N° d'ordre : 07/2004-E/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
Et de la Recherche Scientifique

U.S.T.H.B
Service des Thèses
Bibliothèque Universitaire

UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Equations aux Dérivées Partielles

Par : MEDJDEN MOHAMED

Sujet :

PROPRIETES DE REGULARITE POUR LE PROBLEME DE NAVIER- STOKES ET ESTIMATIONS D'ENERGIE POUR CERTAINES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Soutenue le 25/09/2004, devant le jury composé de :

Mr BEBBOUCHI Rachid	**Professeur**	**USTHB**	**Président**
Mr TATAR Nasser-Eddine	**M.C**	**Université KFUPM**	**Directeur de Thèse**
Mr TENIOU Djamel Eddine	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**
Mr KESSI Arezki	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**
Mr KOUACHI Said	**Professeur**	**Khenchela**	**Examinateur**
Mr BETINA Kamel	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**
Mr MESLOUB Said	**M.C**	**Université de Tebessa**	**Examinateur**

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à monsieur

N. TATAR pour avoir dirigé cette thèse,

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements à monsieur T.Z. BOULMEZAOUD qui m'a chaleureusement accueilli dans son laboratoire, ses précieux conseils et ses aides multiformes m'ont permis de mener à bien une bonne partie de ce travail.

Que mon ami S. MESLOUB, trouve ici l'expression de toute ma gratitude et ma reconnaissance pour son aide toute particulière pour mener à bien l'autre partie de cette thèse.

Je tiens à remercier monsieur R.BEBBOUCHI pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Que messieurs D. TENIOU, A. KESSI, K. BETINA et S. KOUACHI, qui ont accepté d'examiner cette thèse et faire partie de ce jury, reçoivent ici mes vifs remerciements.

TABLE DES MATIERES

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne
Faculté de Mathématiques
Département d'Analyse

PROPRIETES DE REGULARITE POUR LE PROBLEME DE NAVIER-STOKES ET ESTIMATIONS D'ENERGIE POUR CERTAINES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES*

Présenté par

Mohamed MEDJDEN**

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur trois thèmes différents s'inscrivant dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

Le premier thème abordé dans cette thèse consiste en l'utilisation de la méthode des inégalités de l'énergie (appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle) pour l'étude de l'existence et l'unicité de la solution pour deux problèmes aux limites. Le premier est un problème mixte pour une équation parabolique d'ordre supérieur avec des conditions intégrales. Le second est un problème aux limites pour une équation du quatrième ordre avec le bilaplacien.

Le deuxième thème est consacré à l'étude du comportement asymptotique de la solution de l'équation des ondes avec un terme non local en temps et une dissipation interne. On distinguera trois possibilités pour la dissipation et on montre que sous certaines hypothèses sur le noyau, la solution est exponentiellement asymptotiquement stable.

Le troisième thème est divisé en deux parties :

Dans la première partie , on étudie le système de Stokes qui modélise en première approximation les écoulements stationnaires lents de fluides visqueux dans le demi espace. La méthode utilisée est basée sur l'utilisation des espaces de Sobolev avec poids. Ces espaces permettent de donner une description du comportement à l'infini qui n'est pas possible avec les espaces de Sobolev classiques. Nous montrons que le problème de Stokes admet en plus d'une formulation bien posée en termes de vorticité et potentiel vecteur, une deuxième formulation du même problème.

Dans la deuxième partie, nous étudions quelques propriétés de régularité de la solution d'un système d'équations de Navier-Stokes dans un domaine arbitraire de R^3. Plus précisément, nous démontrons qu'après une légère perturbation du second membre, l'équation de Navier-Stokes admet une solution régulière.

* Thèse de Doctorat d'Etat
** Directeur de Thèse : Nasser-Eddine TATAR , Maître de Conférence (KFUPM)

PREAMBULE

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur trois thèmes différents s'inscrivant dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

Nous avons précédé le développement de chaque contribution par une "Introduction" que le lecteur pourra trouver parfois un peu longue. Nous avons jugé utile de donner pour chaque problème un bref aperçu sur les principaux travaux réalisés jusque là sur le sujet et citer les principales méthodes utilisées. Ceci permettra une meilleure évaluation des travaux que nous présentons dans cette thèse. Plusieurs définitions et notions sont utilisées, Une longue liste des références plus ou moins en liaison avec nos préoccupations se trouve à la fin de chaque thème. Nous devons reconnaître, cependant, que la liste dressée est loin d'être complète.

THEME N°1:

Le premier thème abordé dans cette thèse consiste en l'utilisation de la méthode des inégalités de l'énergie pour l'étude de deux problèmes aux limites. Cette méthode, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle, est basée sur les idées de J. Leray et L. Garding [11] et est présentée sous forme d'une méthode pour l'étude des problèmes aux limites liés aux équations elliptiques. par A.A. Dezin [9],[5] [6] [8] pour les équations paraboliques [3] [5] [22] pour les équations mixtes. La modélisation mathématique des problèmes mixtes avec conditions intégrales est rencontrée en théorie de transmission de chaleur, en théorie de dynamique des populations, en métallurgie, etc.

Dans ce travail, on s'intéresse à une équation parabolique d'ordre supérieur avec des conditions intégrales. Les problèmes d'évolution avec des conditions intégrales ont été soigneusement étudiés durant ces trente dernières années.

Ces études ont été surtout menées par Cannon et ses coauteurs [7] et d'autres chercheurs (voir références dans [3]). Samarskii a aussi attiré l'attention sur l'importance de ce type de problèmes [18] . Un modèle mathématique avec condition non locale, a été proposé dans les travaux de Shi et Shilor [21] dans le cas de la thermoelasticité. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour l'étude des problèmes d'évolution faisant intervenir des conditions intégrales. En utilisant la méthode du potentiel, Cannon [7] et Kamynin [16] ont par exemple, prouvé l'existence et l'unicité de la solution à l'aide d'une équation intégrale (un système d'équations intégrales). La méthode de Fourrier a été utilisée dans Ionkin [13]-[15] et la méthode des inégalités d'énergie a été utilisée dans Bouziani et Benouar [5] , Bouziani [6], Benouar et Yurchuk [3] , Kartynnik [17] et Yurchuk [22].

Dans ce premier thème, on étudie deux problèmes aux limites:

1) Un problème mixte pour une équation parabolique d'ordre supérieur avec une condition aux limites de type intégrale.

2) Un problème aux limites pour une équation du quatrième ordre en temps avec le bilaplacien.

L'idée principale est celle utilisée dans les travaux de Petrovski, Leray et Garding. Elle consiste à écrire le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle du type

$$\Lambda u = \Phi, \qquad u \in D(\Lambda) \tag{1}$$

où l'opérateur Λ est considéré d'un espace de Banach B dans un espace de Hilbert F convenablement choisi. On établit une estimation à priori pour l'opérateur L, ensuite on démontre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F. Plus précisément, on suivra le schéma suivant:

1) On établit une estimation du type:

$$\|u\|_B \leq C \|\mathrm{L} u\|_F \tag{2}$$

qui est obtenue en multipliant l'équation considérée par un opérateur intégro-différentiel Mu . Ensuite on montre que l'opérateur L de B dans F admet une fermeture $\overline{\mathrm{L}}$.

La solution de l'équation opérationnelle

$$\overline{\mathrm{L}} u = \Phi \quad , \qquad u \in \mathrm{D}(\overline{\mathrm{L}}) \tag{3}$$

sera appelée solution forte du problème considéré.

ii) Par passage à la limite, l'estimation (2) sera prolongée à $\bar{\Lambda}$, c'est à dire

$$\|u\|_B \leq C \, \| \bar{\Lambda} u \|_F \qquad (4)$$

Ainsi on déduit l'unicité de la solution de l'équation (3) , l'égalité des ensembles $R(\bar{\Lambda})$ et $\overline{R(\Lambda)}$ et aussi l'inversibilité de l'opérateur $\bar{\Lambda}$.

L'inverse $(\bar{\Lambda})^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs de $R(\bar{\Lambda})$ de l'opérateur $\bar{\Lambda}$, la dernière étape consiste à établir la densité de l'ensemble $R(\Lambda)$ dans F et par suite l'existence de la solution du problème (2) .

THEME N°2

Le deuxième thème est consacré à l'étude de l'équation des ondes avec un terme non local en temps et une dissipation interne. Dans cette partie, on étudie le comportement asymptotique de la solution d'une équation intégro-différentielle.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} + g(u_t) = \Delta u - \int_0^t k(t-s) u_s(s,x)\,ds, \text{...dans..} \Omega \times \left]0,+\infty\right[\\ u = 0, \text{.......................................sur......} \Gamma \times \left]0,+\infty\right[\\ u(0) = u_0, \text{..........} u_t(0) = u_1, \text{.............dans.......} \Omega \end{cases} \qquad (5)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité et dans d'autres domaines (voir [16], par exemple). Dans [1] M. Aassila et M.M Cavalcanti ont étudié le comportement asymptotique de la solution via l'énergie associée au problème (5), définie par:

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 \qquad (6)$$

Où $u(t)$ est la solution faible du problème (5) telle que:

$$u \in C(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \cap C\left(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)\right)$$

Ils ont montré que $E(t)$ tend vers 0, lorsque t tend vers +∞, pour toute solution faible u vérifiant (7) sous les hypothèses suivantes:

1) La dissipation g est une fonction qui vérifie

$$C_1|x| \le |g(x)| \le C_2|x|^q, \quad \text{pour tout} \quad |x| \ge 1 \quad \text{et} \quad (n-2)q \ge 2n, \quad q \ge 2$$

2) Le noyau est une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, bornée, de classe C², qui vérifie

$$\text{(A1)} \qquad 1 - \int_0^{+\infty} h(s)ds = l,$$

$$\text{(A2)} \qquad h'(t) \le -\eta h(t), \quad \forall t \ge 0, \quad \eta > 0$$

Dans ce travail on s'intéresse d'abord au problème (5) avec comme dissipation $g(u_t) = au_t$ sous les mêmes hypothèses que celles de [1]. Nous montrons que la solution est exponentiellement asymptotiquement stable, pourvu que le noyau qui apparaît dans le terme mémoire vérifie la condition (A2) (i.e. : la solution décroît exponentiellement vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini).

Une nouvelle fonctionnelle de Lyapounov $V(t)$ a été établie et nous montrons que

$$E(t) \le Ce^{-\beta t}, \quad t \ge 0 \text{ et } \beta > 0$$

Dans le deuxième chapitre , nous considérons le problème (5) avec comme terme de dissipation $g(u_t) = au_t$ et nous améliorons le résultat précédent en utilisant une fonctionnelle de Lyapounov différente. Nous montrons que la solution décroît exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini, dans le cas où

$$h'(t) + \gamma h(t) \ge 0 \quad \text{pour tout} \quad t \ge 0.$$

Nous supposerons seulement que

$$[h'(t) + \gamma h(t)]e^{\alpha t} \in L^1(0,+\infty) \quad \text{pour} \quad \alpha > 0$$

Il est clair que la fonction h n'est plus forcément décroissante exponentiellement. Cette fonction peut prendre des valeurs négatives; elle peut osciller. La dissipation interne joue un rôle important dans la conduite exponentielle du système vers le repos.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous considérons le problème (5) sans l'amortissement faible $u_t\,(g \equiv 0)$. Nous montrons que la dissipation faible produite par le terme intégral seul est suffisante pour conduire exponentiellement le système vers le repos.

THEME N°3

Dans ce thème, nous étudions dans un premier chapitre, le système de Stokes dans le demi espace $\mathbb{R}^n_+$ Le problème de Stokes modélise en première approximation des écoulements stationnaires lents de fluides visqueux dans le demi espace $\mathbb{R}^n_+$, $n \geq 3$. En considérant **u** le champ de vitesse du fluide et p la pression, on aboutit au système suivant:

$$(S)\qquad \begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f \ldots\ldots\ldots\ldots dans \ldots \mathbb{R}^n_+ \\ div\, u = g \ldots\ldots\ldots\ldots dans \ldots \mathbb{R}^n_+ \\ u = g \ldots\ldots\ldots\ldots sur \ldots \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

Ce problème a été abondamment étudié lorsqu'il est posé sur un ouvert borné avec une condition aux limites sur le bord du domaine. Les espaces de Sobolev classiques fournissent, dans ce cas, un cadre adéquat pour une étude complète, comme le montre L. Cattaglia dans l'article [14], consacré à ce sujet. Lorsque le domaine n'est pas borné, les espaces de Sobolev classiques sont en revanche souvent inadaptés. C'est le cas, par exemple pour un domaine extérieur, l'espace tout entier ou le demi espace auquel nous nous intéressons ici. Dans de telle géométrie, l'inégalité de Poincaré, fondamentale pour la résolution du problème de Stokes dans le cas borné, n'est en effet plus satisfaite. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire d'autres espaces fonctionnels pour étudier le problème (S).

La méthode utilisée dans ce travail est complètement différente; elle est basée sur l'utilisation des espaces de Sobolev avec poids de type

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega);\ \forall \lambda \in \mathbb{N}^n,\ 0 \leq |\lambda| \leq m,\ \rho^{\alpha - m + |\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\Omega)\}$$

(1)

où $p > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\rho(r) = \sqrt{1 + r^2}$.

Dans le cas où $n = p$ (appelé cas critique), on doit introduire un poids logarithmique " $r \log r$ "

Ces espaces permettent de donner une description du comportement à l'infini qui n'est pas possible avec les espaces homogènes. De plus, ils se sont vraiment montrés adéquats pour la résolution d'une vaste gamme de problèmes elliptiques dans les domaines non bornés: voir A.Kufner [13] pour l'équation de Laplace dans l'espace tout entier, les domaines extérieurs et sur le demi espace et V.A Kudratev [12] pour le problème de Stokes sur tout l'espace et dans les domaines extérieurs. Par ailleurs, dans G.P Galdi [6] et V.Girault et P.A Raviart [9], la théorie des potentiels hydrodynamiques et les fonctions de Green sont utilisées pour traiter le problème par une méthode de transformée de Fourrier, alors qu'ici nous obtenons les solutions grâce au principe de réflexion. La méthode est constructive et plus facile puisqu'elle donne une description des espaces de nullité des systèmes de Stokes et de l'équation biharmonique et elle mène à une classe entière de résultats d'existence, d'unicité et de régularité.

Dans cette partie, nous montrons que le problème (S) admet en plus une formulation bien posée en termes de vorticité et potentiel vecteur. Plus exactement, nous prouvons que l'utilisation adéquate des espace avec poids permet de décrire la croissance ou la décroissance de fonctions à des distances éloignées, et mène de façon simple à cette formulation, et ceci sans manipuler des intégrales singulières. On utilise les résultats de T.Z Boulmezaoud [2]-[3] concernant les équations de Laplace, les systèmes $Rot - div$ et les équations de Stokes. Cette partie est composée de cinq sections. Dans la deuxième section on rappelle quelques définitions et propriétés des espaces $H_k(div, \mathbb{R}^n_+)$ et $H_k(rot, \mathbb{R}^n_+)$. La section trois est consacrée à certains résultats de base des potentiels vecteurs. Dans la section quatre , on donnera une première formulation mixte du problème de Stokes en termes de potentiel vecteurs et vorticité. Enfin dans la section cinq, on donnera une deuxième formulation du problème de Stokes.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions quelques propriétés de régularité de la solution d'un système d'équations de Navier-Stokes dans , un domaine arbitraire de R³. Nous considérons le système suivant:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u.\nabla u + \nabla p = f ;.....div u = 0 \\ ....u\,|_{\partial\Omega} = 0,.....u(0) = u_0 \end{cases} \quad (8)$$

Nous énoncerons quelques résultats du problème linéaire et du cas général. Nous modifions l'équation de Navier-Stokes (8) en remplaçant le terme non linéaire $u.\nabla u$ par le terme régulier $(J_k u).\nabla u,$ où

$$J_k u = \left(I + k^{-1}A^{1/2}\right)^{-1} u, ...k \in \mathbb{N}$$

signifie l'approximation de Yoshida de u.

Alors au lieu de l'équation (8), nous obtenons l'équation de Navier-Stokes approchée suivante:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (J_k u).\nabla u + \nabla p = f; \quad div\, u = 0 \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{.........................(9)}$$

Nous démontrons plus particulièrement que chaque solution faible du système approché (9) est une solution régulière du système (8) avec un second membre légèrement modifié (i.e. : f sera remplacé par $f + r_k$ où l'erreur r_k tend vers zéro lorsque $k \to +\infty$ en norme $\|.\|_{q,s;T}$. En d'autres termes, après une légère modification du second membre, le système d'équations de Navier-Stokes admet une solution régulière.

PARTIE A
INTRODUCTION

1) PREAMBULE

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur trois thèmes différents s'inscrivant dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

Nous avons précédé le développement de chaque contribution par une "Introduction" que le lecteur pourra trouver parfois un peu longue. Nous avons jugé utile de donner pour chaque problème un bref aperçu sur les principaux travaux réalisés jusque là sur le sujet et citer les principales méthodes utilisées. Ceci permettra une meilleure évaluation des travaux que nous présentons dans cette thèse. Plusieurs définitions et notions sont utilisées, Une longue liste des références plus ou moins en liaison avec nos préoccupations se trouve à la fin de chaque thème. Nous devons reconnaitre, cependant, que la liste dressée est loin d'être complète.

2) PRESENTATION DES THEMES DE RECHERCHES

2.1) Thème N°1 :

Le premier thème abordé dans cette thèse consiste en l'utilisation de la méthode des inégalités de l'énergie pour l'étude de deux problèmes aux limites. Cette méthode, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle, est basée sur les idées de J. Leray et L. Garding [11] et est présentée sous forme d'une méthode pour l'étude des problèmes aux limites liés aux équations elliptiques. par A.A. Dezin [9],[5] [6] [8] pour les équations paraboliques [3] [5] [22] pour les équations mixtes. La modélisation mathématique des problèmes mixtes avec conditions intégrales est rencontrée en théorie de transmission de chaleur, en théorie de dynamique des populations, en métallurgie, etc....

Dans ce travail, on s'intéresse à une équation parabolique d'ordre supérieur avec des conditions intégrales. Les problèmes d'évolution avec des conditions intégrales ont été soigneusement étudiés durant ces trente dernières années.

Ces études ont été surtout menées par Cannon et ses co-auteurs [7] et d'autres chercheurs (voir références dans [3]). Samarskii a aussi attiré l'attention sur l'importance de ce type de problèmes [18] . Un modèle mathématique avec condition non locale, a été proposé dans les travaux de Shi et Shilor [21] dans le cas de la thermoelasticité. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour l'étude des problèmes d'évolution faisant intervenir des conditions intégrales. En utilisant la méthode du potentiel, Cannon [7] et Kamynin [16] ont par exemple, prouvé l'existence et l'unicité de la solution à l'aide d'une équation intégrale (un système d'équations intégrales). La méthode de Fourier a été utilisée dans Ionkin [13] – [15] et la méthode des inégalités d'énergie a été utilisée dans Bouziani et Benouar [5] , Bouziani [6] , Benouar et Yurchuk [3] , Kartynnik [17] et Yurchuk [22].

Dans ce premier thème, on étudie deux problèmes aux limites :
1) Un problème mixte pour une équation parabolique d'ordre supérieur avec une condition aux limites de type intégrale.
2) Un problème aux limites pour une équation du quatrième ordre en temps avec le bilaplacien.

L'idée principale est celle utilisée dans les travaux de Petrovski, Leray et Garding. Elle consiste à écrire le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle du type

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F} \quad u \in D(\mathcal{L}) \tag{1}$$

où l'opérateur $\mathcal{L}$ est considéré d'un espace de Banach B dans un espace de Hilbert F convenablement choisi. On établit une estimation à priori pour l'opérateur $\mathcal{L}$, ensuite on démontre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F. Plus précisément, on suivra le shéma suivant :

i) On établit une estimation du type :

$$\|u\|_B \leq C \|\mathcal{L}u\|_F \tag{2}$$

qui est obtenue en multipliant l'équation considérée par un opérateur intégro-différentiel Mu . Ensuite on montre que l'opérateur $\mathcal{L}$ de B dans F admet une fermeture $\bar{\mathcal{L}}$. La solution de l'équation opérationnelle

$$\bar{\mathcal{L}}u = \mathcal{F} \quad u \in D(\mathcal{L}) \tag{3}$$

sera appelée solution forte du problème considéré.

ii) Par passage à la limite, l'éstimation (2) sera prolongée à $\bar{\mathcal{L}}$, c'est à dire

$$\|u\|_B \leq C \left\| \bar{\mathcal{L}} u \right\|_F . \tag{4}$$

Ainsi on déduit l'unicité de la solution de l'équation (3) , l'égalité des ensembles $R(\bar{\mathcal{L}})$ et $\overline{R(\mathcal{L})}$ et aussi l'inversibilité de l'opérateur $\bar{\mathcal{L}}$.

L'inverse$\left(\bar{\mathcal{L}}\right)^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs de $R(\bar{\mathcal{L}})$ de l'opérateur $\bar{\mathcal{L}}$, la dernière étape consiste à établir la densité de l'ensemble $R(\mathcal{L})$ dans F et par suite l'existence de la solution du problème (2) .

2.2) Thème N∘2

Le deuxième thème est consacré à l'étude de l'équation des ondes avec un terme non local en temps et une dissipation interne. Dans cette partie, on étudie le comportement asymptotique de la solution d'une équation intégro-différentielle.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + g(u_t) = \Delta u - \int_0^t k(t-s) u_s(s,x) ds, & \text{dans} \quad \Omega\times]0,\infty[\\ u = 0, & \text{sur } \sum = \Gamma\times]0,\infty[\\ u(0) = u_0, \qquad u_t(0) = u_1, \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{5}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité et dans d'autres domaines (voir [16] , par exemple). Dans [1] M. Aassila et M.M Cavalcanti ont étudié le comportement asymptotique de la solution via l'énergie associée au problème (5), définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|^2 \tag{6}$$

où $u(t)$ est la solution faible du problème (5) telle que :

$$u \in C\left(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)\right) \tag{7}$$

Ils ont montré que $E(t)$ tend vers 0, lorsque t tend vers $+\infty$, pour toute solution faible u vérifiant (7) sous les hypothèses suivantes :

1) La dissipation g est une fonction qui vérifie

$$C_1 |x| \leq |g(x)| \leq C_2 |x|^q, \quad \text{pour tout } |x| \geq 1 \text{ et } \quad (n-2)\, q \geq 2n, q \geq 2$$

2) Le noyau est une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, bornée, de classe C^2, qui vérifie

$$\begin{array}{ll} \text{(A1)} & 1 - \int\limits_0^\infty h(s)ds = l > 0, \\ \text{(A2)} & \quad h'(t) \leq -\eta h(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \eta > 0 \end{array}$$

Dans ce travail on s'intéresse d'abord au problème (5) avec comme dissipation $g(u_t) = au_t$ sous les mêmes hypothèses que celles de [1]. Nous montrons que la solution est exponentiellement asymptotiquement stable, pourvu que le noyau qui apparait dans le terme mémoire vérifie la condition (A2) (ie : la solution décroit exponentiellement vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini).

Une nouvelle fonctionnelle de Lyapounov $V(t)$ a été établie et nous montrons que

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \quad t \geq 0 \text{ et } \beta > 0$$

Dans le deuxième chapitre , nous considérons le problème (5) avec comme terme de dissipation $g(u_t) = au_t$ et nous améliorons le résultat précédent en utilisant une fonctionnelle de Lyapounov différente. Nous montrons que la solution décroit exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini, dans le cas où

$$h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Nous supposerons seulement que

$$\left[h'(t) + \gamma h(t)\right] e^{\alpha t} \in L^1(0, \infty) \qquad \text{pour } \alpha > 0$$

Il est clair que la fonction h n'est plus forcément décroissante exponentiellement. Cette fonction peut prendre des valeurs négatives ; elle peut osciller. La disipation interne joue un role important dans la conduite exponentièlle du système vers le repos.
Enfin, dans le troisième chapitre, nous considérons le problème (5) sans l'amortissement faible u_t ($g \equiv 0$). Nous montrons que la dissipation faible produite par le terme intégral seul est suffisante pour conduire exponentièllement le système vers le repos.

2.3) Thème N◦3

Dans ce thème, nous étudions dans un premier chapitre, le système de Stokes dans le demi espace $\mathbb{R}_+^n$

Le problème de Stokes modélise en première approximation des écoulements stationnaires lents de fluides visqueux dans le demi espace $\mathbb{R}_+^n$, $n > 2$. En considérant $\mathbf{u}$ le champ de vitesse du fluide et p la pression, on aboutit au système suivant :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcc} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = f & \text{dans} & \mathbb{R}_+^n \\ div\mathbf{u} = g & \text{dans} & \mathbb{R}_+^n \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur} & \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \right| .$$

Ce problème a été abondamment étudié lorsqu'il est posé sur un ouvert borné avec une condition aux limites sur le bord du domaine. Les espaces de Sobolev classiques fournissent, dans ce cas, un cadre adéquat pour une étude complète, comme le montre L. Cattaglia dans l'article [14], consacré à ce sujet. Lorsque le domaine n'est pas borné, les espaces de Sobolev classiques sont en revanche souvent inadaptés. C'est le cas, par exemple pour un domaine extérieur, l'espace tout entier ou le demi espace auquel nous nous intéressons ici. Dans de telles géométries, l'inégalité de Poincaré, fondamentale pour la résolution du problème de Stokes dans le cas borné, n'est en effet plus satisfaite. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire d'autres espaces fonctionnels pour étudier le problème (S).

La méthode utilisée dans ce travail est complètement différente ; elle est basée sur l'utilisation des espaces de Sobolev avec poids de type

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in D'(\Omega) ;\ \forall \lambda \in \mathbb{N}^n,\ 0 \le |\lambda| \le m\ ,\ \ \rho^{\alpha - m + |\lambda|} \partial^\lambda u \in \mathbf{L}^p(\Omega) \right\} \tag{1}$$

où $p > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\rho(r) = \sqrt{1 + r^2}$.

Dans le cas où $n = p$ (appelé cas critique), on doit introduire un poids logarithmique "$\rho \log \rho$"

Ces espaces permettent de donner une description du comportement à l'infini qui n'est pas possible avec les espaces homogènes. De plus, ils se sont vraiment montrés adéquats pour la résolution d'une vaste gamme de problèmes elliptiques dans les domaines non bornés : voir A.Kufner [13] pour l'équation de Laplace dans l'espace tout entier, les domaines extérieurs et sur le demi espace et V.A Kudratev [12] pour le problème de Stokes sur tout l'espace et dans les domaines extérieurs. Par ailleurs, dans G.P Galdi [6] et V.Girault et P.A Raviart [9], la théorie des potentiels hydrodynamiques et les fonctions de Green sont utilisées pour traiter le problème par une méthode de transformée de Fourier, alors qu'ici nous obtenons les solutions grâce au principe de réflexion. La méthode est constructive et plus facile puisqu'elle donne une description des espaces de nullité des systèmes de Stokes et de l'équation biharmonique et elle mène à une classe entière de résultats d'existence, d'unicité et de régularité.

Dans cette partie, nous montrons que le problème (S) admet en plus une formulation bien posée en termes de vorticité et potentiel vecteur. Plus exactement, nous prouvons que l'utilisation adéquate des espace avec poids permet de décrire la croissance ou la décroissance de fonctions à des distances éloignées, et mène de façon simple à cette formulation, et ceci sans manipuler des intégrales singulières.On utilise les résultats de T.Z Boulmezaoud [2]-[3] concernant les équations de Laplace, les systèmes Rot-div et les équations de Stokes. Cette partie est composée de cinq sections. Dans la deuxième section on rappelle quelques définitions et propriétés des éspaces $H_k\left(div, \mathbb{R}^n_+\right)$ et $H_k\left(rot, \mathbb{R}^n_+\right)$. La section trois est consacrée à certains résultats de base des potentiels vecteurs. Dans la section quatre , on donnera une première formulation mixte du problème de Stokes en termes de potentiel vecteurs et vorticité. Enfin dans la section cinq, on donnera une deuxième formulation du problème de Stokes.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions quelques propriétés de régularité de la solution d'un système d'équations de Navier-Stokes dans Ω, un domaine arbitraire de $\mathbb{R}^3$. Nous considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} + \nabla p = f \ ; \quad div\ \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0\ , \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Nous énoncerons quelques résultats du problème linéaire et du cas général. Nous modifions l'équation de Navier Stokes (8) en remplaçant le terme non linéaire $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$ par le terme régulier $(J_k\mathbf{u}).\nabla\mathbf{u}$, ou

$$J_k\mathbf{u} = \left(I + k^{-1}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\mathbf{u}, \quad k \in \mathbb{N}$$

signifie l'approximation de Yoshida de $\mathbf{u}$.

Alors au lieu de l'équation (8), nous obtenons l'équation de Navier Stokes approchée suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + (J_k\mathbf{u}).\nabla\mathbf{u} + \nabla p = f \ ; \quad div\ \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0\ , \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \tag{9}$$

Nous démontrons plus particulièrement que chaque solution faîble du système approché (9) est une solution régulière du système (8) avec un second membre légèrement modifié (i.e : f sera remplacé par $f + r_k$) où l'erreur r_k tend vers zéro lorsque $k \to +\infty$ en norme $\|.\|_{q,s;T}$. En d'autres termes, après une légère modification du second membre, le système d'équations de Navier-Stokes admet une solution régulière.

PARTIE B
INEGALITE D'ENERGIE

Les résultats de ce thème ont fait l'objet de deux publications :

1) S. MESLOUB, R. MEZHOUDI and M. MEDJDEN. « A mixed problem for a parabolic equation of higher order with integral conditions »

Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, Vol.50, N°3, 2002

2) M.MEDJDEN, S. MESLOUB. On an initial boundary value problem for a fourth order composite equation with bilaplacian »

Georgian Mathematical Journal. Volume 11, N°2, 2004.

1) EQUATION PARABOLIQUE D'ORDRE SUPERIEUR

1.1) Introduction

Dans cette partie, on étudie un problème mixte avec condition intégrale pour une équation parabolique d'ordre supérieur. L'existence et l'unicité de la solution forte est établie grâce aux estimations à priori (dites inégalités d'énergie) ainsi qu'à la densité de l'image de l'opérateur associé au problème donné.
Soit $Q_T = \Omega \times (0, T)$ avec $T > 0$ et $\Omega = (0, l)$.

On considère le problème :

$$(P) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = u_t + (-1)^m \alpha(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, & (1) \\ l_1 u = u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < l, & (2) \\ u(0,t) = 0, \qquad 0 < t < T, & (3) \\ \int\limits_0^l x^k u(x,t)dx = 0, \qquad 0 < t < T, \quad k = \overline{0, 2m-1}, & (4) \end{cases}$$

où la fonction $\alpha(t)$ vérifie les conditions suivantes :

$$\alpha(t) \geq c_0, \quad \alpha_t(t) \leq c_1, \tag{5}$$

ici les constantes c_0 et c_1 sont positives .

Les fonctions $f(x,t)$ et $\varphi(x)$ sont données. Précisément on étudie une équation parabolique d'ordre supérieur en dimension une avec des conditions intégrales. Les problèmes d'évolution avec conditions intégrales ont été soigneusement étudiés durant les trente dernières années. L'importance de ce type de problème a été mentionné par Samarskii [18] . Le modèle mathématique avec des conditions non locales a été décrit par Shi and Shilor [21] dans le contexte de la thermoelasticité.

Plusieurs auteurs se sont intéréssés aux problèmes d'évolution avec conditions intégrales ; ils ont utilisé la méthode du potentiel (voir par exemple Cannon [7] – [8] et Kamynin [16]). Ils ont montré l'existence et l'unicité de la solution en utilisant des équations intégrales.

Il y a aussi la méthode de Fourier qui a été utilisée par Ionkin [13] − [15] et enfin la méthode de l'inégalité d'énergie a été utilisé par Bouziani et Benouar [5], Bouziani [6], Benouar et Yurchuk [22], Kartynnik [17] et Yurchuk [22]. La méthode dans [22] est nouvelle, l'auteur a établi l'existence d'une solution forte du problème dans des espaces à poids du problème

$$\begin{cases} u_t - (a(x,t)u_x)_x = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = 0, & 0 < t < T, \\ \int\limits_0^l u(x,t)dx = 0 & 0 < t < T, \end{cases}$$

sous certaines conditions sur les données.

L'objectif principal est de montrer l'existence, l'unicité et la dépendance continue des données du problème posé. On établit une estimation à priori pour les solutions du problème (1) − (4), ensuite on montre que l'image de l'opérateur $L = (\mathcal{L}, \ell_1)$, correspondant au problème, est dense. L'opérateur L est défini de E vers F. L'espace de Banach E contient l'ensemble des fonctions $u(x,t) \in \mathbf{L}^2(Q_T)$ ayant une norme finie

$$\|u\|_E^2 = \sup_{0 \le \tau \le T} \int\limits_0^l \left(\Im_x^m u(x,\tau)\right)^2 dx, \tag{6}$$

$\Im_x^m$ est définie par

$$\Im_x^m u = \int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} ..... \int\limits_0^{x_{m-1}} u(\xi_{m-1},t)d\xi_{m-1}dx_{m-1}....dx_2dx_1, \qquad m \ge 1$$

et satisfaisant les conditions (3) et (4); l'espace de Hilbert F contient l'ensemble des valeurs des fonctions vectorielles $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ de norme finie

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int\limits_Q f^2 dxdt + \int\limits_0^l \left(\Im_x^m \varphi\right)^2 dx. \tag{7}$$

On suppose que la fonction φ satisfait les conditions de la forme (3) et (4) :

$$\int\limits_0^l x^k \varphi(x)dx = 0, \qquad k = \overline{0, 2m-1}, \tag{8}$$

$$\varphi(0) = 0. \tag{9}$$

1.2) Estimation à priori et ses conséquences

Théorème 1.1 :
Si u est un élément E et si la fonction α satisfait la condition (5)*, Alors*

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F \tag{10}$$

où C est une constante positive indépendante de la solution u donnée par

$$C = \max\left\{\frac{l^{4m}}{2^{2m}}, 1\right\}.$$

Preuve :
On utilise les notations suivantes :

$$D(L) = \left\{u \in E : \Im_x^m u_t, \Im_x^m u_x, ...\Im_x^m \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \in \mathbf{L}^2(Q)\right\}$$

$$Mu = (-1)^m \Im_x^{2m} u,$$

on considère le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(Q^\tau)$, de l'équation (1) et de l'opérateur intégro-différentiel Mu, où $Q^\tau = (0,l) \times (0,\tau)$ et $0 < \tau \leq T$, on obtient

$$(\mathcal{L}u, Mu)_{\mathbf{L}^2(Q^\tau)} = (-1)^m (u_t, \Im_x^{2m} u)_{L^2(Q^\tau)} + (\alpha(t) \Im_x^{2m} u, \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}})_{L^2(Q^\tau)} \tag{11}$$

En intégrant par parties le membre de droite de (11), et en utlisant les conditions $(2) - (4)$, on obtient

$$(-1)^m (u_t, \Im_x^{2m} u)_{\mathbf{L}^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2} \int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l (\Im_x^m \varphi)^2 dx, \tag{12}$$

$$(\Im_x^{2m} u, \alpha(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}})_{\mathbf{L}^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha(t) u^2(l,t) dt. \tag{13}$$

En substituant (12) et (13) dans (11), on trouve

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(t)u^2(l,t)dt+\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2dx=(\mathcal{L}u,Mu)_{\mathbf{L}^2(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m\varphi)^2dx. \tag{14}$$

Pour estimer le premier terme de la partie de droite de (14), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.2 :
Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\|\Im_x^m u\|^2_{\mathbf{L}^2(0,l)}\le\frac{l^2}{2}\left\|\Im_x^{m-1}u\right\|^2_{\mathbf{L}^2(0,l)}. \tag{15}$$

Preuve :
L'inégalité de Cauchy Schwarz implique que

$$(\Im_x^m u)^2=\left(\int_0^x \Im_x^{m-1}u(\xi,t)d\xi\right)^2\le x\cdot\int_0^l\left(\Im_x^{m-1}u(\xi,t)\right)^2d\xi.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\|\Im_x^m u\|^2_{\mathbf{L}^2(0,l)}\le\int_0^l\left(\Im_x^{m-1}u(\xi,t)\right)^2d\xi\cdot\int_0^l xdx\\&=\tfrac{l^2}{2}\left\|\Im_x^{m-1}u\right\|^2_{\mathbf{L}^2(0,l)}.\end{aligned}$$

Lemme 1.3 :
Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\|\Im_x^m u\|^2_{L^2(0,l)}\le\frac{l^{2m}}{2^m}\|u\|^2_{L^2(0,l)}. \tag{16}$$

Remarque 1.4 :
Les inégalités (15) *et* (16) *ont lieu si, à la place de l'intervalle* $(0,l)$, *on avait un domaine borné* Ω *dans* $\mathbb{R}^n$. *Il suffit de remplacer le nombre* l *par* $mes(\Omega)$ *(mesure de* Ω*) dans* (15) *et* (16).

Par application de l'inégalité de Cauchy Schwarz (16), le premier terme du membre de droite de (14) peut être estimé comme suit :

$$(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} \leq \frac{l^{4m}}{2^{2m+1}} \int\limits_{Q^\tau} (\Im_x^m u)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2 dxdt. \qquad (17)$$

En substituant (17) dans (14) et en utilisant (5), on obtient :

$$\begin{aligned} &C_0 \int_0^\tau u^2(l,t)dt + \int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx \\ &\leq C_2 \left[\int\limits_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2 dxdt + \int\limits_{Q^\tau} (\Im_x^m u)^2 dxdt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi)^2 dx \right] \end{aligned} \qquad (18)$$

où

$$C_2 = \max\left\{1, l^{4m}/2^{2m+1}\right\}.$$

Pour éliminer le second terme dans le membre de droite de (18), on utilise le lemme suivant

Lemme 1.5 :
Supposons que les fonctions $f_i(\tau)$ $(i = 1,2,3)$ ne sont pas négatives sur $(0,T)$, $f_1(\tau)$ et $f_2(\tau)$ sont des fonctions intégrables, et $f_3(\tau)$ est non décroissante sur $(0,T)$. Alors de l'inégalité

$$\Im_\tau f_1 + f_2(\tau) \leq f_3(\tau) + c\Im_\tau f_2,$$

on en déduit

$$\Im_\tau f_1 + f_2(\tau) \leq \exp(c\tau) \cdot f_3(\tau),$$

où

$$\Im_\tau f_i = \int_0^\tau f_i(t)dt \qquad (i = 1,2).$$

La preuve de ce lemme est similaire à celle du Lemme 7.1 dans [6].

Si maintenant, on supprime le premier terme dans le membre de gauche de l'inégalité (18) et en utilisant le lemme (1.5), on obtient :

$$\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx \leq C_2 e^{C_2 T} \left(\int_Q (\mathcal{L}u)^2 dxdt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi)^2 dx \right). \tag{19}$$

Le membre de droite de (19) ne dépend pas de τ, et en remplaçant le membre de gauche par sa borne supérieure par rapport à τ de 0 à T, on obtient alors (10), où $C = \left(C_2 e^{C_2 T}\right)^{1/2}$.

Soit $\overline{L}$ la fermeture de l'opérateur L, et $D(\overline{L})$ son domaine de définition.

Proposition 1.6 :

L'opérateur L de l'espace E vers F admet une fermeture.

Preuve :

Pour la preuve il suffit de voir [2].

Puisque les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ sont limites de suites de points du graphe de l'opérateur L, on peut généraliser (10) et l'appliquer aux solutions fortes par passage à la limite.

Corollaire 1.7 :

So*us les conditions* (5), *il existe une constante positive* c, *indépendante de la solution* u, *telle que :*

$$\|u\|_E \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_F \qquad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{20}$$

$R(L)$ et $R(\overline{L})$ désignent l'ensemble des valeurs prises par L et $\overline{L}$, respectivement. L'inégalité (20) implique le corollaire suivant :

Corollaire 1.8 :

L'image $R(\overline{L})$ est fermée dans l'espace F, $\overline{R(L)} = R(\overline{L})$ et $\overline{L}^{-1} = \overline{L^{-1}}$, où $\overline{L^{-1}}$ est l'extension de L^{-1} par continuité de $R(L)$ vers $\overline{R(L)}$.

Définition 1.9 :

La solution de l'équation opérationnelle

$$\overline{L}u = \mathcal{F}$$

e*st appelée solution forte du problème* $(1)-(4)$.

1.3) Existence et unicité

Théorème 1.10 :
Si les conditions du Théorème 1.1 sont satisfaites, alors, pour tout $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, *il existe une unique solution forte* $u \in E$

$$u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F} \quad \textit{du problème} \quad (1) - (4).$$

Preuve :
D'après le corollaire 1.7, on sait que, si une solution forte du problème $(1)-(4)$ existe, elle est unique et elle dépend continuement de $\mathcal{F}$. Et du corollaire 1.8, on en déduit que pour montrer que le problème $(1) - (4)$ admet une solution forte pour un élément arbitraire $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, il suffit de montrer l'égalité $\overline{R(L)} = F$. Pour cela , on a besoin du résultat suivant :

Lemme 1.11 :
Supposons que les conditions du Théorème 1.1 soient vérifiées, et soit $D_0(L)$ *l'ensemble des fonctions* $u \in D(L)$ *qui s'annulent sur un voisinage de* $t = 0$. *Si pour* $g \in \mathbf{L}^2(Q)$ *on a pour tout* $u \in D_0(L)$,

$$(\mathcal{L}u, g)_{\mathbf{L}^2(Q)} = 0, \tag{21}$$

alors la fonction g *s'annule presque partout dans* Q.
Preuve :
Supposons que (21) est vérifiée pour tout $u \in D_0(L)$. On peut alors exprimer (21) sous une autre forme . Premièrement, définissons la fonction ϕ par la formule

$$\phi(x,t) = \int_t^T g(x,s)ds \tag{22}$$

et considérons $\partial(\Im_x^{2m} u)/\partial t$ la solution de l'équation

$$\alpha(t) \left(\Im_x^{2m} u\right)_t - \int_t^T \alpha_s (\Im_x^{2m} u)_s ds = \phi(x,t). \tag{23}$$

Soit

$$\Im_x^{2m} u = \begin{cases} \int_s^t \left(\Im_x^{2m} u\right)_\tau d\tau & s \le t \le T \\ 0 & 0 \le t \le s \end{cases} \tag{24}$$

De (22) et (23), nous obtenons la relation suivante

$$g(x,t) = -(\alpha(t)\Im_x^{2m}u_t)_t - \alpha_t\Im_x^{2m}u_t. \tag{25}$$

On a le résultat suivant :

Lemme 1.12 :
Supposons que les conditions du lemme précedent soient vérifiées.
Alors les dérivées par rapport à t jusqu'au second ordre de la fonction $\Im_x^{2m}u$ définie par (23) *et* (24) *appartiennent à* $\mathbf{L}^2(Q_s)$, *où* $Q_s = (0,l) \times (s,T)$.
Preuve :
En vertu de l'inégalité (16) et des conditions (5), on déduit que $\alpha_t\Im_x^{2m}u_t \in \mathbf{L}^2(Q_s)$.
Il nous reste à prouver que $\alpha(t)\Im_x^{2m}u_{tt} \in \mathbf{L}^2(Q_s)$.
Pour ceci, on utilise les opérateurs t-médians (dites opérateurs de régularisation) ρ_ε de la forme

$$(\rho_\varepsilon h)(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \omega\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right)h(x,s)ds,$$

où $\omega \in C_0^\infty(0,T)$, $\omega(t) \geq 0$, et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)dt = 1$.

Appliquons les opérateurs ρ_ε et $\partial/\partial t$ à l'équation (23), on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(t)\tfrac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t = & -\alpha_t\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t + \tfrac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\phi \\ & + \tfrac{\partial}{\partial t}\left[\alpha\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t - \rho_\varepsilon\alpha\Im_x^{2m}u_t\right] \\ & - \tfrac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\int_t^T \alpha_s\Im_x^{2m}u_s ds \end{aligned} \tag{26}$$

De (26), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \left\|\alpha(t)\tfrac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \leq & \; 4\left\|\tfrac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\phi\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + 4\left\|\alpha_t\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \\ & + 4\left\|\tfrac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\int_t^T \alpha_s\Im_x^{2m}u_s ds\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \\ & + \left\|\tfrac{\partial}{\partial t}\left[\alpha\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t - \rho_\varepsilon\alpha\Im_x^{2m}u_t\right]\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}. \end{aligned} \tag{27}$$

En tenant compte des conditions (5), du Lemme 1.3 et en utilisant les propriétés de ρ_ε introduites dans [11], l'inégalité (27) permet d'écrire

$$\left\|\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} \le k\left\{\|u_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\phi\right\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\right\},$$

où

$$k = \max\left(2c_1^2\frac{l^{4m}}{2^{2m}}, 4\right).$$

Comme $\rho_\varepsilon h \underset{\varepsilon\to 0}{\to} h$ dans $\mathbf{L}^2(Q)$, et la norme de $\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t$ dans $\mathbf{L}^2(Q)$ est bornée, on conclut que $\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\Im_x^{2m}u_t \in \mathbf{L}^2(Q)$. Ceci achève la preuve du Lemme1.12.

Pour terminer la preuve du lemme 1.11, on remplace $g(x,t)$ dans (21) par sa représentation (25), On a

$$\begin{aligned}
&-(u_t,(\alpha\Im_x^{2m}u_t)_t)_{\mathbf{L}^2(Q)} - (u_t,\alpha_t\Im_x^{2m}u_t)_{\mathbf{L}^2(Q)} + \\
&+(-1)^{m+1}\left(\alpha\tfrac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}},(\alpha\Im_x^{2m}u_t)_t\right)_{\mathbf{L}^2(Q)} \\
&+(-1)^{m+1}\left(\alpha\tfrac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}},\alpha_t\Im_x^{2m}u_t\right)_{\mathbf{L}^2(Q)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{28}$$

En intégrant par parties chaque terme de (28) on trouve

$$\begin{aligned}
-(u_t,(\alpha\Im_x^{2m}u_t)_t)_{\mathbf{L}^2(Q)} &= \tfrac{(-1)^m}{2}\int_0^l \alpha(s)(\Im_x^m u_t(x,s))^2dx \\
&\quad+\tfrac{(-1)^m}{2}\int_{Q_s}\alpha_t(\Im_x^m u_t)^2dxdt
\end{aligned} \tag{29}$$

et

$$-\left(u_t,\alpha_t\Im_x^{2m}u_t\right)_{\mathbf{L}^2(Q)} = (-1)^{m+1}\int_{Q_s}\alpha_t(\Im_x^m u_t)^2dxdt \tag{30}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(-1)^{m+1}\left(\alpha\tfrac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}},(\alpha\Im_x^{2m}u_t)_t\right)_{\mathbf{L}^2(Q)} &= \\
&= (-1)^m\int_{Q_s}\alpha\alpha_t u_x u_t dxdt \\
&\quad+\tfrac{(-1)^m}{2}\int_s^T \alpha^2u_t^2(l,t)dt
\end{aligned} \tag{31}$$

$$(-1)^{m+1}\left(\alpha\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}},\alpha_t\Im_x^{2m}u_t\right)_{\mathbf{L}^2(Q)}=(-1)^{m+1}\int\limits_{Q_s}\alpha\alpha_t u_x u_t dxdt. \tag{32}$$

En combinant les équalités $(28)-(32)$, on trouve

$$\int\limits_0^l\alpha(s)(\Im_x^m u_t(x,s))^2dx+\int\limits_s^T\alpha^2u_t^2(l,t)dt=3\int\limits_{Q_s}\alpha_t(\Im_x^m u_t)^2dxdt. \tag{33}$$

En éliminant le second terme dans le membre de gauche de l'égalité (33), et en utilisant les conditions (5), on obtient :

$$\int\limits_0^l(\Im_x^m u_t(x,s))^2dx\leq\frac{c_1}{c_0}\int\limits_{Q_s}(\Im_x^m u_t)^2dxdt. \tag{34}$$

Si on note le terme " intégral" dans le membre de droite de (34) par $\beta(s)$, alors on a

$$-\frac{d\beta(s)}{ds}\leq\frac{c_1}{c_0}\beta(s),$$

et par conséquent,

$$-\frac{d}{ds}\left(\beta(s)e^{\frac{c_1}{c_0}s}\right)\leq 0. \tag{35}$$

En intégrant l'inégalité (35) sur l'intervalle (s,T) et en tenant compte que $\beta(T)=0$, on obtient l'inégalité

$$\beta(s)e^{\frac{c_1}{c_0}s}\leq 0,$$

à partir de laquelle, nous déduisons que $g=0$ presque partout sur Q_{T-s}. En procédant de la même manière un nombre fini de fois, on montre que $g=0$ presque partout sur Q. Ce qui achève la preuve du lemme1.11.
Pour terminer la preuve du Théorème 1.10, on suppose que pour un élément $G=(g,g_0)\in R(L)^{\perp}$, telle que

$$(\mathcal{L}u,g)_{\mathbf{L}^2(Q)}+(\Im_x^m\ell u,\Im_x^m g_0)_{\mathbf{L}^2(0,l)}=0 \tag{36}$$

alors on doit avoir $G = 0$. Si on pose $u \in D_0(L)$ dans (36), nous avons

$$(\mathcal{L}u, g)_{\mathbf{L}^2(Q)} = 0, \qquad u \in D(L). \tag{37}$$

En appliquant le Lemme 1.11 à (37), nous déduisons que $g = 0$. Donc (36) prend la forme

$$(\Im_x^m \ell u, \Im_x^m g_0)_{\mathbf{L}^2(0,l)} = 0 \qquad u \in D(L). \tag{38}$$

Mais, puisque l'image de l'opérateur trace ℓ est dense dans un espace de Hilbert ayant pour norme

$$\left(\int_0^l (\Im_x^m g_0)^2 dx \right)^{1/2},$$

alors on en déduit que $g_0 = 0$. Et par conséquent $G = 0$, et le Théorème 1.10 s'en déduit.

2) PROBLEME AUX LIMITES POUR UNE EQUATION D'ORDRE QUATRE AVEC LE BILAPLACIEN

2.1) Introduction

Dans cette partie, on considère un problème aux limites pour une équation d'ordre quatre en temps avec le bilaplacien. Nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution généralisée. Les démonstrations sont essentiellement basées sur les inégalités d'énergie pour l'opérateur correspondant au problème traité.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Nous désignerons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
Dans le cylindre,

$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$

nous considérons l'équation aux dérivées partielles d'ordre quatre suivante :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \Delta^2 u = f(x,t), \tag{1}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace.
L'équation (1) est complétée par les conditions initiales,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \\ u_{tt}(x,0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

la condition finale,

$$u(x,T) = 0, \tag{3}$$

et les conditions aux limites

$$u\,|_S = \frac{\partial u}{\partial \gamma}\,|_S = 0, \tag{4}$$

où $S = \partial\Omega \times (0,T)$ désigne la surface latérale du cylindre Q_T, et γ est le vecteur normal extérieur unité.

Remarque 2.1 :

La répartition des conditions aux limites correspond bien à la théorie générale des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partièlle. En effet, une condition est donnée sur toute la frontière du domaine Q_T, et les autres conditions sont celles associées à l'opérateur hyperbolique implicite dans l'équation (1) *, car l'équation* (1) *peut être écrite sous la forme :*

$$\mathcal{L}u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)u = f(x,t).$$

L'équation (1) est d'un type non classique, elle peut être vue comme une équation de type composite, puisque c'est une combinaison d'un opérateur hyperbolique et d'un opérateur elliptique. Elle est très proche des équations de type composite qui ont été introduites par Hadamard [12]. Des problèmes de ce type d'équation composés avec l'opérateur de Laplace en deux dimensions ont été étudiés dans Hadamard [12]. D'autres auteurs comme Sjostrand ([19] et [20]) , Eskin [10], Berkin [4] ont étudié, à l'aide d'autres méthodes, des équations de ce type dans des ensembles ouverts avec des géométries simples (rectangle, carré, disque,....) dans $\mathbb{R}^2$. Notre travail est un prolongement de celui de Benouar ([1] - [2]), où l'auteur a étudié un problème aux limites pour une classe d'équations de type composite avec une caractéristique réelle dans un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, pour n'importe quelle géométrie avec un bord régulier par morceaux.

Motivés par les considérations précédentes, nous utilisons dans ce travail, une méthode d'analyse fonctionnelle basée sur des inégalités d'énergie du problème direct et de son dual, selon un schéma proposé par Dezin [9]. Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution généralisée du problème $(1) - (4)$, dans le domaine borné Q_T . En parallèle avec le problème $(1) - (4)$ nous considérons son problème dual. Nous notons par $\mathcal{L}^*$ l'opérateur dual formel de l'opérateur $\mathcal{L}$, pour le produit scalaire de $\mathbf{L}_2(Q_T)$ par la relation

$$(\mathcal{L}u, v)_{0,Q_T} = (u, \mathcal{L}^* v)_{0,Q_T}, \text{ pour tout } u \text{ et } v \in C_0^{4,4}(Q_T), \tag{5}$$

où $(.,.)_{0,Q_T}$ est le produit scalaire dans $\mathbf{L}_2(Q_T)$, et $C_0^{4,4}(Q_T)$ est le sous espace de $C^{4,4}(Q_T)$ qui satisfait les conditions $(2) - (4)$.

Pour cela nous considèrons l'équation

$$\mathcal{L}^* v = \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \Delta^2 v = g(x,t), \qquad \text{sur } Q_T. \tag{6}$$

Le problème dual consiste à résoudre l'équation (6) dans le cylindre Q_T, pour la fonction v, qui satisfait la condition initiale

$$v(x,0) = 0, \tag{7}$$

et les conditions finales

$$v(x,T) = v_t(x,T) = v_{tt}(x,T) = 0, \tag{8}$$

et les conditions aux limites

$$v\,|_S = \frac{\partial v}{\partial \gamma}\,|_S = 0. \tag{9}$$

Nous remarquons que le problème $(1)-(4)$ est autoadjoint. Pour cela il suffit d'obtenir une estimation à priori pour la solution du problème direct $(1)-(4)$, à partir de laquelle se déduit immédiatement l'existence et l'unicité de la solution .

2.2) Espaces Fonctionnels associés

On note par $D(\mathcal{L}) = H_0^{4,4}(Q_T)$, le domaine de définition de l'opérateur $\mathcal{L}$, qui est un sous espace de l'espace de Sobolev $H^{4,4}(Q_T)$, formé des fonctions $u \in H^{4,4}(Q_T)$ qui satisfont les conditions (2) *et* (4). On note aussi $D(\mathcal{L}^*)$ le domaine de définition de l'opérateur $\mathcal{L}^*$ par

$$D(\mathcal{L}^*) = H_0^{4.4}(Q_T)$$

ie : les éléments $v \in H^{4,4}(Q_T)$, qui satisfont les conditions $(7) - (9)$.

On désigne par E la fermeture de l'ensemble $C_0^{4,4}(Q_T)$ pour la norme

$$\|u\|_E^2 = \|u_{tt}(x,t)\|_{0,Q_T}^2 + \|\Delta u(x,t)\|_{0,Q_T}^2 + \|u(x,T)\|_{0,\Omega}^2 + \|u_t(x,T)\|_{0,\Omega}^2 .$$

Soit E_0 le sous espace de E, dont les éléments satisfont les conditions

$$\begin{cases} u\,|_{\partial Q_T} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}\,|_S = 0 \end{cases} \tag{10}$$

où Ω^T désigne la partie supérieure du cylindre. et $\partial Q_T = S \cup \Omega \cup \Omega^T$.

Soit F l'espace dual de E_0 pour la forme bilinéaire canonique

$$\ll u, v \gg, \quad \text{pour } u \in F, \text{ et } v \in E_0,$$

qui est le prolongement par continuité de la forme bilinéaire $(u,v)_{0,Q}$, où $u \in \mathbf{L}_2(Q_T)$ et $v \in E_0$.

Définition 2.2 :
La solution du problème $(1)-(4)$ *sera considérée comme la solution de l'équation opérationnelle,*

$$\mathcal{L}u = f \ , \ u \in D(\mathcal{L}). \tag{11}$$

et la solution du problème $(6) - (9)$ *sera considérée comme la solution de l'équation opérationnelle.*

$$\mathcal{L}^*v = g \ , \ v \in D(\mathcal{L}^*). \tag{12}$$

Pour résoudre l'équation (11) pour tout $f \in F$, on utilise la méthode classique (voir [8]), qui consiste à construire une extension L de l'opérateur $\mathcal{L}$, dont l'image $R(L)$ coincide avec l'espace F, ie : L est surjective, et par conséquent inversible. Pour cela, on considère l'application définie sur $H_0^{4.4}(Q_T)$ comme suit :

$$v \longmapsto \Phi(u,v) = (u, \mathcal{L}^* v)_{0,Q}, \text{ pour tout } v \in D(\mathcal{L}^*). \tag{13}$$

Une fonction $u \in H_0^{4,4}(Q_T)$, sera alors considérée comme un élément de cette extension, qui est dans $D(L)$ si l'application (13) est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace $H_0^{4.4}(Q_T)$, qui est dense dans l'espace E_0 muni de la topologie induite de E, i.e. pour la norme usuelle de l'espace E. Par conséquent la fonctionnelle $\Phi(u,v)$ admet un prolongement continu, notée par le même symbole sur tout l'espace E. D'après le Théorème de Riesz sur la représentation des fonctionnelles linéaires dans les espaces de Hilbert, il existe un élément unique noté $Lu \in F$ tel que

$$\Phi(u,v) = \ll Lu, v \gg \text{ pour tout } u \in D(L) \text{ et tout } v \in E_0.$$

Nous définissons la norme de Lu dans F par la formule :

$$\|Lu\|_F = \sup_{v \in \overset{0}{H}{}^{4,4}(Q_T)} \frac{|\Phi(u,v)|}{\|v\|_E}$$

Par analogie avec la forme bilinéaire

$$\Psi(u,v) = (\mathcal{L}u, v)_{0,Q_T} \quad \text{pour tout } u \in D(\mathcal{L}), \tag{14}$$

nous construisons le prolongement L^* de l'opérateur $\mathcal{L}^*$. Une fonction v de E_0 sera considérée comme un élément de $D(L^*)$ si l'application $u \longrightarrow \Psi(u,v)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $H_0^{4,4}(Q_T)$ qui est dense dans E_0. Par conséquent la fonctionnelle $\Psi(u,v)$ admet un prolongement continu sur E_0 tout entier. Par la suite, il existe un unique élément $L^*v \in F$ tel que :

$$\Psi(u,v) = \ll u, L^*v \gg \quad \text{pour tout } v \in D(L^*) \text{ et tout } u \in E\ . \tag{15}$$

Il est évident que les opérateurs L et L^* ainsi construits sont des prolongements de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ respectivement.
La solution de l'équation opérationnelle

$$Lu = f, \tag{16}$$

est appelée solution généralisée du problème $(1)-(4)$, et la solution de l'équation opérationnelle

$$L^{*}v = g, \tag{17}$$

est appelée solution généralisée du problème dual $(6)-(9)$.

2.3) Inégalités d'énergie

La résolution des problèmes $(1)-(4)$ et $(6)-(9)$ sous la formulation faible est basée sur des estimations à priori ou bien des inégalités d'énergie pour les opérateurs L et L^{*}.

Théorème 2.3 :
Lorsque la solution du problème $(1)-(4)$ *existe, elle satisfait les estimations à priori*

$$\|u\|_{E} \leq C\,\|Lu\|_{F} \qquad \forall u \in D(L), \tag{18}$$

$$\|v\|_{E} \leq C^{*}\,\|L^{*}v\|_{F} \qquad \forall v \in D(L^{*}), \tag{19}$$

où C et C^{*} sont des constantes positives indépendantes de u et v respectivement.

Preuve :
On commence par établir l'estimation (18) pour des fonctions $u \in D(\mathcal{L})$, i.e : des fonctions suffisamment régulières. Dans ce cas, on obtient la forme bilinéaire à partir de

$$\Phi(u,v) = (\mathcal{L}u, v)_{0,Q_T}, \qquad \forall u \in D(\mathcal{L}). \tag{19'}$$

Il n'y a pas de méthode générale pour construire l'opérateur de multiplication $\mathcal{N}u$, l'opérateur qui nous permet d'obtenir l'inégalité d'énergie (18).
Dans l'égalité $(19')$ on pose

$$\mathcal{N}u = v(x,t) = (t-T)\frac{\partial u}{\partial t} - u. \tag{20}$$

Nous écrivons $\Phi(u,v)$ sous une forme plus simple. Utilisons les conditions $(2)-(4)$, et le fait que le poids $(t-T)$ dégénère sur Ω^{T}, ensuite avec l'aide des intégrations par parties, on évalue chaque intégrale composant $\Phi(u,v)$. On obtient

$$
\begin{aligned}
&2\left(\mathcal{L}u,(t-T)\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{0,Q_T}-2\left(\mathcal{L}u,u\right)_{0,Q_T}=\\
&=2\int\limits_{Q_T}(t-T)\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}.\frac{\partial u}{\partial t}dxdt-2\int\limits_{Q_T}(t-T)\Delta^2u\frac{\partial u}{\partial t}dxdt \\
&-2\int\limits_{Q_T}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}udxdt+2\int\limits_{Q_T}\Delta^2u.udxdt
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Evaluons les intégrales du membre de droite de (21) on trouve :

$$
2\int\limits_{Q_T}(t-T)\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}.\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\int\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt-2\int\limits_{Q_T}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\int\limits_{Q_T}(t-T)\Delta^2u\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\\
&=-2\int\limits_{Q_T}div\left[(t-T)\nabla.\Delta u.\frac{\partial u}{\partial t}\right]dxdt+2\int\limits_{Q_T}(t-T)\nabla.\Delta u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\\
&=2\int\limits_{Q_T}div\left[(t-T)\Delta u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right]dxdt-2\int\limits_{Q_T}(t-T)\Delta u.\Delta\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\\
&=-\int\limits_{Q_T}\frac{\partial}{\partial t}\left[(t-T)(\Delta u)^2\right]dxdt+\int\limits_{Q_T}\left|\Delta u\right|^2dxdt.\\
&=\int\limits_{Q_T}\left|\Delta u\right|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
-2\int\limits_{Q_T}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}udxdt=2\int\limits_{Q_T}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt, \tag{24}
$$

$$
2\int\limits_{Q_T}\Delta^2u.udxdt=2\int\limits_{Q_T}\left|\Delta u\right|^2dxdt. \tag{25}
$$

En combinant les égalités $(22)-(25)$ et (21), nous déduisons que :

$$
2\left(\mathcal{L}u,\mathcal{N}u\right)_{0,Q_T}=\int\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+3\int\limits_{Q_T}\left|\Delta u\right|^2dxdt. \tag{26}
$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy au membre de gauche de (26), on obtient

$$
\begin{aligned}
&2\left(\mathcal{L}u,(t-T)\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{0,Q_T}-2\left(\mathcal{L}u,u\right)_{0,Q_T} \\
&\leq \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{0,Q_T}+\|u\|^2_{0,Q_T}+(T^2+1)\left\|\mathcal{L}u\right\|^2_{0,Q_T}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Il est évident que

$$
\|u(.,T)\|^2_{0,\Omega}\leq\|u\|^2_{0,Q_T}+\|u_t\|^2_{0,Q_T} \tag{28}
$$

Remarquons que (28) est aussi vérifiée pour $u_t(.,T)$

$$
\frac{1}{2}\left\|u_t(.,T)\right\|^2_{0,\Omega}\leq\frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{0,Q_T}+\frac{1}{2}\left\|u_{tt}\right\|^2_{0,Q_T} \tag{29}
$$

En combinant (26)-(28), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta u\|^2_{0,Q_T}+\|u_{tt}\|^2_{0,Q_T}+\|u(.,T)\|^2_{0,\Omega}+\|u_t(.,T)\|^2_{0,\Omega} \\
&\leq\lambda\left(\|u\|^2_{0,Q_T}+\|u_t\|^2_{0,Q_T}+\|\mathcal{L}u\|^2_{0,Q_T}\right)
\end{aligned}
\tag{30}
$$

où

$$
\lambda=2\max(1+T^2,2).
$$

On éliminera les deux premiers termes de droite dans (30) en utilisant le lemme suivant.

Lemme 2.4(Lemme de Gronwall) :
Si $h_i(t)$, $i=1,2,3$ sont des fonctions non négatives sur l'intervalle $[0,T]$, $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont intégrables et $h_3(t)$ est non décroissante , telles que :

$$
\int_0^\tau h_1(t)dt+h_2(t)\leq h_3(t)+C\int_0^\tau h_2(t)dt,
$$

alors,

$$
\int_0^\tau h_1(t)dt+h_2(t)\leq e^{c\tau}h_3(t).
$$

Pour la preuve de ce lemme Voir ([7]).

Pour terminer la démonstration du Théorème 3.1, appliquons le lemme 3.2 pour aboutir à :

$$\begin{aligned}&\|u\|_E^2 = \|\Delta u\|_{0,Q_T}^2 + \|u_{tt}\|_{0,Q_T}^2 + \|u(.,T)\|_{0,\Omega}^2 + \|u_t(.,T)\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C\,\|\mathcal{L}u\|_{0,Q_T}^2 \leq C\,\|\mathcal{L}u\|_F^2\end{aligned}$$

où $C = \sqrt{\lambda}e^{\lambda T/2}$.

2.4) Résolution du problème

Théorème 2.5 :
Pour toute fonction $f \in F$ (resp. $g \in F$) il existe une et une seule solution du problème $(1)-(4)$ *(respectivement* $(6)-(9)$.
Preuve :
L'inégalité (18) assure l'unicité de la solution faible du problème $(1)-(4)$, puisque le problème homogène associé admet seulement la solution triviale. Elle assure aussi la fermeture dans F de l'ensemble image $R(L)$ *de* l'opérateur L. Montrons ceci. En effet, soit $\{f_k\}_k$ une suite "fondamentale " dans F telle que $f_k \in R(L)$. Donc à toute fonction f_k correspond une solution $u_k \in D(L)$ de l'équation

$$Lu_k = f_k,\ k \in IN.$$

De l'inégalité (18), on en déduit que la suite $\{u_k\}_k$ satisfait à

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|_E &\leq c\,\|L(u_m - u_n)\|_F \\ &= c\,\|Lu_m - Lu_n\|_F \\ &= \|f_m - f_n)\|_F \\ &\leq c\varepsilon\end{aligned}$$

Donc $\{u_k\}_k$ est une suite de Cauchy dans E. et comme E est fermé , la suite $\{u_k\}_k$ converge vers un élément $u \in E$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonctionnelle $v \longmapsto \Phi(u_k, v)$ est continue dans F . Ce qui implique la continuité dans F de la fonctionnelle $v \longmapsto \Phi(u, v)$, qui permet de définir l'élément f par

$$Lu = f\ \ (\ f = \underset{k \longrightarrow +\infty}{Lim} f_k\ )$$

Alors $f \in R(L)$, et donc $R(L)$ est fermé dans F. Pour terminer la démonstration du Théorème 4.1, il reste à montrer la densité de l'ensemble des éléments Lu dans F, lorsque u parcourt $D(\mathcal{L})$. En effet , soit $v \in D(\mathcal{L}^*)$ tel que

$$< Lu, v >= 0, \forall u \in D(\mathcal{L})$$

Or pour $u \in D(\mathcal{L})$ et $v \in D(\mathcal{L}^*)$, on a, à partir de (5)

$$(u, \mathcal{L}^* v)_{0,Q_T} = 0$$

Donc l'inégalité (19) implique que $v = 0$ dans $\mathbf{L}_2(Q_T)$ et aussi dans F lorsque u parcourt l'ensemble $D(\mathcal{L})$. Ainsi nous obtenons la densité de l'ensemble des éléments Lu dans F. La preuve de la seconde partie du Théorème pour le problème dual $(6) - (9)$ est faite de la même manière.

3) REFERENCES

[1] Benouar. N, *Problèmes aux limites pour une classe d'équations composites*, C.R.Acad. Sci., Paris, T. 319, Série I, p. 953-958, 1994.

[2] Benouar. N., *Problèmes aux limites pour une classe d'équations d'ordre impair*, Bul. Clas. Sci. $6^{\text{ème}}$ Série, T. 5, 1-6, p. 51-58, 1994.

[3] Benouar, N.E. and Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Differents. Uravn.27 : 12, (1991), 2094-2098.

[4] P.E. Berkin, Sur un problème aux limites pour une équation de type composite .Soviet . Math. Dokl ., 214 ,$N^0$3, p. 496-498, 1974.

[5] A.Bouziani and N.E.Benouar, *Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques,* C.R. Acad. Sci. Paris, 321, I, (1995), 1177-1182.

[6] A.Bouziani, *Solution forte d'un problème mixte avec une condition intégrale pour une classe d'équations paraboliques,* Maghreb Math. Rev., Vol 6, N°1, (1997), 1-17.

[7] R.Cannon, *The solution of heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., 21 (1963), 155-160.

[8] J.R.Cannon, Y. Lin, and J.Van Der Hoek, *A quasi-linear parabolic equation with nonlocal boundary condition,* Rend. Mat. Appl. (7), 9 (1989), 239-264.

[9] Dezin. A. A., *Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels.* Uspekhi. Math. Nauk, 14, n^0 3, 87, p 22-73, 1959.

[10] G.I..Eskin, *Problèmes aux limites pour l'équation* $D_tP(D_t, D_x)$ *, où* P *est un opérateur elliptique*, Siber Math . J., 3 , $N^0$6, p. 882-911, 1962.

[11] L.Garding, *Cauchy problem for hyperbolic equations*, University of chicago, Lecture notes, 1957.

[12] J.Hadamard, *Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partièlles du quatrième ordre*, Tohuku Math.J., 37, p.133-150, 1933.

[13] N.I.Ionkin, *Solution of boundary value problem in heat conduction theory with non local boundary conditions*, Diff. Uravn. 13, (1977), 294-304.

[14] N.I.Ionkin, *Stability of a problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions,* Diff. Uravn. 15 :7 (1979), 1279-1283.

[15] N.I.Ionkin, and E.I.Moiseev, *A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition,* Diff. Uravn. 15 :7 (1979), 1284-1295.

[16] N.I.Kamynin, *A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition*, Th., Vychisl., Mat., Fiz. 4 **:**6 (1964), 1006-1024.

[17] A.V.Kartynnik, *Three point boundary value problem with an integral space variables conditions for second order parabolic equations*, Differ. Uravn., 26 (1990), 1568-1575.

[18] A.A. Samarskii, *Some problems in differential equations theory.* Differents. Uravn. (16), 11 (1980), 1925-1935.

[19] O.Sjostrand, *Sur une équation aux dérivées partièlles du type composite I* , Arkiv .Math . Astr.Och.Fisik , 25A, $N^0 1$, p.1-11, 1937.

[20] O.Sjostrand, *Sur une équation aux dérivées partièlles du type composite II* , Arkiv .Math . Astr.Och.Fisik , 26A, $N^0 1$, p.1-10, 1938.

[21] P.Shi-M.Shillor, Design of contact patterns in one dimensional thermoelasticity, in theoritical aspects of industrial design, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.

[22] N.I.Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differ. Uravn., **22** :12 (1986), 2117-2126.

PARTIE C
COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Les résultats de ce thème ont été soumis à la revue « Journal of Applied Mathematics and Computation :

1) M. MEDJDEN, N. TATAR. « On the Wave Equation with a Temporal Non-local term and a Weak internal Dissipation »

2) M.MEDJDEN, N. TATAR. « Asymptotic Behavior for a Viscoelastic Problem with not necessarily decreasing kernel » to appear in « Applied Mathematical and Computation »

1) EQUATION DES ONDES AVEC UN TERME NON LOCAL EN TEMPS ET UNE DISSIPATION INTERNE FAIBLE

1.1) Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'une équation intégro-différentielle. On montrera que l'énergie du système décroit exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini, en présence d'une dissipation linéaire, pourvu que le noyau dans le terme mémoire est aussi exponentiellement décroissant. De nouvelles hypothèses seront considérées.

Nous considérerons le problème de l'équation des ondes suivante avec un terme non local en temps et une dissipation interne faible.

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = \Delta u - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné dans$\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ sera fixée plus loin.

Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité, (voir [15] − [3] pour la discussion de l'origine de ces modèles). Des problèmes similaires et aussi des versions non linéaires ont été discutés par plusieurs auteurs (voir [1] , [2] , [3] , [5] , [15] , [16]). Pour des problèmes similaires avec des noyaux singuliers intégrables et non intégrables, le lecteur pourra aussi consulter [4] , [6] , [7] , [8] , [9] , [10] , [13] , [14]. Dans [1] , le problème a été considéré sur un domaine étoilé avec une dissipation non linéaire $g(u_t)$. D'autre part, le taux de convergence vers zéro n'a pas été trouvé. Dans tous ces travaux l'hypothèse suivante sur le terme noyau

$$h^{'}(t) \leq -\eta h(t), \ \forall t \geq 0$$

a été imposée.

Dans ce travail on donnera un taux de convergence explicite pour la solution du problème (1). C'est l'objectif de ce chapitre. On montrera que la solution est exponentièllement asymptotiquement stable pourvu que le noyau qui apparait dans le terme mémoire soit aussi exponentiellement décroissant vers zéro. De plus, nous remplaçons l'hypothèse ci-dessus qui est fréquemment utilisée par les conditions

$$h^{'}(t) \leq 0 \quad \text{et } e^{\alpha t} h(t) \in L^{1}(0, \infty), \quad \text{pour un certain } \ \alpha > 0.$$

Aucune autre condition sur la dérivée de $h(t)$ n'a été supposée. Notre méthode a deux avantages : Elle est simple (aucune machinerie lourde n'est nécessaire) et ça couvre un certain nombre de noyaux qui n'ont pas été traités précédemment (par exemple les noyaux constants sur des sous-intervalles). A cette fin, une nouvelle fonctionnelle de type Lyapounov a été établie. En effet, nous modifierons l'énergie associée au système en ajoutant un terme convenablement choisi, ce qui nous permet d'éliminer certains termes indésirables.

Pour le problème de l'existence, l'unicité et la régularité, le lecteur peut consulter les travaux susmentionnés et aussi [12]. Il existe une solution unique qui est suffisamment régulière pour justifier nos calculs. L'hypothèse faite sur le terme noyau $h(t)$ n'est pas nécessaire pour montrer l'existence, l'unicité ou la dépendance continue. Dans cette partie on se concentre seulement sur la question du comportement asymptotique.

1.2) Comportement asymptotique

Dans cette section, nous présentons et nous démontrons nos résultats. Premièrement nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait à :

$$
\begin{array}{llll}
\text{(A1)} & h'(t) \leq 0 & \text{pour tout} & t \in \mathbb{R}_+, \\
\text{(A2)} & 1 - \int\limits_0^\infty h(s)ds = l > 0, & & \\
\text{(A3)} & e^{\alpha t}h(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) & \text{pour} & \alpha > 0.
\end{array}
$$

Ensuite , on définit l'énergie classique associée à (1) par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

Théorème 1.1 :
S*i les hypothèses* $(A1)-(A3)$ *sont satisfaites, alors l'énergie de* (1) *décroit de façon exponentielle vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives* C *et* $\beta > 0$ *telles que*

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \ t \geq 0.$$

Preuve :

La différentiation de $E(t)$ par rapport à la variable t donne

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int\limits_\Omega |u_t|^2 dx + \int\limits_\Omega \nabla u_t \int\limits_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx. \tag{2}$$

Posons,

$$(h \Box \nabla u)(t) = \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(t-s) \left| \nabla u(t) - \nabla u(s) \right|^2 ds dx,$$

il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = -\int_{\Omega}\nabla u_t\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx + \frac{1}{2}(h^{'}\Box\nabla u)(t) \\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\right\} - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3}$$

Alors, définissons

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t),$$

De (2) et (3) on obtient,

$$e^{'}(t) = -\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}(h^{'}\Box\nabla u)(t). \tag{4}$$

Remarquons que de l'hypothèse $(A1)$ on a

$$e^{'}(t) \leq 0, \qquad t \geq 0$$

De plus, de la définition de $e(t)$ et $(h\Box\nabla u)(t)$ et de l'hypothèse $(A2)$, il existe une constante $M > 0$
telle que

$$E(t) \leq Me(t), \qquad t \geq 0. \tag{5}$$

Ensuite, on introduit les deux fonctionnelles

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} u_t u dx$$

et

$$\Psi(t) = \int_{\Omega}\int_0^t H_{\alpha}(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx$$

où

$$H_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \int\limits_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds$$

et α est défini comme dans $(A3)$.
En utilisant l'équation (1) de notre problème, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int\limits_\Omega |u_t|^2 dx + \int\limits_\Omega u_{tt} u dx \\
&= \int\limits_\Omega |u_t|^2 dx - \int\limits_\Omega u_t u dx - \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Omega \nabla u \int\limits_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx.
\end{aligned}$$

Il est clair que,

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \nabla u \int\limits_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx &\le \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds \right)^2 dx \\
&\le \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^t h(t-s) ds \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\
&\le \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1-l}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Phi(t)}{dt} \le \int\limits_\Omega |u_t|^2 dx - \int\limits_\Omega u_t u dx - \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1-l}{2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx.
\end{aligned} \tag{6}$$

En dérivant la fonctionnelle $\Psi(t)$ par rapport à t et en utilisant la formule de Leibnitz, on trouve,

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \left(\int\limits_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds \right) \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx - \alpha \Psi(t). \tag{7}$$

On introduit maintenant la fonctionnelle

$$V(t) = e(t) + \varepsilon\Phi(t) + \eta\Psi(t)$$

avec $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta > 0$.
Des relations ci-dessus (4), (6) et (7) on vérifie que

$$\begin{aligned}
V'(t) &= e'(t) + \varepsilon\Phi'(t) + \eta\Psi'(t) \\
&\leq -\int_\Omega |u_t|^2\, dx - \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) + \varepsilon\int_\Omega |u_t|^2\, dx \\
&-\varepsilon\int_\Omega u_t u dx - \varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{\varepsilon(1-l)}{2}\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\, dsdx \\
&+\eta\left(\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \eta\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\, dsdx - \alpha\eta\Psi(t)
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq -(1-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\, dx - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds\right)\right]\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\
&+\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) - \varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-l)}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\, dsdx.
\end{aligned} \tag{8}$$

Si on choisit α tel que

$$\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds < \frac{1}{1-l}$$

alors, on peut choisir η tel que

$$\frac{\varepsilon(1-l)}{2} < \eta < \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds\right)^{-1}.$$

Par conséquent, les coefficients de $\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$ et $\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\, dsdx$ dans (8) sont négatifs. Ajoutons et soustrayons le terme $\mu(h\Box\nabla u)(t)$ au membre de droite de (8), ensuite utilisons l'estimation

$$
\begin{aligned}
(h\Box\nabla u)(t) &= \int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(t)-\nabla u(s)\right|^2 dsdx \\
&\leq 2(1-l)\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + 2\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx
\end{aligned}
$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
&V'(t) \leq -\left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds\right) - 2(1-l)\mu\right]\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx \\
&-(1-\varepsilon)\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \mu(h\Box\nabla u)(t) \\
&-\left(\eta - \frac{\varepsilon(1-l)}{2} - 2\mu\right)\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx.
\end{aligned}
$$

Finalement, nous choisissons μ suffisamment petite telle que le coefficient entre crochet soit positif. Par conséquent, il existe une constante positive $\beta > 0$ telle que

$$
V'(t) \leq -\beta V(t), \qquad t \geq 0.
$$

On en déduit que

$$
V(t) \leq V(0)e^{-\beta t}, \qquad t \geq 0.
$$

De la définition de $V(t)$ et de $e(t)$, on conclut l'assertion du Théorème 1.1. La preuve est ainsi achevée.

2) COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN PROBLEME DE VISCOELASTICITE AVEC UN NOYAU PAS NECESSAIREMENT DECROISSANT

Dans ce chapitre nous considérons un problème qui modélise un phénomène en viscoélasticité. Nous démontrons une décroissance exponentielle des solutions sous des hypothèses plus faibles que celles fréquemment utilisées dans la littérature. En particulier, les noyaux que nous considérons ici ne sont pas nécéssairement exponentiellement décroissants ni même décroissant vers zéro comme ils étaient avant. Les résultats présents améliorent aussi notre travail précédent ainsi que ceux d'autres auteurs.

2.1) Introduction

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + au_t = \Delta u - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales, a est une constante non-négative et la fonction de relaxation $h(t)$ sera précisée par la suite.

Ce genre de problème apparait naturellemnet en viscoelasticité et dans d'autres domaines d'application (voir [16] par exemple). Le terme intégral exprime le fait que les contraintes dépendent à tout moment, non seulement de la valeur instantanée, mais de toute l'histoire passée des contraintes que le matériau a subies. Ce problème linéaire et quelques versions non linéaires de ce problème ont été étudiés par plusieurs auteurs, voir [5] , [16] , [2] , [3] , [17] , [1] , et aussi les références [16] [3] (pour des profils). Le lecteur pourra consulter les références [9] , [14] , [4] , [6] , [7] , [8] , [15] , [11] , pour des problèmes similaires avec des noyaux singuliers intégrables et non intégrables.

Il a été montré que ces problèmes sont bien posés ; des résultats de régularité et comportement asymptotique ont été démontrés. Les taux de convergence ont été trouvés ; plus précisement , il a été démontré que les solutions décroissent vers zéro exponentiellement (polynomialement) si les noyaux h

étaient aussi à décroissance exponentielle (polynomiale) vers zéro (même quand $a = 0$). Cependant, dans tous les travaux précédents, on supposait la condition suivante sur le noyau (non négatif) :

$$h^{'}(t) \leq -\gamma h(t), \qquad \forall t \geq 0$$

pour un certain $\gamma > 0$.

Dans [10], les auteurs ont démontré un résultat de décroissance exponentièlle quand le temps tend vers l'infini. Ils ont remplacé cette condition par $h^{'}(t) \leq 0$ et $e^{\alpha t}h(t) \in L^1(0, \infty)$ pour un certain $\alpha > 0$. Aucune autre condition sur $h^{'}(t)$ n'a été faite. Le résultat a été obtenu à l'aide d'une nouvelle fonctionnelle de type Lyapounov.

Dans cette étude, nous améliorons ce résultat, en utilisant une fonctionnelle différente et des estimations différentes. Nous montrons que les solutions décroissent exponentiellement vers zéro quand le temps tend vers l'infini dans le cas

$$h^{'}(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et

$$\left[h^{'}(t) + \gamma h(t)\right] e^{\alpha t} \in L^1(0, \infty) \qquad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Il est clair par conséquent que nous permettons à $h^{'}(t)$ de prendre des valeurs positives c'est à dire que notre noyau $h(t)$ peut osciller. La dissipation interne présente dans l'équation joue un rôle important dans la conduite exponentièlle du système vers le repos.

Cependant cet amortissement n'est pas nécessaire. En effet, dans notre second résultat, nous montrons que la dissipation faible produite par le terme mémoire seul est suffisante pour stabiliser exponentiellement le système. Ceci est rendu possible par les nouvelles fonctionnelles que nous introduisons. Nous présentons ces deux résultats ici pour des raisons de comparaison et afin d'avoir une idée sur le prix payé lorsqu'on supprime la dissipation interne.

Pour les questions d'existence et de régularité, nous renvoyons le lecteur aux résultats mentionnés précédemment et à [13]. En particulier nous avons le résultat suivant :

Théorème2.1 :
On suppose que h *est une fonction continue et* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. *Alors il existe une solution unique du problème* (1) *telle que :*

$$u \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)),\ u_t \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)),\ u_{tt} \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega)).$$

En fait on peut avoir plus de régularité en remplaçant le terme au_t par $g(u_t)$, où g est une fonction de classe C^1 et que les données initiales sont dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

L'hypothèse sur $h(t)$ que nous avons remplacé n'est pas nécessaire pour la démonstration de l'existence et de la dépendance continue par rapport aux données. Dans la section suivante nous considérons le cas $a > 0$. Nous préparons certains outils nécessaires pour la démonstration de notre premier résultat et ensuite nous formulons et prouvons notre premier Théorème.

La section 3 concerne un résultat sans l'amortissement interne - c'est à dire le cas $a = 0$.

2.2) Comportement asymptotique

Dans cette section nous présentons et nous démontrons nos résultats. "Sans perdre de généralité", nous supposons que $a = 1$. Nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait aux hypothèses suivantes :

$$(A1) \quad \int_0^\infty h(s)ds < 1$$

$$(A2) \quad h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \text{ et } e^{\alpha t}\left[h'(t) + \gamma h(t)\right] \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ pour } \alpha, \gamma > 0.$$

Nous notons par l, $\bar{l}$, l_α, $\bar{l}_\alpha$ et $\bar{h}$ les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} l(t) &= h'(t) + \gamma h(t) \\ \bar{l} &= \int_0^\infty l(s)ds \\ l_\alpha &= e^{\alpha t} l(t) \\ \bar{l}_\alpha &= \int_0^\infty l_\alpha(s)ds \\ \bar{h} &= \int_0^\infty h(s)ds \end{aligned} \tag{2}$$

Ensuite , nous définissons l'énergie classique associée à (1) par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

Par différentiation, nous obtenons

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx.$$

Il est clair que la dérivée de l'énergie classique est de signe non défini, cependant , en posant :

$$(h \Box \nabla u)(t) = \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \left| \nabla u(t) - \nabla u(s) \right|^2 ds dx,$$

on peut vérifier que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h \Box \nabla u)(t) = & -\int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx + \frac{1}{2} (h' \Box \nabla u)(t) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right\} - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

On peut facilement voir que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} (h \Box \nabla u)(t) \right] \\ & = -\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} (h' \Box \nabla u)(t). \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'en définissant l'énergie modifiée par :

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} (h \Box \nabla u)(t), \quad (3)$$

on trouve :

$$e'(t) = -\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2} h(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} (h' \Box \nabla u)(t). \quad (4)$$

Dans les études précédentes, on supposait que $h^{'}(t) \leq 0$. Par conséquent, à partir de (4), nous voyons facilement que $e^{'}(t) \leq 0$. Ceci entraine que

$$e(t) \leq e(0) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$

Dans notre cas, nous ne supposons pas que $h^{'}(t) \leq 0$. En fait nous permettons à la fonction $h(t)$ d'osciller.
Afin de démontrer notre résultat, nous avons besoin d'introduire les fonctionnelles auxiliaires suivantes :

$$\Phi(t) := \int_{\Omega} u_t u dx \tag{5}$$

et

$$\Psi(t) := \int_{\Omega} \int_{0}^{t} L_\alpha(t-s) \left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 dsdx =: (L_\alpha \Box \nabla u)(t) \tag{6}$$

où

$$L_\alpha(t) := e^{-\alpha t} \int_{t}^{+\infty} l_\alpha(s) ds = e^{-\alpha t} \int_{t}^{+\infty} l(s) e^{\alpha s} ds \tag{7}$$

et $l(t)$ est définie dans (2). De plus, nous considérons la fonctionnelle

$$\begin{aligned} V(t) := e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Psi(t) - \eta \left(\int_{0}^{t} L_\alpha(s) ds \right) \int_{\Omega} \left|\nabla u(t)\right|^2 dx \\ + 2\eta \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_{0}^{t} L_\alpha(t-s) \nabla u(s) dsdx \end{aligned} \tag{8}$$

pour certaines constantes positives ε et η qui seront déterminées par la suite.

Proposition 2.2 :
Il existe des constantes positives ε_0 , η_0 , ξ_1 *et* ξ_2 *telles que :*

$$\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \xi_1 E(t) \leq V(t) \leq \xi_2(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)) \tag{9}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *et* $0 < \eta < \eta_0$.
Preuve :

Nous commençons par montrer le côté gauche dans l'inégalité (9). Pour la fonctionnelle $\Phi(t)$, il est clair que :

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\, dx + \frac{C_p}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx \tag{10}$$

où C_p est la constante de Poincaré. Le dernier terme dans (8) peut être estimé par :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s) ds dx \\
&\leq \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\left[(\nabla u(s) - \nabla u(t)) + \nabla u(t)\right] ds dx \\
&= \left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\left[(\nabla u(s) - \nabla u(t))\right] ds dx \\
&\leq \left(\delta_1 + \int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \tfrac{1}{4\delta_1}\left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\Psi(t)
\end{aligned}$$

Pour un certain $\delta_1 > 0$. Notons qu'à partir de (2) et (7) , nous avons

$$\int_0^t L_\alpha(s)ds \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} l(s)e^{\alpha s}ds =: \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s) ds dx \leq \left(\delta_1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \frac{\bar{l}_\alpha}{4\alpha\delta_1}\Psi(t). \tag{11}$$

En vertu de (10) et (11), nous obtenons à partir de (8).

$$V(t) \geq e(t) + \eta \left(1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right) \Psi(t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |u_t|^2 \, dx$$
$$- \left[\frac{3\eta\bar{l}_\alpha}{\alpha} + 2\eta\delta_1 + \frac{\varepsilon C_p}{2}\right] \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx.$$

En utilisant la définition (3) de $e(t)$, nous obtenons

$$V(t) \geq \eta \left(1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right) \Psi(t) + \frac{1-\varepsilon}{2} \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)$$
$$+ \left[\frac{1}{2}(1-\bar{h}) - \frac{3\eta\bar{l}_\alpha}{\alpha} - 2\eta\delta_1 - \frac{\varepsilon C_p}{2}\right] \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx.$$

Il est clair que, si nous choisissons

$$\delta_1 = \bar{l}_\alpha/\alpha,\ \eta < (1-\bar{h})\alpha/20\bar{l}_\alpha \quad \text{et}$$
$$\varepsilon < \min\left\{1, (1-\bar{h})/2C_p\right\},$$

nous aurons

$$V(t) \geq \xi_1 E(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)$$

pour une certaine constante ξ_1.

D'autre part, en tenant compte de (10) et (11) (avec $\delta_1 = 1/2$) dans (8), nous aboutissons à

$$V(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon C_p}{2} + \eta\left(1 + \frac{2\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\right] \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx$$
$$+ \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \eta\left(1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\Psi(t),$$

ce qui implique que

$$V(t) \leq \xi_2 \left(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right)$$

pour une certaine constante positive ξ_2, et cela achève la démonstration.

Nous sommes maintenant en mesure de poser et de démontrer notre premier résultat.

Théorème 2.3 :

Supposons que les hypothèses $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaites, et que les données initiales* (u_0, u_1) *vérifient l'inégalité* $E(0) > 0$ *et* $\bar{l}_\alpha$ *est défini comme ci-dessus. Alors l'énergie classique* $E(t)$ *associée à l'équation* (1) *décroit exponentièllement vers zéro : il existe deux constantes positives* C *et* $\beta > 0$ *telles que*

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \; t \geq 0.$$

Preuve :
La différentiation de (5) et (6) le long de la solution de (1) , donne

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \int_\Omega u_{tt} u dx \\ &= \int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx\end{aligned} \tag{12}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\alpha \Psi(t) - (l \square \nabla u)(t) \\ &+2 \left(\int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_\Omega \nabla u(t) \nabla u_t(t) dx - 2 \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx.\end{aligned} \tag{13}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx = \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \right] \\ &-L_\alpha(0) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \alpha \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ &+ \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx.\end{aligned} \tag{14}$$

En utilisant (14) dans (13), nous voyons que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} \left[\Psi(t) - \left(\int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + 2 \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \right] \\ &= -\alpha \Psi(t) - (l \square \nabla u)(t) + 2 L_\alpha(0) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - L_\alpha(t) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ &-2\alpha \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx - 2 \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx.\end{aligned} \tag{15}$$

Maintenant en différentiant la fonctionnelle $V(t)$ (voir (8)) par rapport au temps , nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{dV(t)}{dt}=\frac{de(t)}{dt}+\varepsilon\frac{d\Phi(t)}{dt}\\&+\eta\frac{d}{dt}\left[\Psi(t)-\left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+2\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx\right]\end{aligned}\tag{16}$$

En tenant compte de (4), (12) et (15) dans (16), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{dV(t)}{dt}\leq-(1-\varepsilon)\int_\Omega|u_t|^2\,dx-(\varepsilon-2\eta L_\alpha(0)+\eta L_\alpha(t))\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\\&+\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t)-\varepsilon\int_\Omega u_tudx+\varepsilon\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx-\alpha\eta\Psi(t)\\&-\eta(l\Box\nabla u)(t)-2\eta\alpha\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx\\&-2\eta\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx.\end{aligned}\tag{17}$$

Notons qu'à partir de (2) et (7), nous avons $L_\alpha(0)=\int_0^\infty l_\alpha(s)ds=\bar{l}_\alpha$.

Par la suite, nous utilisons l'estimation (11) et des estimations similaires pour le cinquième terme du membre de droite de la relation (17), précisement

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx\leq&\left(\delta_2+\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx\\&+\tfrac{1}{4\delta_2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)(h\Box\nabla u)(t),\end{aligned}\tag{18}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx\leq&\left(\delta_3+\int_0^t l(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx\\&+\tfrac{1}{4\delta_3}\left(\int_0^t l(s)ds\right)(l\Box\nabla u)(t),\end{aligned}\tag{19}$$

pour certaines constantes δ_2 et δ_3. En ce qui concerne le quatrième terme nous adoptons l'estimation

$$\int_\Omega u_tudx\leq\delta_4\int_\Omega|u_t|^2\,dx+\frac{C_p}{4\delta_4}\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx,\qquad\delta_4>0.\tag{20}$$

En utilisant (18) − (20) dans (17), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\frac{dV(t)}{dt} \leq -(1-\varepsilon-\varepsilon\delta_4)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \tfrac{1}{2}(h^{'}\square\nabla u)(t) + \eta\alpha\left(\frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1}-1\right)\Psi(t)\\
&-\left[\varepsilon - \frac{\varepsilon C_p}{4\delta_4} - \varepsilon\left(\delta_2+\bar{h}\right) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_\alpha - 2\eta\delta_3\right]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx\\
&-\eta\left(1-\frac{\bar{l}}{2\delta_3}\right)(l\square\nabla u)(t) + \frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2}(h\square\nabla u)(t).
\end{aligned} \tag{21}$$

Ici nous avons utilisé le fait que

$$\bar{l} = \int_0^{+\infty} l(s)ds \leq \int_0^{+\infty} l(s)e^{\alpha s}ds = \bar{l}_\alpha.$$

Et comme $h^{'}(t) = l(t) - \gamma h(t)$, nous déduisons de (21) que

$$\begin{aligned}
&\frac{dV(t)}{dt} \leq -\left[1-\varepsilon(1+\delta_4)\right]\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \tfrac{1}{2}(l\square\nabla u)(t) - \frac{\gamma}{2}(h\square\nabla u)(t)\\
&-\left[\varepsilon\left(1-\bar{h}-\delta_2-\frac{C_p}{4\delta_4}\right) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_\alpha - 2\eta\delta_3\right]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx\\
&-\eta\alpha\left(1-\frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right)\Psi(t) + \frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2}(h\square\nabla u)(t) - \eta\left(1-\frac{\bar{l}}{2\delta_3}\right)(l\square\nabla u)(t).
\end{aligned}$$

De manière équivalente,

$$\begin{aligned}
&\frac{dV(t)}{dt} \leq -\left[1-\varepsilon(1+\delta_4)\right]\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \left[\eta\left(1-\tfrac{\bar{l}}{2\delta_3}\right) - \frac{1}{2}\right](l\square\nabla u)(t)\\
&-\left[\varepsilon\left(1-\bar{h}-\delta_2-\frac{C_p}{4\delta_4}\right) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\bar{l}_\alpha - 2\eta\delta_3\right]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx\\
&-\frac{1}{2}\left[\gamma - \frac{\varepsilon\bar{h}}{2\delta_2}\right](h\square\nabla u)(t) - \eta\alpha\left(1-\frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right)\Psi(t).
\end{aligned} \tag{22}$$

Finalement, nous choisissons

$$\begin{aligned}
&\delta_1 = \bar{l}_\alpha/\alpha\\
&\delta_2 = (1-\bar{h})/4\\
&\delta_3 = \bar{l}\\
&\delta_4 = C_p/(1-\bar{h})\\
&\eta = 1\\
&\varepsilon = \min\left\{\frac{1-\bar{h}}{2(1-\bar{h}+C_p)}, \frac{1-\bar{h}}{4}\gamma\right\}
\end{aligned}$$

Alors, si, de plus, nous supposons que $\bar{l}_\alpha < \dfrac{1-\bar{h}}{20}\varepsilon$, nous déduisons de (22) que

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -C_1\left(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right)$$

pour une certaine constante positive C_1.

En vertu de la proposition (1) (le membre de droite de l'inégalité) , nous trouvons

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &\leq -\frac{C_1}{\xi_2}V(t)\\
&=: -\beta V(t), \qquad t \geq 0
\end{aligned}$$

et finalement nous déduisons que

$$V(t) \leq V(0)e^{-\beta t},\ t \geq 0.$$

Notons que par l'hypothèse $E(0) > 0$ faite dans le précédent Théorème, nous avons $V(0) > 0$. Ensuite, de la proposition 2.2 (le membre de gauche de l'inégalité), nous concluons l'assertion du Théorème à savoir :

$$E(t) \leq \frac{V(0)}{\xi_1}e^{-\beta t},\ t \geq 0,$$

ce qui achève la démonstration.

3) LE CAS $a = 0$

Dans cette section, nous considérons le cas $a = 0$, c'est à dire que nous étudions le problème (1) sans l'amortissement (faible) u_t. Nous montrerons que la dissipation faible produite par le terme intégral seul est suffisante pour conduire exponentiellement le système vers l'état de repos (ou d'équilibre).

Ici nous considérons la fonctionnelle

$$W(t) = V(t) + \lambda\Theta(t) + \mu\Gamma(t) \tag{23}$$

où $V(t)$ est comme dans (8),

$$\Theta(t) = \int_{\Omega} u_t \int_0^t h(t-s)\left(u(s) - u(t)\right) dsdx \tag{24}$$

et

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \int_0^t H_\alpha(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx \tag{25}$$

avec

$$H_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds.$$

Notons par $\bar{h}_\alpha = \int_0^{+\infty} h(s) e^{\alpha s} ds$. Pour démontrer notre deuxième résultat, nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.1 :
Il existe des constantes positives ε_0 , η_0 , λ_0 , ξ_3 *et* ξ_4 *telles que :*

$$\xi_3 \left(E(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right) \leq W(t) \leq \xi_4 \left(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t) + \Gamma(t)\right)$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < \eta < \eta_0$ *et* $0 < \lambda < \lambda_0$.
Preuve :
Le membre de gauche de (9) et l'estimation

$$\Theta(t) \leq \kappa_1 \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{C_p \bar{h}}{4\kappa_1}(h\Box\nabla u)(t), \ \kappa_1 > 0$$

impliquent que

$$\begin{aligned} W(t) \geq \xi_1 E(t) - \lambda\kappa_1 \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \frac{\lambda C_p \bar{h}}{4\kappa_1}(h\Box\nabla u)(t) \\ +\mu\Gamma(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t). \end{aligned}$$

D'après la définition de $E(t)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} W(t) \geq \left(\frac{\xi_1}{2} - \lambda\kappa_1\right) \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{\xi_1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\ + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda C_p \bar{h}}{4\kappa_1}\right)(h\Box\nabla u)(t) + \mu\Gamma(t). \end{aligned}$$

En choisissant $\kappa_1 = \lambda C_p \bar{h}$ et $\lambda^2 < \frac{\xi_1}{2C_p\bar{h}}$, nous obtenons lle membre de gauche de l'inégalité de la proposition. Pour l'autre inégalité, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} W(t) \leq \xi_2 \left(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right) \\ +\tfrac{\lambda}{2} \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \tfrac{\lambda C_p \bar{h}}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \mu\Gamma(t), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Théorème 3.2 :
Supposons que les hypothèses (A1) et (A2) sont satisfaites et que les données initiales (u_0, u_1) *vérifient l'inégalité* $E(0) > 0$. *Supposons de plus que les quantités* $\overline{h}_\alpha$ *et* $\overline{l}_\alpha$ *sont suffisamment petites .*

Alors l'énergie classique $E(t)$ *de (1) décroit exponentièllement vers zéro, c'est à dire qu' il existe deux constantes positives* C *et* β *telles que*

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \qquad t \geq 0.$$

Preuve :
Dans le cas $(a = 0)$, nous avons

$$e^{'}(t) = -\frac{1}{2}h(t)\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}(h^{'}\Box\nabla u)(t), \tag{26}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} u_{tt} u dx \\ &= \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} \nabla u \int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \tag{27}$$

Par conséquent, de (15), (16), (26) et (27) nous voyons que :

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \varepsilon \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - (\varepsilon + \tfrac{1}{2}h(t) + \eta L_\alpha(t) - 2\eta L_\alpha(0)) \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\ &+ \frac{1}{2}(h^{'}\Box\nabla u)(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla u \int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx - \alpha\eta\Psi(t) \\ &- \eta(l\Box\nabla u)(t) - 2\eta\alpha \int\limits_{\Omega} \nabla u(t) \int\limits_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s) ds dx \\ &- 2\eta \int\limits_{\Omega} \nabla u(t) \int\limits_0^t l(t-s)\nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \tag{28}$$

Une différentiation de l'expression dans (24) et (25) par rapport à t donne

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(t)}{dt} &= -\int\limits_{\Omega} \nabla u \int\limits_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) ds dx \\ &+ \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds\right)\left(\int\limits_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) ds\right) dx \\ &+ \int\limits_{\Omega} u_t \int\limits_0^t h^{'}(t-s)\left(u(s) - u(t)\right) ds dx - \left(\int\limits_0^t h(s) ds\right)\int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx \end{aligned} \tag{29}$$

et

$$\Gamma^{'}(t)=-\alpha\Gamma(t)-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^{2}dsdx+\bar{h}_{\alpha}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla u(s)\right|^{2}dx, \qquad (30)$$

respectivement. En tenant compte de (28) − (30) dans la dérivée de $W(t)$ (voir (23), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&W^{'}(t)=-\left(\lambda\int\limits_{0}^{t}h(s)ds-\varepsilon\right)\int\limits_{\Omega}\left|u_{t}\right|^{2}dx+\tfrac{1}{2}(h^{'}\Box\nabla u)(t)-\alpha\eta\Psi(t)\\
&-\alpha\mu\Gamma(t)-\left(\varepsilon+\eta L_{\alpha}(t)-2\eta L_{\alpha}(0)+\tfrac{1}{2}h(t)\nabla u(t)-\mu\bar{h}_{\alpha}\right)\int\limits_{\Omega}\left|\nabla u(t)\right|^{2}dx\\
&+\lambda\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\nabla u(s)ds\right)\left(\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right)ds\right)dx\\
&-\lambda\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right)dsdx-\eta(l\Box\nabla u)(t)\\
&-2\eta\alpha\int\limits_{\Omega}\nabla u(t)\int\limits_{0}^{t}L_{\alpha}(t-s)\nabla u(s)dsdx+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\nabla u(s)dsdx\\
&-2\eta\int\limits_{\Omega}\nabla u(t)\int\limits_{0}^{t}l(t-s)\nabla u(s)dsdx+\lambda\int\limits_{\Omega}u_{t}\int\limits_{0}^{t}h^{'}(t-s)\left(u(s)-u(t)\right)dsdx\\
&-\mu\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^{2}dsdx.
\end{aligned}$$

Nous adoptons les estimations

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\nabla u(s)dsdx\leq\delta_{2}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla u(t)\right|^{2}dx\\
&+\frac{1}{4\delta_{2}}\left(\int\limits_{0}^{t}h(s)ds\right)\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^{2}dsdx,\ \delta_{2}>0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right)dsdx\leq\delta_{5}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla u(t)\right|^{2}dx\\
&+\frac{\bar{h}}{4\delta_{5}}(h\Box\nabla u)(t),\ \delta_{6}>0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\nabla u(s)ds\right)\left(\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right)ds\right)dx\\
&\leq\kappa_{2}\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{0}^{t}h(t-s)\nabla u(s)ds\right)^{2}dx+\frac{\bar{h}}{4\kappa_{2}}(h\Box\nabla u)(t),\qquad\kappa_{2}>0.
\end{aligned}$$

En vertu de ces estimations, des relations (11)et (19), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
W'(t) &\le -\left(\lambda \int_0^t h(s)ds - \varepsilon\right) \int_\Omega |u_t|^2\,dx + \tfrac{1}{2}(h'\square\nabla u)(t) - \alpha\eta\left(1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right)\Psi(t) \\
&- \left(\varepsilon - \varepsilon\delta_2 - 6\eta\bar{l}_\alpha - 2\eta\alpha\delta_1 - 2\eta\delta_3 - \mu\bar{h}_\alpha - \lambda\delta_5\right)\int_\Omega |\nabla u(s)|^2\,dx \\
&-\eta\left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3}\right)(l\square\nabla u)(t) + \frac{\lambda\bar{h}}{4}\left(\frac{1}{\delta_5} + \frac{1}{\kappa_2}\right)(h\square\nabla u)(t) - \alpha\mu\Gamma(t) \\
&+ \left(\frac{\varepsilon\bar{h}}{4\delta_2} + \lambda\kappa_2\bar{h} - \mu\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx \\
&+\lambda\int_\Omega u_t \int_0^t h'(t-s)\,(u(s)-u(t))\,dsdx.
\end{aligned} \tag{31}$$

En posant

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \bar{l}_\alpha/\alpha \\
\delta_2 &= 1/2 \\
\delta_3 &= \bar{l} \\
\delta_5 &= \varepsilon/6\lambda \\
\kappa_2 &= \varepsilon/\lambda
\end{aligned}$$

et en remplaçant $h'(t)$ par $l(t) - \gamma h(t)$ dans (31), nous trouvons

$$\begin{aligned}
W'(t) &\le -\left(\lambda \int_0^t h(s)ds - \varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \frac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \tfrac{1}{2}(\eta-1)(l\square\nabla u)(t) \\
&- \left(\tfrac{\varepsilon}{3} - 10\eta\bar{l}_\alpha - \mu\bar{h}_\alpha\right)\int_\Omega |\nabla u(s)|^2\,dx - \tfrac{1}{2}\left(\gamma - \frac{7\lambda^2\bar{h}}{2\varepsilon}\right)(h\square\nabla u)(t) - \alpha\mu\Gamma(t) \\
&- \left(\mu - \frac{3\varepsilon\bar{h}}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx + \lambda\int_\Omega u_t\int_0^t l(t-s)\,(u(s)-u(t))\,dsdx \\
&-\lambda\gamma\int_\Omega u_t\int_0^t h'(t-s)\,(u(s)-u(t))\,dsdx.
\end{aligned}$$

Nous supposons que $t \ge t_0 > 0$ et donc

$$\int_0^t h(s)ds \ge \int_0^{t_0} h(s)ds =: h_0$$

Ensuite à l'aide de l'estimation

$$\int_\Omega u_t \int_0^t l(t-s)\,(u(s)-u(t))\,dsdx \le \frac{h_0}{3}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{3C_p\bar{l}}{4h_0}(l\square\nabla u)(t)$$

et

$$\int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\left(u(s)-u(t)\right)dsdx \leq \frac{h_0}{3\gamma}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{3\gamma C_p\bar{h}}{4h_0}(h\square\nabla u)(t)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
W'(t) &\leq -\left(\frac{\lambda h_0}{3}-\varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \frac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \tfrac{1}{2}\left(\eta-1-\frac{3\lambda C_p\bar{l}}{4h_0}\right)(l\square\nabla u)(t)\\
&-\left(\frac{\varepsilon}{3}-10\eta\bar{l}_\alpha-\mu\bar{h}_\alpha\right)\int_\Omega |\nabla u(s)|^2\,dx - \frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{7\lambda^2\bar{h}}{2\varepsilon}-\frac{3\lambda\gamma^2C_p\bar{h}}{2h_0}\right)(h\square\nabla u)(t)\\
&-\alpha\mu\Gamma(t)-\left(\mu-\tfrac{3\varepsilon\bar{h}}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{h_0}{\bar{h}}\min\left\{\frac{1}{3C_p\gamma},\frac{\gamma}{63}\right\}\\
\varepsilon &= \lambda h_0/6\\
\eta &= 2+\frac{3\lambda C_p\bar{l}}{2h_0}\\
\mu &= \frac{\lambda h_0(9\bar{h}_\alpha^2+1)}{36\bar{h}_\alpha}
\end{aligned}$$

Il apparait que si on suppose $\bar{h}_\alpha < 1/3$ et $\bar{l}_\alpha \leq \varepsilon/60\eta$, nous aboutisons à l'estimation suivante :

$$W'(t) \leq -C_2\left(E(t)+(h\square\nabla u)(t)+\Psi(t)+\Gamma(t)\right)$$

pour une certaine constante positive C_2. Du membre de droite de la relation dans la proposition 3 , nous trouvons

$$W'(t) \leq -\frac{C_2}{\xi_4}W(t) =: -\beta W(t).$$

Il est clair que, $W(0)=V(0)>0$. Et donc,

$$W(t) \leq W(0)e^{-\beta t},\ t\geq t_0>0.$$

L'autre inégalité dans la proposition 2.3 donne

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\xi_3}e^{-\beta t},\ t\geq t_0>0,$$

Ce qui achève la démonstration.

4) REFERENCES

[1] M.M. Cavalcanti, M. Aassila and J.A. Soriano, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, SIAM J. Control Opt., 38 (5) (2000) 1581-1602.

[2] H. Engler, Weak solutions of a class of quasilinear hyperbolic integrodifferential equations describing viscoelastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal., 113 (1991), 1-38.

[3] M. Fabrizio and A. Morro, "Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity", SIAM Stud. Appl. Math., Philadelphia 1992.

[4] K.B. Hannsgen and R. L. Wheeler, Behavior of the solutions of a Volterra equation as a parameter tends to infinity, J. Integral Eqs., 7 (1984), 229-237.

[5] W.J. Hrusa, Global existence and asymptotic stability for a nonlinear hyperbolic Volterra equation with large initial data, SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), 110-134.

[6] W.J. Hrusa and M. Renardy, On wave propagation in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math., 43 (1985), 237-254.

[7] W.J. Hrusa and M. Renardy, On a class of quasilinear partial integrodifferential equations with singular kernels, J. Diff. Eqs., 64 (1986), 195-220.

[8] W.J. Hrusa and M. Renardy, A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 257-269.

[9] S.O. Londen, An existence result for a Volterra equation in a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., 235 (1978), 285-304.

[10] M. Medjden and N.-e. Tatar, On the wave equation with a temporal non-local term and a weak dissipation, Submitted.

[11] J. Milota, J. Nečas and V. Šverák, On weak solutions to a viscoelasticity model, Comment. Math. Univ. Carolinae, 31 No 3 (1990), 557-565.

[12] V. Pata and A. Zucchi, Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory, Adv. Math. Sci. Appl., 11 (2001) 505-529.

[13] J. Prüss, "Evolutionary Integral Equations and Applications", Birkhaüser Verlag, Basel, 1993.

[14] M. Renardy, Some remarks on the propagation and non-propagation of discontinuities in linearly viscoelastic liquids, Rheol. Acta, 21 (1982), 251-254.

[15] M. Renardy, Coercive estimates and existence of solutions for a model of one-dimensional viscoelasticity with a nonintegrable memory function, J. Integral Eqs. Appl., 1 (1988), 7-16.

[16] M. Renardy, W.J. Hrusa and J.A. Nohel, "Mathematical Problems in Viscoelasticity", in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics No. 35, John Wiley and Sons, New York 1987.

[17] Q. Tiehu, Asymptotic behavior of a class of abstract integrodifferential equations and applications, J. Math. Anal. Appl., 233 (1999), 130-147.

PARTIE D
DEUX FORMULATIONS DU PROBLEME DE STOKES

Les résultats de ce chapitre ont été soumis à la revue Mathematical methods in the Applied sciences :

T.Z BOULMEZAOUD, M. MEDJDEN : « Vorticity-Vector Potential Formulations of the Stokes Equations in the Half-Space »

FORMULATION DE TYPE VORTICITE et POTENTIEL VECTEUR DU PROBLEME DE STOKES

1) INTRODUCTION :

On propose deux formulations de type vorticité et potentiel vecteurs du problème de Stokes dans le demi espace de $\mathbb{R}^3$. Les espaces de Sobolev avec poids sont utilisés pour décrire le comportement des fonctions à l'infini.
Soient

$$\mathbb{R}^3_+ = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_3 > 0\right\}$$

le demi espace supérieur de $\mathbb{R}^3$ et

$$\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad x_3 = 0\}$$

sa frontière.
Dans cette partie, on considère le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^3_+$

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ div\mathbf{u} = h & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

où $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont des fonctions données.

Le problème de Stokes dans des domaines non bornés de l'espace a été étudié par plusieurs auteurs, spécialement lorsque c'est un domaine extérieur à un obstacle borné (voir [5], [6], [7], [8], [11]).
Dans [2] l'auteur traite le problème (P_1) dans le demi espace de $\mathbb{R}^n$ avec des espaces à poids spécifiques. Les résultats exposé dans [2] par Boulmezaoud sont d'ordre général car ils couvrent une classe très large de voisinages à l'infini. Le but principal de cette partie est de montrer que le problème (P_1) admet bien une formulation en termes de vorticité - potentiel vecteurs, plus exactement, on montre une utilisation adéquate des espaces à poids pour décrire la croissance ou la décroissance des fonctions à des distances très grandes , ce qui nous amène facilement vers une formulation variationnelle du problème de Stokes en termes de vorticité et potentiel vecteur. Les résultats trouvés dans [2] et [3] concernent l'équation de Laplace, le système rot-div et

l'équation de Stokes qui sont utilisés dans ce travail. Nous rappellerons les principaux résultats dans [2] et [3] qui seront utile pour notre étude.

Ce travail est divisé en cinq parties : dans les parties 2 et 3, on rappelle quelques propriétés des espaces de Sobolev à poids et certains résultats concernant le potentiel vecteurs et la vorticité dans le demi espace. La quatrième partie est consacrée à la première formulation du problème de Stokes (P_1) en termes de potentiel vecteurs et vorticité. La seconde formulation est donnée dans la cinquième partie.

2) ESPACE DE SOBOLEV A POIDS :

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$. Nous désignerons par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω, et par $D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω..

Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ le point générique de $\mathbb{R}^3$, et $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ la distance à l'origine, nous considérons le poids suivant :

$$\rho(r) = \sqrt{1 + r^2}$$

Le nombre 1 dans le poids est ajouté seulement pour que la multiplication avec toute puissance de ρ n'ait aucune influence à l'origine.

Pour tout muti-indice μ de $\mathbb{N}^3$, on notera par $\partial^\mu u$ l'opérateur différentiel d'ordre μ défini par :

$$\partial^\mu u = \partial_1^{\mu_1} \partial_2^{\mu_2} \partial_3^{\mu_3} u, \qquad \text{avec } \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \quad \text{et } \partial_i^{\mu_i} u = \frac{\partial^{\mu_i} u}{\partial x_i^{\mu_i}} \quad i = 1, 2, 3$$

Pour tous entiers $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, nous définissons l'espace de Sobolev à poids $W_k^m(\Omega)$ par :

$$\left\{ u \in D'(\Omega) ; \ \ \forall \mu \in \mathbb{N}^3; \ \ 0 \leq |\mu| \leq m, \quad \rho^{k+|\mu|-m} \partial^\mu u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}$$

qui est un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire

$$((u, v))_{W_k^m(\Omega)} = \sum_{|\mu| \leq m} \int_\Omega \rho(r)^{2(k+|\mu|-m)} \partial^\mu u \partial^\mu v dx,$$

et de la norme correspondante :

$$\|u\|_{W_k^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\mu|=0}^{m} \left\| \rho(r)^{(|\mu|-m+k)} \partial^{\mu} u \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou $\|.\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ est la norme standard dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
En plus, on donne la semi-norme

$$|u|_{W_k^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\mu|=m} \left\| \rho(r)^{(|\mu|-m+k)} \partial^{\mu} u \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et $(.,.)_{W_k^m(\Omega)}$ la forme bilinéaire correspondante.On a $W_0^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Nous posons

$$D(\overline{\Omega}) = \left\{ \varphi_{|\Omega}; \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^3) \right\}$$

et nous définissons l'espace $\mathring{W}_k^m(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ dans l'espace $W_k^m(\Omega)$. L'espace dual de $W_k^m(\Omega)$ est noté par $W_{-k}^{-m}(\Omega)$, il est équipé de la norme duale et on notera par $\langle .,. \rangle$ la dualité entre ces deux espaces.

Dans toute la suite, Ω désignera le demi-espace

$$\mathbb{R}_+^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_3 > 0 \right\}$$

Le lecteur peut consulter $[12], [13], [10]$ et $[3]$ pour plus de détails sur ces espaces.

Notons que les proriétés locales de $W_k^m(\mathbb{R}_+^3)$ coincident avec celles des espaces de Sobolev classiques . L'espace $W_k^m(\mathbb{R}_+^3)$ est égal topologiquement et algébriquement à l'espace des restrictions de fonctions $W_k^m(\mathbb{R}^3)$ au demi espace $\mathbb{R}_+^3$, et on a le résultat suivant :

Lemme 1 :

Il existe un opérateur linéaire continu

$$P : W_k^m(\mathbb{R}_+^3) \to W_k^m(\mathbb{R}^3)$$

De plus, pour tout $\mu \in \mathbb{N}^3$*, avec* $|\mu| \leq m$*, il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\left\|\rho^{(|\mu|-m+k)}\partial^\mu Pu\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^3)} \leq \left\|\rho^{(|\mu|-m+k)}\partial^\mu u\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^3)} \quad , \quad \forall u \in W_k^m(\mathbb{R}_+^3)$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ désignera l'espace des fonctions polynomiales de degré total inférieur ou égal à k et par $\mathcal{P}_k^\Delta$ le sous espace des polynomes harmoniques.
On notera $\mathcal{P}_k = \{0\}$ si $k < 0$.

Rappelons quelques propriétés de $W_k^m(\mathbb{R}_+^3)$ dues à Hanouzet [10]

1) - L'espace $D\left(\overline{\mathbb{R}}_+^3\right)$ est dense dans $W_k^m(\mathbb{R}_+^3)$.

2) - Pour tout $\mu \in \mathbb{N}^3$, avec $|\mu| \leq m$ l'application

$$\begin{gathered} W_k^m(\mathbb{R}_+^3) \to W_k^{m-|\mu|}(\mathbb{R}_+^3) \\ \mu \longmapsto \partial^\mu u \end{gathered}$$

est continue.

3) - Les inclusions

$$W_k^m(\mathbb{R}_+^3) \hookrightarrow \quad W_{k-1}^{m-1}(\mathbb{R}_+^3) \hookrightarrow \quad ..... \hookrightarrow \quad W_{k-m}^0(\mathbb{R}_+^3)$$

sont vérifiées algébriquement et topologiquement.

4) - Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors on a l'implication suivante

$$n < m - k - \frac{N}{2} \Longrightarrow \mathcal{P}_n \subset W_k^m(\mathbb{R}_+^N)$$

5) - Pour tout $\mu \in \mathbb{N}^3$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une constante positive $C = C(\mu, \alpha) > 0$ telle que :

$$|\partial^{\mu}\rho^{\alpha}| \leq C\rho^{\alpha-|\mu|}$$

et on montre que l'application

$$u : W_k^m(\mathbb{R}_+^3) \longrightarrow \rho^{\alpha}u \in W_{k-\alpha}^m(\mathbb{R}_+^3)$$

est un isomorphisme.

Pour définir les traces des fonctions de $W_k^m(\mathbb{R}_+^3)$ Hanouzet [10] a généralisé la définition des espaces $W_k^s(\mathbb{R}_+^3)$ pour les valeurs réelles de s, de la manière suivante :
Pour $\sigma \in]0,1[$, $W_0^s(\mathbb{R}^3)$ est défini par :

$$W_0^{\sigma}(\mathbb{R}^3) = \begin{array}{l} \{u \in D'(\mathbb{R}^3)/\ \rho^{-\sigma}u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3), \\ \int_0^{+\infty} t^{-1-2\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-u(\mathbf{x})|^2\,dx\right)dt < +\infty;\ \forall i=1,2,3\} \end{array}$$

qui est un espace de Banach pour une norme appropriée.

Pour tout nombre réel $s > 0$, nous définissons $W_0^s(\mathbb{R}^3)$ par

$$W_0^s(\mathbb{R}^3) = \left\{u \in W_{s-[s]}^{[s]}(\mathbb{R}^3)/\ \ \partial^{\lambda}u \in W_0^{s-[s]}(\mathbb{R}^3),\ \ \forall\lambda \in \mathbb{N}^3 \ \text{ avec } \ |\lambda| = [s]\right\}$$

Pour tout nombre réel k et $s > 0$, l'espace $W_k^s(\mathbb{R}^3)$ est défini par

$$W_k^s(\mathbb{R}^3) = \left\{u \in D'(\mathbb{R}^3)\ /\ \rho^k u \in W_0^s(\mathbb{R}^3)\right\}$$

Enfin pour tout nombre réel $k < 0$ et $s < 0$, $W_k^s(\mathbb{R}^3)$ est l'espace dual de $W_{-k}^{-s}(\mathbb{R}^3)$.

On a le Théorème de trace suivant :

Théorème 1 :
Soient $m \geq 1$ *un entier et* k *un nombre réel.*
Il existe une application linéaire et continue $\gamma = \left(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1}\right)$ *appelée application trace, de l'espace* $W_k^m(\mathbb{R}_+^3)$ *vers* $\prod_{j=0}^{m-1} W_k^{m-j-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ *telle que*

1) *pour tout* $u \in D(\overline{\mathbb{R}}_+^3)$,

$$\gamma u = \left(u(\mathbf{x}', 0),\ \frac{\partial u}{\partial x_3} u(\mathbf{x}', 0), ..., \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_3^{m-1}} u(\mathbf{x}', 0)\right)$$

2) γ *est surjective*
3) $\gamma^{-1}(0) = \overset{\circ}{W}{}_k^m(\mathbb{R}_+^3)$
Dn plus on a la formule de Green :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^3} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathbf{x}, \qquad\qquad \forall i = 1, 2 \\ &\int_{\mathbb{R}_+^3} u \frac{\partial v}{\partial x_3} d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}_+^3} \frac{\partial u}{\partial x_3} v d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathbf{x}', 0) v(\mathbf{x}', o) d\mathbf{x}', \end{aligned}$$

pour toute fonction $u \in W_k^1(\mathbb{R}_+^3)$ *et* $v \in W_{1-k}^1(\mathbb{R}_+^3)$,

où $(\mathbf{x}', 0) = (x_1, x_2, 0)$, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ et $d\mathbf{x}' = dx_1 dx_2$

3) PROPRIETES DE L'OPERATEUR DIVERGENCE :

Pour tout vecteur $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, on définit la divergence de $\mathbf{u}$ par

$$div\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

et pour tout réel k, on définit les espaces à poids suivants :

$$H_k\left(div; \mathbb{R}_+^3\right) = \left\{\mathbf{u} \in D'(\mathbb{R}_+^3)^3; \rho(r)^k \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^3)^3,\ \rho(r)^{k+1} div\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^3)\right\},$$

ce sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)} = \left(\rho(r)^k\mathbf{u},\rho(r)^k\mathbf{v}\right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left(\rho(r)^k div\mathbf{u},\rho(r)^k div\mathbf{v}\right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)}$$

et de la norme correspondante

$$\|\mathbf{u}\|_{H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)} = \left(\left\|\rho^k\mathbf{u}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left\|\rho^{k+1}div\mathbf{u}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La fermeture de $D(\mathbb{R}^3_+)^3$ dans l'espace $H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$ est notée par $\overset{0}{H}_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$. On notera par $H^{-1}_{-k}\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$ son espace dual ; c'est un espace de distributions, et on a le résultat suivant :

Lemme 2 :
Pour tout réel k, $D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3$ est dense dans $H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$

Le résultat suivant concerne la trace normale des fonctions de l'espace $H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$ sur le bord $\Sigma = \mathbb{R}^2$.

Proposition 1 :
Soit k un nombre réel, l'application

$$\delta_N : \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}.\mathbf{e}_3|_{x_3=0} = u_3(x_1,x_2,0)$$

définie sur $D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue notée encore par δ_N, de l'espace $H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$ dans $W_k^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ (espace dual de $W_k^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$).
De plus on a la formule de Green suivante :

$$(\mathbf{u},\nabla\varphi) + (div\mathbf{u},\varphi) = -\left\langle \mathbf{u}.\mathbf{e}_3,\varphi\right\rangle_{x_3=0},\quad \forall\mathbf{u}\in H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right),\ \forall\varphi\in W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$$

Preuve :
Soit $\mathbf{u} \in D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3$ et $\varphi\in D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)$, nous avons,

$$(\mathbf{u},\nabla\varphi) + (div\mathbf{u},\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^2}\varphi.u_3dx_1dx_2$$

comme $D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)$ est dense dans $W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$, l'égalité précédente reste vraie pour tout $\varphi \in W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$. On a donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \varphi.u_3 dx_1 dx_2\right| \leq \|\mathbf{u}\|_{H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)} \cdot \|\varphi\|_{W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+)}, \forall \mathbf{u} \in D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3 \text{ et } \forall \varphi \in W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+).$$

D'autre part l'application

$$\gamma_0 : \mathbf{u} \in W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+) \longmapsto \mathbf{u}.\mathbf{e}_3{}_{|_{x_3=0}} = u_3(x_1, x_2, 0) \in W^{+\frac{1}{2}}_{-k}(\mathbb{R}^2)$$

est surjective. On a donc :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} u_3 \mu dx_1 dx_2\right| \leq C \|\mathbf{u}\|_{H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)} \cdot \|\mu\|_{W^{+\frac{1}{2}}_{-k}(\mathbb{R}^2)}, \forall \mathbf{u} \in D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3 \text{ et } \forall \mu \in W^{+\frac{1}{2}}_{-k}(\mathbb{R}^3_+).$$

L'application

$$\delta_N : \mathbf{u} \in D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3 \longmapsto \mathbf{u}.\mathbf{e}_3{}_{|_{x_3=0}} = u_3(x_1, x_2, 0) \in W^{-\frac{1}{2}}_{k}(\mathbb{R}^2)$$

est continue dans $H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$. De la densité de $D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3$ dans $H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$, on en déduit que δ_N se prolonge par continuité en une application linéaire continue (encore notée par δ_N) de $H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$ vers $W^{-\frac{1}{2}}_{k}(\mathbb{R}^2)$. δ_N est l'opérateur trace normale.

On démontre dans Boulmezaoud ([3] corollaire2) que l'application

$$\delta_N : \mathbf{u} \in H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right) \longmapsto u_3(x_1, x_2, 0) \in W^{-\frac{1}{2}}_{k}(\mathbb{R}^2)$$

est surjective.

En particulier si u est une fonction de $W^1_k(\mathbb{R}^3_+)$ et si $\Delta u \in W^0_{k+1}(\mathbb{R}^3_+)$ ($\rho^{k+1}u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)$), alors la dérivée normale

$$\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_3}_{|_{x_3=0}}$$

est complètement définie, appartient à $W^{-\frac{1}{2}}_{k}(\mathbb{R}^2)$ et on la formule de Green :

$$(\nabla u, \nabla v) + (\Delta u, v) = -\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_3}, v \right\rangle_{|_{x_3=0}}, \quad \forall v \in W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$$

On a la caractérisation du noyau δ_N.

Proposition 2 :
On a

$$\overset{\circ}{H}_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right) = \ker(\delta_N)$$
$$= \left\{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in H_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right) \,/\, u_3\left(x_1, x_2, 0\right) = 0\right\}$$

Preuve :
Il est clair que $\overset{\circ}{H}_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right) \subset \ker(\delta_N)$.
Réciproquement, soit $l \in (\ker(\delta_N))'$ avec

$$\langle l, u\rangle = 0, \qquad \forall \mathbf{u} \in D(\mathbb{R}^3_+)^3$$

il existe un élément $\mathcal{L} \in \ker(\delta_N)$ tel que

$$\langle l, u\rangle = \left(\rho^k\mathcal{L}, \rho^k\mathbf{u}\right) + \left(\rho^{k+1}div\mathcal{L}, \rho^{k+1}div\mathbf{u}\right), \quad \forall \mathbf{u} \in \ker(\delta_N)$$

au sens des distributions l'élément $\mathcal{L}$ vérifie

$$\rho^{2k}\mathcal{L} = \nabla\left(\rho^{2k+2}div\mathcal{L}\right).$$

De plus $\rho^{2k+2}div\mathcal{L} \in W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$. Par application de la formule de Green, on obtient :

$$\langle l, u\rangle = \left(\rho^{2k}\mathcal{L}, \mathbf{u}\right) - \left(\nabla\left(\rho^{2k+2}div\mathcal{L}\right), \mathbf{u}\right) - \left\langle\rho^{2k+2}div\mathcal{L}, \mathbf{u}.\mathbf{e}_3\right\rangle_{x_3=0} = 0$$

pour tout $\mathbf{u} \in \ker(\delta_N)$.
Donc $D(\mathbb{R}^3_+)^3$ est dense dans $\ker(\delta_N)$ et $\ker(\delta_N) \subset \overset{0}{H}_k\left(div;\mathbb{R}^3_+\right)$.

Par la suite $\mathcal{A}_k$ (respectivement $\mathcal{N}_k$) désigne l'espace des polynômes harmoniques de degré total $\leq k$ pair (respectivement impair) par rapport à la variable x_3.

Lorsque $k \leq -1$, on pose $\mathcal{A}_k = \mathcal{N}_k = \{0\}$.

Les résultats suivants concernant l'opérateur de Laplace avec les conditions de Dirichlet et de Neumann sur le bord Σ (ou bien sur $x_3 = 0$), le lecteur peut se referer à [3] pour la démonstration.

Proposition 3 : *(Le problème de Dirichlet)*

Soit k un entier . Alors, pour chaque couple $(f,g) \in W_k^{-1}(\mathbb{R}^3_+) \times W_k^{1/2}(\Sigma)$, le problème

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ u = g & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases} \tag{3}$$

admet une solution dans $W_k^1(\mathbb{R}^3_+)$ si et seulement si f et g vérifient

$$\forall q \in \mathcal{A}_{k-1}, \quad \langle f, q \rangle - \int_\Sigma \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{1,}x_2).\frac{\partial q}{\partial x_3}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 0.$$

Lorsqu'elle existe , la solution est unique à un élément prés de $\mathcal{A}_{-k-1}$.
De plus, si on a

$$(f,g) \in W^{m-1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+) \times W^{m+1/2}_{m+k}(\Sigma)$$

avec $m \geq 0$ un entier,
alors $u \in W^{m+1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)$ (et dépend continuement de f et g par rapport à la norme quotient), On a :

$$\|u\|_{W^{m+1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)} \leq C\left\{\|f\|_{W^{m-1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)} + \|g\|_{W^{m+1/2}_{m+k}(\Sigma)}\right\}$$

Proposition 4 : *(Problème de Neumann)*
Soit k un entier, alors pour tout couple $(f,g) \in W^0_{k+1}(\mathbb{R}^3_+) \times W_k^{-1/2}(\Sigma)$, le problème

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} u = g & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases} \tag{4}$$

admet une solution dans $W_k^1(\mathbb{R}^3_+)$ si et seulement si f et g vérifient

$$\forall q \in \mathcal{N}_{k-1}, \int_{\mathbb{R}^3_+} f(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})dx + \langle g, q\rangle_\Sigma = 0.$$

Lorsqu'elle existe, la solution est unique à un élément près de l'ensemble $\mathcal{N}_{-k-1}$. *D'autre part, si*

$$(f,g) \in W^{m-1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+) \times W^{m-1/2}_{m+k}(\Sigma)$$

avec $m \geq 1$ *un entier, alors* $u \in W^{m+1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)$ *(et dépend continuement de* f *et* g *par rapport à la norme quotient). On a :*

$$\|u\|_{W^{m+1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)} \leq C\left\{\|f\|_{W^{m-1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)} + \|g\|_{W^{m+1/2}_{m+k}(\Sigma)}\right\}$$

Proposition 5 : ([2] , [3])
Soit $m \geq 1$ *et* $k \geq 1$ *deux entiers. Pour tout* $h \in W^{m-1}_{m+k}(R^3_+)$ *et tout* $g \in W^{m-\frac{1}{2}}_{m+k}(\Sigma)^3$, *le problème*

$$\begin{cases} div\ \mathbf{u} = h & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} & \text{sur} \quad \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \tag{5}$$

admet au moins une solution $u \in W^{m}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)^3$ *si et seulement les conditions suivantes sont satisfaites*

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} h(\boldsymbol{x})dx + \int_{\Sigma} \boldsymbol{g}.\boldsymbol{e}_3 dx' = 0 \tag{6}$$

Dans ce cas, u *peut être sélectionné telle que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{W^{m}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)^3} \leq C\{\|\boldsymbol{g}\|_{W^{m-\frac{1}{2}}_{m+k}(\Sigma)^3} + \|h\|_{W^{m-10}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)}\}, \tag{7}$$

où $C > 0$ *est une constante qui dépend seulement de* m *et* k.

Preuve : voir démonstration dans Boulmezaoud [3]..

4) PROPRIETES DE L'OPERATEUR ROTATIONNEL :

Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, nous définissons le rotationnel de $\mathbf{u}$ par

$$rot\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

et on définit l'espace suivant :

$$H_k\left(rot; \mathbb{R}^3_+\right) = \left\{\mathbf{u} \in D'(\mathbb{R}^3_+)^3; \rho(r)^k \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)^3,\ \rho(r)^{k+1} rot\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)\right\}$$

qui est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit de la norme suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{H_k\left(rot;\mathbb{R}^3_+\right)} = \left(\left\|\rho^k \mathbf{u}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left\|\rho^{k+1} rot\mathbf{u}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La fermeture de $D(\mathbb{R}^3_+)^3$ dans l'espace $H_k\left(rot; \mathbb{R}^3_+\right)$ est notée par $\overset{0}{H}_k(rot; \mathbb{R}^3_+)$. On notera par $H^{-1}_{-k}\left(rot; \mathbb{R}^3_+\right)$ son espace dual ; c'est un espace de distributions. On a le résultat suivant :

Proposition 6 :
Pour tout entier k dans $\mathbb{Z}$, $D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3$ est dense dans $H_k\left(rot; \mathbb{R}^3_+\right)$
Preuve :
La preuve est similaire à celle donnée par Hanouzet [10], où il montre que $D(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $W^m_k(\mathbb{R}^3)$. Donnons maintenant une caractérisation des traces tangentielles d'une fonction de l'espace $H_k\left(rot; \mathbb{R}^3_+\right)$.

Proposition 7 :

Soit k un entier, L'application $\delta_T : \mathbf{u} \to \mathbf{u} \wedge \mathbf{e}_3{}_{|x_3=0}$, définie sur $D(\overline{\mathbb{R}}^3_+)^3$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue notée encore par δ_T, de l'espace $H_k\left(rot; \mathbb{R}^3_+\right)$ vers $W_k^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3_+)$. On a la formule de Green suivante :

$$\forall \mathbf{u} \in H_k\left(rot;\mathbb{R}^3_+\right), \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^1_{-k}(\mathbb{R}^3_+)^3\,; \quad (rot\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})-(\mathbf{u},rot\boldsymbol{\varphi}) = -\left\langle \delta_T \mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}\right\rangle_{x_3=0},$$

Le noyau de δ_T est donné par :

$$\overset{\circ}{H}_k\left(rot;\mathbb{R}^3_+\right) = \ker \delta_T = \left\{\mathbf{u} \in H_k\left(rot;\mathbb{R}^3_+\right);\ \mathbf{u}\wedge.\mathbf{e}_3 = 0 \quad \text{sur } x_3 = 0\right\}$$

5) RESULTATS SUR LE POTENTIEL VECTEUR

Considérons l'espace :

$$X_k(\mathbb{R}^3_+) = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in W^0_{k-1}(\mathbb{R}^3_+)^3;\ \rho^k \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)^3,\ \rho^k div\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)\right\}$$

C'est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire approprié et de la norme correspondante

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{X_k(\mathbb{R}^3_+)} = \left(\left\|\rho^{k-1}\boldsymbol{\varphi}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left\|\rho^k div\, \boldsymbol{\varphi}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left\|\rho^k \mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Considérons aussi le sous espace de $X^N_k(\mathbb{R}^3_+)$

$$X^T_k(\mathbb{R}^3_+) = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in X_k(\mathbb{R}^3_+);\ \boldsymbol{\varphi}.\mathbf{e}_3 = 0 \ \text{ sur } \ x_3 = 0\right\}$$
$$X^N_k(\mathbb{R}^3_+) = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in X_k(\mathbb{R}^3_+);\ \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_3 = 0 \ \text{ sur } \ x_3 = 0\right\}$$

Dans [3] (Corollaire 8 et 10), on montre que

$$X^N_k(\mathbb{R}^3_+) \hookrightarrow W^1_k(\mathbb{R}^3_+)^3, \quad X^T_k(\mathbb{R}^3_+) \hookrightarrow W^1_k(\mathbb{R}^3_+)^3$$

Il s'ensuit en particulier que la norme $\|.\|_{W^1_k(\mathbb{R}^3_+)^3}$ est bien définie sur les deux espaces $X^N_k(\mathbb{R}^3_+)$ et $X^T_k(\mathbb{R}^3_+)$ et est équivalente à la norme $\|.\|_{X_k(\mathbb{R}^3_+)}$.

Maintenant, pour chaque entier k , on notera par G^Δ_k (resp. H^Δ_k) l'espace des fonctions $\boldsymbol{\varphi} \in X^N_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$ (resp. $\boldsymbol{\varphi} \in X^T_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$) vérifiant

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} & \text{dans } \ \mathbb{R}^3_+ \\ div\, \boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{dans } \ \mathbb{R}^3_+ \end{cases}$$

On sait d'après ([3] , [5]) que

$$G^\Delta_k = \left\{\nabla q, \quad q \in \mathcal{A}^\Delta_k \right\}$$
$$H^\Delta_k = \left\{\nabla q, \quad q \in \mathcal{N}^\Delta_k \right\}$$

Par la suite, pour chaque $\boldsymbol{\varphi} \in X^N_{-k}(\mathbb{R}^3_+)$, on désigne par $\boldsymbol{\Lambda}_k \boldsymbol{\varphi}$, la projection orthogonale de $\boldsymbol{\varphi}$ sur G^Δ_k par rapport au produit scalaire de $(.,.)_{X^N_{-k}(\mathbb{R}^3_+)}$. C'est aussi la projection orthogonale par rapport au produit scalaire à poids $(.,.)_{W^0_{-k-1}(\mathbb{R}^3_+)^3}$ dans $\mathbf{L}^2$.

Proposition 8 :
L'espace $X_k^N(\mathbb{R}^3_+)$ *s'injecte continuement dans* $W_k^1(\mathbb{R}^3_+)^3$*. En plus, il existe une constante* C *qui dépend seulement de* k *telle que :*

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{W_k^1(\mathbb{R}^3_+)} \leq \left(\|\rho^k div\,\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + \|\rho^k \mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)^3} + \|\rho^{k-1}\boldsymbol{\Lambda}_{-k}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour toute fonction $\boldsymbol{\varphi} \in X_k^N(\mathbb{R}^3_+)$.

Pour la preuve, le lecteur pourra consulter [3]

Notons que lorsque $k = -1$, nous avons

$$\mathcal{A}^{\Delta}_{k-1} = \mathcal{A}^{\Delta}_1 = \{q(x) = cx_3,\ c \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G^{\Delta}_{-k} = G^{\Delta}_1 = \{v(x) = c\,\boldsymbol{e}_3,\ c \in \mathbb{R}\}$$

Il s'en suit que pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in X^N_{-1}(R^3_+)$, on a

$$\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\varphi} = \frac{\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^{-4}\boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{e}_3 dx}{\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^{-4} dx}\boldsymbol{e}_3.$$

Puisque :

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^{-4} dx = \frac{\pi^2}{2}$$

on en déduit :

$$\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\varphi} = \frac{2}{\pi^2}(\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^{-4}\boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{e}_3 dx)\boldsymbol{e}_3.$$

de la proposition 8 on montre que la semi-norme

$$\boldsymbol{\varphi} \longrightarrow \left(\left\|\rho^{-1} div\,\boldsymbol{\varphi}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left\|\rho^{-1}\mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)} + (\int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^{-4}\boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{e}_3 dx)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $X^N_{-1}(\mathbb{R}^3_+)$ équivalente à la norme $\|.\|_{X_{-1}(\mathbb{R}^3_+)}$

On a besoin des deux propositions suivantes qui assurent l'existence du potentiel vecteur de composante normale nulle ou bien de composante tangentielle (voir [3] pour une version plus générale).

Proposition 9 :
*Soient $k \leq 2$ et $m \geq 0$ deux entiers . Soit $\mathbf{v} \in W^m_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)^3$ si $m \geq 1$ (et $\mathbf{v} \in H_k(div, \mathbb{R}^3_+)$ si $m = 0$) telle que $div\, \boldsymbol{v} = 0$,
alors, il existe une unique fonction $\boldsymbol{\varphi} \in W^{m+1}_{m+k}(\mathbb{R}^3_+)^3 / H^{\Delta}_{-k}$ dépendant continuement de $\boldsymbol{u}$ telle que*

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ div\, \boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0} & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

Preuve : Voir [3] Théorème25

Proposition 10 :
Soient $k \leq 2$ et $m \geq 0$ deux entiers, et soit $\mathbf{v} \in W^m_{k+m}(\mathbb{R}^3_+)^3$ si $m \geq 1$ (et $\mathbf{v} \in H_k(div, \mathbb{R}^3_+)$ si $m = 0$) une fonction telle que

$$\begin{cases} div\, \boldsymbol{v} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \boldsymbol{v}.\boldsymbol{e}_3 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

Alors il existe une unique fonction $\boldsymbol{\varphi} \in W^{m+1}_{k+m}(\mathbb{R}^3_+)^3 / G^{\Delta}_{-k}$ dépendant continuement de $\boldsymbol{v}$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ div\, \boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \boldsymbol{\varphi}. \wedge \boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0} & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

Preuve : Voir [3] Théorème24

6) PREMIERE FORMULATION MIXTE :

Soit k un entier. Considérons dans une première étape le système non homogène (P_1) avec

$$\boldsymbol{f} \in W_k^{-1}(\mathbb{R}_+^3)^3, \; h \in W_k^0(\mathbb{R}_+^3) \quad \text{et } \boldsymbol{g} \in W_k^{1/2}(\Sigma)^3$$

Alors d'après la proposition 5, on peut introduire un champ de vecteurs $\boldsymbol{u}_0 \in W_k^1(\mathbb{R}_+^3)$ solution du problème

$$\begin{cases} div\, \boldsymbol{u}_0 = h & \text{dans} \quad \mathbb{R}_+^3 \\ \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{g} & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

où les fonctions h et $\boldsymbol{g}$ vérifient la condition de compatibilité (6) lorsque $k \geq 1$.

En conséquence on supposera pour simplifier que $h = 0$ et $\boldsymbol{g} = 0$.

Par la suite , on aboutit au problème de Stokes homogène suivant :

Trouver $u \in W_k^1(R_+^3)^3$ *et* $p \in W_k^0(R_+^3)$ s*olution de*

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \textit{dans} \quad \mathbb{R}_+^3 \\ div\, \boldsymbol{u} = 0 & \textit{dans} \quad \mathbb{R}_+^3 \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \textit{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

où $\boldsymbol{f} \in W_k^{-1}(\mathbb{R}_+^3)^3$, $h \in W_k^0(\mathbb{R}_+^3)$ *et* $\boldsymbol{g} \in W_k^{1/2}(\Sigma)^3$.

Le problème bien posé, la régularité et le noyau du problème (P_2) ont été traité dans [3] pour plusieurs types de comportements au voisinage de l'infini. Ici notre attention est focalisée sur la formulation de ce problème en termes de vorticité et de potentiel vecteurs. Une telle formulation semble bien posée au sens de Babuska-Brezzi seulement dans le cas intermédiaire $k = 0$, pour lequel il ya une dualité entre le comportements au voisinage de l'infini de la vorticité et du potentiel vecteur. Notons aussi que le problème (P_2) admet aussi une formulation mixte directe en termes de vitesse et de pression lorsque $k = 0$ (voir [2]). Dans la suite, nous considérons le problème (P_2) lorsque $k = 0$.

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 3 :
Soit $f \in H_1^{-1}(div\,;\ \mathbb{R}^3_+)$.
Alors,

$$\mathbf{rot}\, f \in H_2^{-1}(\mathbf{rot};\ \mathbb{R}^3_+)$$

et

$$\|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f}\,\|_{H_2^{-1}(\mathbf{rot};\, \mathbb{R}^3_+)} \leq \|\boldsymbol{f}\,\|_{H_1^{-1}(div\,;\, \mathbb{R}^3_+)} \tag{8}$$

Preuve :
Rappelons que $D(\mathbb{R}^3_+)^3$ est dense dans $\overset{\circ}{H}_{-2}\big((\mathbf{rot};\ \mathbb{R}^3_+)\big)$. Soit $\boldsymbol{\varphi} \in D(\mathbb{R}^3_+)^3$, alors $\mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{H}_{-1}\big(\mathbf{rot};\ \mathbb{R}^3_+\big)$ et

$$\|\mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi}\|_{H_{-1}(div;\, \mathbb{R}^3_+)} = \|\mathbf{rot}\varphi\|_{W^0_{-2}(\mathbb{R}^3_+)}$$

Au sens des distributions, on peut écrire

$$\langle \mathbf{rotf}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{D'(\mathbb{R}^3_+),D(\mathbb{R}^3_+)} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi}\rangle_{H_1^{-1}(div\,;\, \mathbb{R}^3_+),\overset{\circ}{H}_{-1}\left(div;\, \mathbb{R}^3_+\right)}$$

Il s'en suit que ,

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{rotf}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| &\leq \|\boldsymbol{f}\,\|_{H_1^{-1}(div\,;\, \mathbb{R}^3_+)} \|\mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi}\|_{\overset{\circ}{H}_{-1}(div;\, \mathbb{R}^3_+)} \\ &\leq \|\boldsymbol{f}\,\|_{H_1^{-1}(div\,;\, \mathbb{R}^3_+)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\overset{\circ}{H}_{-2}(rot;\, \mathbb{R}^3_+)} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Maintenant, supposons que $\boldsymbol{u} \in W_0^1(\mathbb{R}^3_+)^3$ est solution de (P_2).
On associe à $\boldsymbol{u}$ deux champs de vecteurs de la manière suivante .
- La vorticité de $\boldsymbol{u}$ est le champ de vecteur de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3_+)^3$ donné par

$$\boldsymbol{w} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{u}. \tag{9}$$

- Le potentiel vecteur de $\boldsymbol{u}$ est l'unique champ de vecteurs $\boldsymbol{\varphi} \in X^N_{-1}(\mathbb{R}^3_+)$ vérifiant

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ div\,\boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \int_{\mathbb{R}^3_+} \frac{\boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{e}_3}{\rho^4} dx = 0 \end{cases} \tag{10}$$

L'existence et l'unicité de $\boldsymbol{\varphi}$ est assurée par la proposition 10.
Les fonctions vectorielles $\boldsymbol{\varphi}$ et $\boldsymbol{w}$ sont reliées par l'identité

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{w} \quad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^3_+ \tag{11}$$

Considérons maintenant les deux espaces

$$X = \left\{ \boldsymbol{\eta} \in \overset{\circ}{H}_0(div\,; \mathbb{R}^3_+);\ \mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\eta} \in H_2^{-1}(\mathbf{rot}\,; \mathbb{R}^3_+) \right\}$$
$$M = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}^N_{-1}(\mathbb{R}^3_+); \quad \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^{-4} \boldsymbol{\varphi}.\boldsymbol{e}_3 dx = 0 \right\}$$

équippés de leurs normes naturelles. Notons l'injection suivante :

$$M \hookrightarrow \overset{\circ}{H}_{-2}(\mathbf{rot}\,; \mathbb{R}^3_+).$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

Proposition 11 :
Supposons que $f \in H_1^{-1}(div\,;\ \mathbb{R}^3_+)$ $(\hookrightarrow W_0^{-1}(\mathbb{R}^3_+)^3)$, et soit $(u, p) \in W_0^1(\mathbb{R}^3_+)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3_+)$ la solution du problème (P_2).
Alors, le couple (w, φ) appartient à $X \times M$ et est solution du problème

$$(P_3) \quad \begin{cases} \forall \boldsymbol{\eta} \in X, & \int_{\mathbb{R}^3_+} \boldsymbol{w}.\boldsymbol{\eta} dx - \langle \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi} \rangle\ - \delta \int_{\mathbb{R}^3_+} div\,\boldsymbol{\eta}.div\,\boldsymbol{\varphi} dx = 0 \\ \forall \boldsymbol{v} \in M, & \langle \mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle\ + \delta \int_{\mathbb{R}^3_+} div\,\boldsymbol{w}.div\,\boldsymbol{v} dx = \nu^{-1} \langle \mathbf{rot}\,\boldsymbol{f}\,, \boldsymbol{v} \rangle \end{cases}$$

pour tout nombre réel δ .

Preuve :
On a par définition $\boldsymbol{\varphi} \in M$. On remarque que

$$\begin{cases} div\mathbf{w} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \mathbf{w}.\mathbf{e}_3 = div_T(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_3) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

et

$$\mathbf{rot\ rot\ w} = -\mathbf{rot}\ (\Delta \mathbf{u}) = \nu^{-1}\mathbf{rot\ f}$$

et donc, $\mathbf{w} \in X$ d'après le lemme 3. La deuxième égalité du problème (P_3) se déduit facilement à partir de la dernière égalité. La première égalité se déduit directement de (11) et de l'injection $M \hookrightarrow \overset{\circ}{H}_{-2}(\mathbf{rot}\,;\ \mathbb{R}^3_+)$.

Le problème (P_3) peut être écrit sous une formulation abstraite de la forme :

$$(P_3') \qquad \begin{cases} \text{trouver} \quad \boldsymbol{w} \in X, \quad \boldsymbol{\varphi} \in M \ \text{ telles que :} \\ \forall \boldsymbol{\eta} \in X, \qquad a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\eta}) = b_\delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}) \\ \forall \boldsymbol{v} \in M, \qquad b_\delta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v}) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\eta}) = \textstyle\int_{\mathbb{R}^3_+} \boldsymbol{w}.\boldsymbol{\eta} dx \\ &b_\delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{rot\ rot}\,\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}\, \rangle + \delta \textstyle\int_{\mathbb{R}^3_+} div\,\boldsymbol{\varphi}.div\boldsymbol{\eta} dx \\ &\ell(\boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{\nu} \textstyle\int_{\mathbb{R}^3_+} \boldsymbol{f}\,.\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\, dx \end{aligned}$$

Théorème 2 :
Supposons que $\delta > 0$. Alors , le problème (P_3) admet une et une seule solution $(w, \varphi) \in X \times M$.

De plus on a,

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{w}\|_X \leq C_1 \beta_0^{-1} \|\boldsymbol{f}\,\|_{H_1^{-1}(div\,;\,\mathbb{R}^3_+)} \\ &\|\boldsymbol{\varphi}\|_{X_{-1}(\mathbb{R}^3_+)} \leq C_2 \beta_0^{-1} \|\boldsymbol{f}\,\|_{H_1^{-1}(div\,;\,\mathbb{R}^3_+)}, \end{aligned} \tag{12}$$

où $\beta_0 = \nu \min(1, \delta)$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ sont deux constantes ne *dépendant pas de f, ν et δ.*

Preuve :
La preuve du Théorème 2 est basée sur le Théorème de Babuska-Brezzi (voir [1] , [4] ou bien [9] . Premièrement, on considère l'espace

$$V_\delta = \{\boldsymbol{\eta} \in X; \quad b_\delta(\boldsymbol{\eta}, v) = 0\}$$

Lemme 4 :
Supposons que $\delta \neq 0$. *Alors , une fonction vectorielle* $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^3_+\right)^3$ *appartient à* V_δ *si et seulement si*

$$\begin{cases} \textbf{rot rot}\boldsymbol{\eta} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ div\boldsymbol{\eta} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \end{cases}$$

Preuve :
Soit $\boldsymbol{\eta} \in V_\delta$ *et posons* $\mathbf{v} = \nabla h$ avec $h \in W^2_{-1}(\mathbb{R}^3_+)$ une solution du problème

$$\begin{cases} \Delta h = \rho^2 div\eta & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ h = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^3_+ \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution . Il s'en suit que

$$b_\delta(\boldsymbol{\eta}, v) = -\delta \int_{\mathbb{R}^3_+} \rho^2 \left|div\boldsymbol{\eta}\right|^2 dx = 0$$

Et donc $div\boldsymbol{\eta} = 0$. D'autre part, pour tout $\mathbf{v} \in D\left(\mathbb{R}^3_+\right)^3$ on a

$$b_\delta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) = \langle \textbf{rot rot } \boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

ce qui montre que $\textbf{rot rot } \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ dans $D'\left(\mathbb{R}^3_+\right)$. Ceci achève la démonstration du lemme 4.
On conclut à partir du Lemme 4 que

$$a\left(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\right) = \left\|\boldsymbol{\eta}\right\|^2_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^3_+\right)} = \left\|\boldsymbol{\eta}\right\|^2_{\mathbf{X}}$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} \in V_\delta$. On conclut que $a(.,.)$ est V_δ -elliptique.
Il reste à montrer la condition inf-sup pour $b_\delta(.,.)$.

Lemme 5 : *(condition inf-sup)*
Supposons $\delta > 0$,
Alors, il existe une constante $\beta > 0$ ne dépendant pas de δ et des fonctions $\boldsymbol{\eta}$ et $\mathbf{v}$ *, telle que :*

$$\inf_{\mathbf{v}\in M} \sup_{\boldsymbol{\eta}\in X} \frac{b_\delta(\boldsymbol{\eta},\mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}^N_{-1}(\mathbb{R}^3_+)}} \geq \beta \min(1,\delta) \tag{13}$$

Preuve :
Soit $\mathbf{v} \in M$ et soit $q \in W^2_1(\mathbb{R}^3_+)$ une solution de l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta q = -div(\rho^{-2}\mathbf{rot\ v}) = -\nabla\left(\frac{1}{\rho^2}\right).\mathbf{rot\ v} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \ (\in W^0_2(\mathbb{R}^3_+) \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

D'après la proposition 3, q existe et satisfait à

$$\|q\|_{W^2_2(\mathbb{R}^3_+)} \lesssim \|\rho^{-3}\boldsymbol{rotv}\|_{W^0_2(\mathbb{R}^3_+)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}^N_{-1}(\mathbb{R}^3_+)}$$

Considérons aussi la fonction $\theta \in W\ ^2_1(\mathbb{R}^3_+)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta\theta = \rho^{-2}div\mathbf{v} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \ (\in W\ ^0_1(\mathbb{R}^3_+) \\ \frac{\partial\theta}{\partial x_3} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

En vertu de la proposition4 , on voit que θ existe et est unique et satisfait à

$$\|\theta\|_{W^2_1(\mathbb{R}^3_+)} \lesssim \|\rho^{-2}div\boldsymbol{v}\|_{W^0_1(\mathbb{R}^3_+)} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}^N_{-1}(\mathbb{R}^3_+)}$$

D'après la propoition 9 il existe un unique champ de vecteurs $\mathbf{w}_0 \in W^1_1(\mathbb{R}^3_+)^3$ solution du problème

$$\begin{cases} \mathbf{rot\ w}_0 = \rho^{-2}\mathbf{rot\ v} + \nabla q & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \in W^0_1(\mathbb{R}^3_+) \\ div\ \mathbf{w}_0 = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \mathbf{w}_0.\mathbf{e}_3 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

On prend $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_0 + \nabla\theta$. Il est clair que $\boldsymbol{\eta}$ appartient à X et

$$b_\delta(\boldsymbol{\eta},\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^3_+} \left|\rho^{-1}\mathbf{rot\ v}\right|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^3_+} \left|\rho^{-1}div\ \mathbf{v}\right|^2 dx$$

Ici, on a utilisé l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} \mathbf{rot}\ \mathbf{v}.\nabla q dx = 0$$

L'inégalité (13) se déduit de la propoition 8. Ceci achève aussi la démonstration du Théorème 2 et du lemme 5.

7) LA SECONDE FORMULATION :

Le but principal dans cette partie est de donner une deuxième formulation du problème (P_2) lorque le membre de droite $\boldsymbol{f}$ est légèrement plus régulier. La première étape de cette formulation consiste à introduire deux opérateurs potentiels vecteurs P_T et P_N definis de l'espace $X^T_{1,0}(\mathbb{R}^3_+) = \{\boldsymbol{\eta} \in X^T_1(\mathbb{R}^3_+);\ div\, \boldsymbol{\eta} = 0\}$, vers $W^2_1(\mathbb{R}^3_+)^3$ comme suit :

P_T : fait correpondre à chaque $\boldsymbol{\eta} \in X^T_{1,0}(\mathbb{R}^3_+)$, un seul champ de vecteurs $\boldsymbol{\Phi} \in W^2_1(\mathbb{R}^3_+)^3$ vérifiant

$$\begin{cases} \textbf{rot}\, \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\eta} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ div\, \boldsymbol{\Phi} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{e}_3 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

P_N fait correpondre à chaque $\boldsymbol{\eta} \in X^T_{1,0}(\mathbb{R}^3_+)$, un seul champ de vecteurs $\boldsymbol{\Phi} \in W^2_1(\mathbb{R}^3_+)$ vérifiant

$$\begin{cases} \textbf{rot}\, \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\eta} & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ div\, \boldsymbol{\Phi} = 0 & \text{dans} \quad \mathbb{R}^3_+ \\ \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{e}_3 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

Grâce aux propositions 9 et 10, on montre que ces opérateurs linéaires sont bien définis et sont continus de $X^T_{1,0}(\mathbb{R}^3_+)$ vers $W^1_0(\mathbb{R}^3_+)^3$.

Considérons maintenant le sous-espace fermé $\tilde{X}$ de $X^T_1(\mathbb{R}^3_+)$ défini par

$$\tilde{X} = \{\boldsymbol{\eta} \in X^T_{1,0}(\mathbb{R}^3_+);\ (P_T - P_N)\boldsymbol{\eta} = 0\}.$$

Il est clair que

$$\tilde{X} = \{\boldsymbol{\eta} = \textbf{rot}\ \boldsymbol{\Phi};\quad \boldsymbol{\Phi} \in \overset{\circ}{W}{}^1_0(\mathbb{R}^3_+)^3 \cap W^2_1(\mathbb{R}^3_+)^3\}.$$

D'un autre coté, on pose

$$\tilde{M} = \{\boldsymbol{\varphi} \in M;\ div\, \boldsymbol{\varphi} = 0\}.$$

On établit le Théorème suivant :

Théorème 3 :
Supposons que $f \in W_1^0(\mathbb{R}_+^3)^3$ *et soit* $(u,p) \in W_0^1(\mathbb{R}_+^3)^3 \times \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^3)$ *une solution du problème* (P_2).
Alors le couple correpondant (w,φ) *appartient à l'espace* $\tilde{X} \times \tilde{M}$ *et est solution du problème*

$$(P_4)\quad \begin{cases} \forall \boldsymbol{\eta} \in \tilde{X}, & \int_{\mathbb{R}_+^3} \boldsymbol{w}.\boldsymbol{\eta} dx - \int_{\mathbb{R}_+^3} \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\eta}.\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi} dx = 0, \\ \forall \mathbf{v} \in \tilde{M}, & \int_{\mathbb{R}_+^3} \mathbf{rot}\ \ \mathbf{w}.\mathbf{rot}\,\mathbf{v} dx = \nu^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^3} \boldsymbol{f}.\mathbf{rot}\ \mathbf{v} dx. \end{cases}$$

De plus, le problème (P_4) *admet une et une seule solution* $(w,\varphi) \in \widetilde{X} \times \widetilde{M}$ *et on a :*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w}\|_{W_1^1(\mathbb{R}_+^3)} &\leq c_1 \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{W_1^0(\mathbb{R}_+^3)^3} \\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_{W_{-1}^1(\mathbb{R}_+^3)} &\leq c_2 \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{W_1^0(\mathbb{R}_+^3)^3} \end{aligned} \tag{14}$$

Preuve :
On sait maintenant de [2] (Théorème 4.1) que $\mathbf{u}$ appartient à $W_1^2(\mathbb{R}_+^3)^3$. Et donc , $\mathbf{w} = \mathbf{rotu} \in \widetilde{X}$ puisque $P_T\mathbf{w} = P_N\mathbf{w} = \mathbf{u}$. Le couple $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi})$ est évidemment solution de (P_4) . Le problème (P_4) est similaire à (P_3') avec X remplacé par $\widetilde{X}$, et M remplacé par $\widetilde{M}$ et aussi $b_\delta(.,.)$ remplacé par

$$\widetilde{b}_\delta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\eta}\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v} dx$$

On pose

$$\widetilde{V} = \left\{ \boldsymbol{\eta} \in \widetilde{X}\ ;\ \widetilde{b}_\delta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{pour tout} \ \ \mathbf{v} \in \widetilde{M} \right\}$$

Soit $\boldsymbol{\eta} \in \widetilde{V}$ et posons $\boldsymbol{\Phi} = P_N\boldsymbol{\eta} = P_T\boldsymbol{\eta}$.
Alors il existe un champ de vecteurs $\mathbf{v}_0 \in M$ tel que $\mathbf{rot}\ \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Phi}$ et $div\mathbf{v}_0 = 0$.
Comme $\mathbf{v}_0 \in \widetilde{M}$, on trouve

$$0 = \widetilde{b}_\delta(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\eta}\ \boldsymbol{\Phi} dx = \int_{\mathbb{R}_+^3} |\boldsymbol{\eta}|^2 \, dx$$

Donc $\boldsymbol{\eta} = 0$ et $\widetilde{V} = \{0\}$. Il s'ensuit que la $\widetilde{V}$ -ellipticité de $a(.,.)$ est trivial.
Montrons maintenant que $\widetilde{b}(.,.)$ vérifie la condition $\inf - \sup$

Lemme 6 :
Il existe une constante $\widetilde{\beta}$ *telle que :*

$$\inf_{\mathbf{v}\in\widetilde{M}} \sup_{\boldsymbol{\eta}\in\widetilde{X}} \frac{\widetilde{b}(\boldsymbol{\eta},\mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{X}_1^T} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_{-1}^N(\mathbb{R}_+^3)}} \geq \widetilde{\beta}$$

Preuve :
Soit $\mathbf{v} \in \widetilde{M}$ et considérons $\boldsymbol{\Phi} \in W_1^2(\mathbb{R}_+^3)^3$ solution de l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{\Phi} = \rho^{-2}\mathbf{rot\ v} & \text{dans} \quad \mathbb{R}_+^3 \\ \boldsymbol{\Phi} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

En posant $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{rot\ \Phi} \in \widetilde{X}$, on obtient

$$b(\boldsymbol{\eta}_0,\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \mathbf{rot\ rot\ \Phi\ rot\ v} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^3} [-\Delta\boldsymbol{\Phi} + \nabla(div\boldsymbol{\Phi})]\, \mathbf{rot\ v} dx$$
$$= \|\rho^{-1}\mathbf{rot\ v}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^3)}$$

La démonstration du Lemme s'achève en remarquant que

$$\|\boldsymbol{\eta}_0\|_{\mathbf{X}_1^T}^2 \leq C \left\|\rho^{-1}\mathbf{rot\ v}\right\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^3)}$$

La preuve du Théorème 3 et terminée.

8) REFERENCES :

[1] I. Babuska. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math.,* 20 :179-192, 1972/73.

[2]. T. Z. Boulmezaoud. On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half space : an approch via weighted Sobolev spaces. *Math. Methods Appl. Sc.*, 25(5) : 373-398 , 2002.

[3]. T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half space : an approch using weighted spaces. *Math. Methods Appl. Sc.,* 26(8) : 633-669, 2003.

[4]. F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems from Lagragian multipliers. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge,* 8(R-2) : 129-151, 1974.

[5]. Lumberto Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* 31 : 308-340, 1961

[6]. G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I, volume38 of Springer Tracts in Natural Philosophy.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[7]. V. Girault. The divergence, curl and Stokes operator in exterior domains of $\mathbb{R}^3_+$. *In recent development in theoretical fluid mechanics (Paseky, 1992), volume 291 of Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 34-77 Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.

[8]. V. Girault. The Stokes problem and vector potential operator in three dimensional exterior domains : an approch in weighted Sobolev spaces. *Differential Integral Equations,* 7(2) :535-570, 1994.

[9]. V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations,* Volume 5 *of Springer Series in Computational Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[10]. B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids, application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rend. Sem. Nat. Univ. Padova,* 46 :227-272, 1971.

[11]. J. G. Heywood. On uniqueness questions in the theory of viscous flow. *Acta Math.*, 136(1-2) : 61-102, 1976.

[12]. V.A. Koudratev. Boudary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 16 :227-313, 1967.

[13]. A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces.* A Wiley- Interscience Publication. John Wiley and Sons Inc., New York, 1985.

[14]. L. Cattabriga. Su un problema al contorno relayivo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* 31 :308-40, 1961

PARTIE E

SYSTEME D'EQUATIONS DE NAVIER – STOKES

1) INTRODUCTION :

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine quelconque de $\mathbb{R}^3$. On s'intérèsse dans cette partie, aux domaines non bornés, $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω . Nous considérons dans Ω, le système d'équations de Naviers Stokes de la forme :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u\nabla u + \nabla p = f \ ; \quad div\ u = 0 \\ \qquad\qquad u_{|\partial\Omega} = 0 \ , \quad u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Les fonctions inconnues à savoir le champ de vitesse $u = (u_1, u_2, u_3)$ et la pression p, décrivent l'écoulement d'un fluide incompressible soumis à une force $f = (f_1, f_2, f_3)$ donnée et u_0 est la vitesse initiale, à travers le domaine

$$Q = [0, T) \times \Omega \ \text{ où } \ 0 < T \leq +\infty$$

Le but est de construire des solutions faibles de (1.1) ayant de nouvelles propriétés en particuliers celles concernant le comportement asymptotique de u lorsque t tend vers $+\infty$.

Dans une première étape nous rappelons certains résultats concernant le système de Stokes non stationnaire dans un domaine quelconque.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = f \ ; \quad div\ u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \ , \quad u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

2) NOTATIONS ET RESULTATS PRINCIPAUX :

On désignera par

$$(u,v) = (u,v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, et on notera $W^{k,p}(\Omega) \quad k,\ p = 1,2,...$ les espaces de Sobolev usuels.
Pour $q \geq 1$; $s \geq 1$; $0 < T \leq +\infty$ et X un espace de Banach de norme $\|.\|_X$, $\mathbf{L}^s(0,T;X)$ est l'espace des fonctions u de norme finie :

$$\|u\|_{\mathbb{L}^s(0,T;X)} = \|u\|_{X,s,T} = \left(\int_0^T \|u\|_X^s \, dt\right)^{\frac{1}{s}}$$

Si $X = \mathbf{L}^q(\Omega)$, on notera

$$\|u\|_{\mathbb{L}^s(0,T;\mathbb{L}^q(\Omega))} = \|u\|_{q,s,T}$$

On notera par $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions régulières à support compact inclu dans Ω et par $(C_0^\infty(\Omega))'$ l'espace des distributions sur Ω. On notera par $[f,v]_\Omega$, la valeur de $f \in (C_0^\infty(\Omega))'$ au point v.

Soit $u \in \mathbf{L}^s(0,T;X)$ avec $1 \leq s \leq +\infty$; on dira que

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}^s(0,T;X)$$

s'il existe une fonction $f \in \mathbf{L}^s(0,T;X)$ et une fonction $u_0 \in X$ telle que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau)d\tau \quad \text{pour presque tout } t \in [0:T)$$

Dans ce cas, on redéfinit u sur un sous ensemble de $[0, T)$ de mesure nulle tel que u soit continue et on pose

$$u(0) = u_0,$$

on dira que u est continue presque partout et on écrit :

$$u_t = f.$$

En outre, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{array}{l} C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in D(\Omega)^3; \quad div\mathbf{v} = 0\} \\ \mathbf{L}_{\sigma}^2(\Omega) = \overline{C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)}^{\|.\|_2} \subseteq \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \\ G(\Omega) = \{\bigtriangledown p \in \mathbf{L}^2(\Omega)^3\ ; \quad p \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \end{array}$$

Nous avons la décomposition orthogonale suivante

$$\mathbf{L}^2(\Omega)^3 = \mathbf{L}_{\sigma}^2(\Omega) \oplus G(\Omega)$$

C'est à dire que chaque fonction de $\mathbf{L}^2(\Omega)^3$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$f = f_0 + \bigtriangledown p \quad \text{où} \quad f_0 \in \mathbf{L}_{\sigma}^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \bigtriangledown p \in G(\Omega)$$

On définit la projection de Helmotz par

$$P : \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \longrightarrow \mathbf{L}_{\sigma}^2(\Omega)$$

avec $Pf = f_0$.

Le sous espace $W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega) \subseteq W^{1,2}(\Omega)$ est défini par :

$$W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega) = \overline{C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)}^{\|.\|_{W^{1,2}}}$$

où

$$\begin{array}{l} \|u\|_{W^{1,2}}^2 = \|u\|_2^2 + \|\bigtriangledown u\|_2^2 \\ \|\nabla u\|_2 = \left(\sum_{j,k=1}^{3} \|D_{jk} u_k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\nabla u, \nabla v)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

L'opérateur de Stokes

$$A : D(A) \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$$

avec son domaine $D(A) \subseteq \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ où

$$D(A) = \left\{ u \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) \; ; \; v \longmapsto (\nabla u, \nabla v) \text{ est continue pour la norme } \|.\|_2 \right\}$$

est défini par

$$(Au, v) = (\nabla u, \nabla v), \qquad u \in D(A) \text{ et } \; v \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$$

Alors A est un opérateur positif auto-adjoint.

Toutes les propriétés de A qu'on utilisera dans la suite se déduisent à partir de la représentation spectrale :

$$A = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda$$

où E_λ est la projection orthogonale dans $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ en particulier on a besoin de la résolvante

$$(\mu + A)^{-1} = (\mu I + A)^{-1} = \int_0^{+\infty} (\mu + \lambda)^{-1} \, dE_\lambda$$

les puissances fractionnaires sont définies par :

$$A^\alpha = \int_0^{+\infty} \lambda^\alpha dE_\lambda$$

où

$$D(A^{\alpha}) = \left\{ u \in \mathbf{L}^2_{\sigma}(\Omega); \int\limits_0^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d\left\|E_{\lambda}\right\|_2^2 < +\infty \right\} \qquad \text{où } -1 \leq \alpha \leq 1$$

Pour les opérateurs

$$e^{-tA} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\lambda} dE_{\lambda}, \quad t \geq 0$$

on a besoin des inégalités suivantes :

$$\left\|A^{\alpha}(\mu + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\mu^{1-\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \mu > 0, \tag{1.3}$$

$$\left\|A^{\alpha}e^{-tA}\right\| \leq \frac{1}{t^{\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad t \geq 0 \tag{1.4}$$

Les opérateurs

$$J_k = \left(I + k^{-1}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}, \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sont appelés approximations de Yoshida, nous les utiliserons comme procédures régularisantes (voir H. Sohr $[25] - [26]$). Avec ces notations, nous avons les résultats connus suivants :

$$\begin{aligned} &\|J_k\| \leq 1, \\ &v = \lim_{n \longrightarrow +\infty} J_k v \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2_{\sigma}(\Omega) \ \text{ pour tout } \ v \in \mathbf{L}^2_{\sigma}(\Omega) \end{aligned}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ on a

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) \quad \text{et} \quad (\nabla u, \nabla v) = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v), \quad u, v \in D(A^{\frac{1}{2}})$$

Pour $v \in \mathbf{L}^2_{\sigma}(\Omega)$, l'application $t \longmapsto e^{-tA}v$ est fortement continue et on a :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \left\| e^{-tA} v \right\|_2 = 0 \tag{1.5}$$

L'application $t \longmapsto e^{-tA}v$ est notée par $e^{-.A}v$. On notera aussi la propriété d'interpolation obtenue par Friedman [8] .

$$\|u\|_q \leq c(\|u\|_{q_0} + \|u\|_{q_1}) \tag{1.6}$$

ou $1 \leq q_0 < q < q_1 < +\infty$, $\dfrac{1}{q} = \alpha \dfrac{1}{q_0} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q_1}$, avec $0 < \alpha < 1$.

Définition 1.1 :
Soient $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$, $f = divF$ *avec* $F \in \mathbf{L}^2_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^9)$.
Une fonction mesurable u *définie sur* $[0,T) \times \Omega$ *est dite solution faible de* (1.1) *si elle vérifie :*

1) $u \in \mathbf{L}^\infty_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2_{loc}([0,T)\,;W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega))$
2) $-(u,v_t)_{\Omega,T} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega,T} - (uu, \nabla v)_{\Omega,T} = (u_0, v(0))_\Omega - (F, \nabla v)_{\Omega,T}$,

pour tout $v \in C_0^\infty([0,T)\,;C^\infty_{0,\sigma}(\Omega))$

Comme $divu = 0$, on a alors $div(uu) = 2u\nabla u$ et

$$(u\nabla u, v)_{\Omega,T} = (div(uu), v)_{\Omega,T} = -(uu, \nabla v)_{\Omega,T}$$

Si on suppose qu'une solution faible u de (1.1) vérifie en plus la condition

$$uu \in \mathbf{L}^2_{loc}\left([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)\right),$$

alors pour tout $0 < T' < T$ on obtient

$$(u\nabla u, u)_{\Omega,T'} = (div(uu), u)_{\Omega,T'} = -(u, \frac{1}{2}\nabla |u|^2)_{\Omega,T'} = +(divu, \frac{1}{2}|u|^2)_{\Omega,T'} = 0$$

On définit également les opérateurs de projection P et les opérateurs d'extention $A^{-\frac{1}{2}}P$ de la manière suivante :

Pour $f \in (C_0^\infty(\Omega))'$, Pf signifie tout simplement la restriction à $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$:

$$Pf = f_{|C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}$$

$$A^{-\frac{1}{2}}P : D(A^{-\frac{1}{2}}P) \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$$

est définie comme suit, $D(A^{-\frac{1}{2}}P)$ contient toutes les fonctions $f \in (C_0^\infty(\Omega))'$ telles que

$$(f, v) = (Pf, A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}v) = (Pf, A^{-\frac{1}{2}}w)$$

avec $v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$, $w = A^{\frac{1}{2}}v$,
Alors w définit une fonction continue en $\|w\|_2$. $A^{-\frac{1}{2}}Pf \in \mathbf{L}_\sigma^2(\Omega)$ est définit pour $f \in D(A^{-\frac{1}{2}}P)$ par la relation

$$(Pf, A^{-\frac{1}{2}}w) = (A^{-\frac{1}{2}}Pf, w)$$

On a utilisé le théorème de représentation de Riesz.
Si en particulier $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)^3$ et $Pf \in D(A^{-\frac{1}{2}})$ alors $A^{-\frac{1}{2}}Pf$ a son sens naturel et donc

$$D(A^{-\frac{1}{2}}P) \subset (C_0^\infty(\Omega))'$$

Dans notre étude on traîte seulement le cas $T = +\infty$.

On a besoin d'hypothèses spéciales sur f et u_0 qui nous donnent une décroissance de u dans l'espace et dans le temps. On s'intérèsse aux cas $q > 1$ et $\rho > 1$ les plus petits possibles tels que

$$\|u\|_{q,\rho,\infty} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(t)\|_q^\rho \, dt \right)^{\frac{1}{\rho}} < +\infty$$

Plus q et ρ sont petits , plus il ya la décroissance forte de u en temps et plus les résultats sont meilleurs.

2.1) SYSTEME DESTOKES (Cas linéaire)

Considérons l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u + \nabla p = f; \quad div\ u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \quad u(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

dans $[0,T) \times \Omega$, $0 < T \leq +\infty$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Définition 2.1 :

Soient $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$, $1 \leq s < +\infty$, $f = div\ F$ *avec* $F \in \mathbf{L}^s_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^9)$. *Une fonction mesurable* u *définie sur* $[0,T) \times \Omega$ *est dite solution faîble de* (2.1) *si elle vérifie :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad u \in \mathbf{L}^\infty_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2_{loc}([0,T)\,;W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)) \\ 2) - (u, v_t)_{\Omega,T} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega,T} = (u_0, v(0))_\Omega - (F, \nabla v)_{\Omega,T}, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

pour tout $v \in C^\infty_0\left([0,T)\,;C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)\right)$.

2.2) INEGALITE D'ENERGIE :

Proposition 2.1 :

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $0 < T \leq +\infty$, $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$, $f = divF$ *(avec* $F \in \mathbf{L}^s_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^9)$ *) et* u *une solution faîble de l'équation* (2.1).
Alors u *est déterminée de manière unique et vérifie :*

$$\frac{1}{2}\left\|\Phi(t)u(t)\right\|_2^2 + \int_0^t \left\|\Phi\nabla u\right\|_2^2 d\tau = \frac{1}{2}\left\|\Phi(0)u_0\right\|_2^2 - \int_0^t \left\langle \Phi^2 F, \nabla u\right\rangle d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi^2_\tau \left\|u\right\|_2^2 d\tau \tag{2.3}$$

pour presque tout $t \in [0,T)$ *et pour toute fonction continue* $\Phi : [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\Phi^2_t \in \mathbf{L}^1_{loc}([0,T)\,;\mathbb{R})$.

En particulier on a :

$$\frac{1}{2}\left\|u(t)\right\|_2^2+\int\limits_0^t\left\|\nabla u\right\|_2^2 d\tau=\frac{1}{2}\left\|u_0\right\|_2^2-\int\limits_0^t(F,\nabla u)d\tau \tag{2.4}$$

pour presque tout $t\in[0,T)$ *. De plus on a :*

$$\left\|u\right\|_{2,\infty;T'}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,2;T'}^2\leq\left\|u_0\right\|_2^2+\left\|F\right\|_{2,2;T'}^2 \tag{2.5}$$

pour tout $0<T'<T$ *.*

Démonstration :

Utilisons l'égalité suivante :

$$\left\|\nabla v\right\|_2=\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|_2$$

Soit $v\in D(A^{\frac{1}{2}})$ on a

$$\left\|\nabla A^{-\frac{1}{2}}v\right\|_2=\left\|v\right\|_2\qquad\text{pour tout}\qquad v\in D(A^{-\frac{1}{2}})\ ,$$

On en déduit alors que l'opérateur $\nabla A^{-\frac{1}{2}}$ et borné et que

$$\left\|\nabla A^{-\frac{1}{2}}\right\|\leq 1$$

(avec $\|.\|$ comme norme d'opérateur). Comme

$$(A^{-\frac{1}{2}}PdivF,w)_\Omega=(divF,A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}v)_\Omega=-(F,\nabla v)_\Omega$$

avec $w=A^{\frac{1}{2}}v$ où $v\in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$, on en déduit que

$$\left|(A^{-\frac{1}{2}}PdivF,w)_\Omega\right|\leq\left\|F\right\|_2\left\|\nabla v\right\|_2=\left\|F\right\|_2\left\|w\right\|_2$$

ce qui montre que l'opérateur $A^{-\frac{1}{2}}PdivF$ est borné et vérifie :

$$\left\|A^{-\frac{1}{2}}PdivF\right\|\leq 1 \tag{2.6}$$

Soit l'approximation de Yoshida qui consiste à poser

$$
\begin{aligned}
&u_k = J_k u, \\
&u_{0k} = J_k u_0, \\
&J_k = \left(I + k^{-1} A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}, \ k \in \mathbb{N}, \\
&w = w_k = \left(I + k^{-1} A^{\frac{1}{2}}\right) v
\end{aligned}
$$

et on substitue $v = J_k w$ dans (2.2) pour obtenir :

$$-(u_k, w_t)_{\Omega,T} + (Au_k, w)_{\Omega,T} = (u_{0k}, w(0))_\Omega + (A^{\frac{1}{2}} J_k A^{-\frac{1}{2}} P div F, w)_{\Omega,T}$$

$$u_k, Au_k, A^{\frac{1}{2}} J_k A^{-\frac{1}{2}} P \in \mathbf{L}^2(0, T'; \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)) \text{ pour tout } \ 0 < T' < T$$

et

$$\frac{d}{dt} u_k + Au_k = A^{\frac{1}{2}} J_k A^{-\frac{1}{2}} P div \ F \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T) \qquad (2.7)$$

Multiplions (2.7) par u_k, intègrons de 0 à t tout en utilisant l'inégalité

$$\left| (A^{-\frac{1}{2}} P div F, A^{\frac{1}{2}} u_k)_\Omega \right| \leq \frac{1}{2} \|F\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_k\|_2^2$$

on obtient l'estimation

$$\|u_k(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_k\|_2^2 \, d\tau \leq \|u_0\|_2^2 + \int_0^t \|F\|_2^2 \, d\tau$$

Pour avoir (2.3) on multiplie (2.7) par Φ et on considère le produit scalaire avec Φu_k et on intègre de 0 à t. Par passage à la limite lorsque $k \longrightarrow +\infty$ et et en utilisant le Théorème de Lebesgue lors du passage à la limite lorsque $k \longrightarrow +\infty$, on obtient : (2.3) et (2.4).

Pour montrer l'unicité , il suffit de considérer le cas ou $F = 0$ et u_0 et de conclure que $u \equiv 0$.

Dans ce qui va suivre on donnera une représentation explicite de la solution faîble, une représentation qui nous sera utile pour obtenir certaines propriétés de la solution du problème (2.1). Pour cela, on a besoin du résultat suivant :

Proposition 2.2 :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $0 < T \leq +\infty$, $1 < s < \infty$, $f \in \mathbf{L}^s_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega))$ *et*

$$u : [0,T) \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$$

définie par :

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau \qquad 0 \leq t < T \tag{2.8}$$

Alors

$$u_t \ , \ Au \in \mathbf{L}^s_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega))$$

et $u : [0,T) \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ *est fortement continue et vérifie* $u(0) = 0$

$$u_t + Au = f \ \ pp \ \ t \in [0,T) \tag{2.9}$$

et

$$\|u_t\|_{2,s;T'} + \|Au\|_{2,s;T'} \leq c\,\|f\|_{2,s;T'} \ \ avec \ \ 0 < T' < T \ \ et \ \ c = c(s) > 0 \tag{2.10}$$

Si de plus on suppose que $\|f\|_{2,s;T'} < +\infty$, *on a alors :*

$$\|u_t\|_{2,s;T} + \|Au\|_{2,s;T} \leq c\,\|f\|_{2,s;T} \tag{2.11}$$

Démonstration :
La démonstration de ces résultats est donnée par P.Canasara et V.Vespri [3], elle est basée sur les estimations

$$\left\|(\mu + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\mu} \ , \quad \mu > 0,$$

$$\left\|e^{-tA}\right\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \left\|tAe^{-tA}\right\| \leq 1 \ , \ \ t \geq 0.$$

On peut aussi traiter le cas ou $u_0 \neq 0$. Ce cas peut être réduit à $u(0) = 0$ si on soustrait à $u(t)$ la fonction

$$e^{-\cdot A}u_0 : [0,T) \longrightarrow \mathbf{L}^s_\sigma(\Omega),$$

Pour réaliser cela, nous devons obtenir des estimations pour les normes de la forme $\left\|A^\beta e^{-\cdot A}u_0\right\|_{2,s;T}$ et $\left\|e^{-\cdot A}u_0\right\|_{q,s;T}$.. Pour la suite on a besoin aussi du résultat suivant :

Proposition 2.3 :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *et* A *l'opérateur de Stokes .*
1) Si $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ et $2 \leq q \leq 6$ *avec* $2\alpha + \dfrac{3}{q} = \dfrac{3}{2}$ *et* $u_0 \in D(A^\alpha)$,
alors $u_0 \in L^q(\Omega)^3$ *et*

$$\|u_0\|_q \leq c\,\|A^\alpha u_0\|_2 \quad ou \quad c = c(\alpha, q) > 0 \tag{2.12}$$

2) Si $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ *et* $\dfrac{6}{5} \leq q \leq 2$ *avec* $2\alpha + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{q}$ *et* $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega) \cap L^q(\Omega)^3$,
alors $u_0 \in D(A^{-\alpha})$ *et*

$$\left\|A^{-\alpha} u_0\right\|_2 \leq c\,\|u_0\|_q \quad ou \quad c = c(\alpha, q) > 0 \tag{2.13}$$

Démonstration :
Pour la démonstration (voir Y.Giga et H.Sohr [12] et W.Borchers et T.Miyakawa [1]).
1) Considérons l'expression $\|u_0\|_{(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\alpha)^{-1}}$. Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ on trouve d'après le théorème d'injection de Sobolev (voir Friedman [8]) que

$$\|u_0\|_6 \leq c\,\|\nabla u_0\|_2 = c\left\|A^{\frac{1}{2}} u_0\right\|_2 .$$

Pour $\alpha = 0$ on a $\|u_0\|_2 = \|A^0 u_0\|_2$ un argument d'interpolation nous donne (2.12) (voir Y.Giga et H.Sohr [12] et W.Borchers et T.Miyakawa [1]).
2) (2.13) se déduit de (2.12) par dualité, on a

$$\left|(u_0, A^{-\alpha} v)\right| \leq \|u_0\|_q \left\|A^{-\alpha} v\right\|_{q'} \quad \text{avec } v \in D(A^{-\alpha}),$$

ou $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, et en utilisant (2.12) avec $2\alpha + \dfrac{3}{q'} = \dfrac{3}{2}$, on trouve

$$\left\|A^{-\alpha} v\right\|_{q'} \leq c\,\|v\|_2 , \quad \text{et} \quad \left|(u_0, A^{-\alpha} v)\right| \leq c\,\|u_0\|_q \|v\|_2 ,$$

et par suite (2.13) est démontrée car $A^{-\alpha}$ est auto-adjoint.

Soit $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ la propriété d'interpolation

$$\|A^\alpha v\|_2 \leq \left\|A^{\frac{1}{2}} v\right\|_2^{2\alpha} \|v\|_2^{1-2\alpha}, \; v \in D(A^{\frac{1}{2}}) \tag{2.14}$$

se déduit de la représentation spectrale de A et de l'inégalité de Holder et en combinant avec (2.12), on obtient

$$\|u_0\|_q \leq c\,\|\nabla u_0\|_2^{2\alpha}\,\|u_0\|_2^{1-2\alpha} \leq c\,(\|u_0\|_2 + \|\nabla u_0\|_2) \tag{2.15}$$

Pour $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$, $2 \leq q \leq 6$ avec $2\alpha(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + (1-2\alpha)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{q}$ et $2\alpha + \dfrac{3}{q} = \dfrac{3}{2}$. l'estimation (2.15) est un cas spécial des théorèmes d'injection de Sobolev (voir Friedman [8]).

Proposition 2.4 :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $u_0 \in D(A^{-\frac{1}{2}})$, $1 \leq T \leq \infty$, $1 < s \leq 2$, $2 \leq q \leq 6$ *et* $1 < \rho < \infty$ *tels que* $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{\rho} < \dfrac{5}{2}$. *alors*

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}e^{-.A}u_0\right\|_{2,s;T} \leq c\left(\|u_0\|_2 + \left\|A^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|_2\right) \tag{2.16}$$

et

$$\left\|e^{-.A}u_0\right\|_{q,\rho;T} \leq c\left(\|u_0\|_2 + \left\|A^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|_2\right) \tag{2.17}$$

$c = c(s,q,\rho) > 0$ *est une constante.*

Démonstration :
(Voir H. Sohr [27])

Le théorème suivant décrit complètement la solution faîble du système linéaire (2.1) dans le cas $s \in (1,2]$, on en déduit la décroissance forte lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Théorème2.1 :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *un domaine quelconque,* $1 \leq T \leq +\infty$, $u_0 \in D(A^{-\frac{1}{2}})$, $f =$ *div* F *avec*

$$F \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)^9) \cap \mathbf{L}^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)^9)$$

Alors la fonction $u : [0,T) \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ *définie par :*

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + A^{\frac{1}{2}}\int_0^t e^{-(t-\tau)A}A^{-\frac{1}{2}}Pf(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.18}$$

est la seule solution faîble de (2.1) *pour tout* $s \in (1,2]$ *et possède les propriétés suivantes :*

1) $(A^{-\frac{1}{2}}u)_t,\ A^{\frac{1}{2}}u \in L^s(0,T;L^2_\sigma(\Omega))$ *pour tout* $s \in (1,2]$, $A^{-\frac{1}{2}}u$ *est fortement continue*
de $[0,T)$ *vers* $L^2_\sigma(\Omega)$ *et vérifie* $(A^{-\frac{1}{2}}u)(0) = A^{-\frac{1}{2}}u_0$,

$$(A^{-\frac{1}{2}}u)_t + A^{\frac{1}{2}}u = A^{-\frac{1}{2}}Pf \quad \textit{pour presque tout} \quad t \in [0,T) \tag{2.19}$$

et

$$\left\|(A^{-\frac{1}{2}}u)_t\right\|_{2,s;T} + \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_{2,s;T} \leq c\left(\|u_0\|_2 + \left\|A^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|_2 + \|F\|_{2,s;T}\right) \tag{2.20}$$

ou $c = c(s) > 0$ *est une constante.*

2) $u \in L^\rho(0,T;L^q(\Omega)^3)$ *pour tout* $s \in (1,2]$, $\rho \geq s$, $2 \leq q \leq 6$ *tel que* $\dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{\rho} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{s}$ *et vérifie l'inégalité suivante :*

$$\|u\|_{q,\rho;T} \leq c\left(\|u_0\|_2 + \left\|A^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|_2 + \|F\|_{2,s;T}\right) \tag{2.21}$$

ou $c = c(q,\rho,s) > 0$ *est une constante,* u *vérifie aussi*

$$\|u\|_{q,\rho;T} \leq c\left(\|u_0\|_2 + \left\|A^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|_2 + \|F\|_{2,2;T} + \|F\|_{2,1;T}\right) \tag{2.22}$$

pour tout $\rho > 1$, $2 \leq q \leq 6$ *tel que* $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{\rho} \leq \dfrac{5}{2}$ *;* $c = c(q,\rho) > 0$ *est une constante.*

3) $\left\|A^{-\frac{1}{2}}u(t)\right\|_2 \leq \left\|A^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|_2 + \|F\|_{2,1;T}$ *pour tout* $0 \leq t < T$ *et si* $T = \infty$ *on a*

$$\underset{t\longrightarrow\infty}{Lim}\left\|A^{-\frac{1}{2}}u(t)\right\|_2 = 0 \tag{2.23}$$

Remarque :

1) Par interpolation on voit que pour $s \in (1,2]$ on a :

$$\|F\|_{2,s;T} \leq c\left(\|F\|_{2,2;T} + \|F\|_{2,1;T}\right) < \infty \tag{2.24}$$

2) De (2.13) on trouve que si $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\frac{6}{5}}(\Omega)^3$ on a $u_0 \in D(A^{-\frac{1}{2}})$ et $\left\|A^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|_2 \leq c\,\|u_0\|_{\frac{6}{5}}$ et par conséquent

$$u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\frac{6}{5}}(\Omega)^3 \Longrightarrow u_0 \in D(A^{-\frac{1}{2}}) \tag{2.25}$$

Démonstration :
Pour la démonstration du Théorème 2.1, le lecteur peut consulter H. Sohr [27] .

2.3) APPROXIMATION DE L'EQUATION DE NAVIER-STOKES

On modifie l'équation de Navier Stokes (1.1) en remplaçant le terme non linéaire $u\nabla u$ par le terme régulier

$$(J_k u)\nabla u \ \text{ ou } \ J_k u = \left(I + k^{-1}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}, k \in \mathbb{N}$$

signifie l'approximation de Yoshida de u .
Alors au lieu de l'équation (1.1) on obtient l'équation de Navier Stokes régularisée (voir H.Sohr [25] − [26])

$$\left\{ \begin{array}{r} u_t - \Delta u + (J_k u)\nabla u + \nabla p = f \ ; \quad div\ u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \ , \quad u(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Définition 2.2 :
Soient $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$, $1 \leq s < +\infty$, $f = divF$ *avec* $F \in \mathbf{L}^s_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^9)$. *Une fonction mesurable* u *définie sur* $[0,T) \times \Omega$ *est dite solution faible de* (2.26) *si elle vérifie :*

1) $\quad u \in \mathbf{L}^\infty_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2_{loc}([0,T)\,;W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega))$
2) $- (u, v_t)_{\Omega,T} + (\nabla u, \nabla v)_{\Omega,T} - ((J_k u)u, \nabla v)_{\Omega,T} = (u_0, v(0))_\Omega - (F, \nabla v)_{\Omega,T}$,

pour tout $v \in C^\infty_0\,[0,T)\,; C^\infty_{0,\sigma}\,(\Omega)$.

Le théorème suivant montre qu'il existe une seule solution faible $u = u_k$ de (3.1).
Le terme non linéaire $(J_k u)\nabla u$ satisfait les relations :

$$(J_k u)\nabla u = \mathrm{div}(J_k u)u \ \text{ avec } (J_k u)u = ((J_k u)_l u_k)^3_{l,k=1}$$

et

$$\begin{aligned} ((J_k u)\nabla u, u)_{\Omega,T} &= (\mathrm{div}\left[(J_k u)u\right], u)_{\Omega,T} \\ &= -((J_k u)u, \nabla u)_{\Omega,T} \\ &= -(J_k u, \tfrac{1}{2}\nabla \left|u\right|^2)_{\Omega,T} \\ &= (\mathrm{div}(J_k u), \tfrac{1}{2}\left|u\right|^2)_{\Omega,T} = 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Théorème 2.2 :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *un domaine quelconque, soit* $0 < T \leq \infty$, $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ *et* $f = divF$ *avec*

$$F \in \mathbf{L}^2_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^9)$$

Alors pour chaque $k \in \mathbb{N}$, *le système* (2.26) *admet une seule solution faîble*

$$u = u_k \in \mathbf{L}^\infty_{loc}([0,T)\,;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2_{loc}([0,T)\,;W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega))$$

Démonstration :
Pour une démonstration plus détaillée le lecteur peut consulter H. Sohr [27]. Donnons un bref aperçu, pour cela et pour simplifier, supposons que $0 < T < \infty$ et $F \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)^9)$. Comme $T > 0$ est arbitraire l'assertion est vraie dans le cas général. Pour simplifier on pose $\|u\|_T = \|u\|_{2,\infty;T} + \|\nabla u\|_{2,2;T}$ et on suppose dans un premier temps qu'on a pour chaque $k \in \mathbb{N}$ une solution faîble

$$u \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0,T;W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega))$$

On estime le terme non linéaire $(J_k u)u$ en utilisant l'inégalité de Holder, (2.12), (2.15) et (1.2) avec c, c', c''_k, c''' des constantes positives, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} &\|(J_k u)u\|_{2,2;T} \leq c\,\|J_k u\|_{4,8;T}\,\|u\|_{4,\frac{8}{3};T}\,, \\ &\|J_k u\|_{4,8;T} \leq c''_k T^{\frac{1}{8}}\,\|u\|_T \quad \text{et} \quad \|u\|_{4,\frac{8}{3};T} \leq c'''\,\|u\|_T \end{aligned}$$

La solution faîble u de (2.26) est aussi solution faible de l'équation linéaire (2.1) si on remplace $f = \text{div}F$ par $\text{div}(F - (J_k u)u)$. Ensuite on applique le théorème (2.1) pour le cas linéaire avec f remplacée par $\text{div}(F - (J_k u)u)$, on obtient la représentation (2.18), elle prend la forme

$$(Gu)(t) = e^{-tA}u_0 + A^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} P\text{div}(F - (J_k u)u)d\tau, 0 \leq t \leq T \quad (2.28)$$

Dans la prochaine étape on montre qu'on peut résoudre l'équation $u = Gu$ dans un espace normé par $\|u\|_T$ par le théorème du point fixe si T est suffisamment petit.
On considére maintenant

$$u \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0,T;W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)),$$

et on conclut du Théorème (2.1) que $u = Gu$ est solution faîble de (2.1) en remplaçant f par $\text{div}(F - (J_k u)u)$ et on applique la proposition (2.1). Si de plus $Gu = u$, alors u sera la solution faîble cherchée de (2.26).
De (2.5) on en déduit :

$$\|u\|^2_{2,\infty;\overline{T}} + \|\nabla u\|^2_{2,2;\overline{T}} \le \|u_0\|^2_2 + \|F\|^2_{2,2;\overline{T}} \tag{3.8}$$

et donc on a :

$$\|u(t)\|_2 \le C, \quad t \in \left[0, \overline{T}\right]$$

où C ne dépend pas de $\overline{T}$.
On répète ce procédé à l'intervalle $\left[\overline{T}, \overline{T}'\right]$ au lieu de $\left[0, \overline{T}\right]$ et on prolonge u à $\left[0, \overline{T}'\right]$ avec

$$\overline{T} < \overline{T}' < T$$

et ainsi de suite j'usqu'à obtenir la solution u du théorème (2.1), ce qui achève la démonstration .

On a besoin d'autres propriétés des solutions $u = u_k$ du Théorème 2.2 en particulier le cas $T = \infty$. Soit

$$F \in \mathbf{L}^2(0, \infty, \mathbf{L}^2(\Omega).$$

comme c'est mentionné plus haut $u = u_k$ est solution de (2.1) avec F remplacée par $F - (J_k u)\, u$ et on applique le lemme 2.1 (car $\|(J_k u)\, u\|_{2,2;T} < \infty$) et le théorème 2.1

On utilise maintenant (2.29) pour $\overline{T} = \infty$ écrite sous la forme

$$\|u\|^2_{2,\infty;\infty} + \|\nabla u\|^2_{2,2;\infty} \le \|u_0\|^2_2 + \|F\|^2_{2,2;\infty} \tag{2.30}$$

Par la suite on applique le théorème (2.1) et estime premièrement le terme $(J_k u)\, u$ pour obtenir l'estimation suivante :

$$\|(J_k u)\, u\|_{2,\frac{4}{3};\infty} \le C'' \left(\|u_0\|_2 + \|F\|_{2,2;\infty}\right)^2 \tag{2.31}$$

où la constante C'' ne dépendent pas de k, u_0, F, Ω. On montre aussi que :

$$\|u\|_{q,\rho;\infty} \le C \left(\|u_0\|_2 + \|F\|_{2,2;\infty}\right) \tag{2.32}$$

avec $2 \leq q \leq 6$, $2 \leq \rho < \infty$ avec $\frac{3}{q} + \frac{2}{\rho} = \frac{3}{2}$, alors on choisit $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{q}\right)$ tel que $\alpha\rho = 1$.
Par la suite l'inégalité est aussi vraie lorsque $q = 2$, et $\rho = \infty$, $C > 0$ ne dépend pas de k.
Dans la suite on supposera que

$$u_0 \in D\left(A^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{et} \quad F \in \mathbf{L}^2\left(0,\infty; L^2(\Omega)^9\right) \cap \mathbf{L}^1\left(0,\infty; \mathbf{L}^2(\Omega)^9\right).$$

et on montre que

$$\|u\|_{q,\rho;\infty} \leq C\,(q,\rho,u_0,F) \tag{2.33}$$

pour tout $2 \leq q \leq 6$, $1 < \rho < \infty$, tel que $2 \leq \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{\rho} < \dfrac{5}{2}$ et la constante $C\,(q,\rho,u_0,F)$ ne dépend pas de k.
Notons que $\rho = \infty$ est inclu si $q = 2$.
En particulier soit $q = 2$ alors (2.33) est vérifiée pour chaque exposant ρ tel que $2 < \rho \leq \infty$.
On en déduit

$$\|u\|_{2,\rho;\infty} \leq C\,(\rho,u_0,F) \tag{2.34}$$

pour tout $2 < \rho \leq \infty$ avec $C\,(\rho,u_0,F) > 0$ ne dépendant pas de k.

Le Théorème suivant résume les propriétés de la solution faible du système (1.1)

Théorème 2.3 :
Soit $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ *un domaine quelconque , supposons que* $u_0 \in D(A^{-\frac{1}{2}})$ *et* $f = divF$ *avec* $F \in \mathbf{L}^2\left(0,\infty; \mathbf{L}^2(\Omega)^9\right) \cap \mathbf{L}^1\left(0,\infty; \mathbf{L}^2(\Omega)^9\right)$.
Alors il existe une solution faible u *de l'équation de Navier Stokes* (1.1) *telle que*

$$u : t \to u(t), \quad t \in [0,\infty)$$

est faiblement continue dans $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ *et satisfait* $u(0) = u_0$ *et vérifient les propriétés suivantes :*

1)

$$\frac{1}{2}\|\phi(t)u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\phi\nabla u\|_2^2\, d\tau \leq \frac{1}{2}\|\phi(0)u_0\|_2^2 - \int_0^t \left\langle \phi^2 F, \nabla u\right\rangle d\tau + C(\phi,u_0,F) \tag{2.35}$$

pour tout $0 \leq t < \infty$ *et toute fonction continue* $\phi : [0; \infty) \to \mathbb{R}$ *pour laquelle il existe un nombre* $\nu \in (1, \infty)$ *avec* $\frac{d}{dt}\phi^2 \in L^{\nu}(0, \infty, \mathbb{R})$ *et* $C(\phi, u_0, F) > 0$ *est une constante ne dépendant pas de* Ω *et* u *; si* $\|\phi F\|_{2,2;\infty} < \infty$ *il s'ensuit :*

$$\|\phi u\|^2_{2,\infty;\infty} + \|\phi \nabla u\|^2_{2,2;\infty} \leq \|\phi(0)u_0\|^2_2 + \|\phi F\|^2_{2,2;\infty} + 2C(\phi, u_0, F) \ .$$

2) $(A^{-\frac{1}{2}}u)_t$, $A^{\frac{1}{2}}u$, $A^{-\frac{1}{2}}Pu\nabla u$, $A^{-\frac{1}{2}}PdivF \in L^s(0, \infty; L^2_\sigma(\Omega))$
et on a

$$(A^{-\frac{1}{2}}u)_t + A^{\frac{1}{2}}u + A^{-\frac{1}{2}}Pu\nabla u = A^{-\frac{1}{2}}Pf \quad \textit{pour presque tout} \ \ t \in [0, \infty)$$

et

$$\left\|(A^{-\frac{1}{2}}u)_t\right\|_{2,s;\infty} + \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{2,s;\infty} \leq C(\phi, u_0, F). \tag{2.36}$$

pour $1 < s \leq \frac{4}{3}$ *avec* $C(\phi, u_0, F). > 0$ *est une constante ne dépendant pas de* u *et de* Ω.
3) $A^{-\frac{1}{2}}u : [0; \infty) \to L^2_\sigma(\Omega)$ *est fortement continue et on vérifie* $A^{-\frac{1}{2}}Pu\nabla u \in L^1(0, \infty; \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega))$ *et*

$$\underset{t \to \infty}{Lim} \left\|(A^{-\frac{1}{2}}u)_t\right\|_2 = 0 \tag{2.37}$$

4) $u \in L^{\rho}\left(0, \infty; L^q(\Omega)^3\right)$ *pour* $2 \leq q \leq 6$, $1 < \rho < \infty$ *avec* $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{\rho} < \dfrac{5}{2}$
et on a

$$\|u\|_{q,\rho;\infty} \leq C(q, \rho, u_0, F) \tag{2.37}$$

ou $C(q, \rho, u_0, F) > 0$ *est une constante ne dépendant pas de* u *et de* Ω.
Démonstration :
pour la démonstration, le lecteur peut consulter H.Sohr [27] .

3) SOLUTIONS REGULIERES DU SYSTEME DE NAVIER-STOKES AVEC f LEGEREMENT MODIFIE

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω. $\nu > 0$ Dans Ω on considère l'équation de Navier-Stokes (1.1) dans le domaine cylindrique $Q = [0,T) \times \Omega$, $T > 0$ et on se propose d'étudier les solutions fortes u de (1.1), ce sont des solutions $u \in \mathbf{L}^{\rho}\left(0,T;\mathbf{L}^{q}(\Omega)^3\right)$ ayant la propriété suivante : $\dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{\rho} = 1.$

La quantité $\dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{\rho}$ joue un rôle très important dans la théorie de régularité de Serrin pour (1.1).

En utilisant la projection

$$P : \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$$

de $\mathbf{L}^2(\Omega)^3$ dans le sous espace $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)^3$ des fonctions à divergence nulle, on peut écrire l'équation (7.2) sous une forme équivalente à une équation d'évolution dans $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$.

$$u_t + \nu Au + P(u\nabla u) = Pf \ ; \quad u(0) = u_0, \tag{3.1}$$

Ici

$$A : v \rightarrow Av = P(-\Delta v)$$

désigne l'opérateur de Stokes.

On peut écrire

$$\begin{aligned} J_k u - u &= (J_k - J_k^{-1} J_k)u \\ &= -k^{-1} A^{\frac{1}{2}} J_k u \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (J_k u).\nabla u) &= (J_k u - u)\,.\nabla u + u.\nabla u \\ &= -\frac{1}{k}\left(A^{\frac{1}{2}} J_k u\right).\nabla u + u.\nabla u \end{aligned} \tag{3.2}$$

et le système d'équations de Navier-Stokes s'écrit dans $\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + u.\nabla u + \nabla p = f_k \ ; \quad div\ u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \ , \quad u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

qui représente le système d'équations de Navier-Stokes (1.1) avec un second membre légèrement modifié, avec

$$\begin{aligned} f_k &= f + r_k \quad , \ k \in \mathbb{N} \\ r_k &= \frac{1}{k}\left(A^{\frac{1}{2}} J_k u\right).\nabla u \end{aligned}$$

Notre but est de démontrer que

$$\lim_{k \to +\infty} \|r_k\|_{q,s;T} = 0 \tag{3.4}$$

sous les conditions suivantes :

$$1 < q < 2, \quad 1 < s < 2 \quad \text{et} \quad n + 1 < \frac{n}{q} + \frac{2}{s} \quad \text{avec} \ \ n = 3$$

Si les données f, u_0 et Ω satisfont aux hypothèses du Théorème 3.1, on obtient le résultat suivant :

Chaque solution du système (3.1) est une solution régulière du système (7.1) avec un second membre légèrement perturbé $f + r_k$ où l'erreur r_k tend vers zéro lorsque $k \to +\infty$ en norme $\|.\|_{q,s;T}$. En d'autre termes, après une modification de la donnée f , le système d'équation de Navier-Stokes a une solution régulière. Ceci sera précisé dans le Théorème (3.1) ci-dessous.

Soit $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$, $0 < T < +\infty$ et considérons l'opérateur non linéaire

$$u \to u_t - \nu P\Delta u + Pu.\nabla u, \qquad u \in D(u_0)$$

où

$$D(u_0) = \left\{u \in \mathbf{L}^2(0, T; W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)) \cap W^{2,2}(\Omega)^3; \ \ u_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)), \ \ \text{et} \ u_0 = 0\right\} \tag{3.5}$$

et le rang (image)

$$R(u_0) = \{u_t - \nu P\Delta u + Pu.\nabla u; \quad \text{telle que} \ \ u \in D(u_0)\} \tag{3.6}$$

Jusqu'à l'heure actuelle, on ne sait pas dans quelle mesure on a :

$$R(u_0) = \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega))$$

ce qui signifie la surjectivité de l'opérateur et qui reste un problème ouvert (ie : Pour tout $f \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega))$, $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ le système (1.1) admet une solution $u \in D(u_0)$)
Le Théorème qui suit montre une certaine propriété de densité $R(u_0)$ dans l'espace $\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega))$. H. Sohr dans [28] a démontré cette propriété pour $u_0 \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, $0 < T < +\infty$, ie : il a démontré que sous la condition

$$1 < q < 2, \quad 1 < s < 2 \quad \text{et} \quad n+1 < \frac{n}{q} + \frac{2}{s} < n+2 \qquad \text{avec } n = 3$$

la limite suivante

$$\lim_{k \to +\infty} \|r_k\|_{q,s;T} = 0$$

On se propose de généraliser son résultat à $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$.

Théorème 3.1 :
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine quelconque de frontière régulière de classe C^2 et soit $0 < T < \infty$,

$$1 < q < \frac{3}{2}, \quad 1 < s < 2, \quad \nu > 2 \;\; \text{avec} \;\; 4 < \frac{3}{q} + \frac{2}{s}$$

et soit, $u_0 \in \mathbf{L}^2_\sigma(\Omega)$ et $f \in \mathbf{L}^s(0,T;\mathbf{L}^q(\Omega)^3) \cap \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)^3)$,
Alors, pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$r_k \in \mathbf{L}^s(0,T;\mathbf{L}^q(\Omega)^3) \cap \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)^3 \tag{3.7}$$

telle que le système d'équation de Navier-Stokes

$$u_t - \Delta u + u.\nabla u + \nabla p = f + r_k \;\; ; \quad u(0) = u_0 \tag{3.8}$$

admet une seule solution

$$u = u_k \in D\left(u_0\right) \tag{3.9}$$

On trouve que :

$$\|r_k\|_{q,s;T} \leq \frac{C(r,s,\nu)}{k^\alpha} \left(\|u_0\|_2^2 + \|F\|_{2,2;T} \right) \tag{3.10}$$

où $\alpha = (1 - 2/\nu)\, 2/\rho$*. Par conséquent*

$$\lim_{k \to +\infty} \|r_k\|_{q,s;T} = 0$$

Démonstration :

L'existence d'une solution faible $u = u_k$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$ pour le système approché (2.26). est donnée par le Théorème 3.1.
En utilisant (i) on voit que u est la solution faible de l'équation de Navier Stokes (1.1) avec pour donnée $f_k = f + r_k$ et u_0.
Le Théorème 3.1 permet de dire que

$$u \in D(u_0), \quad u.\nabla u \in \mathbf{L}^2([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^3)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} &r_k \in \mathbf{L}^2([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^3) \\ &f_k = f + r_k \in \mathbf{L}^2([0,T)\,;\mathbf{L}^2(\Omega)^3) \end{aligned}$$

et comme $u_t \in \mathbf{L}^2([0,T)\,;\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega))$, la fonction u est fortement continue presque partout sur $[0,T)$ " on en déduit du Théorème 3.1 la pression p ..

Rappelons que les opérateurs $J_k := \left(I + k^{-1}A^{1/2}\right)^{-1}$ introduits par Yosida (voir H.Sohr $[25]-[26]$), d'après les propriétés des semi groupes e^{-tA} $(t \geq 0)$, on vérifie facilement que ces opérateurs vérifient

$$\|J_k\| \leq C$$

où $C > 0$ est une constante dépendant de Ω. et

$$\lim_{k\to\infty} J_k u = u \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{L}^2_\sigma\left(\Omega\right)$$

L'idée de la démonstration est de résoudre l'équation de Navier-Stokes régularisée

$$u_t + \nu A u + P((J_k u).\nabla u) = Pf; \quad u(0) = u_0 \tag{3.11}$$

en l'écrivant sous la forme

$$u_t + \nu A u + P(u.\nabla u) = Pf + P\left(\left(I - J_k\right)u.\nabla u\right); \quad u(0) = u_0 \tag{3.12}$$

et de montrer que le terme

$$g_k := P\left(\left(I - J_k\right)u.\nabla u\right) = r_k$$

tends vers zero lorsque $k \to \infty$ dans l'espace $\mathbf{L}^s(0,T;\mathbf{L}^q(\Omega)^3)$ avec $4 < \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{s}$.car

$$\begin{aligned} g_k &:= P\left((I - J_k)\, u.\nabla u\right) \\ &= \left[\left(I - \left(I + k^{-1}A^{1/2}\right)^{-1}\right) u.\nabla u\right] \\ &= \left[\left(k^{-1}A^{1/2}J_k\right)^{-1} u.\nabla u\right] \\ &= \left[\left(k + A^{1/2}\right)^{-1} A^{1/2}u.\nabla u\right] \\ &= \left[k^{-1}\left(I + k^{-1}A^{1/2}\right)^{-1} A^{1/2}u.\nabla u\right] \\ &= \frac{1}{k}\left(A^{\frac{1}{2}}J_k u\right).\nabla u \\ &= r_k \end{aligned}$$

Pour montrer que le terme $r_k := P\left((I - J_k)\, u.\nabla u\right)$ tend vers zéro lorsque $k \to \infty$ dans l'espace $L^s(0,T;L^q(\Omega)^3)$ avec $4 < \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{s}$ on a besoin des deux Lemmes suivants :

Lemme 3.1 :
Soit $1 < q < 2$, $1 < s < 2$, $\nu > 2$, *tel que* $4 < \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{s}$

Alors

$$\|r_k\|_{q,s;T} \le \frac{C}{k^{(1-2/\nu)2/\rho}}\left(\left\|A^{1/2}u\right\|_{2,2;T} + \|u\|_{2,\infty;T}\right)\|\nabla u\|_{2,2;T} \tag{3.13}$$

Démonstration :
En utilisant l'inégalité de Holder, on trouve

$$\|g_k\|_{q,s;T} \le C\left\|\left(k + A^{1/2}\right)^{-1} A^{1/2}u\right\|_{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right)^{-1}} \|\nabla u\|_{2,2;T}$$

En posant $\dfrac{1}{r} := \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}$ et de (3.12) on a :

$$\left\|\left(k + A^{1/2}\right)^{-1} A^{1/2}u\right\|_r \le C\left\|A^{\beta}\left(k + A^{1/2}\right)^{-1} A^{1/2}u\right\|_2 \quad \text{avec } 2\beta + \tfrac{3}{r} = \tfrac{3}{2} \text{ où } \beta < \tfrac{1}{2}$$

. Et comme $2\beta + \dfrac{3}{r} = 2\beta + 3\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$, on a $2\beta + \dfrac{3}{q} = 3$ et donc $\beta = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)$

d'ou si $\beta < \dfrac{1}{2}$ on ait $q < \dfrac{3}{2}$, Par ailleurs on a en utilisant (3.13) ,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_r \leq C\left\|A^{\beta}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_2\\
&= C\left\|A^{\frac{1}{\nu}(\nu\beta)}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_2\\
&\leq \left\|A^{\frac{1}{\nu}}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_2^{\nu\beta}\left\|\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_2^{1-\nu\beta}\left\|\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_{r,\rho}\\
&\leq C\left(\left\|A^{\frac{1}{\nu}}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_2^{\rho-\rho\nu\beta}\left\|\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_2^{1-\nu\beta}\right)^{\frac{1}{\rho}}\\
&\leq C\left\|A^{\frac{1}{\nu}}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_{2,2}^{\frac{2}{\rho}}\left\|\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u\right\|_{2,\infty}^{1-\frac{2}{\rho}}\\
&\leq \frac{C}{k^{(1-2/\nu)2/\rho}}\left\|A^{1/2}u\right\|_{2,2}^{\frac{2}{\rho}}\|u\|_{2,\infty}^{1-\frac{2}{\rho}}\\
&\leq \frac{C}{k^{(1-2/\nu)2/\rho}}\left(\left\|A^{1/2}u\right\|_{2,2}+\|u\|_{2,\infty}\right)
\end{aligned}$$

et donc finallement on obtient :

$$\left\|\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}A^{1/2}u.\nabla u\right\|_{q,s;T} \leq \frac{C}{k^{(1-2/\nu)2/\rho}}\left(\left\|A^{1/2}u\right\|_{2,2;T}+\|u\|_{2,\infty;T}\right)\|\nabla u\|_{2,2;T}$$

nous choisisons $\nu\beta\rho = 2$, avec $\nu > 2$, $\rho - \nu\beta\rho = \rho - 2$ et $\nu\beta = \dfrac{2}{\rho}$. Il suffit d'utiliser pour $\alpha < \frac{1}{2}$ l'estimation

$$\left\|A^{\alpha}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}\right\|_{q,s;T} \leq \left\|A^{\frac{1}{2}(2\alpha)}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{k^{1-2\alpha}}$$

pour cela on écrit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\nu}\right) \quad \text{et} \quad \left\|A^{\frac{1}{\nu}}\left(k+A^{1/2}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{k^{1-2\frac{1}{\nu}}}$$

Soit $\beta = \dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ en multipliant par $\nu\rho$, on trouve $\nu\rho\beta = \dfrac{3\nu\rho}{2}\left(1-\dfrac{1}{q}\right) =$ 2 et par conséquent

$$\frac{4}{\rho\nu} = 3 - \frac{3}{q} = 3 - 3\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{r}, \frac{4}{\rho\nu} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2}$$

mais $\dfrac{4}{\rho\nu} = \dfrac{2}{\rho\tau}$ où $\tau = \dfrac{\nu}{2} > 1$,

$$\frac{3}{r} + \frac{2}{\rho} > \frac{3}{r} + \frac{2}{\rho\tau} = \frac{3}{2}$$

et de plus comme

$$\begin{aligned}\frac{3}{q} + \frac{2}{s} &= \\ &= 3\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{r} + \frac{2}{\rho} + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \\ &> \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \\ &= 4\end{aligned}$$

De l'inégalité (2.5), on en déduit l'estimation (3.13).

On peut aussi obtenir une majoration du terme $\|(J_k u)\nabla u\|_{q,s;T}$ et par la suite montrer que $(J_k u)\nabla u$ tend vers zéro en norme $\|.\|_{q,s;T}$ lorsque k tend vers l'infini. Ceci permet de vérifier que lorsque k tend vers l'infini la solution du système approché u_k tend vers la solution du système (1.1).

Lemme3.2 :
Pour $1 < q < 2$, $1 < s < 2$, $\nu > 2$ *tels que* $4 < \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{s}$

Alors on a :

$$\|(J_k u)\nabla u\|_{q,s;T} \leq \frac{C(r,s,\nu)}{k^\alpha}\left(\|u_0\|_2^2 + \|F\|_{2,2;T}\right) \tag{3.14}$$

avec $\alpha = \dfrac{3}{q} + \dfrac{2}{s} - 4$

<u>Démonstration :</u>

On a à partir de

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{2}{\nu}\right)\frac{2}{\rho} = \frac{2}{\rho} - \frac{4}{\rho\nu} \\ &= \frac{2}{\rho} - \left(3 - \frac{3}{\nu}\right) = \frac{2}{\rho} + \frac{3}{q} - 3 \\ &= \frac{2}{\rho} + 3\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{3}{r} + \frac{2}{\rho} - \frac{3}{2} \\ &> 0\end{aligned}$$

car $\dfrac{3}{r} + \dfrac{2}{\rho} > \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
\|(J_k u)\nabla u\|_{q,s;T} &\leq \frac{C(r,s)}{k^\alpha}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|_{2,2;T} + \|u\|_{2,\infty;T}\right)\|\nabla u\|_{2,2;T} \\
&\leq \frac{C(r,s)}{k^\alpha}\left(\nu\|\nabla u\|_{2,2;T} + \tfrac{1}{2}\|u\|_{2,\infty;T} + \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_{2,2;T}\right) \\
&\leq \frac{C(r,s)}{k^\alpha}\left(\left(\nu + \tfrac{1}{2}\right)\|\nabla u\|_{2,2;T} + \tfrac{1}{2}\|u\|_{2,\infty;T}\right) \\
&\leq \frac{C(r,s,\nu)}{k^\alpha}\left(\|u_0\|_{2,2;T} + \|F\|_{2,\infty;T}\right)
\end{aligned}$$

4) REFERENCES :

[1] W.BORCHERS, T.MIYAKAWA. Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains. Hiroshima Math J., 21 (1991) , 621-640.

[2] W.BORCHERS, T.MIYAKAWA. L^2 decay for Navier-Stokes in unbounded domais, with applications to exterior stationary flows. Arch. Rat. Mech. Anal. , 118 (1992) , 273-295.

[3] P. CANNARSA, V. VESPRI. On maximal L^p regularity for the abstract Cauchy problem. Bolletino U. M. I. , 5-B (1986) , 165-175.

[4] G. DORE , A. VENNI . On the closedness of the sum of two operators. Math. Z. , 196(1987), 189-201.

[5] R.FARWIG, H. SOHR. Weighted energy inequalities for the Navier-Stokes equations in exterior domains Applicable Analysis, 58 (1995), 157-173.

[6] R. FARWIG. Partial regularity and weighted energy estimates of global weak solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains. Pregress in partial differential equations : Pitman Research Notes in Mathematics Series 345 (1196) , 205-215.

[7] H. FUJITA, T.KATO. On the Navier-Stokes initial problem. Arch. Rat. Mech. Anal., 16 (1964), 269-315

[8] A. FRIEDMAN. partial differential equations. Holt, Rinehart and Wilson , 1969.

[9] G.P. GALDI, P.MAREMONTI. Monotonic decreassing aand asymptotic behaviour of the kinematic energy ffor wweak soluttionss of the Navier-Stokes equations in exterior domains. Arch. Rat. Mech. Anal., 94 (1986), 253-266.

[10] G.P. GALDI and C.G. SIMADER, Existence, uniqueness and L^q estimate for the Stokes problem in exterior domain, Arch. Rational. Mech. Anal. 112 (1991), pp 291-318.

[11]. G. P. GALDI. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I, volume38 of Springer Tracts in Natural Philosophy.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[12] Y. GIGA , H. SOHR . On the Stokes operator in exterior domains. J.Fac. Sci.Univ.Tokyo, I.A. Math., 36 (1989), 103-130.

[13] Y. GIGA , H. SOHR. Abstract $\mathbf{L}^p$ estimates for the Cauchy problem with applicationss to the Navier-Stokes equations in exterior domains. J. Funct. Anal., 102 (1991), 72-94.

[14]. V. GIRAULT and P.A. RAVIART. *Finite element methods for Navier-Stokes equations,* Volume 5 *of Springer Series in Computational Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[15]. J. G. HEYWOOD. On uniqueness questions in the theory of viscous flow. *Acta Math.*, 136(1-2) : 61-102, 1976.

[16] J. HEYWOOD.. The Navier-Stokes equations : On thee existence, regularity aand decay of solutions. Indiana Univ. Math. J., 29(1980), 639-681.

[17] H. KOZONO, T OGAWA. On stability of Navier-Stokes flow in exterior domain. Arch. Rat. Mech. Anal., 128 (1994) , 1-31..

[18] H. KOZONO, T OGAWA. Global strong solutions aand its decay propertie for the Navier-Stokes equations in three dimensional domains with non-compact boundaries. Math. Z., 216 (1994), 1-30.

[19] J. LERAY. Etude dde diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl.,12(1933). 1-82.

[20] K. MASUDA. Weak solutions of Naviers-Stokes equations. Tokohu Math. J., 36(1984), 623-646.

[22] J. PRUSS, "Evolutionary Integral Equations and Applications", Birkhaüser Verlag, Basel, 1993.

[23] J. SERRIN. The initial value problem for the Navier-Sttokes equations. Nonlinear problems, University of Wisconsin press, Madison, 1963.

[24] V.A. SOLONNIKOV. Estimates for solutions of non stationnary Navier Stokes equations . J. Soviet Math., 8 (1977) ,467-529.

[25] H. SOHR. Zur Regularitatstheorie der instationaren Gleichungen von Navier Stokes. Math. Z.,184 (1984), 359-375.

[26] H. SOHR. Optimale lokale Existenzsatze fur die Gleichungen von Navier-Stokes . Math. Ann., 267 (1984), 107-123.

[27] H. SOHR.. A special class of weak solutions of the Navier-Stokes equations in arbitrary three-dimensional domains. Progress in nonlinear Differential Equations and their applications., 35 Birkhauser Verlag, Basel, 1999.

[28] H. SOHR. The Navier Stokes Equations An Elementary functional Analytic Approch. Birkhauser Advanced Verlag, Basel. Boston. Berlin. 2001.

[29] R. TEMAM. Navier-Stokes equations. North Holland, Amsterdam New York Oxford. 1977.

[30] H. TRIEBEL. Interpolation theory, function spaces, differential operators. North Holland, Amesterdam-New York Oxford, 1978.