrial queueing system with two phases of service and service interruption, Computers and Mathematics with Applications 59, 437–450.
- [33] G.Choudhury, J–C.Ke (2012), A batch arrival retrial queue with general retrial times under Bernoulli vacation schedule for unreliable server and delaying repair, Appl. Mathemat. Model 36, 255–269.
- [34] W.J.Cohen (1957), Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, Philips Telecommunication Review, vol 18,49–100.
- [35] N.V.Djellab (2002), On the  $M/G/1$  retrial queue subjected to breakdowns, RAIRO Operations Research 36,299–310.
- [36] J.N.Daigle (2005), Queueing theory with applications to packet telecommunication, New York : Springer Verlag.
- [37] B.T.Doshi (1986), Queueing systems with vacations  $\dot{U}$  a survey, Queueing Systems, 1, pp. 29-66.
- [38] G.I.Falin, J.G.C.Templeton (1997), Retrial queues, Chapman and Hall, London.
- [39] G.I.Falin (1976). Aggregate arrival of customers in one line systems with repeated calls. UkrainianMathematical Journal 28, 337-340.

## *Bibliographie*

---

- [40] K.Farahmand (1990), Single line queue with repeated demands, *Queueing Systems*, 6,223–228.
- [41] K.Farahmand (1996), Single line queue with recurrent repeated demands, *Queueing Systems* 22, 425–435.
- [42] K.Farahmand, N.H.Smith (1996), Retrial queues with recurrent demand option, *J. Appl. Mathemat. Stoc. Anal* 9, N 2, 221–228.
- [43] S.Fuhrmann, R.B.Cooper (1985). Stochastic decomposition in the  $M/G/1$  queue with generalized vacations. *Operations Research*, 33(5) :1117-1129.
- [44] G.Fayolle (1986), A simple Telephone Exchange with Delayed Feedbacks, *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*.
- [45] P.D.Finch (1958), The effect of the size of the waiting room on a simple queue, *Journal of the Royal Statistical society-Series B*, 20(1),pp.182-186.
- [46] G.S.Fishman (1974), Estimation in Multi-server Queueing Simulations. *Operation Research*, 22,pp.72-78.
- [47] K.Forest, C.Mani, R.Richard, G.P. Fernando (1975), Open closed and mixed net work of queues with different classes of customers, *JACM*, 22(2),pp.248-260.
- [48] T.C.Fry, *Probability and its engineering uses*. Van Nostrand, New york.
- [49] H.R.S.Gail, L.Hantler, B.A.Taylor (1992), On preemptive Markovian queue with multiple servers and two priority classe, *Mathematics of Operations Research*, 17, pp.365-391.
- [50] N.Gharbi, M.Ioualalen (2006),GSPN analysis of retrial systems with servers breakdowns and repairs, *Applied Mathematics and Computation* 174, 1151–1168.
- [51] D.Gross, C.M.Harris (1998), *Fundamentals of queueing theory*. 3rd edn. New York : John Wiley Sons.
- [52] F.A.Haight ( 1958), Two queues In parallel, *Biometrika*, 45(3-4),pp.401-410.
- [53] S.Hur, S.J.Paik (1999), The effect of different arrival rates on the N- policy of  $M/G/1$  with server setup, *Applied Mathematical Modelling*, 23 (4). pp. 289-299.
- [54] M.J.Jacob, T.P.Madhusoodanan (1987), Transient Solution for a finite capacity  $M/Ga, b/1$  queueing system with vacations to the server, *Queueing Systems*, 2(4), pp.381-386.

- [55] M.Jain, C.Bhargava (2008), Bulk arrival retrial queue with unreliable server and priority subscribers, International Journal of Operations Research. Vol.5, No.4, 242–259.
- [56] M.Jain, A.Bhagat (2014), Unreliable bulk retrial queues with delayed repairs and modified vacation policy, J. Int. Eng. Int.
- [57] R.Kalyanaraman, M.Seenivasan (2011), A multi server retrial queue with breakdown and geometric loss, International Journal of computation cognition, vol,9. No.1, 44–48.
- [58] V.A.Kapyrin (1977), A study of stationary distribution of queueing system with recurring demands, Cybernetics 13.584–590
- [59] B.R.Kashyap, M.L.Chaudhry (1988), An Introduction to Queueing Theory. Ontario, Canada : A and A Publications.
- [60] J.C.Ke (2003),The analysis of a general input queue with N policy and exponential vacations, Queueing Systems, 45 (2), pp. 135-160.
- [61] J.Keilson, J.Cozzolino, H.Young (1968), A service system with unfilled requests repeated, Operation research, 16,1126–1137.
- [62] D.G.Kendall (1951),Some problems in the theory of queues, Journal of the Royal Statistical Society - Series B, 13 (2), pp. 151-185.
- [63] D.G.Kendall (1953), Stochastic processes occurring in theory of queue and their analysis by the method of imbedded Markov chain, Annals of mathematical statistics 24, 338–354.
- [64] T.Kernane, A.Aissani (2006), Stability of retrial queues with versatile retrial policy, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,Volume 2006, Article ID 54359, 16 pages [http ://dx.doi.org/10.1155/JAMSA/2006/54359](http://dx.doi.org/10.1155/JAMSA/2006/54359)
- [65] T.Kernane (2015), An  $M/G/1$  retrial queue with server breakdowns and general retrial times, DOI : 10.13140/RG.2.1.4159.9522.
- [66] C.Kim, V.I.Klimenok, D.S.Orlovsky (2007), The BMAP/PH/N retrial queue with markovian flow of breakdowns, European Journal of Operational Research. Vol 189, issue 3, 1057–1072.
- [67] B.K.Kim, D.H.Lee (2013), The  $M/G/1$  queue with disasters and working breakdowns, Appl. Math. Model.

## *Bibliographie*

---

- [68] L.Kleinrock (1961), Information Flow in Large Communication Nets, RLE Quarterly Progress Report, Massachusetts Institute of Technology.
- [69] H.Kobayashi (1987). Modelling and analysis ; An introduction to system performance evaluation methodology. The systems programming series, Addison wesley, Reading M A.
- [70] L.Kosten (1947). On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking. De Ingenieur (in Dutch), vol. 59, p 1-25.
- [71] V.G.Kulkarni, B.D.Choi (1990), Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs, Queueing systems, Vol.7, 191–208.
- [72] B.Krishna Kumar, S.Pavai Madheswari, A.Vijayakumar (2002), The  $M/G/1$  retrial queue with feedback and starting failures, Applied Mathematical Modelling 26, 1057–1075.
- [73] T.Lachemot, M.Ourbih-Tari, H.Saggou (2016), Performance measures of  $M/G/1$  retrial queues with recurrent customers, breakdowns and general delays, Communication in Statistics-Theory and Methods, DOI : 10.1080/03610926.2016.1171532.
- [74] E.D.Lazowska, J.Zahorjan, K.C.Sevcik (1986), Computer System Performance Evaluation Using Queueing Network Models, Annual Review of Computer Science, 1,pp.107-137.
- [75] E.D.Lazowska, J.Zahorjan, K.C.Sevcik (1996), Modeling of optimal load balancing strategy using queueing theory. Microprocessing and microprogramming 41(8-9),pp.555-570.
- [76] A.M.Lee (1966), Applied Queueing Theory. MacMillan, London.
- [77] Y.Levy, U.Yechiali (1975), Utilization of idle time in an  $M/G/1$  queueing system, Management Sciences, vol. 22, p. 202-211.
- [78] J.Li, J.Wang (2006), An  $M/G/1$  retrial queue with second multi-optional service feedback and unreliable server, Applied Mathematics, A Journal of chinese Universities, Series B 21 (3), 252–262.
- [79] J.D.C.Little (1961), A Proof of the Queueing Formula :  $L = AW$ , Operations REsearch, 9(3),383-387.
- [80] B.Lothar, B.Dieter (2005), An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods. Springer Verlag. ISBN : 1402036302.

## *Bibliographie*

---

- [81] K.C.Madan (1991), On a  $M^{[X]}/M^{[b]}/1$  queueing system with general vacation times', International Journal of Information and Management Sciences, 2 (1), pp. 51-60.
- [82] K.C.Madan (1994), An  $M/G/1$  queueing system with additional optional service and no waiting capacity, Microelectronics and Reliability, 34(3),pp.521-527.
- [83] K.C.Madan (2011), A Single Queue with Mutually Replacing  $m$  Servers, Journal of Mathematics Research, 3(1), pp. 3-8.
- [84] A.Maraghi, K.C.Madan, D. Dowman (2009), Batch arrival queueing system with random breakdowns and Bernoulli schedule server vacation having general vacation time distribution, Int. J. Inform. Manage . sci 20 ,55-70.
- [85] S.D.Mark (2010), Service Science. John Wiley Sons Inc.
- [86] S.S.Mishra, D.K.Yadav (2009), Cost and Profit Analysis of Markovian Queueing System with Two Priority Classes : A Computational Approach, World Academy of Science, Engineering and Technology, 57.
- [87] G.S.Mokaddis, S.A.Metwally et B.M.Zaki (2007), A feedback retrial queueing system with starting failures and single vacation, Tamkang Journal of Science and Engineering 10,183–192.
- [88] E.C.Molina (1927), Application of the Theory of Probability to telephones Trunkins Problems, B.S.T.J.,6,pp,461-494.
- [89] P.Moreno (2004), An  $M/G/1$  retrial queue with recurrent customers and general retrial times, Appe. Mathemat. Comp 159,651–666.
- [90] P.M.Morse (1958), Queues, Inventories and Maintenance, The analysis of operational systems with variable demand and supply. Wiley, New York.
- [91] R.Nelson (1995), Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory. New York : Springer-Verlag.
- [92] M.F.Neuts (1981), Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. Baltimore : John Hopkins University Press.
- [93] M.F.Neuts (1984), Matrix-analytic methods in queueing theory, European Journal of Operational Research, 15(1),pp 2-12.
- [94] M.F.Neuts (1989), Structured stochastic matrices of  $M/G/1$  type and their applications. New York etc. Marcel Dekker.

## *Bibliographie*

---

- [95] N.Oukid, A.Aissani (2009), Bounds on busy period for queues with breakdowns, *Advances and Applications in Statistics*, 11(2), 137–156.
- [96] V.Ramaswami (1990), A duality theorem for the matrix paradigms in queueing theory, *Stochastic Models*, 6(1), pp. 151-161.
- [97] J.Roszik, J.Sztrik (2004), The effect of server's breakdown on the performance of finite-source retrial queueing systems, 6<sup>th</sup>. C. Appl. Inform, Eger. Hungary. January 27–31.
- [98] N.Sherman, J.P.Kharoufeh (2006), An  $M/M/1$  retrial queue with unreliable server, *Operation Research Letters*, 34, 697–705.
- [99] E.Skinner (1967), A priority queueing system with server walking time, *Operations Research*, 15, 278–285.
- [100] S.L.Stephen (1983), *Computer Performance Modeling hand book*. Academic Press, New York.
- [101] S.Stidham (2002), Analysis design and control of queueing system, Technical Report, Department of Operations Research, University of North Carolina at Chapel Hill.
- [102] J.Szekli, B.Almasi, J.Roszik (2006), Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs, *Journal of Mathematical Sciences* 132(5), 677–685.
- [103] W.S.Yang, J.D.Kim, K.C.Chae (2002), Analysis of  $M/G/1$  Stochastic clearing systems, *Stoc. Anal. Appl*, Vol 20, N 5, p 1083–1100.
- [104] T.yang, H.Li (1994), The  $M/G/1$  retrial queue with the server subject to starting failures, *Queueing Systems*, 16,83-96.
- [105] T.Yang et J.G.C. Templeton (1987), A Survey on Retrial Queues. *Queueing Systems* 2, 201-233.
- [106] J.Walrand (1988), *An Introduction to Queueing Networks*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall.
- [107] J.Wang, J.Cao (2001), Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs, *Queueing System* 38,363–380.
- [108] H.White, L.S.Christie (1958), queueing with preemptive priorities or with breakdown, *Journal of the operations research society of America*,6, 79–95.

## *Bibliographie*

---

- [109] W. Whitt (1999), Decomposition Approximations for Time-Dependent Markovian Queueing Networks, *Operations Research Letters*, 24, pp. 97-103.
- [110] R.I.Wilkinson (1956), Theories for toll traffic engineering in the USA. *Bell systems Technical Journal*, vol. 35(2), p. 421-514.
- [111] X.Wu, P.Brill, M.Hlynka and J.Wang (2005), An  $M/G/1$  retrial queue with balking and retrial, *International Journal of Operational Research* 1, 30–51.
- [112] J.Wu, Z.Lian (2013), Analysis of the  $M_1, M_2/G/1$  G- queueing system with retrial customers, *Nonlinear Anal : Real World* , App1 14,365–382.