

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématique



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES

En : MATHÉMATIQUE

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Mathématiques Discrètes

Par : REGGANE Lilia

Sujet

Un Apport Combinatoire pour une Classe de
Nombres et de Polynômes

Soutenue publiquement, le 28 Mai 2016, devant le jury composé de :

| | | | |
|------------------|------------|---------------------|--------------------|
| Mme I.BOUCHEMAKH | Professeur | à l'USTHB | Présidente |
| M M.MIHOUBI | Professeur | à l'USTHB | Directeur de thèse |
| M H.BELBACHIR | Professeur | à l'USTHB | Examineur |
| M A.DERBAL | Professeur | à l'ENS-Kouba | Examineur |
| M M.RAHMANI | M.C.A | à l'USTHB | Examineur |
| M A.YASSINE | Professeur | à l'U.HAVRE(FRANCE) | Examineur |

TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Notions de base | 8 |
| 1 | Fonctions génératrices | 9 |
| 2 | Puissances factorielles et coefficients binomiaux | 10 |
| 3 | Suites et polynômes classiques | 10 |
| 3.1 | Les nombres de Lah | 10 |
| 3.2 | Les nombres m -tronqués Lah | 12 |
| 3.3 | Les nombres de Lah associés | 13 |
| 3.4 | Les nombres r -Lah | 14 |
| 3.5 | Les nombres r -Stirling | 16 |
| 3.6 | Les polynômes partiels de Bell | 19 |
| 2 | Les nombres s-dégénérés r-Lah | 21 |
| 1 | Quelques propriétés des nombres r -Lah | 22 |
| 1.1 | Log-concavité des nombres r -Lah | 22 |
| 1.2 | Nombres r -Lah et formule de Daboul | 24 |
| 1.3 | Relations de récurrence | 25 |
| 2 | Les nombres s -dégénéré r -Lah | 25 |
| 2.1 | Formes explicites et fonction génératrice | 26 |
| 2.2 | Interprétation probabiliste | 29 |
| 2.3 | Relations de récurrence | 30 |
| 3 | Les polynômes potentiels généralisés et les polynômes partiels r-Bell | 35 |
| 1 | Quelques notions de base | 36 |
| 2 | Les polynômes potentiels généralisés | 39 |
| 3 | Expressions explicites des $P_n^{(\alpha)}(r)$ | 40 |
| 4 | Applications | 44 |
| 4 | Les nombres r-Whitney et les valeurs aux points rationnels d'une classe de polynômes | 47 |
| 1 | Les nombres r -Whitney | 48 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Nombres r -Whitney et valeurs rationnelles d'un polynôme | 49 |
| 3 | Application aux polynômes $\mathbb{B}_n^{(k)}(x)$, $\mathbb{C}_n^{(k)}(x)$, $\widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)}(x)$ | 52 |
| 4 | Application aux polynômes $E_n^\alpha(x; \lambda)$ et $\mathcal{E}_n^\alpha(x; \lambda)$ | 55 |
| 5 | Application aux polynômes $B_n(x)$ et $b_n(x)$ | 55 |
| 5 | Quelques identités via les fonctions génératrices | 57 |
| 1 | Fonctions génératrices remarquables | 58 |
| 2 | Quelques applications | 61 |
| 2.1 | Application aux suites de type binomial | 61 |
| 2.2 | Application aux nombres r -Lah | 62 |
| 2.3 | Application aux nombres m -tronqués Lah | 63 |
| 2.4 | Application aux nombres de Lah associés | 64 |
| 2.5 | Application aux nombres r -Stirling de seconde espèce | 65 |
| 2.6 | Application aux nombres m -associés Stirling de second espèce | 65 |
| 2.7 | Application aux nombres r -Whitney de seconde espèce | 67 |
| 2.8 | Application aux nombres r -Whitney-Lah | 67 |
| 2.9 | Application aux nombres de Bernoulli d'ordre supérieur | 69 |
| 2.10 | Application aux polynômes de Laguerre | 70 |
| 2.11 | Application aux polynômes de Narumi | 70 |
| | Bibliographie | 74 |

LISTE DES TABLEAUX

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ | 12 |
| 1.2 | Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2$ | 15 |
| 1.3 | Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3$ | 15 |
| 1.4 | Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_4$ | 15 |
| 1.5 | Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2$ | 17 |
| 1.6 | Les premières valeurs de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_2$ | 18 |
| | | |
| 2.1 | Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2^{\uparrow}$ | 29 |
| 2.2 | Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2^{\uparrow\uparrow}$ | 29 |

REMERCIEMENT

Tout d'abord, un très grand merci à mes parents qui me sont très chers, j'exprime aussi ma profonde gratitude, à mon mari Billel qui a su prendre en charge mes caprices et mon stress, à toute ma famille, qui sans sa présence et son soutien, je n'aurais, sans doute, jamais pu avoir ni l'opportunité ni la chance de franchir tous les obstacles qui me sont présentés jusqu'à lors.

Mes remerciements vont à Mr Miloud MIHOUBI sans qui, ma thèse n'aurait pu avoir lieu. Je tiens à lui montrer toute ma reconnaissance pour s'être rendu disponible dans une période très difficile. Ce dernier a su faire preuve de patience, de professionnalisme et de savoir-faire tout au long de la durée de la recherche.

J'exprime mes remerciements chaleureux à Mme Isma BOUCHEMAKH qui m'a honoré en acceptant d'être présidente du jury de ma thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Mr A.DERBAL, Mr A.YASSINE, Mr H.BELBACHIR, Mr M.RAHMANI, qui m'ont honoré en acceptant de faire partie de mon jury et d'examiner mon travail.

Je tiens aussi à exprimer mes sincères remerciements aux enseignants de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, ceux qui ont su offrir, donner et partager leur temps, expérience et connaissances et m'ont soutenu tout au long de mon parcours. Un merci en or à tous ceux qui ont contribué, de loin ou de près, à mon soutien.

DÉDICACES

A mes très chers parents,

A mon cher époux Billel (Boukhamir)

A ma petite princesse Sophia Hadjer,

A Malik, Farida, Rédha, Nelia,

A mon futur neveu Hillel,

A tous les membres de ma famille,

A ma belle famille,

A la mémoire de mes grands parents

A la mémoire de Toufik,

A tous mes amis.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La combinatoire énumérative est une science apparue dans diverses civilisations à différentes périodes. Elle peut se définir comme l'art de placer, ordonner ou de choisir des objets combinatoires (souvent finis) tout en respectant certaines propriétés.

Elle est notamment connue pour son intérêt à donner un sens à des suites de nombres entiers, ou à des formules reliant de tels nombres, lorsque ces derniers sont très réputés pour dénombrer.

Cette science s'est fortement développée en apportant souvent des solutions combinatoires dues à la curiosité inventive de quelques mathématiciens dont les résultats furent souvent en avance sur leur temps, qu'ils ne furent guère compris par leur contemporains de la même époque.

Trouvant cette science attrayante, et en se reposant sur nos acquis dans la combinatoire, on a pu manipuler des identités pour une classe de nombres et de polynômes ayant des propriétés intéressantes de dénombrement, et ce de manière analytique ou par arguments combinatoires.

Ce manuscrit présente un travail intitulé "Un apport combinatoire pour une classe de nombres et de polynômes". Il s'inscrit dans le cadre de la préparation d'une thèse de fin d'études pour l'obtention du diplôme de doctorat en recherche opérationnelle à l'université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB).

Cette thèse est organisée en cinq chapitres relativement distincts l'un de l'autre, à l'exception du premier qui est introductif. Néanmoins ils sont organisés par ordre chronologique.

Plan du manuscrit

Nous abordons dans le premier chapitre des notions de base, on y présente des généralités sur les fonctions génératrices, les coefficients binomiaux ainsi que les puissances factorielles.

Nous y abordons aussi l'état de quelques suites et polynômes classiques, comme les nombres de Lah [19], les nombres r - Stirling des deux espèces [7] ainsi que les polynômes partiels de Bell [6]. Nous y présentons leurs fonctions génératrices, quelques relations qui les concernent ainsi que leurs interprétations combinatoires.

Le second chapitre, fait l'objet d'une publication dans un journal de combinatoire. On lui accorde un intérêt considérable pour les nombres r - Lah en leurs apportant de nouvelles propriétés.

En suite, on va introduire "les nombres s - dégénéré r - Lah" comme généralisation de ces derniers, nous présentons quelques propriétés, nous élaborons leur fonction génératrice exponentielle qui est donnée par

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{x^{sk+(s-1)r}}{(1-x)^{k+2r}} (1+(s-1)(1-x))^r.$$

Nous apportons aussi une formule sommatoire qui facilite l'extraction des nombres s -dégénéré r - Lah à l'aide de la formule suivante

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n+j-(s-1)k-1}{k+j-1} (s-1)^{r-j}.$$

Par ailleurs, nous donnons quelques relations de recurrence et pour finir on génère des interprétations combinatoires pour certaines relations.

Dans le troisième chapitre, on exprime les polynômes potentiels généralisés par les polynômes partiels r -Bell, ce qui nous a permis d'obtenir plusieurs résultats dont le théorème suivant

Théorème 1. *Soient α un nombre réel et p, q, r, n, s des entiers non négatifs, tel que $s \geq 1, p \geq n$. Alors, on a*

$$F_n^{(\alpha)}(r) = (\alpha+q) \binom{\alpha+p+q}{p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{\alpha+q+j} \left(\frac{s!}{a_s} \right)^{j+q} \\ \times \frac{n!(j+q)!}{(n+s(j+q))!} B_{n+r+s(j+q), j+q+r}^{(r)} \left(\overline{0}, \dots, \overline{0}, a_s, a_{s+1}, \dots; 1, f_1, f_2, \dots \right).$$

Puis, en s'inspirant de la formule de Melzak, on obtient d'autres expressions simplifiées. Au final, on va appliquer tous les résultats obtenus aux polynômes de Narumi et de Bernoulli d'ordre supérieur.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions essentiellement les nombres de r -Whitney et les valeurs (aux points rationnels) de quelques polynômes de type Appell, nous y présentons un résultat principal qui est donné par

Théorème 2. Soient r, m deux entiers non négatifs, avec $m \neq 0$ et $(P_n(x))$ une suite de polynômes, tel que

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = G(t) \exp(xt) \quad \text{avec} \quad G(t) = \sum_{n \geq 0} P_n(0) \frac{t^n}{n!}.$$

Alors, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, si $P_n(0) = \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \{n \atop k\}$, on obtient

$$P_n\left(\varepsilon \frac{r}{m}\right) = \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{W_{m,r}(n, k)}{m^{n-k}},$$

nous montrons à travers ce résultat qu'il est possible d'engendrer des identités via une certaine classe de polynômes, tels que, les Poly-Bernoulli, les Poly-Cauchy, etc.

Nous clôturons cette thèse par le cinquième chapitre, où il a aussi pour objet d'exposer un résultat principal basé sur les fonctions génératrices ordinaires et les fonctions génératrices exponentielles. Par le biais de ce résultat, nous apportons comme application d'autres identités sur certains nombres et polynômes, tels que les nombres de Lah associés, les suites de type binomial, les polynômes de Laguerre, etc.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

"Une bonne partie des mathématiques devenue utile s'est développée sans aucun désir d'être utile, dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quels domaines elle le deviendrait."

John VON NEUMANN

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter et fixer les notations et terminologies de certains outils combinatoires dont nous aurons besoin et ferons usage tout au long de ce document.

Dans ce chapitre, nous citons les définitions élémentaires des fonctions génératrices, des puissances factorielles ainsi que des coefficients binomiaux.

Nous présentons aussi les résultats essentiels concernant certaines suites de nombres et de polynômes classiques, tels que les nombres de Lah [19], les nombres r -Stirling des deux espèces [7] et les polynômes partiels de Bell [6].

1 Fonctions génératrices

Fonction génératrice ordinaire

Soient n un entier naturel et (a_n) une suite de nombres complexes. On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite (a_n) , la fonction

$$x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Soient

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'addition de deux fonctions génératrices ordinaires est définie par

$$A(x) + B(x) = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k.$$

Le produit de deux fonctions génératrices ordinaires est définie par

$$A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Fonction génératrice exponentielle

Soient n un entier naturel et (a_n) une suite de nombres complexes. On appelle fonction génératrice exponentielle de la suite (a_n) , la fonction

$$x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Soient

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'addition de deux fonctions génératrices exponentielles est définie par

$$A(x) + B(x) = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) \frac{x^k}{k!}.$$

Le produit de deux fonctions génératrices exponentielles est définie par

$$A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!}, \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j}.$$

2 Puissances factorielles et coefficients binomiaux

Soient x un nombre complexe et n un entier positif, on définit la puissance factorielle montante, notée $(x)^{\bar{n}}$, par

$$(x)^{\bar{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad \text{pour } n \geq 1, \text{ et } (x)^{\bar{0}} = 1,$$

et la puissance factorielle descendante, notée $(x)^{\underline{n}}$, par

$$(x)^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1), \quad \text{pour } n \geq 1, \text{ et } (x)^{\underline{0}} = 1.$$

Le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, compte le nombre de combinaisons de k éléments parmi n éléments et est définie par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n \text{ et } 0 \text{ si } k > n.$$

Ce coefficient admet une extension sur \mathbb{C} donnée par :

$$\binom{x}{k} = \frac{(x)^{\underline{k}}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3 Suites et polynômes classiques

Cette section comporte des généralités sur des suites de nombres et de polynômes que nous allons utiliser dans la suite. Aussi, nous adoptons les notations utilisées par Knuth et al [15] pour indiquer les suites de nombres.

3.1 Les nombres de Lah

Les nombres de Lah [19], notés $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$, peuvent être définis comme les coefficients du polynômes $(x)^{\bar{n}}$ vis-à-vis de la base $\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$, c'est à dire

$$(x)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] (x)^{\underline{k}}. \quad (1.1)$$

Le nombre de Lah $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ compte le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k listes non vides.

Les nombres de Lah sont caractérisés par la fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Il s'ensuit de (1.1) que les nombres de Lah satisfont la relation de récurrence triangulaire suivante

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n+k-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad 0 < k \leq n,$$

avec

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \delta_{n,0}, \quad \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0, \quad n < k,$$

où $\delta_{n,0}$ représente le symbole de Kronecker.

Conséquences :

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = n!, \quad \left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right] = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ces nombres ont aussi pour relation de récurrence [33] :

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{(n-1)!(k+1)}{n-k} \sum_{l=k}^{n-1} \frac{l}{l!} \left[\begin{smallmatrix} l \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad n \geq k+1.$$

D'autant plus, qu'ils admettent une forme explicite donnée par

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}, \quad 0 < k \leq n.$$

A travers ce tableau, nous donnons les premières valeurs des nombres de Lah.

| n/k | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 1$ | 1 | | | | | | | |
| $n = 2$ | 2 | 1 | | | | | | |
| $n = 3$ | 6 | 6 | 1 | | | | | |
| $n = 4$ | 24 | 36 | 12 | 1 | | | | |
| $n = 5$ | 120 | 240 | 120 | 20 | 1 | | | |
| $n = 6$ | 720 | 1800 | 1200 | 300 | 30 | 1 | | |
| $n = 7$ | 5040 | 15120 | 12600 | 4200 | 630 | 42 | 1 | |
| $n = 8$ | 40320 | 141120 | 141120 | 58800 | 11760 | 1176 | 56 | 1 |

Tableau 1.1 – Les premières valeurs de $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

Les nombres de Lah peuvent être exprimés en valeurs de nombres de Stirling de première et second espèce via l'expression suivante [33] :

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{j=k}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right\},$$

où $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ représentent, respectivement, les nombres de Stirling de première et de seconde espèce.

3.2 Les nombres m -tronqués Lah

Le nombre m -tronqué Lah [24], noté $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{m\downarrow}$, compte le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k listes non vides de taille au plus m .

Exemple 3. Pour $n = 4$, $k = 2$ et $m = 2$, on obtient les partitions suivantes :

$$[1, 2][3, 4]; [1, 2][4, 3]; [1, 3][2, 4]; [1, 3][4, 2]; [1, 4][2, 3]; [1, 4][3, 2];$$

$$[2, 1][4, 3]; [2, 1][3, 4]; [3, 1][4, 2]; [3, 1][2, 4]; [4, 1][3, 2]; [4, 1][2, 3].$$

Par conséquent, $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]^{2\downarrow} = 12$.

Les nombres m -tronqués Lah sont caractérisés par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{m\downarrow} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x(1-x^m)}{1-x} \right)^k, \quad m \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.3 Les nombres de Lah associés

Les nombres de Lah associés notés $L_s(n, k)$ ont été introduits par Ahuja et Enneking [1] via l'expression suivante

$$L_s(n, k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{n+si-1}{n}, \quad s \in \mathbb{R}_+^*.$$

satisfont l'inégalité,

$$(L_s(n, k))^2 > L_s(n, k+1) L_s(n, k-1), \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots, n-1,$$

et la relation suivante

$$L_s(n+1, k) = (n+sk) L_s(n, k) + s L_s(n, k-1),$$

où

$$L_s(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad L_s(n, k) = 0, \quad \text{pour } k > n,$$

Conséquences :

$$L_s(n, 1) = (s)^{\bar{n}}, \quad L_s(n, n) = s^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les nombres de Lah associés ont pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq k} L_s(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} ((1-x)^{-s} - 1)^k.$$

Quelques propriétés

$$(sx)^{\bar{n}} = \sum_{k=1}^{\min(x,n)} L_s(n, k) (x)^{\underline{k}}, \quad x \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{(x-1)^{\underline{k}}} = \sum_{n=k}^{\infty} L_s(n, k) \frac{1}{(sx+1)^{\bar{n}}}.$$

En particulier, pour $s = 1$, on obtient

$$(x)^{\bar{n}} = \sum_{k=1}^{\min(x,n)} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (x)^{\underline{k}}, \quad x \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{(x-1)^{\underline{k}}} = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{1}{(x+1)^{\bar{n}}}.$$

3.4 Les nombres r -Lah

Le nombre r -Lah, noté $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$, compte le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k listes non vides, tels que les r premiers éléments sont dans différents listes.

Exemple 4. Pour $n = 4$, $k = 3$ et $r = 2$,

$\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]_2$ compte le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ en trois listes, tels que les deux premiers éléments de cet ensemble (c'est à dire le 1 et le 2) ne doivent pas appartenir à la même liste.

En effet, on a les partitions suivantes :

$$\begin{aligned} & [1][2, 3][4]; [1][3, 2][4]; [2][1, 3][4]; \\ & [2][3, 1][4]; [1][3, 4][2]; [1][4, 3][2]; \\ & [3][1, 4][2]; [1][2, 4][3]; [3][4, 1][2]; \\ & [1][4, 2][3]. \end{aligned}$$

Le nombre total d'une telle partition est :10.

Les nombres r -Lah admettent la fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+2r}}, \quad , n \geq k \geq 0. \quad (1.2)$$

Ces nombres peuvent être obtenus de manière explicite par

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \binom{n+r-1}{k+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \binom{n-r}{k-r}, \quad n \geq k \geq r, \quad (1.3)$$

et satisfont la relation de récurrence triangulaire suivante

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r + (n+k-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r, \quad n \geq k \geq r, \quad (1.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r &= 0 & n < r, \\ \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r &= \delta_{n,k}, & k = r. \end{aligned}$$

Par commodité, nous donnons dans ces tableaux les premières valeurs des nombres r -Lah pour $r = 2, 3$ et $r = 4$.

| n/k | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 2$ | 1 | | | | | |
| $n = 3$ | 4 | 1 | | | | |
| $n = 4$ | 20 | 10 | 1 | | | |
| $n = 5$ | 120 | 90 | 18 | 1 | | |
| $n = 6$ | 840 | 840 | 42 | 28 | 1 | |
| $n = 7$ | 6720 | 8400 | 3360 | 560 | 40 | 1 |

Tableau 1.2 – Les premières valeurs de $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor_2$.

| n/k | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 3$ | 1 | | | | | |
| $n = 4$ | 6 | 1 | | | | |
| $n = 5$ | 42 | 14 | 1 | | | |
| $n = 6$ | 336 | 168 | 24 | 1 | | |
| $n = 7$ | 3024 | 2016 | 432 | 36 | 1 | |
| $n = 8$ | 30240 | 25200 | 7200 | 900 | 50 | 1 |

Tableau 1.3 – Les premières valeurs de $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor_3$.

| n/k | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ | $k = 9$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 4$ | 1 | | | | | |
| $n = 5$ | 8 | 1 | | | | |
| $n = 6$ | 72 | 18 | 1 | | | |
| $n = 7$ | 720 | 270 | 30 | 1 | | |
| $n = 8$ | 7920 | 3960 | 660 | 44 | 1 | |
| $n = 9$ | 95040 | 59400 | 13200 | 1320 | 60 | 1 |

Tableau 1.4 – Les premières valeurs de $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor_4$.

Propriétés relatives aux nombres r -Lah

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k \geq r \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} (x+r)^{\bar{n}} &= \sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix} (x-r)^{\underline{k}}, \\ \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_r &= \sum_{j=k}^n (n+k+2r+1)^{\underline{k}} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_r, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \frac{(n-r)!}{n!(k-r)!} \sum_{i=0}^r (k+i)! \begin{bmatrix} n \\ k+i \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \sum_{j=k}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}_r, \\ \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_r &= \delta_{n,k}. \end{aligned}$$

Pour plus de précision concernant ces propriétés, le lecteur peut consulter les articles suivants [4], [5], [33].

3.5 Les nombres r -Stirling

Les nombres r -Stirling ont été introduits par Broder [7], ces nombres sont répertoriés en deux espèces :

Le nombre r -Stirling de première espèce, noté $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$, compte le nombre de permutations de n éléments en k cycles, tel que les r premiers éléments sont dans différents cycles.

Exemple 5. Soient $n = 4$, $k = 2$ et $r = 2$.

Il existe six permutations d'un ensemble de quatre éléments en deux cycles, tel que les deux premiers éléments sont dans différents cycles.

$$(1, 3) (2, 4); (1, 3, 4) (2); (2, 3, 4) (1);$$

$$(1, 4) (2, 3); (1, 4, 3) (2); (2, 4, 3) (1).$$

Par conséquent, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_2 = 6$.

La fonction génératrice exponentielle associée aux nombres r -Stirling de première espèce est donnée par

$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-x} \right)^r \left(\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right)^k,$$

Ces nombres satisfont la relation de récurrence triangulaire

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r, & n \geq k \geq r; \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= 0, & n < r; \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \delta_{k,r}, & n = r. \end{aligned}$$

Par le présent tableau, nous donnons les premières valeurs des nombres r -Stirling de première espèce, pour $r = 2$:

| n/k | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 2$ | 1 | | | | | |
| $n = 3$ | 2 | 1 | | | | |
| $n = 4$ | 6 | 5 | 1 | | | |
| $n = 5$ | 24 | 26 | 9 | 1 | | |
| $n = 6$ | 120 | 154 | 71 | 14 | 1 | |
| $n = 7$ | 720 | 1044 | 580 | 155 | 20 | 1 |

Tableau 1.5 – Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_2$.

Le nombre r -Stirling de second espèce, noté $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$, compte le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous ensembles non vides, tel que les r premiers éléments sont dans différents sous ensembles.

Exemple 6. Pour $n = 4$, $k = 3$ et $r = 2$, on a les partitions suivantes :

$$\begin{aligned} &\{1\} \{2, 3\} \{4\}; \{1\} \{3, 4\} \{2\}; \{1\} \{2, 4\} \{3\}; \\ &\{2\} \{1, 3\} \{4\}; \{2\} \{1, 4\} \{3\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}_2 = 5$.

Les nombres r -Stirling de second espèce sont caractérisés par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\exp(x) - 1)^k \exp(rx).$$

Ces nombres ont une relation de récurrence triangulaire,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r, & n \geq k \geq r, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= 0, & n < r, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \delta_{k,r}, & n = r. \end{aligned}$$

Par le présent tableau, nous donnons les premières valeurs des nombres r -Stirling de second espèce, pour $r = 2$.

| n/k | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 2$ | 1 | | | | | |
| $n = 3$ | 2 | 1 | | | | |
| $n = 4$ | 4 | 5 | 1 | | | |
| $n = 5$ | 8 | 19 | 9 | 1 | | |
| $n = 6$ | 16 | 65 | 55 | 14 | 1 | |
| $n = 7$ | 32 | 211 | 285 | 125 | 20 | 1 |

Tableau 1.6 – Les premières valeurs de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_2$.

Quelques propriétés relatives aux nombres r - Stirling

Les nombres r -Stirling satisfont les relations suivantes [7] :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= \frac{1}{r-1} \left(\left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1} - \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right]_r \right), & n \geq r \geq 1, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{r-1}, & n \geq r \geq 1, \\ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= \sum_{l=k}^n \left[\begin{matrix} n \\ l \end{matrix} \right]_r \binom{l}{k} r^{l-k}, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= \sum_{l=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ l \end{matrix} \right\}_r \binom{l}{k} r^{l-k}. \end{aligned}$$

Remarque 7. Pour $r = 0$, nous obtenons les nombres de Stirling de première espèce $[n]$, respectivement, les nombres de Stirling de seconde espèce $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

3.6 Les polynômes partiels de Bell

Les polynômes partiels de Bell [6] (appelés aussi polynômes partiels exponentiels de Bell) sont les polynômes $B_{n,k}(a_1, a_2, \dots)$ de nombre infini de variables a_1, a_2, \dots définis par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n,k \geq 0} B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) x^k \frac{t^n}{n!} = \exp \left(x \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{t^j}{j!} \right),$$

ou bien via l'expression ci-après

$$\sum_{n,k \geq 0} B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{t^j}{j!} \right)^k.$$

Ces polynômes admettent l'expression exacte qui est donnée par

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{k_2} \dots,$$

où $\pi(n, k)$ est l'ensemble de toutes les solutions (k_1, k_2, \dots) des entiers naturels tel que

$$k_1 + k_2 + k_3 \dots = k \quad \text{et} \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3 \dots = n.$$

Interpretation combinatoire

Les polynômes partiels de Bell admettent une interprétation combinatoire liée à des ensembles de partitions colorées. Plus exactement, si $a_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, le polynôme partiel de Bell $B_{n,k}(a_1, a_2, \dots)$ est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs, où

Les blocs de taille 1 possèdent a_1 couleurs,

Les blocs de taille 2 possèdent a_2 couleurs,

Les blocs de taille 3 possèdent a_3 couleurs et ainsi de suite.

Formule de Faà di Bruno

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\frac{d^n}{dt^n} g(f(t)) = \sum_{n \geq k} g^{(k)}(f(t)) B_{n,k}(f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-k+1)}(t)).$$

Identités connues

Les polynômes partiels de Bell peuvent être associés à d'autres nombres via les identités suivantes

Les nombres de Lah

$$B_{n,k}(1!, 2!, 3!, \dots) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right],$$

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{n \geq 1} t^n \right)^k = \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{1-t} \right)^k.$$

Les nombres de Stirling de première espèce

$$B_{n,k}(0!, -1!, 2!, \dots) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right],$$

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \right)^k = \frac{1}{k!} (\ln(1+t))^k.$$

Les nombres de Stirling de second espèce

$$B_{n,k}(1, 1, 1, \dots) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\},$$

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \right)^k = \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k.$$

Les nombres d'Idempotents

$$B_{n,k}(1, 2, 3, \dots) = \binom{n}{k} k^{n-k},$$

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} k^{n-k} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (te^t)^k.$$

Les nombres de Lah associés

$$B_{n,k}(s, (s-1)^2, (s-2)^3, \dots) = L_s(n, k),$$

$$\sum_{n \geq k} k! L_s(n, k) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{j \geq 1} (s-j+1)^j \frac{t^j}{j!} \right)^k = ((1-t)^{-s} - 1)^k.$$

CHAPITRE 2

LES NOMBRES S -DÉGÉNÉRÉS R -LAH

"L'oeuvre d'un mathématicien est surtout un enchevêtrement de conjonctures, d'analogies, de souhaits et de frustrations, loin d'être le noyau de la découverte, n'est souvent que le moyen de s'assurer que notre esprit ne nous joue pas de tours."

Gian Carlo ROTA

Introduction

L'étude analytique et combinatoire des nombres r -Lah a été entreprise durant ces dernières années par différents auteurs [2],[19],[12],[4]. Ces nombres recèlent des informations abondantes.

Ce chapitre a pour but de déterrer des informations traitants les nombres r -Lah afin d'établir de nouvelles propriétés les concernant.

Dans l'intention d'élargir nos recherches, nous avons été amené à définir une nouvelle classe qui généralise les nombres r -Lah et que nous avons appelé les nombres " s -dégénéré r -Lah", nous exhibons toutes les propriétés nécessaires les concernant que nous avons pu établir.

1 Quelques propriétés des nombres r -Lah

Avant d'entamer les nombres s -dégénéré r -Lah, nous établissons quelques propriétés sur les nombres r -Lah, chose que l'on a pu déduire par analogie aux différents travaux réalisés antérieurement.

1.1 Log-concavité des nombres r -Lah

Nous nous sommes rapprochés des travaux de Ahuja et Enneking [2] pour prouver que le polynôme qui génère les nombres r -Lah vérifie l'inégalité de Newton, i.e.

Théorème 8 (Inégalité de Newton). [16, p. 52] Soient a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réels. Si toutes les racines du polynôme $P(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ sont réelles, alors les coefficients de $P(x)$ satisfont

$$a_i^2 \geq \left(1 + \frac{1}{i}\right) \left(1 + \frac{1}{n-i}\right) a_{i+1} a_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

On a alors

Proposition 9. Les racines réelles du polynôme $P_n(x; r) := \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r x^k$ sont négatives.

Démonstration. Soit $T_n(x; r) := x^{n+2r+1} \exp(x) P_n(x; r)$.

D'une part, la relation de récurrence triangulaire (1.4), donne

$$P_n(x; r) = (x + n + 2r)P_{n-1}(x; r) + x \frac{d}{dx} P_{n-1}(x; r), \quad (2.1)$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x; r) &:= x^{n+2r} \exp(x) P_{n-1}(x; r) \\ \frac{d}{dx} T_{n-1}(x; r) &= x^{n+2r-1} e^x \left((n+2r+x) P_{n-1}(x; r) + x \frac{d}{dx} P_{n-1}(x; r) \right) \\ &= x^{n+2r-1} e^x P_n(x; r) \\ &= x^{-2} T_n(x; r) \end{aligned}$$

d'où

$$T_n(x; r) = x^2 \frac{d}{dx} T_{n-1}(x; r).$$

On prouve la proposition par récurrence sur n , tout en appliquant le Théorème de Rolle à la fonction $T_{n-1}(x; r)$.

En effet, pour $n = 0$,

$$T_0(x; r) := x^{2r+1} \exp(x) P_0(x; r),$$

admet $2r+1$ racines réelles (avec répétitions).

Supposons que le résultat est vrai jusqu'à $n-1$, à l'aide du Théorème de Rolle, on sait que $\frac{d}{dx} T_{n-1}(x; r)$ s'annule au moins $2n+2r-2$ fois sur \mathbb{R} , par conséquent, $T_n(x; r) = x^2 \frac{d}{dx} T_{n-1}(x; r)$ s'annule au moins $2n+2r$ fois sur \mathbb{R} . Donc, $x^{n+2r} P_n(x; r)$ s'annule $2n+2r$ fois sur \mathbb{R} et comme il est de degré $2n+2r+1$, alors sans doute la racine manquante ne peut être que réelle et du fait que les coefficients du polynôme $x^{n+2r} P_n(x; r)$ sont positifs ou nuls, alors cette racine est forcément non positive ou nulle. D'où, le polynôme $T_n(x; r)$ admet que des racines réelles non positives.

Par conséquent, le polynôme $P_n(x; r)$ admet que des racines réelles non positives. \square

De la proposition 5.6 et de l'inégalité de Newton, on affirme le résultat suivant

Corollaire 10. *la suite générée par les nombres r -Lah $(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor_r; 0 \leq k \leq n)$ est strictement log-concave (par conséquent unimodale).*

Le corollaire précédent montre que la suite $(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor_r; 0 \leq k \leq n)$ admet un indice $K \in \{0, 1, \dots, n\}$ pour lequel $\lfloor \frac{n}{K} \rfloor_r$ est le maximal de la suite $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor_r$. Pour localiser cet indice, nous avons besoin du théorème suivant.

Théorème 11 (Inégalité de Darroch et Benoumhani [23]). *Soient a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réelles. Si toutes les racines du polynôme $P(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ sont réelles et non positives et $P(1) > 0$, alors*

$$\left| K - \frac{P'(1)}{P(1)} \right| < 1.$$

A présent, par application de ces inégalités, on peut localiser cet indice via la proposition suivante

Proposition 12. Soit K l'indice maximal de la suite $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$, on a

$$\left| K - \frac{P_{n+1}(1; r)}{P_n(1; r)} + (n + 2r + 2) \right| < 1.$$

1.2 Nombres r -Lah et formule de Daboul

Maintenant, nous exhibons un résultat généralisant celui de Daboul et al [12]

$$D^n \left(\exp \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{(-1)^n}{x^n} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r \frac{1}{x^k},$$

par la proposition suivante

Proposition 13. Nous avons

$$D^n \left(\frac{1}{x^{2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r \frac{1}{x^k}. \quad (2.2)$$

Démonstration. Démontrons par récurrence sur n :

pour $n = 0$, l'identité (2.2) est évidente. On suppose qu'elle est vraie pour un certain $n \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} D^{n+1} \left(\frac{1}{x^{2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \right) &= D \left(D^n \left(\frac{1}{x^{2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \right) \right) \\ &= D \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r \frac{1}{x^k} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1+2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n+1} \left((n+k+2r) \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r + \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r-1 \end{smallmatrix} \right]_r \right) \frac{1}{x^k}. \end{aligned}$$

La relation de récurrence

$$\left[\begin{smallmatrix} n+r+1 \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r = \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r-1 \end{smallmatrix} \right]_r + (n+k+2r) \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r,$$

prouve que

$$D^{n+1} \left(\frac{1}{x^{2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1+2r}} \exp \left(\frac{1}{x} \right) \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{smallmatrix} n+r+1 \\ k+r \end{smallmatrix} \right]_r \frac{1}{x^k}.$$

Ainsi, on trouve le résultat voulu. □

1.3 Relations de récurrence

En se basant sur la formule explicite (1.3) ainsi que ces égalités

$$\binom{n+r-1}{k+r-1} = \binom{n+r-2}{k+r-1} + \binom{n+r-2}{k+r-2} \text{ et } \binom{n-r}{k-r} = \binom{n-r-1}{k-r} + \binom{n-r-1}{k-r-1},$$

nous sommes parvenus à établir les deux relations de récurrence sur les nombres r -Lah, exprimées via la proposition ci-dessous

Proposition 14. *Pour $r < k$, nous avons*

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= (n-r) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r + \frac{n-r}{k-r} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r, \\ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= (n+r-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r + \frac{n+r-1}{k+r-1} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r. \end{aligned}$$

Remarque 15. *Si on pose, $r = 0$ ou $r = 1$, les formules de la Proposition 14 redonnent bien le Corollaire 2.1 de [4].*

2 Les nombres s -dégénéré r -Lah

Nous consacrons une bonne partie de ce chapitre à l'introduction d'une nouvelle classe de nombres appelée " les nombres s -dégénéré r -Lah ". Par une approche combinatoire, on exprime la fonction génératrice exponentielle, les relations de récurrence, une interprétation probabiliste ainsi que des preuves combinatoires pour certaines relations de récurrence.

Definition 16. Soient s et r deux entiers positifs. Le nombre s -dégénéré r -Lah, noté par $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow}$, compte le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k listes de tailles supérieures ou égale à s , tel que les r premiers éléments doivent être dans différentes listes.

Pour que tout cela soit plus clair, étudions en un exemple.

Exemple 17. *Soient $n = 4$, $k = 2$ et $r = 2$, alors*

$\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right]_2^{2\uparrow}$ compte le nombre de partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux listes contenant au moins deux éléments d'autant plus que les deux premiers éléments doivent être dans différentes listes.

En effet, on a les partitions suivantes :

$$[1, 3][2, 4]; [1, 3][4, 2]; [3, 1][2, 4]; [3, 1][4, 2];$$

$$[1, 4][2, 3]; [1, 4][3, 2]; [4, 1][3, 2]; [4, 1][2, 3].$$

Par exemple, la partition $[1, 2][3, 4]$ ne peut être considérée, car les deux premiers éléments sont dans la même liste.

Remarque 18. Par le biais de la définition précédente, on a constaté que les nombres s -dégénéré r -Lah valent zéro, lorsque $n < sk$, ou bien lorsque, $k < r$.

2.1 Formes explicites et fonction génératrice

Nous allons présenter dans ce paragraphe, des formes explicites ainsi que la fonction génératrice exponentielle des nombres s -dégénéré r -Lah.

Théorème 19. Pour $n > sk$, nous avons

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n - sk} (n_1 + s - 1) \cdots (n_r + s - 1).$$

Démonstration. Pour partitionner un ensemble de $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ éléments en k listes non vides, tel que la taille de chaque liste est $\geq s$ et les éléments de l'ensemble $[r]$ doivent être dans différentes listes, nous procédons comme suit :

D'abord, on commence par construire k listes notés B_1, \dots, B_k dans lesquels on y insert les éléments de l'ensemble $[r]$, ainsi, avoir B_1, \dots, B_r (un élément pour chaque liste). Donc, pour construire ces k listes, il y a $\frac{1}{(k-r)!} \binom{n-r}{n_1, \dots, n_k}$ façons de choisir n_1, \dots, n_k dans $\{r+1, \dots, n\}$, sachant que, lorsque $n_i + 1 \geq s$, les n_i éléments seront dans les B_i pour $i = 1, \dots, r$, et lorsque $n_i \geq s$, les autres n_i éléments seront dans les B_i pour $i = r+1, \dots, k$.

Maintenant, pour former k listes, on permute les éléments de chaque liste. Alors, le nombre de permutations est égale à

$$(|B_1|!) \cdots (|B_r|!) (|B_{r+1}|!) \cdots (|B_k|!) = (n_1 + 1)! \cdots (n_r + 1)! n_{r+1}! \cdots n_k!$$

En prenant M pour l'ensemble des vecteurs (n_1, \dots, n_k) , tel que

$$n_1 + \dots + n_k = n - r, (n_1 + 1, \dots, n_r + 1, n_{r+1}, \dots, n_k) \in \{s, s+1, \dots\}^k,$$

Le nombre total d'une telle partition est alors

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} &= \frac{1}{(k-r)!} \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in M} \binom{n-r}{n_1, \dots, n_k} \prod_{i=1}^r (n_i + 1)! \prod_{i=r+1}^k n_i! \\ &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in M} (n_1 + 1) \cdots (n_r + 1) \\ &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n - sk} (n_1 + s - 1) \cdots (n_r + s - 1), \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. □

Les deux corollaires suivants sont des conséquences directes du Théorème 19.

Corollaire 20. *Les nombres s -dégénéré r -Lah sont caractérisés par la fonction génératrice exponentielle suivante*

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{x^{sk+(s-1)r}}{(1-x)^{k+2r}} (1+(s-1)(1-x))^r.$$

Démonstration. En utilisant le Théorème 19, pour $|x| < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} \frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \sum_{n \geq sk+(s-1)r} x^n \sum_{(n_1+s)+\dots+(n_{k+r}+s)=n+r} (n_1+s) \cdots (n_r+s) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n \geq sk+(s-1)r} x^n \sum_{j_1+\dots+j_{k+r}=n+r, j_1 \geq s, \dots, j_{k+r} \geq s} j_1 \cdots j_r \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n \geq sk+(s-1)r} \sum_{j_1+\dots+j_{k+r}=n+r, j_1 \geq s, \dots, j_{k+r} \geq s} j_1 \cdots j_r x^{j_1+\dots+j_{k+r}-r} \end{aligned}$$

Ce qui vaut à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k!} \sum_{j_1 \geq s, \dots, j_{k+r} \geq s} (j_1 x^{j_1-1}) \cdots (j_r x^{j_r-1}) (x^{j_1+r}) \cdots (x^{j_{k+r}}) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{j \geq s} j x^{j-1} \right)^r \left(\sum_{j \geq s} x^j \right)^k \\ &= \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dx} \frac{x^s}{1-x} \right)^r \left(\frac{x^s}{1-x} \right)^k \\ &= \frac{1}{k!} \frac{x^{sk+(s-1)r}}{(1-x)^{k+2r}} (1+(s-1)(1-x))^r. \end{aligned}$$

□

Nous connaissons à présent, la fonction génératrice des nombres s -dégénéré r -Lah, maintenant, la question qu'on se pose est : peut-on exprimer ces nombres en une somme? sachant qu'il existe une étroite relation entre les sommes et les récurrences, nous proposons via le corollaire suivant une formule sommatoire explicite pour les nombres s -dégénéré r -Lah ainsi que des relations de recurrence.

Corollaire 21. *Pour tout $r \leq k$, nous avons*

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n+j-(s-1)k-1}{k+j-1} (s-1)^{r-j},$$

et satisfait, pour $r < k$, les récurrences suivantes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} &= (n-r) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} + \frac{s!}{k-r} \binom{n-r}{s} \begin{bmatrix} n-s \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{s\uparrow}; \\ \frac{1}{k-r} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{r+1}^{s\uparrow} &= \frac{s-1}{n-r} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} + \frac{(n-r-1)!(k-r+1)}{(n+s-r)!} \begin{bmatrix} n+s \\ k+1 \end{bmatrix}_r^{s\uparrow}. \end{aligned}$$

Démonstration. A l'aide du Corollaire 20, on établit l'expression suivante

$$\sum_{n \geq sk + (s-1)r} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} \frac{x^n}{n!} = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{x^{(s-1)(k+r)+j}}{k!} \frac{(s-1)^j x^{k-j}}{(1-x)^{k-j+2r}},$$

En utilisant les relations (1.2) et (1.3), on exprime le facteur $\frac{x^{k-j}}{(1-x)^{k-j+2r}}$ comme suit

$$(k-j)! \sum_{n \geq k-j} \begin{bmatrix} n+r \\ k-j+r \end{bmatrix}_r \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq k-j} \binom{n+2r-1}{k-j+2r-1} x^n,$$

La première identité se manifeste par identification et les deux relations de récurrence par application de l'identité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ aux coefficients $\binom{n+j-(s-1)k-1}{k+j-1}$ et $\binom{r}{j}$ dans la première identité. □

Remarque 22. A partir du Corollaire 20 et la fonction génératrice des nombres r -Lah (1.2), nous obtenons la relation entre les nombres s -dégénéré r -Lah et les nombres r -Lah

$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} \frac{x^n}{n!} = (s - (s-1)x)^r t^{(s-1)(k+r)} \sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{x^n}{n!},$$

ce qui montre que

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} = \frac{(N-r)!}{(k-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n+j-1}{k+r-1} s^{r-j} (1-s)^j, \quad N = n + (s-1)k.$$

Remarque 23. A partir du Corollaire 20, on déduit, pour $r = 0$, l'identité

$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{s\uparrow} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x^s}{1-x} \right)^k,$$

qui représente les nombres s -dégénéré Lah, qui sont une restriction des nombres s -dégénéré r -Lah.

La formule sommatoire explicite des nombres s -dégénéré r -Lah a permis de fournir dans les tableaux suivants les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{s\uparrow}$, pour $r = 2, s=2$ et $r = 2, s = 3$.

| n/k | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 4$ | 8 | | | |
| $n = 5$ | 72 | | | |
| $n = 6$ | 600 | 96 | | |
| $n = 7$ | 5280 | 1920 | | |
| $n = 8$ | 50400 | 29520 | 1440 | |
| $n = 9$ | 524160 | 428400 | 50400 | |
| $n = 10$ | 5927040 | 6249600 | 1229760 | 26880 |

Tableau 2.1 – Les premières valeurs de $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_2^{2\uparrow}$.

| n/k | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ |
|----------|----------|---------|---------|
| $n = 6$ | 48 | | |
| $n = 7$ | 864 | | |
| $n = 8$ | 12240 | 960 | |
| $n = 9$ | 166320 | 31680 | |
| $n = 10$ | 2298240 | 735840 | 20160 |
| $n = 11$ | 33022080 | 1520640 | 1048320 |

Tableau 2.2 – Les premières valeurs de $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_2^{3\uparrow}$.

2.2 Interprétation probabiliste

Maintenant, notre attention se focalise sur la faisabilité d'une interprétation probabiliste pour les nombres s -dégénéré r -Lah. En effet, ces nombres en admettent une et est donnée par la proposition suivante

Proposition 24. Soit λ un nombre réel, avec $1 > \lambda > 0$, $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes, tel que

$$P(X_n = j) = \lambda(1 - \lambda)^j, \quad P(Y_n = j) = \frac{\lambda^2(j + s)}{1 + (s - 1)\lambda} (1 - \lambda)^j, \quad j \geq 0,$$

et soit

$$S_{k,r} = X_1 + \cdots + X_k + Y_1 + \cdots + Y_r.$$

Alors, nous avons

$$P(S_{k,r} = n) = \frac{\lambda^{k+2r} (1 - \lambda)^n}{(1 + (s - 1)\lambda)^r (n + sk + (s - 1)r)!} \frac{k!}{\left[\begin{smallmatrix} n + s(k + r) \\ k + r \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow}}.$$

Démonstration. La preuve découle de la fonction génératrice des moments de $S_{k,r}$ donnée par $\mathbb{E}(x^{S_{k,r}}) = (\mathbb{E}(x^{X_1}))^k (\mathbb{E}(x^{Y_1}))^r$.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \geq 0} P(S_{k,r} = n) x^{n+sk+(s-1)r} \\
&= x^{sk+(s-1)r} \mathbb{E}(x^{S_{k,r}}) \\
&= x^{sk+(s-1)r} \mathbb{E}(x^{X_1+\dots+X_k}) \mathbb{E}(x^{Y_1+\dots+Y_r}) \\
&= \frac{\lambda^{k+2r}}{(1+(s-1)\lambda)^r} x^{sk+(s-1)r} \left(\sum_{j \geq 0} ((1-\lambda)x^j) \right)^k \left(\sum_{j \geq 0} (j+s)((1-\lambda)x^j) \right)^r \\
&= \frac{\lambda^{k+2r}}{(1+(s-1)\lambda)^r} \left(\sum_{j \geq s} ((1-\lambda)t^j) \right)^k \left(\sum_{j \geq s-1} (j+1)((1-\lambda)x^j) \right)^r \\
&= k! \frac{\lambda^{k+2r}}{(1+(s-1)\lambda)^r} \sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{((1-\lambda)x)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} P(S_{k,r} = n) x^n &= k! \frac{\lambda^{k+2r}}{(s-(s-1)\lambda)^r} \times \\
& \sum_{n \geq k} \frac{1}{(n+sk+(s-1)r)!} \begin{bmatrix} n+s(k+r) \\ k+r \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} (1-\lambda)^n x^n.
\end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons

$$P(S_{k,r} = n) = \frac{\lambda^{k+2r} (1-\lambda)^n}{(1+(s-1)\lambda)^r} \frac{k!}{(n+sk+(s-1)r)!} \begin{bmatrix} n+s(k+r) \\ k+r \end{bmatrix}_r^{s\uparrow}.$$

Ainsi, on trouve le résultat voulu. \square

2.3 Relations de récurrence

Dans cette section, on va générer par des preuves purement combinatoires quelques identités sur les nombres s -dégénéré r -Lah.

Proposition 25. Soient n, k, s et r des entiers positifs, $1 \leq sr \leq sk \leq n$, on a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} &= (n+k-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} + s! \binom{n-r-1}{s-1} \begin{bmatrix} n-s \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{s\uparrow} \\
&+ s!r \binom{n-r-1}{s-2} \begin{bmatrix} n-s \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{s\uparrow}.
\end{aligned}$$

Démonstration. On veut partitionner l'ensemble $[n]$ en k listes non vides de taille $\geq s$ et que les éléments de l'ensemble $[r]$ doivent être dans différentes listes. Pour cela, nous procédons de la manière suivante :

D'abord, on sépare l'élément n et on observe

- (a) Si l'élément n appartient à une liste de taille $\geq s + 1$, alors il y a $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow}$ possibilités de partitionner l'ensemble $[n - 1]$ en k listes tel que chaque liste est de taille $\geq s$ et que les r premiers éléments sont dans différentes listes. L'élément n (pas vraiment utilisé) peut être inséré dans les k listes, avec $n - 1 + k$ possibilités, sachant qu'il peut être inséré avec $l + 1$ façons dans une liste $\{a_1, \dots, a_l\}$ après les a_i ($i = 1, \dots, l$) ou bien avant a_1 .

Alors, on compte dans ce cas $(n - 1 + k) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow}$ façons.

- (b) Si l'élément n est dans une liste de taille s et que celui ci ne contient guère un élément des r premiers éléments, alors il y a $\binom{n-1-r}{s-1}$ façon de choisir $s-1$ éléments pour être avec cet élément dans une même liste, $s!$ possibilités de les permuter. Tandis que les $n - s$ éléments restants peuvent être partitionnés en $k - 1$ listes (ou chaque liste est de taille $\geq s$ et que les r premiers éléments sont dans des différentes listes) avec $\left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow}$ façons. Donc le nombre de façons est :

$$s! \binom{n-1-r}{s-1} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow}.$$

- (c) Si l'élément n est dans une liste de taille s et que celle-ci contient un élément des r premiers éléments (ce cas est considéré seulement lorsque $s \geq 2$), alors, il y a $\binom{n-1-r}{s-2}$ façons de choisir $s - 2$ éléments pour être avec ce même élément et dans une même liste, r façons de choisir un élément parmi les r premiers éléments pour être avec l'élément n dans la même liste, $s!$ façons de permuter les éléments de cette liste. Quand aux $n-s$ éléments restants, ils peuvent être partitionner en $k-1$ listes ordonnées (tel que chaque liste est de taille $\geq s$ et que les $r - 1$ premiers éléments sont dans des listes différentes) avec $\left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}$ façons. Le nombre de façons dans ce cas est :

$$s!r \binom{n-r-1}{s-2} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}.$$

Donc, on voit clairement que le nombre de partitions est :

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow} &= (n + k - 1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow} + s! \binom{n-r-1}{s-1} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r^{s\uparrow} \\ &\quad + s!r \binom{n-r-1}{s-2} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}. \end{aligned}$$

□

Proposition 26. Soient n, k, s et r des entiers positifs, $1 \leq sr \leq sk \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} \left[\begin{matrix} n-j \\ k \end{matrix} \right]_0^{s\uparrow} \left[\begin{matrix} j+r \\ r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow}.$$

Démonstration. Pour un j fixé, il y a $\binom{n}{n-j} \left[\begin{matrix} n-j \\ k \end{matrix} \right]_0^{s\uparrow}$ manière de former k listes (chacune de taille $\geq s$) en utilisant seulement les $n-j$ éléments restant de l'ensemble $\{r+1, \dots, n+r\}$.

Pour former les r listes restantes, il y a $\left[\begin{matrix} j+r \\ r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow}$ façons de former r listes (chacune de taille $\geq s$) en utilisant les j éléments de l'ensemble $\{r+1, \dots, n+r\}$ et les éléments de l'ensemble $[r]$ (pas vraiment utilisé), où chaque liste contient un élément de l'ensemble $[r]$.

Donc, le nombre de partitions ordonnées est obtenu par

$$\left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{n-j} \left[\begin{matrix} n-j \\ k \end{matrix} \right]_0^{s\uparrow} \left[\begin{matrix} j+r \\ r \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow}.$$

□

Proposition 27. Soient n, k, s et r des entiers positifs, $1 \leq sr \leq sk \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} = \sum_{j \geq s} j! \binom{n-r}{j-1} \left[\begin{matrix} n-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}.$$

Démonstration. Pour partitionner l'ensemble $[n]$ en k listes ordonnées non vides de taille $\geq s$ et que les r premiers éléments doivent être dans des différentes listes, de plus, l'élément r appartient à une liste de cardinalité $j \geq s$.

Il y a $j! \binom{n-r}{j-1} \left[\begin{matrix} n-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}$ façons, où

- (a) $\binom{n-r}{j-1}$ est le nombre de façons de choisir les $j-1$ éléments parmi les $(n-1)-(r-1)$ éléments (pas dans les $r-1$ premiers éléments) pour être dans la même liste que l'élément r ,
- (b) $j!$ est le nombre de façons de permuter les éléments de cette liste,
- (c) $\left[\begin{matrix} n-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}$ est le nombre de façons de partitionner les $n-j$ éléments restants en $k-1$ listes tel que chaque liste est de cardinalité $\geq s$ et que les $r-1$ premiers éléments doivent être dans des différentes listes.

□

Remarque 28. En posant $s = 1$ dans la Proposition 27, il en résulte le Théorème 3 dans l'article [4].

Proposition 29. Soient n, k, s et r des entiers positifs, $1 \leq sr \leq sk \leq n$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} - \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{r+1}^{s\uparrow} = r \sum_{j \geq s} j! \binom{n-r-1}{j-2} \left[\begin{matrix} n-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}.$$

Démonstration. Le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k listes non vides de taille $\geq s$ et que les r premiers éléments doivent être dans différentes listes sauf l'élément $r+1$, est $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} - \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{r+1}^{s\uparrow}$.

Ce nombre peut être obtenu en considérant que l'élément $r+1$ est dans l'une des r listes qui contient un des r premiers éléments.

Donc, l'élément $r+1$ peut être avec l'élément i , ($i = 1, \dots, r$), dans une liste de cardinalité j avec $j!r \binom{n-r-1}{j-2} \left[\begin{matrix} n-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}$ façons, où

- (a) $\binom{n-r-1}{j-2}$ est le nombre de façons de choisir $j-2$ éléments parmi les $n-r-1$ derniers éléments pour être dans la même liste que l'élément i et l'élément $r+1$,
- (b) $j!$ est le nombre de possibilités de permuter les éléments de cette liste,
- (c) $\left[\begin{matrix} n-2-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}$ est le nombre de façons de partitionner $n-j$ éléments restants en $k-1$ listes ordonnées tel que chaque liste est de cardinalité $\geq s$ et que les $r-1$ premiers éléments sont dans des listes différentes,
- (d) r est le nombre de façons de choisir l'élément i parmi les r premiers éléments pour qu'il puisse être dans la même liste que l'élément $r+1$.

Ainsi, le nombre de partitions est

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{s\uparrow} - \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{r+1}^{s\uparrow} = r \sum_{j \geq s} j! \binom{n-r-1}{j-2} \left[\begin{matrix} n-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}^{s\uparrow}.$$

□

Remarque 30. Pour $s = 1$, on déduit du Théorème 19, l'identité suivante

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r := \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{1\uparrow} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n+r-k} n_1 \cdots n_r,$$

et du Corollaire 21 l'identité (1.3).

De plus, on déduit de la Proposition 29, l'expression suivante

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r - \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{r+1} = r \sum_{j \geq 1} j! \binom{n-r-1}{j-2} \left[\begin{matrix} n-j \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}.$$

Pour $r = 0$, on obtient les nombres s -dégénérés Lah $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{s\uparrow} := \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_0^{s\uparrow}$, et Il en résulte de la Proposition 25 ainsi que du Corollaire 20 les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{s\uparrow} &= (n+k-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]^{s\uparrow} + s! \binom{n-1}{s-1} \left[\begin{smallmatrix} n-s \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]^{s\uparrow}, \\ \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]^{s\uparrow} &= \frac{n!}{k!} \binom{n-1-(s-1)k}{k-1}, \quad n \geq sk > 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

LES POLYNÔMES POTENTIELS GÉNÉRALISÉS ET LES POLYNÔMES PARTIELS *R*-BELL

"Est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion."

René THOM

Introduction

L'objet de ce chapitre est de trouver des expressions simplifiées des polynômes potentiels généralisés. Pour pallier à ces polynômes, nous nous sommes intéressés aux travaux faits par Howard [18] et Cenkci [9] et pour y remédier nous avons fait appel aux polynômes partiels r -Bell définis par Mihoubi et al. [24].

Un des intérêts de cette généralisation est de mettre en valeur les différents aspects combinatoires liants les polynômes potentiels généralisés avec les polynômes partiels r -Bell. Cela permet aussi de voir à quel point les propriétés de ces polynômes peuvent s'étendre ou non à un contexte plus général.

Pour montrer tout cela, nous donnons quelques notions comportants des définitions et propriétés nécessaires dont nous aurons besoin tout au long du chapitre.

1 Quelques notions de base

Soit la définition d'un polynôme potentiel donnée comme suit

Definition 31. Les polynômes potentiels associés aux variables indépendantes sont définis par

$$\sum_{n \geq 0} F_n^{(\alpha)} \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{a_s t^s}{F(t)} \right)^\alpha,$$

avec

$$F_n^{(\alpha)} = \frac{\alpha^{\overline{n+1}}}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \frac{F_n^{(-j)}}{\alpha + j}.$$

Howard [18] associa les polynômes potentiels avec les polynômes partiels de Bell (définis dans le premier chapitre) par les identités suivantes :

Pour $s \geq 1$,

$$F_n^{(-k)} = \left(\frac{s!}{a_s} \right)^k \frac{n!k!}{(n+sk)!} B_{n+sk,k} \left(\frac{s-1}{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots} \right), k \in \mathbb{N},$$

et pour $s \geq 0$,

$$F_n^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^n \left(\frac{s!}{a_s} \right)^j \frac{n!}{(n+sj)!} B_{n+sj,j} \left(\frac{s}{0, \dots, 0, a_{s+1}, a_{s+2}, \dots} \right) (-\alpha)^j. \quad (3.1)$$

Cenkci [9] présenta une forme plus générale que cette dernière sur les polynômes potentiels et les définit via la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n \geq 0} F_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{\frac{a_s t^s}{s!}}{F(t)} \right)^\alpha \exp(xt),$$

où $F_n^{(\alpha)}(0) = F_n^{(\alpha)}$, lorsque $x = 0$.

Les polynômes potentiels $F_n^{(\alpha)}(x)$ satisfont la relation

$$F_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} F_j^{(\alpha)}.$$

Ces polynômes peuvent être représentés par les polynômes partiels de Bell via la relation suivante [9, Théoreme 3.1]

$$F_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha + j - 1}{j} \binom{s!}{a_s} \sum_{l=0}^{j^{n-j}} \binom{n}{l+j} x^{n-j-l} \\ \times \binom{\alpha + j + l}{l} \frac{(l+j)! j!}{(l+j+s j)!} B_{l+j+s j, j} \left(\frac{s}{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots} \right).$$

Par analogie aux différents travaux cités précédemment, nous donnons des expressions plus générales que ces derniers sur les polynômes potentiels généralisés, pour notre cas, on l'effectuera en fonction des polynômes partiels r -Bell [24].

En effet, pour ce faire, donnons d'abord la définition suivante

Definition 32. Soient $(a_n; n \geq 1)$ et $(b_n; n \geq 1)$ deux suites d'entiers non négatifs. Les polynômes partiels r -Bell notés par

$$B_{n+r, k+r}^{(r)}(a_l; b_l) := B_{n+r, k+r}^{(r)}(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots).$$

comptent le nombre de partitions de l'ensemble $(n+r)$ en $(k+r)$ blocs, tel que :

- Les r premiers éléments sont dans différents blocs.
- Chaque bloc de cardinalité i et qui ne contient aucun élément des r premiers éléments, peut être coloré avec a_i couleurs.
- Chaque bloc de cardinalité i et qui contient un élément des r premiers éléments, peut être coloré avec b_i couleurs.

Les blocs avec 0 couleur ne seront pas pris en considération dans les partitions.

Fonction Génératrice

Les polynômes partiels r -Bell sont définis analytiquement par la fonction génératrice exponentielle donnée par

$$\sum_{n \geq k} B_{n+r, k+r}^{(r)}(a_l; b_l) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{j \geq 1} a_j \frac{t^j}{j!} \right)^k \left(\sum_{j \geq 0} b_{j+1} \frac{t^j}{j!} \right)^r. \quad (3.2)$$

Ces polynômes sont caractérisés par cette formule

$$B_{n,k}^{(r)}(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots) = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \\ \times \sum_{n_1 + \dots + n_k = n+r-k} \frac{b_{n_1+1} \dots b_{n_r+1}}{n_1! \dots n_r!} \frac{a_{n_{r+1}+1} \dots a_{n_k+1}}{(n_{r+1}+1)! \dots (n_k+1)!},$$

et peuvent être exprimés à l'aide des polynômes partiels de Bell par

$$B_{n+r, k+r}^{(r)}(a_l; b_l) = \binom{n+r}{r}^{-1} \sum_{j=k}^n \binom{n+r}{j} B_{j,k}(a_l) B_{n+r-j, r}(b_l).$$

Les polynômes partiels r -Bell peuvent être exprimés en termes de

— nombres r -Stirling de première espèce

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = B_{n,k}^{(r)}((i-1)!; (i-1)!),$$

— nombres r -Stirling de seconde espèce

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r = B_{n,k}^{(r)}(1; 1),$$

— nombres r -Lah

$$\left| \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right|_r = B_{n,k}^{(r)}((i)!; (i)!).$$

Remarque 33. Pour $r = 0$, on obtient les polynômes partiels de Bell.

Pour obtenir d'autres expressions sur les polynômes potentiels généralisés, nous avons besoin du théorème présenté ci-dessous représentant la formule de Melzak. Étant donné que la démonstration de cette formule est basée sur l'interpolation de Lagrange, nous proposons alors une nouvelle démonstration basée sur les fractions rationnelles classiques.

Théorème 34 (Formule de Melzak). Pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$g(x + \alpha) = \alpha \binom{\alpha + p}{p} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{g(x - j)}{\alpha + j}, \quad (3.3)$$

où g est un polynôme de degré $\leq p$.

Démonstration. Du fait que $g(x + \alpha)$ est un polynôme de degré $\leq p$ par rapport à α , alors

$$\frac{g(x + \alpha)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + p)} = \sum_{j=0}^p \frac{a_j}{\alpha + j}.$$

On multiplie ces égalités par $(\alpha + k)$, on obtient

$$\frac{(\alpha + k)g(x + \alpha)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + p)} = \sum_{j=0}^p \frac{a_j(\alpha + k)}{\alpha + j}.$$

On fait tendre α par $-k$, il en résulte alors

$$a_k = \frac{g(-k + x)}{(-1)^k k! (p - k)!} = \frac{(-1)^k}{p!} \binom{p}{k} g(-k + x).$$

D'où

$$\frac{g(x + \alpha)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + p)} = \frac{1}{p!} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{g(-j + x)}{\alpha + j},$$

ou bien

$$g(x + \alpha) = \alpha \binom{\alpha + p}{p} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{g(-j + x)}{\alpha + j}.$$

□

2 Les polynômes potentiels généralisés

Soit s un entier non négatif, on pose

$$F(t) = \sum_{n \geq s} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad h(t) = \sum_{n \geq 1} h_n \frac{t^n}{n!}, \quad \exp(xh(t)) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Notons que $f_n(x)$ désigne un polynôme de degré au plus n . En effet,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n \geq 1} f_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \exp(xh(t)) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{x^k h^k(t)}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} x^k \sum_{n \geq k} B_{n,k}(h_1, h_2, \dots) \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^n B_{n,k}(h_1, h_2, \dots) x^k \right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{cases} f_n(x) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(h_1, h_2, \dots) x^k, & n \geq 1 \\ f_0(x) = 1, \end{cases}$$

La suite $(f_n(x))$ est alors une suite binomiale [11, 22], i.e.

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, & f'_n(0) \neq 0, \\ f_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y). \end{cases}$$

Maintenant, nous allons introduire des polynômes généralisant ceux étudiés par Howard [18] et Cenkci [9]. Nous appellerons ces polynômes "polynômes potentiels généralisés", donnés par la définition suivante

Definition 35. Les polynômes potentiels généralisés sont définis par

$$\sum_{n \geq 0} P_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{a_s t^s}{F(t)} \right)^\alpha \exp(xh(t)), \quad s \geq 0. \tag{3.4}$$

Par de simple calcul, nous obtenons la relation suivante

$$P_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{n-k}(x) F_k^{(\alpha)} \tag{3.5}$$

3 Expressions explicites des $P_n^{(\alpha)}(r)$

Les polynômes potentiels généralisés peuvent être obtenus de manière explicite par le théorème suivant

Théorème 36. Soient α un nombre réel, r, k, s trois entiers positifs. Nous avons

$$P_n^{(-k)}(r) = \left(\frac{s!}{a_s} \right)^k \frac{n!k!}{(n+sk)!} \times B_{n+r+sk, k+r}^{(r)} \left(0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots; 1, f_1, f_2, \dots \right), \quad s \geq 1, \tag{3.6}$$

$$P_n^{(\alpha)}(r) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{s!}{a_s} \right)^j \frac{n!}{(n+sj)!} \times B_{n+r+sj, j+r}^{(r)} \left(0, \dots, 0, a_{s+1}, \dots; 1, f_1, \dots \right) (-\alpha)^j, \quad s \geq 0, \tag{3.7}$$

où $f_n = f_n(1)$.

Démonstration. Pour démontrer la première identité, on pose $x = r$ et $\alpha = -k$ dans l'identité (3.4), on obtient

$$\sum_{n \geq 0} P_n^{(-k)}(r) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{s!}{a_s} \right)^k t^{-sk} \left(\sum_{n \geq s} a_n \frac{t^n}{n!} \right)^k \left(\sum_{n \geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} \right)^r,$$

En utilisant l'identité (3.2), on déduit l'identité désirée.

Pour la seconde, on remplace le $F_k^{(\alpha)}$ de l'identité (3.1) dans l'expression de $P_n^{(\alpha)}(x)$ de l'identité (3.5), on obtient

$$P_n^{(\alpha)}(r) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{n-k}(r) F_k^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^n \left(\frac{s!}{a_s} \right)^j (-\alpha)^j U(n, j), \quad (3.8)$$

où

$$U(n, j) := \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} f_{n-k}(r) \frac{k!}{(k+s_j)!} B_{k+s_j, j} \left(\overline{0, \dots, 0}, a_{s+1}, a_{s+2}, \dots \right).$$

Pour simplifier l'expression de la suite $U(n, j)$, la fonction génératrice exponentielle de cette suite peut être donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq j} U(n, j) \frac{t^n}{n!} &= \frac{t^{-sj}}{j!} \left(\sum_{n \geq 0} f_n \frac{t^n}{n!} \right)^r \left(\sum_{n \geq s+1} a_n \frac{t^n}{n!} \right)^j, \\ &= \sum_{m \geq j} B_{n+r+s_j, j+r}^{(r)} \left(\overline{0, \dots, 0}, a_{s+1}, a_{s+2}, \dots; 1, f_1, f_2, \dots \right) \frac{t^{m-sj}}{j!}. \end{aligned}$$

Par identification ainsi que par un changement de variable $m - sj = n$, on obtient

$$U(n, j) = \frac{n!}{(n+s_j)!} B_{n+r+s_j, j+r}^{(r)} \left(\overline{0, \dots, 0}, a_{s+1}, a_{s+2}, \dots; 1, f_1, f_2, \dots \right),$$

ce qui achève la preuve. □

Maintenant, en exploitant la formule de Melzak nous présentons de nouvelles expressions explicites des polynômes potentiels généralisés.

Théorème 37. Soient α un nombre réel et p, q, r, n, s des entiers non négatifs, tel que $s \geq 1, p \geq n$. Alors, on a

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha)}(r) &= (\alpha + q) \binom{\alpha + p + q}{p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{\alpha + q + j} \left(\frac{s!}{a_s} \right)^{j+q} \\ &\times \frac{n! (j+q)!}{(n+s(j+q))!} B_{n+r+s(j+q), j+q+r}^{(r)} \left(\overline{0, \dots, 0}, a_s, a_{s+1}, \dots; 1, f_1, f_2, \dots \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Les relations (3.1) et (3.4) prouvent que $P_n^{(\alpha)}(x)$ est un polynôme en α de degré $\leq n$. Ceci nous permet de poser dans la formule de Melzak (3.3), $g(x + \alpha) = F_n^{(x+\alpha)}(r)$ afin d'obtenir

$$P_n^{(\alpha-q)}(r) = \alpha \binom{\alpha+p}{p} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{P_n^{(-j-q)}(r)}{\alpha+j}.$$

De la relation (3.6), on a

$$P_n^{(-j+q)}(r) = \left(\frac{s!}{a_s}\right)^{(j+q)} \frac{n!(j+q)!}{(n+s(j+q))!} \\ \times B_{n+r+s(j+q),j+q+r}^{(r)} \left(\frac{s-1}{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots}; 1, f_1, f_2, \dots \right),$$

ce qui donne

$$P_n^{(\alpha-q)}(r) = \alpha \binom{\alpha+p}{p} \sum_{j=0}^p \frac{(-1)^j}{\alpha+j} \binom{p}{j} \left(\frac{s!}{a_s}\right)^{(j+q)} \frac{n!(j+q)!}{(n+s(j+q))!} \\ \times B_{n+r+s(j+q),j+q+r}^{(r)} \left(\frac{s-1}{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots}; 1, f_1, f_2, \dots \right).$$

Pour terminer, il suffit de remplacer α par $\alpha + q$. □

Remarque 38. Si on pose $h(t) = t$ et $f_n(x) = x^n$ dans le Théorème 37, on obtient le Théorème de Cenkci [9].

Remarque 39. Lorsqu'on pose $s = 1$ et $q = 0$ dans le Théorème 37, on obtient

$$P_n^{(\alpha)}(r) = \alpha \binom{\alpha+p}{p} \binom{n+p}{p}^{-1} \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!(\alpha+j)} \left(-\frac{1}{a_1}\right)^j \times \\ \binom{n+p}{n+j} B_{n+r+j, j+r}^{(r)}(a_1, a_2, \dots; 1, f_1, f_2, \dots).$$

et pour $\alpha = n + 1$, $p = n$, nous avons

$$P_n^{(n+1)}(r) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{a_1}\right)^j \binom{2n+1}{n+1+j} B_{n+r+j, j+r}^{(r)}(a_1, a_2, \dots; 1, f_1, f_2, \dots).$$

Théorème 40. Soient s, r, p, n, k des entiers non négatifs, tel que, $r \geq p \geq n$ et $s \geq 1$. Alors, nous avons

$$P_n^{(-k)}(y) = (y-r) \binom{y+p-r}{p} \frac{n!k!}{(n+sk)!} \left(\frac{s!}{a_s}\right)^k \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{(-1)^i}{y-r+i} \\ \times B_{n+sk+r-i, k+r-i}^{(r-i)} \left(\overline{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots}; 1, f_1, f_2, \dots \right),$$

$$P_n^{(-k)}(y) = \left(\frac{s!}{a_s}\right)^k \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{j!k!}{(j+sk)!} f_{n-j}(y) B_{j+sk, k} \left(\overline{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots} \right).$$

Démonstration. En posant $g(x) = P_n^{(-k)}(x)$ dans la relation (3.3), nous obtenons

$$P_n^{(-k)}(r+y) = y \binom{y+p}{p} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{i} \frac{P_n^{(-k)}(r-i)}{y+i}.$$

En utilisant la relation (3.6), l'identité précédente devient

$$F_n^{(-k)}(r+y) = y \binom{y+p}{p} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{(-1)^i}{y+i} \left(\frac{s!}{a_s}\right)^k \frac{n!k!}{(n+sk)!} \\ \times B_{n+sk+r-i, k+r-i}^{(r-i)} \left(\overline{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots}; 1, f_1, f_2, \dots \right),$$

ce qui induit à l'identité désirée après avoir remplacé y par $y-r$.

La deuxième expression de $P_n^{(-k)}(y)$ s'obtient facilement en combinant les relations (3.5) et (3.6). □

Théorème 41. Soient α un nombre réel et s, r, p, q, n, k des entiers non négatifs, tel que, $r \geq p \geq n, q \geq n$ et $s \geq 1$. Nous avons

$$P_n^{(\alpha)}(y) = (\alpha+k) \binom{\alpha+q+k}{q} (y-r) \binom{y+p-r}{p} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \binom{p}{i} \binom{q}{j} \\ \times \frac{(-1)^{i+j}}{(y-r+i)(\alpha+k+j)} \left(\frac{s!}{a_s}\right)^{k+j} \frac{n!(j+k)!}{(n+s(j+k))!} \\ \times B_{n+sk+r+s_j-i, k+r+j-i}^{(r-i)} \left(\overline{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots}; 1, f_1, f_2, \dots \right).$$

$$P_n^{(\alpha)}(y) = n! (\alpha+k) \binom{\alpha+q+k}{q} \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^n \binom{q}{i} \frac{(-1)^i}{\alpha+i+k} \left(\frac{s!}{a_s}\right)^{i+k} \times \\ \frac{(i+k)!}{(n-j)!(j+s(i+k))!} f_{n-j}(y-r) B_{j+s(i+k), i+k} \left(\overline{0, \dots, 0, a_s, a_{s+1}, \dots} \right).$$

Démonstration. On pose dans l'identité (3.3), $g(\alpha) = P_n^{(\alpha)}(r+y)$. Nous obtenons, alors

$$P_n^{(\alpha-k)}(r+y) = \alpha \binom{\alpha+q}{q} \sum_{j=0}^q (-1)^j \binom{q}{j} \frac{P_n^{(-j-k)}(r+y)}{\alpha+j}.$$

Maintenant, il suffit de remplacer $P_n^{(-j-k)}(r+y)$ par les deux expressions présenter dans le Théorème 40 et en échangeant y par $y-r$ et α par $\alpha+k$. □

4 Applications

Les résultats développés dans la section précédente, conduisent immédiatement à des applications intéressantes, nous donnons deux exemples, l'un sur les polynômes de Narumi et l'autre sur les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce.

Exemple 42. Les polynômes de Narumi notés $N_n^{(\alpha)}(x)$, ont été introduit par Narumi, sont définis par la fonction génératrice susdite dans les articles [8, p. 37], [34, 4.4] et [31], par

$$\sum_{n \geq 0} N_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{\ln(1+t)} \right)^\alpha (1+t)^x.$$

Rappelons que $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^2$ représente le nombre de permutations de n éléments en k cycles de tailles ≥ 2 , tels que les r premiers éléments sont dans différents cycles.

Soient

$$F(t) = h(t) = -\ln(1-t),$$

sachant que

$$-\ln(1-t) = \sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{t^n}{n!}, \quad \text{alors, } s = 1,$$

de plus

$$\exp(xh(t)) = \sum_{n \geq 0} x^n \frac{t^n}{n!}, \quad \text{alors, } f_n(x) = x^n,$$

en remplaçant dans l'identité (3.4), on obtient

$$P_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n N_n^{(\alpha)}(-x).$$

Application du Théorème 36

Soient α un nombre réel et r, k deux entiers non négatifs, on décroche du Théorème 36 les relations suivantes

$$N_n^{(-k)}(-r) = (-1)^n \binom{n+k}{k}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} n+r+k \\ r+k \end{smallmatrix} \right]_r,$$

et

$$N_n^{(\alpha)}(-r) = \sum_{j=0}^n (-1)^n \frac{n!}{(n+j)!} \left[\begin{matrix} n+r+j \\ r+j \end{matrix} \right]_r^{(2)} (-\alpha)^j.$$

Application du Théorème 37

Soient $r, q, p \in \mathbb{N}$, tel que $r \geq p \geq n$, alors on obtient du Théorème 37 les relations suivantes

$$\begin{aligned} N_n^{(\alpha)}(-r) &= (\alpha + q) \binom{\alpha + p + q}{p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^{n+j}}{\alpha + q + j} \binom{n + q + j}{q + j}^{-1} \\ &\quad \times \left[\begin{matrix} n + r + q + j \\ r + q + j \end{matrix} \right]_r. \end{aligned}$$

Application du Théorème 40

Soient $r, p \in \mathbb{N}$ et $r \geq p \geq n$, il en résulte du Théorème 40 les expressions suivantes

$$\begin{aligned} N_n^{(-k)}(-y) &= (y - r) \binom{y + p - r}{p} \binom{n + k}{k}^{-1} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{(-1)^{n+i}}{y - r + i} \\ &\quad \times \left[\begin{matrix} n + r + k - i \\ r + k - i \end{matrix} \right]_{r-i}, \\ N_n^{(-k)}(-y) &= \binom{n + k}{k}^{-1} \sum_{j=0}^n \binom{n + k}{j + k} \left[\begin{matrix} j + k \\ k \end{matrix} \right] y^{n-j}. \end{aligned}$$

Exemple 43. Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce notée $B_n^{(\alpha)}(x)$, (voir [36, 37, 40]) définis par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n \geq 0} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{\exp(t) - 1} \right)^\alpha \exp(xt).$$

Rappelons aussi que $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^2$ représente le nombre de partitions d'un l'ensemble à n en k sous ensembles de tailles ≥ 2 , tel que les r premiers éléments sont dans différents sous ensembles.

Soient

$$F(t) = \exp(t) - 1 \text{ et } h(t) = t,$$

sachant que,

$$\exp(t) - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!}, \quad \text{alors, } s = 1,$$

d'autant plus que,

$$\exp(xt) = \sum_{n \geq 0} x^n \frac{t^n}{n!}, \quad \text{d'ou, } f_n(x) = x^n,$$

en remplaçant dans l'identité (3.4), on obtient

$$P_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}(0)$$

Application du Théorème 36

Soient α un nombre réel et r, k deux entiers non négatifs, il en résulte du Théorème 36 les expressions suivantes

$$\begin{aligned} B_n^{(-k)}(r) &= \binom{n+k}{k}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+r+k \\ k+r \end{matrix} \right\}_r, \\ B_n^{(\alpha)}(r) &= \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n+j)!} \left\{ \begin{matrix} n+r+j \\ j+r \end{matrix} \right\}_r^{(2)} (-\alpha)^j. \end{aligned}$$

Application du Théorème 37

Soient $r, p, q \in \mathbb{N}$, tel que $r \geq p \geq n$, on obtient à partir du Théorème 37 les relations suivantes

$$B_n^{(\alpha)}(r) = (\alpha + q) \binom{\alpha + p + q}{p} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{\alpha + q + j} \frac{n! (j+q)!}{(n+j+q)!} \left\{ \begin{matrix} n+r+q+j \\ r+q+j \end{matrix} \right\}_r.$$

Application du Théorème 40

Soient $r, p \in \mathbb{N}$, tel que $r \geq p \geq n$, il en découle du Théorème 40 les expressions suivantes

$$\begin{aligned} B_n^{(-k)}(y) &= (y-r) \binom{y+p-r}{p} \binom{n+k}{k}^{-1} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{(-1)^i}{y-r+i} \left\{ \begin{matrix} n+r+k-i \\ r+k-i \end{matrix} \right\}_{r-i}, \\ B_n^{(-k)}(y) &= \binom{n+k}{k}^{-1} \sum_{j=0}^n \binom{n+k}{j+k} \left\{ \begin{matrix} k+j \\ k \end{matrix} \right\} y^{n-j}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

LES NOMBRES R - WHITNEY ET LES VALEURS AUX POINTS RATIONNELS D'UNE CLASSE DE POLYNÔMES

"Il n'est pas nécessaire qu'un problème de maths ait des applications pratiques pour qu'il soit intéressant et il peut être très agréable pour l'esprit d'essayer de résoudre des questions apparemment futiles."

Axel THUE

Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons une série de résultats relatifs aux nombres r -Whitney et les valeurs (aux points rationnels) de quelques polynômes de type Appell. Nous montrons à travers ces résultats qu'il est possible, en mettant en exergue toutes les combinaisons possible entre les nombres r -whitney et une certaine classe de polynômes (aux points rationnels), d'engendrer quelques identités.

1 Les nombres r -Whitney

Les nombres r -Whitney ont été introduits par Mëzo [21] et sont divisés en deux espèces :

Definition 44. Les nombres r -Whitney de première espèce, notés $w_{m,r}(n, k)$, sont définis par

$$m^n(x)_n = \sum_{n \geq 0} w_{m,r}(n, k) (mx + r)^k, \quad r, m \in \mathbb{N}.$$

Où les $w_{m,r}(n, k)$ représentent les coefficients du polynôme $m^n(x)_n$ dans la base $\{1, (mx + r), (mx + r)^2, \dots, (mx + r)^n\}$.

Relation de récurrence

Les nombres r -Whitney de première espèce satisfont la relation de récurrence suivante

$$w_{m,r}(n, k) = w_{m,r}(n - 1, k - 1) + (r + (n - 1)m) w_{m,r}(n - 1, k), \quad r, m \in \mathbb{N}.$$

Fonction génératrice exponentielle

Les nombres $w_{m,r}(n, k)$ ont pour fonction génératrice exponentielle l'expression ci-dessous

$$\sum_{n \geq k} w_{m,r}(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\ln(1 + mt)}{m} \right)^k (1 + mt)^{-\frac{r}{m}}, \quad r, m \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Definition 45. Les nombres r -Whitney de second espèce, notés $W_{m,r}(n, k)$ sont définis par

$$(mx + r)^n = \sum_{n \geq 0} m^k W_{m,r}(n, k) (x)_k, \quad r, m \in \mathbb{N},$$

où les $W_{m,r}(n, k)$ représentent les coefficients du polynôme $(mx + r)^n$ dans la base $\{1, x, x(x - 1), \dots, (x)_n\}$.

Relation de récurrence

La relation de recurrence triangulaire des nombres r -Whitney de second espèce est donnée par

$$W_{m,r}(n, k) = W_{m,r}(n-1, k-1) + (r+km)W_{m,r}(n-1, k), \quad r, m \in \mathbb{N}.$$

Fonction génératrice

Ces nombres ont pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq k} W_{m,r}(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\exp(mt) - 1}{m} \right)^k \exp(rt), \quad r, m \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Remarque 46. Pour $m = 1$, on obtient les relations suivantes

$$w_{1,r}(n, k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r,$$

$$W_{1,r}(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r.$$

Pour plus de détails concernant ces nombres, le lecteur peut consulter les articles [3, 7, 10, 14, 21].

2 Nombres r -Whitney et valeurs rationnelles d'un polynôme

Appelons qu'une suite de polynômes $(P_n(x))$ est de type Appell si

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = f(t) \exp(xh(t)).$$

Dans ce paragraphe, on essaye d'évaluer certaines classes de polynômes de type Appell aux points rationnels à l'aide des nombres r -Whitney.

Théorème 47. Soient r, m deux entiers non négatifs, avec $m \neq 0$ et $(P_n(x))$ une suite de polynômes, tel que

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = G(t) \exp(xt) \quad \text{avec} \quad G(t) = \sum_{n \geq 0} P_n(0) \frac{t^n}{n!}.$$

Alors, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, et $P_n(0) = \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, on obtient

$$P_n \left(\varepsilon \frac{r}{m} \right) = \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{W_{m,r}(n, k)}{m^{n-k}}.$$

Démonstration. La fonction génératrice de la suite de polynômes $(P_n(x))$ permet d'écrire l'identité suivante

$$P_n\left(\varepsilon \frac{r}{m}\right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\varepsilon \frac{r}{m}\right)^{n-j} P_j(0) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \varepsilon^n \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left(\frac{r}{m}\right)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (4.3)$$

En posant

$$C(n, k) := \varepsilon^n \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left(\frac{r}{m}\right)^{n-j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Il s'ensuit que la fonction génératrice exponentielle de $C(n, k)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} C(n, k) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{j \geq k} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \frac{(\varepsilon t)^j}{j!} \sum_{n \geq j} \binom{n}{j} \left(\frac{r}{m}\right)^{n-j} \frac{(\varepsilon t)^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \frac{m^k}{k!} \left(\frac{\exp\left(m \frac{\varepsilon t}{m}\right) - 1}{m} \right)^k \exp\left(r \frac{\varepsilon t}{m}\right) \\ &= m^k \sum_{n \geq k} W_{m,r}(n, k) \frac{\left(\frac{\varepsilon t}{m}\right)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$C(n, k) = \varepsilon^n \frac{W_{m,r}(n, k)}{m^{n-k}}$$

En remplaçant dans l'identité (4.3), on obtient

$$P_n\left(\varepsilon \frac{r}{m}\right) = \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{W_{m,r}(n, k)}{m^{n-k}}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Remarque 48. Sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 47, si $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et

$$P_n(0) = \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \left\{ \begin{matrix} n+s \\ k+s \\ s \end{matrix} \right\}.$$

Nous obtenons

$$P_n\left(\varepsilon \frac{r}{m}\right) = \varepsilon^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{W_{m,r+s}(n, k)}{m^{n-k}}.$$

Théorème 49. Soient r, m deux entiers non négatifs, avec $m \neq 0$ et $(Q_n(x))$ une suite de polynômes, tel que

$$\sum_{n \geq 0} Q_n(x) \frac{t^n}{n!} = H(t) (1+t)^{\varepsilon x} \quad \text{avec } \varepsilon \in \{-1, 1\} \quad \text{et } H(t) = \sum_{n \geq 0} Q_n(0) \frac{t^n}{n!}.$$

Alors, si $Q_n(0) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \beta_k \{n\}_k$, nous obtenons

$$Q_n\left(-\varepsilon \frac{r}{m}\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k \frac{w_{m,r}(n, k)}{m^{n-k}}.$$

Démonstration. La fonction génératrice de la suite de polynômes $(Q_n(x))$ permet d'obtenir

$$Q_n\left(-\varepsilon \frac{r}{m}\right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(-\frac{r}{m}\right)_{n-j} Q_j(0) = \sum_{k=0}^n \beta_k \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (-1)^j \left(-\frac{r}{m}\right)_{n-j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

En posant

$$D(n, k) := \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (-1)^j \left(-\frac{r}{m}\right)_{n-j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix},$$

la fonction génératrice de $D(n, k)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D(n, k) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{j \geq k} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \frac{(-t)^j}{j!} \sum_{n \geq j} \left(-\frac{r}{m}\right)_{n-j} \frac{t^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \frac{1}{k!} (-\ln(1+t))^k (1+t)^{-\frac{r}{m}} \\ &= (-1)^k \frac{m^k}{k!} \left(\frac{\ln\left(1 + m\left(\frac{t}{m}\right)\right)}{m^k} \right)^k \left(1 + m\left(\frac{t}{m}\right)\right)^{-\frac{r}{m}} \\ &= (-1)^k m^k \sum_{n \geq k} w_{m,r}(n, k) \frac{\left(\frac{t}{m}\right)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$D(n, k) = (-1)^k \frac{w_{m,r}(n, k)}{m^{n-k}}$$

En remplaçant dans l'Identité (4.4), on obtient

$$Q_n\left(-\frac{r}{m}\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k \frac{w_{m,r}(n, k)}{m^{n-k}},$$

comme il fallait le prouver, le théorème est démontré. □

3 Application aux polynômes $\mathbb{B}_n^{(k)}(x)$, $\mathbb{C}_n^{(k)}(x)$, $\widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)}(x)$

Les polynômes poly-Bernoulli $\mathbb{B}_n^{(k)}(x)$, les polynômes poly-Cauchy de première espèce $\mathbb{C}_n^{(k)}(x)$ ainsi que les polynômes poly-Cauchy de seconde espèce $\widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)}(x)$ sont caractérisés par les fonctions génératrices exponentielles suivantes

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{B}_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{\exp(xt)}{1 - \exp(-t)} \text{Li}_k(1 - \exp(-t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.5)$$

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{C}_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1+t)^x} \text{Lif}_k(\ln(1+t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.6)$$

$$\sum_{n \geq 0} \widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = (1+t)^x \text{Lif}_k(-\ln(1+t)), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Sachant que

$$\mathbb{B}_n^{(k)} := \mathbb{B}_n^{(k)}(0), \quad \mathbb{C}_n^{(k)} := \mathbb{C}_n^{(k)}(0), \quad \widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)} := \widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)}(0),$$

et que

$$\text{Li}_k(z) := \sum_{j \geq 0} \frac{z^j}{(j+1)^k}, \quad \text{Lif}_k(z) := \sum_{j \geq 0} \frac{z^j}{j!(j+1)^k},$$

sont, respectivement, la fonction polylogarithme d'ordre k et la fonction polylogarithme factorielle d'ordre k .

D'autant plus que

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_n^{(k)} &= (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j j!}{(j+1)^k} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \mathbb{B}_n^{(-k)} &= \sum_{j=0}^{\min(n,k)} (j!)^2 \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{C}_n^{(k)} &= (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(j+1)^k} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)} &= (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j+1)^k} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les identités ci-dessus permettent d'évaluer ces polynômes aux points rationnels, comme suit

Corollaire 50. Soient r, m deux entiers positifs, avec $m \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_n^{(k)} \left(\frac{r}{m} \right) &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j+1)^k} \frac{w_{m,r}(n, j)}{m^{n-j}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)} \left(-\frac{r}{m} \right) &= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(j+1)^k} \frac{w_{m,r}(n, j)}{m^{n-j}} \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \mathbb{B}_n^{(k)} \left(-\frac{r}{m} \right) &= (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j j! W_{m,r}(n, j)}{(j+1)^k m^{n-j}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \mathbb{B}_n^{(-k)} \left(\frac{r}{m} \right) &= \sum_{j=0}^{\min(n,k)} (j!)^2 \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \frac{W_{m,r}(n+1, j+1)}{m^{n-j}}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Démonstration. On commence par démontrer la première identité du corollaire.

Pour y remédier, nous utilisons les fonctions génératrices (4.1), (4.6) ainsi que les changements de variables ($t = mt$) et ($x = \frac{-r}{m}$), pour obtenir l'expression suivante

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{C}_n^{(k)} \left(\frac{r}{m} \right) \frac{(mt)^n}{n!} = \frac{1}{(1+mt)^{r/m}} \sum_{j \geq 0} \frac{(\ln(1+mt))^j}{j! (j+1)^k}$$

Par de simple calcul, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \mathbb{C}_n^{(k)} \left(\frac{r}{m} \right) \frac{(mt)^n}{n!} &= \sum_{j \geq 0} \frac{m^j}{(j+1)^k} \left[\frac{1}{j!} \left(\frac{\ln(1+mt)}{m} \right)^j (1+mt)^{-\frac{r}{m}} \right] \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{m^j}{(j+1)^k} \sum_{n \geq k} w_{m,r}(n, j) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{m^j}{(j+1)^k} w_{m,r}(n, j). \end{aligned}$$

Par identification, il en résulte que

$$\mathbb{C}_n^{(k)} \left(\frac{r}{m} \right) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j+1)^k} \frac{w_{m,r}(n, j)}{m^{n-j}}.$$

Ce qui achève la démonstration de la première identité.

Pour la deuxième identité, nous utilisons les fonctions génératrices (4.1), (4.7) et les changements de variables ($t = mt$) et ($x = \frac{-r}{m}$), on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)} \left(-\frac{r}{m}\right) \frac{(mt)^n}{n!} &= (1+mt)^{-r/m} \sum_{j \geq 0} \frac{(-\ln(1+mt))^j}{j!(j+1)^k} \\
 &= \sum_{j \geq 0} \frac{(-m)^j}{(j+1)^k} \left[\frac{1}{j!} \left(\frac{\ln(1+mt)}{m}\right)^j (1+mt)^{-\frac{r}{m}} \right] \\
 &= \sum_{j \geq 0} \frac{(-m)^j}{(j+1)^k} \sum_{n \geq k} w_{m,r}(n, j) \frac{t^n}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-m)^j}{(j+1)^k} w_{m,r}(n, j).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)} \left(-\frac{r}{m}\right) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(j+1)^k} \frac{w_{m,r}(n, j)}{m^{n-j}}.$$

Ce qui achève la démonstration.

Pour démontrer la troisième identité, nous utilisons les fonctions génératrices (4.2), (4.5) et les changements de variables ($t = mt$) et ($x = \frac{-r}{m}$), on a

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{B}_n^{(k)} \left(-\frac{r}{m}\right) \frac{(mt)^n}{n!} = \exp(-rt) \sum_{j \geq 0} \frac{(1 - \exp(-mt))^j}{(j+1)^k},$$

par de simple calcul, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \mathbb{B}_n^{(k)} \left(-\frac{r}{m}\right) \frac{(mt)^n}{n!} &= \sum_{j \geq 0} \frac{j! (-m)^j}{(j+1)^k} \left[\frac{1}{j!} \left(\frac{\exp(-mt) - 1}{m}\right)^j \exp(-rt) \right] \\
 &= \sum_{j \geq 0} \frac{j! (-m)^j}{(j+1)^k} \sum_{n \geq j} W_{m,r}(n, j) \frac{(-t)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{j! (-m)^j}{(j+1)^k} W_{m,r}(n, j).
 \end{aligned}$$

Par identification, il en résulte que

$$\mathbb{B}_n^{(k)} \left(-\frac{r}{m}\right) = (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j j! W_{m,r}(n, j)}{(j+1)^k m^{n-j}}.$$

Ce qui achève la démonstration de la troisième identité.

La démonstration de la quatrième identité se fait sous les mêmes hypothèses que la précédente. \square

4 Application aux polynômes $E_n^\alpha(x; \lambda)$ et $\mathcal{E}_n^\alpha(x; \lambda)$

Les polynômes d'Euler généralisés notés $E_n^\alpha(x; \lambda)$ sont définis par la fonction génératrice suivante

$$\sum_{n \geq 0} E_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1 - \lambda}{\exp(t) - \lambda} \right)^\alpha \exp(xt), \quad |t| < \pi, \lambda \neq 1,$$

et sont caractérisés par l'identité suivante

$$E_n^{(\alpha)}(0; \lambda) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(1 - \lambda)^j} (\alpha)_j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}.$$

Les polynômes d'Apostol Euler notés $\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x; \lambda)$ sont caractérisés par la fonction génératrice ci-dessus

$$\sum_{n \geq 0} \mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{\lambda \exp(t) + 1} \right)^\alpha \exp(xt), \quad |t| < |\ln(-\lambda)|.$$

Ces polynômes admettent la relation suivante

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(0; \lambda) = \left(\frac{2}{\lambda + 1} \right)^\alpha \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(\lambda + 1)^j} (\alpha)_j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}.$$

Pour plus de détails concernant ces nombres, le lecteur peut s'y référer aux articles suivants [20, 36].

A l'aide de ces identités, le Théorème 47 montre que

Corollaire 51. *Soient r, m deux entiers non négatifs, $m \neq 0$, nous avons*

$$E_n^{(\alpha)}\left(-\frac{r}{m}; \lambda\right) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(1 - \lambda)^j} (\alpha)_j \frac{W_{m,r}(n, j)}{m^{n-j}},$$

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}\left(-\frac{r}{m}; \lambda\right) = \left(\frac{2}{\lambda + 1} \right)^\alpha \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(\lambda + 1)^j} (\alpha)_j \frac{W_{m,r}(n, j)}{m^{n-j}}.$$

5 Application aux polynômes $B_n(x)$ et $b_n(x)$

Les polynômes de Bernoulli des deux espèces (notés $B_n(x)$, respectivement, $b_n(x)$) sont définis par les fonctions génératrices suivantes

$$\sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\exp(t) - 1} \exp(xt) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} b_n(x) t^n = \frac{t}{\ln(1+t)} (1+t)^x,$$

ainsi que par les relations suivantes ([15, p. 560] et [32])

$$B_n := B_n(0) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j j!}{j+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \quad \text{et} \quad b_n := b_n(0) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j+1} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right].$$

Ces identités vont nous permettre d'évaluer ces polynômes aux points rationnels, en appliquant le Théorème 47 et/ou le Théorème 49 pour avoir

Corollaire 52. *Soient $r, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, nous avons*

$$B_n\left(\frac{r}{m}\right) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j j! W_{m,r}(n, j)}{j+1 m^{n-j}} \quad \text{et} \quad b_n\left(-\frac{r}{m}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \frac{w_{m,r}(n, j)}{m^{n-j}}.$$

Remarque 53. *Pour $m = 1$, toutes les identités exposées dans les derniers corollaires deviennent :*

$$\mathbb{B}_n^{(k)}(-r) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j} j!}{(j+1)^k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathbb{B}_n^{(-k)}(r) = \sum_{j=0}^{\min(n,k)} (j!)^2 \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n+1+r \\ j+1+r \end{matrix} \right\}_r, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{C}_n^{(k)}(r) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{(j+1)^k} \left[\begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right]_r, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\widehat{\mathbb{C}}_n^{(k)}(-r) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^n}{(j+1)^k} \left[\begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right]_r, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$E_n^{(\alpha)}(-r; \lambda) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (\alpha)_j}{(1-\lambda)^j} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r,$$

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(-r; \lambda) = \left(\frac{2}{\lambda+1} \right)^\alpha \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (\alpha)_j}{(\lambda+1)^j} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r,$$

$$B_n(r) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j j!}{j+1} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r,$$

$$b_n(-r) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{j+1} \left[\begin{matrix} n+r \\ j+r \end{matrix} \right]_r.$$

CHAPITRE 5

QUELQUES IDENTITÉS VIA LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES

"Il n'y a pas des problèmes qu'on se pose, il y a des problèmes qui se posent. Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus."

Jules Henri POINCARÉ

Introduction

Soit f un polynôme de degré au plus d , alors il existe un polynôme P de degré au plus d , tel que

$$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{P(x)}{(1-x)^{d+1}}, \quad [38]. \quad (5.1)$$

Ce résultat découle du fait qu'on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} n^k x^n &= x^k \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= x^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) \\ &= x^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{k! x^k}{(1-x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

On sait que les polynômes de Bell à une seule variable admettent la formule de Dobinski [13] donnée par

$$B_n(x) = \exp(-x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} x^i, \quad (5.2)$$

où $B_n(x)$ désigne le polynôme de Bell [22].

1 Fonctions génératrices remarquables

Dans ce paragraphe, on expose le résultat principal du chapitre, il comporte deux simples identités sur les fonctions génératrices, la première identité exprime une fonction génératrice exponentielle généralisant la formule de Dobinski (5.2) et la deuxième exprime une fonction génératrice ordinaire comme une application de la formule (5.1). Ces deux identités présentent quelques applications qui aboutissent à de nouvelles identités.

Proposition 54. *Soient f et h deux séries entières, avec $f(0) = 1$. Nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} D_{t=0}^k (h(t)(f(t))^n) \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k D_{t=0}^k (h(t)(f(t)-1)^j) \frac{x^j}{j!},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D_{t=0}^k (h(t)(f(t))^n) x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k D_{t=0}^k (h(t)(f(t)-1)^j) x^j \\ &\quad \times (1-x)^{k-j}. \end{aligned}$$

Démonstration. Compte tenu des deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} h(t) \exp(xf(t)) &= \exp(x) h(t) \exp(x(f(t) - 1)), \\ \frac{h(t)}{1 - xf(t)} &= \frac{1}{1 - x} \frac{h(t)}{1 - \frac{x}{1-x}(f(t) - 1)}, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} h(t) (f(t))^n \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j \geq 0} h(t) (f(t) - 1)^j \frac{x^j}{j!}, \\ \sum_{n \geq 0} h(t) (f(t))^n x^n &= \frac{1}{1 - x} \sum_{j \geq 0} h(t) (f(t) - 1)^j \left(\frac{x}{1 - x} \right)^j. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D_{t=0}^k (h(t) (f(t))^n) \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j \geq 0} D_{t=0}^k (h(t) (f(t) - 1)^j) \frac{x^j}{j!}, \\ \sum_{n \geq 0} D_{t=0}^k (h(t) (f(t))^n) x^n &= \frac{1}{1 - x} \sum_{j \geq 0} D_{t=0}^k (h(t) (f(t) - 1)^j) \left(\frac{x}{1 - x} \right)^j. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons le résultat attendu. □

Pour obtenir d'autres expressions que celles de la proposition 54, on a été amené à utiliser les polynômes partiels de Bell (défini dans le premier chapitre), dans la mesure où, ils permettent de donner naissance à plusieurs identités sur certaines suites de nombres.

Corollaire 55. Soit (a_n) une suite de nombres réels non négatifs, avec $a_0 = 1$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n}^{-1} B_{n+k,n}(ia_{i-1}) \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j=0}^k B_{k,j}(a_i) x^j, \\ \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n}^{-1} B_{n+k,n}(ia_{i-1}) x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! B_{k,j}(a_i) x^j (1-x)^{k-j}. \end{aligned}$$

Démonstration. Lorsqu'on pose dans la Proposition 54, $h(t) = 1$ et $f(t) = 1 + \sum_{j \geq 1} a_j \frac{t^j}{j!}$,

on obtient

$$\sum_{n \geq 0} D_{t=0}^k (f(t))^n \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j \geq 0} D_{t=0}^k (f(t) - 1)^j \frac{x^j}{j!}, \quad (5.3)$$

$$\sum_{n \geq 0} D_{t=0}^k (f(t))^n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{j \geq 0} D_{t=0}^k (f(t) - 1)^j \left(\frac{x}{1-x} \right)^j. \quad (5.4)$$

On a, d'une part

$$\begin{aligned} (tf(t))^n &= \left(1 + \sum_{j \geq 0} a_j \frac{t^j}{j!}\right)^n = \left(\sum_{j \geq 0} a_j \frac{t^{j+1}}{j!}\right)^n, \\ &= \left(\sum_{i \geq 1} i a_{i-1} \frac{t^i}{i!}\right)^n = n! \sum_{j \geq n} B_{j,n}(i a_{i-1}) \frac{t^j}{j!}, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$f^n(t) = n! \sum_{j \geq n} B_{j,n}(i a_{i-1}) \frac{t^{j-n}}{j!},$$

par le changement de variable $j - n = k$, on obtient

$$\begin{aligned} f^n(t) &= n! \sum_{k \geq 0} B_{k+n,n}(i a_{i-1}) \frac{t^k}{(k+n)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{k}^{-1} B_{k+n,n}(i a_{i-1}) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$D_{t=0}^k (f(t))^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{k}^{-1} B_{k+n,n}(i a_{i-1}) \frac{t^k}{k!}. \quad (5.5)$$

D'autre part, on a

$$(f(t) - 1)^j = \left(\sum_{i \geq 1} a_i \frac{t^i}{i!}\right)^j = j! \sum_{k \geq j} B_{k,j}(a_i) \frac{t^k}{k!},$$

Donc

$$D_{t=0}^k (f(t) - 1)^j = D_{t=0}^k \left(\sum_{i \geq 1} a_i \frac{t^i}{i!}\right)^j = j! \sum_{k \geq j} B_{k,j}(a_i) \frac{t^k}{k!}. \quad (5.6)$$

Pour terminer, il faut juste remplacer les deux identités (5.5) et (5.6) dans les relations (5.3) et (5.4). \square

Corollaire 56. Soit (a_n) une suite de nombres réels non négatifs, avec $a_0 = 1$ et soit

$$u(n, k) = \binom{n+k}{n}^{-1} B_{n+k,n}(i a_{i-1}).$$

Alors, la suite $(u(n, k); n \geq 0)$ est convexe.

Démonstration. Nous avons d'après le Corollaire 55, la formule suivante

$$\sum_{n \geq 0} u(n, k) \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k B_{k,j}(a_i) x^j.$$

Alors

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\exp(x) \sum_{j=0}^k B_{k,j}(a_i) x^j \right) = \sum_{n \geq 0} (u(n, k) - 2u(n+1, k) + u(n+2, k)) \frac{x^n}{n!},$$

Donc, ceci prouve que

$$u(n+2, k) + u(n, k) - 2u(n+1, k) \geq 0.$$

Ainsi, la suite $(u(n, k); n \geq 0)$ est convexe. □

2 Quelques applications

Maintenant, nous allons appliquer les résultats précédent afin d'obtenir plusieurs identités remarquables.

2.1 Application aux suites de type binomial

Les suites de type binomial notées $g_n(\lambda)$ ont été introduites par Mihoubi[24] et sont définies par

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{an+\lambda} f_n(an+\lambda), & n \in \mathbb{N}^* \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

En appliquant la Proposition (54), on obtient les identités suivantes

Corollaire 57. *Soit $(f_n(\lambda))$ une suite de type binomial, tel que*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{n\lambda}{ak+n\lambda} f_k(ak+n\lambda) \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j=0}^k B_{k,j} \left(\frac{\lambda}{ai+\lambda} f_i(ai+\lambda) \right) x^j, \\ \sum_{n \geq 0} \frac{n\lambda}{ak+n\lambda} f_k(ak+n\lambda) x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! B_{k,j} \left(\frac{\lambda}{ai+\lambda} f_i(ai+\lambda) \right) \\ &\quad \times x^j (1-x)^{k-j}. \end{aligned}$$

Démonstration. Lorsqu'on pose dans la Proposition (54), $h(t) = 1$ et $f(t) = (F(t))^\lambda = 1 + \sum_{j \geq 0} f_j(\lambda) \frac{t^j}{j!}$, on a

$$\begin{aligned} D_{t=0}^k (F^{n\lambda}(t)) &= D_{t=0}^k \left(\left(\sum_{l \geq 1} f_l(\lambda) \right)^j \right), \\ f_k(n\lambda) &= j! B_{k,j}(f_i(\lambda)). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} f_k(n\lambda) \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k B_{k,j}(f_i(\lambda)) x^j,$$

$$\sum_{n \geq 0} f_k(n\lambda) x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! B_{k,j}(f_i(\lambda)) x^j (1-x)^{k-j}.$$

Maintenant, il suffit juste de remplacer la suite $(f_n(\lambda))$ par la suite de type binomial $g_k(\lambda) = \frac{\lambda}{ak+\lambda} f_k(ak+\lambda)$ afin d'obtenir les identités désirées. □

Exemple 58. Lorsqu'on pose $f_n(\lambda) = \lambda^n$ dans le Corollaire 57, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} n\lambda (ak+n\lambda)^{k-1} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k B_{k,j}((ai+\lambda)^{i-1}) (\lambda x)^j,$$

$$\sum_{n \geq 0} n\lambda (ak+n\lambda)^{k-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! B_{k,j}((ai+\lambda)^{i-1}) \times x^j (1-x)^{k-j}.$$

Exemple 59. Lorsqu'on pose $f_n(\lambda) = (\lambda)_n = n! \binom{\lambda}{n}$ dans le Corollaire 57, on obtient

$$k! \sum_{n \geq 0} \frac{n\lambda}{ak+n\lambda} \binom{ak+n\lambda}{k} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k B_{k,j} \left(\frac{\lambda}{ai+\lambda} \binom{ai+\lambda}{i} i! \right) x^j,$$

$$k! \sum_{n \geq 0} \frac{n\lambda}{ak+n\lambda} \binom{ak+n\lambda}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! B_{k,j} \left(\frac{\lambda}{ai+\lambda} \binom{ai+\lambda}{i} i! \right) \times x^j (1-x)^{k-j}.$$

2.2 Application aux nombres r -Lah

On sait que d'après la Proposition (13), les nombres r -Lah peuvent être écrits sous la forme suivante

$$\sum_{j=0}^k \left[\begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right]_r \frac{1}{x^j} = (-1)^k x^{k+2r} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{x^{2r}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

En appliquant la Proposition (54), il en résulte les expressions suivantes

Corollaire 60. Nous avons

$$\sum_{j=0}^k \left[\begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right]_r x^j = \frac{\exp(-x)}{x^{2r-1}} \frac{d^k}{dx^k} (x^{2r+k-1} \exp(x)),$$

$$\sum_{j=0}^k j! \left[\begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right]_r x^j (1-x)^{k-j} = (-1)^k \frac{(1-x)^{k+1}}{x^{2r-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{x^{2r+k-1}}{1-x} \right).$$

En particulier, pour $r = 0$, les nombres de Lah satisfont

$$\sum_{j=0}^k \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] x^j = x \exp(-x) \frac{d^k}{dx^k} (x^{k-1} \exp(x)),$$

$$\sum_{j=0}^k j! \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] x^j (1-x)^{k-j} = (-1)^k x (1-x)^{k+1} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{x^{k-1}}{1-x} \right).$$

Démonstration. Le résultat s'obtient en posant dans la Proposition 54 $f(t) = (1-t)^{-1}$ et $h(t) = (1-t)^{-2r}$, sachant que

$$\sum_{n \geq 0} (2r+n+k-1)^k \frac{x^n}{n!} = \frac{\exp(-x)}{x^{2r-1}} \frac{d^k}{dx^k} (x^{2r+k-1} \exp(x)),$$

$$\sum_{n \geq 0} (2r+n+k-1)^k x^n = \frac{1}{x^{2r-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{x^{2r+k-1}}{1-x} \right).$$

□

2.3 Application aux nombres m-tronqués Lah

A présent, nous appliquons le Corollaire 55 pour obtenir d'autres identités

Corollaire 61. *On a*

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n}^{-1} \left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]^{(m)\downarrow} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right]^{m\downarrow} x^j, \quad (5.7)$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n}^{-1} \left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]^{(m)\downarrow} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right]^{m\downarrow} x^j (1-x)^{k-j}.$$

Démonstration. Si on pose $a_i = i!$ tel que $i \leq m$. Alors, il en découle des polynômes partiels de Bell les expressions suivantes

$$B_{k+n,n}(ia_{i-1}) = B_{k+n,n}(1!, 2!, \dots, m!, 0, 0, \dots) = \left[\begin{matrix} k+n \\ n \end{matrix} \right]^{(m)\downarrow},$$

$$B_{k,j}(a_i) = B_{k,j}(1!, \dots, m!, 0, 0, \dots) = \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right]^{m\downarrow}.$$

Pour avoir le résultat attendu, il suffit juste de remplacer ses expressions dans le Corollaire 55.

□

Remarque 62. *Il en résulte de l'identité 5.7, la formule suivante*

$$\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]^{(m)\downarrow} = \frac{(n+k)!}{k!} \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \frac{1}{(n-j)!} \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right]^{m\downarrow}, \quad m \geq k.$$

2.4 Application aux nombres de Lah associés

En posant $f(t) = (1-t)^{-s}$ et $h(t) = 1$, et en vertu de la Proposition (54) on trouve les expressions suivantes

Corollaire 63. *Nous avons*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (sn)^{\bar{k}} \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j=0}^k L_s(k, j) x^j, \\ \sum_{n \geq 0} (sn)^{\bar{k}} x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k L_s(k, j) x^j (1-x)^{k-j}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

En particulier, pour $s = 1$, les nombres de Lah satisfont

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} n^{\bar{k}} \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j, \\ \sum_{n \geq 0} n^{\bar{k}} x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j (1-x)^{k-j}. \end{aligned}$$

Remarque 64. *On déduit de l'identité (5.8), l'expression suivante*

$$\sum_{j=0}^{\min(n,k)} \frac{n!}{(n-j)!} L_s(k, j) = (sn)^{\bar{k}}.$$

Corollaire 65. *On a*

$$\binom{n+k}{n}^{-1} B_{n+k,n} \left(i(s-i+1)^{i-1} \right) = (sn)^{\bar{k}}.$$

Démonstration. En posant $a_i = (s-i+1)^i$ dans le Corollaire (55), on trouve

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n}^{-1} B_{n+k,n} \left(i(s-i+1)^{i-1} \right) \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k L_s(k, j) x^j,$$

et par la Proposition (54), on a

$$\sum_{n \geq 0} (sn)^{\bar{k}} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k L_s(k, j) x^j.$$

Ce qui montre que

$$\sum_{n \geq 0} (sn)^{\bar{k}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n}^{-1} B_{n+k,n} \left(i(s-i+1)^{i-1} \right) \frac{x^n}{n!},$$

d'où le résultat. □

2.5 Application aux nombres r -Stirling de seconde espèce

En posant $f(t) = \exp(t)$ et $h(t) = \exp(rt)$, la Proposition (54), on obtient les identités suivantes

Corollaire 66. *Nous avons*

$$\sum_{n \geq 0} (n+r)^k \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j,$$

$$\sum_{n \geq 0} (n+r)^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j (1-x)^{k-j}.$$

2.6 Application aux nombres m -associés Stirling de second espèce

Les nombres m -associés Stirling de second espèce notés $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{m\uparrow}$ sont définis par la fonction génératrice suivante

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{m\uparrow} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i \geq m} \frac{x^i}{i!} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ces nombres comptent le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments ayant k sous ensembles non vides de taille $\geq m$.

Par application du Corollaire (55), on obtient les expressions suivantes

Corollaire 67. *On a*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{k! (m!)^n}{(k+nm)!} \left\{ \begin{matrix} k+nm \\ n \end{matrix} \right\}^{m\uparrow} x^n = \exp(x) \sum_{j=0}^k (m!)^j \frac{k!}{(k+jm)!} \left\{ \begin{matrix} k+jm \\ j \end{matrix} \right\}^{m+1\uparrow} x^j,$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{k! n! (m!)^n}{(k+nm)!} \left\{ \begin{matrix} k+nm \\ n \end{matrix} \right\}^{m\uparrow} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! (m!)^j \frac{k!}{(k+jm)!} \left\{ \begin{matrix} k+jm \\ j \end{matrix} \right\}^{m+1\uparrow} \times x^j (1-x)^{k-j}.$$

Démonstration. Du fait que $a_i = \frac{m!}{(i+1)(i+2)\dots(i+m)}$, nous permet d'obtenir pour la première identité

$$\begin{aligned}
 B_{k+n,n}(ia_{i-1}) &= B_{k+n,n} \left(\frac{m!}{(i+1)(i+2)\cdots(i+m-1)} \right) \\
 &= D_{t=0}^{k+n} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i \geq 1} \frac{m!}{(i+1)(i+2)\cdots(i+m-1)} \frac{t^i}{i!} \right)^n \\
 &= (m!)^n D_{t=0}^{k+n} \frac{1}{n!} \left(t^{-(m-1)} \sum_{i \geq 1} \frac{t^{i+m-1}}{(i+m-1)!} \right)^n \\
 &= (m!)^n D_{t=0}^{k+n} \frac{1}{n!} \left(t^{-(m-1)} \sum_{i \geq m} \frac{t^i}{i!} \right)^n \\
 &= (m!)^n D_{t=0}^{k+n} \left[\sum_{i \geq m} \left\{ \begin{matrix} i \\ n \end{matrix} \right\} \frac{t^{i-n(m-1)}}{i!} \right].
 \end{aligned}$$

Par un changement de variables $j = i - n(m-1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
 B_{k+n,n}(ia_{i-1}) &= (m!)^n D_{t=0}^{k+n} \left[\sum_{j \geq n} \frac{j!}{(j+n(m-1))!} \left\{ \begin{matrix} j+n(m-1) \\ n \end{matrix} \right\} \frac{t^j}{j!} \right] \\
 &= (m!)^n \frac{(k+n)!}{(k+nm)!} \left\{ \begin{matrix} k+nm \\ n \end{matrix} \right\}^{m\uparrow}.
 \end{aligned}$$

Quant à la deuxième identité, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 B_{k,j}(a_i) &= B_{k,j} \left(\frac{m!}{(i+1)(i+2)\cdots(i+m)} \right) \\
 &= D_{t=0}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i \geq 1} \frac{m!}{(i+1)(i+2)\cdots(i+m)} \frac{t^i}{i!} \right)^j \\
 &= (m!)^j D_{t=0}^k \frac{1}{j!} \left(t^{-m} \sum_{i \geq 1} \frac{t^{i+m}}{(i+m)!} \right)^j \\
 &= (m!)^j D_{t=0}^k \frac{1}{j!} \left(t^{-m} \sum_{i \geq m+1} \frac{t^i}{i!} \right)^j \\
 &= (m!)^j D_{t=0}^k \left[\sum_{l \geq (m+1)j} \left\{ \begin{matrix} l \\ j \end{matrix} \right\} \frac{t^{l-jm}}{l!} \right].
 \end{aligned}$$

Par un changement de variable $i = l - mj$, on obtient

$$\begin{aligned}
 B_{k,j}(a_i) &= (m!)^j D_{t=0}^k \left[\sum_{i \geq j} \frac{i!}{(i+jm)!} \left\{ \begin{matrix} i+jm \\ j \end{matrix} \right\} \frac{t^i}{i!} \right] \\
 &= (m!)^j \frac{k!}{(k+jm)!} \left\{ \begin{matrix} k+jm \\ j \end{matrix} \right\}^{m+1\uparrow}.
 \end{aligned}$$

En remplaçant les deux identités dans le Corollaire 55, nous obtenons

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k}^{-1} (m!)^n \frac{(k+n)!}{(k+nm)!} \left\{ \begin{matrix} k+nm \\ n \end{matrix} \right\}^{m\uparrow} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k (m!)^j \frac{k!}{(k+jm)!} \times \left\{ \begin{matrix} k+jm \\ j \end{matrix} \right\}^{m+1\uparrow} x^j, \quad (5.9)$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n}^{-1} (m!)^n \frac{(k+n)!}{(k+nm)!} \left\{ \begin{matrix} k+nm \\ n \end{matrix} \right\}^{m\uparrow} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! (m!)^j \frac{k!}{(k+jm)!} \times \left\{ \begin{matrix} k+jm \\ j \end{matrix} \right\}^{m+1\uparrow} x^j (1-x)^{k-j}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Remarque 68. L'identité (5.9) peut être exprimée sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{matrix} k+mn \\ n \end{matrix} \right\}^{m\uparrow} = \sum_{j=0}^n \frac{(k+mn)!}{(k+mj)!(n-j)!} \left\{ \begin{matrix} k+mj \\ j \end{matrix} \right\}^{(m+1)\uparrow}, \quad m \geq 1.$$

2.7 Application aux nombres r -Whitney de seconde espèce

En mettant $f(t) = \exp(mt)$ ainsi que $h(t) = \exp(rt)$ dans la Proposition (54), nous obtenons le résultat suivant

Corollaire 69. Nous avons

$$\sum_{n \geq 0} (mn+r)^k \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k W_{m,r}(k, j) \frac{(mx)^j}{j!},$$

$$\sum_{n \geq 0} (mn+r)^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k m^j W_{m,r}(k, j) x^j (1-x)^{k-j}.$$

2.8 Application aux nombres r -Whitney-Lah

Les nombres r -Whitney-Lah notés $L_{m,r}(n, k)$ (voir [39]) sont définis via la fonction génératrice suivante

$$\sum_{n \geq k} L_{m,r}(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (t(1-mt)^{-1})^k \left((1-mt)^{-\frac{2}{m}} \right)^r$$

Ces nombres satisfont la présente relation de récurrence

$$L_{m,r}(n, k) = L_{m,r}(n-1, k-1) + (2r + (n+k-1)m)L_{m,r}(n-1, k), \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad n \geq k,$$

et ont pour formule exacte l'expression ci-dessous

$$L_{m,r}(n, k) = \binom{n}{k} m^{n-k} \left(\frac{2r}{m} + n - 1 \right)^{\frac{n-k}{m}}.$$

Corollaire 70. *Nous avons*

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{2r}{m} + k - 1\right)^{k-j} x^j = \frac{\exp(-x)}{x^{\frac{2r}{m}-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{\frac{2r}{m}+k-1} \exp(x)\right),$$

$$\sum_{j=0}^k j! \binom{k}{j} \left(\frac{2r}{m} + k - 1\right)^{k-j} x^j (1-x)^{k-j} = \frac{(1-x)^{k+1}}{x^{\frac{2r}{m}-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{x^{\frac{2r}{m}+k-1}}{1-x}\right).$$

Démonstration. Il suffit de poser dans la Proposition (54), $f(t) = (1 - mt)^{-1}$ et $h(t) = (1 - mt)^{-\frac{2}{m}r}$. Sachant que

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2r}{m} + n + k - 1\right)^{\underline{k}} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{2r}{m} + k - 1\right)^{k-j} x^j, \quad (5.10)$$

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2r}{m} + n + k - 1\right)^{\underline{k}} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! \binom{k}{j} \left(\frac{2r}{m} + k - 1\right)^{k-j} x^j \times (1-x)^{k-j}. \quad (5.11)$$

D'autant plus que

$$\begin{aligned} \exp(x) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{2r}{m} + k - 1\right)^{k-j} x^j &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2r}{m} + n + k - 1\right)^{\underline{k}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{2r}{m}-1}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{\frac{2r}{m}+n+k-1}\right) \\ &= \frac{1}{x^{\frac{2r}{m}-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{\frac{2r}{m}+k-1} \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{x^{\frac{2r}{m}-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{\frac{2r}{m}+k-1} \exp(x)\right). \end{aligned}$$

Donc, l'identité (5.10) devient équivalente à

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{2r}{m} + k - 1\right)^{k-j} x^j = \frac{\exp(-x)}{x^{\frac{2r}{m}-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{\frac{2r}{m}+k-1} \exp(x)\right),$$

respectivement, l'identité (5.11) devient équivalente à

$$\sum_{j=0}^k j! \binom{k}{j} \left(\frac{2r}{m} + k - 1\right)^{k-j} x^j (1-x)^{k-j} = \frac{m^k (1-x)^{k+1}}{x^{\frac{2r}{m}-1}} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{x^{\frac{2r}{m}+k-1}}{1-x}\right).$$

Ainsi, on obtient le résultat désiré.

□

2.9 Application aux nombres de Bernoulli d'ordre supérieur

En utilisant la Proposition (54), il est possible d'obtenir des expressions via les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur, et sont présentés dans le corollaire suivant

Corollaire 71. *Nous avons*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_k^{(\alpha)}(n+y) \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_{k-j}^{(\alpha-j)}(y) x^j, \\ \sum_{n \geq 0} B_k^{(\alpha)}(n+y) x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k j! \binom{k}{j} B_{k-j}^{(\alpha-j)}(y) x^j (1-x)^{k-j}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remplacer dans la Proposition (54), $f(t)$ par $\exp(t)$ et $h(t)$ par $\left(\frac{t}{\exp(t)-1}\right)^\alpha \exp(yt)$. □

Il en résulte aussi du corollaire précédent d'autres expressions sur les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur

Corollaire 72. *Nous avons*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (B_k(n+r) - B_k(r)) \frac{x^n}{n!} &= x \exp(x) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{k}{j+1} \left\{ \begin{matrix} k-1+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j, \quad (5.12) \\ \sum_{n \geq 0} (B_k(n+r) - B_k(r)) x^n &= \frac{kx}{(1-x)^k} \sum_{j=0}^{k-1} j! \left\{ \begin{matrix} k-1+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j (1-x)^{k-1-j}. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons démontrer la première identité. Pour ce faire, on pose dans le Corollaire (71) $\alpha = 1$ et $y = r \in \mathbb{N}$. Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_k(n+r) \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_{k-j}^{-(j-1)}(r) x^j, \\ &= \exp(x) B_k(r) + \exp(x) \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} B_{k-j}^{-(j-1)}(r) x^j, \end{aligned}$$

et étant donné que $\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Alors, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} (B_k(n+r) - B_k(r)) \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} B_{k-j}^{-(j-1)}(r) x^j, \quad (5.13)$$

et en utilisant le fait que [30]

$$B_{k-j}^{-(j-1)}(r) = \binom{k-1}{j-1}^{-1} \left\{ \begin{matrix} k-1+r \\ j-1+r \end{matrix} \right\}_r.$$

Alors, il en induit de la formule (5.13) que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (B_k(n+r) - B_k(r)) \frac{x^n}{n!} &= x \exp(x) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j+1} B_{k-1-j}^{-j}(r) x^j, \\ &= x \exp(x) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j+1} \binom{k-1}{j}^{-1} \left\{ \begin{matrix} k-1+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j. \end{aligned}$$

Au final, on obtient l'expression suivante

$$\sum_{n \geq 0} (B_k(n+r) - B_k(r)) \frac{x^n}{n!} = x \exp(x) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{k}{j+1} \left\{ \begin{matrix} k-1+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r x^j.$$

La démonstration de la second identité se fait de la même manière que la première.

□

Remarque 73. Il en résulte de l'identité (5.12), l'expression suivante

$$B_{k+1}(n+r) - B_{k+1}(r) = (k+1) \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{j} \frac{j!}{j+1} \left\{ \begin{matrix} k+r \\ j+r \end{matrix} \right\}_r.$$

2.10 Application aux polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre, notés $L_n^{(\alpha)}(x)$ [11], sont définis par la fonction génératrice ordinaire suivante

$$\sum_{n \geq 0} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1-t)^{-1-\alpha} \exp \frac{tx}{t-1}.$$

En appliquant la Proposition 54, et en posant $f(t) = 1-t$ et $h(t) = (1-t)^{-1-\alpha} \exp \left(\frac{ty}{t-1} \right)$, on obtient les expressions présentées ci-dessous

Corollaire 74. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} L_k^{(\alpha-n)}(y) \frac{x^n}{n!} &= k! \exp(x) \sum_{j=0}^k L_j^{(\alpha)}(y) \frac{(-x)^j}{(j!)^2}, \\ \sum_{n \geq 0} L_k^{(\alpha-n)}(y) x^n &= \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j L_j^{(\alpha)}(y)}{j!} x^j (1-x)^{k-j}. \end{aligned}$$

2.11 Application aux polynômes de Narumi

Les polynômes de Narumi ont pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} N_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{\ln(1+t)} \right)^\alpha (1+t)^x.$$

En appliquant la Proposition 54, on obtient les identités suivantes

Corollaire 75. *On a*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} N_n^{(\alpha)}(y+n) \frac{x^n}{n!} &= \exp(x) \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} N_{k-j}^{(\alpha)}(y) \frac{x^j}{j!}, \\ \sum_{n \geq 0} N_n^{(\alpha)}(y+n) x^n &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} N_{k-j}^{(\alpha)}(y) x^j (1-x)^{k-j}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit juste de poser $f(t) = 1+t$ et $h(t) = \left(\frac{t}{\ln(1+t)} \right)^\alpha (1+t)^y$ dans la Proposition 54 pour avoir le résultat désiré.

□

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce manuscrit est un apport combinatoire pour une classe de nombres et de polynômes traitant certains problèmes de la combinatoire. Il porte aussi sur une étude combinatoire et/ou analytique de cette classe et son application à d'autres nombres et aux différents types de polynômes.

A ce titre, nous avons contribué à l'étude des nombres r -Lah, en apportant de nouvelles propriétés. En suite, nous avons proposé une extension de ces nombres intitulée "les nombres s -dégénéré r -Lah" sur laquelle notre intérêt s'est porté. Nous avons présenté de manière analytiques plusieurs identités. Aussi nous avons établi par une approche purement combinatoire diverses relations de récurrence.

En se basant sur de vieux résultats cités par Howard [18] et Cenkci [9], nous avons pu généraliser les polynômes potentiels en les associant avec les polynômes partiels r -Bell. En exploitant la formule de Melzak, nous avons obtenu de nouvelles identités. Pour finir, nous avons appliqué les différents résultats obtenus aux polynômes de Narumi et de Bernoulli d'ordre supérieur.

Toujours dans le but d'apporter de nouveaux résultats, nous avons été amenés à l'étude que se soit des nombres r -Whitney et les valeurs (aux points rationnels) de quelques polynômes de type Appell, ou bien, via les fonctions génératrices. Ces études, entre autres, ont permis d'obtenir plusieurs applications sur certains polynômes et suites de nombres.

Les nombreux résultats obtenus lors de la réalisation de ce travail permettent d'avantage à la contribution de l'enrichissement du domaine de la combinatoire.

Néanmoins, il reste beaucoup de propriétés à en tirer et nous espérons que les outils présentés dans ce manuscrit facilitent leurs extractions.

Parmi les travaux qui peuvent présenter des perspectives et qu'on souhaite les aborder pour l'avenir on y trouve :

- Etude de plus de propriétés sur des cas particuliers des polynômes partiels r -Bell, telles que :
 - Les nombres s -dégénérés r -Lah.
 - Les nombres r -Lah tronqués.
 - Les nombres r -Stirling des deux espèces.

- Etude élargie sur les polynômes de type Appell.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. C. Ahuja, E. A. Enneking. "Convolution of Independent Left-Truncated Negative Binomial Variables and Limiting Distributions." *Ann. Inst. Statist. Math.* 26 (1974) :265-70.
- [2] J. C. Ahuja, E. A. Enneking, Concavity property and a recurrence relation for associated Lah numbers. *The Fibonacci Quarterly* 17 (1979), 158–61.
- [3] M. Benoumhani, On Whitney numbers of Dowling lattices, *Discrete Math*, 159 (1996) 13-33.
- [4] H. Belbachir, A. Belkhir, Cross recurrence relations for the r -Lah numbers. *Ars Combin.* Vol. 110 July (2013), 199-203.
- [5] H. Belbachir, I. E. Bousbaa, Combinatorial identities for the r -Lah numbers. *Ars Combin.*
- [6] E. T. Bell, Exponential polynomials. *Ann. Math.* 35 (1934), 258-277.
- [7] A. Z. Broder, The r -Stirling numbers, *Discrete Math*, 49 (1984) 241–259.
- [8] Boas P. Ralph, R. Buck Creighton, Polynomial expansions of analytic functions, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Neue Folge, 19, Berlin, New York 1958.
- [9] M. Cenkci, An explicit formula for generalized potential polynomials and its applications. *Discrete Math.*, 309 (2009) 1498–1510.
- [10] G.-S. Cheon, J.-H. Jung, The r -Whitney numbers of Dowling lattices, *Discrete Math.*, 312 (15) (2012) 2337–2348.
- [11] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, 1974.
- [12] S. Daboul, J. Mangaldan, M. Spivey, P. Taylor, The Lah Numbers and the n th Derivative of $e^{1/x}$.
- [13] Dobinski, G. "Summierung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ " *Grunert Archiv (Arch. Math. Phys.)* 61, 333-336, 1877.
- [14] T.A. Dowling, A class of gemometric lattices bases on finite groups, *J. Combin. Theory Ser. B*, 14 (1973) 61–86.

- [15] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete mathematics—A foundation for computer science*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [16] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Ploya, *Inequalities* (Cambridge : The University Press, 1952).
- [17] B. Harris, L. Schoenfeld, The Number of Idempotent Elements in Symmetric Semigroups, *Journal of Combinatorial Theory* 3, 122-135 (1967)
- [18] F. T. Howard, A theorem relating potential and bell polynomials. *Discrete Math.*, 39 (1982) 129–143.
- [19] I. Lah, Eine neue art von zahlen, ihre eigenschaften und anwendung in der mathematischen statistik, *Mitteilungsbl, Math. Statist.* 7 (1955), 203–212.
- [20] Q.-M. Luo, Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions, *Taiwanese J. Math.* 10 (2006), 917–925.
- [21] I. Mezõ, A new formula for the Bernoulli polynomials, *Results Math.*, 58 (2010) 329–335.
- [22] M. Mihoubi, Bell polynomials and binomial type sequences. *Discrete Math.*, 308 (2008) 2450–2459.
- [23] M. Mihoubi, M. S. Maamra, The (r_1, \dots, r_p) , Bell polynomials, *arXiv*, (2012).
- [24] M. Mihoubi, M. Rahmani, The partial r -Bell polynomials, *arXiv* (2013). Available electronically at <http://arxiv.org/abs/1308.0863v1>.
- [25] M. Mihoubi, **L. Reggane**, The r -Lah numbers and their restrictions. *DIMA-COS'12. (november, 2012)*.
- [26] M. Mihoubi, **L. Reggane**, The r -Lah numbers and their restrictions. *RAMA 8. (november, 2012)*.
- [27] M. Mihoubi, **L. Reggane**, The s -degenerate r -Lah numbers. *Ars Combin. Vol. 120 April (2015) 333–340*.
- [28] M. Mihoubi, **L. Reggane**, The r -Whitney numbers on the values at rational numbers of some polynomials *JLS'2015. (june, 2015)*.
- [29] M. Mihoubi and M. Tiachachat, Some applications of the r -Whitney numbers, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 352 (2014), 965–969.
- [30] M. Mihoubi and M. Tiachachat, The values of the high order Bernoulli polynomials at integers and the r -Stirling numbers, *arXiv*, (2014).
- [31] S. Narumi, On a power series having only a finite number of algebraic logarithmic singularities on its circle of convergence. *Tohoku Mathematical Journal* 30 (1929) 185–201.
- [32] G. Nemes, An asymptotic expansion for the Bernoulli numbers of the second kind, *J. Integer Seq*, 14 (2011) Article 11.4.8.
- [33] G. Nyul, G. Racz, The r -Lah numbers, *Discrete Math.*, 2014.
- [34] S. Roman, *The umbral calculus*. Pure and Applied Mathematics 111, London : Academic Press Inc. 1984.

-
- [35] H. M. Srivastava and J. Choi, *Zeta and q -Zeta Functions and Associated Series and Integrals*, First edition 2012.
- [36] H. M. Srivastava, Á. Pintér, Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. *Appl. Math. Lett.* 17 (4) (2004) 375–380.
- [37] H. M. Srivastava, An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* 130 (1988) 509-513.
- [38] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [39] C. G. Wagner, and J. H. Jung, r -Whitney numbers of Dowling lattices. *Discrete Math.*, 312 (2012), 2337-2348.
- [40] Z. Zhang, H. Yang, Several identities for the generalized Apostol Bernoulli polynomials. *Comput. Math. Appl.* 56 (2008) 2993-2999.