

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene



Faculté des Sciences Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En: Mathématiques

Spécialité: Probabilités et Statistiques

Par: CHERFI Mohamed

Thème

Statistique des Valeurs Extrêmes en Assurance

Soutenue publiquement le 17/03/2005, Devant le jury composé de:

M^r M. MOULAI	Maître de conférences	U.S.T.H.B	Président
M^r K. BOUKHETALA	Professeur	U.S.T.H.B	Directeur de Thèse
M^r A. NECIR	Maître de conférences	U. Biskra	Examineur
M^{elle} O. SADKI	Chargée de cours	U.S.T.H.B	Examinatrice

Table des matières

1	Statistiques d'Ordre	8
1.1	Statistiques d'ordre	8
1.1.1	Rappels et Définition	8
1.2	Distribution des extrema dans le cas fini	11
1.3	Conclusion	11
2	Théorie Des Valeurs Extrêmes	12
2.1	Domaines d'attraction	13
2.2	Outils statistiques d'exploration	16
2.2.1	Graphe de la fonction de survie	16
2.2.2	Les graphes de quantiles et de probabilités	16
2.2.3	Graphe de la fonction moyenne des dépassements	18
2.3	La Loi des Excès	18
2.3.1	Exemples de distributions Heavy-Tailed	20
2.4	Estimateur de Hill	21
2.5	Estimateur de Pickands	22
3	Méthodes d'estimation	25
3.1	Introduction	25
3.2	Estimation pour le modèle GEV	25
3.2.1	Méthode du Maximum de Vraisemblance	25
3.2.2	Méthode des Moments Pondérés	27
3.3	Estimation pour le modèle POT	29
3.3.1	La méthode des Moments	30
3.3.2	La méthode du Maximum de Vraisemblance	30
3.3.3	Méthode des Moments Pondérés	31
3.4	Estimation des quantiles extrêmes	32
3.4.1	La méthode des maxima de blocs	33

3.4.2	La méthode des excès	35
3.4.3	Les méthodes basées sur les quantiles	37
3.5	Conclusion	39
4	Valeurs Extrêmes et Assurance	40
4.1	Introduction	40
4.1.1	Buts de la réassurance	42
4.1.2	La réassurance proportionnelle	43
4.1.3	La réassurance non-proportionnelle	43
4.1.4	La réassurance financière	44
4.2	La tarification en réassurance	44
4.2.1	La tarification des XL Short Tail	44
4.2.2	La tarification des XL Long Tail	45
4.3	Principe de la prime ajustée	46
4.3.1	Principe de Wang	46
4.4	Estimation de la Prime Ajustée	48
4.4.1	Approche Non-paramétrique	48
4.4.2	Approche Paramétrique	50
4.5	Conclusion	52
5	Simulation et Application	53
5.1	Simulation	53
5.2	Commentaire et Conditions de Mise en Oeuvre	54
5.3	Application au Données de l'Assurance	62
5.3.1	Description de l'échantillon	62
5.3.2	Comportement de la Queue	64
5.3.3	Estimation pour le modèle GPD	66
5.3.4	Estimation de La Prime Ajustée	68
5.4	Conclusion	77

Table des figures

2.1	Densités des valeurs extrêmes[EMBRECHTS1997]	13
2.2	Graphique des quantiles(QQ-plot)	17
2.3	Fonction Moyenne des Dépassements Théoriques	19
2.4	Estimateur de HILL	22
2.5	Estimateur de Pickands	24
3.1	Minima et maxima annuels des revenus journalier de Credit Suisse General index.	34
3.2	Ajustement GEV de l'échantillon	34
3.3	Estimateur de Hill	36
5.1	Résultats pour la distribution de Pareto	56
5.2	Résultats pour la distribution de Pareto(suite)	57
5.3	Résultats pour la distribution de Fréchet	58
5.4	Résultats pour la distribution de Fréchet(suite)	59
5.5	Résultats pour la distribution Lognormale	60
5.6	Résultats pour la distribution Lognormale(suite)	61
5.7	Données Réelles de L'Assurance	62
5.8	QQplot contre les quantiles de la loi exponentielle	63
5.9	Densité empirique des données	64
5.10	Estimation du paramètre de forme en fonction du nombre d'excès	65
5.11	Fonction moyenne des dépassements	66
5.12	Estimateur de Hill	67
5.13	Ajustement de l'échantillon des excès par une loi GPD	68
5.14	Graphe de la queue de la distribution empirique	69
5.15	Variation de la prime en fonction de p , $k = 15, 48$,	71
5.16	Variation de la prime en fonction de p , $k = 98, 148$	72

5.17	Variation de la prime en fonction de p , $k = 198, 249$	73
5.18	Variation de la prime en fonction de p , $k = 299, 349$	74
5.19	Variation de la prime en fonction de p , $k = 399, 449$	75
5.20	Variation de la prime en fonction de p , $k = 500, 1000$	76

Liste des tableaux

2.1	Domaines d'attraction	14
2.2	Exemples de distributions Heavy-Tailed	20
3.1	Estimation des paramètres de la loi GEV et le R^{10}	35
4.1	Classement des 15 plus importants groupes de Réassurance 2000	42
5.1	Estimation du paramètre de forme α	65
5.2	Estimation des paramètres de la loi GPD	67
5.3	Variation de $\hat{\gamma}$ et La prime ajustée en fonction de k	70

Introduction

Il est difficile de comprendre ce que l'on entend par un événement *extrême* en l'absence de critère permettant de distinguer entre la *normalité* et l'*extrême*. Pour commencer, il convient de faire abstraction de l'usage courant de ces expressions telles qu'elles sont utilisées pour décrire la probabilité d'un événement. Des expressions courantes comme "c'est normal" ou "il fallait s'y attendre" ont acquis un sens particulier qui est susceptible de prêter à confusion. Les mathématiciens ont mis au point un outil pour mesurer la probabilité de réalisation d'événements dus au hasard. Il s'agit de la théorie des probabilités. Les données qui relient cette théorie aux événements de tous les jours sont issues des statistiques. Ces deux branches des mathématiques, qui constituent la stochastique, ont produit des outils puissants qui sont non seulement employés dans de nombreux domaines scientifiques, mais également dans l'assurance et la finance ([1], [30], [18], [7],). La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est un de ces outils issus de la stochastique qui s'attache précisément à décrire les événements rares. Elle trouve des applications notamment en ingénierie pour calculer la fiabilité, en médecine pour réaliser des statistiques, dans les sciences de l'environnement, la géologie et la météorologie ([22], [20]).

Les extrêmes ne se prêtent pas à la modélisation : par définition, les données sont rares et les prévisions ou estimations doivent souvent être établies à la marge, voire en marge, des données disponibles.

Selon le réassureur zurichois **Swiss Re**([2]), les catastrophes intervenues en 1999 ont été responsables de la mort de plus de 105.000 personnes et ont engendré 28,6 milliards de dollars de sinistres pour les assureurs, un montant qui n'avait jusqu'ici été dépassé qu'une seule fois. Ces pertes étaient principalement imputables à cinq tempêtes et à deux tremblements de terre, qui à eux seuls ont coûté 15,9 milliards de dollars aux compagnies d'assurances.

Les marchés financiers ont connu de nombreux krachs, comme celui de 1929, annonciateur de la grande crise, et celui du "lundi noir" d'octobre 1987. Plus récemment, le 5 avril, le **Nasdaq** a perdu plus de 13 % de sa valeur en une séance, en réaction à la surévaluation du marché causée par l'envolée des valeurs technologiques. La veille, l'indice avait chuté de 7,64 % et la semaine précédente de 7,86%.

La nécessité de se doter d'une théorie de gestion du risque pour les événements extrêmes est reconnue depuis longtemps. A la suite de la catastrophe de 1953 qui a frappé la Hollande et la Zélande (1800 morts), le gouvernement néerlandais chargea un groupe de scientifiques, de statisticiens et d'ingénieurs de calculer à quelle hauteur il convenait de construire les nouvelles digues pour qu'elles puissent résister à un événement qui n'aurait qu'une chance de se produire en 10.000 ans. Les digues devaient être d'une hauteur telle que la probabilité d'une inondation soit extrêmement réduite, de 0,0001 en l'espèce, quelle que soit l'année considérée. À partir de très peu de données disponibles et après calcul, ils estimèrent que les digues devraient mesurer au moins 5 mètres. Cette estimation était fondée sur l'utilisation de techniques statistiques empruntées à la théorie des valeurs extrêmes (TVE), qui constitue le sujet du présent mémoire.

Pour commencer, le premier chapitre contient des rappels sur la statistique d'ordre, qui est très utiles en théorie des valeurs extrêmes ([29]). Nous décrivons dans le deuxième chapitre la théorie des valeurs extrêmes en caractérisant la loi des extrema et les observations qui excèdent un seuil fixé et nous étudions le comportement au niveau des "queues" de certaines distributions dites Heavy-tailed ([18]). Un troisième chapitre sera consacré aux techniques d'estimation des paramètres des lois et les quantiles extrêmes dans la TVE, ensuite on abordera dans un quatrième chapitre, un domaine d'application de la TVE qui est l'assurance et en particulier la réassurance, on se basera sur le principe de la prime ajustée ([39]) et son estimation en utilisant la TVE ([33]). La partie applicative de ce travail fera l'objet du chapitre 5 qui va comporter une étude simulation et une application aux données de l'assurance (Données du Projet d'étude statistique sur la sinistralité automobile en Algérie, réalisée avec le ministère des finances, Rapport CNA 1999/2000).

Chapitre 1

Statistiques d'Ordre

1.1 Statistiques d'ordre

L'introduction des statistiques d'ordre est nécessaire dans le cas où on s'intéresse, non pas aux observations d'un échantillon à l'état brute, mais au comportement des réalisations ordonnées.

1.1.1 Rappels et Définition

Définition 1 Soit une suite de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On appelle statistiques d'ordre $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ ces variables aléatoires ordonnées (dans l'ordre croissant):

$$X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

par conséquent $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$

Remarque 1 On peut aussi utiliser les notations suivantes pour designer la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre: $X_{i:n}$ ou $X_{[i]}$

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires de fonction de répartition F qui admet une densité f , on cherche maintenant la loi et la densité des statistiques d'ordre.

Proposition 1 (Densité et loi des statistiques d'ordre) La fonction de répartition de la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre peut être exprimé sous la forme suivante:

$$F_{X_{(i)}}(y) = P[\text{au moins } i \text{ des } X_l \text{ sont plus petits ou égaux à } y]$$

ce qui donne

$$F_{X_{(i)}}(y) = P[X_{(i)} \leq y] = \sum_{l=i}^n \binom{n}{l} [F(y)]^l [1 - F(y)]^{n-l} \quad (1.1)$$

si F est continue, alors

$$F_{X_{(i)}}(y) = \int_{-\infty}^y f_{X_{(i)}}(z) dz,$$

où

$$f_{X_{(i)}}(y) = \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} [F(y)]^{i-1} [1 - F(y)]^{n-i} f(y). \quad (1.2)$$

Proposition 2 (Densité conjointe de deux statistiques d'ordre) la densité conjointe des deux statistiques d'ordre $X_{(i)}$ et $X_{(j)}$ avec $i < j$ est donnée par:

$$f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(y, z) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(y)]^{i-1} [F(z) - F(y)]^{j-i-1} [1 - F(z)]^{n-j} f(y) f(z). \quad (1.3)$$

Proposition 3 (Distribution des k grandes statistiques d'ordre) Pour $k = 1, \dots, n$ on note $F_{k,n}$ la distribution de $X_{(k)}$. Alors

- $F_{k,n}(x) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{n}{r} \overline{F}^r(x) F^{n-r}(x)$ où $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.
- Si F est continue alors

$$F_{k,n}(x) = \int_{-\infty}^x f_{k,n}(z) dz,$$

où $f_{k,n}$ est la densité de $F_{k,n}$ par rapport à F

$$f_{k,n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{n-k}(x) \overline{F}^{k-1}(x);$$

Définition 2 (a) On appelle **étendue** la grandeur $E = X_{(n)} - X_{(1)}$

(b) On appelle **médiane** de l'échantillon, la statistique

$$M = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

On utilise la médiane pour caractériser l'emplacement de l'échantillon et l'étendue pour décrire sa dispersion.

(c) On appelle **moyenne tronquée** d'ordre r , la statistique

$$T_{n,r} = \frac{1}{n-2r} \sum_{i=r+1}^{n-r} X_{(i)}$$

Définition 3 la fonction quantile $F^{\leftarrow}$ de la distribution F est définie par

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1.$$

Pour un échantillon $X_1, \dots, X_n$ on note la fonction quantile empirique par $F^{\leftarrow}$

$$F_n^{\leftarrow}(t) = X_{(k)} \text{ pour } 1 - \frac{k}{n} < t \leq 1 - \frac{k-1}{n},$$

pour $k = 1, \dots, n$.

Dans le paragraphe suivant on va présenter un résultat sur la transformation des quantiles, qui est nécessaire dans la simulation d'échantillon et par suite dans l'estimation des p -quantiles

Transformation des quantiles

soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de distribution F , et $U_1, \dots, U_n$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* uniformément distribuées sur $[0,1]$ et notant par $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ la statistique d'ordre correspondante, alors

- $F^{\leftarrow}(U_1) \stackrel{d}{=} X_1$ ($\stackrel{d}{=}$ égal en distribution).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(X_{(1)} \dots X_{(n)}) \stackrel{d}{=} (F^{\leftarrow}(U_{(1)}), \dots, F^{\leftarrow}(U_{(n)})).$$

- La variable aléatoire $F(X_1)$ a une distribution uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si F est une fonction continue.

Estimation du p -quantile

On note x_p le quantile de la loi de X_i , une estimation du quantile est donnée par:

$$\hat{x}_p = \begin{cases} X_{(k+1)} & \text{si } \frac{k}{n} < p < \frac{k+1}{n} \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2} & \text{si } p = \frac{k}{n} \end{cases} \quad (1.4)$$

1.2 Distribution des extrema dans le cas fini

On va maintenant énoncer quelques résultats concernant les distributions asymptotiques, qui seront repris dans le chapitre suivant.

On définit les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition 1 *Les fonctions de répartition du maximum et du minimum sont données par:*

$$F_{M_n}(x) = \{F(x)\}^n \quad (1.5)$$

$$F_{m_n}(x) = 1 - \{\overline{F}(x)\}^n \quad (1.6)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) \\ &= \{F(x)\}^n \end{aligned}$$

Le même résultat pour le minimum se trouve pour $\overline{F}$.

Remarque 2 *Dans le cas où les X_i ne sont pas identiquement distribuées, on a de la même manière :*

$$F_{M_n}(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x).$$

Remarque 3 *Notons que, pour des variables aléatoires suivant une loi F , la loi du maximum vérifie la relation suivante:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(x)\}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) < 1. \\ 1 & \text{si } F(x) = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ainsi, lorsque n tend vers l'infini, la distribution du maximum est une fonction qui dégénère et présentera un saut à la valeur minimale x telle que $F(x) = 1$. valeur que l'on appelle souvent upper-end point ou right-end point.

1.3 Conclusion

La statistique d'ordre constitue un outil de base dans la théorie des valeurs extrêmes. On va présenter dans le chapitre suivant l'essentiel de cette théorie, qui a pour but de caractériser la loi des événements extrêmes, non seulement le maximum où le minimum, mais aussi les observations qui excèdent un certain seuil indépendamment de la loi initiale des observations.

Chapitre 2

Théorie Des Valeurs Extrêmes

On cherche à décrire le comportement des valeurs extrêmes d'un échantillon. C'est-à-dire que l'on veut approcher la loi que suit le maximum ou le minimum des observations lorsque celles-ci suivent une loi inconnue. Nous savons que, pour une taille d'échantillons fixée, le maximum des observations $M_n = \max(X_1 \cdots X_n)$ va suivre F^n , lorsque X_i suit la loi F . Mais pour des échantillons devenant de plus en plus grand, ce résultats n'aura plus beaucoup de sens car la loi F^n dégénère. On veut donc chercher une loi non-dégénérée pour le maximum de l'échantillon, convenablement standardisé. La théorie des valeurs extrêmes fournit un cadre probabiliste visant à construire un modèle asymptotique pour les variables aléatoires extrêmes.

Le résultat fondamental concernant la distribution limite du maximum est le théorème suivant. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une loi limite non-dégénérée.

Théorème 1 (Théorème de Fisher-Tippett [19]) *S'il existe deux suites de constantes $(a_n)_{n=1}^\infty$ et $(b_n)_{n=1}^\infty$ avec $a_n > 0, \forall n$, telles que, pour $n \rightarrow +\infty$*

$$P\{(M_n - b_n)/a_n\} \rightarrow H(x) \quad (2.1)$$

où H est une fonction non-dégénérée, alors H est l'une des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= \exp(-\exp(-x)) & -\infty < x < +\infty. \\ H_{1,\alpha}(x) &= \exp(-x^{-\alpha}) & x \geq 0, \alpha > 0. \\ H_{2,\alpha}(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}) & x < 0, \alpha < 0. \\ 1 & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

On appelle H_o loi *Gumbel*, $H_{1,\alpha}$ loi *Fréchet* et $H_{2,\alpha}$ loi *Weibull*. Inversement, chacune de ces trois distributions est la distribution pour le maximum standardisé $(M_n - b_n)/a_n$, d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et dans ce cas, on a $H = F_X$, c'est-à-dire que les observations suivent par exemple une loi H .

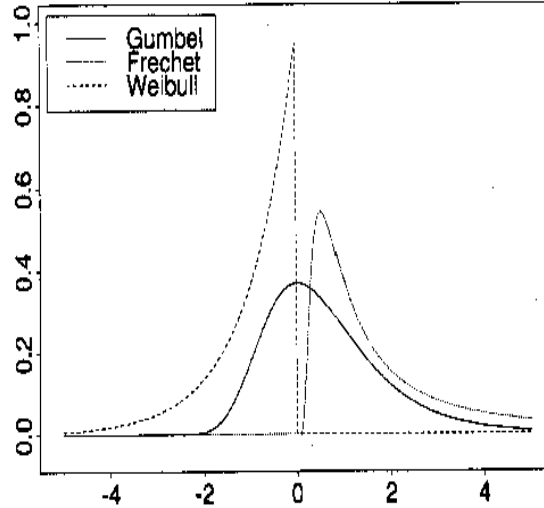


FIG. 2.1 – Densités des valeurs extrêmes [EMBRECHTS1997]

2.1 Domaines d'attraction

Une question intéressante est de déterminer quelles sont les lois F dont les maxima suivent asymptotiquement une loi H donnée et comment les suites a_n et b_n peuvent-elles être trouvées.

Le domaine d'attraction d'une loi est une sorte de généralisation du théorème central limite, il est défini de la façon suivante:

Définition 4 on appelle **domaine d'attraction** de H (ou *domaine d'attraction maximal*) l'ensemble des lois F pour lesquelles le maximum normalisé suit la loi H .

L'inverse de la *fonction de hasard* $h(x)$, d'une fonction de répartition F est définie par

$$\tilde{h}(x) = \frac{1 - F(x)}{f(x)} \quad (2.3)$$

on peut choisir alors les constantes a_n et b_n telles que

$$a_n = \tilde{h}(b_n) \quad b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (2.4)$$

Définition 1 Une distribution est dite **max-stable** pour des suites $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $a_n > 0$ et $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, si $F^n(b_n + a_n x) = F(x)$, $\forall n$.

Définition 2 Une distribution est du même type qu'une distribution des valeurs extrêmes donnée par (2.2), si et seulement si elle est **max-stable**.

Pour les trois distributions des valeurs extrêmes, les suites $(a_n)_{n=1}^\infty$ et $(b_n)_{n=1}^\infty$ qui normalisent le maximum sont les suivantes (voir[18]):

Gumbel: $a_n = 1$ ou $a_n = \text{constante}$, $b_n = \log n$.

Weibull: $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$.

Fréchet: $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$.

Domaine d'attraction (H)	Gumbel	Fréchet	<i>Weibull_M</i>
F	Normale Exponentielle Lognormale Gamma <i>Weibull_m</i>	Cauchy Pareto	Uniforme <i>Weibull_M</i>

TAB. 2.1 – Domaines d'attraction

Paramétrisation γ et Loi Généralisée (GEV)

Il existe une autre paramétrisation des distributions des valeurs extrême permettant de grouper les lois Fréchet et Weibull. On la nomme souvent paramétrisation γ .

Proposition 1 *En considérant la transformation $\gamma = 1/\alpha$ on peut réécrire les fonctions de (2.2) de la manière suivante:*

Loi Gumbel:

$$H_0(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \forall x. \quad (2.5)$$

Lois Fréchet et Weibull:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}) & 1 + \gamma x > 0, \gamma \neq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Propriétés:

1. $H_\gamma = H_0$ quand $\gamma \rightarrow 0$ (par valeurs positives ou négatives).
2. H_γ pour $\gamma > 0$ est la loi Fréchet, tandis que pour $\gamma < 0$ elle est Weibull.
3. Les densités correspondante sont données par :

$$h_0(x) = \exp(-e^{-x})e^{-x}.$$

$$h_\gamma(x) = \begin{cases} H_\gamma(x)(1 + \gamma x)^{-(1+1/\gamma)} & (1 + \gamma x) > 0, \gamma \neq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. $h_\gamma = h_0$ quand $\gamma \rightarrow 0$.

Pour éviter de travailler avec trois distributions limites, on cherche une paramétrisation les regroupant.

Résultat 1 (Distribution GEV) *Une caractérisation synthétique des lois extrêmes est la représentation de Jenkinson-Von Mises: Cette représentation est obtenue en introduisant un paramètre de forme (shape parameter) ξ . On appelle cette distribution la distribution généralisée des valeurs extrêmes (Generalized Extreme Value GEV), qui a la forme suivante:*

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \exp[-\{1 + \xi(\frac{x - \mu}{\sigma})\}^{-1/\xi}]. \quad (2.7)$$

En fait la distribution GEV est H_γ en introduisant les paramètres de position μ et d'échelle σ .

Propriétés:

1. Pour $\xi \rightarrow 0$, on obtient la loi Gumbel .
2. Pour $\xi > 0$ $H_{\mu,\sigma,\xi}$, est la loi Fréchet.
3. Pour $\xi < 0$ $H_{\mu,\sigma,\xi}$, est la loi Weibull.

Un outil essentiel dans la théorie des valeurs extrêmes est la représentation graphique, qui sert à explorer les données et visualiser l'existence ou non des valeurs extrêmes. Dans la section suivante on a présenté une synthèse des outils d'exploration graphique.

2.2 Outils statistiques d'exploration

La visualisation des données à une grande importance dans toute étude statistique, il existe différents outils d'exploration des données dans le cas extrême, nous présentons dans cette section les méthodes les plus classiques qui sont le graphe de la fonction de survie, les graphes de quantiles (ou de probabilités), le graphe de la fonction moyenne des dépassements, et l'estimateur de Hill, etc...

2.2.1 Graphe de la fonction de survie

La méthode la plus simple pour visualiser la queue de distribution d'une situation réelle, est de reporter sur un graphe l'estimateur de sa fonction de survie. Un estimateur sans biais de la fonction de survie $h(s)$ est donné par la formule suivante:

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i > s\}}$$

qui représente la fonction empirique des dépassements, pour plus de détails voir [18].

2.2.2 Les graphes de quantiles et de probabilités

Disposant d'observations $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, on aimerait voir graphiquement si une distribution donnée (dont on note F la fonction de répartition) s'ajuste

bien à cette série. Pour cela on se place sous l'hypothèse H_0 qu'elles sont *i.i.d.* de fonction de répartition F (invertible). On peut montrer que

$$E[F(X_{(i)})] = \frac{i}{n+1}$$

L'idée des graphes de probabilités (PP-plot) pour la loi F est de reporter sur un graphe les points de coordonnées :

$$\left(F(X_{(i)}); \frac{i}{n+1} \right)$$

Pour les graphes de quantiles (QQ-plot), le principe est identique : on représente les variations des $X_{(i)}$ en fonction des $F^{-1}(\frac{i}{n+1})$. L'allure du graphe indique sur la validité de l'hypothèse H : si la courbe a une forme linéaire, l'hypothèse H_0 est plausible, et si le graphe devient concave (resp. convexe) vers la droite, la distribution F attribue trop (resp. pas assez) de poids aux grandes valeurs (figure 2.2).

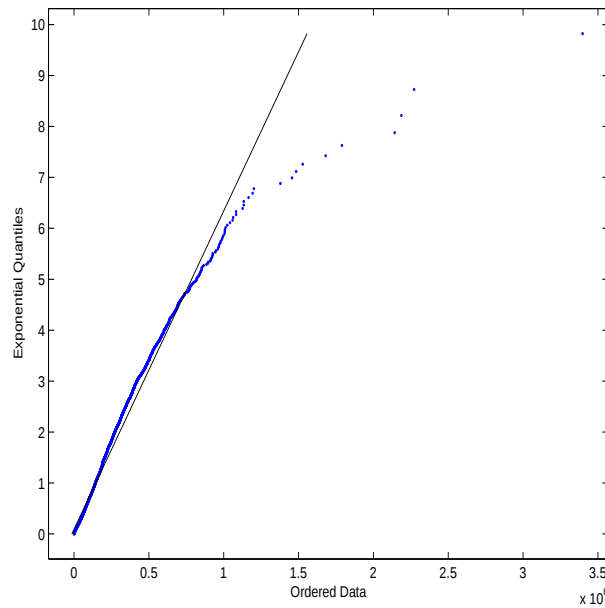


FIG. 2.2 – Graphique des quantiles (QQ-plot)

2.2.3 Graphe de la fonction moyenne des dépassements

La fonction moyenne des dépassements (FMD) fournit un moyen efficace d'exploration des données. Le principe de la méthode de la FMD consiste à comparer graphiquement la FMD estimée aux FMD théoriques. Disposant d'un échantillon $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, la FMD en un seuil $s \geq 0$ est naturellement estimée par:

$$\hat{e}_n(s) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - s) \cdot \mathbf{1}_{X_i > s}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i > s}}$$

La figure (2.3) montre les fonctions moyenne de dépassements théoriques de quelques loi usuelles (source:[18]). Souvent, la FMD est estimée aux valeurs $X_{(n-k)}$, $k = 1, \dots, n-1$.

Le numérateur s'écrit: $\sum_{i=1}^k (X_{(n-i+1)} - X_{(n-k)})$ tandis que le dénominateur vaut k . On représente alors les variations de:

$$E_{n,k} = \hat{e}_n(X_{(n-k)}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{(n-i+1)} - X_{(n-k)}.$$

Dans la section suivante on va s'intéresser non pas aux maxima, mais aux observations qui excèdent un certain seuil. Une approximation de la loi des excès est donnée au moyen de la loi GPD.

2.3 La Loi des Excès

Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a *i.i.d* de même loi $F \in MDA(H_\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$. Premièrement, on choisit un seuil élevé u et on note

$$N_u = \text{card}\{i : i = 1, \dots, n, \quad X_i > u\}$$

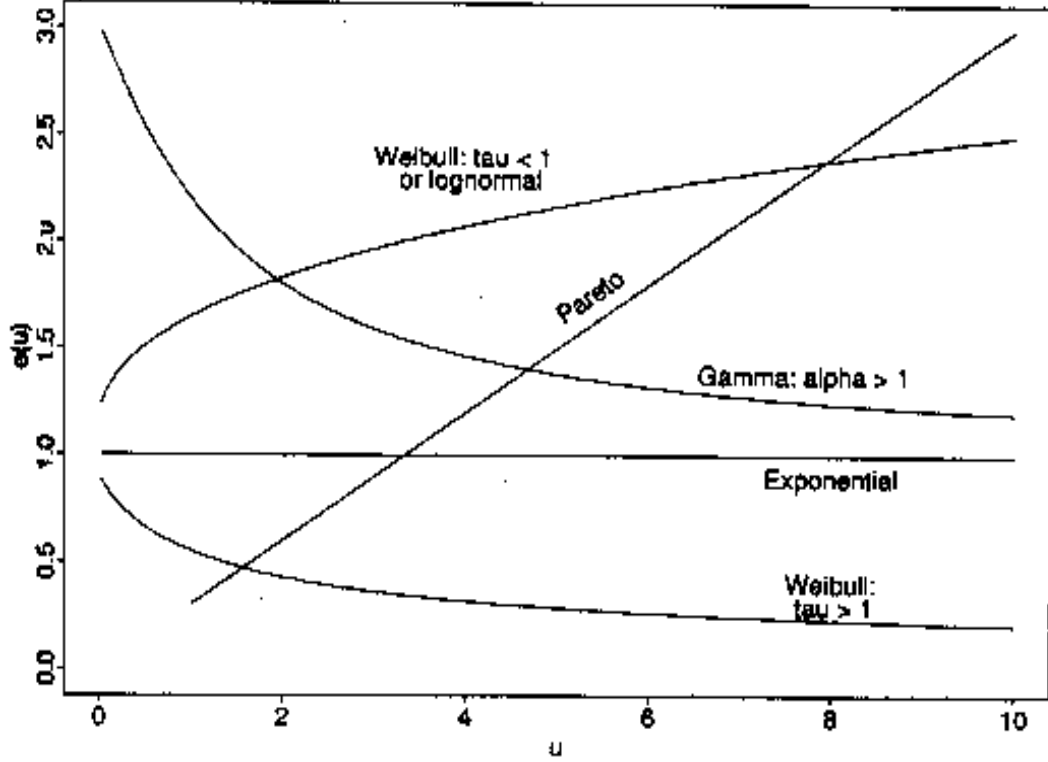
le nombre des excès.

Les excès correspondant sont notée par $Y_1, \dots, Y_{N_u}$, la distribution des excès de X est donné par :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u) = P(Y \leq y / X > u), \quad y \geq 0$$

la dernière relation peut être aussi écrite comme

$$\overline{F}(u + y) = \overline{F}(u) \overline{F}(y) \tag{2.8}$$

FIG. 2.3 – *Fonction Moyenne des Dépassements Théoriques*

Rappelons maintenant la définition de la distribution de Pareto Généralisée (GPD) introduite par Pickands(1975)[35].

Définition 1 La loi GPD $G_{\gamma,\sigma}$ avec les paramètres $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ est définie de la manière suivante:

$$G_{\gamma,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma \frac{x}{\sigma})^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0. \\ e^{-x/\sigma} & \text{si } \gamma = 0 \end{cases} \quad x \in D(\gamma,\sigma).$$

où

$$D(\gamma, \sigma) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } \gamma \geq 0 \\ [0, -\sigma/\gamma] & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$$

Définition 3 Les Loïs **Pareto généralisées** sont les lois

$$W(x) = 1 + \log G(x)$$

où $G(x)$ est une des lois des Valeurs Extrêmes.

Résultat 1 Les lois Pareto généralisées avec le paramètre α sont:
Exponentielle GP0

$$W_0(x) = 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0. \quad (2.9)$$

Pareto GP1

$$W_{1,\alpha}(x) = 1 - x^{-\alpha} \text{ si } x \geq 1, \alpha > 0. \quad (2.10)$$

Béta GP2

$$W_{2,\alpha}(x) = 1 - (-x)^{-\alpha} \text{ si } -1 \leq x \leq 0, \alpha < 0. \quad (2.11)$$

2.3.1 Exemples de distributions Heavy-Tailed

Il existe plusieurs distributions Heavy-Tailed, la table 2.2 donne une liste non-exhaustive de ces distributions. Toutes ces distributions ont un support

Nom	Queue $\overline{F}$ ou densité	Paramètres
lognormale	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Burr	$\overline{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x^\gamma}\right)^\alpha$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$
Weibull	$\overline{F}(x) = e^{-cx^\gamma}$	$c > 0, 0 < \gamma < 1$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$

TAB. 2.2 – Exemples de distributions Heavy-Tailed

$(0, +\infty)$ à l'exception de celui de la *loggamma* qui a un support $(1, +\infty)$

2.4 Estimateur de Hill

L'estimateur de Hill est construit de la manière suivante : On considère une suite de *v.a. i.i.d.* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de loi commune F , à queue lourde (Heavy Tailed) telle que : $1 - F(x) = x^{-\alpha}L(x)$, $x > 0$, $L(x)$ une fonction à variation lente telle que,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \text{ pour tout } \lambda > 0 \quad (2.12)$$

Alors si on note $\hat{\gamma}_{k_n}$ l'estimateur de Hill (Hill, 1975) de $\frac{1}{\alpha}$, il a l'expression suivante :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{(n-i+1)} - \log X_{(n-k)}, \quad (2.13)$$

Théorème 2 (Hall, 1982[24]) *On suppose qu'il existe deux constantes strictement positives C et D telles que*

$$1 - F(x) = Cx^{-\alpha}(1 + Dx^{-\beta} + o(x^{-\beta})).$$

Si k_n vérifie

$$k_n \longrightarrow +\infty \text{ et } k_n/n^{2\beta/(2\beta+\alpha)} \longrightarrow 0 \quad (2.14)$$

quand n tend vers l'infini, alors l'estimateur de Hill est asymptotiquement, normal et on a :

$$\sqrt{k_n}(\gamma_{k_n, n} - \frac{1}{\alpha}) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \frac{1}{\alpha^2}).$$

Cet estimateur, le plus utilisé en théorie des valeurs extrêmes, a été largement étudié. Les résultats de consistance sont établis pour $\gamma > 0$. Sa faible consistance a été établie par Mason (1982), sa forte consistance a été établie en particulier par Hall et Welsh (1984) et Deheuvels, Haeusler et Mason (1988) qui pour une suite bien choisie de k_n donnent la vitesse de convergence optimale. Resnick et Starica (1995) ont démontré la consistance de l'estimateur de Hill dans le cas de variables dépendantes. On a aussi défini les conditions sous lesquelles l'hypothèse de normalité asymptotique de cet estimateur est vérifiée (Hall (1982), Csörgő, Mason (1985), Athreya, Lahiri, Wu (1998), Davis, Resnick (1988b)).

En raison des hypothèses imposées pour obtenir un bon comportement asymptotique, l'estimateur de Hill n'est en fait efficace que pour les lois extrêmes

de Fréchet. C'est en cela que réside la grande différence entre les estimateurs de Pickands (qui sera défini dans la section suivante) et de Hill, même si du point de vue de leur construction, leur explication "intuitive" est sensiblement la même. Nous renvoyons aussi à Hauesler et Teugel (1985), Deheuvels, Haeusler et Mason (1988) et à Bacro, et Brito (1998) qui ont proposé récemment un estimateur plus général que l'estimateur de Hill avec les mêmes propriétés asymptotiques. Une approche fonctionnelle pour étudier les propriétés de l'estimateur de Hill est considérée par Dekkers et de Hann (1989).

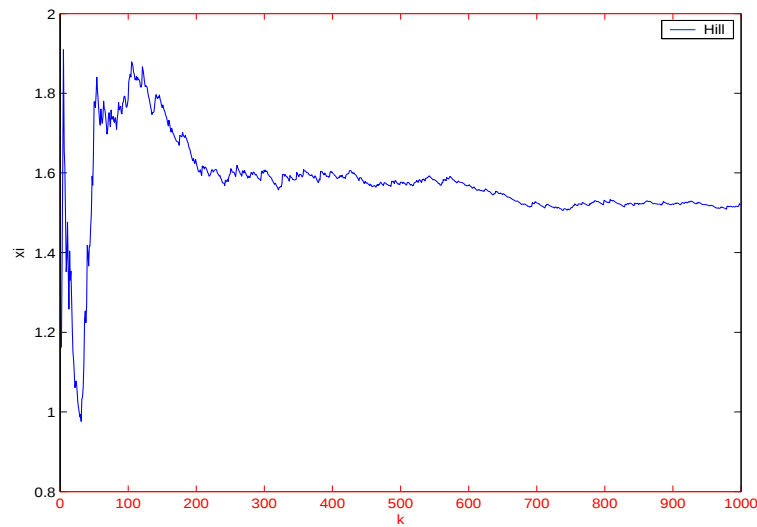


FIG. 2.4 – *Estimateur de HILL*

2.5 Estimateur de Pickands

Il est fondé sur le calcul des quantiles. Cet estimateur a été introduit par Pickands (1975) et revisité par Drees (1995 ou 1998), Dekkers et al. (1989) qui ont établi sa faible consistance.

Il est défini de la manière suivante. Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une *v.a.* de loi F , dont la loi limite du maximum est $H_\gamma(x)$, et désignons par $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$, la statistique d'ordre associée. Notons $\hat{\gamma}_n$ l'estimateur de

Pickands de γ . Alors, étant donnée une suite $m = m(n)$, on a :

$$\hat{\gamma}_n = -\frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{x_{(n-m+1)} - x_{(n-2m+1)}}{x_{(n-2m+1)} - x_{(n-4m+1)}}\right) \quad (2.15)$$

Les propriétés asymptotiques de cet estimateur sont les suivantes :

Théorème 3 – *Sous les hypothèses précédente, si $m(n) \rightarrow \infty$ et*

$\frac{m(n)}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors :

$$\hat{\gamma}_n \rightarrow \gamma, \text{ en probabilité quand } n \rightarrow \infty$$

– *Sous les mêmes hypothèses, si $\frac{m(n)}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{m(n)}{\log \log n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors :*

$$\hat{\gamma}_n \rightarrow \gamma, \text{ p.s quand } n \rightarrow \infty$$

Sous des hypothèses affectant la fonction F , que nous précisons ci-dessous, l'estimateur de Pickands admet, asymptotiquement, une distribution normale. Posons :

H_0 : Supposons que $U(x) = \left(\frac{1}{1-F(x)}\right)^{-1}$ ait une dérivée positive et qu'il existe une fonction a positive telle que, pour $x > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(tx)^{1-\gamma}U'(tx) - t^{1-\gamma}U'(t)}{a(t)} = \log x$$

Théorème 4 *Pour des v.a. i.i.d. dont la fonction F vérifie l'hypothèse H_0 , si $m = m(n) \rightarrow \infty$, avec $m(n) = o\left(\frac{n}{g(n)}\right)$ où $g(t) = t^{3-2\alpha}(U'(t)/a(t))^2$, $n \rightarrow \infty$, alors*

$$\sqrt{m}[\hat{\gamma}_n - \gamma] \rightarrow \mathcal{N}(0, \Gamma), \quad n \rightarrow \infty$$

où

$$\Gamma = \alpha^2(2^{2\alpha+1} + 1)/(2(2^\alpha - 1) \log 2)^2.$$

Remarques:

- la normalité asymptotique de l'estimateur est obtenue aussi pour des suites $m(n)$ telles que $m(n) \rightarrow \infty$ avec $m(n) = o(\log^2 n)$.

- pour les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Pickands nous renvoyons à Drees (1995 et 1998).

L'estimateur de Pickands, fondé sur l'utilisation des quantiles, est général dans sa conception et peut être utilisé dans l'estimation des paramètres des trois distributions extrêmes. Une généralisation de l'estimateur de Pickands a été introduite par Dekkers, Einmahl et de Haan (1989 a et b) . Un estimateur proche de celui-ci a été proposé par ces auteurs. Sous des conditions de régularité de la loi F , ils obtiennent la normalité asymptotique de cet estimateur.

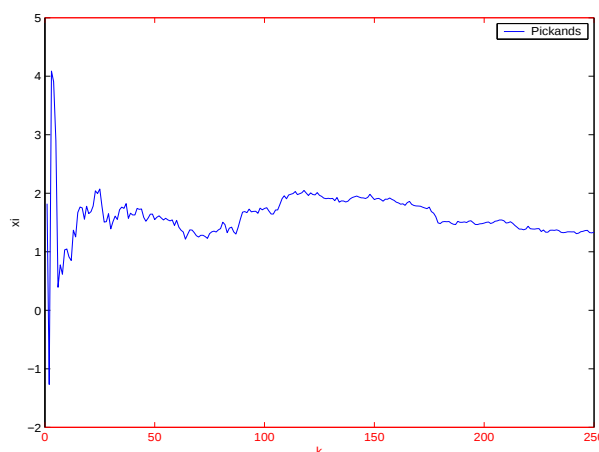


FIG. 2.5 – *Estimateur de Pickands*

Après avoir présenté dans ce chapitre l'essentiel de la théorie des valeurs extrêmes, on va passer maintenant aux méthodes d'estimations utilisées dans cette théorie.

Chapitre 3

Méthodes d'estimation

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les différentes méthodes existantes, pour l'estimation des quantiles extrêmes à partir des données de type Heavy-tailed. Des exemples courants de distributions Heavy-tailed sont: la loi de Pareto, Burr, Student t, Loggamma et Fréchet. Ces loi sont utilisées dans divers domaines pour modéliser des situations réelles, notamment en assurance elles modélisent les tailles de réclamations (claim sizes) et de pertes (losses), et en finance elle capture l'effet heavy-tail de certaines quantités telles que le taux de change(exchange rates) ou les log-rentabilités(log-returns) sur les stocks.

Dans le paragraphe suivant, on va présenter les méthodes d'estimation et d'inférence les plus utilisées dans la théorie des valeurs extrêmes.

3.2 Estimation pour le modèle GEV

3.2.1 Méthode du Maximum de Vraisemblance

Considérons à nouveau la distribution générale des extrêmes des maxima dont l'expression analytique est donnée par le système suivant :

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \begin{cases} \exp[-\{1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma})\}^{-1/\xi}] & \xi \neq 0, 1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma}) > 0. \\ \exp(-e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})}) & \xi = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La densité de probabilité s'écrit:

$$h_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} [1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{-(1+\frac{1}{\xi})} \exp[-\{1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma})\}^{-\frac{1}{\xi}}]$$

Afin d'estimer les paramètres intervenant dans la distribution, nous déterminons la fonction vraisemblance comme suit:

$$\log L_{\mu,\sigma,\xi}(x_1, \dots, x_n) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n [(1+\frac{1}{\xi}) \log\{1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})\} - \{1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})\}^{-\frac{1}{\xi}}].$$

Les équations des dérivées sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n \{-(1+\frac{1}{\xi})(\frac{-\xi}{\sigma}) \frac{1}{1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})} - (\frac{-1}{\xi})(\frac{-\xi}{\sigma}) [1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]^{-(1+\frac{1}{\xi})}\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{(1+\frac{1}{\xi}) \frac{\xi}{\sigma[1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]} - (\frac{1}{\sigma}) [1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]^{-(1+\frac{1}{\xi})}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^n \{-\frac{1}{\sigma} - (1+\frac{1}{\xi}) \frac{-\xi(x_i-\mu)}{\sigma^2} \frac{1}{1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})} - (\frac{-\xi(x_i-\mu)}{\sigma^2})(\frac{-1}{\xi}) [1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]^{-(1+\frac{1}{\xi})}\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{-\frac{1}{\sigma} + (1+\frac{1}{\xi}) \frac{\xi(x_i-\mu)}{\sigma^2[1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]} - (\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}) [1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]^{-(1+\frac{1}{\xi})}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \{-(1+\frac{1}{\xi})(\frac{x_i-\mu}{\sigma}) \frac{1}{1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})} - \log[1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})] \frac{-1}{\xi^2} \\ &\quad - e^{-\frac{1}{\xi} \log[1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]} [(\frac{-1}{\xi})(\frac{x_i-\mu}{\sigma}) \frac{1}{1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})} + \frac{1}{\xi^2} \log[1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \{-(1+\frac{1}{\xi})(\frac{x_i-\mu}{\sigma[1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]}) + \frac{1}{\xi^2} \log[1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})] \\ &\quad - [1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]^{-\frac{1}{\xi}} [(\frac{-1}{\xi})(\frac{x_i-\mu}{\sigma}) \frac{1}{1+\xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})} + \frac{1}{\xi^2} \log[1 + \xi(\frac{x_i-\mu}{\sigma})]]\}. \end{aligned}$$

on arrive donc à une fonction non linéaire $\psi(\mu, \sigma, \xi) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, des variables μ , σ et ξ dont on doit trouver un zéro. Cette fonction n'est pas prête analytiquement de donner des zéros; donc on peut procéder par des méthodes numériques, à savoir la méthode itérative de Newton (ou quasi-newtonienne), que nous avons utilisé pour résoudre ce problème.

L'estimateur du maximum de vraisemblance conduit à un estimateur non biaisé, asymptotiquement normal (Prescott et Walden, 1980, 1983, Tiago de Oliveira, 1980, Smith, 1985, Hougaard, 1986 ou Smith, 1987).

L'algorithme de la méthode est décrit comme suit:

EMVGEV:

-
1. Poser x_0 proche du zéro de ψ .
 2. Pour $k = 0, 1, 2, \dots$
 - calculer $\psi(x_k)$ et $\psi'(x_k)$, où $\psi'(x_k)$ est la matrice des dérivées premières de chaque composante par rapport à chaque argument.
 - Résoudre le système linéaire $\psi'(x_k)\Delta x_k = -\psi(x_k)$, où Δx_k est le vecteur représentant la différence entre les solutions aux pas k et $k + 1$.
 - Poser $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$
 3. S'arrêter dès que $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$
-

3.2.2 Méthode des Moments Pondérés

Vu la complexité de la méthode du maximum de vraisemblance, d'autres méthodes d'estimation moins complexes peuvent être aussi utilisées comme la méthode des moments pondérés, que nous introduisons dans le paragraphe suivant.

Le principe de cette méthode proche de celui des moments. L'estimation est réalisée à partir des moments de la variable aléatoire positive X pondérée par $H_{\mu,\sigma,\xi}^r(X)$, avec r un réel positif. Ces moments s'écrivent:

$$\omega_r(\mu, \sigma, \xi) = E[X H_{\mu,\sigma,\xi}^r(X)]$$

En effet, ces derniers se calculent facilement en remarquant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x H_{\mu,\sigma,\xi}^r(x) dH_{\mu,\sigma,\xi}^r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\mu,\sigma,\xi}^{-1}(y) \cdot y^r dy$$

Or

$$H_{\mu,\sigma,\xi}^{-1}(y) = \begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{\xi} [(-\log y)^{-\xi} - 1] & \text{si } \xi > 0 \\ \mu - \sigma \log(-\log y) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

L'intégrale converge lorsque $\xi < 1$ et $\xi \neq 0$ et:

$$\omega_r(\mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{r+1} \left[\mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \Gamma(1 - \xi)(1 + r)^\xi) \right]$$

En calculant les trois premiers moments pondérés ($r = 0, 1, 2$) :

$$\omega_0(\mu, \sigma, \xi) = \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - \gamma(1 - \xi)]$$

$$\omega_1(\mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{2} [\mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \gamma(1 - \xi) 2^\xi)]$$

$$\omega_2(\mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{3} [\mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \gamma(1 - \xi) 3^\xi)]$$

et en inversant le système, l'estimateur de ξ est déterminé numériquement à partir de cette équation:

$$\frac{3^\xi - 1}{2^\xi - 1} = \frac{3\hat{\omega}_2(\mu, \sigma, \xi) - \hat{\omega}_0(\mu, \sigma, \xi)}{2\hat{\omega}_2(\mu, \sigma, \xi) - \hat{\omega}_0(\mu, \sigma, \xi)} \quad (3.1)$$

les estimateurs par la méthode des moments pondérés de (μ, σ) s'écrivent :

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \frac{(2\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_0)\hat{\xi}}{\Gamma(1-\hat{\xi})(2^{\hat{\xi}} - 1)} \\ \hat{\mu} = \hat{\omega}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} [1 - \Gamma(1 - \hat{\xi})] \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ pour tout $x > 0$. Les moments pondérés sont estimés par :

$$\hat{\omega}_r(\mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} U_{(i)}^r \text{ pour } r = 0, 1, \text{ et } 2 \quad (3.3)$$

compte tenu du fait que $H_{\mu, \sigma, \xi}(X_{(i)}) \stackrel{d}{=} U(i)$ pour $i = 1 \dots n$.

L'algorithme de la méthode est le suivant:

MOMGEV:

-
1. Déterminer la statistique d'ordre $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$.
 2. Estimer les trois moments pondérés selon l'équation (3.3).
 3. Déterminer $\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ à partir des équations (3.1) et (3.2).
-

3.3 Estimation pour le modèle POT

Ici on considère la loi GPD qui a été introduite par Pickands(1975[35]) pour modéliser les excès au delà d'un seuil, elle a été utilisée pour modéliser les données observées dans différents domaines. Par exemple, Hosking et Wallis (1978[27]) l'ont utilisée pour modéliser les crues maximales annuelles de la rivière Nidd en Angleterre; autres exemples de l'utilisation de la loi GPD dans l'analyse des valeurs extrêmes ont été discutés par Castillo(1994[6]), Embrechts([18]). Une propriété intéressante et utile de la loi GPD est qu'elle est stable par rapport aux opérations sur les excès au delà d'un seuil. En effet on a

$$Prob[X - u \leq x / X > u] = \frac{Prob[u < X < x + u]}{Prob[X > u]} = \frac{F(x + u; \gamma, \sigma) - F(u; \gamma, \sigma)}{1 - F(u; \gamma, \sigma)}$$

$$Prob[X - u \leq x / X > u] = \frac{(1 - \gamma u / \sigma)^{1/\gamma} - (1 - \gamma(x + u) / \sigma)^{1/\gamma}}{(1 - \gamma u / \sigma)^{1/\gamma}}$$

$$Prob[X - u \leq x / X > u] = 1 - (1 - \gamma x / (\sigma - \gamma u))^{1/\gamma},$$

ce qui veut dire que si $X \sim GPD(\gamma, \sigma)$ alors $X - u$, sachant $X > u$ pour tout u est une $GPD(\gamma, \sigma - \gamma u)$.

Cette propriété implique que si le modèle est consistant pour un ensemble de données avec un seuil fixé, il devra être consistant pour les données avec tous les seuils plus élevés. Les valeurs suivantes du paramètre γ , ont un intérêt particulier:

- Quand $\gamma = 0$, la loi GPD est une exponentielle de moyenne σ .
- Quand $\gamma = 1$, la loi GPD devient une distribution uniforme $U[0, \sigma]$
- Quand $\gamma \leq -1/2$, $Var(X) = \infty$. En effet, le moment d'ordre r existe si $\gamma > -1/r$
- Quand $\gamma < 0$, la loi GPD est une distribution de Pareto.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'estimation des paramètres (γ, σ) de la loi GPD. Pickands(1975 [35], 1984[36] , 1993[37]) suggère quelques méthodes pour l'estimation des paramètres qui sont combinées avec la procédure du choix de la valeur seuil définissant les excès. Elles incluent les méthodes non-paramétriques, Bayésienne, statistiques d'ordre et d'autres approches.

3.3.1 La méthode des Moments

les estimateurs des paramètres γ et σ , par la méthode des moments (MOM) sont donnés par[27]:

$$\hat{\gamma}_{MOM} = (\bar{x}^2/s^2 - 1)/2, \quad (3.4)$$

$$\hat{\sigma}_{MOM} = \bar{x}(\bar{x}^2/s^2 + 1)/2, \quad (3.5)$$

où $\bar{x}$ et s^2 la moyenne et la variance de l'échantillon respectivement.

L'algorithme de la méthode est le suivant:

MOMGPD:

-
1. Calculer $\bar{x}$ et s^2 à partir de l'échantillon des excès.
 2. Déterminer $\hat{\gamma}_{MOM}$ et $\hat{\sigma}_{MOM}$ à partir des relations 3.4 et 3.5
-

3.3.2 La méthode du Maximum de Vraisemblance

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un n -échantillon d'une loi GPD $G_{\gamma, \sigma}$, la fonction log-vraisemblance associée est donnée par

$$\log(L(X; \gamma, \sigma)) = -n \log(\sigma) - ((1 + \gamma)/\gamma) \sum_{i=1}^n \log(1 + \gamma x_i/\sigma).$$

où les estimateurs du Maximum de vraisemblance $(\hat{\gamma}, \hat{\sigma})$ de (γ, σ) sont les solutions du système d'équations suivant:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 + \gamma \frac{x_i}{\sigma}) = \gamma. \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i/\sigma}{1 + \gamma x_i/\sigma} = \frac{1}{1 + \gamma}. \quad (3.7)$$

Ce système n'admet pas de solutions explicites, et il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour calculer les valeurs de $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$. Pour des échantillons de petite taille, la procédure du maximum de vraisemblance ne donne pas une estimation précise de (γ, σ) , et parfois elle ne conduit à aucune estimation (Hosking et Wallis 1978[27]).

3.3.3 Méthode des Moments Pondérés

Les moments pondérés (Probability Weighted Moments PWM) d'une *v.a* X de distribution F sont définis par:

$$\mu_{prs} = \mathbb{E}(X^p F(X)^r (1 - F(X))^s) \quad (3.8)$$

pour toutes valeurs réelles de p , r et s tel que l'esperance existe. Les moments pondérés ont été introduit par Greenwood et al(1979[21]). L'approche des moments pondérés (PWM) apparait comme un outil alternatif pour l'estimation des paramètres d'une distribution. En pratique la procédure usuelle est de fixer $p = 1$ et choisir r et s des entiers positifs les plus petits possible. Par conséquent, on prend en considération les moments μ_{10s} , $s = 0, 1, \dots$ et μ_{1r0} , $r = 0, 1, \dots$.

Dans le cas de la loi GPD et avec la restriction $-1/2 < \gamma < 1/2$ qui est imposée essentiellement comme arguments pratiques, Hosking et Wallis 1978[27] ont comparé a partir d'une étude simulation, trois méthodes d'estimation (Maximum de vraisemblance (ML), méthode des moments (MOM), les moments pondérés (PWM). Tous les résultats obtenus sont fortement influencés par le paramètre γ , et aucune méthode ne se distingue meilleure par rapport aux autres, pour un domaine considéré de variation de γ . leur principales conclusions sont les suivantes:

1. Le maximum de vraisemblance ne montre son efficacité asymptotique que pour des échantillons de taille supérieure à 500.
2. La méthode des moments n'est pas fiable pour $\gamma < -0.2$.
3. La méthode des Moments pondérés est bonne pour $-1/2 < \gamma < 0$.

En ce qui concerne la loi GPD, les moments pondérés μ_{1uv} ont l'expression suivante:

$$\mu_{1uv} = \frac{\sigma}{\gamma} [B(u+1, v-\gamma+1) - B(u+1, v+1)], \quad (3.9)$$

où $B(.,.)$ est la fonction Beta, $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

Les moments μ_{1uv} existent si

$$u+1 > 0, \quad v+1 > 0, \quad v-\gamma+1 > 0 \quad (3.10)$$

Dans les cas particuliers où $r = 0$ ou $s = 0$, les moments pondérés se presentent sous une forme plus simple

$$\mu_{10s} = \frac{\sigma}{(1+s)(1+s-\gamma)}, \quad (3.11)$$

et

$$\mu_{1r0} = \frac{\sigma}{\gamma} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+r-\gamma)}, \quad (3.12)$$

les estimateurs des paramètres par la méthodes des moments pondérés PWM sont:

$$\hat{\gamma}_{PWM} = \bar{x}/(\bar{x} - 2t) - 2, \quad (3.13)$$

$$\hat{\sigma}_{PWM} = 2\bar{x}t(\bar{x} - 2t), \quad (3.14)$$

où

$$t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - p_{(i)})x_{(i)},$$

$p_{(i)} = (i - 0.35)/n$, et $x_{(i)}$ est la i^{eme} statistique d'ordre dans l'échantillon.

Commentaire:

On relève malheureusement que ces méthodes ne sont pas tout le temps applicables, Pour $\gamma < -1$, la fonction Vraisemblance peut être infini, et le maximum de vraisemblance n'existe pas. En outre, les conditions de régularité de *Cramer* (voir [5]) ne sont pas vérifiées pour certaines valeurs de γ . En plus, pour $\gamma \geq 1/2$, la variance $Var(X) = \infty$, et les estimateurs des MOM et PWM n'existent pas. Même quand les estimateurs des MOM et PWM existent, le problème de consistance avec les valeurs observées de l'échantillon, c'est-à-dire que, quelques valeurs de l'échantillon peuvent tomber en dehors du domaine suggéré par les valeurs estimées des paramètres: cette situation se produit quand $x_{(n)} > -\sigma/\gamma$, où $x_{(n)}$ est la plus grande statistique d'ordre dans l'échantillon. Hosking et Wallis (1978[27]) ont donné les raisons suivantes pour la restriction des valeurs de γ à $-1/2 < \gamma < 1/2$.

Après avoir décrit les principales méthodes utilisées dans l'estimation des paramètres de distributions utilisées dans la théorie des valeurs extrêmes, on va presenter dans la section suivante les trois principales méthodes d'estimation des quantiles extrêmes.

3.4 Estimation des quantiles extrêmes

Généralement on distingue trois types de méthodes d'estimation des quantiles extrêmes:

1. La méthode des maxima de blocs .
2. La méthode des excès: POT (Peaks-over-threshold).
3. Les méthodes basées sur les quantiles.

Dans le paragraphe suivant on va présenter la première méthode utilisée dans l'estimation des quantiles extrêmes, basée sur la loi GEV.

3.4.1 La méthode des maxima de blocs

La méthode des blocs est la plus ancienne méthode dans les valeurs extrêmes. En effet, elle est directement inspirée de la loi limite des maxima (Fisher et Tippett, 1928), qui est la loi GEV introduite dans le chapitre précédent:

$$H_{\gamma,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp[-\{1 + \gamma(\frac{x-\mu}{\sigma})\}^{-1/\gamma}] & 1 + \gamma(\frac{x-\mu}{\sigma}) > 0, \gamma \neq 0. \\ \exp(-\exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma}))) & \gamma = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de la méthode des blocs est le suivant:

Blocm:

-
1. Diviser l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ en m blocs de longueur l ($n = ml$).
 2. Pour chaque bloc calculer le maximum

$$M_{l,j} = \max(X_{(j-1)l+1}, \dots, X_{jl}).$$

3. Déterminer les estimateurs $\hat{\gamma}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ des paramètres de la loi GEV à partir de l'échantillon des maxima de blocs $(M_{l,1}, \dots, M_{l,m})$.
4. Estimer le quantile extrême à l'aide de la formule suivante:

$$\hat{q}_\alpha = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\gamma}} (1 - (-\log(1 - \frac{1}{\alpha}))^{-\hat{\gamma}}).$$

La méthode des blocs n'est pas très efficace, car elle utilise une donnée seulement, de chaque bloc de longueur l . Cependant elle reste utile pour l'estimation des périodes de retour (return levels) dans le domaine de finance.

Exemple d'Application en Finance

Dans l'article [28], les auteurs ont analysé les revenus journalier (the daily returns) du marché Suisse représenté par "Credit Suisse General" index 2 pour la période du 1-01-1969 au 1-12-1999. L'échantillon a été divisé en 31 blocs.

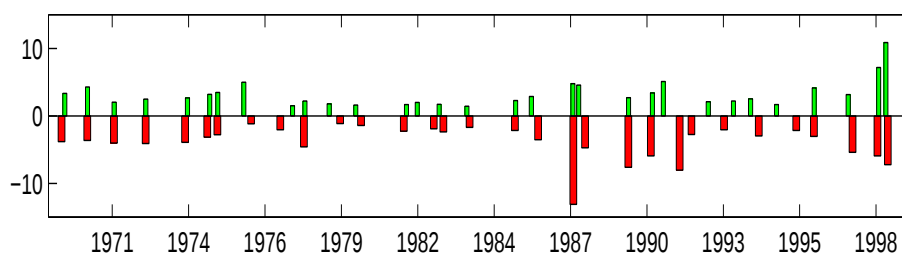


FIG. 3.1 – *Minima et maxima annuels des revenus journalier de Credit Suisse General index.*

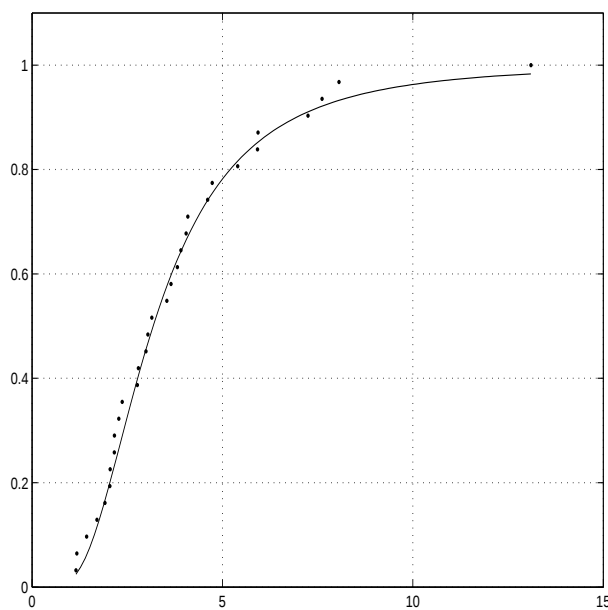


FIG. 3.2 – *Ajustement GEV de l'échantillon*

Estimation des paramètres de la loi GEV à 95%			
	Borne_inf	Estimation	Borne_sup
ξ	0.02	0.2805	0.59
σ	1.09	1.3669	1.84
Estimation de R^{10} (GEV reparameterisée) à 95%			
	Borne_inf	Estimation	Borne_sup
R^{10}	5.29	6.9408	11.63

TAB. 3.1 – *Estimation des paramètres de la loi GEV et le R^{10}*

Les estimateurs du maximum de vraisemblance obtenus sont $\hat{\xi} = 0.28$, $\hat{\sigma} = 1.37$ et $\hat{\mu} = 2.65$. la figure (3.2), montre le graphe d'ajustement de l'échantillon par la distribution GEV .

En pratique les quantités d'intérêt ne sont pas les paramètres eux même, mais les quantiles, aussi appelés périodes de retour (return levels), de la GEV estimée. La période de retour R^k est le niveau qui sera dépasser une fois sur des périodes de k années.

$$R^k = H_{\xi, \sigma, \mu}^{-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

En prenant par exemple $k = 10$, on obtient $\hat{R}^{10} = 6.94$, ce qui signifie que la perte maximale observée sur une année va dépasser 6.94% sur une période de 10 ans en moyenne. Pour remédier a l'insuffisance de la méthode des maxima de blocs, en terme de taille d'échantillon, une autre méthode dite "méthode des excès" ou POT a été developper. Nous présentons cette méthode dans le paragraphe suivant.

3.4.2 La méthode des excès

Avant d'aborder la méthode des excès en détails, on va présenter une méthode graphique du choix du nombre des excès k , qui intervient dans le calcul de plusieurs estimateurs. En effet, il est indispensable de calculer ces estimateurs sur les vraies queues de distribution. Choisir un k trop élevé engendre le risque de prendre en compte des valeurs qui ne sont pas extrêmes, à l'inverse, un sous échantillon trop court ne permet pas aux estimateurs d'atteindre leur niveau de stabilité.

Choix du nombre des excès

Le principe de cette méthode est basé sur la représentation graphique de l'estimateur de l'indice des valeurs extrêmes γ en fonction du nombre des excès k , ensuite de choisir k dans la partie où l'estimateur est stable, la partie du graphique où l'estimateur a une allure linéaire(voir figure(3.3)).

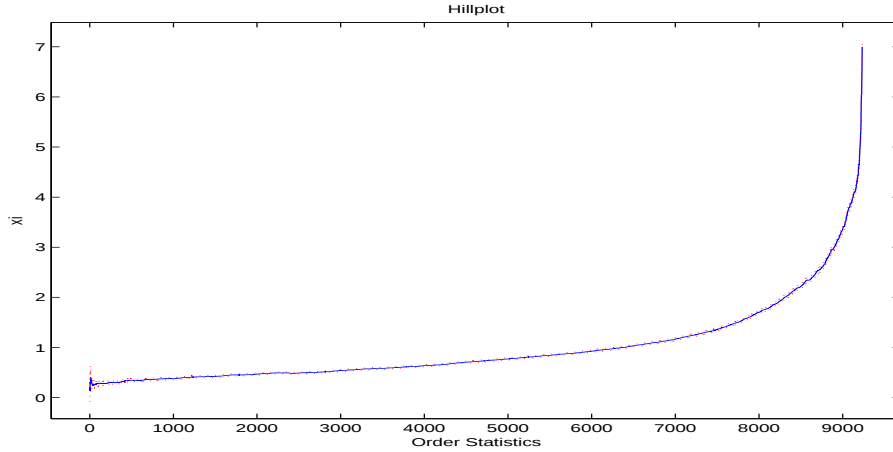


FIG. 3.3 – *Estimateur de Hill*

Déroulement de la méthode

Le théorème de Pickands sur l'approximation de la loi des excès permet d'estimer le quantile q_α de F de la manière suivante

- On choisit un seuil u assez élevé et on ne retient que les k observations supérieures strictement à u les excès associées $(x_i - u)$ sont notés $y_1 \cdots y_k$
- D'après le théorème de Pickands la loi des y_i peut être approchée pour u grand par G . Ceci permet d'estimer les paramètres ξ et β de G en utilisant les observations y_i . Les estimateurs obtenus sont notés $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$.
- Dans l'équation(4.5) on utilise l'approximation $1 - F(u) \approx k/n$, pour écrire:

$$\begin{aligned} P(X > q_\alpha) &= (1 - F(u))(1 - F_u(q_\alpha - u)) \\ &\approx \frac{k}{n}(1 - G(q_\alpha - u, \hat{\xi}, \hat{\beta})) \end{aligned}$$

– L'équation précédente permet d'estimer q_α par

$$\hat{q}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} [1 - (n\alpha/k)^{\hat{\xi}}]$$

3.4.3 Les méthodes basées sur les quantiles

La méthode ET

Breiman et *al.* ont utilisé l'approximation de Pickands en supposant que $\xi = 0$, i.e, que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel: les lois Normale, exponentielle, Lognormale, gamma, weibull. Breiman et *al.* ont utilisé l'approximation ET (Exponential tail):

$$P(X \geq x | X \geq u) \simeq \exp\left(-\frac{x-u}{\lambda}\right) \quad \text{pour } x \geq u.$$

Si $u = x_{(n-k)}$, alors pour $x > x_{(n-k)}$

$$P(X \geq x) \simeq \frac{k}{n} \exp\left(-\frac{x - x_{(n-k)}}{\lambda}\right)$$

et q_α peut être approximer par $q_\alpha \simeq x_{(n-k)} + \lambda \ln(k/n\alpha)$, où λ peut être estimé par $\hat{\lambda} = (1/k) \sum_{i=0}^{k-1} (x_{(n-i)} - x_{(n-k)})$. L'estimateur de q_α par la méthode ET est:

$$\hat{q}_\alpha = x_{(n-k)} + \left[\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (x_{(n-i)} - x_{(n-k)}) \right] \ln\left(\frac{k}{n\alpha}\right)$$

La méthode QT

La méthode QT est une généralisation de la méthode ET, présentée aussi par Breiman et *al.*, ils ont proposé une approximation quadratique de la queue

$$q_\alpha \simeq x_{(n-k)} + \lambda \left[\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln(\alpha) \right] - \frac{\tau}{2} \left[\ln^2\left(\frac{k}{n}\right) - \ln^2(\alpha) \right]$$

les estimateurs des paramètres λ et τ sont donnés par

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=0}^{k-1} i w_{1i} (x_{(n-i+1)} - x_{(n-k)})$$

$$\hat{\tau} = \sum_{i=0}^{k-1} i w_{2i} (x_{(n-i+1)} - x_{(n-k)})$$

où

$$w_{1i} = \frac{S_2 - S_1 u_i}{D} \text{ et } w_{2i} = \frac{(k-1)u_i - S_1}{D}$$

$$S_i = \sum_{j=0}^{k-1} u_j^i \text{ pour } i = 1, 2; \quad u_j = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} \text{ pour } j < n, \text{ et } D = (k-1)S_2 - S_1^2$$

Finalement l'estimateur de q_α est:

$$\hat{q}_\alpha = x_{(n-k)} + \hat{\lambda}[\ln(\frac{k}{n}) - \ln(\alpha)] - \frac{\hat{\tau}}{2}[\ln^2(\frac{k}{n}) - \ln^2(\alpha)]$$

La méthode basée sur l'estimateur de Hill

Cette méthode est très simple, elle utilise l'hypothèse que

$$1 - F(x) = Cx^{-1/\gamma},$$

donc q_α peut être approximer par $(C/\alpha)^\gamma$. Le paramètre γ est estimé par $\hat{\gamma}$ et C est estimé en remplaçant x par $x_{(n-k)}$ et $1 - F(x)$ par $1/n$. L'estimation de q_α par la méthode Hill est:

$$\hat{q}_\alpha = x_{(n-k)} \left(\frac{k}{n\alpha} \right)^{\hat{\gamma}}. \quad (3.15)$$

l'algorithme de la méthode est:

QEHILL

-
- 1-Choisir le nombre de valeurs extrêmes k .
 - 2-Estimer l'indice γ à partir des k plus grandes valeurs.
 - 3- Utiliser la formule 3.15 pour estimer le quantile extrême.
-

3.5 Conclusion

Ces trois chapitres constituent l'outil pour lequel on c'est basée pour l'étude de simulation et l'application aux données réelles en assurance automobile observées sur une période de 10 ans, collectées sur le territoire national: Voir rapport CNA/Direction des Assurances Ministère des finance Rapport d'étude 1999/2001 (Boukhetala, Mehassoual). Dans le but d'élaborer un système de tarification de prime de réassurance (concernant la catégorie des sinistres dépassant un certain seuil de coût de sinistre), qui fera l'objet des chapitres 4 et 5 de notre travail.

Dans le chapitre 4 on présente les outils mathématiques et statistiques nécessaire à la réassurance en relation avec la TVE. Ce qui nous permet d'utiliser ces outils pour élaborer un système de tarification basé sur un estimateur de prime asymptotiquement normal, permettant ainsi d'encadrer cette prime par intervalles de confiance. Le chapitre 5 est une mise en oeuvre de notre approche théorique où des études intenses de simulations vont être réaliser suivi d'une application réelle.

Chapitre 4

Valeurs Extrêmes et Assurance

4.1 Introduction

L'essentiel de la théorie classique des valeurs extrêmes était connu dès 1945. L'ouvrage fondamental de Gumbel, *statistics of extremes* (1958), en proposait une synthèse complète et des applications à l'hydrologie.

Cet ouvrage fut à l'origine d'avancées majeures en climatologie et en hydrologie, en particulier pour le problème de la hauteur des digues fluviales ou maritimes, en particulier celles des Pays-Bas (De Haan, 1990, *Fitting the arch-enemy with mathematics*).

En ce qui concerne l'application de cette théorie à l'assurance, on peut noter que l'un des thèmes retenus pour le colloque Astin de Trieste (1961) était: *La théorie des plus grandes valeurs et son application aux problèmes de l'assurance*. Des contributions de Finetti, Franckx, Beard, . . . , y furent présentées. Elles abordaient: la ruine d'un assureur touché par un sinistre exceptionnel, le sinistre maximum sur une série de de périodes, la réassurance des plus grands sinistres dont le traité ECOMOR (Tépaut 1950).

Les deux premiers points n'étant pas, à cette époque, d'une actualité brûlante, le traité ECOMOR étant un échec commercial, les actuaires praticiens se désintéressèrent, en grande mesure, des valeurs extrêmes. Les travaux actuariels restèrent donc cantonnés au cadre académique, jusqu'au début des années 1990.

L'accumulation des catastrophes à partir de cette période soumit les praticiens à l'ardente obligation de réexaminer la théorie des valeurs extrêmes, mieux adaptée, à l'heure actuelle, à leurs préoccupations.

Il faut noter dans, cette adaptation, la contribution majeure de l'ouvrage d'Embrechts et al. (1997): *Modelling extremal events for insurance and finance*.

On peut observer que les événements naturels ou les risques industriels n'ont pas le monopole des sinistres extrêmes. Ceux-ci sont aussi présents, relativement, dans les branches Responsabilité Civile (Automobile ou Générale) qui sont touchées par de très graves sinistres corporels.

Notre étude consiste à proposer une stratégie de tarification en cas de l'assurance automobile où nous disposons d'un échantillon de données représentant les deux grandes zones de circulation à savoir zone sud et zone nord, où il a été observé selon une étude réalisée au département des assurances au Ministère des Finances que la sinistralité de la zone sud se distingue par des sinistres de coûts élevés, relativement moins fréquents par rapport à l'autre zone. Nous allons donc montrer que cette sinistralité est de comportement Heavy-tailed, ce qui à nécessiter l'utilisation d'outils mathématiques et techniques statistiques que nous avons présenter dans les chapitres précédents.

Afin de concevoir un estimateur d'indice de prime tout à fait adéquat à cette sinistralité, nous nous basons sur le principe de la prime ajustée introduit par Wang(1996 [39]). cet estimateur d'indice est proposé pour une tarification de réassurance. Pour mieux comprendre cet aspect de l'assurance. Nous allons introduire dans le paragraphe suivant un certain nombres de concepts et définitions .

Définition 1 *La réassurance est une opération par laquelle l'assureur partage avec une autre personne (le réassureur), selon des modalités variables, les conséquences pécuniaires des engagements assumés envers ses propres assurés.*

La réassurance est une technique permettant à l'assureur direct de céder à une autre société, le réassureur, une partie de risques qu'il a souscrits.

L'assureur, pour établir son tarif, a tenu compte du coût moyen du sinistre et de sa probabilité de survenance. Aux termes de la loi des grands nombres, l'écart entre la probabilité théorique et la fréquence réelle est d'autant plus faible qu'un grand nombre d'opérations sont concernées. La réassurance va avoir pour objet de réduire les écarts en rendant les risques plus homogènes ou bien en limitant la charge de sinistres. La partie des risques non cédée est dénommée conservation ou rétention.

Les principaux réassureurs mondiaux

Le tableau suivant(4.1) présente les principaux réassureurs mondiaux Classement 2000 en termes de primes nettes (USD\$ M)(Source[2]).

Compagnie	Pays	Primes nettes
Munich Re	Allemagne	15277
Swiss Re	Suisse	14479
Berkshire Hathaway Group	USA	8575
Employers Re Group	USA	7924
Hannover Re Group	Allemagne	4994
Gerling Globale Re	Allemagne	4117
Lloyd's	Grande-Bretagne	3953
Allianz Re	Allemagne	3727
SCOR	France	2810
Zurich RE	Suisse	2485
Transatlantic Re	USA	1659
AXA Re	France	1425
PARTNER Re	Bermudes	1380
ST PAUL Re	USA	1252
EVEREST Re	USA	1219

TAB. 4.1 – *Classement des 15 plus importants groupes de Réassurance 2000*

4.1.1 Buts de la réassurance

Les buts de la réassurance sont :

- l'homogénéité de la conservation
- la réduction de la prise de risque (partage)
- l'augmentation des capacités de souscription
- la diversification des activités, des branches et des marchés
- l'allégement de la trésorerie:
 - dépôts primes et sinistres
 - sinistres au comptant
- le développement des outils de gestion :
 - statistiques

- exposition aux risques
- la compensation des écarts de résultats annuels

4.1.2 La réassurance proportionnelle

Définition 2 *La réassurance est proportionnelle lorsque le réassureur s'engage à prendre une proportion de tout sinistre à la charge de l'assureur, strictement proportionnelle à la part de la prime originale qu'il a reçue de celui-ci, pour réassurer le risque affecté par le sinistre.*

Les différentes formes de réassurance proportionnelle

Au sein de la réassurance proportionnelle, on trouve:

- les traités de réassurance obligatoires en quote-part et en excédents de sinistres
- les cessions facultatives

Dans un traité en quote-part, l'assureur cède et le réassureur accepte obligatoirement un pourcentage constant de tous les risques protégés par le traité et dans la limite de celui-ci.

Dans un traité en excédents de pleins, l'assureur ne réassurera un risque que si le montant de celui-ci dépasse le montant qu'il souhaite conserver, c'est à dire le plein de conservation.

Dans le cadre des cessions facultatives, la cédante est libre de céder ou de ne pas céder un risque au réassureur et sa décision est prise individuellement pour chaque affaire. Le réassureur est libre d'accepter ou de refuser l'offre que lui soumet l'assureur.

4.1.3 La réassurance non-proportionnelle

Définition 3 *La réassurance non-proportionnelle ne s'intéresse qu'au seul montant des sinistres, indépendamment de la taille des risques souscrits.*

La réassurance non-proportionnelle comprend trois éléments:

- un seuil appelé aussi franchise ou priorité: c'est la limite que s'est fixé la cédante et qu'elle conserve pour compte propre.
- un montant d'engagement ou portée qui est le montant maximum que payera le réassureur en cas de mise en jeu de la réassurance. Le plafond désigne la somme de la priorité et de la portée de toutes les tranches.

- la tarification (taux de prime) qui correspond à la rémunération reçue par le réassureur en contrepartie du transfert de risque effectué lors de la prise d'effet de couverture.

Les différentes formes de réassurance non-proportionnelle

La réassurance non-proportionnelle se présente sous trois formes principales:

- l'excédent de sinistres (excess of loss) par risque et par événement
- l'excédent de perte annuelle (stop loss)
- l'excédent de sinistres cumulés (aggregate excess)

Il existe aussi d'autres formes moins utilisées comme le spread loss, l'ECOMOR et le Cosima.

L'excédent de sinistre: Dans ce cas, l'assureur conserve sur chaque sinistre (par risque ou par événement) le montant de la priorité. Le réassureur prendra en charge l'excédent, avec ou sans limitation. Le réassureur paye

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq r \\ X - r & \text{si } r < X \leq R \\ R - r & \text{si } R \leq X \end{cases} \quad (4.1)$$

Où X est le sinistre, r est la priorité et R est le plafond.

Un excédent de sinistre par risque va avoir pour objectif d'écarter les sinistres importants provenant de risques individuels importants.

4.1.4 La réassurance financière

Définition 4 *La réassurance financière est un complément du programme de réassurance classique grâce à des produits impliquant largement la cédante dans les résultats du traité.*

4.2 La tarification en réassurance

4.2.1 La tarification des XL Short Tail

On appelle Short Tail (à déroulement court) une branche d'assurance dans laquelle les sinistres sont connus très rapidement après leur date de survenance et réglés dans un délai très court.

On peut prendre comme exemple le risque incendie où la connaissance du sinistre est immédiate lors de la survenance. Le règlement du sinistre se fait en moyenne 1 an après la survenance. Plus généralement, c'est le cas de tous les cas les dommages aux biens.

Il existe différentes méthodes pour réaliser cette tarification:

la méthode du Burning Cost: Elle concerne les tranches XL basses dites working, qui sont touchées par plusieurs sinistres par an. Le burning cost est le pourcentage de l'encaissement brut de la cédante absorbé par le coût réel des sinistres payés et à payer à la charge du réassureur pendant une période déterminée

la méthode Pay Back ou Rate on Line (RoL): Elle s'applique sur les tranches hautes peu ou pas touchées par les sinistres du passé. Le raisonnement économique est : Si un sinistre total traverse la tranche, combien d'années faudra-t-il pour le récupérer?

Elle permet aux réassureurs d'avoir un minimum de prime sur les tranches hautes des petits portefeuilles mais elle est trop chère pour les petits portefeuilles et elle ne tient compte que des sinistres totaux alors qu'il y a des sinistres partiels.

la méthode de Pareto: Cette méthode s'applique aux tranches hautes. Au delà des franchises XS, la sinistralité suit une loi de Pareto. On utilise donc la statistique du passé, et en particulier, les sinistres revalorisés pour déterminer les paramètres de cette loi et coter ainsi les tranches hautes. La première étape consiste à calculer la fonction de distribution de Pareto qui ajuste le mieux la fonction de distribution empirique. Cette dernière s'illustre par un graphique qui montre combien de sinistres (en La seconde étape consiste à calculer la charge XS sur chaque tranche XL en utilisant la relation $f * z$ avec f : fréquence selon la loi de Pareto et z coût moyen selon la loi de Pareto.

4.2.2 La tarification des XL Long Tail

On appelle Long Tail (à déroulement long) une branche d'assurance dans laquelle les sinistres ne sont pas connus immédiatement lors de leur survenance et se règlent lentement.

On peut citer comme exemple la responsabilité civile automobile pour les corporels graves, la responsabilité civile générale...

Les conséquences sont multiples et notamment :

- la nécessité d'estimer les sinistres survenus mais non encore déclarés

(IBNR Incurred but not reported) ou insuffisamment provisionnés (IBNER Incurred but not enough reported)

- l'apparition de produits financiers non négligeables
- une mauvaise visibilité des résultats

Il existe là aussi différentes méthodes:

la méthode marché: Elle s'applique au risque automobile. Elle consiste à observer le taux pratiqué par ses concurrents et à l'adopter. Ce raisonnement repose sur le fait que le risque RC auto est assez semblable d'un assureur à l'autre et que la tarification des XL dépend principalement de la priorité et de la portée.

La méthode tarification individuelle: Elle consiste à établir une tarification selon les statistiques déroulées des dix dernières années:

- calcul des IBNR et des IBNER
- estimation des produits financiers futurs
- estimation de l'évolution future de l'indemnisation des victimes corporelles

L'avantage est que la tarification s'adapte à la sinistralité de chaque portefeuille.

la méthode statistique marché: Elle consiste à partir de toutes les informations primes et sinistres du marché dans les 10 dernières années avec le déroulement des sinistres d'appliquer une loi statistique appelée loi de Poisson-Logweibull. On établit alors une tarification statistique selon les différents types de clause.

Comme nous l'avons signalé le principe de la prime ajustée est utilisée pour déterminer un estimateur de prime de réassurance. Ce principe se présente comme suit:

4.3 Principe de la prime ajustée

4.3.1 Principe de Wang

Définition 1 Une fonction de **distorsion** g est une fonction $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$

Comme tout principe de chargement de prime, l'idée des opérateurs de distorsion est d'imposer une marge de sécurité en augmentant la valeur

attendue des sinistres. l'originalité du processus réside dans le traitement mathématique: il s'agit d'effectuer une distorsion de la loi de probabilité sous-jacente des sinistres à l'aide d'une fonction g . En assurance dommage, un risque est une v.a. positive X modélisant un montant cumulé de sinistres sur une période donnée. Elle est définie par sa fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Alors, la prime pure du contrat associé à cette v.a. vaut l'espérance de cette dernière, c'est-à-dire la valeur attendue des sinistres, soit:

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(t) dt.$$

En s'inspirant de cette formule, S.Wang(1996) propose un nouveau procédé de calcul de primes en appliquant une transformation à la fonction de survie. Il obtient alors la prime chargée (ou prime ajustée au risque) suivante:

$$\Pi_g(X) = \int_0^\infty g(\bar{F}(x)) dx.$$

pour une fonction de distorsion g concave. Une fonction de distorsion g est dite concave, si pour chaque $y \in [0,1]$ ils existent des réels a_y et b_y et une droite $l(x) = a_y x + b_y$, tels que $l(y) = g(y)$ et $l(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme $l(y) = g(y)$ on trouve que $l(x) = a_y(x - y) + g(y)$. Par conséquent $l(x) \geq g(x)$ peut être écrite comme:

$$g(x) - g(y) \leq a_y(x - y) \text{ pour tout } x, y \in [0,1].$$

Wang propose d'utiliser la fonction puissance, $g(u) = u^{1/p}$ ($p \geq 1$), il en résulte le principe de **PH-transform** (Proportional Hazards) définit par:

$$\Pi_u(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Le paramètre $p \geq 1$ est appelé **coefficient de distorsion** ou **le coefficient d'aversion au risque**. La prime ajustée pour un seuil élevé $u > 0$ est donnée par:

$$\Pi_u(X) = \int_u^\infty (1 - F(x))^{1/p} dx. \quad (4.2)$$

Notant que le seuil u doit être grand et dépend de la taille de l'échantillon ($n \geq 1$). Pour cette raison on va supposer que $u = u_n$, $n \geq 1$. Ce qui conduit

à écrire $\Pi_u(X)$ comme:

$$\Pi_{u_n}(X) = \int_{u_n}^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Analytiquement il est souvent difficile d'exprimer cet indice par une forme exacte, Necir et Boukhetala(2004) ont proposé un estimateur asymptotiquement convergeant en loi de probabilité, permettant ainsi de définir un intervalle de confiance pour l'encadrement de cette prime. Ce qui donne un outil souple et interactif pour la conception d'un système d'aide à la tarification en réassurance. D'autre part, cet estimateur constitue un schéma numérique facile à implementer sur ordinateur, avec lequel l'utilisateur peut réaliser des scénarios en simulation, qui pourront lui servir comme étape intermédiaire avant de fixer son système tarifaire. Cet estimateur tel qu'il a été conçu par Necir et Boukhetala [33], se présente comme suit:

4.4 Estimation de la Prime Ajustée

Dans cette section on va presenter l'estimateur de la prime ajustée développer dans [33].

4.4.1 Approche Non-paramétrique

Soit $k = k_n$ une suite d'entier satisfaisant $1 \leq k \leq n$, $k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ tel que $u_n = Q(1 - k/n)$ où

$$Q(s) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq s\}, \quad 0 \leq s < 1,$$

est la fonction quantile ou l'inverse généralisée de F , alors $\Pi_{u_n}(X)$ s'écrira:

$$\Pi_{u_n}(X) = \int_{Q(1-k/n)}^{\infty} (1 - F(x))^{1/p} dx.$$

Pour tout $n \geq 1$, soit $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ la statistique d'ordre de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$. En remplaçant $Q(1 - k/n)$ et $F(\cdot)$ par leurs estimateurs appropriés, on obtiendra un estimateur de la prime ajustée

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = \int_{X_{(n-k)}}^{\infty} (1 - F_n(x))^{1/p} dx.$$

où $F_n(x) = n^{-1} \text{card}\{X_i \leq x : 1 \leq i \leq n\}$ pour $x \in \mathbb{R}$ est la distribution empirique de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$. Le quantile empirique correspondant est défini par

$$\begin{aligned} Q_n(s) &= \inf\{t \in \mathbb{R}, F_n(t) \geq s\}, \quad 0 \leq s < 1, \\ &= X_{(i)} \quad (i-1)/n < s \leq i/n, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

avec $Q_n(0) = X(1)$. Observons maintenant que

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = - \int_0^{k/n} s^{1/p} dQ_n(1-s).$$

En intégrant par partie, on trouve

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{u_n}(X) &= p^{-1} \int_0^{k/n} s^{1/p-1} Q_n(1-s) ds - (k/n)^{1/p} X_{(n-k)} \\ &= p^{-1} \sum_{i=1}^k \left(\int_{(i-1)/n}^{i/n} s^{1/p-1} ds \right) X_{(n-i+1)} - (k/n)^{1/p} X_{(n-k)} \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ \left(\frac{i}{n} \right)^{1/p} - \left(\frac{i-1}{n} \right)^{1/p} \right\} X_{(n-i+1)} - (k/n)^{1/p} X_{(n-k)}. \end{aligned}$$

Ainsi la forme finale de l'estimateur sera

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n} \right)^{1/p} \{X_{(n-i+1)} - X_{(n-i)}\}, \quad p \geq 1. \quad (4.3)$$

Notons que pour $p = 1$, la statistique $n\hat{\Pi}_{u_n}$ correspond au traité de Réassurance **ECOMOR** (excédent du coût moyen relatif) introduit par Thépaut (1950). Sous l'hypothèse que la queue de distribution $1 - F$ est à variation régulière du second ordre, avec $-1/\gamma$ le premier paramètre et le deuxième paramètre $\rho \leq 0$, c'est à dire qu'il existe une fonction $A(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, de signe constant, tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (A(t))^{-1} \left\{ \frac{Q(1-tx)}{Q(1-t)} - x^{-\gamma} \right\} = -x^{-\gamma} \frac{x^{\rho\gamma} - 1}{\rho\gamma}, \quad \text{pour tout } x > 0. \quad (4.4)$$

on va énoncer, le théorème suivant qui donne la normalité asymptotique de $\hat{\Pi}_{u_n}(X)$

Théorème 1 *Supposons que (4.4) est vraie et $\delta > 0$, et que $s^{1/p}Q(1-s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ pour un $\gamma - 1/2 < 1/p \leq 1$. Soit $k = k_n$ tel que $k \rightarrow \infty$,*

$k/n \longrightarrow 0$ et $\sqrt{k/n}A(k/n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. Alors

$$\frac{(k/n)^{-1/p}k^{1/2}}{Q(1-k/n)}\{\hat{\Pi}_{u_n}(X) - \Pi_{u_n}(X)\} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2(p, \gamma)), \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

où

$$\sigma^2(p, \gamma) = \begin{cases} p^{-2}\gamma^2 \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda(\lambda + 1)}, & \text{pour } 1/p \neq \gamma \\ 1, & \text{pour } 1/p = \gamma \end{cases}$$

avec $\lambda = 1/p - \gamma$

Preuve 1 Voir Necir et Boukhetala(2004) [33].

L'algorithme de simulation de l'estimateur est comme suit:

Simulest1:

-
- 1-Générer un échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ de la loi d'intérêt.
 - 2-Choisir le nombre des excès k .
 - 3-Utiliser l'équation (4.3) pour déterminer $\hat{\Pi}_u(X)$ en fonction de p .
-

Alternativement à cette approche non-paramétrique, nous proposons une approche paramétrique que nous décrivons dans la section suivante.

4.4.2 Approche Paramétrique

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de risques indépendants et identiquement distribués, de distribution commune F , telle que

$$\overline{F}(x) = cx^{-1/\xi}(1 + x^{-\delta}L(x)), \text{ quand } x \longrightarrow \infty \quad (4.5)$$

pour $\xi \in (0, 1)$, $\delta > 0$, une constante c et L une fonction à variation lente. on peut écrire la prime ajustée définie dans l'équation(4.2) comme

$$\Pi_u(X) = \int_u^\infty (1 - F(y + u))^{1/p} dx.$$

on peut montrer que

$$\overline{F}(y + u) = \overline{F}(u)\overline{F}_u(y)$$

il en découle,

$$\Pi_u(X) = \int_0^\infty (\overline{F}(u)\overline{F}_u(y))^{1/p} dy.$$

L'estimateur de la prime ajustée s'écrit :

$$\hat{\Pi}_u(X) = \int_0^\infty (\hat{\overline{F}}(u)\hat{\overline{F}}_u(y))^{1/p} dy. \quad (4.6)$$

Un estimateur naturel de $\overline{F}(u)$ est donné en fonction de la distribution empirique,

$$\hat{\lambda} = \hat{\overline{F}}(u) = \overline{F}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}} = \frac{N_u}{n}$$

où N_u est le nombre des excès au delà du seuil u . Dans l'autre côté l'approximation de la queue des excès par

$$\hat{\overline{F}}_u(y) \approx \overline{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y).$$

est un résultat direct du théorème de Pickands (Pickands 1975 [35]). Alors

$$\hat{\Pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{1/p} \int_0^\infty (\overline{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y))^{1/p} dy. \quad (4.7)$$

Ce qui revient à écrire,

$$\hat{\Pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{1/p} \int_0^\infty \left[\left(1 + \hat{\xi} \frac{y}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \right]^{1/p} dy. \quad (4.8)$$

En faisant apparaître la densité de la loi GPD, on peut écrire cet estimateur sous forme d'une espérance.

$$\hat{\Pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{1/p} \int_0^\infty \frac{1}{\hat{\beta}} \left(1 + \hat{\xi} \frac{y}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}-1} \hat{\beta} \left[1 + \hat{\xi} \frac{y}{\hat{\beta}}\right]^{-\frac{1}{\hat{\xi}}(\frac{1}{p}-1)+1} dy. \quad (4.9)$$

d'où

$$\hat{\Pi}_u(X) = \hat{\beta} \hat{\lambda}^{1/p} \mathbb{E} \left(\left(1 + \hat{\xi} \frac{Y}{\hat{\beta}}\right)^{-r} \right) \quad (4.10)$$

où $Y \sim GPD(\hat{\xi}, \hat{\beta})$ et $r = \frac{1}{\hat{\xi}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) - 1$.

Sous la condition que $r > -\frac{1}{\hat{\xi}}$, on a

$$\mathbb{E} \left(\left(1 + \hat{\xi} \frac{Y}{\hat{\beta}}\right)^{-r} \right) = \frac{1}{1 + \hat{\xi} r}$$

alors, le domaine de variation de p est

$$\hat{\xi} \leq \frac{1}{p} \leq 1 \quad (4.11)$$

Ainsi le résultat final sera :

$$\hat{\Pi}_u(X) = \hat{\lambda}^{\frac{1}{p}} \frac{\hat{\beta}}{\frac{1}{p} - \hat{\xi}} \quad \text{avec} \quad \hat{\xi} \leq \frac{1}{p} \leq 1 \quad (4.12)$$

Le théorème suivant décrit la normalité asymptotique de $\hat{\Pi}_u(X)$

Théorème 2 ([34]) *Supposons que (4.5) est vraie pour $\xi \in (1/2, 1)$ et $\delta > 0$, et que $x \rightarrow x^{-\delta}L(x)$ est une fonction non croissante. Soit $u = u_n$ tel que $u \rightarrow \infty$ et $\sqrt{nu}^{-\delta}L(u) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors*

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\Pi}_u(X) - \Pi_u(X))}{\sqrt{\lambda^{2/p-1}(1-\lambda)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma_{\Pi}^2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

où

$$\sigma_{\Pi}^2 = \frac{(1+\xi)\beta^2}{(\frac{1}{p}-\xi)^2} \left(\frac{(1/p-1)^2}{1+\xi} + \frac{(1+\xi)}{(\frac{1}{p}-\xi)^2} - \frac{2}{(\frac{1}{p}-\xi)} + 2 \right)$$

Après avoir détailler la construction de notre estimateur, nous présentons maintenant l'algorithme de simulation de cet estimateur:

Simulest2:

-
- 1-Générer un échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ de la loi en question.
 - 2-Choisir le nombre des excès N .
 - 3-Estimer les paramètres (ξ, β) de la loi GPD à partir de l'échantillon des excès.
 - 4-Utiliser l'équation (4.12) pour déterminer $\hat{\Pi}_u(X)$ en fonction de p .
-

4.5 Conclusion

Les estimateurs de la prime ajustée nous ont permis de concevoir un système de tarification en Réassurance, en se basant sur des schémas numériques appropriés. Ces schémas permettent l'implémentation sur ordinateur et des sorties graphiques facile à l'interprétation par l'utilisateur, dans les deux aspects simulation ou situation réelle. Ces deux aspects sont présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Simulation et Application

5.1 Simulation

Dans le but d'étudier le comportement de l'estimateur de la prime ajustée, on a généré des échantillons de différentes taille issue de lois heavy-tailed et on a calculé les estimateurs correspondant avec les intervalles de confiance . Les distributions utilisées dans la simulation sont :

- La distribution de Fréchet(α)

$$F(x) = \exp(-x^{-\alpha})$$

qui sera simulé par la procédure suivante:

-
- 1-générer U de la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
 - 2-calculer X tel que $X = (-\log(U))^{-\frac{1}{\alpha}}$.
-

- La distribution de Pareto(α)

$$F(x) = 1 - x^{-\alpha}$$

la procédure de simulation est la suivante:

-
- 1-générer U de la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
 - 2-calculer X tel que $X = (1 - U)^{-\frac{1}{\alpha}}$.
-

- La distribution Lognormale de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dont la procédure de simulation est:

1-générer Y de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

2-calculer X tel que $X = \exp(\sigma Y + \mu)$.

Ces procédures nous permettent de simuler des échantillons à partir des trois lois: Fréchet, Pareto, Lognormale, principalement utiliser dans la modélisation des valeurs extrêmes. Dans la section suivante on va présenter les conditions d'application de l'estimateur de la prime ajustée, ainsi que les différents résultats obtenus par simulation.

5.2 Commentaire et Conditions de Mise en Oeuvre

L'estimateur de la prime ajustée

$$\hat{\Pi}_{un}(X) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n}\right)^{1/p} \{X_{(n-i+1)} - X_{(n-i)}\}, \quad p \geq 1.$$

dépend du nombre des excès k , le paramètre de distortion p et la taille de l'échantillon n . Pour contrôler ces facteurs on a simulé des échantillons de tailles différentes, et pour chaque valeur de n on fait varier le nombre d'excès k et on trace la courbe de l'estimateur de la prime ajustée en fonction de p . Cependant on remarque que la taille de l'échantillon et le nombre des excès influent légèrement sur le comportement de l'estimateur. Pour cela on s'est restreint aux valeurs suivantes des paramètres n et k , la taille de l'échantillon $n = 1000$, et le nombre d'excès $k = 50$. Tandis que pour le paramètre p et pour satisfaire les conditions théoriques on a choisi p tel que :

- $1 \leq p \leq 1/\hat{\gamma}$ si $\hat{\gamma} \leq 1$
- $p \geq 1/\hat{\gamma}$ si $\hat{\gamma} > 1$

Les figures (5.1)(5.3)(5.5) résument les résultats des simulations obtenus pour différentes valeurs du paramètre $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 1.5, \dots$. Pour chaque valeur de α on calcule l'estimateur de la prime ajustée en fonction de p ainsi que sa variance.

D'après la visualisation graphique, on remarque que pour les valeurs de $\alpha \geq 1$ ($\gamma \leq 1$), l'estimateur présente une tendance linéaire. La valeur de la prime estimée s'élève dès que la valeur de p s'approche de $1/\hat{\gamma}$, on remarque aussi que la prime estimée est bien encadrée par les deux bornes de l'intervalle de confiance pour les petites valeurs de p et que l'écart devient grand pour les grandes valeurs de p , ce qui peut être vu sur le graphe de la variance. Cette augmentation est plus grande pour les valeurs du paramètre α les plus élevées.

D'autre part, pour les valeurs de $\alpha < 1$ la prime estimée croît en fonction de p jusqu'à atteindre un certain seuil pour devenir constante. On remarque aussi dans ce cas que la variance est très petite et elle chute dès les premières valeurs de p , ce qui peut être vu sur le graphe de la prime estimée où on remarque que les deux bornes de l'intervalle de confiance sont pratiquement superposés sur la courbe de la prime estimée.

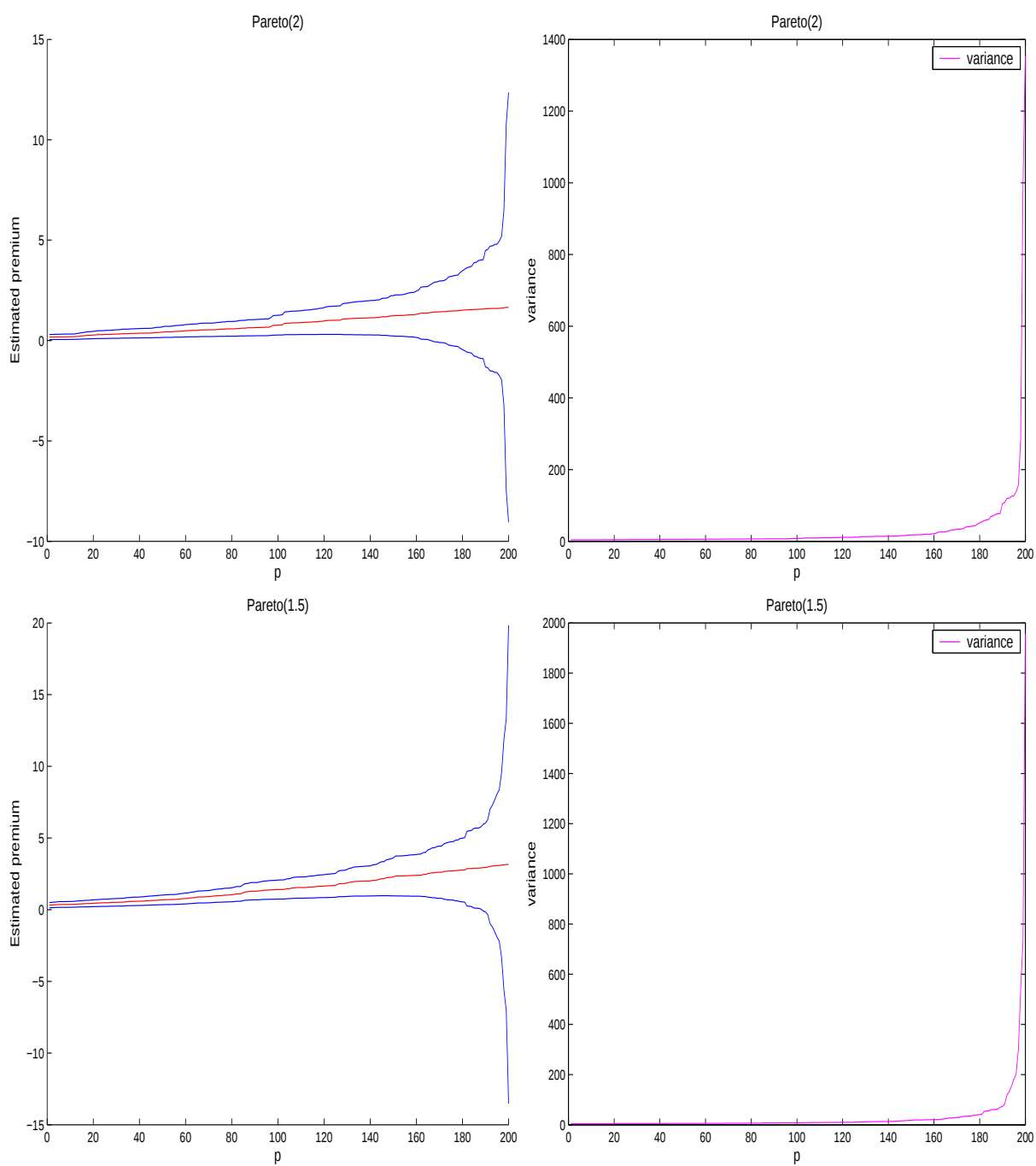


FIG. 5.1 – Résultats pour la distribution de Pareto

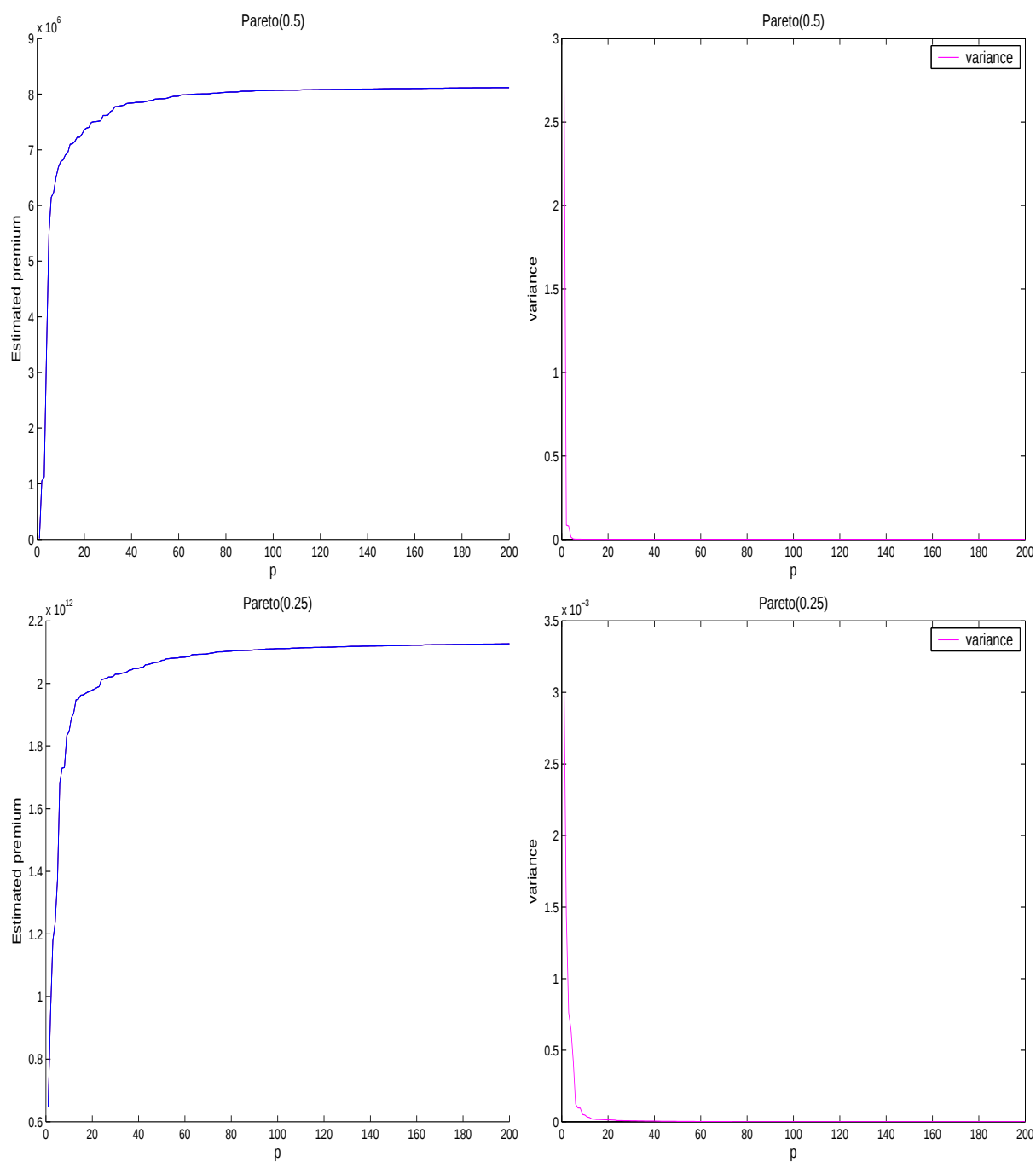


FIG. 5.2 – Résultats pour la distribution de Pareto(suite)

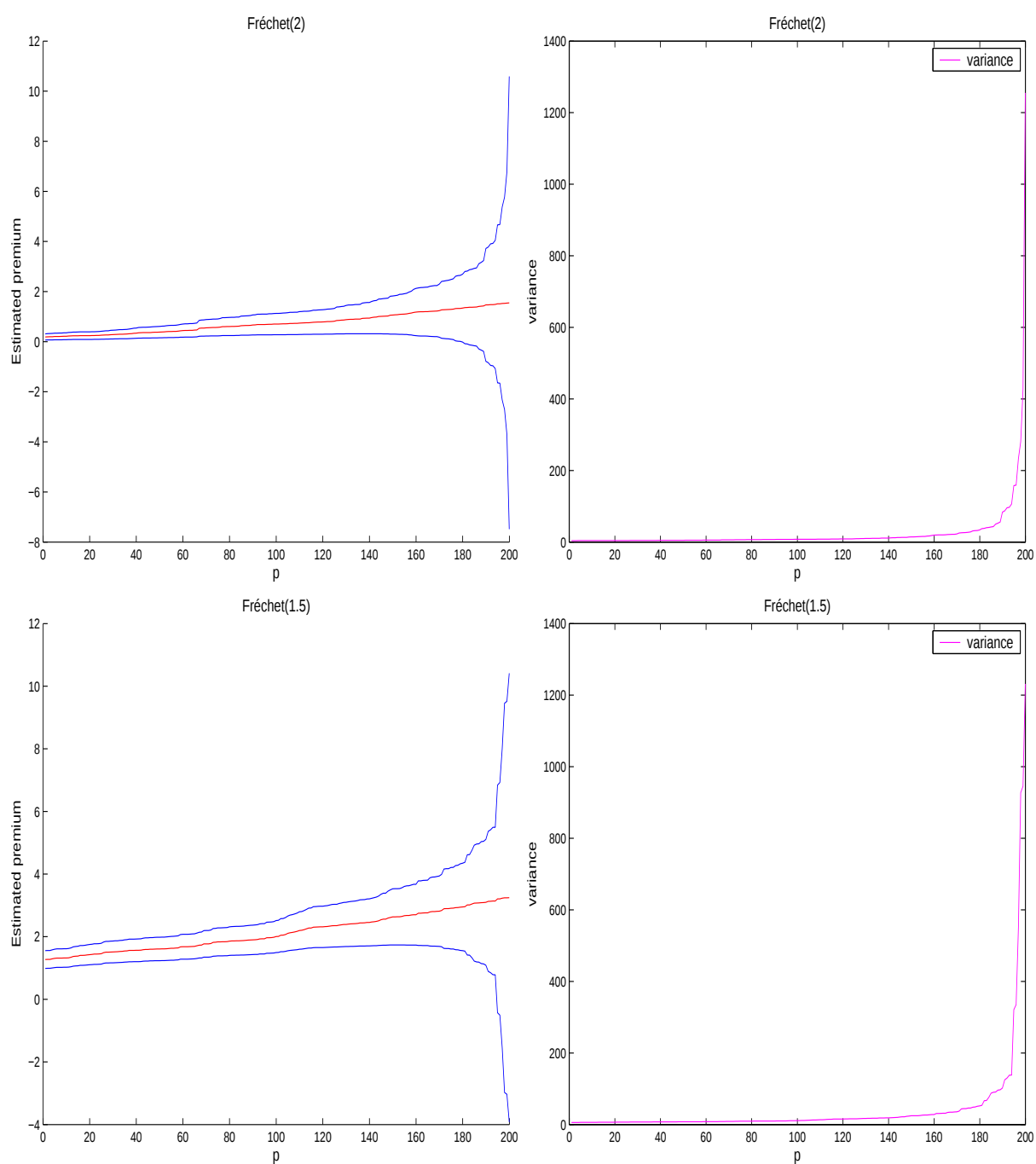


FIG. 5.3 – Résultats pour la distribution de Fréchet

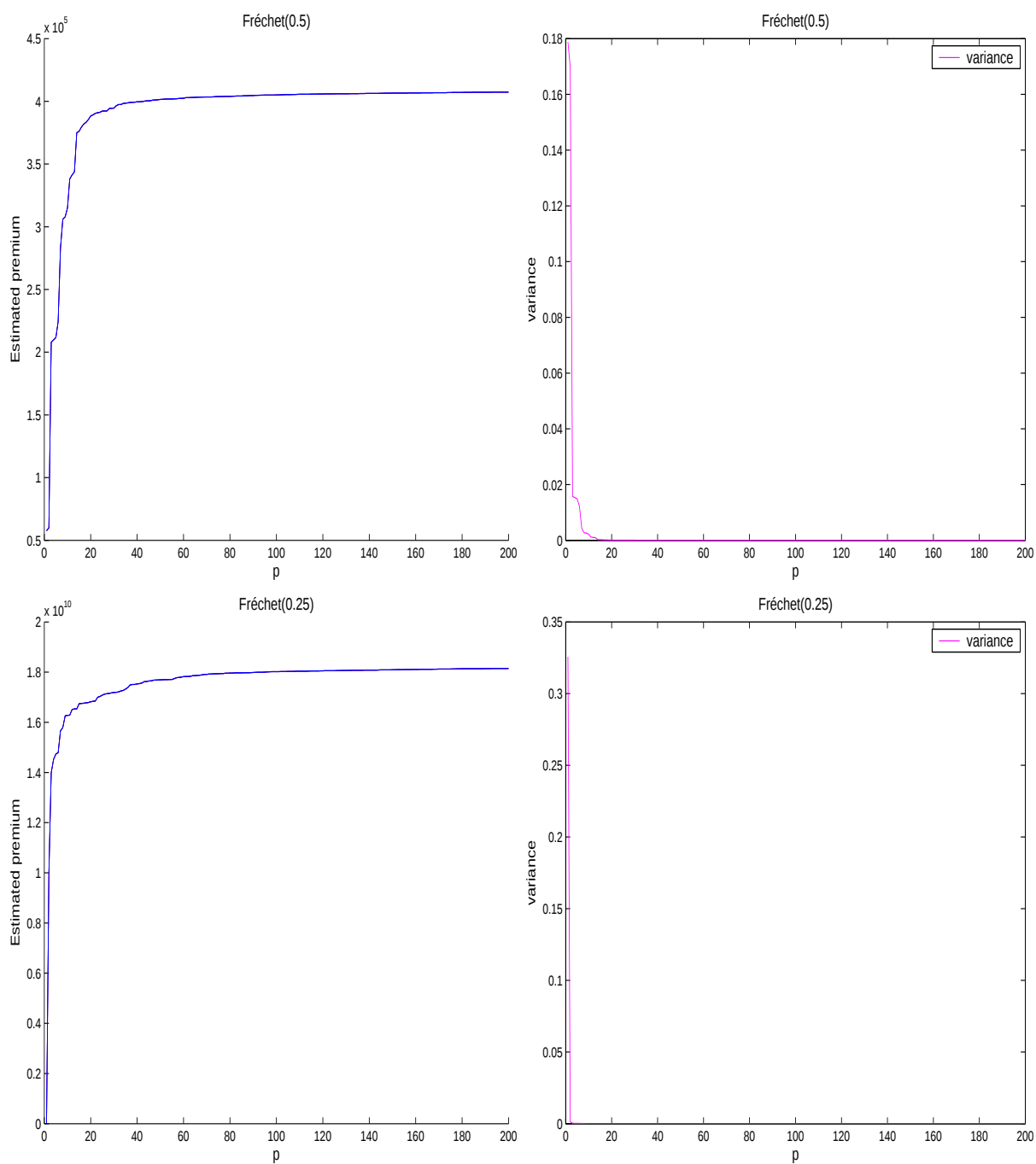


FIG. 5.4 – Résultats pour la distribution de Fréchet(suite)

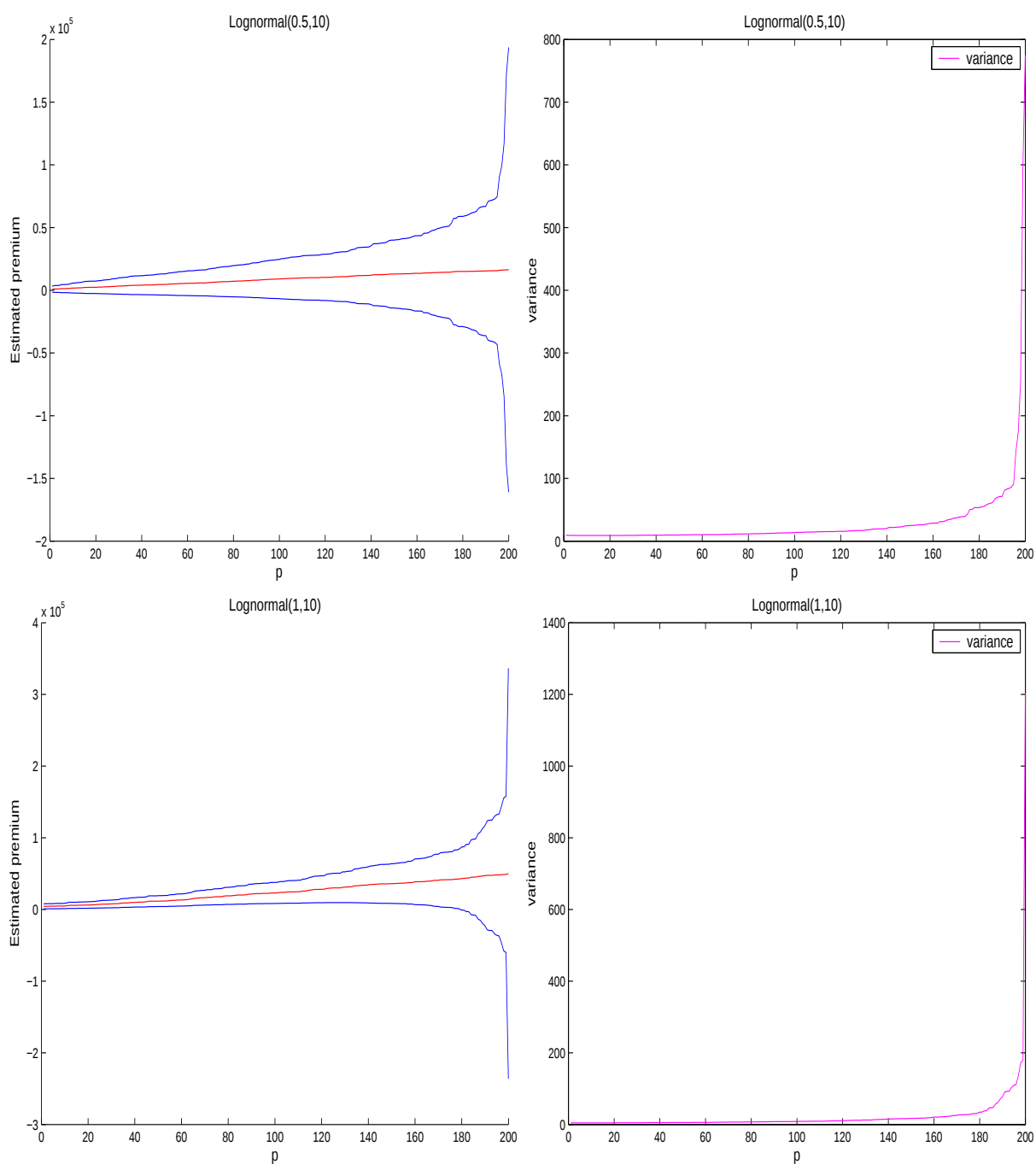


FIG. 5.5 – Résultats pour la distribution Lognormale

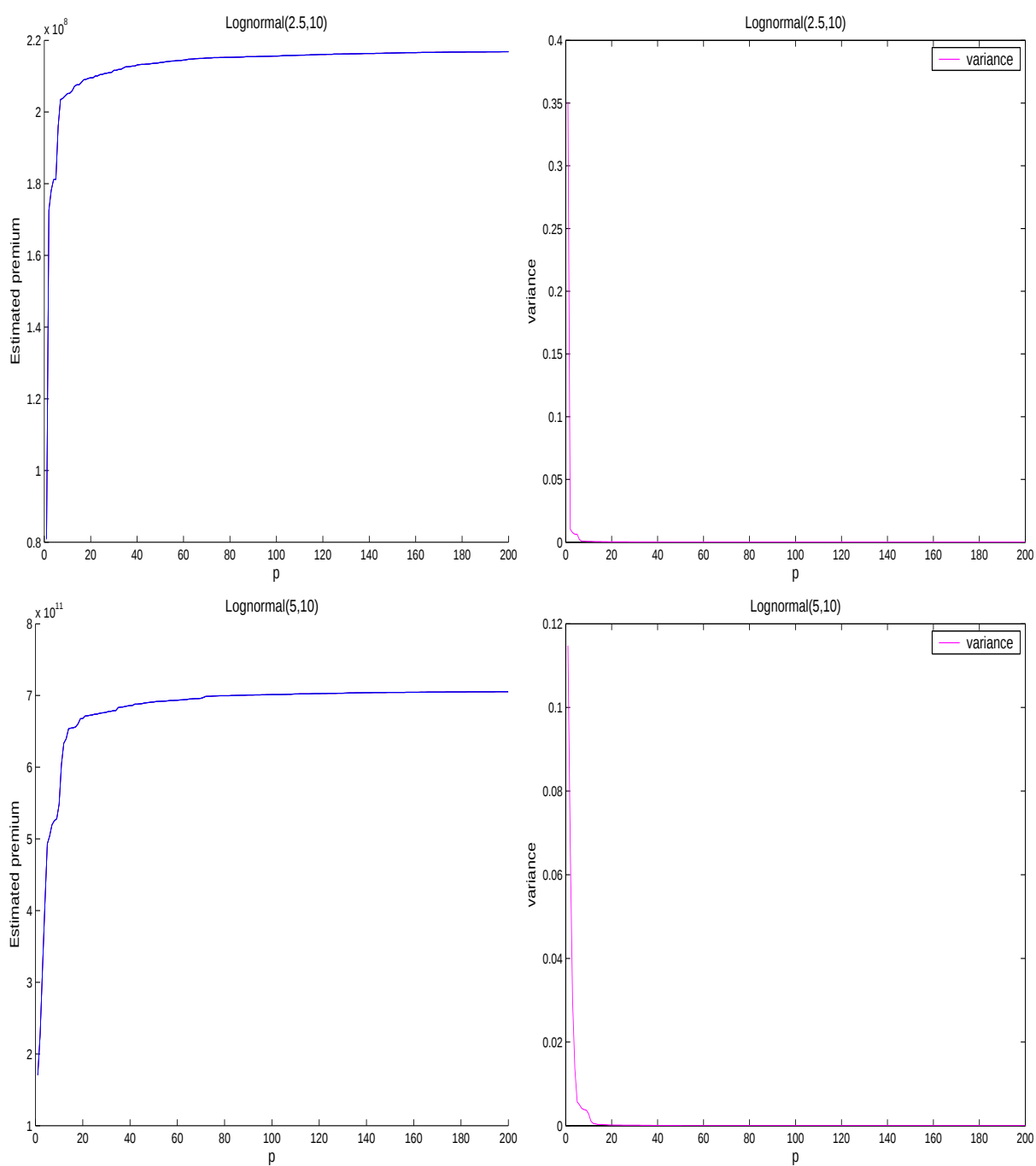


FIG. 5.6 – Résultats pour la distribution Lognormale(suite)

Après avoir fait une étude simulation sur le comportement de l'estimateur de la prime ajustée, nous allons maintenant passer à une application sur des données réelles du domaine de l'assurance automobile.

5.3 Application au Données de l'Assurance

5.3.1 Description de l'échantillon

Dans cette section on présente un exemple des données de l'assurance automobile. Il correspond à un portefeuille qui comporte 9235 sinistres collectés sur l'échelle nationale, pris sur une période de 10 ans(Voir rapport CNA/Direction des Assurances Ministère des finance Rapport d'étude 1999/2001 (Boukhetala, Mehassoual).).

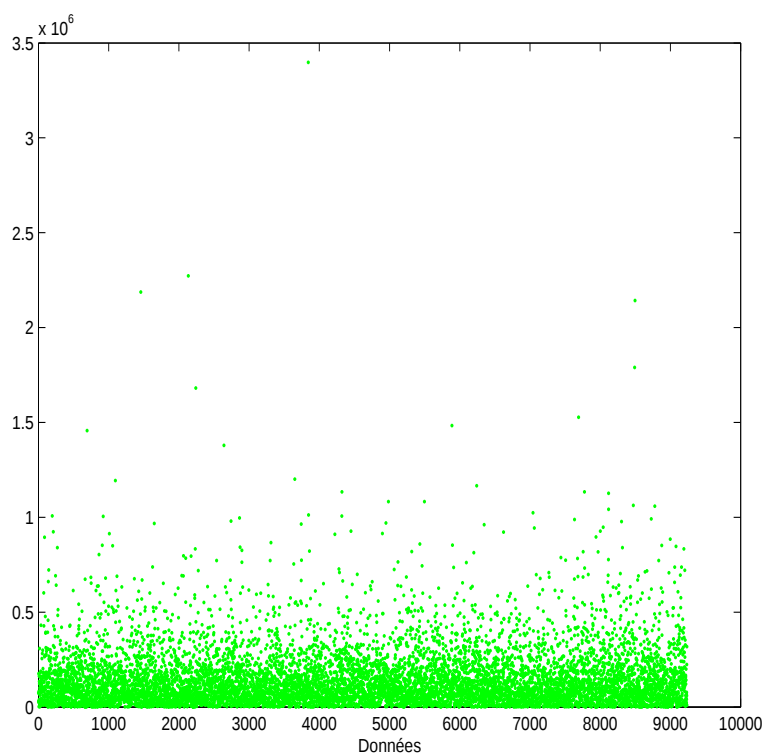


FIG. 5.7 – *Données Réelles de L'Assurance*

On observe que la plupart des coûts de sinistres sont inférieures à 1 million de D.A.. Le montant total des sinistres est égale à 1340,4 million et la moyenne est 0.145 million. Quelques sinistres excèdent 1 million et ont une importance considérable. Le montant des sinistres qui excèdent 1 million (26 sinistres) est 36,7 million, ce qui représente 2.7% du montant total. Cet exemple montre clairement que la queue de la distribution des sinistres nécessite une étude particulière. D'autre part si l'on examine le QQ-plot des

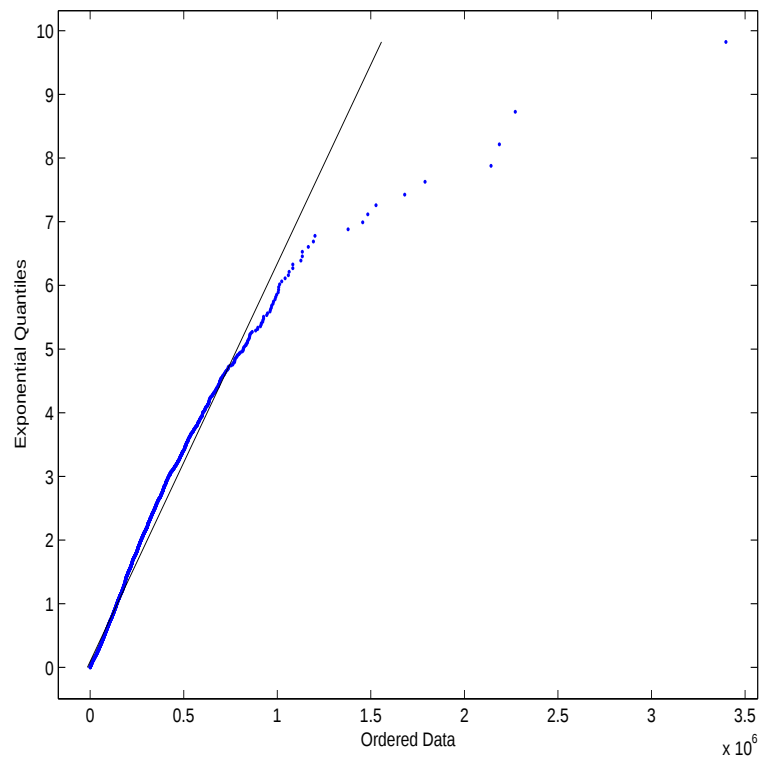


FIG. 5.8 – *QQplot contre les quantiles de la loi exponentielle*

données: quantiles de la distribution empirique sur l'axe des x contre les quantiles de la loi exponentielle sur l'axe des y , on remarque que la majorité des points sont alignés sur la droite sauf pour les derniers points qui s'écartent en une allure concave, ce qui indique que ces données présentent un comportement heavy tailed.

5.3.2 Comportement de la Queue

Supposons que X est une *v.a.* à variation régulière telle que

$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha} L_0(x), \quad L_0 \in \mathcal{R}_0.$$

Pour déterminer α , on utilise l'estimateur de Hill. La figure(5.10) montre l'estimation de $\hat{\alpha}_k$ pour différentes valeurs de k entre 15 et 500.

Pour les petites valeurs de k l'estimation est très instable. En prenant $k =$

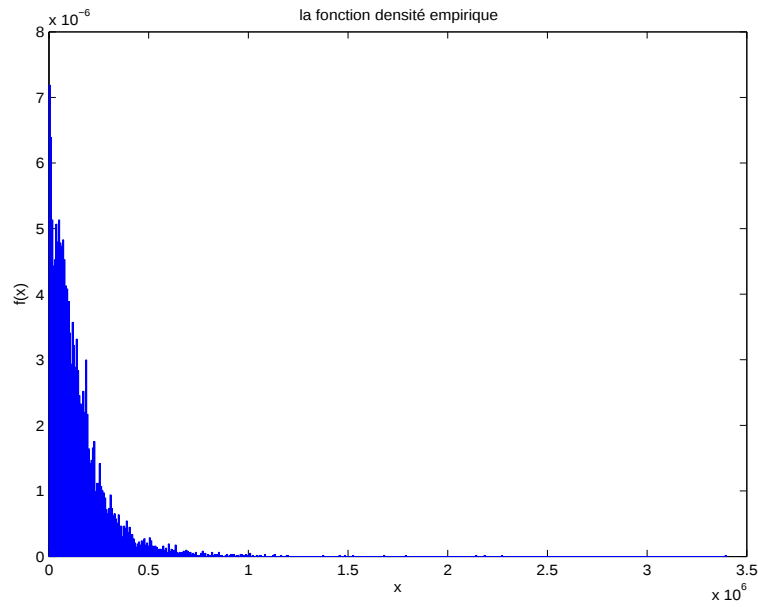


FIG. 5.9 – *Densité empirique des données*

98, on obtient que $\hat{\gamma} = 0.19554$, l'intervalle de confiance asymptotique est $[-0.041161, 0.43224]$ au niveau de confiance 95% .

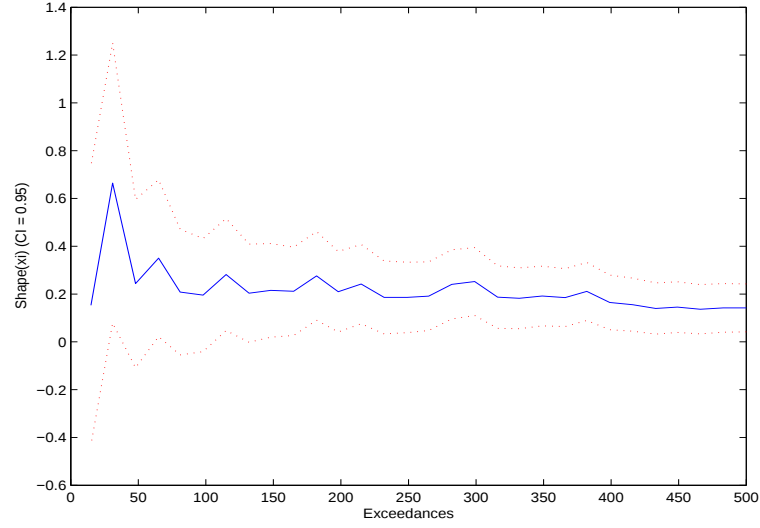


FIG. 5.10 – Estimation du paramètre de forme en fonction du nombre d'excès

k	$\hat{\gamma}$	Borne inf	Borne sup
500	0.14211	0.042003	0.24222
449	0.14539	0.039445	0.25133
399	0.16505	0.050733	0.27936
349	0.19173	0.0667	0.31676
299	0.25229	0.11035	0.39424
249	0.18594	0.038635	0.33324
198	0.20992	0.041388	0.37844
148	0.21536	0.019554	0.41116
98	0.19554	-0.041161	0.43224
48	0.24394	-0.10797	0.59584
15	0.1529	-0.43054	0.73633

TAB. 5.1 – Estimation du paramètre de forme α

5.3.3 Estimation pour le modèle GPD

On veut tout d'abord appliquer aux données un modèle considérant la distribution de Pareto généralisée pour les excès au-delà d'un seuil. La première étape est de choisir ce seuil u pour définir ensuite les excès, choix généralement réalisé graphiquement à partir du constat fait par Daragahi-Noubary (1989) que l'espérance de l'excès est linéaire par rapport au seuil: on choisit donc un seuil pour lequel la relation entre les excès moyens empiriques et le seuil est à peu près linéaire. Les données que l'on appellera **excès** sont précisément les différences entre ces observations et le seuil.

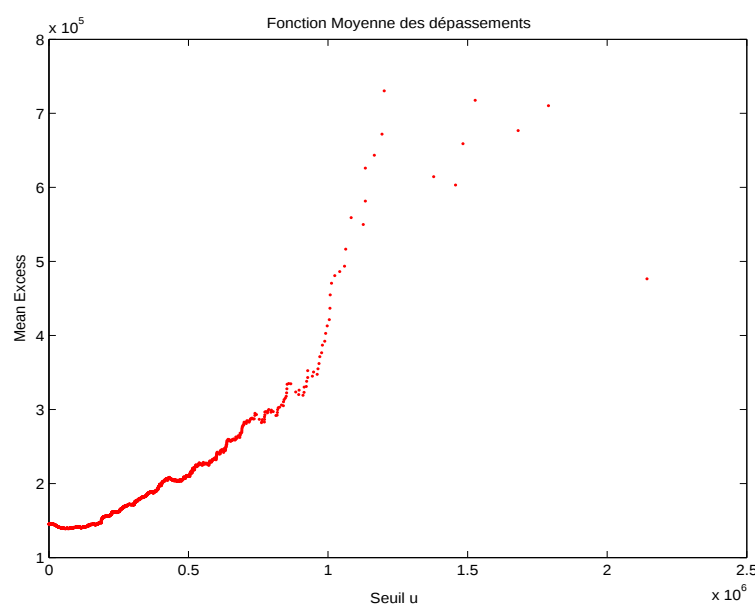
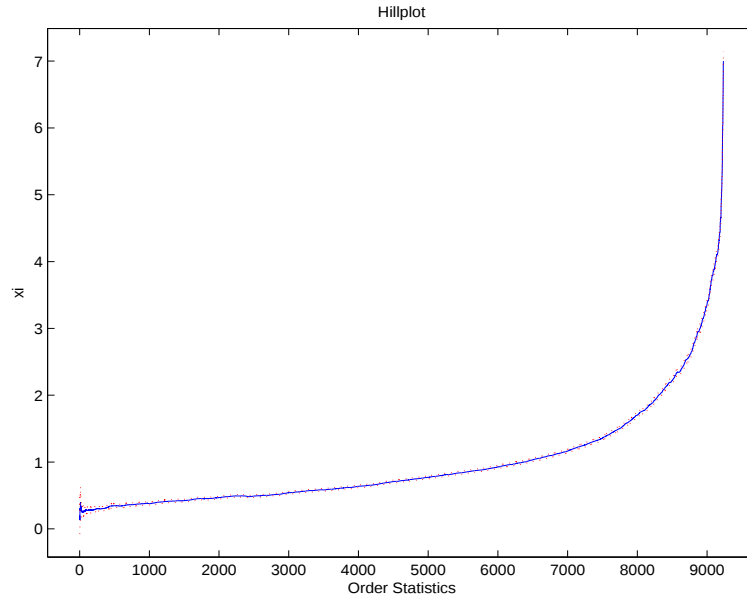


FIG. 5.11 – *Fonction moyenne des dépassements*

On peut justifier graphiquement notre choix du seuil avec le graphe de la fonction moyenne des dépassements en fonction du seuil u ou le graphe de l'estimateur de Hill: figure(5.12). Pour que le seuil soit considéré comme acceptable, il faut que la courbe soit linéaire au-dessus du seuil choisi. On voit que notre choix de $u = 685129$ environ est tout à fait satisfaisant, car il est plus élevé que le point stationnaire de la courbe.

k	Seuil u	Estimations($\hat{\xi}, \hat{\sigma}$)
15	1126420	(0.1529, 4.6914e+005)
48	859203	(0.2439, 2.7758e+005)
98	699480	(0.1955, 2.3770e+005)
148	627555	(0.2154, 2.0335e+005)
198	575967	(0.2099, 1.8926e+005)
249	530819	(0.1859, 1.8725e+005)
299	504517	(0.2523, 1.5636e+005)
349	477423	(0.1917, 1.7096e+005)
399	450000	(0.1650, 1.7495e+005)
449	425488	(0.1454, 1.7854e+005)
500	406720	(0.1421, 1.7662e+005)

TAB. 5.2 – *Estimation des paramètres de la loi GPD*FIG. 5.12 – *Estimateur de Hill*

Une comparaison de la queue de la distribution empirique avec l'ajustement de la loi GPD confirme que les paramètres estimés donnent un bon modèle de la queue, car tous les points sont pratiquement superposés sur la courbe.

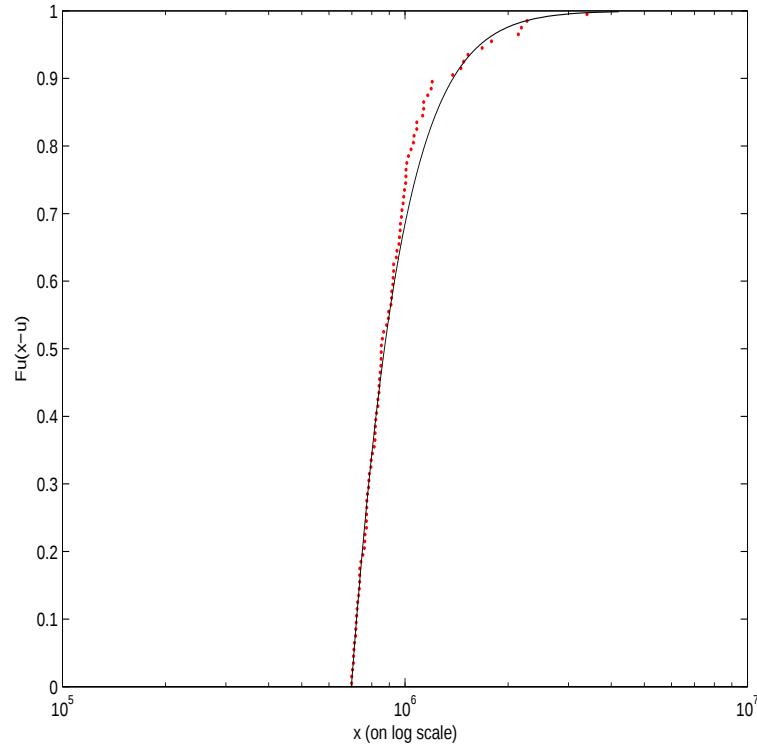


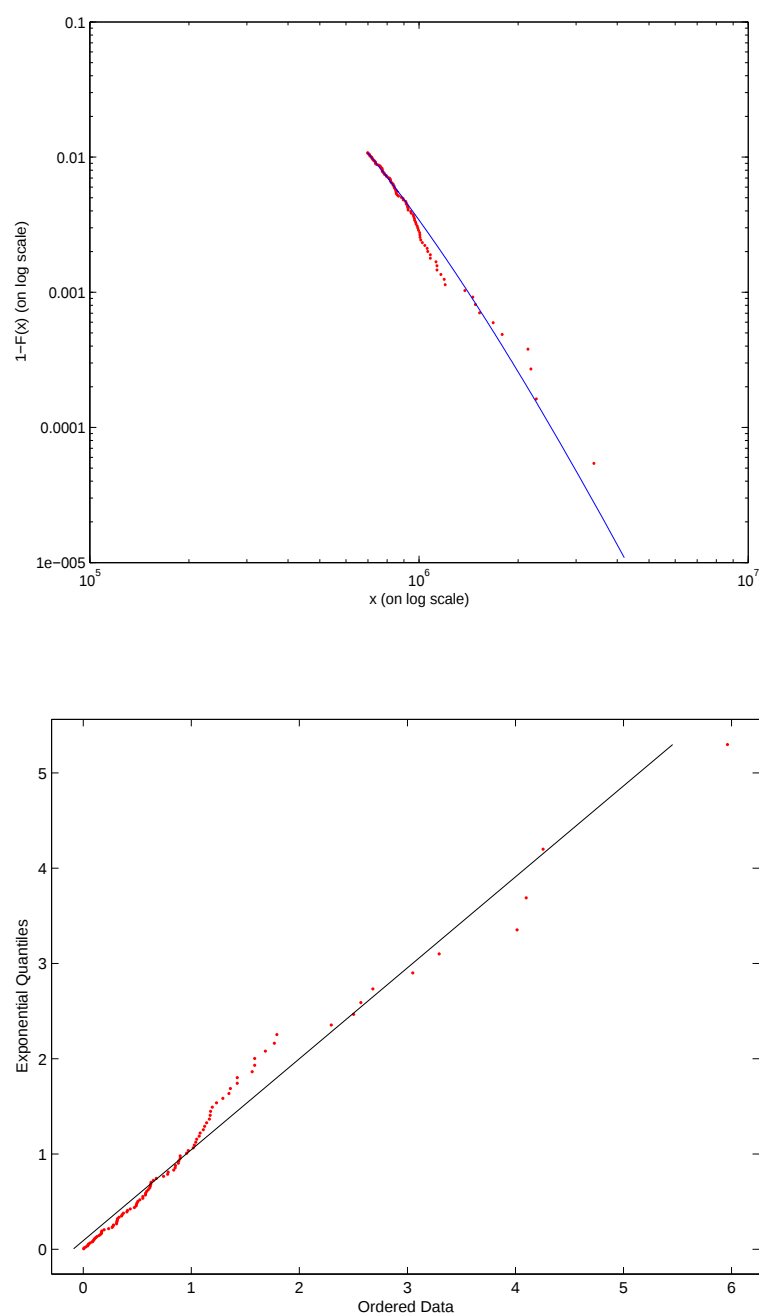
FIG. 5.13 – Ajustement de l'échantillon des excès par une loi GPD

5.3.4 Estimation de La Prime Ajustée

Rappelons la formule de l'estimateur de la prime ajustée

$$\hat{\Pi}_{u_n}(X) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n} \right)^{1/p} \{X_{(n-i+1)} - X_{(n-i)}\}, \quad p \geq 1.$$

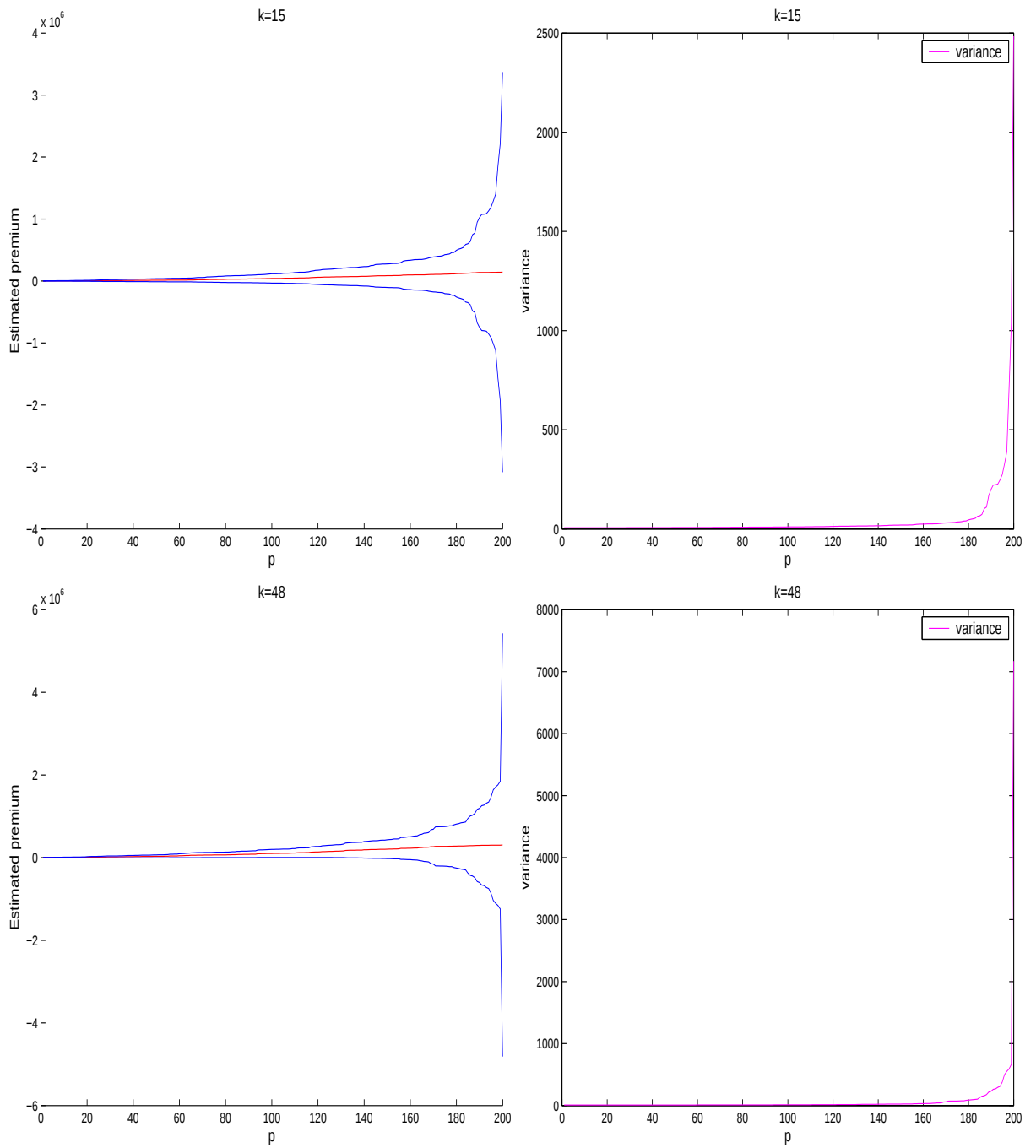
D'après les résultats obtenus dans les sections précédentes on a trouvé que l'indice des valeurs extrêmes $\hat{\gamma}$ est inférieur à 1, donc il faut choisir le paramètre p dans l'intervalle $[1, \frac{1}{\hat{\gamma}}]$. Le tableau 5.3 résume les résultats obtenus en

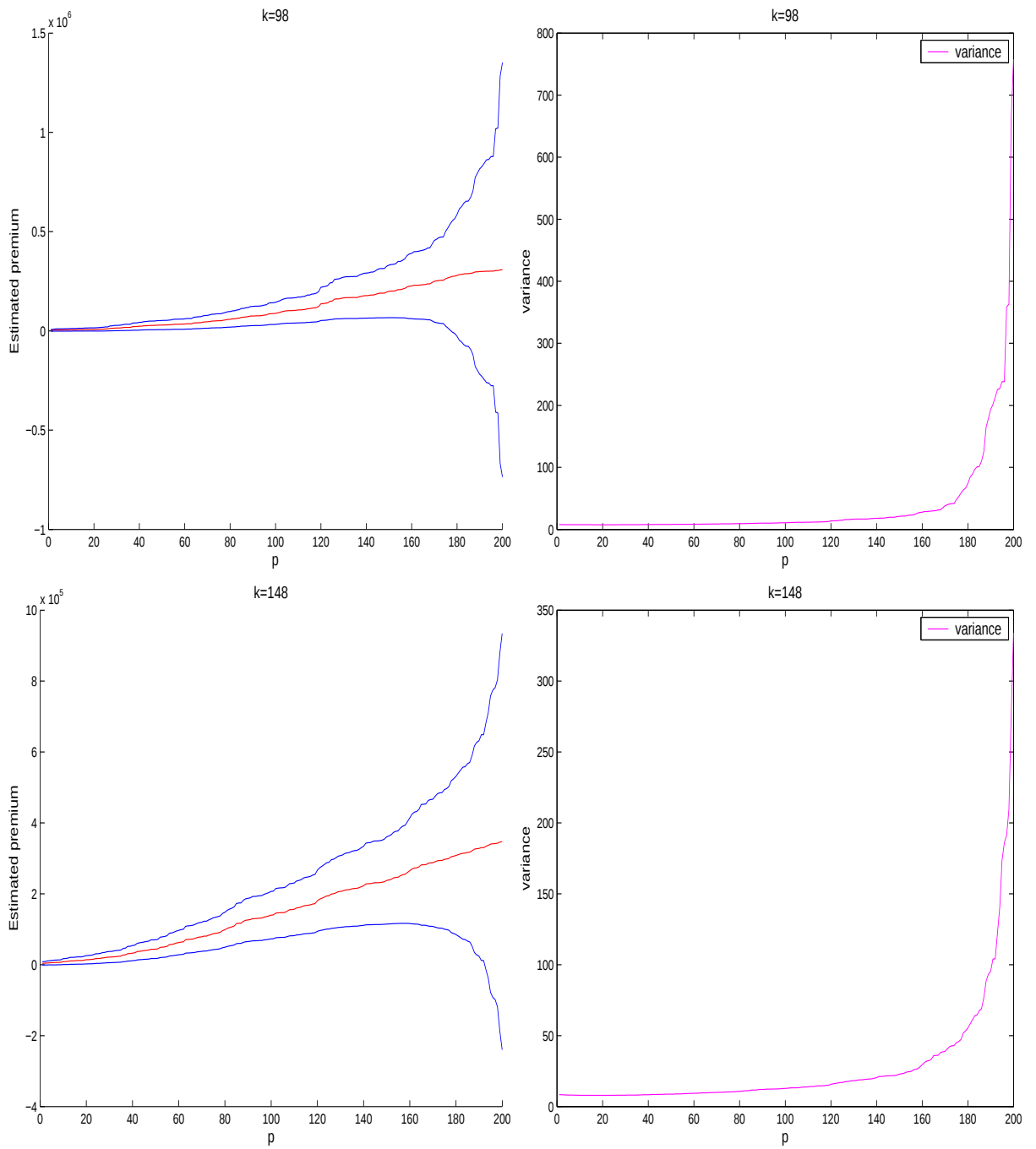
FIG. 5.14 – *Graphe de la queue de la distribution empirique*

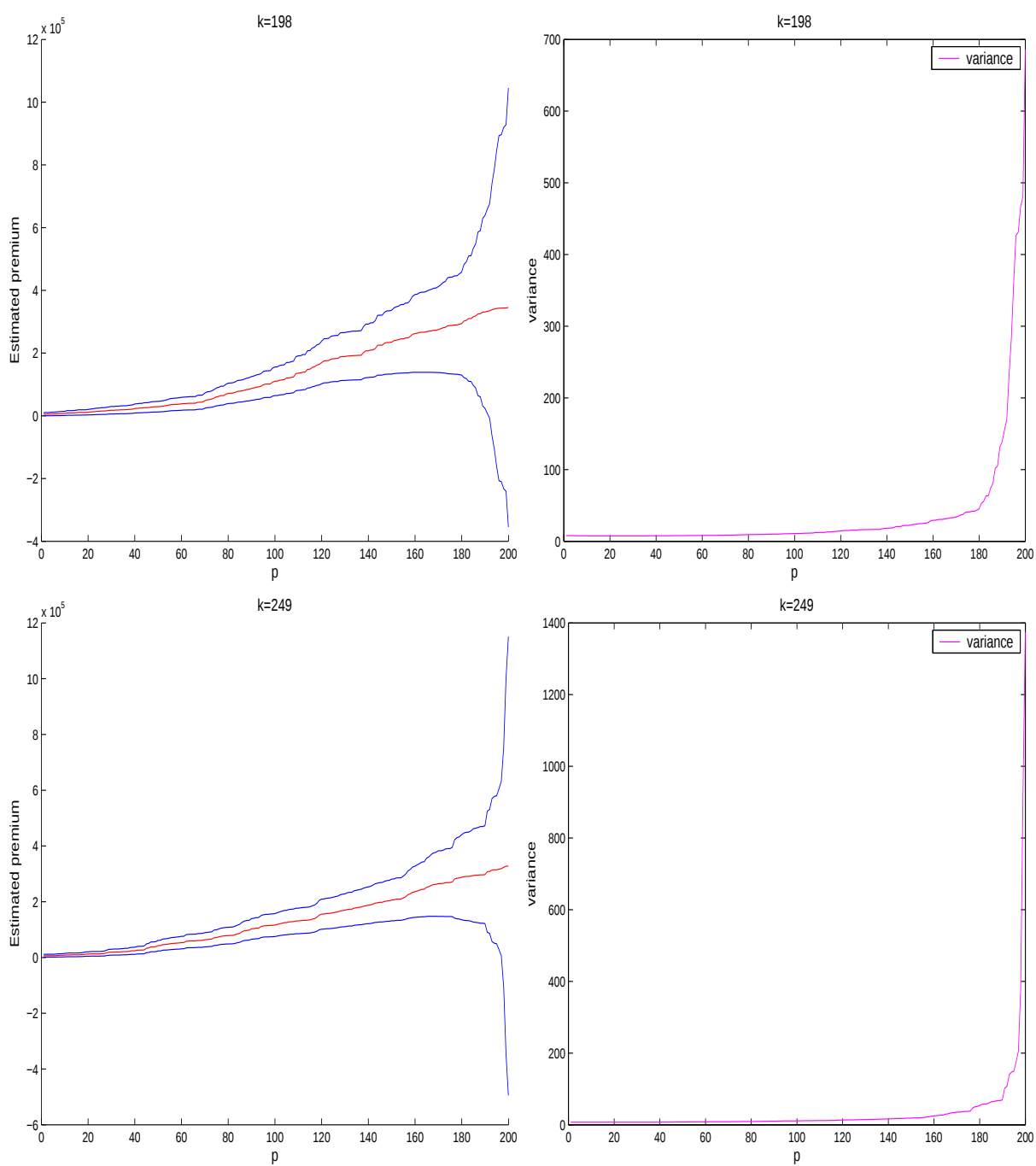
k	$\hat{\gamma}$	$\min(\hat{\Pi}_{u_n})$	$\max(\hat{\Pi}_{u_n})$
15	0.1529	955.25	1.4354e+005
48	0.24394	2096.8	3.0562e+005
98	0.19554	3012.3	3.0665e+005
148	0.21536	3903.7	3.5465e+005
198	0.20992	4920	3.3977e+005
249	0.18594	6230.4	3.2901e+005
299	0.25229	7034.1	3.4704e+005
349	0.19173	7881	3.3813e+005
399	0.16505	8933.1	3.1403e+005
449	0.14539	10017	2.8956e+005
500	0.14211	11279	2.8292e+005

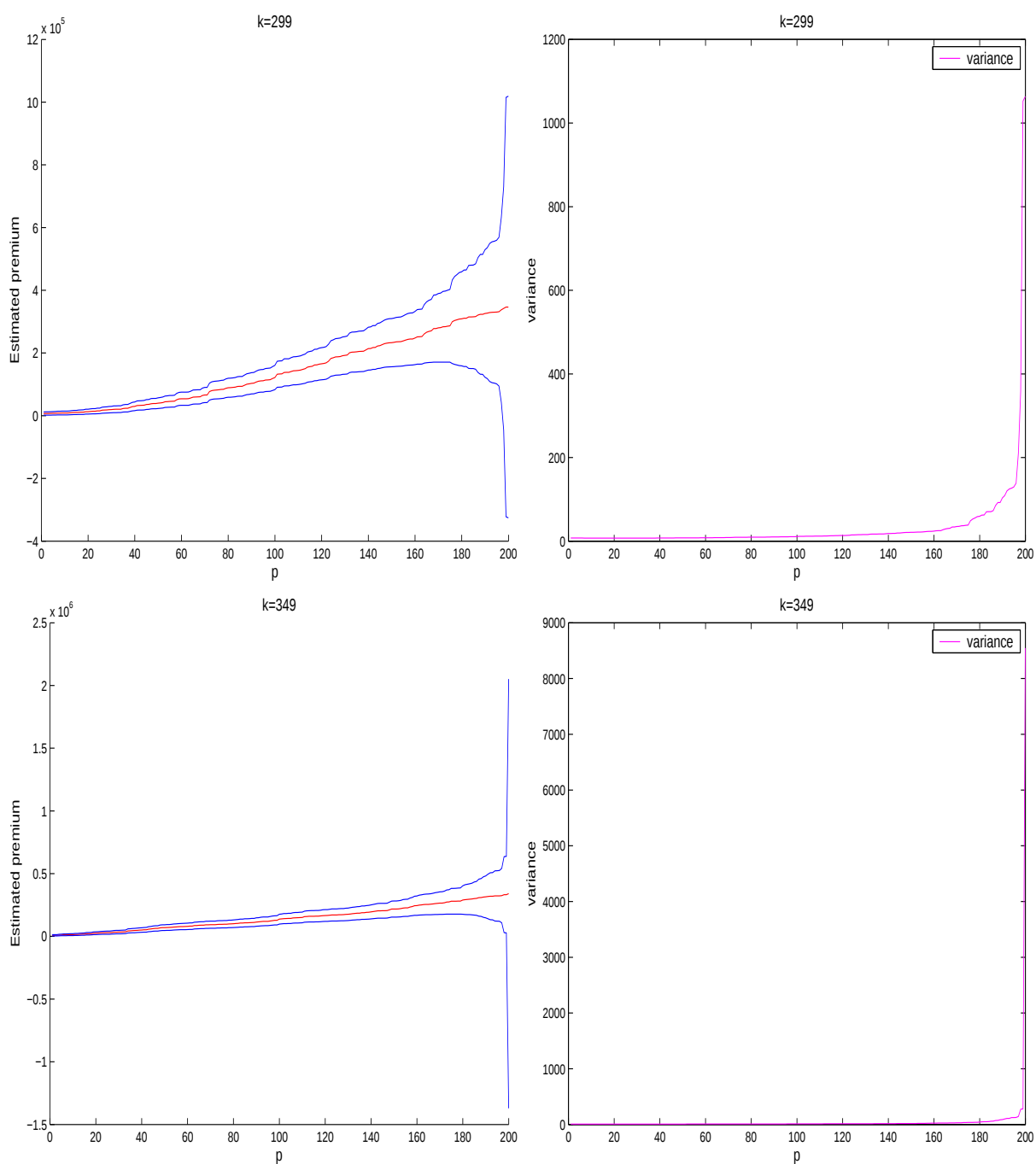
TAB. 5.3 – Variation de $\hat{\gamma}$ et La prime ajustée en fonction de k

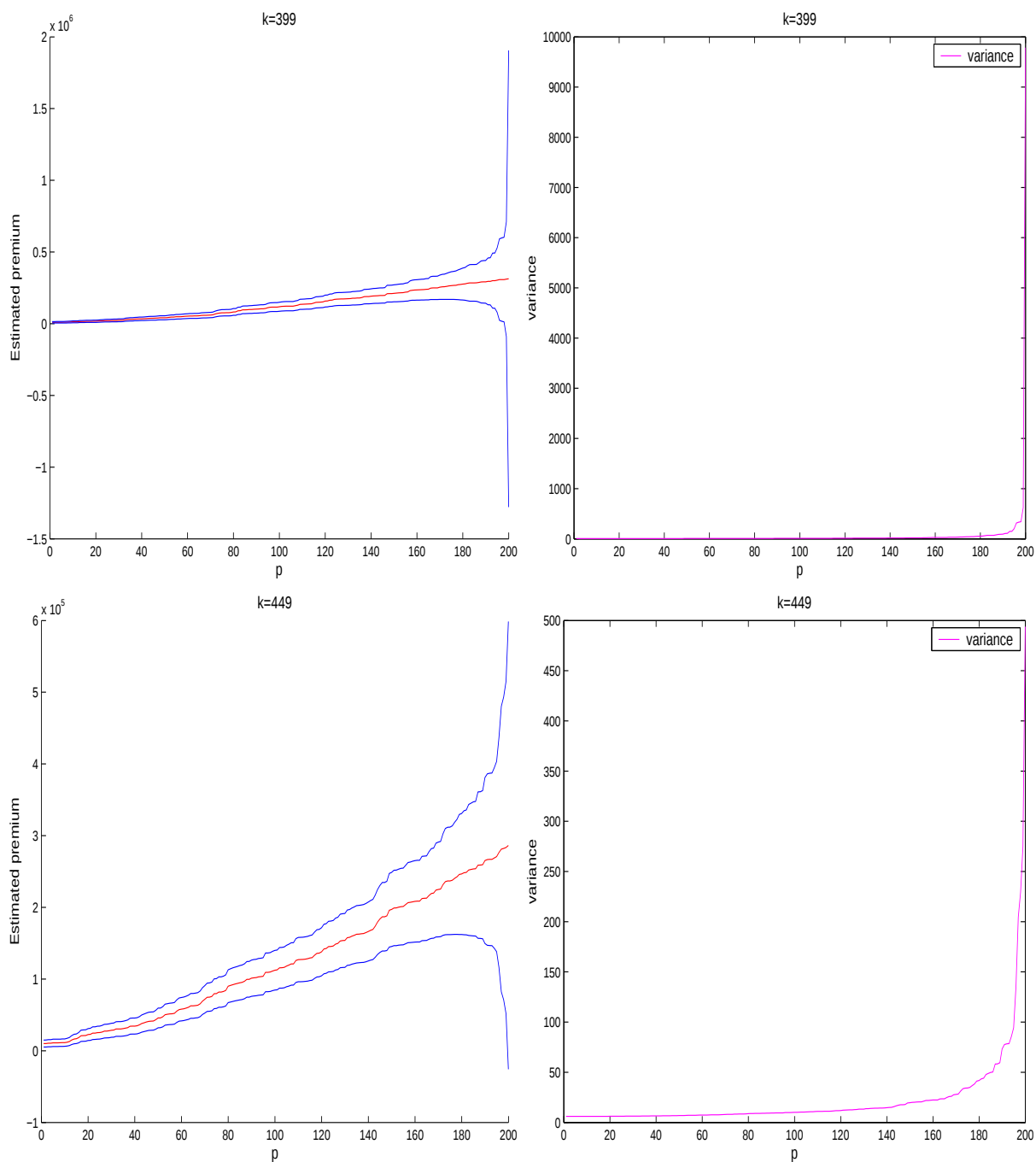
faisant varier le nombre des excès k entre 15 et 500. On remarque que la variation de $\hat{\gamma}$ devient faible dès qu'on augmente le nombre d'excès. Cependant en observant le minimum et le maximum de la prime estimée, on remarque qu'il y a une légère variation en fonction du nombre des excès k , ce qui peut être vu sur les graphes représentant la variation de la prime estimée en fonction de p pour différentes valeurs de k (voir figures (5.16)(5.17)(5.20)). Comme le montre ces figures une valeur de p proche de $1/\hat{\gamma}$ implique une prime plus élevée. Les intervalles de confiance à 95% représentés sur les figures en trait pointillé quantifient l'incertitude de mesure sur l'estimation de la prime ajustée. On remarque aussi que la variance de l'estimateur augmente pour les valeurs de p proches de $1/\hat{\gamma}$, ce qui valide les résultats obtenus par simulation.

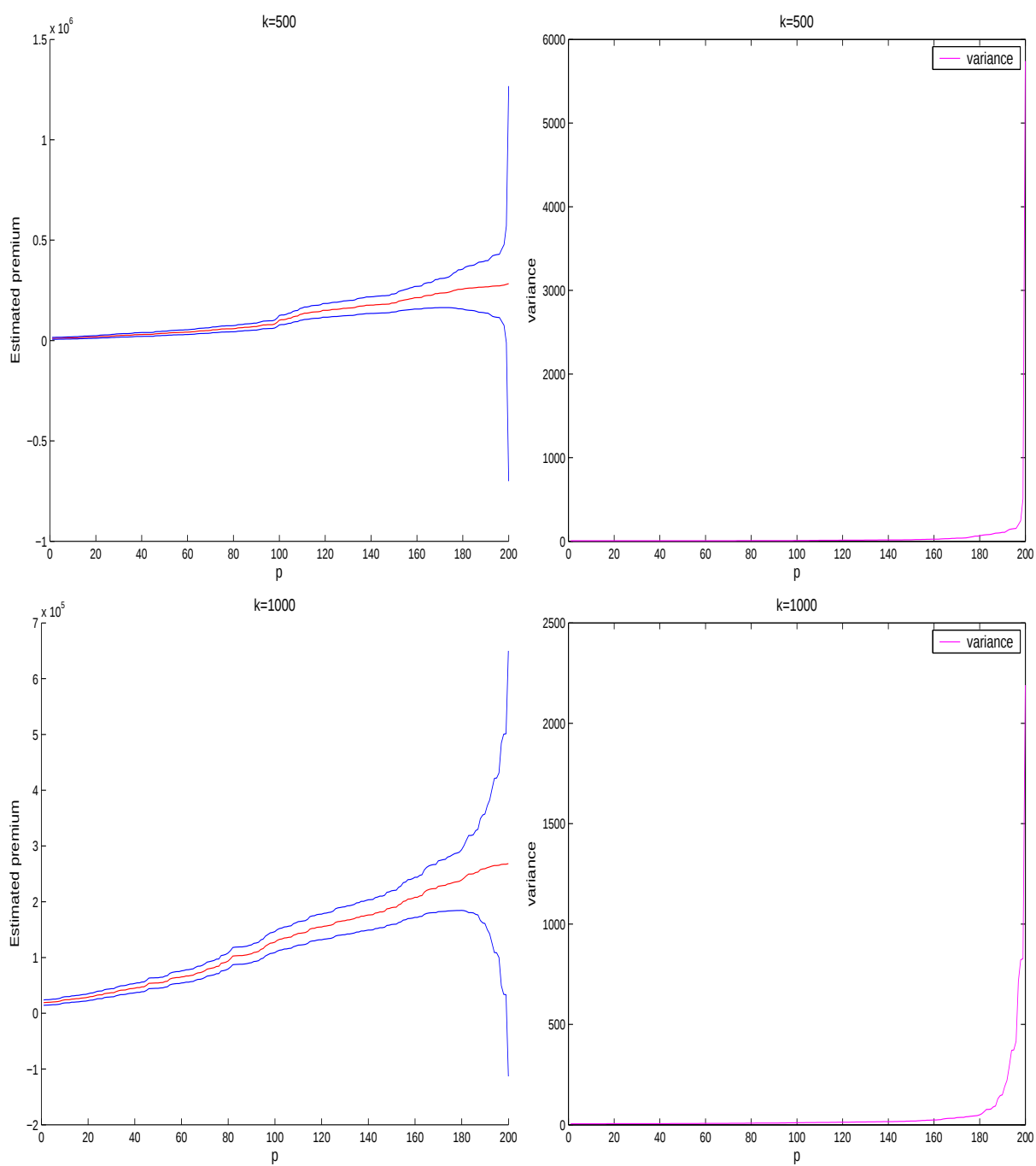
FIG. 5.15 – Variation de la prime en fonction de p , $k = 15, 48$,

FIG. 5.16 – Variation de la prime en fonction de p , $k = 98, 148$

FIG. 5.17 – Variation de la prime en fonction de p , $k = 198, 249$

FIG. 5.18 – Variation de la prime en fonction de p , $k = 299, 349$

FIG. 5.19 – Variation de la prime en fonction de p , $k = 399, 449$

FIG. 5.20 – Variation de la prime en fonction de p , $k = 500, 1000$

5.4 Conclusion

La mise en oeuvre d'un algorithme d'estimation de la prime ajustée avec intervalles de confiance, qui est une étape nécessaire pour la validation de l'application de l'estimateur de prime, est un outil simple à comprendre et à employer pour le développement de système de tarification notamment en réassurance.

La visualisation graphique de la prime estimée encadrée par l'intervalle de confiance, permet au décideur de choisir la prime estimée adéquate en fixant les différents paramètres qui influent sur la prime, tels que le coefficient d'aversion au risque p , le nombre d'excès N , la taille de l'échantillon n . Cette prime estimée sera la base de calcul de la prime commerciale.

Conclusion

La théorie des valeurs extrêmes nous permet de donner des résultats asymptotiques sur le comportement des données "au queues" des distributions. Les différentes approches proposées ont illustré le comportement des excès au-dessus d'un seuil ou dans des régions où les observations sont rares. L'application sur des données réelles a confirmé de manière satisfaisante la théorie et a illustré certains problèmes que l'on peut rencontrer, en particulier lors de l'estimation. Nous avons présenté dans ce travail une étude simulation et une application au données réelles de l'estimateur de la prime de risque ajusté proposé par [33], ainsi qu'une alternative basée sur la méthode POT. Les événements extrêmes ont déjà une place prépondérante dans les deux domaines que sont la météorologie et la finance. En effet, pour évaluer les pertes maximales d'une compagnie d'assurance la théorie des valeurs extrêmes a des possibilités de prédictions tout à fait adéquates.

Ainsi, les valeurs extrêmes peuvent prétendre à une place importante dans la caractérisation du comportement de processus ayant de grandes probabilités de *krachs*.

Cependant la TVE ne résout pas ces difficultés d'une manière sûre et efficace. Elle produit néanmoins de meilleurs résultats que les autres méthodes, qui manquent pour la plupart, de fondement théorique. La TVE est devenue un outil utile pour les gestionnaires de risques intégrés. Elle leur fournit des outils à travers lesquels ils peuvent observer les événements extrêmes avec une plus grande objectivité. Elle a trouvé et trouve encore de nombreuses applications et a été étendue à plusieurs domaines. Elle devrait à l'avenir occuper la même place dans le quotidien des gestionnaires de risques que les événements extrêmes qu'elle tente d'analyser.

Annexe

Nous présentons dans cette annexe les programmes utilisés dans la simulation.

```
%fichier :etude.m
clear all close all
%sig=1;
gam=2;
%sigma=1;
%m=0;
    n=10000;
%n=9235;
U=rand(1,n);
%Z=randn(1,n);
%X=(sig/gam)*(U.^(-gam)-1);%GPD
X=(-log(U)).^(-(1/gam));%Fréchet
%X=U.^(-1/gam);%Pareto
%X=exp(Z*sigma+m);%Lognormale
%Procédure de calcul de Hill
%load Datarc
%X=Data;
%plot(X, '.g');

X=surecol(X); ordrex=flipud(sort(X)); ordrex=ordrex(ordrex>0);
nnx=length(ordrex);
%alpha=0.05;
%m=n*alpha;
m=50; m=floor(m); loggsx=log(ordrex);
mslgx=cumsum(loggsx)./(1:nnx)'; diffix=mslgx-loggsx; diffsx=[NaN;
diffix(2:nnx)]; taux=diffsx(m); gx=1/taux;
```

```

taux1=taux;%valeur de l'estimateur de Hill
%Procédure de calcul de la prime
%gx1=1/(taux-1);
h=200; Z=rand(1,h); p=(gx-1)*Z+1;
%p=(1000-gx1)*Z+gx1;
p=sort(p); for i=1:h prdiffx=0; for j=1:m-1
diffx(j)=ordrex(j)-ordrex(j+1);
prdiffx=prdiffx+(j/nnx)^(1/p(i))*diffx(j); end primex(i)=prdiffx;
ld=1/p(i)-taux; if ld==0
    varp(i)=1;
else
    varp(i)=(gx/p(i))^2*(ld*ld-lld+1)/(ld*(ld+1));
    pinf(i)= primex(i)-1.96*sqrt(varp(i))*ordrex(m-1)/((m/n)^(-1/p(i))*sqrt(m));
    psup(i)= primex(i)+1.96*sqrt(varp(i))*ordrex(m-1)/((m/n)^(-1/p(i))*sqrt(m));
end

end figure xlabel('p'); ylabel('prime estimée');
legend('prime','borne inf','borne sup'); hold on
plot(primex,'-r'); plot(pinf,':g'); plot(psup,':b'); hold off
pinf1=pinf; psup1=psup; figure xlabel('p'); ylabel('variance');
legend('variance'); primex1=primex; varp1=varp; plot(varp1,'-m')
mi=min(primex); ma=max(primex); res=[taux,mi,ma];

```

```
%fichier :etude2.m
```

```
clear all close all n=1000; N=15; xi=0.25; beta=1e+005;
U=rand(1,n);
X=(beta/xi)*(U.^(-xi)-1);%GPD
plot(X,'.k') xlabel('simulated data','FontSize',14); ixi=1/xi;
z=rand(1,1000); p=(ixi-1)*z+1; p=sort(p); for i=1:1000
EP(i)=(N/n)^(1/p(i))*beta/(1/p(i)-xi);
sigma(i)=(1+xi)*beta^2/(1/p(i)-xi)^2*((1/p(i)-1)^2/(1+xi)+(1+xi)/(1/p(i)-xi)^2...
-2/(1/p(i)-xi)+2);
EPS(i)=EP(i)+1.96*sqrt(sigma(i)*(N/n)^(2/p(i)-1)*1-N/n)/sqrt(n);
EPI(i)=EP(i)-1.96*sqrt(sigma(i)*(N/n)^(2/p(i)-1)*1-N/n)/sqrt(n);
end figure plot(EP,'-r','MarkerSize',14);
xlabel('p','FontSize',14); ylabel('Estimated
premium','FontSize',14); hold on plot(EPS,':g'); plot(EPI,':b');
for i=1:500 EP1(i)=(N/n)^(1/p(i))*beta/(1/p(i)-xi);
sigma1(i)=(1+xi)*beta^2/(1/p(i)-xi)^2*((1/p(i)-1)^2/(1+xi)+(1+xi)/(1/p(i)-xi)^2...
-2/(1/p(i)-xi)+2);
EPS1(i)=EP1(i)+1.96*sqrt(sigma1(i)*(N/n)^(2/p(i)-1)*1-N/n)/sqrt(n);
EPI1(i)=EP1(i)-1.96*sqrt(sigma1(i)*(N/n)^(2/p(i)-1)*1-N/n)/sqrt(n);
end figure plot(EP1,'-k','MarkerSize',16);
xlabel('p','FontSize',14); ylabel('Estimated
premium','FontSize',14); hold on plot(EPS1,':k','MarkerSize',16);
plot(EPI1,':k','MarkerSize',16); vp=p(100); for i=100:1000
    k=i+1;
EP(i)=(N/i)^(1/vp)*beta/(1/vp-xi);
%sigma1=(1+xi)*beta^2/(1/p-xi)^2*((1/p-1)^2/(1+xi)+(1+xi)/(1/p-xi)^2-2/(1/p-xi)+2);
%sigma(i)=sigma1*i/((N/i)^(2/p-1)*1-N/i);
EP(k)=(N/k)^(1/vp)*beta/(1/vp-xi); Err(i)=EP(i)-EP(k); end
Err=Err(Err>0); figure plot(Err,'-r','MarkerSize',14);
xlabel('n','FontSize',14);
ylabel('\Pi_{n+1}-\Pi_n','FontSize',14); figure cdfplot(Err);
title('Empirical CDF','FontSize',14); xlabel('x','FontSize',14);
ylabel('F(x)','FontSize',14); kstest(Err,[],0.05,1)
```

```
function plotfde(x,nbins,alpha,p_est,xmin,xmax,ymin,ymax)
% Dessine la fonction densité empirique du vecteur x
% alpha est le niveau de confiance et p_est est le point estimé

n = length(x); minx = min(x); maxx = max(x);

% Construction de l'histogramme qui represente la distribution
% dans l'intervalle [min(r_std), max(r_std)]
% P = Probabilité de l'intervalle (=1)
% n = length(x)

d = (maxx - minx) / nbins;          % largeur des classes
cc = minx + d/2 + d * (0:nbins-1); % centres des classes
ec = hist(x,cc);                    % effectifs des classes
fr = ec / n;                        % frequences relatives
hc = fr * (1/d);                    % hauteur rectangle pour loi tronquée (P = 1)
bar(cc,hc,0.8,'b')

if nargin == 4 % Dessin de l'interval de confiance de niveau 1-alpha
    s = sort(x);
    cinf = s(fix(.025*n));
    csup = s(fix(.975*n));
    hold on
    plot([cinf cinf], [0 0.45*max(hc)], 'r', ...
         [csup csup], [0 0.45*max(hc)], 'r', ...
         [p_est p_est], [0 1.20*max(hc)], 'r');
    fprintf(' cinf = %6.3f    csup = %6.3f', cinf, csup);
end if nargin == 8, axis([xmin xmax ymin ymax]); end
```

Bibliographie

- [1] J. Beirlant, et G. Matthys, "Extreme Quantile Estimation for Heavy-Tailed Distributions," Working Paper(2001), Katholieke University Leuven, University Center of Statistics, www.kuleuven.ac.be/ucs/research/publi.htm.
- [2] J. Blondeaux et C. Partrat, "La Réassurance Approche technique", Economica (2003)
- [3] L. Breiman, C. J. Stone, et C. Kooperberg, "Robust confidence bounds for extreme upper quantiles," J. Statist. Comput. Simul. 37 (1990), pp. 127-149.
- [4] A. Caboussat, "Théorie des valeurs extrêmes et application", projet de semestre, Ecole polytechnique fédérale de lausanne.
- [5] E. Castillo, et S.A. Hadi, "Fitting the Generalized Pareto Distribution to Data," Journal of the American Statistical Association 92(440)1997.pp.1609-1620.
- [6] E. Castillo, "Extremes in Engineering Applications," Proceedings of the Conference on Extreme Value Theory and its Applications, (J. Galambos et al., eds.), Kluwer Academic Publishers(1994), pp. 15-42.
- [7] A. Cebrián, M. Denuit et P. Lambert, "Generalized Pareto Fit to the Society of Actuaries' Large Claims Database", North American Actuarial Journal, 7(2003), 18-36.
- [8] S. Csörgő, P. Deheuvels et D. Mason. "Kernel Estimates of the Tail Index of a Distribution," Annals of Statistics, (1985)13, pp.1050-1077.
- [9] S. Csörgő, D.M. Mason, "Central Limit Theorems for Sums of Extreme Values", (1985) Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc.
- [10] R. Davis et S. Resnick, "Tail estimates motivated by extreme value theory," Ann. Statist. 12(4) (1984), pp.1467-1487.
- [11] L. de Haan et S. Resnick, "A simple asymptotic estimate for the index of a stable distribution," J. R. Statist. Soc. B 42(1) (1980), pp. 173-195.
- [12] P. Deheuvels, "Strong Approximation in Extreme Value Theory and Applications", Colloquium on Limit Theorems in Probability and Statistics, (1984) 1, North-Holland.

- [13] P. Deheuvels, E. Haeusler, D.M. Mason, "Almost Sure Convergence of the Hill Estimator", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (1988) 104, pp.371-381.
- [14] A.L.M. Dekkers, L. de Haan, "On the Estimation of the Extreme Value Index and Large Quantile Estimation", *Ann. Statist.*, (1989a)17, pp.1795-1832.
- [15] A.L.M. Dekkers, J.H.J. Einmahl, L. de Haan, "A Moment Estimator for the Index of an Extreme-Value Distribution", *Ann. Statist.*, (1989b)17, pp.1833-1855.
- [16] H. Drees, "Estimating Extreme Value Index", *Habilitationsschrift, Mathematics Faculty, University of Cologne*(1998), Germany.
- [17] H. Drees, "Refined Pickands Estimators of Extreme Value Index", *Ann. Statist.*, (1995)23, pp.2059-2080.
- [18] P. Embrechts, C. Klüppelberg et T. Mikosch, "Modelling Extremal Events" (Springer, 2001).
- [19] R.A. Fisher, L.H.C. Tippett, "Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (1928)24, pp.180-190.
- [20] J. Galambos, "The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics", (1978)Wiley, New York.
- [21] J.A. Greenwood, J.M. Landwehr, N.C. Matalas, J.R. Wallis, "Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form," *Water Resour. Res.* (1979) 15,1049-1054.
- [22] E.J. Gumbel, "Statistics of Extremes", (1958) Columbia University Press.
- [23] E. Haeusler et J.L. Teugels, "On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular variation" *Ann. Statist.* 13(2) (1985), pp. 743-756.
- [24] P. Hall, "On Some Simple Estimates of an Exponent of Regular Variation", *J.R.S.S.B.*, (1982) 44, pp.37-42.
- [25] P. Hall, A.H. Welsh, "Best Attainable Rates of Convergence for Estimates of Parameters of Regular Variations", *Ann. Statist.*, (1984) 12, pp.1079-1084.
- [26] B. Hill, "A Simple Approach to Inference About Tail of a Distribution", *Ann. Statist.*, (1975) 3, pp.1163-1174.
- [27] J. R. M. Hosking et J. R. Wallis, "Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution," *Technometrics* 29 (1987), pp. 339-349.
- [28] E. K llezi, et M. Gilli, "Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures", *Working Paper*, (2000), *Département d'Economie et FAME, Universit  de Geneve*.
- [29] J.P. Lecoutre et Ph. Tassi, " Statistique non paramétrique et robustesse", *Economica*(1987).
- [30] F. M. Longin, "The Assymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns". *Journal of Business* 69 (1996), pp.383 408.

-
- [31] D.M. Mason, "Law of Large Numbers for Sums of Extreme Values", *Ann. of Proba.*, (1982) 10, pp. 754-764.
 - [32] A. McNeil, "Extreme Value Theory for Risk Managers", preprint(1999), Departement Mathematik ETH Zentrum Zürich.
 - [33] A. Necir, K. Boukhetala, "Estimating the Risk-Adjusted Premium For The Largest Claims Reinsurance Covers", *COMPSTAT'2004 Edition Physica Verlag Heidelberg 2004/Springer, Volume1*. pp.1577-1585.
 - [34] A. Necir, K. Boukhetala, M.Cherfi, "Estimating the Risk-Adjusted Premium of Loss using the POT Model", *Prépublication 2004, Faculté de Mathématiques*.
 - [35] J. Pickands, "Statistical inference using extreme order statistics," *Ann. Statist.* 3 (1975), pp. 119-131.
 - [36] J. Pickands, "Spline and Isotonic Estimation of the Pareto Function," in *Statistical Extremes and Applications*, (ed.: J. Tiago deOliveira), *NATO ASI Series*(1984), D. Reidel, Dordrecht, 285-296.
 - [37] J. Pickands, "Bayes Quantile Estimation and Threshold Selection for the Generalized Pareto Family," *Proceedings of the Conference on Extreme Value Theory and its Applications*, (J. Galambos et al., eds.), *Kluwer Academic Publishers*(1993), pp. 123-138.
 - [38] R. L. Smith , "Estimating tails of probability distributions," *Ann. Statist.* 15(3) (1987), pp. 1174-1207.
 - [39] S. Wang, "Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density", *ASTIN Bulletin*, 26(1996), pp.71-92.
 - [40] I. Weissman "Estimation of Parameters and Large Quantiles Based on the k-Largest Observations", (1978) *J. Amer. Statist. Assoc.*, 73, pp. 812-815.