

N° d'ORDRE : 03/2008-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEINGNEMENT SUPERIEURE ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
"HOUARI BOUMEDIENE"

FACULTE DE MATHEMATIQUES



THÈSE  
présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : Equations aux dérivées partielles

par

Leïla OUKSEL

Sujet :

**Fonction de coût et contribution à la contrôlabilité exacte et la stabilisation des problèmes d'évolution**

Soutenue le : 19 octobre 2008, devant le jury composé de :

Mr	Amar Heminna	USTHB	Président du jury
Mr	Luc Robbiano	U-Versailles	Co-directeur de thèse
Mr	Djamel-Eddine Teniou	USTHB	Directeur de thèse
Mr	Mourad Bellassoued	U. Bizerte	Examineur
Mlle	Ouahiba Zair	USTHB	Examinatrice
Mr	Ammar Khemmoudj	USTHB	Examineur

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

À la mémoire de mon père...

À ma mère...

À Youcef...

# Remerciements

Ces pages sont dédiées à tous ceux qui m'ont permis de mener à bien mes travaux de recherche durant ces années de thèse.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes directeurs Luc Robbiano et Djamel Teniou pour m'avoir encadrée et initiée à la recherche.

Je tiens à remercier vivement Luc qui m'a guidé tout au long de ma thèse avec gentillesse, patience et beaucoup de disponibilité. Je lui suis très reconnaissante de m'avoir fait découvrir l'analyse micro-locale avec tous ses outils y compris les inégalités de Carleman. Sa rigueur et son esprit critique m'ont éclairé la voie vers la solution de la problématique étudiée dans cette thèse.

Que Djamel trouve ici ma profonde gratitude pour son attention et son aide précieuses pendant ma thèse. Je le remercie aussi de m'avoir fait confiance et de m'avoir encouragée à terminer ce travail. Mille fois merci Djamel.

Ma reconnaissance va ensuite au professeur Amer Heminna pour avoir accepté d'être le président de cette thèse.

Je remercie les professeurs Mourad Bellassoued, Ouahiba Zair et Ammar Khemmoudj d'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Je souhaiterais remercier vivement tous les membres de l'équipe d'Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles du département de mathématiques à Orsay que j'ai eu le plaisir de côtoyer.

Je tiens à remercier mes amies et mes collègues de la faculté de mathématiques de l'USTHB pour leurs présences chaleureuses et leurs énormes encouragements.

Un immense merci à Youcef, mon mari, qui m'a toujours offert ses conseils, son soutien et son encouragement et son financement a permis à ce travail de voir le jour.

Mes derniers remerciements vont à mes parents pour leur amour et soutien indéfectible ainsi que pour l'éducation qu'ils m'ont donnée. Je suis consciente que je leur dois beaucoup.

Les mots ne suffisent pas et ne suffiront jamais pour dire merci à mon père adoré qui m'a appris la vie tout court.

# Résumé

L'étude des estimations de Carleman des équations aux dérivées partielles a connu un essor important depuis un peu plus de trente ans. A la suite des travaux importants de Hörmander, l'estimation de Carleman introduite par Carleman a constitué une méthode systématique et constructive pour traiter l'unicité locale des équations linéaires en ramenant leur étude à l'obtention d'inégalités à poids. L'une des toutes premières motivations pour l'étude de ce type de problème est la théorie du contrôle.

C'est précisément l'objet de cette thèse qui porte, plus particulièrement, sur la contrôlabilité et la stabilisation pour un problème hyperbolique à coefficients réguliers, avec conditions aux limites de type Neumann.

Le premier chapitre de cette thèse va établir un résultat essentiel c'est-à-dire un théorème d'unicité pour des problèmes hyperboliques à coefficients assez réguliers. Il se fera en reprenant les estimations de Robbiano [Ro91] pour donner un résultat quantitatif d'unicité. Plus précisément, soit  $u$  la solution d'un problème hyperbolique dans un ouvert avec la dérivée normale nulle au bord, si  $u$  est nulle sur un ouvert du bord pendant un temps suffisamment grand, alors  $u$  est nulle.

Ce théorème d'unicité nous permettra d'aborder, dans le second chapitre de cette thèse, le problème de contrôle approximatif, et d'estimer la fonction de coût des problèmes hyperboliques à coefficients assez réguliers, avec condition aux limites de type Neumann sur un ouvert borné. La résolution du problème de contrôle approximatif se fera par l'obtention d'une inégalité d'observabilité de type logarithmique.

Sur la base des outils de démonstration développés dans la première et deuxième partie de cette thèse (inégalités de Carleman), le troisième chapitre sera consacré à la résolution d'un problème plus complexe. Elle établira la stabilisation logarithmique du problème multidimensionnel constitué d'un corps élastique  $\bar{\Omega}$  (de dimension  $n \geq 2$ ) et d'une tige mince élastique  $l' = \omega$  (de dimension 1) soudée par son extrémité  $l$  à la frontière du corps  $\bar{\Omega}$  dont l'extrémité  $l'$  est libre. La jonction de la tige  $l'$  au corps  $\bar{\Omega}$  est modélisée par des conditions de transmission reliant le déplacement de l'extrémité  $l$  de la tige aux déplacements du corps  $\bar{\Omega}$  dans le voisinage du point  $l$  du corps  $\bar{\Omega}$ .

La conclusion de cette thèse présentera, en plus d'un résumé des résultats principaux de notre travail, une perspective des différents problèmes abordables par la technique des inégalités de Carleman.

# Abstract

The study of Carleman estimates of partial differential equations has developed significantly in the last thirty years or so. Following the important work of Hörmander, the estimate introduced by Carleman has become a systematic and constructive method for dealing with the local uniqueness of linear equations using weighted inequalities. One of the earliest motivations for the study of this type of problem has been control theory.

This is precisely the subject of this thesis which tackles, more specifically, the controllability and stabilization of hyperbolic problems with regular coefficients and boundary conditions of the Neumann type.

The first chapter of this thesis will establish an essential result, i.e. a uniqueness theorem for hyperbolic problems with fairly regular coefficients. This theorem will be built using the estimates Robbiano [Ro91] in order to derive a quantitative result for the uniqueness. To be more precise, if  $u$  is the solution to a hyperbolic problem within an open with a zero normal derivative at the boundary, and if  $u$  is zero in the neighbourhood of the boundary for a sufficiently large time, then  $u$  is zero.

This uniqueness theorem will enable us to address, in the second chapter of this thesis, the problem of approximate control, as well as to make an estimation of the cost function of hyperbolic problems with fairly regular coefficients and boundary conditions of the Neumann type for a bounded open. The solution to the approximate control problem will be derived by obtaining an observability inequality type of logarithmic.

Using the demonstrative tools developed in the first and second chapters of this thesis, that is to say Carleman inequalities, the third chapter will be devoted to the solution to a more complex problem. It will establish the logarithmic stabilization of a multidimensional problem which consists of an elastic body  $\bar{\Omega}$  (dimension  $n \geq 2$ ) connected to a thin elastic one-dimensional rod  $l' = \omega$ . The  $l$  end of the rod is attached to the boundary of the body  $\bar{\Omega}$  while its  $l'$  end is free. The connection between the rod  $l'$  and the body  $\bar{\Omega}$  is modelled by transmission conditions which relate the displacements of the  $l$  end of the rod to the displacement of the body  $\bar{\Omega}$  in the neighbourhood of the  $l$  point of the  $\bar{\Omega}$  body.

In addition to providing a summary of the main results of our work, the conclusion of this thesis shall discuss the perspectives for dealing with various problems amenable to being resolved using the Carleman inequality technique.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>i</b>
<b>1 Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques</b>	<b>1</b>
1 Introduction . . . . .	1
2 Hypothèses et résultats . . . . .	2
3 Commentaires . . . . .	3
4 Application au problème du contrôle . . . . .	4
5 Une version locale du théorème d'unicité . . . . .	5
<b>2 Inégalité d'observabilité du type logarithmique et estimation de la fonction de coût des solutions des équations hyperboliques</b>	<b>20</b>
1 Introduction . . . . .	20
2 Hypothèses et résultats . . . . .	23
3 Inégalité d'observabilité du type logarithmique . . . . .	24
4 Fonction de coût . . . . .	25
5 Inégalités d'interpolation et de Carleman . . . . .	28
Inégalité d'interpolation . . . . .	28
Inégalité de Carleman au bord . . . . .	28
Inégalité d'interpolation locale . . . . .	38
6 Rappel sur les fonctions F.B.I. . . . .	44
Fonctions F.B.I. . . . .	44
Estimation de $u$ . . . . .	45
<b>3 Stabilisation logarithmique d'une structure multidimensionnelle par le bord</b>	<b>50</b>
1 Introduction . . . . .	50
2 Hypothèses et résultats . . . . .	51
Le cas stationnaire . . . . .	53
Le cas d'évolution . . . . .	53
3 Inégalités d'interpolation et de Carleman . . . . .	53
Inégalité d'interpolation . . . . .	53
Inégalité de Carleman au bord . . . . .	57
Inégalité d'interpolation locale . . . . .	73

---

<b>A Résultats élémentaires</b>	<b>78</b>
1 Courbes paramétrées . . . . .	78
2 Module . . . . .	78
3 Distance géodésique . . . . .	78
4 $\delta$ -Suite de boules . . . . .	79
<b>B Résultats</b>	<b>81</b>
1 Détails de la formule (2.2) du chapitre 2 . . . . .	81
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>83</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

# Introduction

*" Si chaque instrument pouvait, par ordre ou par pressentiment, accomplir son œuvre propre, si [...] les navettes tissaient d'elles-mêmes et les plectres jouaient de la cithare, alors les maîtres d'œuvre n'auraient nul besoin de manœuvres ni les maîtres, d'esclaves." Aristote*

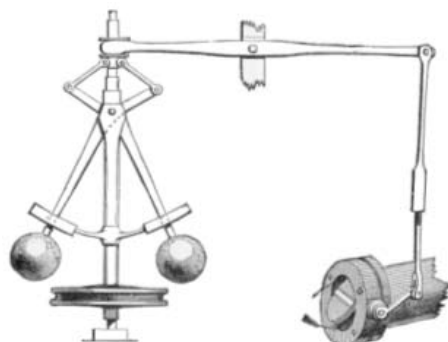
**L**es lois qui gouvernent un grand nombre de phénomènes physiques s'expriment mathématiquement par une équation différentielle. Lorsqu'il est possible d'agir sur ces phénomènes, par exemple en appliquant une contrainte, le système devient commandé et donc modélisable par une équation différentielle dépendante d'un paramètre appelé contrôle.

Ce terme contrôle admet plus d'une signification. Contrôler un système peut référer au test ou à la vérification que son comportement est adéquat (par rapport à une norme). Le contrôle désigne également l'exercice d'une influence de sorte à garantir que le système se comporte de façon prédéterminée.

Le concept de contrôle n'est pas nouveau. Certains historiens datent l'utilisation de la notion de contrôle, dans des systèmes d'horloges à eau, à 1600 av. J.-C. en Mésopotamie et en Egypte (cf. Turner [Tu84], Cotterell-Kamminga [CoBr90] et Pingree [Pi98]). Entre 270 av. J.-C. et 500, les horlogers et astronomes grecques et romains ont développé des clepsydras mécanisées de plus en plus sophistiquées avec des systèmes de régulation de valves pour garder l'eau à un niveau constant (cf. Lepschy [Lp92] et Hill [Hi76]). Dans la civilisation islamique, en particulier à Bagdad et en Andalousie, du 9ème au 13ème siècle, les ingénieurs musulmans ont développé différents types de machines qui, selon Hill, "fonctionnent automatiquement pendant de longues périodes sans intervention humaine." (cf. Hill [Hi98]) Hill affirme que "plusieurs types de contrôle, dont la plupart sont considérés comme modernes, étaient utilisés pour atteindre ces résultats : contrôle à rétroaction (feedback), contrôle à boucle-fermée, et différents types d'interrupteurs pour ouvrir et fermer des valves ou changer la direction du flux, qui sont les précurseurs des dispositifs de sécurité positive." (cf. Nadarajan [Na07]).

A la renaissance en Europe, du 14ème au 17ème siècle, la transmission de cet héritage et le développement de nouvelles inventions étendront l'application du contrôle à la régulation de fluides divers, de la température, de la pression, et des moulins à vent et à eau (cf. Lewis [Lw96] et Bennett [Be96]). L'invention du

régulateur à boules du moteur à vapeur, par James Watt en 1788, est considérée comme le développement le plus significatif du concept de contrôle au 18ème siècle (cf. Bennett [Be96]). Comme l'illustre le schéma de Francesco di Giorgio Martini, plus la combustion est forte, plus la vitesse de rotation augmente, plus les boules s'éloignent par la force centrifuge, plus la base du pantographe remonte, et plus l'admission de vapeur est diminuée. L'inverse est vrai aussi. Ce système de contrôle rétroactif permet de garder la vitesse de rotation des boules constante.



Régulateur à boules. De "Francesco di Giorgio Martini".

La première analyse mathématique rigoureuse d'un système de contrôle est attribuée à J. V. Poncelet, en 1826, et G. B. Airy, en 1840, qui ont montré comment le mouvement dynamique du régulateur à boules pouvait être décrit avec des équations différentielles, sans pouvoir toutefois déterminer ses conditions de stabilité (cf. Bennett [Be96]). Celles ci seront déterminées en 1868 par J. C. Maxwell qui, ayant linéarisé les équations différentielles du mouvement du régulateur à boules pour trouver l'équation caractéristique du système, a étudié l'effet des paramètres du système sur sa stabilité et montré qu'il est stable si les racines de son équation caractéristique ont des parties réelles négatives (cf. Lewis [Lw96]). Ce travail est considéré comme l'acte fondateur de la théorie du contrôle, qui va se développer rapidement au 20ème siècle avec l'avènement de la communication de la masse au début du siècle, les exigences technologiques des deux guerres mondiales, puis les besoins sans cesse croissants d'automation dans toutes les technologies (informatique, aéronautique, industries etc.) (cf. Lewis [Lw96] et Bennett [Be96]).

Deux méthodes ou approches distinctes ont émergé dans les développements de la théorie du contrôle. La première méthode est basée sur l'utilisation des équations différentielles et la deuxième est l'approche fréquentielle basée sur l'analyse des amplitudes et des phases des ondes d'"entrées" et des ondes de "sorties" (cf. [FeZu00]).

C'est en utilisant les équations différentielles que cette thèse, qui comporte trois chapitres, traitera le contrôle et la stabilisation.

Pour illustrer les idées, supposons que nous cherchons à obtenir le comportement d'un système physique gouverné par l'équation d'état :

$$Au = f(v) \tag{0.1}$$

Ici l'inconnue du système à contrôler est l'état  $u$  qui appartient à un espace vectoriel  $U$ . D'autre part,  $v$  est le contrôle qui peut être assujéti à un certain

nombre de contraintes, et qui appartient à l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}_{ad}$ .

Supposons que  $A : D(A) \subset U \rightarrow U$  et  $f : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow U$  sont deux applications (linéaires ou non linéaires). L'opérateur  $A$  détermine l'équation qui doit être satisfaite par la variable  $u$  conformément aux lois physiques, alors que la fonction  $f$  indique comment le contrôle  $v$  agit sur le système qui gouverne l'état. Pour simplifier, admettons que pour chaque  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  l'équation d'état (0.1) possède exactement une solution  $u = u(v) \in U$ . Alors contrôler (0.1) revient à trouver  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que la solution de (0.1) s'approche de l'état que l'on requiert. Le meilleur contrôle, parmi l'ensemble des contrôles possibles, pour atteindre le comportement recherché est appelé contrôle optimal. Une fois l'état  $u(v)$  de (0.1) connu, on veut minimiser une "fonction de coût  $J$ " dont le choix pourrait être un problème,

$$J(v) = \phi(u(v)) + \psi(v)$$

où  $\phi$  correspond à l'objectif à atteindre et  $\psi$  désigne le coût du contrôle.

Historiquement, d'après Bardos [Ba], les problèmes de contrôle sont d'abord apparus dans des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Il s'agissait par exemple de déterminer les trajectoires de missiles ou de satellites (Pontryagine (1961)). Mais très vite d'autres mathématiciens (J.-L. Lions et Balakrishnan principalement (cf. [LiSt67])) ont développé une théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques et ceci pour plusieurs raisons :

- i) L'analyse faite par J.-L. Lions-Stampacchia [LiSt67] des inéquations variationnelles fournissait un très bon cadre fonctionnel pour une telle approche ;
- ii) Des exemples pratiques se sont présentés ; Bardos pense que l'un des premiers exemples (cité par J.-L. Lions dans Bercovier [Br01]) était le contrôle de la forme de la surface libre séparant les phases liquides et solides d'un métal dans un haut fourneau ;
- iii) Dès que le nombre de degrés de liberté est important (par exemple dans le guidage d'un satellite), le traitement numérique du système discret ressemble à celui d'un système continu. Ainsi des progrès dans la compréhension et le traitement des systèmes continus s'avèrent utiles pour l'approche des problèmes discrets à grand nombre de degrés de liberté.

Pour des problèmes continus nous parlerons de contrôle distribué. Tant à cause des outils mathématiques que des problèmes d'application posés, les premiers exemples continus étaient des problèmes essentiellement paraboliques ou elliptiques. Une description assez exhaustive du traitement de ces systèmes par J.-L. Lions [Li68] est donnée dans Bardos [Ba].

L'intérêt pour les problèmes de nature hyperbolique est subséquent à ces développements. D'après Bardos [Ba], la problématique du contrôle pour les systèmes hyperboliques et leur équation modèle (par exemple l'équation des ondes acoustiques) modélisent la stabilisation des vibrations des grandes structures flexibles, comme celles des robots ou des antennes de véhicules spatiaux. Il est considéré que c'est ce second type de problèmes qui est à l'origine des développements les plus importants de la théorie du contrôle.

Cette thèse se restreindra à des problèmes hyperboliques linéaires.

L'une des motivations pour l'étude de ce problème est la théorie du contrôle. En effet, J.-L. Lions a introduit la méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) qui consiste à étudier l'ensemble des conditions initiales d'un problème d'évolution qui peuvent être annulées en un temps fini  $T$ , en exerçant un contrôle d'énergie finie sur le bord. Les outils qu'il a proposés dans [Lio88, Li88] utilisent des estimations globales. Mais ces méthodes, compte tenu de leur caractère global, ne peuvent tenir compte des propriétés géométriques fines liées à la propagation.

La relation entre la géométrie de la propagation et la stabilisation a été étudiée par Rauch-Taylor [RaTa74] en 1974. D'une part ce problème n'était pas encore vraiment en application. D'autre part les outils mathématiques disponibles à l'époque pour la propagation des singularités ne fournissaient pas d'estimations uniformes jusqu'au bord de l'ouvert. Ainsi Rauch et Taylor n'avaient pu considérer que des cas extrêmement simples et leurs résultats avaient été pratiquement ignorés par les spécialistes du contrôle qui avaient, entre temps, déterminé des conditions suffisantes (mais presque toujours beaucoup trop fortes et reliées à des géométries particulières) pour obtenir la contrôlabilité exacte et, d'après Lasciecka-Triggiani [LaTr87], la stabilisation (cf. Bardos [Ba]).

En outre, concernant ce problème de la propagation des singularités, Bardos [Ba] estime que Lebeau a observé les deux points suivants :

a) Il est possible d'adapter les démonstrations de Melrose et Sjostrand [MeSj69] pour déduire des estimations micro-locales dans un voisinage de ce bord à partir des propriétés de la solution sur une partie du bord ;

b) Il suffit ensuite d'utiliser les théorèmes originaux de [MeSj69], éventuellement légèrement précisés, pour propager ces informations dans tout le domaine.

Ainsi les résultats obtenus par Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92] ont fait apparaître le rôle de la fréquence dans les informations obtenues pour la première fois. C'est cette approche qui a motivé une bonne partie des progrès ultérieurs (cf. Bardos [Ba]). L'approche fréquentielle pourrait se résumer ainsi :

i) Pour observer un phénomène avec une précision arbitraire il faut l'examiner avec des ondes de fréquences arbitrairement élevées, c'est-à-dire avec tous les rayons de l'optique géométrique ;

ii) S'il s'agit de voir par diffraction un phénomène caché (par exemple) dans un domaine non convexe, il est possible de le faire en utilisant des ondes de petites fréquences, mais dans ce cas le prix à payer réside dans la précision de l'observation, qui sera dépourvue de sens si le phénomène est trop oscillant.

La démonstration du point (i) réside dans une approximation à haute fréquence qui est justifiée dans [BLR92] à l'aide de tous les outils de l'analyse micro-locales, y compris la construction de la paramétrix au voisinage du point diffractif. En fait c'est une estimation de la propagation de l'énergie qui est visée, mais pour cela la forme explicite (phase en particulier) de cette paramétrix n'est pas indispensable. Ceci a conduit Lebeau [L96] et Burq [B98] à introduire les mesures de défaut (cf. Gerard-Leichtnam [GeLe93]) dans l'analyse micro-locale.

Quant à la preuve du point (ii), elle incorpore l'analyse des phénomènes à basse fréquence qui est sensiblement moins intuitive. Le seul outil actuellement disponible est l'inégalité de Carleman dont l'introduction dans ce domaine est

due à Robbiano [Ro91, Ro95].

C'est précisément avec ces inégalités de Carleman que le premier chapitre de cette thèse va établir un résultat essentiel, à savoir un théorème d'unicité pour des problèmes hyperboliques à coefficients assez réguliers. Il se fera en reprenant les estimations de Robbiano [Ro91] pour donner un résultat quantitatif d'unicité. Plus précisément, soit  $u$  la solution d'un problème hyperbolique dans un ouvert avec la dérivée normale nulle au bord, si  $u$  est nulle sur un ouvert du bord pendant un temps suffisamment grand, alors  $u$  est nulle.

Ce théorème d'unicité nous permettra d'aborder, dans le second chapitre de cette thèse, le problème de la contrôlabilité approximative, et d'estimer la fonction de coût des problèmes hyperboliques à coefficients assez réguliers, avec une condition aux limites de type Neumann sur un ouvert borné.

Les relations entre contrôlabilité et observabilité sont maintenant bien connues pour une large classe d'équations aux dérivées partielles définies dans un domaine borné. En prenant l'équation des ondes comme système modèle, J.-L. Lions [Li88] a introduit la méthode H.U.M. qui consiste à résoudre par dualité le problème de la contrôlabilité exacte frontière en se ramenant à une inégalité d'observabilité qui traduit un résultat de continuation unique. Dans le cadre modèle d'une équation des ondes dans  $]0, T[ \times \Omega$ , avec  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 0$  et  $T > 0$ , l'observabilité frontière est équivalente à l'existence d'une constante  $C >$ , telle que pour toute solution  $u$  de l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ (u, \partial_t u)(0, \cdot) = (u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \end{cases} \quad (0.2)$$

on ait

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq C \|\partial_\nu u\|_{L^2(]0, T[ \times \Gamma)} \quad \text{où } \Gamma \subset \partial\Omega.$$

Plus généralement, le problème d'observabilité consiste à estimer la solution d'une équation aux dérivées partielles définie dans  $\Omega$ , par rapport à sa restriction sur une partie  $\Gamma$  du bord ou sur un sous domaine  $\omega$  de  $\Omega$ . Pour une large classe d'équations aux dérivées partielles, de telles estimations sont fausses sans hypothèses géométriques et/ou sans contraintes sur les données de Cauchy. Ainsi, John [Jo60] a introduit des estimations de dépendance de type Hölder (resp. de type logarithmique) qui s'écrivent dans le cadre de l'équation des ondes de la manière suivante : il existe une fonction  $f$  de la forme  $f(x) = Cx^\alpha$  (resp.  $f(x) = C \frac{1}{\log(\frac{d}{x})^\beta}$ ) où  $C, d, \beta$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  sont des constantes, telle que pour toute solution de l'équation des ondes (0.2), on ait

$$\|(u_0, u_1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq f\left(\frac{\|\partial_\nu u\|_{L^2(]0, T[ \times \Gamma)}}{\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}}\right) \cdot \|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \quad (0.3)$$

ce qui peut se réécrire clairement comme suit :

$$\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \tilde{f}\left(\frac{\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}}{\|(u_0, u_1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}}\right) \cdot \|\partial_\nu u\|_{L^2(]0, T[ \times \Gamma)}$$

où  $\tilde{f}(x) = (Cx)^{\frac{1}{\alpha}}$  (resp.  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{d}e^{(Cx)^{1/\beta}}$ ).  $\frac{\|(u_0, u_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}}{\|(u_0, u_1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}}$  mesure la fréquence de l'onde. Les estimations du type (0.3) peuvent non seulement être vues comme une quantification d'un résultat de continuation unique mais elles sont aussi utiles dans le cadre de la contrôlabilité approchée et plus précisément en ce qui concerne le coût du contrôle.

En particulier, Robbiano [Ro95] a démontré par des inégalités de Carleman locales que (0.3) était valable pour  $f(x) = C \frac{1}{\log(2+\frac{1}{x})^{1/2}}$  ce qui permet de déduire par dualité un résultat sur le coût du contrôle approché pour l'équation des ondes (voir aussi [L92]).

C'est avec la méthode de Robbiano [Ro91, Ro95] que l'on va aborder, dans cette thèse, la contrôlabilité approchée.

En effet, soit  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^\infty$ . Soient  $\Gamma$  une partie ouverte non vide de  $\partial\Omega$  et

$$A(x, D_x) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} D_j(a_{j,k}(x) D_k) + \sum_{j=1}^n D_j a_j(x) + a_0(x), \quad \text{où } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

est un opérateur elliptique différentiel de deuxième ordre dont les coefficients

$$a_{j,k} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{pour } 1 \leq j, k \leq n$$

$$a_j \in L^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{pour } j = 0, \dots, n$$

vérifient les conditions de symétrie et de coercivité suivantes :

$$a_{j,k} = a_{k,j}$$

et

$$a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{dans } \Omega$$

pour tout vecteur  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  où  $\alpha > 0$  est un nombre fixé. On note  $B = \partial_{\eta_A} = - \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k}(x) \eta_j D_k$  la dérivée conormale extérieure à  $\Omega$  où

$\eta(x) = (\eta_j(x))_{1 \leq j \leq n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en  $x$ . On considère alors l'équation des ondes avec la condition au bord du type Neumann suivante :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} [D_t^2 - A(x, D)]u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \\ u|_{t=0} = u_0, \partial_t u|_{t=0} = u_1 & \text{dans } \Omega \\ Bu = g \mathbf{1}_{\Gamma_T} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases}$$

où  $g$  est le contrôle cherché.

Le système  $(\mathcal{P}_1)$  est dit approximativement contrôlable si, pour un temps suffisamment grand  $T > 0$  et pour toutes données  $(u_T^0, u_T^1)$  dans un espace à définir et  $\epsilon > 0$ , il existe un contrôle  $g$  tel que la solution  $u$  du problème  $(\mathcal{P}_1)$  vérifie

$$(u(T), u'(T)) \in B((u_T^0, u_T^1), \epsilon). \quad (0.4)$$

La contrôlabilité exacte du système  $(\mathcal{P}_1)$  avec une condition au bord de type Dirichlet et Dirichlet-Neumann a déjà été étudiée par plusieurs auteurs dont Avellaneda-Lin [AL89], Ho [Ho86, Ho87], Komornik [K89], Lasiecka-Triggiani-Yao [LaTrYa97], J.-L. Lions [Lio88, Li88] et Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92], et ce dans le cas des coefficients réguliers. Zuazua [Zu90] a étudié le même problème mais pour des coefficients,  $a_{jk} = \delta_{jk}a(x)$ ,  $a_j = 0$ . J.-L. Lions [Lin88] et Muñoz-Rivera [Mu90] ont examiné le cas où  $a_{jk} = \delta_{jk}a(t)$ ,  $a_j = 0$  et  $a(t)$  étant une fonction donnée, alors que Miranda [Mir95] l'a fait dans le cas  $a_{jk} = (\delta_{jk} - k^2(t)x_jx_k)k^{-2}(t)$  pour une fonction donnée  $k(t)$  avec la présence des termes  $\nabla v$  et  $\nabla v'$  dans la première équation du système  $(\mathcal{P}_1)$ . Robbiano [Ro91, Ro95] a étudié la contrôlabilité approchée pour des coefficients peu réguliers qui ne dépendent pas du temps. À ces travaux a succédé celui de Lui-Williams [LiuWi98] qui ont obtenu des résultats de contrôlabilité exacte de l'équation d'onde pour des coefficients variables, dépendant de  $t$  et  $x$  avec condition au bord du type Neumann.

Dans tous ces travaux, la méthode des multiplicateurs, développée par exemple par Lagnese [La83], J.-L. Lions [Lio88, Li88], Komornik [K94] ou Komornik-Zuazua [KZ90], a été appliquée pour obtenir les inégalités d'observabilité (dites directes et inverses). Ensuite les résultats de contrôlabilité exacte ont été déduits en appliquant la méthode d'unicité Hilbertienne (H.U.M) introduite par J.-L.Lions [Li88].

Le second chapitre de cette thèse prouvera une nouvelle estimation pour le problème de Neumann avec la norme  $L^2$  de la trace de  $u$  sur le bord. Cette proposition exigera de prouver, au préalable, une estimation de Carleman adaptée (voir Proposition 2.8 p. 29). Cette majoration ne sera pas linéaire comme dans le cas traité par Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92] mais logarithmique. En reprenant les mêmes idées, nous prouverons que les estimations de Robbiano [Ro91, Ro95] produisent des estimations logarithmiques des données par la trace de  $u$ , puis nous proposerons une estimation de la fonction de coût notée  $C(\epsilon)$  de ce problème de type  $Ce^{C/\epsilon^2}$ .

Ce type d'estimation logarithmique a aussi été utilisé pour des problèmes elliptiques. En effet, Phung [Ph03] a établi le coût du contrôle approché pour le laplacien et, pour les problèmes paraboliques, il a également établi la contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur avec un potentiel [Ph04]. Dans le cas de l'équation de Schrödinger, Phung [Ph01] a montré une estimation logarithmique en absence de contrôle géométrique. Duyckaerts [Du02], Zhang-Zuazua [ZhZu06] et Duyckaerts-Zhang-Zuazua [DZZ06] utilisent ces estimations, pour des problèmes d'interaction onde-chaleur, qui donnent le taux de décroissance logarithmique lorsque l'équation de la chaleur ne satisfait pas la condition de contrôle géométrique. D'autre part, Fernandez-Cara-Zuazua [FCZu00] ont établi, à partir des inégalités de Carleman globales, des estimations à poids permettant de mesurer le coût optimal du contrôle approché pour l'équation de la chaleur. Même si leurs estimations ne s'écrivent pas exactement sous la forme (0.3), on peut cependant en faire un rapprochement car elles permettent de réaliser une analyse de contrôlabilité exacte de la projection de la solution de l'équation de chaleur sur un sous espace lié à la fréquence (cf. Fernandez-Cara-Zuazua [FCZu00] Rem. 6.1).

Il serait possible d'obtenir les résultats démontrés dans le second chapitre de cette thèse quand la régularité des coefficients du problème hyperbolique est abaissée, mais cela nécessiterait de remplacer le calcul pseudo-différentiel par d'autres outils adaptés à des opérateurs à régularité limitée.

Sur la base des outils de démonstration développés dans la première et la deuxième partie de cette thèse (inégalités de Carleman), le troisième chapitre sera consacré à la résolution d'un problème plus complexe. En effet, une tige soudée par une de ses extrémités sur le bord du domaine constitue un problème avec un domaine plus complexe. Etant donné que la contrôlabilité exacte de ce problème a déjà été examinée par Puel-Zuazua [PuZu91] et Burq [Bu94], notre effort se circonscrit à l'étude de la stabilisation.

Nous nous intéresserons exclusivement à des équations d'évolution linéaire définies sur  $X$  de la forme :

$$\partial_t u + Au = 0 \quad (0.5)$$

où  $X$  est un certain espace de Hilbert de fonction et  $A$  un opérateur différentiel linéaire non borné sur  $X$ , de domaine  $D(A)$ . Plus précisément, nous considérons des équations dissipatives (ou éventuellement conservatives), c'est-à-dire telles que l'énergie naturelle du problème

$$E(t) := \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2$$

est décroissante au cours de temps.

Supposons que l'équation (0.5) soit strictement dissipative, donc qu'elle n'admette pas de solution non nulle d'énergie constante. On peut alors démontrer dans un cadre assez général que l'énergie de toute solution tend vers 0 en un temps indéfiniment long. Il est naturel de vouloir préciser la vitesse de cette convergence. Le problème de stabilisation uniforme consiste à chercher une fonction du temps  $f$ , à valeurs positives, indépendante de la solution considérée et telle que

$$\forall u_0 \in X, E(t) \leq f(t)E(0).$$

On prouve facilement, avec le semi-groupe associé à l'équation (0.5), que l'on peut toujours choisir  $f$  comme une fonction exponentielle négative.

Lorsqu'il n'y a pas de stabilisation uniforme, on doit s'autoriser des conditions plus contraignantes sur  $u_0$  pour contrôler la décroissance de  $E$ . On peut par exemple considérer des inégalités du type

$$E(t) \leq g(t)E_j(0) \quad (0.6)$$

où  $E_j(t)$  est l'énergie d'ordre  $j$  de la solution,  $E_j(t) := \sum_{k=0}^j \frac{d^k E}{dt^k}(t)$  et  $g$  est une fonction indépendante de la condition initiale, de limite nulle à l'infini. Naturellement,  $E_j(0)$  n'est définie que pour un sous-espace vectoriel strict de  $X$  (en fait  $D(A^j)$ ), qui est un espace de fonctions régulières de l'inégalité (0.6). Cette inégalité est appelée stabilisation pour des données initiales régulières.

On envisage en général une décroissance polynomiale ( $g(t) = \frac{C}{(1+t)^s}$ ) ou logarithmique ( $g(t) = \frac{C}{\text{Log}^s(2+t)}$ ). Donnons d'abord un exemple d'équation très dissipative, celle de la chaleur, avec une condition au bord de Dirichlet, sur un domaine

borné  $\Omega$

$$\partial_t v = \Delta v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.7)$$

L' "énergie"  $E$  de la solution  $\int_{\Omega} |u|^2$  qui a pour dérivée

$$E'(t) = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

et le lemme de Grönwall impliquent

$$E(t) \leq e^{-Ct} E(0),$$

où  $C$  est la meilleure constante de l'inégalité de Poincaré. La stabilisation uniforme est donc triviale dans ce cas.

Considérons maintenant un exemple plus compliqué que le problème précédent, intéressant pour ses propriétés propagatives, celui de l'équation d'onde sur un ouvert borné  $\Omega$  avec dissipation au bord

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - C^2 \Delta u = 0 \\ (\partial_\eta u + a(x) \partial_t u)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (0.8)$$

où  $a$  est une fonction positive non nulle sur  $\partial\Omega$ , et  $\partial_\eta$  indique la dérivée par rapport à la normale extérieure au bord. Il découle d'un théorème d'unicité standard sur le laplacien (cf. Holmgren [Hl01]) qu'il n'existe pas de solution stationnaire et que l'énergie naturelle de (0.8) :

$$E(t) = C^2 \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 + \int_{\Omega} |\partial_t u(t)|^2$$

tend vers 0 pour toute condition initiale d'énergie finie. Contrairement au cas de l'équation de la chaleur, où la dissipation a lieu sur  $\Omega$  tout entier, la stabilisation de la solution provient ici uniquement de la zone  $\{a > 0\}$  :

$$E'(t) = -C^2 \int_{\partial\Omega} a(x) |\partial_t u|^2 dx.$$

La troisième partie de cette thèse traitera de la stabilisation logarithmique du problème multidimensionnel constitué d'un corps élastique  $\bar{\Omega}$  (de dimension  $n \geq 2$ ) et d'une tige mince élastique  $l' = \omega$  (de dimension 1), soudée par son extrémité  $l$  à la frontière du corps  $\bar{\Omega}$ , dont l'extrémité  $l'$  est libre.

La jonction de la tige  $l'$  au corps  $\bar{\Omega}$  est modélisée par des conditions de transmission reliant le déplacement de l'extrémité  $l$  de la tige aux déplacements du corps  $\bar{\Omega}$  dans le voisinage du point  $l$  du corps  $\bar{\Omega}$ .

On se donne une fonction  $\Theta$  non négative, régulière, définie sur  $\Gamma$  ( $\Gamma \subset \partial\Omega$ ) et à support compact dans  $\Gamma$ , telle que  $\Theta(l) = 1$ . On s'intéresse à la décroissance de l'énergie des solutions  $u_1$  et  $u_2$  du problème suivant qui modélise les vibrations de cette structure multidimensionnelle :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u_1 = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ (\partial_t^2 - \partial_y^2) u_2 = 0 & \text{dans } (0, T) \times \omega \\ \partial_y u_2(t, l') = 0 & \text{sur } (0, T). \end{cases} \quad (0.9)$$

Ces équations rendent compte du mouvement de la structure quand elle n'est soumise à aucune force de volume.

Si maintenant la structure est soumise à une force de surface, elle est alors décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\eta u_1 - \Theta(x)\partial_y u_2(t, l) = -a(x)\partial_t u_1 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ u_2(t, l) = \int_\Gamma \Theta(x)u_1(t, x)d\sigma(x) & \text{sur } (0, T). \end{cases} \quad (0.10)$$

Ces équations représentent les conditions de transmission (ou de jonction).

Les vitesses et les déplacements initiaux du corps  $\bar{\Omega}$  et de la tige  $ll'$  sont donnés par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (u_1(0), u_1'(0)) = (u_1^0, u_1^1) & \text{dans } \Omega \\ (u_2(0), u_2'(0)) = (u_2^0, u_2^1) & \text{dans } \omega. \end{cases} \quad (0.11)$$

Il est à noter que la condition  $\Theta(l) = 1$  désigne le fait que les deux parties de la structure (le corps  $\bar{\Omega}$  et la tige  $ll'$ ) demeurent liées.

L'étude de cette structure n'est pas nouvelle. Elle a déjà été considérée par Puel-Zuazua [PuZu91], qui ont étudié la contrôlabilité exacte avec une condition aux limites de type Dirichlet sur  $\Gamma$  et d'autres conditions de transmission en mettant en œuvre la méthode H.U.M. Leur résultat a été généralisé par Burq [Bu94] en utilisant des méthodes d'analyse micro-locale et de propagation des singularités, développées par Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92].

La difficulté de notre problème est que l'on ne peut pas obtenir la stabilisation uniforme, en l'absence du contrôle géométrique telle qu'elle a été analysée par Komornik [K94], pour d'autres conditions au bord, en utilisant la méthode des multiplicateurs. Cependant, nous avons pu obtenir la stabilisation logarithmique comme cela sera développé dans le chapitre trois. La stabilisation logarithmique a aussi été établie dans Lebeau et Robbiano [LR97] pour le problème (0.8) ainsi que dans le cas de Burq [Bu98] pour un problème extérieur, avec conditions aux limites du type Dirichlet, et ce en l'absence de résonance. Cette stabilisation a également été démontré par Bellassoued [Bl03] pour un problème multidimensionnel, couplé, défini sur un ouvert coupé par un obstacle transparent.

En conclusion, cette thèse présentera, en plus d'un résumé des résultats principaux de notre travail, une perspective sur différents problèmes résolubles par la technique des inégalités de Carleman.

Étudions maintenant plus précisément les questions et les résultats de chaque partie.

# Chapitre 1

## Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	1
2	Hypothèses et résultats . . . . .	2
3	Commentaires . . . . .	3
4	Application au problème du contrôle . . . . .	4
5	Une version locale du théorème d'unicité . . . . .	5

---

## 1 Introduction

**N**ous allons démontrer dans ce chapitre le théorème d'unicité pour des opérateurs à coefficients réguliers. Notre méthode repose sur une idée de Rauch-Taylor [RaTa72] reprise également par Lerner [Le88] et Robbiano [Ro91].

Essentiellement, ces auteurs ([RaTa72], [Le88]) démontrent le résultat suivant : si  $u(t, x)$  est la solution l'équation hyperbolique  $[D_t^2 - A(x, D_x)]u(t, x) = 0$ , où  $A$  est elliptique,  $A > 0$  et  $u(t, x) = 0$  pour tout  $x \in B(0, r)$ ,  $r > 0$ , et tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $u = 0$  pour tout  $x$  et  $t$ .

La méthode est comme suit : posons

$$v_{t_0, \lambda}(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t, x) dt, \quad (s, x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

alors cette transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (F.B.I.) vérifie :

$$(D_t^2 + A)v_{t_0, \lambda} = 0 \quad \text{et} \quad v_{t_0, \lambda}(s, x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad (s, x) \in \mathbb{R} \times B(0, r).$$

En appliquant le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques, nous obtenons

$v_{t_0, \lambda} = 0$ , ce qui implique que  $u = 0$  car

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_{t_0, \lambda}(0, x) = u(t_0, x).^1$$

Le théorème 1.1 (dû a Robbiano [Ro91]) est une version locale de ce résultat. Soit  $s_0 > 0$ , en posant :

$$v_{t_0, \lambda, T}(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t, x) dt, \quad (s, x) \in (-s_0, s_0) \times B(0, 3r),$$

il s'ensuit que

$$(D_t^2 + A)v_{t_0, \lambda, T}(s, x) = \mathcal{O}(e^{-C\lambda}), \quad C > 0,$$

et

$$v_{t_0, \lambda, T}(s, x) = 0 \quad \text{pour } (s, x) \in (-s_0, s_0) \times B(0, r),$$

ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques. Mais on reporte ceci dans une inégalité de Carleman qui aide à prouver que  $v_{t_0, \lambda, T}(0, x) = \mathcal{O}(e^{-C\lambda})$ . Puis en faisant tendre  $\lambda$  vers l'infini cela implique que  $u(t_0, x) = 0$ .

## 2 Hypothèses et résultats

Soient  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$  (on peut toujours supposer que l'origine appartient à  $\Omega$  sans restreindre la généralité) et  $A(x, D_x)$  un opérateur elliptique de la forme :

$$A(x, D_x) = \sum_{n \geq j, k \geq 1} D_j(a_{j,k}(x)D_k) + \sum_{j=1}^n D_j a_j(x) + a_0(x) \quad \text{où } D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On suppose qu'il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  on ait :

$$C_2 |\xi|^2 \geq \sum_{n \geq j, k \geq 1} a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k \geq C_1 |\xi|^2$$

où les fonctions  $a_{j,k}$  sont  $C^\infty(\overline{\Omega})$ , et les fonctions  $a_j$ ;  $j = 0, \dots, n$  appartiennent à  $L^\infty(\overline{\Omega})$ . Il existe alors deux constantes positives  $C_3$  et  $C_4$  telles que  $|\frac{\partial a_{j,k}(x)}{\partial x_l}| \leq C_3$  pour  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $1 \leq j, k \leq n$  ainsi que  $1 \leq l \leq n$  et  $|a_j(x)| \leq C_4$  pour  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $0 \leq j \leq n$ .

Soit  $u(t, x)$  vérifiant :

$$D_t^2 u(t, x) - A(x, D_x)u(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in [-T, T] \times \Omega.$$

Supposons aussi que  $x_0 \in \Omega$  et  $r_0 > 0$  tels que  $B(x_0, r_0) \subset \Omega$ . On admet par ailleurs que

$$u \in C^0([-T, T], H_{loc}^1(\Omega)) \cap C^1([-T, T], L_{loc}^2(\Omega))$$

<sup>1</sup> Voir propriétés 1.6.

et que

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour} \quad (t, x) \in [-T, T] \times B(x_0, r_0).$$

On note que  $|x - y|$  est la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y)$  est la distance géodésique dans  $\Omega$  pour la métrique euclidienne, et que  $D = \sup\{d(x_0, x), \text{ pour } x \in \Omega\}$ . Il est supposé que  $D \neq +\infty$ .

Les hypothèses citées ci-dessus entraînent le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** *Il existe un réel  $K$  strictement positif ( $K$  ne dépend que de  $C_1$  et  $C_2$ ) tel que si  $T > KD$  alors  $u(t, x) = 0$  pour  $(t, x) \in ]-T_1, T_1[ \times \Omega$  où  $T_1 = T - KD$ .*

**Remarque 1.2.** Pour la preuve du théorème 1.1 on va utiliser le lemme 1.4 cité dans le paragraphe 2.5. Le schéma ci-dessus résume graphiquement le théorème 1.1.

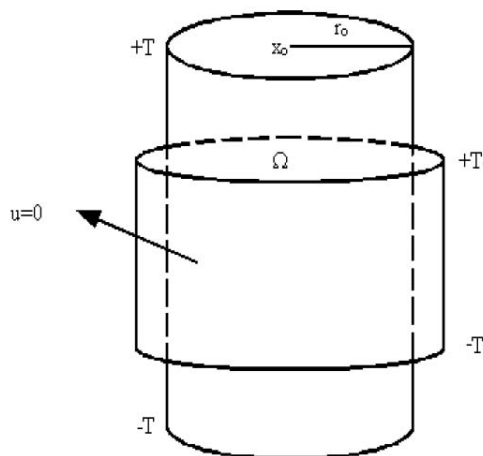


Fig. 1.1. Unicité.

■

### 3 Commentaires

Il y a deux commentaires qui s'imposent. Le premier est que le théorème 1.1 permet de résoudre un problème posé dans le livre de Laverentév, Romanov et Shistatskil [RoSh] et étudié par Rauch-Taylor [RaTa72] ainsi que par Lerner [Le88].

La question est la suivante : si  $u$  vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u + a(x, y)u = 0 \\ u|_{x < 0} = 0 \end{cases}$$

s'ensuit-il que  $u=0$  ?

Ce type de résultat permet d'aborder le problème de détermination d'une source connaissant le signal reçu. Lerner [Le88] a donné une réponse positive à cette question si  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ . Le théorème 1.1 donne une réponse positive si les hypothèses sont locales en  $(x, y, t)$  (i.e.  $x, y \in \Omega$  et  $t \in [-T, T]$ ). Le cas  $a \equiv 0$  a été étudié par Symes [Sy83].

Le second commentaire est qu'en général le théorème 1.1 est faux si les coefficients de l'opérateur  $A$  dépendent du temps.

En effet, en prenant pour  $A$  le Laplacien, le théorème d'Alinhac [Al83] permet de trouver des fonctions  $u(t, x)$  et  $a(t, x)$  de classe  $C^\infty$  vérifiant

$$[D_t^2 - \Delta + a(t, x)]u(t, x) = 0 \text{ dans le voisinage } V \text{ de } (t_0, x_0) = (0, 0)$$

et  $\text{supp } u = \{x_1 \geq \delta|x'|^2\} \cap V$  où  $x = (x_1, x')$  et  $\delta > 0$ , ce qui est contradictoire avec le théorème 1.1.

Cette situation est représentée graphiquement par le schéma ci-dessous :

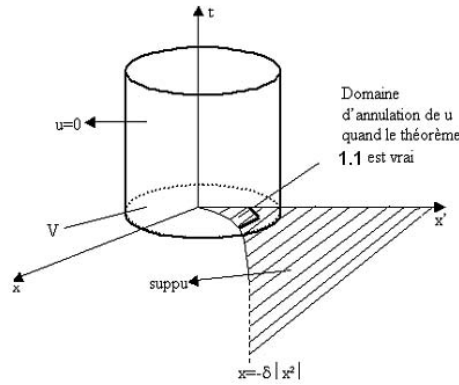


Fig. 1.2. Non unicité. ■

## 4 Application au problème du contrôle

On suppose maintenant que  $u(t, x)$  vérifie :

$$(P) \quad \begin{cases} [D_t^2 - A(x, D)]u(t, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{avec } u_0 \in H^1(\Omega) \\ D_t u(0, x) = u_1(x) & \text{avec } u_1 \in L^2(\Omega) \\ Cu(t, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases}$$

$C = \partial_{\eta_A} = - \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k}(x) \eta_j D_k - \sum_{1 \leq j=1}^n a_j(x) \eta_j$  est la dérivée conormale extérieure

à  $\Omega$  où  $\eta(x) = (\eta_j(x))_{1 \leq j \leq n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en  $x$ . On a alors  $u \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ .<sup>2</sup>

D'autre part on admet que

$$(H) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{sur } [-T, T] \times \Sigma \\ \text{où } \Sigma \text{ est un ouvert de classe } C^2 \text{ de } \partial\Omega \text{ non vide.} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Voir J. L. Lions et Magenes [LiMa68]

Puisque  $\Sigma$  est un ouvert de  $\partial\Omega$ , alors il existe  $x_0 \in \Sigma$  et  $r > 0$  tels que  $B(x_0, r) \cap \partial\Omega \subset \Sigma$ . On pose  $\tilde{\Omega} = \Omega \cup B(x_0, r)$  et on prolonge  $u$  sur  $\tilde{\Omega}$  par 0 hors de  $\Omega$ .

Notons  $\underline{u}$  ce prolongement ; on obtient alors

$$(I) \quad \begin{cases} (D_t^2 - A)\underline{u} = 0 & \text{sur } [-T, T] \times \tilde{\Omega} \\ \underline{u} \in C^0([-T, T], H^1(\tilde{\Omega})) \cap C^1([-T, T], L^2(\tilde{\Omega})) \\ \text{et } \underline{u} = 0 & \text{sur } [-T, T] \times B(x_1, r_1) \\ \text{où } B(x_1, r_1) \subset \tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}, & (0 < r_1 < r). \end{cases}$$

Appelons  $\tilde{D} = \sup\{d(x_0, x), x \in \tilde{\Omega}\}$ ; ici  $d$  est la distance géodésique sur  $\tilde{\Omega}$ . Et en appliquant le théorème 1.1 on obtient, le résultat suivant :

**Théorème 1.3.** *Soit  $u$  solution de (P), alors il existe un réel  $K$  strictement positif ( $K$  ne dépend que de  $C_1$  et  $C_2$ ) tel que si  $T > K\tilde{D}$  et  $(u, \Omega, \Sigma)$  vérifie (H), alors  $u_0 = u_1 = 0$ .*

**Preuve** Soit  $u$  la solution de (P). On a alors  $u \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ . On définit sur  $\tilde{\Omega}$  la fonction suivante :

$$\underline{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \tilde{\Omega} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Il est clair que  $\underline{u}$  vérifie (I). Puisque les hypothèses du théorème 1.1 sont vérifiées il existe une constante  $K > 0$  telle que  $K = K(C_1, C_2)$ .

Pour  $T > K\tilde{D}$  on a  $u(t, x) = 0$  sur  $] -T_1, T_1[ \times \Omega$  où  $T_1 = T - K\tilde{D}$ , donc on en déduit que  $u_0 = u(0, x) = 0$  et que la dérivée  $u_1 = \frac{\partial}{\partial t}u(0, x) = 0$ . ■

## 5 Une version locale du théorème d'unicité

Admettons que les hypothèses du paragraphe 2.2 sur l'opérateur  $A$  sont vraies et supposons que :

$$u \in C^0([-T, T], H^1(B(0, 3r))) \cap C^1([-T, T], L^2(B(0, 3r))), r > 0 \text{ fixé.}$$

Sous ces hypothèses on a le lemme suivant :

**Lemme 1.4.** *Il existe  $K$  une constante strictement positive ne dépendant que de  $C_1$  et  $C_2$ , et  $r_0$  dépendant de  $C_1, C_2$  et  $C_3$ , tels que quelque soit  $r > 0$ , alors si*

*i.  $r < r_0$ ,*

*ii.  $(D_t^2 - A)u = 0$  pour  $(t, x)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(0, 3r)$  et  $u(t, x) = 0$  pour  $(t, x)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(0, r)$ ,*

*iii.  $T > Kr$ ,*

*il s'ensuit que  $u(t, x) = 0$  pour  $|x| < 2r$  et  $|t| < T - Kr$ .*

**Remarque 1.5.** Il est à noter deux points. Premièrement le lemme 1.4 est schématisé ci-dessous :

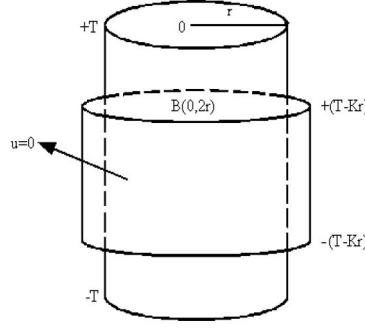


Fig. 1.3. Le cas local.

Deuxièmement le lemme 1.4 est une version locale affaiblie du théorème 1.1. Sa démonstration va se faire en plusieurs étapes.

On pose d'abord

$$v_{a,\lambda,T}(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} u(t, x) dt, \quad (s, x) \in (-s_0, s_0) \times B(0, 3r).$$

■

**Propriétés 1.6.**  $v_{a,\lambda,t}$  possède les propriétés suivantes :

- i.  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_{a,\lambda,T}(0, x) = u(a, x) \quad \text{si } |a| < T;$
- ii.  $\|v_{a,\lambda,T}\|_{H^1((-s_0, s_0) \times B(0, 3(r-\delta)))} \leq C_u \lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\lambda}{2} s_0^2} \quad \text{avec } \lambda > 1;$
- iii.  $v_{a,\lambda,T}(s, x) = 0 \quad \text{pour } (s, x) \in (-s_0, s_0) \times B(0, r).$

**Preuve de la propriété i.** Posons d'abord

$$y = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a-t) \implies dy = -\sqrt{\frac{\lambda}{2}} dt$$

$$\text{si } t = T \implies y = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a-T)$$

$$\text{si } t = -T \implies y = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a+T),$$

d'où  $v_{a,\lambda,T}(0, x)$  devient

$$\begin{aligned} v_{a,\lambda,T}(0, x) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a-T)}^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a+T)} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-y^2} u(a - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} y, x) dy \\ &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(a - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} y, x) \chi_{[\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a-T), \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a+T)]}(y) dy. \end{aligned}$$

Ensuite notons  $f_\lambda^x(y) = e^{-y^2} u(a - \sqrt{\frac{2}{\lambda}} y, x) \chi_{[\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a-T), \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(a+T)]}(y)$ .

Il vient donc  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_\lambda^x(y) = e^{-y^2} u(a, t) = f^x(y) \quad \text{pour } |a| < T.$

Comme  $u \in C^0([-T, T], H^1(B(0, 3r))) \cap C^1([-T, T], L^2(B(0, 3r)))$  alors il existe  $y_0 \in [-T, T]$  tel que  $|f_\lambda^x(y)| \leq g^x(y_0)$  où

$$g^x(y_0) = e^{-y^2} u(a - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} y_0, x) \in L^1(\mathbb{R}_y).$$

En vertu du théorème de la convergence dominée on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_{a,\lambda,T}(0, x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(a, x) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} u(a, x) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \\ &= u(a, x).^3\end{aligned}$$

**Preuve de la propriété ii.** Notons  $B(0, 3(r-\delta)) = B, L^2((-s_0, s_0) \times B(0, 3(r-\delta))) = L^2$  et  $H^1((-s_0, s_0) \times B(0, 3(r-\delta))) = H^1$ .

Les termes  $\|v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2$ ,  $\|D_s v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2$  et  $\|D_x v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2$  sont majorés ci-dessous sous les points 1, 2, 3 respectivement.

$$1. \quad \|v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-s_0}^{s_0} \int_B \left| \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} u(t, x) dt \right|^2 dx ds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\|v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-s_0}^{s_0} |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}|^2 dt ds \int_B \int_{-T}^T |u(t, x)|^2 dt dx$$

Posons  $\int_B \int_{-T}^T |u(t, x)|^2 dt dx = K_u$ . Les relations  $B \subset B(0, 3r)$  et

$u \in C^0([-T, T], H^1(B(0, 3r))) \cap C^1([-T, T], L^2(B(0, 3r)))$  impliquent que

$u \in C^0([-T, T], H^1(B)) \cap C^1([-T, T], L^2(B))$  et par conséquent  $K_u < \infty$ . Comme

$$(is + a - t)^2 = (a - t)^2 - s^2 - 2i(a - t)s$$

alors

$$e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} = e^{\frac{\lambda}{2}s^2} e^{-\frac{\lambda}{2}(a-t)^2} e^{-is\lambda(a-t)}.$$

Or  $e^{-is\lambda(a-t)}$  est de module 1 et  $\lambda > 1$ , donc  $\|v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda}{2\pi} K_u \int_{-s_0}^{s_0} e^{\lambda s^2} ds \int_{-T}^T e^{-(a-t)^2} dt$  et

$$\int_{-s_0}^{s_0} e^{\lambda s^2} ds \leq 2s_0 e^{\lambda s_0^2}, \quad (1.1)$$

ce qui donne

$$\|v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 \leq (C_{a,T} K_u \frac{2s_0}{2\pi}) \lambda e^{\lambda s_0^2} \quad (1.2)$$

où  $C_{a,T}$  est définie par  $C_{a,T} = \int_{-T}^T e^{-(a-t)^2} dt$  qui est finie.

$$2. \quad \|D_x v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-s_0}^{s_0} \int_B \left| \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_x u(t, x) dt \right|^2 dx ds.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz entraîne que

$$\|D_x v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-s_0}^{s_0} \int_{-T}^T |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}|^2 dt ds \int_B \int_{-T}^T |D_x u(t, x)|^2 dt dx.$$

Posons  $\int_B \int_{-T}^T |D_x u(t, x)|^2 dt dx = \tilde{K}_u$ . En vertu du fait que  $u \in C^0([-T, T], H^1(B)) \cap C^1([-T, T], L^2(B))$  et de l'inégalité (1.2) on obtient  $\tilde{K}_u < \infty$  et

$$\|D_x v_{a, \lambda, T}\|_{L^2}^2 \leq (C_{a, T} \tilde{K}_u \frac{2s_0}{2\pi}) \lambda e^{\lambda s_0^2}. \quad (1.3)$$

$$\mathbf{3.} \quad \|D_s v_{a, \lambda, T}\|_{L^2}^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-s_0}^{s_0} \int_B \left| \int_{-T}^T D_s (e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}) u(t, x) dt \right|^2 dx ds.$$

En remplaçant d'abord  $D_s$  par  $D_t$  on obtient

$$\begin{aligned} D_s v_{a, \lambda, T}(s, x) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T D_s (e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}) u(t, x) dt \\ &= -i \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T D_t (e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}) u(t, x) dt. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} D_s v_{a, \lambda, T}(s, x) &= i \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t u(t, x) dt - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|D_s v_{a, \lambda, T}\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \int_{-s_0}^{s_0} \int_B \left| \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t u(t, x) dt \right|^2 dx ds \right. \\ &\quad + \int_{-s_0}^{s_0} \int_B \left| e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) \right|^2 dx ds \\ &\quad \left. + \int_{-s_0}^{s_0} \int_B \left| e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right|^2 dx ds \right]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique que

$$\begin{aligned} \|D_s v_{a, \lambda, T}\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \int_{-s_0}^{s_0} \int_{-T}^T |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}|^2 dt ds \int_B \int_{-T}^T |D_t u(t, x)|^2 dt dx \right. \\ &\quad + \int_{-s_0}^{s_0} |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2}|^2 ds \int_B |u(T, x)|^2 dx \\ &\quad \left. + \int_{-s_0}^{s_0} |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2}|^2 ds \int_B |u(-T, x)|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \widehat{K}_u &= \int_B \int_{-T}^T |D_t u(t, x)|^2 dt dx, \\ \underline{K}_u &= \int_B |u(T, x)|^2 dx, \\ \overline{K}_u &= \int_B |u(-T, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Puisque  $u \in C^0([-T, T], H^1(B)) \cap C^1([-T, T], L^2(B))$ , et de l'inégalité (1.2) entraîne que  $\widehat{K}_u < \infty$ ,  $\underline{K}_u < \infty$ ,  $\overline{K}_u < \infty$ ,

$$\int_{-s_0}^{s_0} \int_{-T}^T |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}|^2 dt ds \leq 2C_{a,T} s_0 e^{\lambda s_0^2} \quad (1.4)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-s_0}^{s_0} |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2}|^2 ds &\leq 2s_0 e^{\lambda s_0^2} e^{-\lambda(a-T)^2} \\ &\leq 2s_0 e^{\lambda s_0^2} e^{-(a-T)^2}, \quad \text{pour } \lambda > 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \int_{-s_0}^{s_0} |e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2}|^2 ds &\leq 2s_0 e^{\lambda s_0^2} e^{-\lambda(a+T)^2} \\ &\leq 2s_0 e^{\lambda s_0^2} e^{-(a+T)^2}, \quad \text{pour } \lambda > 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

En combinant (1.4), (1.5) et (1.6) la majoration de  $\|D_s v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2$  devient

$$\|D_s v_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda}{2\pi} \left[ 2s_0 C_{a,T} \widehat{K}_u + 2s_0 e^{-(a-T)^2} \underline{K}_u + 2s_0 e^{-(a+T)^2} \overline{K}_u \right] e^{\lambda s_0^2}. \quad (1.7)$$

Les inégalités (1.2), (1.3) et (1.7) impliquent

$$\|v_{a,\lambda,T}\|_{H^1}^2 \leq C_u^2 \lambda e^{\lambda s_0^2} \text{ d'où } \|v_{a,\lambda,T}\|_{H^1} \leq C_u \sqrt{\lambda} e^{\frac{\lambda}{2} s_0^2},$$

où  $C_u^2 = \max(C_{a,T} \frac{s_0}{\pi} K_u, C_{a,T} \frac{s_0}{\pi} \widetilde{K}_u, C_{a,T} \frac{s_0}{\pi} \widehat{K}_u, \frac{s_0}{\pi} e^{-(a-T)^2} \underline{K}_u + \frac{s_0}{\pi} e^{-(a+T)^2} \overline{K}_u)$ .

**Preuve de la propriété iii.** En tenant compte des hypothèses du lemme 1.4, on a  $u(t, x) = 0$  pour  $(t, x)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(0, r)$ , donc  $v_{a,\lambda,T}(s, x) = 0$  si  $(s, x)$  appartient à  $(-s_0, s_0) \times B(0, r)$ . ■

Pour la preuve du lemme 1.4 on va utiliser les deux lemmes suivants notés lemme 1.7 et lemme 1.9.

**Lemme 1.7.** *Il existe une constante  $C$  (qui dépend de  $u$ ) telle que :*

$$\|Q v_{a,\lambda,T}\|_{L^2((-s_0, s_0) \times B(0, 3r))} \leq C \lambda^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}[(T-|a|)^2] - s_0^2}$$

où  $Q = D_t^2 + A(x, D_x)$ .

**Preuve** On a déjà vu à la page 8 (cf. point 3) que

$$\begin{aligned} D_s v_{a,\lambda,T}(s, x) &= i \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t u(t, x) dt - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right]. \end{aligned}$$

En appliquant encore  $D_s$  on obtient,

$$\begin{aligned} D_s^2 v_{a,\lambda,T}(s, x) &= D_s(D_s v_{a,\lambda,T}(s, x)) \\ &= i\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ \int_{-T}^T D_s \left( e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t u(t, x) \right) dt \right. \\ &\quad + \lambda i(is+a-T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) \\ &\quad \left. - \lambda i(is+a+T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité s'écrit

$$D_s(D_s v_{a,\lambda,T}(s, x)) = i \left[ D_s V_{a,\lambda,T}(s, x) - W_{a,\lambda,T}(s, x) \right]$$

où

$$V_{a,\lambda,T}(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} U(t, x) dt, \text{ avec } U = D_t u, \text{ et}$$

$$\begin{aligned} W_{a,\lambda,T}(s, x) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ -\lambda i(is+a-T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) \right. \\ &\quad \left. + \lambda i(is+a+T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} D_s V_{a,\lambda,T}(s, x) &= i\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t U(t, x) dt - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} U(T, x) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} U(-T, x) \right]. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} D_s^2 v_{a,\lambda,T}(s, x) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ -\int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t^2 u(t, x) dt + e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} D_t u(T, x) \right. \\ &\quad - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} D_t u(-T, x) - \lambda(is+a-T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T, x) \\ &\quad \left. + \lambda(is+a+T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T, x) \right]. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$A v_{a,\lambda,T}(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} A u(t, x) dt$$

donc

$$\begin{aligned} Qv_{a,\lambda,T}(s,x) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[ - \int_{-T}^T e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} (D_t^2 - A)u(t,x) dt \right. \\ &\quad + e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} D_t u(T,x) - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} D_t u(-T,x) \\ &\quad - \lambda(is+a-T)e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T,x) \\ &\quad \left. + \lambda(is+a+T)e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T,x) \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme de l'égalité ci-dessus vaut zéro car  $u(t,x)$  vérifie :

$$[D_t^2 - A(x, D_x)]u(t,x) = 0 \text{ sur } [-T, T] \times B(0, 3r).$$

Notons  $B(0, 3r) = B$  et  $L^2((-s_0, s_0) \times B(0, 3r)) = L^2$ .

En vertu des inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\begin{aligned} \|Qv_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \|e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))} \|D_t u(T,x)\|_{L^2(B)} \right. \\ &\quad \left. + \|e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))} \|D_t u(-T,x)\|_{L^2(B)} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[ \|(is+a-T)e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))} \|u(T,x)\|_{L^2(B)} \right. \\ &\quad \left. + \|(is+a+T)e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))} \|u(-T,x)\|_{L^2(B)} \right]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique aussi que

$$\|(is+a-T)e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))}^2 \leq \|e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))} \|(is+a-T)\|_{L^2((-s_0,s_0))}$$

et

$$\|(is+a+T)e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))}^2 \leq \|e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))} \|(is+a+T)\|_{L^2((-s_0,s_0))},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|Qv_{a,\lambda,T}\|_{L^2}^2 &\leq D_u \frac{\lambda^3}{2\pi} \left[ (1 + \|(is+a-T)\|_{L^2((-s_0,s_0))}) \|e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))}^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 + \|(is+a+T)\|_{L^2((-s_0,s_0))}) \|e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2}\|_{L^2((-s_0,s_0))}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ici  $D_u = \max(\|D_t u(T,x)\|_{L^2(B)}, \|D_t u(-T,x)\|_{L^2(B)}, \|u(T,x)\|_{L^2(B)}, \|u(-T,x)\|_{L^2(B)})$  qui est fini (car  $u \in C^0([-T, T], H^1(B)) \cap C^1([-T, T], L^2(B))$ ).

En combinant (1.4) et (1.6), (1.8) devient

$$\|Qv_{a,\lambda,T}\|_{L^2((-s_0,s_0) \times B(0,3r))} \leq \tilde{D}_u \lambda^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}[(T-|a|^2)-s_0^2]}$$

$$\text{avec } \tilde{D}_u = D_u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2s_0 \max \left[ 1 + \|(is+a-T)\|_{L^2((-s_0,s_0))}, 1 + \|(is+a+T)\|_{L^2((-s_0,s_0))} \right]$$

ce qui achève la démonstration.  $\blacksquare$

**Remarque 1.8.** Dans le cas où  $u \in C^0([-T, T], H^1(B(0, 3r))) \cap C^1([-T, T], L^2(B(0, 3r)))$  on déduit à partir du lemme 1.7 et du fait que  $v_{a,\lambda,T}(s) \in H_{loc}^1(B(0, 3r))$ ,  $s \in (-s_0, s_0)$  que  $v_{a,\lambda,T}(s) \in H_{loc}^2(B(0, 3r))$ ,  $s \in (-s_0, s_0)$ , car  $Q$  est elliptique (voir annexe théorème A.7). ■

La deuxième étape de la preuve du lemme 1.4 est une inégalité de Carleman qui va faire l'objet du lemme suivant pour lequel on pose :

$$\varphi(s, x) = \frac{s^2 + |x|^2}{2} \text{ et } \Psi(s, x) = e^{-\beta\varphi(s, x)} \text{ où } \beta > 0.$$

**Lemme 1.9. (Inégalité de Carleman)** *Il existe une constante  $\tilde{K} > 0$  (ne dépendant que de  $C_1$  et  $C_2$ ) et  $r_0 > 0$  (ne dépendant que de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ) tels que, quelque soit  $0 < r < r_0$ , alors pour tout  $\beta \geq \frac{\tilde{K}}{r^2}$  il existe  $C > 0$  et  $\gamma_0 > 0$  tels que, pour tout  $\gamma > \gamma_0$  et tout  $\omega$  appartenant à  $H^2((-s_0, s_0) \times B(0, 3r))$  à support compact dans  $\{(s, x); \frac{r^2}{2} \leq s^2 + |x|^2 < 9r^2\}$ , on a :*

$$\gamma^{\frac{3}{2}} \|e^{\gamma\Psi}\omega\|_{L^2((-s_0, s_0) \times B(0, 3r))} \leq C \|e^{\gamma\Psi}Q\omega\|_{L^2((-s_0, s_0) \times B(0, 3r))}$$

où  $Q = D_t^2 + A(x, D_x)$ .

**Preuve** Ce lemme est une conséquence du théorème A.6 (cf. annexe) proposé par Hörmander.

Pour prouver le lemme il suffit donc de vérifier (A.1) du théorème A.6. Dans notre cas on a

$$\Psi(s, x) = e^{-\beta\varphi(s, x)} \text{ pour tout } (s, x) \text{ dans } \{(s, x); \frac{r^2}{2} \leq s^2 + |x|^2 < 9r^2\}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + i\gamma\nabla_x\Psi(s, x) \\ &= \xi - i\beta\gamma\nabla_x\varphi(s, x)e^{-\beta\varphi(s, x)}. \end{aligned}$$

Posons

$$\Gamma = \beta\gamma e^{-\beta\varphi(s, x)}, \tag{1.9}$$

puisque  $\text{grad}_x\varphi(s, x) = x$  alors

$$\zeta = \xi - i\Gamma x. \tag{1.10}$$

Posons également

$$\Theta = \tau - i\gamma\beta\varphi'_s(s, x)e^{-\beta\varphi(s, x)},$$

or

$$\varphi'_s(s, x) = s$$

d'où

$$\Theta = \tau - i\Gamma s. \tag{1.11}$$

Notons  $q(x, \tau, \xi) = \frac{1}{2}(\tau^2 + {}^t\xi B\xi)$  la partie principale de  $Q$ , où  $B$  est une matrice qui dépend de  $x$ . Calculons  $q(x, \Theta, \zeta)$  :

$$\begin{aligned} q(x, \Theta, \zeta) &= \frac{1}{2}(\Theta^2 + {}^t\zeta B\zeta) \\ &= \frac{1}{2}(\tau^2 - \Gamma^2 s^2 - i2\Gamma s\tau - \Gamma^2({}^t x B x) + {}^t\xi B\xi - 2i\Gamma({}^t\xi B x)). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Quand  $q(x, \Theta, \zeta) = 0$ , cela est équivalent à :

$$\begin{cases} \tau^2 + {}^t\xi B\xi = \Gamma^2(s^2 + {}^t x B x) \\ \text{et} \\ \tau s + {}^t\xi B x = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Ainsi la relation (A.1) devient, en notant  $\eta = (\tau, \xi)$ ,

$$\begin{aligned} \left[ -\beta \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) \right|^2 + \beta^2 \left| \nabla \varphi(s, x) \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) \right|^2 \right] e^{-\beta \varphi(s, x)} \\ + \frac{1}{\gamma} \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} {}^t \zeta \frac{\partial B}{\partial x_k} \zeta [B\zeta]_k \right] > 0. \end{aligned}$$

D'après (1.9), (1.10) et (1.11) la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\begin{aligned} - \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) \right|^2 + \beta \left| \nabla \varphi(s, x) \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) \right|^2 + \\ + \frac{1}{\Gamma} \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} {}^t (\xi - i\Gamma x) \frac{\partial B}{\partial x_k} (\xi - i\Gamma x) [B(\xi - i\Gamma x)]_k \right] > 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $[V]_k$  est la  $k$ -ème coordonnée de  $V$ .

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) &= \left( \frac{\partial q}{\partial \tau}(x, \Theta, \zeta), \frac{\partial q}{\partial \xi}(x, \Theta, \zeta) \right) \\ &= (\tau - i\Gamma s; B\xi - i\Gamma Bx) \end{aligned}$$

grâce à (1.12), ce qui donne

$$\left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) \right|^2 = \tau^2 + \Gamma^2 s^2 + {}^t\xi B^2\xi + \Gamma^2({}^t x B^2 x)$$

en vertu de (1.13). Comme

$$\nabla \varphi(s, x) = (s, x) \text{ et } \nabla \varphi(s, x) \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) = (s(\tau - i\Gamma s); {}^t x (B\xi - i\Gamma Bx)),$$

les équations (1.13) impliquent que

$$\left| \nabla \varphi(s, x) \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) \right|^2 = \Gamma^2(s^2 + {}^t x B x)^2.$$

Par conséquent le terme  $\text{Im} [\cdot]$  de (1.14) est égal à :

$$\begin{aligned} \text{Im} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[ {}^t\xi \frac{\partial B}{\partial x_k} \xi + \Gamma^2 ({}^t x \frac{\partial B}{\partial x_k} x) - 2i\Gamma ({}^t x \frac{\partial B}{\partial x_k} \xi) \right] \left[ B\xi \right]_k - \\ -i\frac{\Gamma}{2} \sum_{k=1}^n \left[ {}^t\xi \frac{\partial B}{\partial x_k} \xi + \Gamma^2 ({}^t x \frac{\partial B}{\partial x_k} x) - 2i\Gamma ({}^t x \frac{\partial B}{\partial x_k} \xi) \right] \left[ Bx \right]_k \end{array} \right\} \\ & = \sum_{k=1}^n -\frac{\Gamma}{2} \left[ {}^t\xi \frac{\partial B}{\partial x_k} \xi + \Gamma^2 ({}^t x \frac{\partial B}{\partial x_k} x) \right] \left[ Bx \right]_k - \Gamma \left[ {}^t x \frac{\partial B}{\partial x_k} \xi \right] \left[ B\xi \right]_k. \end{aligned}$$

Il vient de (1.13) et des hypothèses faites sur l'opérateur  $A$  que

$$\begin{aligned} \tau^2 + C_1 |\xi|^2 & \leq \tau^2 + {}^t\xi B\xi = \tau^2 + \sum_{n \geq j, k \geq 1} a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k = \Gamma^2 (s^2 + {}^t x Bx) \\ & \leq C_2 \Gamma^2 (s^2 + |x|^2) \\ & \leq 2C_2 \Gamma^2 \varphi(s, x), \end{aligned}$$

d'où

$$\tau^2 + C_1 |\xi|^2 \leq 2C_2 \Gamma^2 \varphi(s, x).$$

Ceci implique que

$$\tau^2 \leq 2C_2 \Gamma^2 \varphi(s, x) \quad \text{et} \quad C_1 |C_1 \xi|^2 \leq 2C_2 \Gamma^2 \varphi(s, x),$$

c'est-à-dire que

$$|\tau| \leq \widehat{C} \Gamma \sqrt{\varphi(s, x)} \quad \text{et} \quad |\xi| \leq \widehat{C} \Gamma \sqrt{\varphi(s, x)}, \quad (1.15)$$

où  $\widehat{C}$  est une constante positive ne dépendant que de  $C_1$  et  $C_2$ .

Avec les inégalités (1.15) on obtient

$$\left| \frac{1}{\Gamma} \text{Im} [\cdot] \right| \leq C \Gamma^2 \varphi^{\frac{3}{2}}(s, x),$$

$$\left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta) \right|^2 \leq (C_1^2 \Gamma^2 + 2C_2 \Gamma^2 + C_2^2 \Gamma^2) \varphi(s, x) \leq \widetilde{C} \Gamma^2 \varphi(s, x),$$

et

$$|\nabla \varphi(s, x) \frac{\partial q}{\partial \eta}(x, \Theta, \zeta)|^2 \geq \Gamma^2 (s^2 + C_1 |x|^2) \geq \min(1, C_1) \Gamma^2 \varphi(s, x) = c \Gamma^2 \varphi(s, x),$$

où  $C$  (resp  $\widetilde{C}$ , resp  $c$ ) est une constante positive ne dépendant que de  $C_1, C_2$  et  $C_3$  (resp  $C_1$  et  $C_2$ , resp  $C_1$ ).

On voit que (1.14) découle de :  $c\beta \Gamma^2 \varphi^2(s, x) \geq \Gamma^2 \varphi(s, x) (\widetilde{C} + C \sqrt{\varphi(s, x)})$ . Si  $r_0$  est assez petit ( $r_0$  ne dépend que de  $C_1, C_2$  et  $C_3$ ) on a  $C \sqrt{\varphi(s, x)} > \frac{\widetilde{C}}{2}$  pour  $\varphi(s, x) < \frac{9r^2}{2}$ . Il suffit donc de prendre  $\beta \geq \frac{\widetilde{K}}{r^2}$  où  $\widetilde{K}$  ne dépend que de  $C_1$  et  $C_2$  (sur l'ouvert considéré  $\varphi(s, x) \geq \frac{r^2}{4}$ ). ■

**Preuve du lemme 1.4.** Pour simplifier les notations on note  $v_{a,\lambda,T} := v_\lambda$ . On applique l'inégalité de Carleman à  $\omega_\lambda := \chi(2\varphi(s,x))v_\lambda$  où  $\chi(\alpha)$  est une fonction plateau régulière telle que

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } (1 - \frac{\epsilon}{2})^2 r^2 \leq \alpha \leq \alpha_2 = (\frac{5r}{2})^2 \\ 0 & \text{si } \alpha \leq (1 - \epsilon)^2 r^2 \text{ ou } \alpha \geq \alpha_3 = (\frac{11r}{4})^2. \end{cases}$$

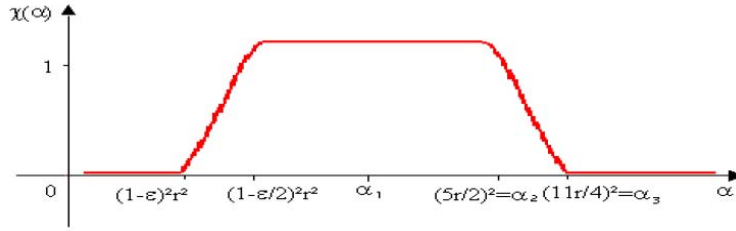


Fig. 1.4. Troncature.

On note  $\alpha_1 = (2r)^2$  (on a  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ) et  $s_0 = 3r$ . On choisit  $\beta = \frac{2\tilde{K}}{r^2}$  et on pose  $\gamma = \nu\lambda$  où  $\nu$  sera choisi ultérieurement.

On écrit  $Q\omega_\lambda(s,x) = \chi(2\varphi(s,x))Qv_\lambda(s,x) + [Q, \chi(2\varphi(s,x))]v_\lambda(s,x)$  pour  $(s,x)$  appartenant à  $(-s_0, s_0) \times B(0, 3r)$ ,  $r > 0$ .

Puisque  $Q = D_t^2 + A(x, D_x)$  est un opérateur d'ordre 2 (deux), le lemme 1.7 et les propriétés de la troncature  $\chi$  entraînent :

$$\|e^{\gamma\psi} \chi(2\varphi)Qv_\lambda\|_{L^2((-s_0, s_0) \times B(0, 3r))} \leq \lambda^{\frac{3}{2}} C_u e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} - \frac{\lambda}{2}(T-|a|)^2 + \lambda s_0^2}. \quad (1.16)$$

Par ailleurs le commutateur  $[Q, \chi(2\varphi)]$  est d'ordre 1 (un) et le support des coefficients est contenu dans :  $\{(s,x); (1-\epsilon)^2 r^2 \leq 2\varphi \leq (1-\frac{\epsilon}{2})^2 r^2 \text{ ou } \alpha_2 \leq 2\varphi \leq \alpha_3\}$ .

• Si  $\alpha_2 \leq 2\varphi \leq \alpha_3$ , alors  $e^{\gamma\Psi(s,x)} \leq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_2}{r^2}}$ . Les propriétés 1.6 (cf. *ii.* et *iii.*) impliquent

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma\psi} [Q, \chi(2\varphi)]v_\lambda\|_{L^2(\alpha_2 \leq 2\varphi \leq \alpha_3)} &\leq e^{\gamma\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_2}{r^2}} \|v_\lambda\|_{H^1(\alpha_2 \leq 2\varphi \leq \alpha_3)} \\ &\leq \lambda^{\frac{1}{2}} C_u e^{\gamma\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_2}{r^2} + \lambda s_0^2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

• Si  $\alpha_1 \geq 2\varphi$ , alors  $e^{\gamma\Psi(s,x)} \geq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_1}{r^2}}$  ce qui implique que :

$$\gamma^{\frac{3}{2}} \|e^{\gamma\Psi} \omega_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)} \geq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_1}{r^2}} \|\omega_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)} \geq e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_1}{r^2}} \|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)}. \quad (1.18)$$

Les formules (1.16)-(1.18) et le lemme 1.9 entraînent que :

$$\begin{aligned} e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_1}{r^2}} \|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)} &\leq \gamma^{\frac{3}{2}} \|e^{\gamma\Psi} \omega_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)} \leq C \|e^{\gamma\Psi} Q\omega_\lambda\|_{L^2((-s_0, +s_0) \times B(0, 3r))} \\ &\leq C_u \lambda^{\frac{3}{2}} e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} - \frac{\lambda}{2}(T-|a|)^2 + \lambda s_0^2} + C_u \lambda^{\frac{1}{2}} e^{\gamma\lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_2}{r^2} + \lambda s_0^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)} \leq C_u \lambda^{\frac{3}{2}} \left[ e^{\nu \lambda e^{-\tilde{K}} - \frac{\lambda}{2}(T-|a|)^2 + \lambda s_0^2 - \nu \lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_1}{r^2}} + e^{\gamma \lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_2}{r^2} + \lambda s_0^2 - \nu \lambda e^{-\tilde{K}} \frac{\alpha_1}{r^2}} \right]. \quad (1.19)$$

Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que  $\|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi \leq \alpha_1)}$  tend vers 0 lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini. Pour cela, d'après (1.19) il suffit que

$$\begin{cases} \gamma e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_2}{r^2}} + s_0^2 - \nu e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} < 0 \\ \nu e^{-\tilde{K}} - \frac{1}{2}(T - |a|)^2 + s_0^2 - \nu e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} < 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Or si  $\mu, \rho, \sigma, \nu$  sont des nombres positifs tels que  $\mu\rho < \sigma\nu$ , alors il existe  $\nu \in ]\frac{\mu}{\sigma}, \frac{\nu}{\rho}[$  tel que  $\frac{\mu}{\sigma} < \nu < \frac{\nu}{\rho}$ .

Posons

$$\begin{aligned} \mu &= s_0^2 > 0 \\ \rho &= (e^{-\tilde{K}} - e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}}) > 0 \\ \sigma &= (e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_1}{r^2}} - e^{-\tilde{K} \frac{\alpha_2}{r^2}}) > 0 \\ \nu &= \frac{1}{2}((T - |a|)^2 - s_0^2) > 0. \end{aligned}$$

Etant donné que

$$\frac{\alpha_1}{r^2} = \frac{4r^2}{r^2} = 4, \quad \frac{\alpha_2}{r^2} = \frac{25r^2}{4r^2} = \frac{25}{4} \quad \text{et } s_0 = 3r,$$

l'inégalité  $\mu\rho < \sigma\nu$  est alors équivalente à

$$9r^2 \frac{e^{-\tilde{K}} - e^{-4\tilde{K}}}{e^{-4\tilde{K}} - e^{-\frac{25}{4}\tilde{K}}} < \frac{1}{2}(T - |a|)^2 - 9r^2$$

qui correspond à  $|a| < T - Kr$  où  $K = 3\sqrt{2Y}$  avec  $Y = X + 1$  et  $X = \frac{e^{-\tilde{K}} - e^{-4\tilde{K}}}{e^{-4\tilde{K}} - e^{-\frac{25}{4}\tilde{K}}}$ .

Le lemme 1.9 implique l'existence de  $\tilde{K} = \tilde{K}(C_1, C_2) > 0$  et un rayon  $r_0$  tel que  $r_0 = r_0(C_1, C_2, C_3) > 0$  tandis que les propriétés 1.6 (i. et iii.) permettent de déduire que  $u(t, x) = 0$  si  $|t| < T - Kr$  et  $|x| < 2r$ , ce qui achève la démonstration. ■

**Preuve du théorème 1.1.** Pour démontrer le théorème 1.1, on va construire une suite de boules permettant d'appliquer itérativement le lemme 1.4.

**Remarque 1.10.** S'il existe une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  (deux points de  $\Omega$ ) avec  $\delta < r_0$  ( $r_0$  suffisamment petit), alors  $u(t, y) = 0$  pour tout  $y$  voisin de  $x$  et  $|t| < T - K\delta$ . ■

La preuve de cette remarque sera faite après celle du théorème 1.1.

On va d'abord prouver l'assertion suivante : "Pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $\epsilon > 0$ ,

il existe  $\delta < r_0$  ( $r_0$  suffisamment petit) et une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  avec  $\delta N < D + \epsilon''$ .

Soit  $\Gamma$  un arc (suffisamment régulier) joignant  $x_0$  à  $x$  et contenu dans  $\Omega$  tel que la longueur de  $\Gamma \leq D + \epsilon$ . On note  $g$  une paramétrisation de  $\Gamma$

$$g : [0, 1] \longrightarrow \Omega \text{ avec } g(0) = x_0 \text{ et } g(1) = x.$$

Soit  $\mu = \inf_{t \in [0, 1]} d(g(t), C_\Omega)$ , on a  $\mu > 0$ . En effet,

$$\begin{aligned} F : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto F(t) = d(g(t), C_\Omega) \end{aligned}$$

est une fonction continue sur un compact dont l'inf est atteint. Puisque  $F(t) = d(g(t), C_\Omega) > 0$  alors  $\mu > 0$ .

Pour chaque  $\delta \in ]0, \inf(\frac{\mu}{3}, r_0)[$ , on va construire une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  de la manière suivante. On construit par récurrence  $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_N = 1$ , et en posant  $\alpha_{j+1} = \sup\{\alpha \in [0, 1], |g(\alpha) - g(\alpha_j)| < \delta\}$ , si  $\alpha_j \neq 1$  on remarque que  $\alpha_j$  est une suite croissante.

On va voir que cette procédure s'arrête et que la suite  $\alpha_j$  est strictement croissante (c'est-à-dire que les éléments de la suite  $\alpha_j$  sont distincts et compris entre 0 et 1). Cela est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 1.11.** *Si  $\alpha_j \neq 1$  alors  $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| = \delta$ .*

**Preuve** Soit  $\alpha_j, \alpha_j \neq 1$ , tel que  $\alpha_j = \sup\{\alpha \in [0, 1], |g(\alpha) - g(\alpha_{j-1})| < \delta\}$ .

On a

$$|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| \leq \delta. \quad (1.21)$$

Par ailleurs  $\forall \alpha^{n'} \in [0, 1]$  tel que  $\alpha^{n'} > \alpha_j$  et  $\alpha^{n'} \longrightarrow \alpha_j$ , on a  $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha^{n'})| > \delta$ . En faisant tendre  $\alpha^{n'}$  vers  $\alpha_j$  on trouve

$$|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| \geq \delta. \quad (1.22)$$

En combinant (1.21) et (1.22) on obtient :

$$|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| = \delta \quad \text{pour } \alpha_j \neq 1.$$

Maintenant on va prouver que cette procédure s'arrête. Pour cela on procède par l'absurde. On suppose donc que pour tout  $j$ ,  $\alpha_j < 1$ , ce qui implique que  $\alpha_j$  converge, car  $\alpha_j$  est une suite croissante et majorée par 1, donc que  $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)|$  tend vers 0 ce qui contredit le lemme, d'où le résultat. ■

Nous allons maintenant montrer que  $B(g(\alpha_j), \delta)$ ,  $j = 0, \dots, N - 1$  est une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  sous les quatre conditions suivantes :

<sup>6</sup>Car  $g$  est continue.

<sup>7</sup>Car  $g$  est continue.

1.  $y_0 = g(\alpha_0) = g(0) = x_0$

2.  $x \in B(g(\alpha_{N-1}), 2\delta)$ .

En effet,  $|x - g(\alpha_{N-1})| = |g(\alpha_N) - g(\alpha_{N-1})| \leq \delta < 2\delta$

3.  $B(g(\alpha_{j-1}), \delta) \subset B(g(\alpha_j), 2\delta)$ ,  $j = 0, \dots, N-2$ .

En effet, si  $y \in B(g(\alpha_{j-1}), \delta)$ ,  $j = 0, \dots, N-2$ , alors

$$\begin{aligned} |y - g(\alpha_j)| &\leq |y - g(\alpha_{j-1})| + |g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| \\ &< 2\delta. \end{aligned}$$

4.  $B(g(\alpha_j), 3\delta) \subset \Omega$ .

En effet,  $3\delta < \mu$  car  $\delta \in ]0, \inf(\frac{\mu}{3}, r_0)[$ , d'où le résultat.

Il reste à majorer  $\delta N$ . On remarque que le segment  $I_j = [g(\alpha_j), g(\alpha_{j+1})]$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , est contenu dans  $\Omega$ , car  $B(g(\alpha_j), 3\delta) \subset \Omega$ . Il s'ensuit que  $|g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})|$  est inférieur à la longueur de  $\Gamma$  prise entre  $g(\alpha_j)$  et  $g(\alpha_{j+1})$ . Il vient donc

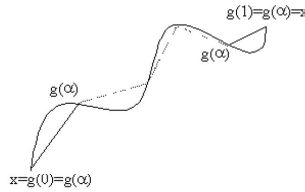
$$\sum_{j=0}^{N-1} |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})| \leq \text{longueur de } \Gamma \leq D + \epsilon. \quad (\text{Car la longueur de } \Gamma = \inf_{A_j \in \Omega} \sum_j A_j = \inf \sum_{j=0}^{N-1} |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})| \text{ où } A_j = |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})| \text{ (voir annexe théorème A.3)}).$$


Fig. 1.5. Longueur de  $\Gamma$ .

En tenant compte du lemme 1.11 on obtient :  $\delta N \leq D + \epsilon$ , ce qui achève la preuve de l'assertion. ■

**Conclusion** D'une part il découle du lemme 1.4 l'existence d'une constante  $K$  strictement positive ne dépendant que de  $C_1$  et  $C_2$ . D'autre part la remarque 1.10 et l'assertion (cf. page 35) nous permettent d'affirmer que :

$$u(t, y) = 0 \quad \text{pour } y \text{ voisin de } x \text{ et } |t| < T - K\delta N.$$

On en déduit que :

$$u(t, y) = 0 \quad \text{pour } y \text{ voisin de } x \text{ et } |t| < T - KD,$$

car  $\delta N \leq D + \epsilon \implies T - (D + \epsilon) \leq T - \delta N$ . Ce qui achève la démonstration du théorème 1.1. ■

**Preuve de la remarque 1.10.** Il suffit d'appliquer le lemme 1.4  $N$ -fois. En effet, supposons qu'il existe une  $\delta$ -suite de boule reliant  $x_0$  à  $x$  avec  $\delta < r_0$ ,  $r_0$  suffisamment petit.

Première application

Posons  $r = \delta > 0$  avec  $r < r_0$ . En vertu du lemme 1.4 on établit l'existence de  $K = K(C_1, C_2) > 0$ , telle que si  $(D_t^2 - A)u = 0$  pour  $(t, y)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(y_{N-1}, 3\delta)$  et  $u(t, y) = 0$  pour  $(t, y)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(y_{N-1}, \delta)$ , on a alors  $u(t, y) = 0$  pour  $|y - y_{N-1}| < 2\delta$  et  $|t| < T - \delta K$ .

Or  $B(y_{N-1}, \delta) \subset B(y_{N-2}, 2\delta)$  d'où :

Seconde application

En posant  $r = 2\delta$  et en supposant que  $r < r_0$  et  $B(y_{N-2}, 2\delta) \subset \Omega$ , on déduit, à partir du lemme 1.4, l'existence de  $K = K(C_1, C_2) > 0$  telle que si  $(D_t^2 - A)u = 0$  pour  $(t, y)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(y_{N-2}, 6\delta)$  et  $u(t, y) = 0$  pour  $(t, y)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(y_{N-2}, 2\delta)$ , alors  $u(t, y) = 0$  pour  $|y - y_{N-2}| < 4\delta$  et  $|t| < T - 2\delta K$ .

Par itération on obtient la dernière étape en supposant que

$$B(y_1, (N-1)\delta) \subset B(y_0, N\delta).$$

$N$ -ème application

En posant  $r = N\delta$  et en supposant que  $r < r_0$  et  $B(y_0, N\delta) \subset \Omega$ , le lemme 1.4 implique l'existence de  $K = K(C_1, C_2) > 0$ , telle que si  $(D_t^2 - A)u = 0$  pour  $(t, y)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(y_0, 3N\delta)$  et  $u(t, y) = 0$  pour  $(t, y)$  appartenant à  $[-T, T] \times B(y_0, N\delta)$ , alors  $u(t, y) = 0$  pour  $|y - y_0| < 2N\delta$  et  $|t| < T - N\delta K$ , avec  $y = y_N$  et  $x = y_0$ , d'où le résultat. ■

# Chapitre 2

## Inégalité d'observabilité du type logarithmique et estimation de la fonction de coût des solutions des équations hyperboliques

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	20
2	Hypothèses et résultats . . . . .	23
3	Inégalité d'observabilité du type logarithmique . . .	24
4	Fonction de coût . . . . .	25
5	Inégalités d'interpolation et de Carleman . . . . .	28
	Inégalité d'interpolation . . . . .	28
	Inégalité de Carleman au bord . . . . .	28
	Inégalité d'interpolation locale . . . . .	38
6	Rappel sur les fonctions F.B.I. . . . .	44
	Fonctions F.B.I. . . . .	44
	Estimation de $u$ . . . . .	45

---

### 1 Introduction

**N**ous nous intéressons ici au problème de contrôle des solutions des équations hyperboliques. Le cadre fonctionnel a été dégagé par J.-L. Lions [Li88] qui a introduit la méthode H.U.M (Hilbert Uniqueness Method) qui consiste à étudier l'ensemble des conditions initiales d'un problème d'évolution qui peuvent être annulées en un temps fini  $T$  en exerçant un contrôle d'énergie finie sur le bord. Ce résultat repose d'une façon fondamentale sur un théorème d'unicité qui permet de construire un espace de Hilbert dense dans l'espace d'énergie. Ce théorème d'unicité est une conséquence du théorème de Holmgren dans le cadre analytique. Dans le cas d'un opérateur hyperbolique scalaire d'ordre deux,  $D_t^2 - A(t, x, D_x)$ ,

Alinhac [Al83] et Alinhac-Baouendi [AlBa95] ont montré que la régularité  $C^\infty$  des coefficients de l'opérateur elliptique  $A$  ne suffit pas pour avoir l'unicité par rapport à une surface de type temps. En effet il existe deux fonctions de classe  $C^\infty$   $a(t, x)$  et  $u(t, x)$  telles que  $(D_t^2 - \Delta + a(t, x))u(t, x) = 0$  dans un voisinage  $V$  de  $(t, x) = (0, 0)$  et  $\text{supp } u \subset \{x = (x_1, x'); x_1 \geq -\delta|x'|\}$  où  $\delta > 0$ . Par la suite, il a été observé par Robbiano [Ro91], que lorsque l'opérateur  $A$  ne dépend pas du temps nous avons un résultat d'unicité adapté à la théorie de contrôle. Ce résultat a été amélioré, dans un premier temps, par Hörmander [Hö92] qui a donné une estimation précise et quasiment optimale du temps minimal pendant lequel le contrôle doit agir, puis par Tataru [Ta95, Ta96]. Récemment, Hörmander [Hö96] d'une part et Robbiano-Zuily [RoZu98] et Tataru [TA99] d'autre part ont démontré un théorème d'unicité locale pour les opérateurs différentiels, scalaires, à coefficients  $C^\infty$ , partiellement holomorphes, où les hypothèses usuelles de Hörmander (principal normalité et pseudo-convexité) sont faites uniquement sur le conormal des variables analytiques.

Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92] ont montré qu'il existe un lien entre les rayons de la géométrie optique et le problème de la contrôlabilité exacte, une condition de contrôle géométrique, suffisante et presque nécessaire, pour obtenir l'observabilité de ces problèmes. Sans cette condition de contrôle géométrique, Robbiano [Ro95] prouve un estimateur d'observabilité logarithmique (mais avec  $T$  suffisamment large à cause de la vitesse de propagation finie) et démontre comment l'utiliser afin d'obtenir un résultat de contrôle approximatif avec une estimation du coût du contrôle.

Les problèmes de contrôlabilité et d'observabilité ont été également étudiés dans le cas des problèmes paraboliques, Fursikov-Imanivilov [FuIm96] et Lebeau-Robbiano [LRo95] ont montré une contrôlabilité exactement nulle, sans restriction sur le temps de contrôle ou sur le support de la fonction de contrôle, se sont inspiré de la méthode de Russell [Ru73] qui a introduit une transformation pour montrer que l'équation de chaleur entraîne une contrôlabilité nulle pour toutes les valeurs du temps, et ce à partir de la contrôlabilité exacte de l'équation d'onde pour un certain intervalle (certaines valeurs) du temps. Fernandez-Cara-Zuazua [FCZu00] ont également démontré un estimateur d'observabilité, explicite dans le temps. Récemment Miller [Mi04, Mi05] a montré la contrôlabilité nulle pour un temps assez petit et dans des domaines non bornés. Ces problèmes de contrôlabilité et d'observabilité ont encore été étudiés dans Lebeau [Lb92], Fabre [Fa92], Lasiacka-Tariggiani [LaTr92] et Burq [Bu93] ainsi que Machtyngier [Ma94] et Phung [Ph01] pour l'équation de Schrödinger dans le cas où le contrôle agit sur une partie du bord.

Dans ce chapitre nous reprenons d'une part les estimations du chapitre un pour donner un résultat quantitatif d'unicité. Plus précisément, soit  $u$  la solution d'un problème hyperbolique dans un ouvert avec la dérivée normale nulle au bord, nous avons prouvé dans le chapitre un, que si  $u$  est nulle sur un ouvert du bord pendant un temps suffisamment grand alors  $u$  est nulle. D'autre part nous prouvons une majoration des données de  $u$  par la trace de  $u$  en norme  $L^2$  restreinte à un ouvert du bord pendant un temps suffisamment grand. Une estimation du même type que celle obtenue ici avec la norme de la trace de  $u$  sur le bord dans  $H^1$

résulte des travaux précédents sur le sujet. L'estimation naturelle pour le problème de Neumann et avec la norme  $L^2$  de la trace de  $u$  sur le bord et ceci nous a conduit à prouver une estimation de Carleman adaptée (voir Proposition 2.8 p. 29). Cette majoration n'est pas linéaire comme dans le cas traité par Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92] mais logarithmique. Ce type d'estimation a été donné par John [Jo60] dans le cadre analytique. Dans les cas où l'unicité se démontre par une inégalité de Carleman, Isakov [Is80] et Bahouri [Ba87] ont montré que nous obtenons ce que John appelle des inégalités de type Hölder. En reprenant les mêmes idées, nous prouvons que les estimations de Robbiano [Ro91] donnent des estimations logarithmiques des données par la trace de  $u$ . Nous donnons ensuite une estimation de la fonction de coût notée  $C(\epsilon)$  de ce problème du type  $C \exp(C/\epsilon^2)$ .

Ce type d'estimations logarithmiques a été également utilisé pour des problèmes paraboliques. Phung [Ph04] a donné la contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur avec un potentiel, et pour l'équation de Schrödinger, il a montré une estimation logarithmique en absence de contrôle géométrique dans [Ph01]. Duyckaerts [Du02], Zhang-Zuazua [ZhZu06] et Duyckaerts-Zhang-Zuazua [DZZ06] utilisent ces estimations pour des problèmes d'interaction onde-chaleur qui donnent le taux de décroissance logarithmique lorsque l'équation de la chaleur ne satisfait pas la condition de contrôle géométrique.

### Remarques

Il est probablement possible d'avoir les mêmes résultats de ce chapitre quand la régularité des coefficients du problème hyperbolique est abaissée. Cela nécessiterait de remplacer l'utilisation du calcul pseudo-différentiel par d'autres outils adaptés à des opérateurs à régularité limitée.

Les résultats sur le contrôle pour l'équation des ondes ont été obtenus dans le cadre de la contrôlabilité exacte soit par des méthodes de multiplicateur soit par des techniques micro-locales (propagation d'onde ou mesures micro-locales) et sont équivalents à des estimations linéaires d'observabilité.

Lebeau [L92] a prouvé, dans un cadre analytique, des résultats très précis sur l'espace atteignable qui ont pour conséquences des estimations logarithmiques d'observabilité. Dans le cadre  $C^\infty$ , des estimations d'observabilité du même type peuvent être prouvées par des techniques issues des inégalités de Carleman, mais avec des puissances moins bonnes. La transition entre les deux phénomènes – que l'on pourrait schématiser par les hautes fréquences pour la contrôlabilité exacte et par les moyennes, fréquences dans le deuxième cas – n'est pas claire. Pour des systèmes couplés, des estimations d'observabilité polynomiales ont été prouvées mais ce type de phénomène semble lié au couplage plutôt qu'à la transition hautes-moyennes fréquences (voir les travaux de Rauch-Zhang-Zuazua [RZZ05], Zhang-Zuazua [ZhZu03, ZZu03]).

## 2 Hypothèses et résultats

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^\infty$ , soit  $\Gamma$  une partie ouverte non vide de  $\partial\Omega$  on note :

$$\Omega_T = (0, T) \times \Omega \quad \text{et} \quad \Gamma_T = (0, T) \times \Gamma,$$

Soit  $A(x, D_x)$  un opérateur elliptique de la forme suivante :

$$A(x, D_x) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} D_j(a_{j,k}(x)D_k) + \sum_{j=1}^n D_j a_j(x) + a_0(x) \quad \text{où} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On suppose que  $(a_{j,k}(x))_{1 \leq j, k \leq n}$  est une matrice symétrique définie positive et qu'il existe une constante positive  $C_1$  telle que, pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  on ait :

$$\sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k \geq C_1 |\xi|^2,$$

les fonctions  $a_{j,k}$ ,  $a_j$  et  $a_0$  vérifiant :

$$a_{j,k} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{pour} \quad 1 \leq j, k \leq n$$

$$a_j \in L^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{pour} \quad j = 0, \dots, n,$$

il existe donc une constante positive  $C_2$  telle que pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  on ait :

$$C_2 |\xi|^2 \geq \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k.$$

On note  $B = \partial_{\eta_A} = - \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k}(x) \eta_j D_k$  la dérivée conormale extérieure à  $\Omega$  où  $\eta(x) = (\eta_j(x))_{1 \leq j \leq n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en  $x$  et  $C = \partial_{\eta_A} - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j(x) \eta_j$ .

On s'intéresse ici au problème hyperbolique d'évolution avec contrôle du type Neumann sur la frontière du problème.

On note

$$W_0 = H^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega); \quad W_{-1} = L^2(\Omega) \oplus (H^1)'(\Omega)$$

où  $(H^1)'(\Omega)$  est le dual de  $H^1(\Omega)$ . Les espaces  $W_0$  et  $W_{-1}$  sont en dualité par la forme bilinéaire, suivante :

Si  $\vec{v} = (v_0, v_1) \in W_{-1}$ ,  $\vec{u} = (u_0, u_1) \in W_0$  alors  $(\vec{v}, \vec{u}) = (u_0 | v_1) - (u_1 | v_0)$  où  $(\cdot | \cdot)$  est soit le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ , soit la dualité entre  $H^1(\Omega)$  et  $(H^1)'(\Omega)$ .

Pour  $\vec{u} = (u_0, u_1) \in W_0$  on note encore  $u(t, x)$  la solution appartenant à  $C^0(\mathbb{R}, H^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ <sup>1</sup> du problème homogène direct :

$$\begin{cases} [D_t^2 - A(x, D)]u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 & \text{dans } \Omega \\ Cu = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Par ailleurs si  $C\phi = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $\text{supp } \phi|_{\partial\Omega} \subset \Gamma$  (pour  $\phi$  et  $\psi$  suffisamment régulières) on a :

$$\int_{\Omega} [A\phi\bar{\psi} - \phi\overline{A^*\psi}]dx = \int_{\Gamma} \phi\partial_{\eta_A}\bar{\psi}d\sigma. \quad (2.2)$$

La formule (2.2) (pour plus de détails voir annexe) permet de prouver par la méthode de transposition (cf. Lions-Magenes [LiMa68]) que le problème rétrograde non homogène suivant est bien posé.

Soit  $g \in L^2(\Gamma_T)$ , on peut alors résoudre :

$$\begin{cases} [D_t^2 - A^*(x, D)]v = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \\ v|_{t=T} = \partial_t v|_{t=T} = 0 & \text{dans } \Omega \\ Bv = g\mathbf{1}_{\Gamma_T} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $v \in C^0(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, (H^1(\Omega))')$ .

On définit ainsi  $\mathcal{S}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : L^2(\Gamma_T) &\longrightarrow W_{-1} \\ g &\mapsto \mathcal{S}g = \vec{v} = (v|_{t=0}, \partial_t v|_{t=0}). \end{aligned}$$

On pose  $F = \text{Im}(\mathcal{S})$  (tel que  $\|\vec{v}\|_F = \inf\{\|g\|_{L^2(\Gamma_T)}; \mathcal{S}g = \vec{v}\}$ ), ceci nous permet de dire que si  $\vec{v} \in F$  il existe  $g \in L^2(\Gamma_T)$  tel que  $\vec{v} = \mathcal{S}(g)$  solution du problème d'évolution :

$$\begin{cases} [D_t^2 - A(x, D)]v = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \\ v(0, x) = v_0, \partial_t v(0, x) = v_1 & \text{dans } \Omega \\ Bv = g\mathbf{1}_{\Gamma_T} & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

qui est contrôlable par définition.

Les résultats principaux de ce chapitre sont :

### 3 Inégalité d'observabilité du type logarithmique

Sous les hypothèses citées dans la section 2 on a le théorème 2.1 suivant :

**Théorème 2.1.** *Il existe des constantes  $T > 0$  et  $C > 0$  telles que pour tout  $\vec{u} \in W_0$  on ait*

$$\|\vec{u}\|_{W_{-1}} \leq \frac{C\|\vec{u}\|_{W_0}}{\left[\log\left(2 + \frac{\|\vec{u}\|_{W_0}}{\|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

La démonstration du théorème 2.1 est donnée dans les pages 45-49.

<sup>1</sup>Voir Lions-Magenes [LiMa68], page 286.

## 4 Fonction de coût

Sous les hypothèses citées dans la section 2 on a le théorème 2.2 suivant :

**Théorème 2.2.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\vec{u} \in W_0$ ,  $\|\vec{u}\|_{W_0} \leq 1$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\vec{y} \in F$  et  $\vec{z} \in W_{-1}$  tels que  $\vec{u} = \vec{z} + \vec{y}$  avec  $\|\vec{y}\|_F \leq Ce^{\frac{C}{\epsilon^2}}$ ,  $\|\vec{z}\|_{W_{-1}} \leq \epsilon$ .*

**Remarque 2.3.**

1.  $F$  dépend de  $T$ . Pour le théorème 2.2 il s'agit du  $F$  défini avec le temps  $T$  du théorème 2.1.

2. On peut réécrire le théorème 2.2 en utilisant les fonctions de coût.

On introduit la fonction de coût  $C(\epsilon)$  de la manière suivante :

posons

$$C_{\vec{u}}(\epsilon) = \inf\{\|\vec{y}\|_F; \vec{u} = \vec{y} + \vec{z}, \|\vec{z}\|_{W_{-1}} \leq \epsilon\},$$

la fonction de coût est alors définie par :

$$C(\epsilon) = \sup\{C_{\vec{u}}(\epsilon); \vec{u} \in W_0, \|\vec{u}\|_{W_0} \leq 1\}.$$

■

**Corollaire 2.4.** *Il existe une constante  $C > 0$ , telle que*

$$C(\epsilon) \leq Ce^{\frac{C}{\epsilon^2}} \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

On va commencer par prouver le théorème 2.2 en supposant démontré le théorème 2.1.

**Preuve du théorème 2.2.**

D'abord on définit l'opérateur continu suivant :

$$\begin{aligned} K : W_0 &\rightarrow L^2(\Gamma_T) \\ \vec{u} &\mapsto K\vec{u} = u\mathbf{1}_{\Gamma_T} \end{aligned}$$

puis on rappelle le lien entre les deux opérateurs  $\mathcal{S}$  et  $K$ , pour cela on applique la formule (2.2) à  $\Phi = u$  solution du problème (2.1) et  $\Psi = v$  solution du problème (2.3). On remplace  $Au$  par  $D_t^2 u$  et  $A^*v$  par  $D_t^2 v$  puis on intègre entre 0 et  $T$ , en effectuant une intégration par parties :

$$\langle \mathcal{S}(g), \vec{u} \rangle = \int_0^T \int_{\Gamma} K(\vec{u})(x, t) \overline{g(x, t)} d\sigma dt. \quad (2.5)$$

On note  $\Lambda : W_{-1} \rightarrow W_0$  l'opérateur tel que pour tout  $\vec{u} \in W_0$  et  $\vec{v} \in W_{-1}$ ,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (\Lambda \vec{v}, \vec{u})_{W_0}$  où  $(\cdot, \cdot)_{W_0}$  est le produit scalaire de  $W_0$ .

L'opérateur  $\Lambda$  est bien défini (d'après le théorème de représentation de Riesz).

On note  $\mathcal{B} : W_0 \rightarrow W_0$ ;  $\mathcal{B} = \Lambda \circ \mathcal{S} \circ K$  En posant  $g = K\vec{u}$  dans (2.5) on trouve :

$$(\mathcal{B}\vec{u}, \vec{u})_{W_0} = \int_0^T \int_{\Gamma} |K(\vec{u})|^2 d\sigma dt. \quad (2.6)$$

Ce qui implique que l'opérateur  $\mathcal{B}$  est borné, positif et autoadjoint.

On note  $E_\lambda$  le projecteur spectral associé à  $\mathcal{B}$ , on a  $\text{supp } dE_\lambda \subset [0, \|K\|]$  et :

$$\vec{u} = \int_0^{+\infty} dE_\lambda \vec{u}, \text{ et } \mathcal{B}\vec{u} = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda \vec{u}.$$

On note  $C_n = Ce^{-e^n}$  avec  $C$  assez grand qui sera choisi ultérieurement et

$$G_n \vec{u} = \int 1_{(C_{n+1}, C_n)} dE_\lambda \vec{u} = E_{C_n}(\vec{u}) - E_{C_{n+1}}(\vec{u})$$

donc  $\vec{u} = \sum_{n \geq 0} G_n \vec{u}$  si  $Ce^{-1} \geq \|K\|$  de plus on a :

$$\begin{aligned} \|KG_n \vec{u}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 &= (\mathcal{B}G_n \vec{u}, G_n \vec{u})_{W_0} \\ &= \int \lambda 1_{(C_{n+1}, C_n]}(dE_\lambda G_n \vec{u}, G_n \vec{u})_{W_0}, \end{aligned}$$

on a clairement  $C_{n+1} \|G_n \vec{u}\|_{W_0}^2 \leq \|KG_n \vec{u}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \leq C_n \|G_n \vec{u}\|_{W_0}^2$ .

Notons  $d_n = \frac{1}{C} e^{e^n} = C_n^{-1}$  on obtient

$$d_n \|KG_n \vec{u}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \leq \|G_n \vec{u}\|_{W_0}^2 \leq d_{n+1} \|KG_n \vec{u}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2. \quad (2.7)$$

On note l'espace  $F'$ , dual de  $F$  qui est le complété de  $W_0$  pour la norme  $\|K\vec{u}\|_{L^2(\Gamma_T)}$ .

### Estimation de la norme de $G_n \vec{u}$ dans $W_{-1}$

Il découle du théorème 2.1 :

$$\|G_n \vec{u}\|_{W_{-1}} \leq \frac{C \|G_n \vec{u}\|_{W_0}}{\left[ \log \left( 2 + \frac{\|G_n \vec{u}\|_{W_0}}{\|KG_n \vec{u}\|_{L^2(\Gamma_T)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

de l'inégalité (2.7) on déduit

$$\|G_n \vec{u}\|_{W_{-1}} \leq Ce^{-\frac{n}{2}} \|G_n \vec{u}\|_{W_0}. \quad (2.8)$$

On munit  $W_0$  de la norme :  $\sum_{n \geq 0} e^{-\frac{n}{2}} \|G_n \vec{u}\|_{W_0}$  et on pose  $H$  son complété pour cette norme (on note  $\|\cdot\|_H$  la norme de cet espace).

On a grâce à (2.8), la propriété :  $H \subset W_{-1}$ .

On munit également  $W_0$  de la norme :  $\sum_{n \geq 0} e^{-\frac{e^{n+1}}{2}} \|G_n \vec{u}\|_{W_0}$  et on pose  $I$  son complété pour cette norme (on note  $\|\cdot\|_I$  la norme de cet espace).

Grâce à (2.7) on a que  $F' \subset I$ , on en déduit alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{c} W_0 \subset H \subset F' \subset I \\ \cap \\ W_{-1}. \end{array}$$

Par la dualité entre  $W_0$  et  $W_{-1}$  on obtient

$$\begin{aligned} I' \subset F \subset H' \subset W_{-1} \\ \cup \\ W_0. \end{aligned}$$

La description de  $H'$  et de  $I'$  est obtenue comme suit :

On note  $\widetilde{E}_\lambda$  l'opérateur dans  $W_{-1}$  déduit par dualité de  $E_\lambda$  c'est-à-dire pour tout  $\vec{v} \in W_{-1}$  et  $\vec{u} \in W_0$  on a

$$\langle \vec{v}, E_\lambda \vec{u} \rangle = \langle \widetilde{E}_\lambda \vec{v}, \vec{u} \rangle \quad (2.9)$$

et notant

$$\widetilde{G}_n = \int 1_{(C_{n+1}, C_n)} d\widetilde{E}_\lambda,$$

on a clairement si  $k \neq n$ ,  $\langle \widetilde{G}_n \vec{v}, G_k \vec{u} \rangle = 0$ .

Il est alors facile de vérifier que

$$H' = \left\{ \vec{v} \in W_{-1}; \sup_{n \geq 0} e^{\frac{n}{2}} \|\widetilde{G}_n \vec{v}\|_{W_{-1}} < +\infty \right\}$$

et

$$I' = \left\{ \vec{v} \in W_{-1}; \sup_{n \geq 0} e^{\frac{\epsilon^{n+1}}{2}} \|\widetilde{G}_n \vec{v}\|_{W_{-1}} < \infty \right\}.$$

Soit  $\vec{u} \in W_0$ ,  $\|\vec{u}\|_{W_0} \leq 1$  puisque  $W_0 \subset H'$  alors

$$\|\widetilde{G}_n \vec{u}\|_{W_{-1}} \leq C e^{-\frac{n}{2}} \|\vec{u}\|_{W_0} \leq C e^{-\frac{n}{2}}; \quad (2.10)$$

d'autre part on a  $\vec{u} = \sum_{n \geq 0} \widetilde{G}_n \vec{u}$ .

On note  $\vec{y} = \sum_{n=0}^N \widetilde{G}_n \vec{u}$  et  $\vec{z} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \widetilde{G}_n \vec{u}$ , où  $N$  sera choisi plus loin

En vertu de (2.10) on obtient (où les constantes  $C$  peuvent changer de ligne en ligne)

$$\sup_{n \geq 0} e^{\frac{\epsilon^{n+1}}{2}} \|\widetilde{G}_n \vec{y}\|_{W_{-1}} \leq \sup_{n \geq 0} \sum_{n=0}^N C e^{\frac{\epsilon^{n+1}}{2}} \cdot e^{-\frac{\epsilon^n}{2}} \leq C e^{C\epsilon^N}$$

$$\text{et } \|\vec{z}\|_{W_{-1}} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|\widetilde{G}_n \vec{u}\|_{W_{-1}} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} C e^{-\frac{n}{2}} \leq C e^{-\frac{N+1}{2}}. ^2$$

Pour  $\epsilon$  donné soit  $N$  tel que  $C e^{-\frac{N}{2}} > \epsilon \geq C e^{-\frac{(N+1)}{2}}$ , il en résulte alors  $\|\vec{z}\|_{W_{-1}} \leq \epsilon$  et  $\|\vec{y}\|_{I'} \leq C e^{\frac{C}{\epsilon^2}}$ , ce qui prouve le théorème 2.2 puisque  $I' \subset F$ . ■

<sup>2</sup>Car  $= \sum_{n \geq 0} e^{-\frac{n}{2}}$  est une série géométrique de raison  $e^{-\frac{1}{2}}$ .

## 5 Inégalités d'interpolation et de Carleman

### Inégalité d'interpolation

Soient  $s_0 > 0$ ,  $X = ]-s_0, s_0[ \times \Omega$ ,  $\partial X = ]-s_0, s_0[ \times \partial\Omega$  et  $v \in C^\infty(X)$  la solution de

$$\begin{cases} Qv = [D_s^2 + A(x, D_x)]v = v_0 & \text{sur } X \\ Bv = v_1 & \text{sur } \partial X. \end{cases} \quad (2.11)$$

Soit  $\Gamma$  un ouvert non vide de  $\partial\Omega$ , on note  $\Gamma_{s_0} = ]-s_0, s_0[ \times \Gamma$  et  $Y = ]-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}[ \times \Omega$ .

**Théorème 2.5.** *Il existe  $C > 0$  et  $\mu \in ]0, 1[$  tels que pour toute solution  $v$  de (2.11), on a*

$$\|v\|_{H^1(Y)} \leq C (\|Qv\|_{L^2(X)} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} + \|v|_{\Gamma_{s_0}}\|_{L^2(\partial X)})^\mu (\|v\|_{H^1(X)})^{1-\mu}. \quad (2.12)$$

**Remarque 2.6.** Une inégalité de ce type a déjà été prouvée dans Lebeau-Robbiano [LRo95] pour une autre condition au bord. La preuve du théorème 2.5, repose sur les résultats de Lebeau-Robbiano [LRo95, LRo97]. ■

**Proposition 2.7.** *Il existe  $C > 0$ ,  $\mu \in ]0, 1[$ , un ouvert  $U$  non vide de  $\Omega$  et  $\epsilon > 0$  tels que pour tout  $v \in H^2(X)$ , on ait en posant  $U_0 = ]-\epsilon, \epsilon[ \times U$  les inégalités d'interpolations*

$$\|v\|_{L^2(U_0)} \leq C (\|Qv\|_{L^2(X)} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} + \|v|_{\Gamma_{s_0}}\|_{L^2(\partial X)})^\mu (\|v\|_{H^1(X)})^{1-\mu}, \quad (2.13)$$

$$\|v\|_{H^1(Y)} \leq C (\|Qv\|_{L^2(X)} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} + \|v\|_{L^2(U_0)})^\mu (\|v\|_{H^1(X)})^{1-\mu}. \quad (2.14)$$

#### Preuve du théorème 2.5.

- Si  $\|v\|_{L^2(U_0)} \leq \|Qv\|_{L^2(X)} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)}$  alors (2.14) nous donne (2.12).

- sinon (2.14) s'écrit  $\|v\|_{H^1(Y)} \leq C' \|v\|_{L^2(U_0)}^\mu \|v\|_{H^1(X)}^{1-\mu}$  et en utilisant (2.13) on obtient

$$\|v\|_{H^1(Y)} \leq C' (\|Qv\|_{L^2(X)} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} + \|v|_{\Gamma_{s_0}}\|_{L^2(\partial X)})^\mu (\|v\|_{H^1(X)})^{1-\mu}$$

ce qui implique (2.12). ■

Pour démontré la proposition 2.7 nous allons suivre essentiellement la méthode de Robbiano [Ro95].

### Inégalité de Carleman au bord

Soient  $x' = (x_0, x'')$ ,  $x = (x', x_n)$ ,  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_n \geq 0\}$  et  $K = \{x \in \mathbb{R}_+^{n+1}; |x| \leq r_0\}$ . On note  $C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  à support dans  $K$  et pour  $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ,  $f_0 = f|_{x_n=0}$ .

Soit

$$\tilde{Q} = D_{x_n}^2 + R(x, D_{x'}) \quad (2.15)$$

avec  $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$ , un opérateur différentiel du second ordre à coefficients  $C^\infty$  au voisinage de  $K$ , on note  $r(x, \xi')$  le symbole principal de  $R$ , et on suppose

$$r(x, \xi') \in \mathbb{R} \text{ et } \exists c > 0, \forall (x, \xi') \in K \times \mathbb{R}^n; \quad r(x, \xi') \geq c|\xi'|^2. \quad (2.16)$$

Soit  $\varphi(x)$  une fonction  $C^\infty$  réelle définie au voisinage de  $K$  et  $\gamma$  un paramètre assez grand.

On note

$$q_\varphi(x, \xi) = (\xi_n + i\gamma\varphi'_{x_n})^2 + r(x, \xi' + i\gamma\varphi'_{x'}) \quad (2.17)$$

et on suppose que la fonction  $\varphi$  vérifie

$$\forall x \in K; \quad \varphi'_{x_n}(x) \neq 0 \quad (2.18)$$

et l'hypothèse d'hypoellipticité de Hörmander

$$\forall (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^{n+1}; \quad q_\varphi(x, \xi) = 0 \implies \{\operatorname{Re} q_\varphi, \frac{1}{\gamma}\operatorname{Im} q_\varphi\}(x, \xi) > 0. \quad (2.19)$$

On pose  $(f|g) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f\bar{g}dx$ ,  $\|f\|_0^2 = (f|f)$ ,  $(f_0|g_0)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f_0\bar{g}_0dx'$ ,  $\|f_0\|_0^2 = (f_0|f_0)_0$ ,  $\|f\|_1^2 = \gamma^2\|f\|_0^2 + \sum_{j=0}^n \|\partial_{x_j}f\|_0^2$  et pour  $s \in \mathbb{R}$   $|f|_s = \|\Lambda^s f\|_0$  où  $\Lambda^s$  a pour symbole  $(\gamma^2 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}}$ .

**Proposition 2.8.** *Soit  $\varphi$  vérifiant (2.18) et (2.19). Il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on ait*

$$\gamma^{-2}\|e^{\gamma\varphi}\tilde{Q}f\|_0^2 + \gamma\|e^{\gamma\varphi}f_0\|_0^2 + \gamma^{-1}\|e^{\gamma\varphi}\partial_{x_n}f|_{x_n=0}\|_0^2 \geq C\gamma\|e^{\gamma\varphi}f\|_0^2.$$

**Remarque 2.9.** Une estimation de ce type avec  $\|e^{\gamma\varphi}f_0\|_1^2$  à la place de  $\|e^{\gamma\varphi}f_0\|_0^2$  a fait l'objet du travail de Lebeau-Robbiano [LRo95]. Pour le problème qui nous intéresse nous devons obtenir une estimation avec  $f_0 \in L^2$ . C'est ce que nous montrons dans la suite. ■

**Proposition 2.10.** *Soit  $\varphi$  vérifiant (2.19) et  $\partial_{x_n}\varphi(x', 0) > 0$  pour tout  $(x', 0) \in K$ . Alors il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on ait*

$$\|e^{\gamma\varphi}\tilde{Q}f\|_0^2 + \gamma\|e^{\gamma\varphi}\partial_{x_n}f|_{x_n=0}\|_0^2 \geq C\gamma(\|e^{\gamma\varphi}f\|_1^2 + \|e^{\gamma\varphi}f_0\|_1^2).$$

**Proposition 2.11.** *Soit  $\varphi$  vérifiant (2.19) et  $\partial_{x_n}\varphi(x', 0) > 0$  pour tout  $(x', 0) \in K$ . Il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , vérifiant  $f_0 = f|_{x_n=0} = 0$  on ait*

$$\|e^{\gamma\varphi}Qf\|_0^2 \geq C\gamma\|e^{\gamma\varphi}f\|_1^2.$$

Les preuves des propositions 2.8-2.11 sont les conséquences respectives des propositions 2.12-2.14 énoncées ci-dessous. Ces preuves se font classiquement en conjuguant  $Q$  par la fonction poids  $e^{\gamma\varphi}$ , plus précisément posons

$$Q_\varphi = e^{\gamma\varphi} \circ \tilde{Q} \circ e^{-\gamma\varphi}.$$

**Proposition 2.12.** *Soit  $\varphi$  vérifiant (2.18) et (2.19). Il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $h \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on ait*

$$\gamma^{-2} \|Q_\varphi h\|_0^2 + \gamma \|h|_{x_n=0}\|_0^2 + \gamma^{-1} \|\partial_{x_n} h|_{x_n=0}\|_0^2 \geq C\gamma \|h\|_0^2.$$

**Proposition 2.13.** *Soit  $\varphi$  vérifiant (2.19) et  $\partial_{x_n} \varphi(x', 0) > 0$  pour tout  $(x', 0) \in K$ . Alors il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $h \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on ait*

$$\|Q_\varphi h\|_0^2 + \gamma \|(\partial_{x_n} - \gamma \varphi'_{x_n})h|_{x_n=0}\|_0^2 \geq C\gamma (\|h\|_1^2 + \|h|_{x_n=0}\|_1^2).$$

**Proposition 2.14.** *Soit  $\varphi$  vérifiant (2.19) et  $\partial_{x_n} \varphi(x', 0) > 0$  pour tout  $(x', 0) \in K$ . Il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $h \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , vérifiant  $h_0 = h|_{x_n=0} = 0$  on ait*

$$\|Q_\varphi h\|_0^2 \geq C\gamma \|h\|_1^2.$$

**Remarque 2.15.** Montrons tout d'abord que la condition (2.19) peut toujours être réalisée quitte à changer la fonction  $\varphi$  mais en gardant les même lignes de niveau  $\varphi = cste$ . ■

Soit  $\psi$  une fonction  $C^\infty$  à support compact dont la dérivée ne s'annule jamais, et  $g$  une fonction croissante on définit  $\varphi$  par  $\varphi(x) = g(\psi(x))$

on a

$$q_\varphi(x, \xi) = q(x, \xi) - q(x, \gamma \varphi'_x) + 2i\tilde{q}(x, \xi, \gamma \varphi'_x)$$

où  $q(x, \xi)$  est la forme quadratique suivante :

$$q(x, \xi) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k$$

et  $\tilde{q}(x, \xi, \zeta)$  la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique  $q(x, \xi)$  on a

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{Re} q_\varphi, \frac{\operatorname{Im}}{\gamma} q_\varphi \right\} &= \partial_\xi \operatorname{Re} q_\varphi \partial_x \frac{\operatorname{Im}}{\gamma} q_\varphi - \partial_\xi \frac{\operatorname{Im}}{\gamma} q_\varphi \partial_x \operatorname{Re} q_\varphi \\ &= \frac{\operatorname{Im}}{\gamma} \left[ \partial_\xi q(x, \xi - i\gamma \varphi'_x) \partial_x q(x, \xi + i\gamma \varphi'_x) \right] \\ &\quad + {}^t \left[ \partial_\xi q(x, \xi - i\gamma \varphi'_x) \right] (\varphi''_x) (\partial_\xi q(x, \xi + i\gamma \varphi'_x)). \end{aligned}$$

Si on remplace  $\varphi$  par  $\varphi = g(\psi)$  avec  $g$  strictement croissante, on obtient en notant  $\xi = g'(\psi)\eta$  :

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{Re} q_\varphi, \frac{\operatorname{Im}}{\gamma} q_\varphi \right\} (x, \xi) &= |g'(\psi)|^3 \left[ \left\{ \operatorname{Re} q_\psi, \frac{\operatorname{Im}}{\gamma} q_\psi \right\} (x, \eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g''(\psi)}{g'(\psi)} |\psi'(x) \partial_\eta q(x, \eta + i\gamma \psi'(x))|^2 \right] \end{aligned}$$

et

$$|\psi'(x)\partial_\eta q(x, \eta + i\gamma\psi'(x))|^2 = 4[\gamma^2|q(x, \psi')|^2 + |\tilde{q}(x, \eta, \psi')|^2],$$

on a

$$q_\varphi = 0 \iff q(x, \eta + i\gamma\psi') = 0.$$

- Si  $\gamma = 0$  on déduit que  $q(x, \xi) = 0$  ce qui n'est pas vrai, car pour tout  $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$ ,  $q(x, \xi) \geq C|\xi|^2$ .

- Si  $\gamma \neq 0$  on a  $\tilde{q}(x, \eta, \psi') = 0$  donc  $|\psi'(x)\partial_\eta q(x, \eta + i\gamma\psi'(x))|^2 = 4\gamma^2|q(x, \psi')|^2 > 0$ , prenons  $g(z) = e^{\beta z}$ , on a  $\frac{g''(z)}{g'(z)} = \beta$ , le terme  $\{\operatorname{Re} q_\psi, \frac{\operatorname{Im} q_\psi}{\gamma}\}(x, \eta)$  est borné par  $Cst(\gamma^2 + \eta^2)$  en prenant  $\beta$  assez grand, on réalise alors la condition (2.19) pour  $\varphi = e^{\beta\psi}$ .

**Preuves des propositions 2.12-2.14.** Nous commençons par introduire des notations et de rappeler quelques formules.

On note  $\mathcal{S}^j$  l'espace des symboles tangentiels  $a(x, \xi', \gamma)$ ,  $C^\infty$  en  $x$  au voisinage de  $K$ ,  $\xi' \in \mathbb{R}^n$  définis pour  $\gamma > 0$  et vérifiant :

$$\forall \alpha, \beta, \exists C_{\alpha, \beta}, \forall x, \xi', \gamma, |\partial_x^\alpha \partial_{\xi'}^\beta a| \leq C_{\alpha, \beta}(\gamma + |\xi'|)^{j-|\beta|}. \quad (2.20)$$

On notera  $\mathcal{E}^j$  l'espace des opérateurs pseudo-différentiel tangentiels  $A = op(a)$ ,  $a \in \mathcal{S}^j$  définis par :

$$(A)(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x'-y')\xi'} a(x, \xi', \gamma) f(y', x_n) dy' d\xi'. \quad (2.21)$$

Nous utiliserons l'inégalité de Gårding suivante (déduite de l'inégalité usuelle, cf. Taylor [Ta91]) : Soit  $A \in \mathcal{E}^j$  s'il existe un  $c_0 > 0$ , tel que  $\sigma(A)(x, \xi', \gamma) \geq c_0(\gamma^2 + |\xi'|^2)$  pour tout  $(x, \xi') \in K \times \mathbb{R}^n$ , alors

$$\exists C_1 > 0, \gamma_1 > 0, \forall f \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1}), \forall \gamma \geq \gamma_1; \operatorname{Re}(Af|f) \geq C_1|f|_1^2. \quad (2.22)$$

Enfin, on note  $\mathcal{D}^j$  le sous-espace de  $\mathcal{E}^j$  constitué des  $A = op(a)$  où  $a(x, \xi', \gamma)$  est polynomial en  $\xi'$ ,  $\gamma$  de degré  $j$ .

$$\text{On a, avec } \tilde{Q}_2 = \frac{Q_\varphi + Q_\varphi^*}{2}, \quad \tilde{Q}_1 = \frac{Q_\varphi - Q_\varphi^*}{2i\gamma}$$

$$\begin{cases} Q_\varphi = \tilde{Q}_2 + i\gamma\tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 = D_n^2 + Q_2, \quad \tilde{Q}_1 = D_n\varphi'_{x_n} + \varphi'_{x_n}D_n + 2Q_1 \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $Q_1 \in \mathcal{D}^1$ ,  $Q_2 \in \mathcal{D}^2$  ont pour symbole principal

$$\begin{cases} q_2 = \sigma(Q_2) = -\gamma^2(\varphi'_{x_n})^2 + r(x, \xi') - r(x, \gamma\varphi'_{x'}) \\ q_1 = \sigma(Q_1) = \tilde{r}(x, \xi', \varphi'_{x'}) \end{cases} \quad (2.24)$$

où on a noté  $\tilde{r}(x, \xi', \eta')$  la forme bilinéaire symétrique en  $\xi', \eta'$  associée à la forme quadratique réelle  $r(x, \xi')$ .

Pour  $f, g \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on posera  $(f_0|g_0)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f_0 \bar{g}_0 dx'$  les formules d'intégration par parties s'écrivent, les opérateurs  $\tilde{Q}_k$ ,  $k = 1, 2$  étant auto-adjoint par construction,<sup>3</sup>

$$\begin{cases} (f|\tilde{Q}_2g) = (\tilde{Q}_2f|g) - i\gamma[(f|D_n g)_0 + (D_n f|g)_0] \\ (f|\tilde{Q}_1g) = (\tilde{Q}_1f|g) - 2i\gamma(\varphi'_{x_n} f|g)_0 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\|Q_\varphi g\|_0^2 = \|\tilde{Q}_2g\|_0^2 + \gamma^2\|\tilde{Q}_1g\|_0^2 + i\gamma[(\tilde{Q}_1g|\tilde{Q}_2g) - (\tilde{Q}_2g|\tilde{Q}_1g)] \quad (2.26)$$

d'où en utilisant (2.23), (2.24) et (2.25), (2.26) devient :

$$\begin{cases} \|Q_\varphi g\|_0^2 = \|\tilde{Q}_2g\|_0^2 + \gamma^2\|\tilde{Q}_1g\|_0^2 + i\gamma[(\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1]g|g) + \gamma\beta(g) \\ \beta(g) = (\tilde{Q}_1g|D_n g)_0 + ((D_n \tilde{Q}_1 - 2\varphi'_{x_n} \tilde{Q}_2)g|g)_0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Par ailleurs on a  $i[\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1] \in (\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}^1 D_n + \mathcal{D}^0 D_n^2)$  et puisque  $\varphi'_{x_n}(x) \neq 0$  pour  $x \in K$ ,  $D_n - \frac{1}{2\varphi'_{x_n}} \tilde{Q}_1 \in \mathcal{D}^1$  et  $D_n^2 - \tilde{Q}_2 \in \mathcal{D}^2$  d'où

$$i[\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1] = B_0 \tilde{Q}_2 + B_1 \tilde{Q}_1 + B_2; B_j \in \mathcal{D}^j. \quad (2.28)$$

On rappelle que  $\Lambda^k = (\gamma^2 + D_{x'}^2)^{\frac{k}{2}}$ ;  $\Lambda^k \in \mathcal{E}^k$ .

**Lemme 2.16.** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $R^k$  dans  $\mathcal{E}^k$  et  $g \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  on ait :*

$$\|D_n^2 R^k g\|_0^2 \leq c \|D_n^2 \Lambda^k g\|_0^2 + c \|D_n \Lambda^k g\|_0^2 + c \|\Lambda^k g\|_0^2.$$

**Lemme 2.17.** *Soit  $\varphi$  vérifiant (2.18) et (2.19). Il existe  $C > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et  $g \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  on ait :*

$$\|Q_\varphi g\|_0^2 + \gamma |g|_{x_n=0}|_1^2 + \gamma |\partial_{x_n} g|_{x_n=0}|_0^2 \geq C \gamma \|g\|_1^2 + \gamma \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2. \quad (2.29)$$

**Remarque 2.18.** Le lemme 2.17 est classique sans le second terme à droite ( $\gamma \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2$ ). L'essentiel de la preuve consiste à prouver qu'on peut aussi majorer ce terme. ■

**Preuve de la proposition 2.12.** Soit  $\chi \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  une fonction de troncature,  $\chi = 1$  sur le support de  $h$  et  $g = \chi \Lambda^{-1} h \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ . En appliquant  $Q_\varphi$  à  $g$  on obtient

$$\begin{aligned} Q_\varphi g &= \Lambda^{-1} \chi Q_\varphi h + [\chi, \Lambda^{-1}] Q_\varphi h + [Q_\varphi, \Lambda^{-1}] \chi h \\ &\quad - [\chi, \Lambda^{-1}] D_n^2 h + \Lambda^{-1} [Q_\varphi, \chi] h + D_n^2 [\chi, \Lambda^{-1}] h + Th \end{aligned} \quad (2.30)$$

où

$$\begin{aligned} T &= -[(\gamma \varphi'_{x_n})^2, [\chi, \Lambda^{-1}]] + [(R(x, D_{x'}), [\chi, \Lambda^{-1}]] - [(R(x, \gamma \varphi'_{x'}), [\chi, \Lambda^{-1}]] \\ &\quad + [2\varphi'_{x_n} D_n, [\chi, \Lambda^{-1}]] - [\varphi''_{x_n}, [\chi, \Lambda^{-1}]] + [\tilde{R}(x, D_{x'}, \gamma \varphi'_{x'}), [\chi, \Lambda^{-1}]]. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> $\tilde{Q}_k^*$ ;  $k = 1, 2$  représente l'adjoint formel

En utilisant (2.30) et le lemme 2.16 on a

$$\|Q_\varphi g\|_0^2 \leq c\gamma^{-2}\|Q_\varphi h\|_0^2 + \frac{c}{\gamma^2}\|h\|_0^2 + \|D_n^2\Lambda^{-2}h\|_0^2 + \|D_n\Lambda^{-2}h\|_0^2 \quad (2.31)$$

comme

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} g &= \Lambda^{-1}\chi'_{x_j} h + [\chi'_{x_j}, \Lambda^{-1}]h + \Lambda^{-1}\chi\partial_{x_j} h \\ &= \chi'_{x_j}\Lambda^{-1}h + \chi\Lambda^{-1}\partial_{x_j} h \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma|g|_{x_n=0}|_1^2 \leq c\gamma\|h|_{x_n=0}\|_0^2 \quad (2.32)$$

et

$$\gamma\|\partial_{x_n} g|_{x_n=0}\|_0^2 \leq \gamma^{-1}\|\partial_{x_n} h|_{x_n=0}\|_0^2. \quad (2.33)$$

Comme  $\|g\|_1^2 = \|\Lambda g\|_0^2 + \|\partial_{x_n} g\|_0^2$ , on écrit  $\Lambda g = \chi h + \Lambda[\chi, \Lambda^{-1}]h$  ceci implique que  $h = \Lambda g - \Lambda[\chi, \Lambda^{-1}]h\Lambda\Lambda^{-1}h$  on a alors

$$\|h\|_0 \leq c\|\Lambda g\|_0 + c\|\Lambda^{-1}h\|_0$$

et

$$\|\Lambda g\|_0 \geq c\|h\|_0 - \frac{c}{\gamma}\|h\|_0$$

c'est-à-dire, si  $\gamma$  assez grand,

$$\|\Lambda g\|_0^2 \geq c\|h\|_0^2. \quad (2.34)$$

Par ailleurs, on a d'une part  $\partial_{x_n} g = \chi'_{x_n}\Lambda^{-1}h + \chi\partial_{x_n}\Lambda^{-1}h$  d'où

$$\|\chi\partial_{x_n}\Lambda^{-1}h\|_0^2 \leq c\|\partial_{x_n} g\|_0^2 + \frac{1}{\gamma^2}\|h\|_0^2$$

c'est-à-dire

$$\|\partial_{x_n} g\|_0^2 \geq c\|D_n\Lambda^{-1}h\|_0^2 - \frac{1}{\gamma^2}\|h\|_0^2 + \|\chi\partial_{x_n}\Lambda^{-1}h\|_0^2, \quad (2.35)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \gamma\|D_n^2\Lambda^{-1}g\|_0^2 &= \gamma\|D_n^2\Lambda^{-1}\chi\Lambda^{-1}h\|_0^2 \\ &\geq \gamma\|D_n^2\Lambda^{-2}\chi h\|_0^2 - \gamma\|D_n^2\Lambda^{-1}[\chi, \Lambda^{-1}]h\|_0^2. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.16 on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma\|D_n^2\Lambda^{-1}g\|_0^2 &\geq \gamma\|D_n^2\Lambda^{-2}h\|_0^2 - C\gamma^{-1}\|D_n^2\Lambda^{-2}h\|_0^2 \\ &\quad - C\gamma^{-3}\|D_n\Lambda^{-1}h\|_0^2 - C\gamma^{-5}\|h\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

En utilisant le lemme 2.17 et (2.30)-(2.36) on obtient le résultat. ■

**Preuve de la proposition 2.13.** La proposition 2.13 est un cas particulier de la proposition 3.12 p 59 du chapitre trois. ■

**Lemme 2.19.** *Il existe  $C > 0$ ,  $\gamma_0 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et  $g \in C_k^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  on ait*

$$\gamma \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 \leq C \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + C \gamma \|g\|_1^2.$$

**Lemme 2.20.** *Il existe  $C_1 > 0$ , (grand) et  $c_0 > 0$  tels que pour tout  $(x, \xi') \in K \times \mathbb{R}^n$  on ait*

$$\frac{C_1}{\gamma^2 + |\xi'|^2} [q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2]^2 + \sigma(B_2) \geq c_0 (\gamma^2 + |\xi'|^2).$$

**Lemme 2.21.** *Il existe  $C_1 > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$ ,  $F_0 \in \mathcal{E}^0$  et  $F_1 \in \mathcal{D}^1$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et  $g \in C_k^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  on ait*

$$\|Q_\varphi g\|_0^2 \geq C_1 \gamma \|g\|_1^2 + \gamma \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 + \operatorname{Re} [\gamma \beta(g) + \gamma (D_n g + F_1 g | F_0 g)_0].$$

**Preuve de la proposition 2.14.** Si  $g = e^{\gamma \varphi} h$  on a  $h_0 = 0$  et l'inégalité de la proposition 2.14 résulte du lemme 2.21 puisque le terme de bord dans l'inégalité du lemme 2.21 vaut alors  $2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi'_{x_n} |D_n g|_0^2 \geq 0$  grâce à l'hypothèse  $\varphi'_{x_n}(x', 0) > 0, \forall (x', 0) \in K$  et (2.27). ■

**Preuve du lemme 2.16.** On a

$$\begin{aligned} D_n^2 R^k g &= D_n^2 R^k \Lambda^{-k} \Lambda^k g \\ &= D_n (R^k D_n \Lambda^{-k} \Lambda^k g) + D_n ([D_n, R^k] \Lambda^{-k} \Lambda^k g) \\ &= R^k D_n^2 \Lambda^{-k} \Lambda^k g + [D_n, R^k] D_n \Lambda^{-k} \Lambda^k g + [D_n, R^k] D_n \Lambda^{-k} \Lambda^k g \\ &\quad + [D_n, [D_n, R^k]] \Lambda^{-k} \Lambda^k g. \end{aligned}$$

Puisque  $D_n^2 \Lambda^{-k} = \Lambda^{-k} D_n^2$  on a alors

$$\begin{aligned} D_n^2 R^k g &= R^k \Lambda^{-k} D_n^2 \Lambda^k g + [D_n, R^k] \Lambda^{-k} D_n \Lambda^k g + [D_n, R^k] \Lambda^{-k} D_n \Lambda^k g \\ &\quad + [D_n, [D_n, R^k]] \Lambda^{-k} \Lambda^k g \end{aligned}$$

et comme on a  $R^k \Lambda^{-k}$ ,  $[D_n, R^k] \Lambda^{-k}$ , et  $[D_n, [D_n, R^k]] \Lambda^{-k}$  sont dans  $\mathcal{E}^0$  (car  $R^k \in \mathcal{E}^k$  ceci implique  $[D_n, R^k] \in \mathcal{E}^k$ ), donc bornés sur  $L^2$  d'où le résultat. ■

**Preuve du lemme 2.17.** La preuve du lemme 2.17 résulte du lemme 2.21. ■

**Preuve du lemme 2.19.** On a d'après (2.23) et (2.24)

$$\begin{aligned} \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 &= (D_n^2 \Lambda^{-1} g | D_n^2 \Lambda^{-1} g) \\ &= (D_n^2 \Lambda^{-1} g | \tilde{Q}_2 \Lambda^{-1} g - Q_2 \Lambda^{-1} g) \\ &= (D_n^2 \Lambda^{-1} g | \tilde{Q}_2 \Lambda^{-1} g) + (D_n^2 \Lambda^{-1} g | (\gamma \varphi'_{x_n})^2 \Lambda^{-1} g) \\ &\quad - (D_n^2 \Lambda^{-1} g | R \Lambda^{-1} g) + (D_n^2 \Lambda^{-1} g | R(x, \gamma \varphi'_{x'}) \Lambda^{-1} g) \\ &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4. \end{aligned}$$

On va majorer les termes  $t_j, j = 1, \dots, 4$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|t_1| = |(D_n^2 \Lambda^{-1} g | \tilde{Q}_2 \Lambda^{-1} g)| \leq C \epsilon \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon} \|\tilde{Q}_2 \Lambda^{-1} g\|_0^2.$$

Comme

$$\tilde{Q}_2 \Lambda^{-1} g = \Lambda^{-1} \tilde{Q}_2 g - [(\gamma \varphi'_{x_n})^2, \Lambda^{-1}] g - [R(x, \gamma \varphi'_{x_n}), \Lambda^{-1}] g + [R(x, D_{x'}), \Lambda^{-1}] g$$

et  $[(\gamma \varphi'_{x_n})^2, \Lambda^{-1}]$ ,  $[R(x, \gamma \varphi'_{x'}), \Lambda^{-1}]$  et  $[R(x, D_{x'}), \Lambda^{-1}]$  sont dans  $\mathcal{E}^0$  alors

$$|t_1| \leq C\epsilon \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon} \gamma^{-2} \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon} \|g\|_0^2, \quad (2.37)$$

$|-t_3| = |-(D_n^2 \Lambda^{-1} g | R(x, D_{x'}) \Lambda^{-1} g)| \leq C\epsilon \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon} \|R(x, D_{x'}) \Lambda^{-1} g\|_0^2$   
 comme  $R(x, D_{x'}) \Lambda^{-1} \in \mathcal{E}^1$  alors

$$|-t_3| \leq C\epsilon \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon} \|g\|_1^2. \quad (2.38)$$

De même les termes  $|t_2|$  et  $|t_4|$  sont majorés par les termes suivants :

$$C\epsilon \|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon} |g|_1^2. \quad (2.39)$$

D'après (2.37)-(2.39) on a en prenant  $\epsilon$  assez petit

$$\|D_n^2 \Lambda^{-1} g\|_0^2 \leq C(\epsilon) \gamma^{-2} \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + C(\epsilon) |g|_1^2,$$

on multiplie cette dernière inégalité par  $\gamma$  on obtient le résultat.  $\blacksquare$

**Preuve du lemme 2.20.** On a  $q_\varphi(x, \xi) = \xi_n^2 + q_2 + 2i\gamma(\xi_n \varphi'_{x_n} + q_1)$  et l'hypothèse (2.19) nous permet de dire que

$$\forall (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^{n+1}, \{\xi_n^2 + q_2 = 0 \text{ et } \xi_n \varphi'_{x_n} + q_1 = 0\} \Rightarrow \{\xi_n^2 + q_2, \xi_n \varphi'_{x_n} + q_1\} > 0. \quad (2.40)$$

D'après (2.28) on a

$$\{\xi_n^2 + q_2, \xi_n \varphi'_{x_n} + q_1\} = \sigma(B_0)(\xi_n^2 + q_2) + \sigma(B_1)(\xi_n \varphi'_{x_n} + q_1) + \sigma(B_2). \quad (2.41)$$

Montrons que

$$\forall (x, \xi') \in K \times \mathbb{R}^n, q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2 = 0 \Rightarrow \sigma(B_2) > 0. \quad (2.42)$$

En effet si  $q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2 = 0$ , posons  $\xi_n = -\frac{q_1}{\varphi'_{x_n}} \in \mathbb{R}$ , on a  $\xi_n \varphi'_{x_n} + q_1 = 0$  et  $\xi_n^2 + q_2 = 0$ , (2.40) et (2.41) entraînent  $\sigma(B_2) > 0$

Montrons tout d'abord que, pour tout  $x \in K$  et  $\Gamma^2 + \Xi^2 = 1$  on a

$$[C_1(q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2)^2 + \sigma(B_2)]|_{(x, \Gamma, \Xi)} \geq c_0. \quad (2.43)$$

Par l'absurde il existe  $(x_k, \Gamma_k, \Xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ;  $x_k \in K$ ,  $\Gamma_k^2 + \Xi_k^2 = 1$  tels que

$$[C_k(q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2)^2 + \sigma(B_2)]|_{(x_k, \Gamma_k, \Xi_k)} \leq \frac{1}{C_k} \quad (2.44)$$

et on peut supposer quitte à extraire une sous suite  $x_k \rightarrow x$ ,  $\Gamma_k \rightarrow \Gamma$  et  $\Xi_k \rightarrow \Xi$ , et  $C_k \rightarrow +\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$  en divisant (2.44) par  $C_k$  et faisant tendre  $k$  vers

$+\infty$  on a alors  $(q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2)^2|_{(x,\Gamma,\Xi)} \leq 0$  d'où  $(q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2)^2|_{(x,\Gamma,\Xi)} = 0$  on déduit de (2.42)

$$\sigma(B_2)|_{(x,\Gamma,\Xi)} > 0. \quad (2.45)$$

D'autre part de (2.44) on a  $\sigma(B_2)|_{(x_k,\Gamma_k,\Xi_k)} \leq \frac{1}{C_k}$  en faisant tendre  $k \rightarrow +\infty$  on a  $\sigma(B_2)|_{(x,\Gamma,\Xi)} \leq 0$  en contradiction avec (2.45) d'où (2.43). On obtient le lemme par homogénéité en posant  $\Gamma = \frac{\gamma}{(\gamma^2 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}}$  et  $\Xi = \frac{\xi'}{(\gamma^2 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}}$ . ■

**Preuve du lemme 2.21.** D'après (2.27) et (2.28) on a

$$\begin{aligned} \|Q_\varphi g\|_0^2 - \operatorname{Re}(\gamma\beta(g)) &= \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + \gamma^2 \|\tilde{Q}_1 g\|_0^2 + \gamma(B_2 g|g) \\ &\quad + \gamma(B_0 \tilde{Q}_2 g + B_1 \tilde{Q}_1 g|g) \end{aligned} \quad (2.46)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne :

$$|\gamma(B_0 \tilde{Q}_2 g|g)| \leq \epsilon.C \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + C \frac{\gamma^2}{\epsilon} \|g\|_0^2$$

et

$$|\gamma(B_1 \tilde{Q}_1 g|g)| = |(\sqrt{\gamma} \tilde{Q}_1 g | \sqrt{\gamma} B_1^* g)| \leq C \frac{\gamma}{\epsilon} \|\tilde{Q}_1 g\|_0^2 + C \gamma \cdot \epsilon |g|_1^2$$

d'où

$$|\gamma(B_0 \tilde{Q}_2 g + B_1 \tilde{Q}_1 g|g)| \leq \epsilon.C \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon} \gamma \|\tilde{Q}_1 g\|_0^2 + C \gamma \cdot \epsilon |g|_1^2 + \frac{C}{\epsilon} \gamma^2 \|g\|_0^2. \quad (2.47)$$

Par ailleurs d'après l'inégalité de Gårding (2.22) et le lemme 2.20, il existe  $C_1 > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$ ,  $g \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  on ait :

$$\operatorname{Re} \gamma(B_2 g|g) \geq C_1 \gamma |g|_1^2 - \gamma \operatorname{Re}((Q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 Q_2)g|F_0 g) \quad (2.48)$$

où  $F_0 \in \mathcal{E}^0$  a pour symbole principal

$$\sigma(F_0) = \frac{C_1}{\gamma^2 + |\xi'|^2} (q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 q_2).$$

D'autre part on a d'après (2.23)

$$D_n = \frac{\tilde{Q}_1}{2\varphi'_{x_n}} - \frac{1}{\varphi'_{x_n}} Q_1 - \frac{1}{2i\varphi'_{x_n}} \varphi''_{x_n}$$

d'où

$$\|D_n g\|_0 \leq c \|\tilde{Q}_1 g\|_0 + c \|Q_1 g\|_0 + c \|g\|_0$$

or

$$\|g\|_1 \simeq \|D_n g\|_0 + |g|_1.$$

On en déduit alors

$$\|g\|_1 \leq c(\|\tilde{Q}_1 g\|_0 + |g|_1). \quad (2.49)$$

On a également

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\tilde{Q}_1 - [D_n, \varphi'_{x_n}]) - \varphi'_{x_n} D_n$$

d'où

$$\begin{aligned} Q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 Q_2 &= \varphi'_{x_n} D_n - \frac{1}{2}(\tilde{Q}_1 - [D_n, \varphi'_{x_n}])\varphi'_{x_n} D_n + \frac{Q_1}{2}(\tilde{Q}_1 - [D_n, \varphi'_{x_n}]) \\ &\quad + (\varphi'_{x_n})^2(\tilde{Q}_2 - D_n^2) \\ &= (\varphi'_{x_n})^2 D_n^2 + \frac{1}{i}\varphi'_{x_n} \varphi''_{x_n} D_n - \frac{1}{2}\tilde{Q}_1 \varphi'_{x_n} D_n + \frac{1}{2}[D_n, \varphi'_{x_n}]\varphi'_{x_n} D_n \\ &\quad + \frac{1}{2}Q_1 \tilde{Q}_1 - \frac{1}{2}Q_1 [D_n, \varphi'_{x_n}] + (\varphi'_{x_n})^2 \tilde{Q}_2 - (\varphi'_{x_n})^2 D_n^2. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de dire que :

$$Q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 Q_2 = (\varphi'_{x_n})^2 \tilde{Q}_2 - \frac{1}{2}D_n \varphi'_{x_n} \tilde{Q}_1 + C_1 \tilde{Q}_1 + C_0 D_n + \tilde{C}_1$$

où  $C_j, \tilde{C}_j \in \mathcal{D}^j$ . On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( (Q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 Q_2)g | F_0 g \right) &= \operatorname{Re} \left\{ (\varphi'_{x_n})^2 \tilde{Q}_2 g | F_0 g \right\} + \left( \frac{1}{2i} \varphi'_{x_n} \tilde{Q}_1 g | F_0 g \right)_0 \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \varphi'_{x_n} \tilde{Q}_1 | F_0 D_n g \right) + (C_1 \tilde{Q}_1 g | F_0 g) \\ &\quad + (C_0 D_n g | F_0 g) + (\tilde{C}_1 g | F_0 g) \}. \end{aligned}$$

On va majorer chaque terme

$$\left| ((\varphi'_{x_n})^2 \tilde{Q}_2 g | F_0 g) \right| \leq \frac{c\epsilon}{\gamma} \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + \frac{C\gamma}{\epsilon} \|g\|_0^2, \quad (2.50)$$

$$\left| (C_1 \tilde{Q}_1 g | F_0 g) \right| \leq c\epsilon\gamma \|\tilde{Q}_1 g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon\gamma} \|g\|_1^2, \quad (2.51)$$

$$\left| (C_0 D_n g | F_0 g) \right| \leq \frac{c\epsilon}{\gamma} \|D_n g\|_0^2 + \frac{C\gamma}{\epsilon} \|g\|_0^2, \quad (2.52)$$

$$\left| (\tilde{C}_1 g | F_0 g) \right| \leq \frac{c\epsilon}{\gamma} \|g\|_1^2 + \frac{C\gamma}{\epsilon} \|g\|_0^2, \quad (2.53)$$

$$\left| (\varphi'_{x_n} \tilde{Q}_1 | F_0 D_n g) \right| \leq c\epsilon\gamma \|\tilde{Q}_1 g\|_0^2 + \frac{C}{\epsilon\gamma} \|D_n g\|_0^2. \quad (2.54)$$

D'après (2.50)-(2.54) on déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( (Q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 Q_2)g | F_0 g \right) &\leq \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2i} \varphi'_{x_n} \tilde{Q}_1 g | F_0 g \right)_0 + cst \left( \frac{\epsilon}{\gamma} \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 \right. \\ &\quad \left. + \epsilon\gamma \|\tilde{Q}_1 g\|_0^2 \right) + \frac{C}{\epsilon\gamma} \|g\|_1^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

d'où

$$\begin{aligned} -\gamma \operatorname{Re} \left( (Q_1^2 + (\varphi'_{x_n})^2 Q_2) g | F_0 g \right) &\geq \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2i} \varphi'_{x_n} \tilde{Q}_1 g | F_0 g \right)_0 \\ &\quad - cst \left( \epsilon \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 + \epsilon \gamma^2 \|\tilde{Q}_1 g\|_0^2 + \frac{1}{\epsilon} \|g\|_1^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.46)-(2.48) et (2.55) on trouve, si  $\gamma \gg \frac{1}{\epsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \|Q_\varphi g\|_0^2 - \operatorname{Re}(\gamma \beta(g)) &\geq C_1 \gamma \|g\|_1^2 + c \gamma \|g\|_1^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{Q}_2 g\|_0^2 \\ &\quad + \operatorname{Re} \gamma (D_n g + F_1 g | F_0 g)_0 \end{aligned}$$

où  $F_1 \in \mathcal{D}^1$  et  $F_0 \in \mathcal{E}^0$ ; grâce au lemme 2.19 on déduit le résultat.  $\blacksquare$

## Inégalité d'interpolation locale

Le but de ce paragraphe est de prouver les inégalités d'interpolation (2.13) et (2.14). Cela va se décomposer en plusieurs étapes. On va d'abord prouver comme conséquence directe des inégalités de Carleman, des inégalités de type (2.13) et (2.14) sur des domaines assez petit. Il s'agit ensuite de propager ces inégalités de proche en proche. Pour cela, on va introduire un lemme de récurrence adapté à notre situation. Enfin on fera les constructions géométriques permettant de prouver (2.13) et (2.14).

Nous noterons  $B^+(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| \leq r, x_n > 0\}$

**Lemme 2.22.** *Il existe  $\mu \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on ait*

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(B^+(0, r))} &\leq C \left( \|\tilde{Q}v\|_{L^2(B^+(0, 5r))} + \|v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_n v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right)^\mu \left( \|v\|_{H^1(B^+(0, 5r))} \right)^{1-\mu}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

**Preuve** On pose  $r_1 = \frac{r}{5}$ ,  $r'_1 = \frac{2r}{5}$ ,  $r_2 = \frac{3r}{5} < r$ ,  $r'_2 = \frac{5r}{2}$ ,  $r_3 = 3r$ ,  $r'_3 = 4r$  de sorte que  $r_1 < r'_1 < r_2 < r'_2 < r_3 < r'_3$  et soit  $\psi(s, x) = s^2 + |x'|^2 + |x_n + r|^2$ . On pose

$$\begin{aligned} V &= \left\{ (s, x) \in X; r_1^2 < \psi(s, x) < (r'_3)^2 \right\} \\ V_j &= \left\{ (s, x) \in X; r_j^2 < \psi(s, x) < (r'_j)^2 \right\}. \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 2.8 (en divisant l'inégalité de cette proposition par  $\gamma$ ), on a pour  $\gamma > \gamma_1$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$\begin{aligned} C \|e^{\gamma e^{-\beta \psi(s, x)}} f\|_{L^2(V)} &\leq \|e^{\gamma e^{-\beta \psi(s, x)}} \tilde{Q}f\|_{L^2(V)} \\ &\quad + \|e^{\gamma e^{-\beta \psi(s, x)}} f|_{x_n=0}\|_{L^2(\partial V \cap \{x_n=0\})} + \|e^{\gamma e^{-\beta \psi(s, x)}} \partial_n f\|_{L^2(\partial V \cap \{x_n=0\})}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Introduisons la fonction de troncature  $\tilde{\chi}$  de  $\theta$  définie par

$$\tilde{\chi}(\theta) = \begin{cases} 1; & \frac{4}{25} r^2 \leq \theta \leq 9r^2 \\ 0; & \theta \leq \frac{r^2}{25} \text{ ou } \theta \geq 16r^2, \end{cases}$$

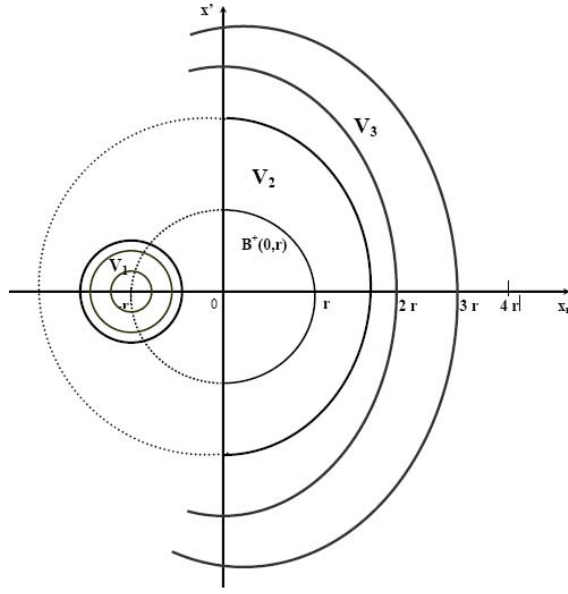


Fig. 2.1. La fonction  $\varphi = e^{-\beta\psi}$  est décroissante le long des Lignes de niveau  $V_j$ . et considérons  $\chi \in C^\infty_{\bar{V}}(\mathbb{R}^{n+1})$  définie par  $\chi(s, x) = \tilde{\chi}(\psi(s, x))$ , on prend  $f = \chi v$  et de (2.57) on obtient en écrivant

$$\tilde{Q}f = \chi\tilde{Q}v + [\tilde{Q}, \chi]v$$

$([\tilde{Q}, \chi])$  est un opérateur différentiel d'ordre 1 supporté sur  $V_1 \cup V_3$ ,  $B^+(0, r) \subset V_2$  et  $V \cap \mathbb{R}_+^{n+1} \subset B^+(0, 5r)$

$$\begin{aligned} Ce^{\gamma e^{-\beta r'_2}} \|v\|_{L^2(B^+(0, r))} &\leq e^{\gamma e^{-\beta r_2}} \left[ \|\tilde{Q}v\|_{L^2(B^+(0, 5r))} + \|v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_n v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right] + e^{\gamma e^{-\beta r_3}} \|v\|_{H^1(B^+(0, 5r))}. \end{aligned}$$

On pose  $C_1 = e^{-\beta r'_2} - e^{-\beta r_3} > 0$  et  $C_2 = e^{-\beta r_2} - e^{-\beta r'_2} > 0$  on obtient

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(B^+(0, r))} &\leq C \left( e^{\gamma C_2} \left[ \|\tilde{Q}v\|_{L^2(B^+(0, 5r))} + \|v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\partial_n v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right] + e^{-\gamma C_1} \|v\|_{H^1(B^+(0, 5r))} \right). \end{aligned}$$

On optimise en  $\gamma$  (comme dans Robbiano [Ro91]) on a

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(B^+(0, r))} &\leq C \left( \|\tilde{Q}v\|_{L^2(B^+(0, 5r))} + \|v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_n v\|_{L^2(B^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right)^{\frac{C_1}{C_1+C_2}} \left( \|v\|_{H^1(B^+(0, 5r))} \right)^{\frac{C_2}{C_1+C_2}}. \end{aligned}$$

En posant  $\mu = \frac{C_1}{C_1+C_2}$  on obtient le résultat. ■

**Lemme 2.23.** *Il existe  $\mu_0 \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $\mu \in ]0, \mu_0]$ , et tout  $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on ait*

$$\|v\|_{H^1(U_0)} \leq C \left( \|Qv\|_{L^2(X)} + \|v|_{\Gamma_{s_0}}\|_{L^2(\partial X)} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} \right)^\mu \left( \|v\|_{H^1(X)} \right)^{1-\mu} \quad (2.58)$$

où  $U_0, X$  ont été définis dans la section 5.

**Preuve** Soit  $(s_1, x_1) \in \Gamma_{s_0}$ , il existe alors un voisinage de  $(s_1, x_1)$  noté  $U$  et un difféomorphisme noté  $G$  défini de  $U \cap X$  vers  $V_{(0,0)} \cap \{x_n \geq 0\}$  tels que  $G((s_1, x_1)) = (0, 0)$  et  $B((s_1, x_1), r') \cap X \subset G^{-1}(B(0, r) \cap \{x_n \geq 0\})$ , avec  $r'$  assez petit,  $\tilde{Q}$  (resp.  $\partial_n$ ) se transforme par  $G$  en  $Q$  (resp.  $B$ ) et en utilisant (2.56) et le fait que  $G$  transforme les normes en normes équivalentes on a

$$\|v\|_{L^2(B^+((s_1, x_1), r'))} \leq C \left( \|Qv\|_{L^2(X)} + \|v|_{\Gamma_{s_0}}\|_{L^2(\partial X)} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} \right)^\mu \left( \|v\|_{H^1(X)} \right)^{1-\mu}. \quad (2.59)$$

Pour terminer la preuve de l'inégalité (2.58), on va rappeler le résultat suivant (dû à l'ellipticité de l'opérateur  $Q$ ).

Soit  $U_0 = B((s_2, x_2), r'') \subset B((s_1, x_1), r')$  tel que  $U_0 \subset X$ .

**Lemme 2.24.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $v$  on ait*

$$\|v\|_{H^1(U_0)} \leq C \left( \|v\|_{L^2(B^+((s_1, x_1), r'))} + \|Qv\|_{L^2(B^+((s_1, x_1), r'))} \right). \quad (2.60)$$

A partir des inégalités (2.59) et (2.60) on a le lemme 2.23, ceci démontre l'inégalité (2.13).  $\blacksquare$

**Lemme 2.25. (de récurrence)** *Soient  $\nu \in ]0, 1[$  et  $\alpha_k > 0$  vérifiant pour tout  $k \geq 0$ ,  $\alpha_k \leq F^{1-\nu}(\alpha_{k-1} + E)^\nu$  et  $\alpha_k \leq F$  où  $E > 0$ ,  $F > 0$ . Alors pour  $\mu \in ]0, \nu^N[$ ;  $N > 0$ , on a*

$$\alpha_N \leq 2^{\frac{1}{1-\nu}} F^{1-\mu} (\alpha_0 + E)^\mu.$$

**Preuve** Si  $F \leq \alpha_0 + E$  le résultat est immédiat.

Si  $\alpha_0 + E \leq F$ , en particulier  $E \leq F$  on a  $\alpha_k \leq F^{1-\nu}(\alpha_{k-1} + E)^\nu$  implique

$$\frac{\alpha_k}{F} \leq \left( \frac{\alpha_{k-1} + E}{F} \right)^\nu \quad (2.61)$$

et

$$\frac{E}{F} \leq \left( \frac{E}{F} \right)^\nu \leq \left( \frac{\alpha_{k-1} + E}{F} \right)^\nu. \quad (2.62)$$

De (2.61) et (2.62) on obtient  $\frac{\alpha_k + E}{F} \leq \left( 2^{\frac{\alpha_{k-1} + E}{F}} \right)^\nu$  ceci implique par itération

$$\alpha_N \leq 2^{\frac{1}{1-\nu}} F^{1-\nu^N} (\alpha_0 + E)^{\nu^N} \quad (2.63)$$

comme  $\alpha_0 + E \leq F$ , (2.63) implique le lemme pour  $\mu \leq \nu^N$ .  $\blacksquare$

**Estimation sur  $X_\delta$**

On note  $X_\delta = [-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}] \times \Omega_\delta$ , où  $\delta$  est fixé et  $\Omega_\delta = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$ . Soit  $r$  assez petit ( $r \ll \delta$  et  $r \ll s_0$ ), on recouvre  $X_\delta$  par un nombre fini de boules de rayon  $r$  et de centre  $y_j = (s_j, x_j)$ ,  $j = \overline{0, N}$  avec  $B(y_0, r) \subset U \subset X_\delta$ .

Pour tout  $k = \overline{1, N}$  on peut construire une suite  $j_0, \dots, j_l$  telle que  $j_0 = 0$ ,  $j_l = k$  et

$$B(x_{j_{l+1}}, r) \subset B(x_{j_l}, 3r) \text{ pour } l = \overline{0, k-1} \text{ avec } y_{j_l} = (s_{j_l}, x_{j_l}). \quad (2.64)$$

Soit  $\psi(s, x) = |s - s_j|^2 + |x - x_j|^2$ , en vertu de la proposition 2.11, on a pour  $\gamma > \gamma_1$ ,  $f \in C_{\tilde{V}}^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$C \|e^{\gamma e^{-\beta\psi(s,x)}} f\|_{H^1(V)} \leq \|e^{\gamma e^{-\beta\psi(s,x)}} Qf\|_{L^2(V)}. \quad (2.65)$$

On pose  $r_1 = \frac{r}{4}$ ,  $r'_1 = \frac{r}{2}$ ,  $r_2 = \frac{3r}{4} < r$ ,  $r'_2 = \frac{7r}{2}$ ,  $r_3 = 4r$ ,  $r'_3 = 5r$ .  
Introduisons la fonction de troncature  $\tilde{\chi}$  de  $\theta$  définie par

$$\tilde{\chi}(\theta) = \begin{cases} 1; & \frac{r^2}{4} \leq \theta \leq 16r^2 \\ 0; & \theta \leq \frac{r^2}{16} \text{ ou } \theta \geq 25r^2, \end{cases}$$

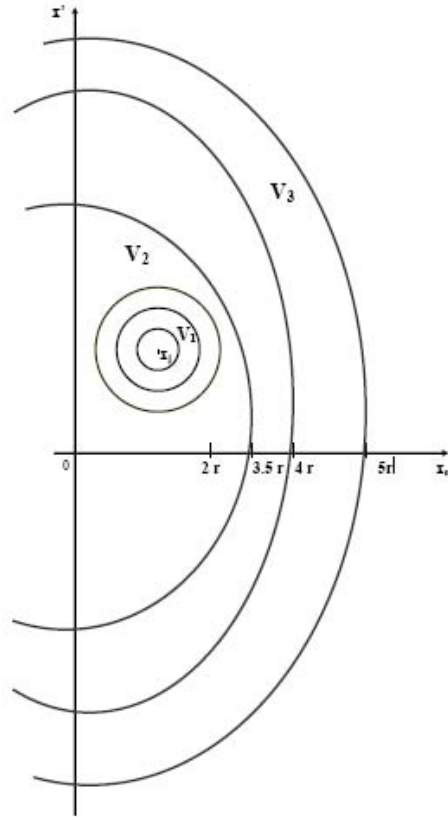


Fig. 2.2. La fonction  $\varphi = e^{-\beta\psi}$  est décroissante le long des Lignes de niveau  $V_j$ .  
et considérons  $\chi \in C_{\tilde{V}}^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$  définie par  $\chi(y) = \tilde{\chi}(\psi(y))$ , on prend  $f = \chi v$  et de (2.65) on obtient en écrivant

$$Qf = \chi Qv + [Q, \chi]v$$

( $[Q, \chi]$  est un opérateur différentiel d'ordre 1 supporté sur  $V_1 \cup V_3$ ),

$$C e^{\gamma e^{-\beta r'_2}} \|v\|_{H^1(V_2)} \leq e^{\gamma e^{-\beta r_1}} [\|Qv\|_{L^2(V)} + \|v\|_{H^1(V_1)}] + e^{\gamma e^{-\beta r_3}} \|v\|_{H^1(V)}.$$

On pose  $C_1 = e^{-\beta r'_2} - e^{-\beta r_3} > 0$  et  $C_2 = e^{-\beta r_1} - e^{-\beta r'_2} > 0$  on obtient

$$\|v\|_{H^1(V_2)} \leq C [e^{\gamma C_2} (\|Qv\|_{L^2(V)} + \|v\|_{H^1(V_1)}) + e^{\gamma C_1} \|v\|_{H^1(V)}].$$

On optimise en  $\gamma$  (comme dans Robbiano [Ro91]) on a

$$\|v\|_{H^1(V_2)} \leq C(\|Qv\|_{L^2(V)} + \|v\|_{H^1(V_1)})^\mu (\|v\|_{H^1(V)})^{1-\mu} \quad (2.66)$$

avec  $\mu \leq \mu_0 = \frac{C_1}{C_1+C_2}$ .

Par ailleurs on a  $V_1 \subset B(y_j, r)$  et  $B(y_j, 3r) \subset V_2 \cup B(y_j, r)$  alors (2.66) devient

$$\|v\|_{H^1(B(y_{j_l}, 3r))} \leq C(\|Qv\|_{L^2(V)} + \|v\|_{H^1(B(y_{j_l}, r))})^\mu (\|v\|_{H^1(V)})^{1-\mu}. \quad (2.67)$$

En vertu de (2.64), (2.67) on a

$$\|v\|_{H^1(B(y_{j_{l+1}}, r))} \leq C(\|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(B(y_{j_l}, r))})^\mu (\|v\|_{H^1(X)})^{1-\mu} \quad (2.68)$$

on applique le lemme de récurrence à (2.68) avec  $\alpha_l = \|v\|_{H^1(B(x_{j_l}, r))}$ ,  $E = \|Qv\|_{L^2(X)}$  et  $F = C^{1-\mu} \|v\|_{H^1(X)}$  on alors

$$\|v\|_{H^1(B(y_k, r))} \leq C(\|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(B(y_0, r))})^{\mu'} (\|v\|_{H^1(X)})^{1-\mu'}.$$

En recollant les inégalité, obtenues, on obtient pour un certain  $\mu \in ]0, 1[$

$$\|v\|_{H^1(X_\delta)} \leq C(\|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(U)})^\mu (\|v\|_{H^1(X)})^{1-\mu}. \quad (2.69)$$

D'autre part soit  $y \in Z = [-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}] \times \partial\Omega$  il existe alors un voisinage de  $y$  noté  $U$  et un difféomorphisme noté  $G$  défini de  $U \cap X$  vers  $B(0, r_y) \cap \{x_n \geq 0\}$  tels que  $G(y) = 0$ . Soit  $\psi(s, x) = s^2 + |x'|^2 + |x_n - 4r|^2$  avec  $r \ll r_y$ .

En vertu de la proposition 2.10 (en divisant l'inégalité de cette proposition par  $\gamma$ ), on a pour  $\gamma > \gamma_1$ ,  $f \in C_{\mathbb{V}}^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$C\|e^{\gamma e^{-\beta\psi(s,x)}} f\|_{H^1(V)} \leq \|e^{\gamma e^{-\beta\psi(s,x)}} \tilde{Q}f\|_{L^2(V)} + \|e^{\gamma e^{-\beta\psi(s,x)}} \partial_n f\|_{L^2(\partial V \cap \{x_n=0\})}. \quad (2.70)$$

On pose  $r_1 = \frac{r}{2}$ ,  $r'_1 = r$ ,  $r_2 = 2r$ ,  $r'_2 = 6r$ ,  $r_3 = 7r$ ,  $r'_3 = 8r$  on vérifie facilement que  $B(0, r) \subset V_2$ .

Introduisons la fonction de troncature  $\tilde{\chi}$  de  $\theta$  définie par

$$\tilde{\chi}(\theta) = \begin{cases} 1; & r^2 \leq \theta \leq 49r^2 \\ 0; & \theta \leq \frac{r^2}{4} \text{ ou } \theta \geq 64r^2, \end{cases}$$

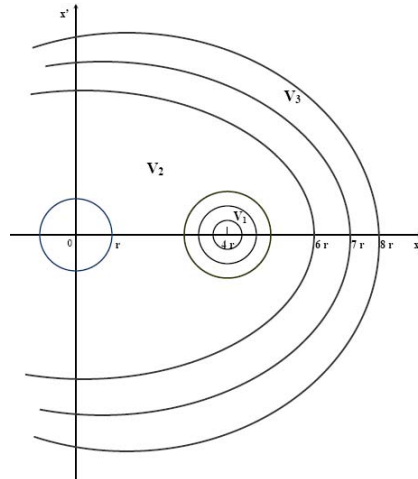


Fig. 2.3. La fonction  $\varphi = e^{-\beta\psi}$  est décroissante le long des Lignes de niveau  $V_j$ .

et considérons  $\chi \in C_{\overline{V}}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  définie par  $\chi(s, x) = \tilde{\chi}(\psi(s, x))$ , on prend  $f = \chi v$  et de (2.70) on obtient en écrivant

$$\tilde{Q}f = \chi\tilde{Q}v + [\tilde{Q}, \chi]v$$

( $[\tilde{Q}, \chi]$  est un opérateur différentiel d'ordre 1 supporté sur  $V_1 \cup V_3$ ) et

$$\partial_n f = \chi\partial_n v + \chi'_{x_n} v.$$

$$\begin{aligned} C e^{\gamma e^{-\beta r'_2}} \|v\|_{H^1(B^+(0,r))} &\leq e^{\gamma e^{-\beta r_1}} [\|\tilde{Q}v\|_{L^2(V^+)} + \|v\|_{H^1(V_1)} \\ &\quad + \|\partial_n v\|_{L^2(V \cap \{x_n=0\})}] + e^{\gamma e^{-\beta r_3}} \|v\|_{H^1(V^+)}. \end{aligned}$$

En posant  $C_1 = e^{-\beta r'_2} - e^{-\beta r_3} > 0$  et  $C_2 = e^{-\beta r_1} - e^{-\beta r'_2} > 0$  on a

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(B^+(0,r))} &\leq C \left( e^{\gamma C_2} [\|\tilde{Q}v\|_{L^2(V^+)} + \|v\|_{H^1(V_1)} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_n v\|_{L^2(V \cap \{x_n=0\})}] + e^{-\gamma C_1} \|v\|_{H^1(V^+)} \right). \end{aligned}$$

On optimise en  $\gamma$  (comme dans Robbiano [Ro91]) on a alors en posant  $\mu_0 = \frac{C_1}{C_1+C_2}$  on obtient pour  $\mu \leq \mu_0$

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(B^+(0,r))} &\leq C \left( \|\tilde{Q}v\|_{L^2(V^+)} + \|v\|_{H^1(V_1)} + \|\partial_n v\|_{L^2(V \cap \{x_n=0\})} \right)^\mu \\ &\quad \cdot \left( \|v\|_{H^1(V^+)} \right)^{1-\mu}. \end{aligned}$$

Puisque  $G^{-1}(V_1) \subset X_{\delta_y}$  et  $(B(y, r'_y) \cap X) \subset G^{-1}(B(0, r)) \cap \{x_n \geq 0\}$  avec  $r'_y$  assez petit,  $\tilde{Q}$  (resp.  $\partial_n$ ) se transforme par  $G$  en  $Q$  (resp.  $B$ ) et en utilisant le fait que  $G$  transforme les normes en normes équivalentes on a

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(B(y, r'_y))} &\leq C \left( \|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(X_{\delta_y})} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} \right)^{\mu_y} \\ &\quad \cdot \left( \|v\|_{H^1(X)} \right)^{1-\mu_y}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

On recouvre  $Z$  par un nombre fini de boules de rayon  $r'_j = r'_{y_j}$  et de centre  $y_j = (s_j, x_j)$ ,  $j = \overline{0, M}$  on a d'après (2.71)

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(B(y_j, r'_j))} &\leq C \left( \|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(X_{\delta_{y_j}})} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} \right)^{\mu_{y_j}} \\ &\quad \cdot \left( \|v\|_{H^1(X)} \right)^{1-\mu_{y_j}}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

On pose  $\delta_1 = \inf_{j \in \{0, \dots, M\}} \{\delta_{y_j}\}$  et  $\mu_1 = \inf_{j \in \{0, \dots, M\}} \{\mu_{y_j}\}$  (2.72) implique

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(B(y_j, r'_j))} &\leq C \left( \|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(X_{\delta_1})} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} \right)^{\mu_1} \\ &\quad \cdot \left( \|v\|_{H^1(X)} \right)^{1-\mu_1}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

En recollant les inégalités de (2.73) et en utilisant

$$\|v\|_{H^1(X_{\frac{\delta}{2}})} = \|v\|_{H^1(X_{\frac{\delta}{2}})}^{\mu_1} \|v\|_{H^1(X_{\frac{\delta}{2}})}^{1-\mu_1}$$

i.e.

$$\|v\|_{H^1(X_{\frac{\delta}{2}})} \leq C \left( \|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(X_{\frac{\delta}{2}})} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} \right)^{\mu_1} \cdot \left( \|v\|_{H^1(X)} \right)^{1-\mu_1}$$

et que  $Y = [-\frac{s_0}{2}, \frac{s_0}{2}] \times \Omega \subset X_{\frac{\delta}{2}} \cup \cup_{j=1}^M B(y_j, r'_j) \subset X$  on obtient

$$\|v\|_{H^1(Y)} \leq C \left( \|Qv\|_{L^2(X)} + \|v\|_{H^1(X_{\delta_2})} + \|Bv\|_{L^2(\partial X)} \right)^{\mu} \cdot \left( \|v\|_{H^1(X)} \right)^{1-\mu} \quad (2.74)$$

avec  $\delta_2 = \inf\{\delta_1, \frac{\delta}{2}\}$  et  $\mu \leq \mu_1$  en combinant l'inégalité (2.69) et (2.74) on obtient l'inégalité (2.14).  $\blacksquare$

## 6 Rappel sur les fonctions F.B.I.

### Fonctions F.B.I.

soit  $s_0 > 0$ , on pose

$$v_{a,\lambda,T}(s, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} \chi_T(t) u(t, x) dt$$

avec  $\lambda \gg 1$ ,  $a > 0$ , et

$$\chi_T(t) = \begin{cases} 1; & |t| \leq (1-\epsilon)T \\ 0; & |t| \geq (1-\frac{\epsilon}{2})T. \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, on pose  $v_{a,\lambda,T} = v_\lambda$ .

On note  $\Omega_{s_0} = (-s_0, s_0) \times \Omega$ ,  $\Gamma_{s_0} = (-s_0, s_0) \times \Gamma$ ,  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$  et  $\Gamma_T = (0, T) \times \Gamma$ .

**Propriétés 2.26.**  $v_{a,\lambda,T}$  possède les propriétés suivantes :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_{a,\lambda,T}(0, x) = u(a, x) \quad \text{si } |a| < T,$$

$$\|v_\lambda\|_{H^1(\Omega_{s_0})}^2 \leq C e^{s_0^2 \lambda} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2, \quad (2.75)$$

$$\|Qv_\lambda\|_{L^2(\Omega_{s_0})}^2 \leq C e^{s_0^2 \lambda - \lambda[T(1-\epsilon) - |a|]^2} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2, \quad (2.76)$$

$$\|v_\lambda|_{\Gamma_{s_0}}\|_{L^2(\Gamma_{s_0})}^2 \leq C e^{s_0^2 \lambda} \|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2, \quad (2.77)$$

$$\|Bv_\lambda\|_{L^2(\Gamma_{s_0})}^2 \leq C e^{s_0^2 \lambda} \|Bu\|_{L^2(\Gamma_T)}^2. \quad (2.78)$$

**Preuve** La preuve de ces propriétés est immédiate, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. ■

**Preuve du théorème 2.1.** On va utiliser l'inégalité (2.12) à  $v_\lambda$ , et on injecte les inégalités (2.75)-(2.78) on obtient

$$\|v_\lambda\|_{H^1(Y)}^2 \leq C e^{s_0^2 \lambda} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^{2(1-\mu)} \left( e^{-\lambda[T(1-\epsilon)-|a|]^2} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + \|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \right)^\mu \quad (2.79)$$

ensuite en appliquant la formule  $a^{1-\mu}b^\mu \leq (1-\mu)a + \mu b$ , pour tout  $a, b$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mu \in ]0, 1[$  à (2.79) on trouve

$$\|v_\lambda\|_{H^1(Y)}^2 \leq C \left[ e^{-\lambda\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + e^{\lambda\beta} \|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \right] \quad (2.80)$$

où  $\alpha = -s_0^2 + (T(1-\epsilon) - |a|)^2$  et  $\beta = s_0^2$ .

### Estimation de $u$

On sait déjà d'après les propriétés 2.26 qu'on a la convergence simple

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_\lambda(0, x) = u(a, x).$$

On va préciser cette convergence.

Dans les lemmes qui vont suivre, on va faire abstraction de la variable  $x$ .

Soit  $u(t)$  à support compact

$$u_\lambda(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}(a-t)^2} u(t) dt$$

on a alors

**Lemme 2.27.** Soit  $u \in H^s(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  (où  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$  est l'espace des distributions à support compact sur  $\mathbb{R}$ ), alors :

$$\|u - u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{s}{2}}} \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

**Preuve** Nous allons d'abord écrire  $u_\lambda$  sous forme de convolution de deux fonctions notées  $f$  et  $g$ . Pour cela posons  $f(x) = e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}$  et  $g(x) = u(x)$  on a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} u_\lambda(a) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}(a-t)^2} u(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(a-t)g(t) dt = (f * g)(a). \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_e(u - u_\lambda)(\xi) &= \mathfrak{F}_e u(\xi) - \mathfrak{F}_e u_\lambda(\xi) \\ &= \mathfrak{F}_e u(\xi) - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \mathfrak{F}_e(f * u)(\xi) \\ &= \mathfrak{F}_e u(\xi) - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \mathfrak{F}_e f(\xi) \mathfrak{F}_e u(\xi) \\ &= \mathfrak{F}_e u(\xi) \left[ 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \mathfrak{F}_e f(\xi) \right]. \end{aligned}$$

Calculons  $\mathfrak{F}_e f(\xi)$

$$\mathfrak{F}_e f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - \frac{\lambda}{2}x^2} dx.$$

En posant  $y = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x$  on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}x^2 + ix\xi &= y^2 + i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}y\xi \\ &= (y + i\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\xi)^2 + \frac{1}{2\lambda}\xi^2 \end{aligned}$$

ceci donne

$$\mathfrak{F}_e f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-\frac{1}{2\lambda}\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y+i\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\xi)^2} dy.$$

Posons  $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-(y+i\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\xi)^2} dy$ , d'après un résultat classique on a  $I = \sqrt{\pi}$ , alors

$$\mathfrak{F}_e f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-\frac{1}{2\lambda}\xi^2} \sqrt{\pi}$$

d'où

$$\mathfrak{F}_e(u - u_\lambda)(\xi) = \mathfrak{F}_e u(\xi) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2\lambda}\xi^2} \right].$$

D'autre part on a  $\frac{1-e^{-\xi^2}}{\xi^2}$  est bornée pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , donc

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}_e(u - u_\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{1 - e^{-\frac{1}{2\lambda}\xi^2}}{\xi} \right]^2 \frac{1}{(2\lambda)^{2s}} |\xi \mathfrak{F}_e u(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{C}{\lambda^s} \|\xi \mathfrak{F}_e(u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq \frac{C}{\lambda^s} \|\mathfrak{F}_e(u')\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Puisque  $H^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{inj cont}} L^2(\mathbb{R})$  on déduit la preuve du lemme 2.27. ■

**Lemme 2.28.** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_\epsilon > 0$  telle que :*

$$|u_\lambda(a)| \leq C_\epsilon \left( \int_{\substack{|s| \leq \epsilon \\ |a-t_0| \leq \epsilon}} |u_\lambda(t_0 + is)|^2 dt_0 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Preuve** Soient  $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $B(a, \epsilon)$  (resp.  $B(a, \epsilon_1)$ ) une boule ouvert de centre  $a$  et de rayon  $\epsilon$  (resp.  $\epsilon_1$ ),  $S(a, \epsilon) = \partial B(a, \epsilon)$  et  $\mathfrak{C}(\epsilon_1, \epsilon) = B(a, \epsilon) \setminus B(a, \epsilon_1)$ .

Pour la preuve du lemme nous allons utiliser la formule de Cauchy suivante :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(a, \epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in B(a, \epsilon).$$

En posant  $f(z) = u_\lambda(a)$  et  $\zeta = a + \epsilon e^{i\theta}$  où  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , on obtient

$$\begin{aligned} u_\lambda(a) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{S(a,\epsilon)} \frac{u_\lambda(a + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} d(a + \epsilon e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_\lambda(a + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_\lambda(a + \epsilon_1 e^{i\theta})}{\epsilon_1 e^{i\theta}} \epsilon_1 e^{i\theta} d\theta \quad (\text{par homothopie}). \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}(\epsilon_1, \epsilon)} u_\lambda(r, \theta) r dr d\theta &= \left[ \int_{\epsilon_1}^{\epsilon} r \int_0^{2\pi} u_\lambda(r, \theta) d\theta dr \right] \\ &= C(\epsilon_1, \epsilon) 2\pi u_\lambda(a) \quad \text{où } C(\epsilon_1, \epsilon) = cst > 0 \end{aligned}$$

d'où

$$u_\lambda(a) = \frac{1}{C_\epsilon} \int_{\mathfrak{C}(\epsilon_1, \epsilon)} u_\lambda(r, \theta) r dr d\theta.$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\begin{aligned} |u_\lambda(a)| &\leq C_\epsilon \left( \int \int_{\mathfrak{C}(\epsilon_1, \epsilon)} |u_\lambda(r, \theta)|^2 dr d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_\epsilon \left( \int \int_{\substack{|s| \leq \epsilon \\ |a-t_0| \leq \epsilon}} |u_\lambda(t_0 + is)|^2 dt_0 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme 2.28. ■

**Lemme 2.29.** Soit  $\vec{u} \in W_0$ , on a alors :

$$\|\vec{u}\|_{W_{-1}} \leq \|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{C}{\lambda} \left( \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + \|\partial_a u_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right).$$

**Preuve** La preuve du lemme 2.29 est inspirée de la méthode de Lions-Magenes [LiMa68] page 311.

En multipliant scalairement l'équation  $u''(t) - Au(t) = 0$  par  $A^{-1}u'(t)$  puis en intégrant entre 0 et  $t$  on obtient

$$\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle A^{-1}u'(0), u'(0) \rangle = \|u(t)\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \langle A^{-1}u'(t), u'(t) \rangle. \quad (2.81)$$

Puis en utilisant le fait que

$$\langle A^{-1}v, v \rangle \geq c \|v\|_{(H^1(\Omega))'}, \forall v \in (H^1(\Omega))'$$

(2.81) devient

$$\|\vec{u}\|_{W_{-1}}^2 = \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'(0)\|_{(H^1(\Omega))'}^2 \leq \|u(t)\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \langle A^{-1}u'(t), u'(t) \rangle \quad (2.82)$$

on a

$$\begin{aligned} |\langle A^{-1}u'(t), u'(t) \rangle| &\leq |\langle A^{-1}u'(t), u'(t) \rangle - \langle A^{-1}u'_\lambda(a), u'_\lambda(a) \rangle| \\ &\quad + |\langle A^{-1}u'_\lambda(a), u'_\lambda(a) \rangle| \end{aligned} \quad (2.83)$$

d'une part on a

$$|\langle A^{-1}u'_\lambda(a), u'_\lambda(a) \rangle| \leq C \|u'_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)}^2; C > 0, \quad (2.84)$$

car  $A^{-1} \in \mathcal{L}((H^1(\Omega))', H^1(\Omega))$ .

Par ailleurs on pose  $A^{-1}u' = v$  et  $A^{-1}u'_\lambda = v_\lambda$  on a alors

$$\begin{aligned} |\langle A^{-1}u'(t), u'(t) \rangle - \langle A^{-1}u'_\lambda(a), u'_\lambda(a) \rangle| &\leq |\langle v, u' \rangle - \langle v, u'_\lambda \rangle| \\ &\quad + |\langle v, u'_\lambda \rangle - \langle v_\lambda, u'_\lambda \rangle|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le lemme 2.27 on a

$$|\langle v - v_\lambda, u'_\lambda \rangle| \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \|u\|_{H^1(\Omega_T)} \|u'_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \quad (2.85)$$

et

$$|\langle v, u' - u'_\lambda \rangle| \leq C \|v\|_{H^2(\mathbb{R})} \| \|u' - u'_\lambda\|_{H^{-2}(\mathbb{R})}.$$

En écrivant  $\hat{u}_\lambda$  sous forme de convolution de deux fonctions et en remarquant que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \frac{1 - e^{-\frac{1}{2\lambda} \cdot \xi^2}}{1 + |\xi|^2} \right| \leq \frac{c}{\lambda}; c > 0 \text{ on a alors}$$

$$|\langle v, u' - u'_\lambda \rangle| \leq \frac{C}{\lambda} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2. \quad (2.86)$$

En vertu de (2.83)-(2.86) on a le lemme 2.29. ■

Revenons maintenant à notre problème.

Soit  $T_0 > 0$  et soit  $T_1 > 0$  tel que  $T_1 = (1 - \epsilon)T_0$  avec  $T_1 > T > T_0$ .

On a

$$v_\lambda(0, x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}(a-t)^2} \chi_T(t) u(t, x) dt = u_\lambda(a, x)$$

et

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega_{T_0})}^2 &\leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) \chi_T(t)|^2 dt dx \\ &\leq \|u \chi_T(a) - v_\lambda(0)\|_{L^2(\mathbb{R}_a \times \Omega)}^2 + \|v_\lambda(0)\|_{L^2(\mathbb{R}_a \times \Omega)}^2 \end{aligned}$$

alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega_{T_0})} \leq \|u \chi_T(a) - v_\lambda(0)\|_{L^2(\mathbb{R}_a \times \Omega)} + C \| \chi_{T_1}(a) v_\lambda(0) \|_{L^2(\mathbb{R}_a \times \Omega)}. \quad (2.87)$$

Le premier terme de l'inégalité (2.87) est majoré grâce au lemme 2.27 par :

$$\frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}.$$

Le deuxième terme de l'inégalité (2.87) est majoré grâce au lemme 2.28 et à l'inégalité (2.86) par :

$$C \left[ e^{-\lambda\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + e^{\lambda\alpha} \|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

d'où (2.87) devient

$$\|u\|_{L^2(\Omega_{T_0})} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|u\|_{H^1(\Omega_T)} + C e^{\alpha \frac{\lambda}{2}} \|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)} + e^{-\frac{\lambda}{2}\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}. \quad (2.88)$$

D'autre part on a

$$\partial_a u_\lambda(a, x) = i \partial_s v_\lambda(0, x).$$

En utilisant le lemme 2.28 et l'inégalité (2.86) on a alors

$$\|\partial_a u_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C \left[ e^{-\lambda\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + e^{\lambda\alpha} \|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.89)$$

En posant

$$\lambda = \frac{2}{\mu} \log \left( \frac{\|u\|_{H^1(\Omega_T)}}{\|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}} + 2 \right)$$

on trouve

$$\|u\|_{L^2(\Omega_{T_0})} + \|\partial_a u_\lambda\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_T)} \left[ \log \left( \frac{\|u\|_{H^1(\Omega_T)}}{\|u|_{\Gamma_T}\|_{L^2(\Gamma_T)}} + 2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

ceci termine la preuve du théorème 2.1 grâce au lemme 2.29. ■

# Chapitre 3

## Stabilisation logarithmique d'une structure multidimensionnelle par le bord

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>2</b>	<b>Hypothèses et résultats</b> . . . . .	<b>51</b>
	Le cas stationnaire . . . . .	53
	Le cas d'évolution . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Inégalités d'interpolation et de Carleman</b> . . . . .	<b>53</b>
	Inégalité d'interpolation . . . . .	53
	Inégalité de Carleman au bord . . . . .	57
	Inégalité d'interpolation locale . . . . .	73

---

### 1 Introduction

**N**ous nous intéressons ici à des problèmes de stabilisation pour des équations d'ondes sur un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , lié en un point à une tige modélisée par un segment de  $\mathbb{R}$ . La stabilisation, c'est-à-dire la décroissance de l'énergie, sera obtenue par une condition dissipative sur le bord de l'ouvert.

L'étude de ce problème n'est pas nouvelle. Il a déjà été considéré par Puel-Zuazua [PuZu91] qui ont étudié la contrôlabilité exacte avec une condition aux limites de type Dirichlet sur une partie du bord non nulle et d'autres conditions de transmission en mettant en œuvre la méthode H.U.M. Ce résultat de [PuZu91] a été généralisé par Burq [Bu94] en utilisant des méthodes d'analyse micro-locale et de propagation des singularités, développées par Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92].

Nous savons (voir Haraux [Ha85]) que l'énergie de toute solution de l'équation des ondes tend vers zéro dès que la dissipation a lieu sur un ouvert non vide du bord. Depuis les travaux de Bardos, Lebeau, et Rauch [BLR92], on a une condition – appelée contrôle géométrique – nécessaire et suffisante pour que la décroissance de l'énergie soit exponentielle pour toute donnée d'énergie finie. Dans le cas de la

stabilisation à l'intérieur, Lebeau [L96] a démontré, quand l'hypothèse de contrôle géométrique n'est pas satisfaite, que l'énergie décroît au moins avec une vitesse logarithmique si les données sont dans le domaine de  $A^k$  où  $A$  est le générateur infinitésimal de l'équation d'évolution.

Ici, nous démontrons des résultats analogues pour la stabilisation par le bord. Comme dans Lebeau [L96] et Lebeau-Robbiano [LRo97], nous appliquons une inégalité d'interpolation prouvée à partir des inégalités de Carleman, en tenant compte des conditions au bord.

Ce problème, sur un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , lié en un point à une tige modélisée par un segment de  $\mathbb{R}$ , peut-être généralisé à l'étude de la stabilisation logarithmique sur un ouvert joint à  $n$  tiges avec les mêmes conditions au bord.

## 2 Hypothèses et résultats

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^\infty$ , et  $\omega$  un segment de droite ouvert  $l'$  perpendiculaire à  $\Omega$ , en un point  $l \in \partial\Omega$ . Soit  $\Gamma$  ( $\Gamma \subset \partial\Omega$ ) un voisinage ouvert du point  $l$  (cf. Fig. 3.1).

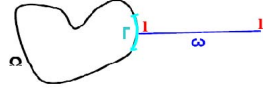


Fig. 3.1.

On se donne une fonction  $\Theta$  non négative régulière à support compact dans  $\Gamma$ , telle que  $\Theta(l) = 1$ . Soit  $a \in C_0^\infty(\partial\Omega, \mathbb{R}^+)$  avec  $\{x \in \partial\Omega; a > 0\} \neq \emptyset$  et  $\text{supp } a \cap \mathcal{L}\text{supp } \Theta \neq \emptyset$ .

On note par  $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$  et  $\omega_T = (0, T) \times \omega$ .

On s'intéresse à la décroissance de l'énergie des solutions  $u_1$  et  $u_2$  du problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u_1 = 0 & \text{dans } \Omega_T \\ (\partial_t^2 - \partial_y^2)u_2 = 0 & \text{dans } \omega_T \\ \partial_y u_2(t, l') = 0 & \text{sur } (0, T) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \partial_\eta u_1 = -a(x)\partial_t u_1 + \Theta(x)\partial_y u_2(t, l) & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ u_2(t, l) = \int_\Gamma \Theta(x)u_1(t, x)d\sigma(x) & \text{sur } (0, T) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} (u_1(0), u_1'(0)) = (u_1^0, u_1^1) & \text{dans } \Omega \\ (u_2(0), u_2'(0)) = (u_2^0, u_2^1) & \text{dans } \omega \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $u_1 := u_1(t, x)$ ,  $u_2 := u_2(t, y)$  et  $\partial_\eta$  est la dérivée normale extérieure à  $\partial\Omega$ . Soient  $V$  et  $H$  les espaces de Hilbert définis par :

$H = L^2(\Omega) \times L^2(\omega)$  muni du produit scalaire :

$$((f_0, g_0), (f_1, g_1)) = \int_\Omega f_0 \bar{f}_1 dx + \int_\omega g_0 \bar{g}_1 dy$$

et la norme correspondante, notée  $|(\cdot, \cdot)|_H$  et

$$V = \left\{ (u_1^0, u_2^0) \in H^1(\Omega) \times H^1(\omega); u_2^0(l) = \int_\Gamma \Theta(x)u_1^0(x)d\sigma(x) \right\}$$

muni de la norme de  $H^1(\Omega) \times H^1(\omega)$  et notée par  $\|\cdot\|_V$  :

$$\|(u_1^0, u_2^0)\|_V = \|u_1^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2^0\|_{H^1(\omega)}^2$$

Le système (3.1)-(3.3) modélise les vibrations de la structure multidimensionnelle constituée de la tige  $\omega$  qui est rattachée au corps  $\Omega$  au point  $l$ , la liaison étant définie par les conditions de transmission (3.2).

On note par  $\mathcal{H} = V \times H$ ,

$$\dot{\mathcal{H}} = \left\{ \mathcal{U} = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H}; \int_{\Omega} u_1^0(x) dx + \int_{\partial\Omega} \Theta(x) d\sigma(x) \int_{\omega} u_2^0(y) dy = 0 \right\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id} \\ \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Id : identité}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) = & \left\{ \mathcal{U} = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \dot{\mathcal{H}}; (u_1^1, u_2^1) \in V, \int_{\Omega} u_1^1(x) dx + \right. \\ & \left. \int_{\partial\Omega} \Theta(x) d\sigma(x) \int_{\omega} u_2^1(y) dy = 0, (\Delta u_1^0, \partial_y^2 u_2^0) \in H, \right. \\ & \left. \partial_{\eta} u_1^0 = -a(x)u_1^1 + \Theta(x)\partial_y u_2^0(l) \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \partial_y u_2^0(l') = 0 \right\}. \end{aligned}$$

L'injection  $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \dot{\mathcal{H}}$  est compacte, le demi-plan  $\text{Re } \lambda > 0$  est contenu dans l'ensemble résolvant de  $A$ , car on a  $a(x) \geq 0$ , et pour tout  $\mathcal{U} \in \dot{\mathcal{H}}$  on a  $\mathcal{U} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{W}_0$

où  $\mathcal{V}_0 \in \dot{\mathcal{H}}$  et  $\mathcal{W}_0 \in \dot{\mathcal{H}}^{\perp}$  avec  $\mathcal{W}_0 = C \begin{pmatrix} 1 \\ \int_{\partial\Omega} \Theta(x) d\sigma(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  tel que  $C \in \mathbb{R}$  et

$\mathcal{U}(t) = e^{tA}\mathcal{V}_0 + \mathcal{W}_0$  est solution de (3.1)-(3.3).

Pour une solution  $(u_1(t, x), u_2(t, y))$  de (3.1)-(3.3), on note par  $E(t, (u_1, u_2))$  l'énergie de (3.1)-(3.3) définie par

$$E(t, (u_1, u_2)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ |\partial_t u_1(t, \cdot)|^2 + |\nabla_x u_1(t, \cdot)|^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\omega} \left[ |\partial_t u_2(t, \cdot)|^2 + |\partial_y u_2(t, \cdot)|^2 \right] dy.$$

On a après une simple intégration par parties, où les termes de bord s'éliminant grâce aux conditions (3.2),

$$E(T_1, (u_1, u_2)) - E(T_2, (u_1, u_2)) = \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Gamma} a(x) \left| \frac{\partial}{\partial s} u_1(s, x) \right|^2 d\sigma ds.$$

Les résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

## Le cas stationnaire

**Théorème 3.1.** *Il existe  $r_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  tels que si  $\text{supp } \Theta \subset B(l, r_0)$  et si  $\lambda \in \text{sp}(A)$  alors  $\text{Re } \lambda < -e^{-C|\text{Im } \lambda|}/C$  et si  $\text{Re } \lambda \in ]-e^{-C|\text{Im } \lambda|}/C, 0]$ ;  $|\lambda| > 1$  on a*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\dot{H}, \dot{H})} \leq C e^{C|\text{Im } \lambda|}.$$

**Remarque 3.2.** L'hypothèse  $\text{supp } \Theta \subset B(l, r_0)$  signifie que  $\Theta$  doit être supportée suffisamment près du point de jonction, supposition qui reste cohérente avec notre modèle. ■

## Le cas d'évolution

Dans cette section on va démontrer que l'énergie du problème (3.1)-(3.3) décroît comme l'inverse du logarithme du temps, pour des données assez régulières.

**Théorème 3.3.** *Pour tout  $k > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toutes données initiales  $\mathcal{U} = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(A^k)$ , si on note  $U = e^{tA}\mathcal{U}$  la solution de (3.1)-(3.3) on a :*

$$|E(t, (u_1, u_2))|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{D}(A^k)}}{[\log(2+t)]^k}.$$

**Remarque 3.4.** Les théorèmes 3.1 et 3.3 sont analogues aux théorèmes suivants : théorème 1 de Lebeau [L96], qui a étudié le problème de stabilisation à l'intérieur d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , celui de Lebeau-Robbiano [LRo97], qui traite le problème de stabilisation au bord d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , celui de Burq [Bu98], applicable au cas de l'équation des ondes pour le problème extérieur, ainsi que celui de Bellassoued [Bl03], pour un ouvert avec obstacle transparent. Le théorème 3.1 est obtenu suivant la méthode de Lebeau [L96].

Pour démontrer le théorème 3.3, nous allons reprendre la méthode de Burq [Bu98], qui va nous permettre de prouver le théorème 3.3 à partir du théorème 3.1. ■

## 3 Inégalités d'interpolation et de Carleman

### Inégalité d'interpolation

On note  $v_1 := v_1(x)$ ,  $v_2 := v_2(y)$ , soit  $\mu \in \mathbb{R}$  (assez grand). Soit  $(v_1, v_2) \in C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\omega)$  la solution de

$$\begin{cases} Qv_1 = (\Delta + \mu^2)v_1 = f & \text{sur } \Omega \\ Pv_2 = (\partial_y^2 + \mu^2)v_2 = g & \text{sur } \omega \\ (\partial_\eta - ia(x)\mu)v_1 - \Theta(x)\partial_y v_2|_{y=l} = h & \text{sur } \partial\Omega \\ v_2(l) = \int_\Gamma \Theta(x)v_1(x)d\sigma(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Et si  $\text{supp } a \cap \mathcal{L}\text{supp } \Theta \neq \emptyset$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\Gamma_\delta \cap \mathcal{L}\text{supp } \Theta \neq \emptyset$  où  $\Gamma_\delta = \{x \in \partial\Omega; a(x) > \delta\}$  on a alors :

**Théorème 3.5.** *Il existe  $C > 0$  et  $\tilde{c} > 0$  tels que pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$  et toute solution  $(v_1, v_2)$  de (3.4), on a*

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\omega)} \leq C e^{\tilde{c}|\mu|} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\omega)} + \|\sqrt{a}v_1\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \\ + \|h\|_{L^2(\partial\Omega)}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Remarque 3.6.** Une inégalité de ce type a déjà été prouvée pour des équations des ondes sur une variété à bord, voir théorème 3, Lebeau-Robbiano [LRo97]. La preuve du théorème 3.5 repose sur les résultats de Lebeau-Robbiano [LRo95, LRo97]. Pour démontrer le théorème 3.5 nous allons suivre essentiellement la méthode de Robbiano [Ro95]. ■

**Preuve du théorème 3.1.** Montrons d'abord le théorème pour  $\lambda = i\mu$ .

Soit  $F \in \mathcal{H}$ ;  $F = (f_0, g_0, f_1, g_1)$ ;  $(f_0, g_0) \in V$  et  $(f_1, g_1) \in H$ . Pour  $\mathcal{U} \in \mathcal{D}(A)$  avec  $\mathcal{U} = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1)$ , on a

$$\begin{cases} \partial_\eta u_1^0 + a(x)u_1^1 = \Theta(x)\partial_y u_2^0(l) & \text{sur } \Gamma \\ u_2^0(l) = \int_\Gamma \Theta(x)u_1^0(x)d\sigma(x) \end{cases}$$

L'équation  $(A - \lambda)\mathcal{U} = F$  est équivalente à :

$$\begin{cases} -\lambda u_1^0 + u_1^1 = f_0 \\ -\lambda u_2^0 + u_2^1 = g_0 \\ \Delta u_1^0 - \lambda u_1^1 = f_1 \\ \partial_y^2 u_2^0 - \lambda u_2^1 = g_1 \end{cases} \quad (3.6)$$

c'est-à-dire, en remplaçant  $u_1^1$  par  $u_1^0$  dans la troisième équation de (3.6) (resp.  $u_2^1$  par  $u_2^0$  dans la quatrième équation de (3.6)) et dans la condition au bord, on obtient

$$\begin{cases} \Delta u_1^0 - \lambda^2 u_1^0 = f_1 + \lambda f_0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_y^2 u_2^0 - \lambda^2 u_2^0 = g_1 + \lambda g_0 & \text{sur } \omega \\ \partial_\eta u_1^0 + a(x)\lambda u_1^0 - \Theta(x)\partial_y u_2^0(l) = -a(x)f_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_2^0(l) = \int_\Gamma \Theta(x)u_1^0(x)d\sigma(x). \end{cases} \quad (3.7)$$

On pose  $K_0 = f_1 + \lambda f_0$ ,  $K_1 = g_1 + \lambda g_0$  et  $K_2 = -a(x)f_0$ .

Par la formule de Green-Riemann on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-\Delta + \lambda^2)u_1^0 \bar{u}_1^0 dx = \lambda^2 \|u_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} a(x)\lambda |u_1^0|^2 d\sigma \\ + \int_{\partial\Omega} K_2 \bar{u}_1^0 d\sigma - \partial_y u_2^0(l) \bar{u}_2^0(l). \end{aligned} \quad (3.8)$$

et

$$\int_\Omega (-\partial_y^2 + \lambda^2)u_2^0 \bar{u}_2^0 dy = \lambda^2 \|u_2^0\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\partial_y u_2^0\|_{L^2(\omega)}^2 + \partial_y u_2^0(l) \bar{u}_2^0(l). \quad (3.9)$$

En sommant (3.8) et (3.9) on déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} a(x)(i\mu)|u_1^0|^2 d\sigma = - \int_\Omega K_0 \bar{u}_1^0 dx + \mu^2 \|u_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u_1^0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\partial\Omega} K_2 \bar{u}_1^0 d\sigma \\ - \int_\omega K_1 \bar{u}_2^0 dy + \mu^2 \|u_2^0\|_{L^2(\omega)}^2 - \|\partial_y^2 u_2^0\|_{L^2(\omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De la partie imaginaire de (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} |\mu| \|\sqrt{a}u_1^0\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &\leq \|K_0\|_{L^2(\Omega)} \|u_1^0\|_{L^2(\Omega)} + \|K_1\|_{L^2(\omega)} \|u_2^0\|_{L^2(\omega)} \\ &\quad + C \|f_0\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\sqrt{a}u_1^0\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

or

$$\|f_0\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|f_0\|_{H^1(\Omega)} \text{ et } \|\sqrt{a}u_1^0\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u_1^0\|_{H^1(\Omega)},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\mu| \|\sqrt{a}u_1^0\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &\leq C \left( \|K_0\|_{L^2(\Omega)} \|u_1^0\|_{L^2(\Omega)} + \|K_1\|_{L^2(\omega)} \|u_2^0\|_{L^2(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|f_0\|_{H^1(\Omega)} \|u_1^0\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

De (3.5) il résulte que

$$\begin{aligned} \|u_1^0\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2^0\|_{H^1(\omega)} &\leq C e^{C|\mu|} \left[ \|f_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|g_0\|_{H^1(\omega)} + \|g_1\|_{L^2(\omega)} + \|\sqrt{a}u_1^0\|_{L^2(\partial\Omega)} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Montrons qu'on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|u_1^0\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2^0\|_{H^1(\omega)} &\leq C e^{C|\mu|} \left[ \|f_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|g_0\|_{H^1(\omega)} + \|g_1\|_{L^2(\omega)} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

sinon d'après (3.13) on a

$$\|u_1^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2^0\|_{H^1(\omega)}^2 \leq C e^{C|\mu|} \|\sqrt{a}u_1^0\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (3.15)$$

Si (3.15) est vérifiée de (3.12) on obtient

$$\begin{aligned} \|u_1^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2^0\|_{H^1(\omega)}^2 &\leq C' e^{C'|\mu|} \left[ \|K_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|K_1\|_{L^2(\omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|f_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right] + \frac{1}{C'} \left[ \|u_1^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2^0\|_{H^1(\omega)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Avec  $C' > 1$ , en passant le terme  $\|u_1^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2^0\|_{H^1(\omega)}^2$  de droite à gauche de l'inégalité (3.16) et on a (3.14). Comme  $u_1^1 = f_0 + \lambda u_1^0$  et  $u_2^1 = g_0 + \lambda u_2^0$ , on obtient également

$$\begin{aligned} \|u_1^1\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2^1\|_{H^1(\omega)} &\leq C e^{C|\mu|} \left[ \|f_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|g_0\|_{H^1(\omega)} + \|g_1\|_{L^2(\omega)} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ce qui prouve que  $(A - (i\mu))$  est injectif donc bijectif, grâce a la théorie de Fredholm, de  $\mathcal{D}(A)$  sur  $\dot{\mathcal{H}}$  et

$$\|(A - (i\mu))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}, \dot{\mathcal{H}})} \leq C e^{C|\mu|}.$$

Montrons maintenant le théorème pour  $\lambda = \alpha + i\mu$  et  $\lambda \notin spA$ .

On a

$$\begin{aligned} (A - \lambda) &= (A - (\alpha + i\mu)) \\ &= (A - i\mu)[\text{Id} - (A - i\mu)^{-1}\alpha]. \end{aligned}$$

Si  $|\alpha| \leq \frac{1}{2C}e^{-C|\mu|}$  alors  $[\text{Id} - (A - i\mu)^{-1}\alpha]$  est inversible est donc  $(A - \lambda)$  est inversible et on a

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq Ce^{C|\mu|}.$$

Ceci prouve le théorème 3.1. ■

**Preuve du théorème 3.3.** Rappelons qu'on a noté  $\mathcal{H} = V \times H$  et  $\dot{\mathcal{H}}$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}$  de codimension un.

Pour  $\mathcal{U} \in D(A)$ , on a  $\mathcal{U} \in \tilde{V} \times \tilde{H}$  où

$$\tilde{V} = \left\{ (u_1^0, u_2^0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\omega); u_2^0 = \int_{\Gamma} \Theta(x)u_1^0 d\sigma(x) \right\},$$

et

$$\tilde{H} = H^1(\Omega) \times H^1(\omega)$$

et pour  $\mathcal{U} \in \dot{\mathcal{H}}$ , on pose

$$\|\mathcal{U}\|_{\dot{\mathcal{H}}}^2 = \int_{\Omega} \left[ |u_1^1|^2 + |\nabla_x u_1^0|^2 \right] dx + \int_{\omega} \left[ |u_2^1|^2 + |\partial_y u_2^0|^2 \right] dy,$$

qui représente une norme hilbertienne sur  $\dot{\mathcal{H}}$  (il est facile de voir que  $(0, 0, C_1, C_2)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes, n'est pas un élément de  $\dot{\mathcal{H}}$  grâce à la condition au bord mise dans  $V$  et la condition mise sur les éléments de  $\dot{\mathcal{H}}$ ) et on a

$$\exists C > 0, \forall \mathcal{U} \in \dot{\mathcal{H}}; \|\mathcal{U}\|_{\dot{\mathcal{H}}} \leq \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}} \leq C\|\mathcal{U}\|_{\dot{\mathcal{H}}}.$$

De plus, pour tout  $\mathcal{U} \in D(A)$ , on a  $A\mathcal{U} \in \dot{\mathcal{H}}$  car

$\int_{\Omega} u_1^1(x)dx + \int_{\partial\Omega} \Theta(x)d\sigma(x) \int_{\omega} u_2^1(y)dy = 0$  et l'injection  $D(A) \hookrightarrow \dot{\mathcal{H}}$  est compacte,  $(\text{Id} - A)$  est bijectif de  $D(A)$  sur  $\dot{\mathcal{H}}$  (car la forme  $\int_{\Omega} [|u_1^1|^2 + |\nabla_x u_1^0|^2] dx + \int_{\omega} [|u_2^1|^2 + |\partial_y u_2^0|^2] dy + \int_{\partial\Omega} a(x)|u_1^1|^2 d\sigma$  est coercive sur  $\dot{\mathcal{H}}$ , donc injective, et par Lax-Milgram, on déduit que  $(\text{Id} - A)$  est bijectif), et on a

$$\forall \mathcal{U} \in D(A), \text{Re}(A\mathcal{U}|\mathcal{U})_{\dot{\mathcal{H}}} = - \int_{\partial\Omega} a(x)|u_1^1| d\sigma \leq 0,$$

donc  $A$  est maximal dissipatif. On rappelle qu'alors pour tout  $\lambda$  de partie réelle strictement positive,  $(\lambda - A)$  est bijectif continu de  $D(A)$  muni de sa norme usuelle  $\|\mathcal{U}\|_{D(A)}^2 = \|\mathcal{U}\|_{\dot{\mathcal{H}}}^2 + \|A\mathcal{U}\|_{\dot{\mathcal{H}}}^2$  dans  $\dot{\mathcal{H}}$  et  $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}})} \leq |\text{Re } \lambda|^{-1}$ . En effet il suffit d'écrire  $\text{Re}((\lambda - A)\mathcal{U}|\mathcal{U})_{\dot{\mathcal{H}}} = \text{Re}(\lambda\mathcal{U}|\mathcal{U})_{\dot{\mathcal{H}}} - \text{Re}(A\mathcal{U}|\mathcal{U})_{\dot{\mathcal{H}}}$  puisque  $A$  est maximal dissipatif on a le résultat.

On rappelle aussi que le théorème de Hille-Yosida permet de définir, pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $s \geq 0$  l'opérateur  $\frac{e^{sA}}{(\text{Id} - A)^k}$ . On note  $R(\xi, A)$  la résolvante de  $A$  qui est donc définie et holomorphe par rapport à  $\xi$  pour  $\text{Im } \xi < 0$ .

Sous les conditions ci-dessus sur l'opérateur  $A$ , et le théorème 3.7 (dû a Burq [Bu98], théorème 3) on conclut la preuve du théorème 3.3.

**Théorème 3.7.** *Soit  $A$  un opérateur non borné, fermé sur  $\dot{\mathcal{H}}$ , de domaine  $\mathcal{D}(A)$  dense dans  $\dot{\mathcal{H}}$ , que l'on supposera maximal dissipatif.*

*On suppose également que, pour tout  $\lambda$  tel que  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ,  $(\lambda - A)$  est bijectif continu de  $\mathcal{D}(A)$  dans  $\dot{\mathcal{H}}$  et  $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}}, \dot{\mathcal{H}})} \leq C e^{C|\operatorname{Im} \lambda|}$ ,  $C > 0$ . Alors Pour tout entier  $k > 1$  il existe  $C_k > 0$  tel que pour tout  $t > 1$*

$$\left\| \frac{e^{tA}}{(\operatorname{Id} - A)^k} \right\|_{\mathcal{L}(\dot{\mathcal{H}})} \leq \frac{C_k}{(\log t)^k}.$$

■

**Remarque 3.8.** Ce théorème implique le théorème 3.3 c'est-à-dire

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^k); \dot{\mathcal{H}})} \leq \frac{C_k}{(\log t)^k} \text{ pour tout } t > 0.$$

On peut étendre ce théorème à tout  $k$  réel positif, en utilisant l'interpolation. Notons que  $e^{tA}$  est borné par  $C$  de  $\mathcal{D}(A^0)$  dans lui même ainsi que par  $\frac{C}{(\log t)^k}$  de  $\mathcal{D}(A^k)$  dans  $\mathcal{D}(A^0)$  vu que l'espace interpolé complexe d'ordre  $s$  entre  $\mathcal{D}(A^0) = \mathcal{H}$  et  $\mathcal{D}(A^k)$  est, par définition,  $\mathcal{D}(A^{ks})$ . Etant donné que le théorème d'interpolation de Calderón et de Lions (Voir Reed-Simon [ReSi75], volume II théorème IX. 20) entraîne que, pour  $s \in [0, 1]$ ,  $e^{tA}$  est borné par  $\frac{C}{(\log t)^{sk}}$  de  $\mathcal{D}(A^{ks})$  dans  $\mathcal{D}(A^0)$ , ce qui implique le théorème 3.3 pour  $k > 0$ . ■

### Inégalité de Carleman au bord

Soient  $\mathbb{R}_+^n = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$  et  $K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^n; |x| \leq D_1\}$ ,  $K_2 = \{y \in \mathbb{R}_+; y \leq D_2\}$ ;  $D_1 > 0$  et  $D_2 > 0$ . On note  $C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  jusqu'au bord de  $\mathbb{R}_+^n$  à support dans  $K_1$  (resp.  $C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  jusqu'au bord de  $\mathbb{R}_+$  à support dans  $K_2$ ), et pour  $f \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $f_0 = f|_{x_n=0}$  (resp.  $g \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ ,  $g_0 = g|_{y=0}$ ).

Posons

$$\tilde{Q} = D_{x_n}^2 + R(x, D_{x'}) \tag{3.18}$$

et

$$\tilde{P} = D_y^2 \tag{3.19}$$

où  $D_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j}$ , (resp.  $D_y = \frac{1}{i} \partial_y$ ).  $\tilde{Q}$  représente un opérateur différentiel du second ordre à coefficients  $C^\infty$  au voisinage de  $K_1$ . On appelle  $r(x, \xi')$  le symbole principal de  $R$ , et on suppose que

$$r(x, \xi') \in \mathbb{R} \text{ et } \exists c > 0, \forall (x, \xi') \in K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}; \quad r(x, \xi') \geq c|\xi'|^2. \tag{3.20}$$

Soit  $\varphi_1(x)$  (resp.  $\varphi_2(y)$ ) une fonction  $C^\infty$  réelle définie au voisinage de  $K_1$  (resp. de  $K_2$ ) et  $\gamma$  un paramètre assez grand. On écrit

$$q_{\varphi_1}(x, \xi, \gamma) = (\xi_n + i\gamma \partial_{x_n} \varphi_1)^2 + r(x, \xi' + i\gamma \partial_{x'} \varphi_1) \tag{3.21}$$

$$p_{\varphi_2}(y, \eta, \gamma) = (\eta + i\gamma \partial_y \varphi_2)^2 \tag{3.22}$$

On note  $\mu = \kappa\gamma$  où  $\kappa$  est assez grand et sera choisi ultérieurement. On suppose par ailleurs que les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2$  vérifient

$$\forall x \in K_1; \quad \partial_{x_n} \varphi_1 \neq 0 \quad (3.23)$$

$$\forall y \in K_2; \quad \begin{cases} \partial_y \varphi_2 \neq 0, \\ |\partial_y \varphi_2| < \kappa \end{cases} \quad (3.24)$$

et qu'elles satisfont l'hypothèse d'hypoellipticité de Hörmander, c'est-à-dire

$$\forall (x, \xi) \in K_1 \times \mathbb{R}^n \text{ et } \forall \gamma \geq 1; \quad q_{\varphi_1}(x, \xi, \gamma) + \mu^2 = 0 \implies \left\{ \operatorname{Re} q_{\varphi_1}, \frac{1}{\gamma} \operatorname{Im} q_{\varphi_1} \right\}(x, \xi, \gamma) > 0. \quad (3.25)$$

$$\forall (y, \eta) \in K_2 \times \mathbb{R} \text{ et } \forall \gamma \geq 1; \quad p_{\varphi_2}(y, \eta, \gamma) + \mu^2 = 0 \implies \left\{ \operatorname{Re} p_{\varphi_2}, \frac{1}{\gamma} \operatorname{Im} p_{\varphi_2} \right\}(y, \eta, \gamma) > 0. \quad (3.26)$$

On pose  $(f|g) := \int_{\mathbb{R}_+^n} f \bar{g} dx$ ,  $\|f\|_0^2 = (f|f)$  et  $\|f\|_1^2 = \gamma^2 \|f\|_0^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_{x_j} f\|_0^2$ . On note par  $(\cdot| \cdot)_0$  le produit scalaire des fonctions définies sur  $\{x_n = 0\}$ , i.e.,  $(f|g)_0 := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x') \bar{g}(x') dx'$ . La norme induite est notée par  $|\cdot|_0$ , i.e.,  $|f|_0^2 = (f|f)_0$ . Pour  $s \in \mathbb{R}$   $|f|_s = |\Lambda^s f|_0$  où  $\Lambda^s$  a pour symbole  $(\gamma^2 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}}$ , on a donc

$$|f|_s^2 = cte \int (\gamma^2 + |\xi'|^2)^s |\widehat{f}(\xi')|^2 d\xi'. \quad (3.27)$$

Et on note  $|f|_{1,\gamma}^2 = |f|_{x_n=0}|_1^2 + |\partial_{x_n} f|_{x_n=0}|_0^2$ . On écrit également  $((h|k)) := \int_{\mathbb{R}_+} h \bar{k} dy$ ,  $|||h|||_0^2 = (h|h)$ ,  $|||h|||_1^2 = \gamma^2 |||h|||_0^2 + |||\partial_y h|||_0^2$ .

**Proposition 3.9.** Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  vérifiant (3.23)-(3.26). Il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $\tilde{w}_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  et  $\tilde{w}_2 \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} & \|e^{\gamma\varphi_1}(\tilde{Q} + \mu^2)\tilde{w}_1\|_0^2 + \|e^{\gamma\varphi_2}(\tilde{P} + \mu^2)\tilde{w}_2\|_0^2 + \gamma \left( |e^{\gamma\varphi_1}\tilde{w}_1|_{1,\gamma} + \gamma^2 |(e^{\gamma\varphi_2}\tilde{w}_2)|_{y=0}|^2 \right. \\ & \left. + |\partial_y(e^{\gamma\varphi_2}\tilde{w}_2)|_{y=0}|^2 \right) \geq C\gamma \left[ \|e^{\gamma\varphi_1}\tilde{w}_1\|_1^2 + |||e^{\gamma\varphi_2}\tilde{w}_2|||_1^2 \right]. \end{aligned}$$

**Proposition 3.10.** Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  vérifiant (3.25) et (3.26),  $\partial_{x_n} \varphi_1(x', 0) > 0$  pour tout  $(x', 0) \in K_1$ , et  $\partial_y \varphi_2(0) < 0$ ,

$$1 > a^2 \text{ pour } (x', 0) \in K_1$$

et il existe  $\epsilon > 0$  tel que si

$$\int_{\Gamma} |\Theta(x')|^2 d\sigma < \epsilon \text{ pour } (x', 0) \in K_1,$$

alors il existe  $C > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$  et  $r_0 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $\tilde{w}_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  et  $\tilde{w}_2 \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , si  $\operatorname{supp} \Theta \Subset B(0, r_0)$  et  $\varphi_1(x', 0) = \varphi_2(0)$  vérifiant

$$(-\partial_{x_n} + ia\mu)\tilde{w}_1 - \Theta(x')\partial_y \tilde{w}_2|_{y=0} = \tilde{h} \text{ sur } x_n = 0$$

$$\tilde{w}_2|_{y=0} := \int_{\Gamma} \Theta(x') \tilde{w}_1 d\sigma;$$

on a

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma\varphi_1}(\tilde{Q} + \mu^2)\tilde{w}_1\|_0^2 + \|e^{\gamma\varphi_2}(\tilde{P} + \mu^2)\tilde{w}_2\|_0^2 + \gamma|e^{\gamma\varphi_1}\tilde{h}|_0^2 &\geq C\gamma \left[ \|e^{\gamma\varphi_1}\tilde{w}_1\|_1^2 \right. \\ &\left. + \|e^{\gamma\varphi_2}\tilde{w}_2\|_1^2 + |e^{\gamma\varphi_1}\tilde{w}_1|_{1,\gamma}^2 + \gamma^2|(e^{\gamma\varphi_2}\tilde{w}_2)|_{y=0}|^2 + |\partial_y(e^{\gamma\varphi_2}\tilde{w}_2)|_{y=0}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Les preuves des propositions 3.9 et 3.10 sont les conséquences respectives des propositions 3.11 et 3.12 énoncées ci-dessous. Ces preuves se font classiquement en conjuguant les fonctions et les opérateurs par les poids  $e^{\gamma\varphi_j}$ ,  $j = 1, 2$  (voir par exemple Ouksel [Ou07]). Plus précisément, posons  $h = ie^{\gamma\varphi_1}\tilde{h}$ ,

$$Q_{\varphi_1} = e^{\gamma\varphi_1} \circ \tilde{Q} \circ e^{-\gamma\varphi_1}$$

et

$$P_{\varphi_2} = e^{\gamma\varphi_2} \circ \tilde{P} \circ e^{-\gamma\varphi_2}.$$

**Proposition 3.11.** *Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  vérifiant (3.23)-(3.26). Il existe  $C > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $w_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  et  $w_2 \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , on ait*

$$\begin{aligned} \|(Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1\|_0^2 + \|(P_{\varphi_2} + \mu^2)w_2\|_0^2 + \gamma \left( |w_1|_{1,\gamma}^2 + \gamma^2|w_2|_{y=0}|^2 + |\partial_y w_2|_{y=0}|^2 \right) \\ \geq C\gamma \left[ \|w_1\|_1^2 + \|w_2\|_1^2 \right]. \end{aligned}$$

**Proposition 3.12.** *Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  vérifiant (3.25) et (3.26),  $\partial_{x_n}\varphi_1(x', 0) > 0$  pour tout  $(x', 0) \in K_1$ , et  $\partial_y\varphi_2(0) < 0$ ,*

$$1 > a^2 \text{ pour } (x', 0) \in K_1$$

et il existe  $\epsilon > 0$  tel que si

$$\int_{\Gamma} |\Theta(x')|^2 d\sigma < \epsilon \text{ pour } (x', 0) \in K_1,$$

alors il existe  $C > 0$ ,  $\gamma_1 > 0$  et  $r_0 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_1$  et tout  $w_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  et  $w_2 \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , si  $\text{supp } \Theta \Subset B(0, r_0)$  et  $\varphi_1(x', 0) = \varphi_2(0) \forall x' \in \text{supp } \Theta \cup B(0, r_0)$  vérifiant

$$(D_{x_n} - \text{op}(b_1))w_1 + \Theta(x')(D_y - b_2(\gamma))w_2 = h \text{ sur } x_n = 0$$

$$w_2|_{y=0} := \int_{\Gamma} \Theta(x') w_1 d\sigma;$$

avec  $\text{op}(b_1) = a\mu - i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1$  et  $b_2(\gamma) = -i\gamma\partial_y\varphi_2$ , on ait

$$\begin{aligned} \|(Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1\|_0^2 + \|(P_{\varphi_2} + \mu^2)w_2\|_0^2 + \gamma|h|_0^2 &\geq C\gamma \left[ \|w_1\|_1^2 + \|w_2\|_1^2 \right. \\ &\left. + |w_1|_{1,\gamma}^2 + \gamma^2|w_2|_{y=0}|^2 + |\partial_y w_2|_{y=0}|^2 \right]. \end{aligned}$$

**Preuves des propositions 3.11, 3.12.** Introduisons quelques notations et formules que nous utiliserons dans la suite.

On nomme  $\mathcal{S}^j$  l'espace des symboles tangentiels  $a(x, \xi', \gamma)$ ,  $C^\infty$  en  $x$  au voisinage de  $K_1$ ,  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$  et pour  $\gamma \geq 1$  et vérifiant :

$$\forall \alpha, \beta, \exists C_{\alpha, \beta}, \forall x, \xi', \gamma, |\partial_x^\alpha \partial_{\xi'}^\beta a| \leq C_{\alpha, \beta} (\gamma + |\xi'|)^{j - |\beta|}. \quad (3.28)$$

On appellera  $\mathcal{E}^j$  l'espace des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels  $A = \text{op}(a)$ ,  $a \in \mathcal{S}^j$  définis par :

$$(A)(f)(x) = (2\pi)^{-(n-1)} \int e^{i(x' - y')\xi'} a(x, \xi', \gamma) f(y', x_n) dy' d\xi'. \quad (3.29)$$

où l'intégrale doit être définie au sens des intégrales oscillantes. Nous utiliserons l'inégalité de Gårding suivante (dédue de l'inégalité usuelle) (voir Taylor [Ta91]) : Soit  $A \in \mathcal{E}^2$  et  $a$  son symbole s'il existe un  $c_0 > 0$ , tel que  $\text{Re}(a(x, \xi', \gamma)) \geq c_0(\gamma^2 + |\xi'|^2)$  pour tout  $(x, \xi') \in K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ , et  $\gamma \geq 1$  alors

$$\exists C_1 > 0, \gamma_1 > 0, \forall f \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n), \forall \gamma \geq \gamma_1; \text{Re}(Af|f) \geq C_1|f|_1^2. \quad (3.30)$$

Enfin, on note  $\mathcal{D}^j$  le sous-espace de  $\mathcal{E}^j$  constitué des  $A = \text{op}(a)$  où  $a(x, \xi', \gamma)$  est polynomial de degré  $j$  en  $\xi', \gamma$ .

Notons  $\tilde{Q}_2 = \frac{Q_{\varphi_1} + Q_{\varphi_1}^*}{2}$ ,  $\tilde{Q}_1 = \frac{Q_{\varphi_1} - Q_{\varphi_1}^*}{2i\gamma}$ , alors

$$\begin{cases} Q_{\varphi_1} = \tilde{Q}_2 + i\gamma\tilde{Q}_1 \\ \text{et on note} \\ \tilde{Q}_2 = D_{x_n}^2 + Q_2, \quad \tilde{Q}_1 = D_{x_n} \partial_{x_n} \varphi_1 + \partial_{x_n} \varphi_1 D_{x_n} + 2Q_1 \end{cases} \quad (3.31)$$

où  $Q_1 \in \mathcal{D}^1$ ,  $Q_2 \in \mathcal{D}^2$  ont pour symboles principaux

$$\begin{cases} q_2 = \sigma(Q_2) = -\gamma^2(\partial_{x_n} \varphi_1)^2 + r(x, \xi') - r(x, \gamma \partial_{x'} \varphi_1) \\ q_1 = \sigma(Q_1) = \tilde{r}(x, \xi', \partial_{x'} \varphi_1) \end{cases} \quad (3.32)$$

où on a noté  $\tilde{r}(x, \xi', \eta')$  la forme bilinéaire symétrique en  $\xi', \eta'$  associée à la forme quadratique réelle  $r(x, \xi')$ .

De même notons  $\tilde{P}_2 = \frac{P_{\varphi_2} + P_{\varphi_2}^*}{2}$ ,  $\tilde{P}_1 = \frac{P_{\varphi_2} - P_{\varphi_2}^*}{2i\gamma}$ , alors

$$\begin{cases} P_{\varphi_2} = \tilde{P}_2 + i\gamma\tilde{P}_1 \\ \text{et on note} \\ \tilde{P}_2 = D_y^2 + P_2, \quad \tilde{P}_1 = D_y \partial_y \varphi_2 + \partial_y \varphi_2 D_y \end{cases} \quad (3.33)$$

où  $p_2 = \sigma(P_2) = -\gamma^2(\partial_y \varphi_2)^2$ .

Pour  $f, g \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ , on posera par abus pour simplifier les écritures  $(f|g)_0 := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', 0) \bar{g}(x', 0) dx'$  auquel cas les formules d'intégration par parties s'écrivent,

$$\begin{cases} (f|\tilde{Q}_2 g) = (\tilde{Q}_2 f|g) - i\gamma[(f|D_{x_n} g)_0 + (D_{x_n} f|g)_0] \\ (f|\tilde{Q}_1 g) = (\tilde{Q}_1 f|g) - 2i\gamma(\varphi'_{x_n} f|g)_0, \end{cases} \quad (3.34)$$

les opérateurs  $\tilde{Q}_k$ ,  $k = 1, 2$  étant formellement auto-adjoint par construction il en résulte :

$$\|Q_{\varphi_1}g\|_0^2 = \|\tilde{Q}_2g\|_0^2 + \gamma^2\|\tilde{Q}_1g\|_0^2 + i\gamma\left[(\tilde{Q}_1g|\tilde{Q}_2g) - (\tilde{Q}_2g|\tilde{Q}_1g)\right]. \quad (3.35)$$

La substitution de (3.31), (3.32) et (3.34) dans (3.35) donne :

$$\begin{cases} \|Q_{\varphi_1}g\|_0^2 = \|\tilde{Q}_2g\|_0^2 + \gamma^2\|\tilde{Q}_1g\|_0^2 + i\gamma([\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1]g|g) + \gamma\beta(g) \\ \text{où} \\ \beta(g) = (\tilde{Q}_1g|D_{x_n}g)_0 + ((D_{x_n}\tilde{Q}_1 - 2\partial_{x_n}\varphi_1\tilde{Q}_2)g|g)_0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Par ailleurs,  $i[\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1] \in (\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}^1D_{x_n} + \mathcal{D}^0D_{x_n}^2)$ , et puisque,  $\partial_{x_n}\varphi_1 \neq 0$  pour  $x \in K_1$ , par (3.31) on a  $D_{x_n} - \frac{1}{2\partial_{x_n}\varphi_1}\tilde{Q}_1 \in \mathcal{D}^1$  et  $D_{x_n}^2 - \tilde{Q}_2 \in \mathcal{D}^2$ , il s'ensuit que

$$i[\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1] = B_0\tilde{Q}_2 + B_1\tilde{Q}_1 + B_2 \text{ où } B_j \in \mathcal{D}^j. \quad (3.37)$$

La preuve des propositions 3.11 et 3.12 repose sur un découpage lié à la nature des racines du polynôme caractéristique en  $\xi_n$  (resp. des racines du polynôme caractéristique en  $\eta$ ). Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^+ &= \left\{ (x, \xi', \mu, \gamma) \in K_1 \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times [1, +\infty[, q_2 + \mu^2 + \frac{q_1^2}{(\partial_{x_n}\varphi_1)^2} > 0 \right\} \\ \mathcal{Z} &= \left\{ (x, \xi', \mu, \gamma) \in K_1 \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times [1, +\infty[, q_2 + \mu^2 + \frac{q_1^2}{(\partial_{x_n}\varphi_1)^2} = 0 \right\} \\ \mathcal{E}^- &= \left\{ (x, \xi', \mu, \gamma) \in K_1 \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times [1, +\infty[, q_2 + \mu^2 + \frac{q_1^2}{(\partial_{x_n}\varphi_1)^2} < 0 \right\}. \end{aligned}$$

**Lemme 3.13.**

- i) Pour  $(x, \xi', \mu, \gamma) \in \mathcal{E}^+$ , alors  $(q_{\varphi_1} + \mu^2)$  admet deux racines  $r_+$  et  $r_-$  vérifiant  $\text{Im}(r_+) > 0$  et  $\text{Im}(r_-) < 0$ .
- ii) Pour  $(x, \xi', \mu, \gamma) \in \mathcal{Z}$ , alors une des racines de  $(q_{\varphi_1} + \mu^2)$  est réelle et l'autre est à partie imaginaire négative si  $\partial_{x_n}\varphi_1 > 0$ .
- iii) Pour  $(x, \xi', \mu, \gamma) \in \mathcal{E}^-$ , alors les deux racines de  $(q_{\varphi_1} + \mu^2)$  ont des parties imaginaires du signe de  $-\partial_{x_n}\varphi_1$ .

**Preuve** Etant donné que

$$\begin{aligned} q_{\varphi_1} + \mu^2 &= \sigma(Q_{\varphi_1} + \mu^2) \\ &= \xi_n^2 + 2i\gamma\xi_n\partial_{x_n}\varphi_1 + q_2 + 2i\gamma q_1 + \mu^2 \end{aligned}$$

si pour  $(x, \xi', \mu, \gamma)$  fixé, on note

$$\alpha^2 = (\gamma\partial_{x_n}\varphi_1)^2 + q_2 + 2i\gamma q_1 + \mu^2$$

alors

$$q_{\varphi_1} + \mu^2 = (\xi_n + i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1 + i\alpha)(\xi_n + i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1 - i\alpha).$$

Les parties imaginaires des racines sont donc  $-\gamma\partial_{x_n}\varphi_1 - \operatorname{Re}\alpha$  et  $-\gamma\partial_{x_n}\varphi_1 + \operatorname{Re}\alpha$ . Les signes des parties imaginaires sont opposés si  $\gamma|\partial_{x_n}\varphi_1| < |\operatorname{Re}\alpha|$ , égaux au signe de  $-\gamma\partial_{x_n}\varphi_1$  si  $\gamma|\partial_{x_n}\varphi_1| > |\operatorname{Re}\alpha|$ , et l'une des parties imaginaires est nulle si  $\gamma|\partial_{x_n}\varphi_1| = |\operatorname{Re}\alpha|$ .

Puisque les droites  $\operatorname{Re}z = \pm\gamma\partial_{x_n}\varphi_1$  se transforment, par  $z \mapsto z' = z^2$ , en la parabole

$$\operatorname{Re}z' = \gamma^2|\partial_{x_n}\varphi_1|^2 - \frac{|\operatorname{Im}z'|^2}{4\gamma^2(\partial_{x_n}\varphi_1)^2}$$

la substitution de  $z'$  par  $\alpha^2$  dans cette équation achève la preuve du lemme. ■

D'autre part, on note

$$\mathcal{F}^+ = \{(y, \gamma) \in K_2 \times [1, +\infty[, p_2 + \mu^2 > 0\}.$$

**Lemme 3.14.** *Pour  $(y, \gamma) \in \mathcal{F}^+$ , si  $\kappa > |\partial_y\varphi_2|$  sur  $K_2$  alors  $(p_{\varphi_2} + \mu^2)$  admet deux racines  $s_+$  et  $s_-$  vérifiant  $\operatorname{Im}(s_+) > 0$  et  $\operatorname{Im}(s_-) < 0$ .*

**Preuve** La preuve est la même que celle du lemme 3.13 puisque l'opérateur

$$\begin{aligned} p_{\varphi_2} + \mu^2 &= \sigma(P_{\varphi_2} + \mu^2) \\ &= (\eta + i\gamma\partial_y\varphi_2)^2 + \mu^2 \\ &= (\eta + i\gamma\partial_y\varphi_2 - i\mu)(\eta + i\gamma\partial_y\varphi_2 + i\mu), \end{aligned}$$

alors les signes des parties imaginaires de ses racines,  $-\gamma\partial_y\varphi_2 - \mu$  et  $-\gamma\partial_y\varphi_2 + \mu$ , sont opposés si  $\gamma|\partial_y\varphi_2| < |\mu|$ , et ce pour  $(y, \mu, \gamma)$  fixé. ■

**Lemme 3.15.**

i) *Soit  $\chi_1 \in \mathcal{S}^0$  à support compact en  $x$ . Supposons qu'il existe  $\delta_1 > 0$  telle que, sur le support de  $\chi_1$ , on a*

$$q_2(x, \xi', \gamma) + \mu^2 + \frac{|q_1(x, \xi', \gamma)|^2}{(\partial_{x_n}\varphi_1)^2} \geq \delta_1(\gamma^2 + |\xi'|^2)$$

et supposons que

$$\partial_{x_n}\varphi_1 \neq 0 \text{ sur } x_n = 0.$$

Il existe alors  $\gamma_0 > 0$ ,  $C > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et  $w_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ , on a

$$\|(Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1\|_0^2 + \gamma|D_{x_n}w_1|_{x_n=0}|_0^2 + \|w_1\|_1^2 \geq C\gamma\|\operatorname{op}(\chi_1)w_1\|_1^2.$$

ii) *On suppose qu'il existe  $\delta_2 > 0$  telle que on a*

$$p_2(y, \gamma) + \mu^2 \geq \delta_2\gamma^2$$

et supposons

$$\partial_y\varphi_2(0) \neq 0.$$

Alors il existe  $\gamma_0 > 0$ ,  $C > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et  $w_2 \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , on a

$$\|(P_{\varphi_2} + \mu^2)w_2\|_0^2 + \gamma|\partial_y w_2|_{y=0}|^2 + \|w_2\|_1^2 \geq C\gamma\|w_2\|_1^2.$$

iii) *Si de plus*

$$1 > a^2 \text{ sur } K_1 \cap \{x_n = 0\}$$

$$\partial_{x_n} \varphi_1 > 0 \text{ sur } K_1 \cap \{x_n = 0\}$$

$$\partial_y \varphi_2(0) < 0$$

$$\varphi_1(x', 0) - \varphi_2(0) = 0 \text{ pour } (x', 0) \in \text{supp } \Theta$$

$$(D_{x_n} - \text{op}(b_1))w_1 + \Theta(x')(D_y - b_2(\gamma))w_2 := ie^{\gamma\varphi_1(x', 0)} f_0 \text{ sur } \text{supp } \Theta \cap \{x_n = 0\}$$

$$w_2|_{y=0} := \int_{\Gamma} \Theta(x')w_1 d\sigma,$$

avec

$$\text{op}(b_1) = a\mu - i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1$$

et

$$b_2(\gamma) = -i\gamma\partial_y\varphi_2$$

alors il existe  $\gamma_0 > 0$ ,  $C_1, C_2 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et  $w_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  et  $w_2 \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , on a

$$\begin{aligned} & \| (Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1 \|_0^2 + \| w_1 \|_1^2 + e^{C_1\gamma} |f_0|_0^2 + \| (P_{\varphi_2} + \mu^2)w_2 \|_0^2 + \| w_2 \|_1^2 + \\ & \gamma^3 |\Theta|_0^2 |w_1|_{x_n=0}|_0^2 \geq C_2\gamma \left[ |\text{op}(\chi_1)w_1|_{1,\gamma}^2 + \gamma^2 |w_2|_{y=0}|^2 + |\partial_y w_2|_{y=0}|^2 \right]. \end{aligned}$$

**Lemme 3.16.**

i) *Soit  $\chi_2 \in \mathcal{S}^0$  à support compact en  $x$ . On suppose que, sur le support de  $\chi_2$ , il existe  $c > 0$  telle que  $|\xi'| \leq c\gamma$  et que  $\varphi_1$  vérifie (3.23) et (3.25). Sous ces conditions il existe  $\gamma_0 > 0$ ,  $C > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et  $w_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ , on a*

$$\| (Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1 \|_0^2 + \gamma |w_1|_{1,\gamma}^2 + \| w_1 \|_1^2 \geq C\gamma \|\text{op}(\chi_2)w_1\|_1^2.$$

ii) *Si, de plus, il existe  $\delta_2 > 0$  telle que*

$$p_2(y, \gamma) + \mu^2 \geq \delta_2\gamma^2$$

et si,

$$\partial_{x_n} \varphi_1 > 0 \text{ sur } \{x_n = 0\} \cap \text{supp}(\chi_2)$$

$$\partial_y \varphi_2 < 0 \text{ sur } \{y = 0\}$$

$$\varphi_1(x', 0) - \varphi_2(0) = 0 \text{ pour } (x', 0) \in \text{supp } \Theta.$$

On suppose que, sur  $\{x_n = 0\} \cap \text{supp}(\chi_2)$  il existe  $\delta_3 > 0$  telle que

$$q_2(x, \xi', \gamma) + \mu^2 + \frac{|q_1(x, \xi', \gamma)|^2}{(\partial_{x_n} \varphi_1)^2} \leq \delta_3(\gamma^2 + |\xi'|^2) \quad (3.38)$$

et  $w_1$  vérifie la condition au bord suivante

$$(D_{x_n} - \text{op}(b_1))w_1 + \Theta(x')(D_y - b_2(\gamma))w_2 := ie^{\gamma\varphi_1(x', 0)} f_0 \text{ sur } \text{supp } \Theta \cap \{x_n = 0\},$$

$$w_2|_{y=0} := \int_{\Gamma} \Theta(x') w_1 d\sigma,$$

avec

$$\text{op}(b_1) = a\mu - i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1$$

et

$$b_2(\gamma) = -i\gamma\partial_y\varphi_2$$

alors il existe  $\gamma_0 > 0$ ,  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et  $w_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  et  $w_2 \in C_{K_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , on a

$$\begin{aligned} & \| (Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1 \|_0^2 + e^{C_1\gamma} |f_0|_0^2 + \|w_1\|_1^2 + \| (P_{\varphi_2} + \mu^2)w_2 \|_0^2 + \|w_2\|_1^2 \\ & + \gamma^3 |\Theta|_0^2 |w_1|_{x_n=0}|_0^2 \geq C_2\gamma \left[ \text{op}(\chi_2)w_1|_{1,\gamma}^2 + \|\text{op}(\chi_2)w_1\|_1^2 + \gamma^2 |w_2|_{y=0}|^2 + |\partial_y w_2|_{y=0}|^2 \right]. \end{aligned}$$

**Preuve du lemme 3.15.** Pour  $(x, \xi', \mu, \gamma) \in \mathcal{E}^+$  notons  $r_+ := r_+(x, \xi', \mu, \gamma)$  et  $r_- := r_-(x, \xi', \mu, \gamma)$  les racines du polynôme en  $\xi_n$ ,  $(q_{\varphi_1} + \mu^2)$  où  $\pm \text{Im}(r_{\pm}) > 0$ . Sous les hypothèses du lemme (3.15) point (i) il résulte que  $\chi_1 r_{\pm} \in \mathcal{S}^1$ . Notons  $u_1 := \text{op}(\chi_1)w_1$  et  $\tilde{w}_1 := (Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1$  et on a pour  $x_n > 0$

$$\begin{cases} (Q_{\varphi_1} + \mu^2)u_1 = \tilde{w}_1 \\ \text{où} \\ \tilde{w}_1 = \text{op}(\chi_1)\tilde{w}_1 + [Q_{\varphi_1} + \mu^2, \text{op}(\chi_1)]w_1. \end{cases} \quad (3.39)$$

On remarque que  $[Q_{\varphi_1} + \mu^2, \text{op}(\chi_1)] \in \mathcal{D}^1 + \mathcal{D}^0 D_{x_n}$  d'où

$$\|\tilde{u}_1\|_0 \leq C[\|\tilde{w}_1\|_0 + \|w_1\|_1]; \quad C > 0. \quad (3.40)$$

Soit  $\underline{u}_1$  le prolongement de  $u_1$  par zéro dans  $x_n < 0$ , comme  $r_+ + r_- := -2i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1$ , si on note  $\gamma_0(u_1) := u_1|_{x_n=0}$ ,  $\gamma_1(u_1) := D_{x_n}u_1|_{x_n=0}$ ,  $\delta^{(j)} = (\frac{d}{dx_n})^j(\delta_{x_n=0})$ , alors les formules (3.31), (3.32) et (3.39), impliquent

$$(Q_{\varphi_1} + \mu^2)\underline{u}_1 = \tilde{u}_1 - \gamma_0(u_1)\delta' + \frac{1}{i} \left[ \gamma_1(u_1) - \text{op}(r_+ + r_-)\gamma_0(u_1) \right] \delta.$$

on notera  $\widehat{\mathcal{S}}^j$  l'espace des symboles  $a(x, \xi, \gamma)$ ,  $C^\infty$  en  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ , et pour  $\gamma \geq 1$  et vérifiant :

$$\forall \alpha, \beta, \exists C_{\alpha,\beta}, \forall x, \xi, \gamma, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq C_{\alpha,\beta}(\gamma + |\xi|)^{j-|\beta|}. \quad (3.41)$$

On désigne par  $\widehat{\mathcal{E}}^j$  l'espace des opérateurs pseudo-différentiels usuels  $A = \widehat{\text{op}}(a)$ ,  $a \in \widehat{\mathcal{S}}^j$  définis par :

$$(A)(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi, \gamma) f(y) dy d\xi. \quad (3.42)$$

On rappelle la formule de composition des symboles, si  $a(x, \xi, \gamma)$  et  $b(x, \xi, \gamma)$  sont les symboles respectifs de  $A$  et  $B$ ,  $c(x, \xi, \gamma)$  le symbole de  $A \circ B$  est donné par :

$$c(x, \xi, \gamma) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a \partial_x^\alpha b + R(x, \xi, \gamma). \quad (3.43)$$

où

$$R(x, \xi, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^1 (N+1)(1-t)^N \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!} \\ \times \int e^{-iz\zeta} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi + \zeta, \gamma) \partial_x^\alpha b(x + tz, \xi, \gamma) dz d\zeta dt$$

Soit  $\widehat{\chi}_1 := \widehat{\chi}_1(x, \xi, \mu, \gamma) \in \widehat{\mathcal{S}}^0$  égale à 1 pour  $|\xi| \geq c_1\gamma$ ;  $c_1 > 0$  ou  $\widehat{\chi}_1 = 1$  au voisinage du  $\text{supp}(\chi_1)$  et vérifiant  $\text{supp}(\widehat{\chi}_1 \cap (q_{\varphi_1} + \mu^2)^{-1})(0) = \emptyset$ .

Pour  $m \in \mathbb{N}$  il existe  $\widehat{E}_m = \text{op}(\widehat{e}) \in \widehat{\mathcal{E}}^{-2}$ , une paramétrix micro-locale (voir Taylor [Ta91]) de  $(Q_{\varphi_1} + \mu^2)$  près du support de  $\widehat{\chi}_1$ , vérifiant les propriétés suivantes

$$\widehat{e}(x, \xi, \mu, \gamma) = \sum_{j=0}^m \widehat{e}_j(x, \xi, \mu, \gamma)$$

où  $\widehat{e}_0 = \frac{\widehat{\chi}_1}{q_{\varphi_1} + \mu^2}$  et  $\widehat{e}_j$  sont des fonctions rationnelles en  $\xi_n$ , les pôles de  $\widehat{e}_j$  appartiennent à l'ensemble des racines de  $\{q_{\varphi_1} + \mu^2\}$ . Vu que

$$\widehat{E}_m \circ (Q_{\varphi_1} + \mu^2) = \text{op}(\widehat{\chi}_1) + \text{op}(r_{-m})$$

où  $\text{op}(r_{-m})$  est un opérateur régularisant d'ordre  $-m-1$  (dans  $\widehat{\mathcal{E}}^{-1-m}$ ) il s'ensuit que

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = \widehat{E}_m(\underline{\tilde{u}}_1) + \widehat{E}_m[-h_1\delta' + \frac{1}{i}h_0\delta] + v_1 \\ h_0 = \gamma_1(u_1) - \text{op}(r_+ + r_-)\gamma_0(u_1) \\ h_1 = \gamma_0(u_1) \\ v_1 = (\text{Id} - \text{op}(\widehat{\chi}_1))\underline{u}_1 - \text{op}(r_{-m})\underline{u}_1. \end{cases} \quad (3.44)$$

On observe que

$$[\text{Id} - \text{op}(\widehat{\chi}_1)] \circ \text{op}(\chi_1) \in \cap_N \widehat{\mathcal{E}}^{-N}$$

vérifiable grâce à la forme de composition des symboles, on obtient pour  $\theta(x) \in C_0^\infty$  égal à 1 au voisinage de  $K_1$  et du support de  $\chi_1$

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial_x^\alpha \theta v_1\|_0 \leq c \|w_1\|_{-2} \\ \leq c\gamma^{-2} \|w_1\|_0 \text{ où } c > 0. \quad (3.45)$$

Pour  $x_n > 0$ , on a

$$\begin{cases} \widehat{E}_m(-h_1\delta' + \frac{1}{i}h_0\delta) = \widehat{T}_0 h_0 + \widehat{T}_1 h_1 \\ \text{où} \\ \widehat{T}_j(h) = \text{op}(\widehat{t}_j)(h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x'-y')\xi'} \widehat{t}_j(x_n, x', \xi', \mu, \gamma) h(y') dy' d\xi' \\ \widehat{t}_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} e^{ix_n \xi_n} \widehat{e}(x, \xi, \mu, \gamma) \xi_n^j d\xi_n; j = 0, 1. \end{cases} \quad (3.46)$$

où  $\Gamma^+$  est le contour complexe orienté dans le sens direct réunion du segment  $\{\xi_n \in \mathbb{R}, |\xi_n| \leq C_0 \sqrt{|\xi'|^2 + \gamma^2}\}$  et du demi cercle  $\{\xi_n \in \mathbb{C}, |\xi_n| = C_0 \sqrt{|\xi'|^2 + \gamma^2}, \text{Im } \xi_n > 0\}$  avec  $C_0$  grand de sorte que  $r_+$  se trouve dans le domaine délimité par  $\Gamma^+$

(le changement de contour  $\mathbb{R} \rightarrow \Gamma^+$  est possible car  $\widehat{e}$  est holomorphe pour  $|\xi_n|$  grand). En particulier on a les estimées dans  $x_n \geq 0$

$$|\partial_{x_n}^l \partial_x^\alpha \partial_{\xi'}^\beta \widehat{t}_j| \leq C_{\alpha,\beta,l} (\gamma + |\xi'|)^{-1+j-|\beta|+l} \quad (3.47)$$

Soit  $\widetilde{\chi}_1 := \widetilde{\chi}_1(x, \xi', \mu, \gamma) \in \mathcal{S}^0$ , égal à 1 au voisinage du support de  $\chi_1$  et tel que  $\widehat{\chi}_1$  soit égal à 1 au voisinage du support de  $\widetilde{\chi}_1$ . Posons  $t_j = \widetilde{\chi}_1 \widehat{t}_j$  et  $v_1 = \{\text{op}((1 - \widetilde{\chi}_1) \widehat{t}_0) h_0 + \text{op}((1 - \widetilde{\chi}_1) \widehat{t}_1) h_1\}_{x_n=0}$ . Puisque  $u_1 = \text{op}(\chi_1) w_1$ , on a donc

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial_x^\alpha \theta v_1\|_0 \in \mathcal{O}(\gamma^{-2} \{\|w_1\|_1 + |D_{x_n} w_1|_{x_n=0}|_0\}). \quad (3.48)$$

Il en résulte dans  $x_n > 0$

$$\begin{cases} u_1 = \widehat{E}_m(\widetilde{u}_1) + T_0 h_0 + T_1 h_1 + v_1 + v_1 \\ \text{où} \\ T_j = \text{op}(t_j) \\ t_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} e^{ix_n \xi_n} \widetilde{\chi}_1 \widehat{e}(x, \xi, \mu, \gamma) \xi_n^j d\xi_n; j = \overline{0, 1}. \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $\Gamma_0$  est un contour contenu dans  $\text{Im } \xi_n \geq c_0 |\xi'|$ , ( $c_0 > 0$ ) entourant  $\xi_n = r_+$  dans le sens direct. La déformation du contour  $\Gamma^+$  en  $\Gamma_0$  est maintenant possible car  $\widehat{e} \widetilde{\chi}_1$  est holomorphe en  $\xi_n$  sur le support de  $\widetilde{\chi}_1$ . Par la formule des résidus on obtient dans  $x_n > 0$

$$|\partial_{x_n}^l \partial_x^\alpha \partial_{\xi'}^\beta t_j| \leq C_{\alpha,\beta,l} e^{-C_0 \gamma x_n} (\gamma + |\xi'|)^{-1+j-|\beta|+l}.$$

En particulier  $e^{C_0 \gamma x_n} \partial_{x_n}^l t_j$  est borné dans  $\mathcal{S}^{j-1+l}$  uniformément par rapport à  $x_n \geq 0$  donc

$$\begin{aligned} |T_j h_j|_1^2 &= C \int_{x_n > 0} \int e^{-2C_0 \gamma x_n} (\gamma^2 + |\xi'|^2) |e^{C_0 \gamma x_n} \mathcal{F}_e(T_j h_j)(x_n, \xi')|^2 dx_n d\xi' \\ &\leq C \gamma^{-1} |h_j|_1^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

et

$$\begin{aligned} |\partial_{x_n} T_j h_j|_0^2 &\leq C \int_{x_n > 0} e^{-2C_0 \gamma x_n} |e^{C_0 \gamma x_n} \partial_{x_n} T_j h_j|_0^2(x_n) dx_n \\ &\leq C \gamma^{-1} |h_j|_0^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En combinant les estimations (3.40), (3.45) et (3.48)-(3.51) il résulte

$$\|\theta u_1\|_1 \leq C \left[ \gamma^{-1} (\|\widetilde{w}_1\|_0 + \|w_1\|_1) + \gamma^{-\frac{1}{2}} (|h_0|_0 + |h_1|_1) + \gamma^{-2} |D_{x_n} w_1|_{x_n=0}|_0 \right]. \quad (3.52)$$

On utilise à présent les projecteurs de Calderón (voir Chazarain-Piriou [ChPr81]) en prenant la trace de la première ligne de (3.49) sur  $x_n = 0^+$ . En utilisant la définition de  $h_0$  et  $h_1$  on obtient la relation

$$\gamma_0(u_1) = \text{op}(\tau_1) \gamma_0(u_1) + \text{op}(\tau_2) \gamma_1(u_1) + v \quad (3.53)$$

où  $v = \gamma_0(\widehat{E}_m(\widetilde{u}_1) + v_1 + \underline{v}_1)$ ,  $\tau_1 \in \mathcal{S}^0$  tel que  $\sigma(\text{op}(\tau_1)) = \frac{-\widetilde{\chi}_1 r_-}{r_+ - r_-}|_{x_n=0}$ , et  $\tau_2 \in \mathcal{S}^{-1}$  tel que  $\sigma(\text{op}(\tau_2)) = \frac{\widetilde{\chi}_1}{r_+ - r_-}|_{x_n=0}$ . Par ailleurs  $v$  vérifie grâce à (3.40), (3.45) et (3.48) :

$$|v|_{x_n=0}|_1 \leq C\gamma^{-1} \left[ \|\widetilde{w}_1\|_0 + \|w_1\|_1 + |D_{x_n} w_1|_{x_n=0}|_0 \right]. \quad (3.54)$$

Comme  $(1 - \text{op}(\tau_1))$  est elliptique sur le support de  $\chi_1$  et puisque  $\gamma_0(u_1) = \text{op}(\chi_1)w_1|_{x_n=0}$ , (3.53) entraîne

$$|\gamma_0(u_1)|_1 \leq C \left[ |\gamma_1(u_1)|_0 + \gamma^{-1} \|w_1\|_0 + |v|_{x_n=0}|_1 \right]. \quad (3.55)$$

De plus on a  $\gamma_1(u_1) = \text{op}(\chi_1)D_{x_n} w_1|_{x_n=0} + [D_{x_n}, \text{op}(\chi_1)]w_1|_{x_n=0}$  donc

$$|\gamma_1(u_1)|_0 \leq C \left[ |D_{x_n} w_1|_{x_n=0}|_0 + \gamma^{-\frac{1}{2}} \|w_1\|_1 \right], \text{ car } |w_1|_{x_n=0}|_0 \leq C\gamma^{-\frac{1}{2}} \|w_1\|_1. \quad (3.56)$$

Alors d'après (3.54)-(3.56) on a

$$|h_0|_0 + |h_1|_1 \leq C \left[ |D_{x_n} w_1|_{x_n=0}|_0 + \|w_1\|_1 + \gamma^{-1} \|\widetilde{w}_1\|_0 \right]. \quad (3.57)$$

En combinant les estimations (3.52) et (3.57), puis on multiplie des deux côtés par  $\gamma$ , on déduit alors l'inégalité du point (i) du lemme 3.15.

D'autre part, pour  $(y, \mu, \gamma) \in \mathcal{F}^+$  notons  $s_+ := s_+(y, \mu, \gamma)$  et  $s_- := s_-(y, \mu, \gamma)$  les racines du polynôme en  $\eta$ ,  $(p_{\varphi_2} + \mu^2)$  où  $\pm \text{Im}(s_{\pm}) > 0$ .

Notons  $\widetilde{w}_2 := (P_{\varphi_2} + \mu^2)w_2$ . Soit  $\underline{w}_2$  le prolongement de  $w_2$  par zéro dans  $y < 0$ , comme  $s_+ + s_- := -2i\gamma\partial_y\varphi_2$ , étant donné que  $\gamma_0(w_2) := w_2|_{y=0}$ ,  $\gamma_1(w_2) := D_y w_2|_{y=0}$ ,  $\delta^{(j)} := \left(\frac{d}{dy}\right)^j(\delta_{y=0})$ . Les formules (3.33) impliquent :

$$(P_{\varphi_2} + \mu^2)\underline{w}_2 = \widetilde{w}_2 - \gamma_0(w_2)\delta' + \frac{1}{i} \left[ \gamma_1(w_2) - \text{op}(s_+ + s_-)\gamma_0(w_2) \right] \delta.$$

Soit  $\chi_2 := \chi_2(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  égale à 1 sur un voisinage de  $y = 0$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$  il existe  $F_m = \text{op}(f)$ , une paramétrix (voir Taylor [Ta91]) de  $(P_{\varphi_2} + \mu^2)$ , vérifiant les propriétés suivantes

$$f(y, \eta, \mu, \gamma) = \sum_{j=0}^m f_j(y, \eta, \mu, \gamma)$$

où  $f_0 = \frac{\chi_2}{p_{\varphi_2} + \mu^2}$  et  $f_j$  sont des fonctions rationnelles en  $\eta$ , les pôles de  $f_j$  appartient à l'ensemble des racines de  $\{p_{\varphi_2} + \mu^2\}$  on a

$$F_m \circ (P_{\varphi_2} + \mu^2) = \chi_2 + \text{op}(s_{-m})$$

où  $\text{op}(s_{-m})$  est un opérateur régularisant d'ordre  $-m - 1$ , ceci entraîne

$$\begin{cases} \underline{w}_2 = F_m(\widetilde{w}_2) + F_m[-\widetilde{h}_1\delta' + \frac{1}{i}\widetilde{h}_0\delta] + \widetilde{v}_1 \\ \widetilde{h}_0 = \gamma_1(w_2) - \text{op}(s_+ + s_-)\gamma_0(w_2) \\ \widetilde{h}_1 = \gamma_0(w_2) \\ \widetilde{v}_1 = -\text{op}(s_{-m})w_2. \end{cases} \quad (3.58)$$

grâce à la formule de composition des symboles, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial_y^\alpha \tilde{v}_1\|_0 &\leq c \|w_2\|_{-2} \\ &\leq c\gamma^{-2} \|w_2\|_0 \text{ où } c > 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pour  $y > 0$ , on peut écrire

$$\begin{cases} F_m(-\tilde{h}_1\delta' + \frac{1}{i}\tilde{h}_0\delta) = \tilde{T}_0\tilde{h}_0 + \tilde{T}_1\tilde{h}_1 \\ \text{où} \\ \tilde{T}_j(\tilde{h}) = \text{op}(\tilde{t}_j)(\tilde{h}) \\ \tilde{t}_j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\Gamma}^+} e^{iy\eta} f(y, \eta, \mu, \gamma) \eta^j d\eta; j = \overline{0, 1}. \end{cases} \quad (3.60)$$

$\tilde{\Gamma}^+$  est le contour complexe orienté dans le sens direct réunion du segment  $\{\eta \in \mathbb{R}, |\eta| \leq \tilde{C}_0\gamma\}$  et du demi cercle  $\{\eta \in \mathbb{C}, |\eta| = \tilde{C}_0\gamma, \text{Im } \eta > 0\}$  avec  $\tilde{C}_0$  grand de sorte que  $s_+$  se trouve dans le domaine délimité par  $\tilde{\Gamma}^+$  (le changement de contour  $\mathbb{R} \rightarrow \tilde{\Gamma}^+$  est possible car le symbole de  $f$  est holomorphe pour  $|\eta|$  grand). Par la formule des résidus on obtient en particulier  $e^{\tilde{C}_0\gamma y} \partial_y^l \tilde{t}_j$  est borné uniformément par rapport à  $y \geq 0$  donc

$$\begin{aligned} \gamma^2 \|\tilde{T}_j\tilde{h}_j\|_0^2 &\leq C \int_{y>0} e^{-2\tilde{C}_0\gamma y} |\gamma e^{\tilde{C}_0\gamma y} \tilde{T}_j\tilde{h}_j|_0^2(y) dy \\ &\leq C\gamma^{-1} |\tilde{h}_j|^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

et

$$\begin{aligned} \|\partial_y \tilde{T}_j\tilde{h}_j\|_0^2 &\leq C \int_{y>0} e^{-2\tilde{C}_0\gamma y} |e^{\tilde{C}_0\gamma y} \partial_y \tilde{T}_j\tilde{h}_j|_0^2(y) dy \\ &\leq C\gamma^{-1} |\tilde{h}_j|^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

La combinaison des inégalités (3.58), (3.59), (3.61) et (3.62) donne

$$\|w_2\|_1 \leq C \left[ \gamma^{-1} \|\tilde{w}_2\|_0 + \gamma^{-\frac{1}{2}} [|\tilde{h}_0| + |\tilde{h}_1|] + \gamma^{-2} \|w_2\|_0 \right]. \quad (3.63)$$

On utilise à présent les projecteurs de Calderón (voir Chazarain-Piriou [ChPr81]) en prenant la trace de la trace de la première ligne de (3.58) sur  $y = 0^+$ . En utilisant la définition de  $\tilde{h}_0$  et  $\tilde{h}_1$  on obtient la relation

$$\gamma_0(w_2) = g_1(\gamma)\gamma_0(w_2) + g_2(\gamma)\gamma_1(w_2) + \tilde{v} \quad (3.64)$$

où  $\tilde{v} = \gamma_0(F_m(\tilde{w}_2) + \tilde{v}_1)$ ,  $g_1(\gamma) = \sum_{j=0}^m g_1^j(\gamma)$  tel que  $g_1^0(\gamma) = \frac{\mu - \gamma \partial_y \varphi_2}{2\gamma \partial_y \varphi_2}|_{y=0}$  et  $g_2(\gamma) = \sum_{j=0}^m g_2^j(\gamma)$  tel que  $g_2^0(\gamma) = \frac{-1}{2i\gamma \partial_y \varphi_2}|_{y=0}$ . D'autre part on

$$|\tilde{v}|_{y=0} \leq C\gamma^{-2} \left[ \|\tilde{w}_2\|_0 + \|w_2\|_0 \right]. \quad (3.65)$$

Et (3.64) donne

$$|\gamma_0(w_2)| \leq C \left[ \gamma^{-1} |\gamma_1(w_2)| + |\tilde{v}|_{y=0} \right], \quad (3.66)$$

d'où

$$|\tilde{h}_0| + |\tilde{h}_1| \leq C \left[ |\gamma_1(w_2)| + \gamma |\tilde{v}|_{y=0} \right]. \quad (3.67)$$

En combinant les estimations (3.63) et (3.65)-(3.67), puis en multipliant des deux côtés par  $\gamma$  on déduit l'inégalité du point (ii) du lemme 3.15.

Par ailleurs, on multiplie de deux côtés de (3.64) par la fonction  $\frac{1}{g_2(\gamma)}$  on a

$$\gamma_1(w_2) = G(\gamma)\gamma_0(w_2) + \frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v}, \quad (3.68)$$

où  $G(\gamma) = \frac{1-g_1(\gamma)}{g_2(\gamma)}$  (symbole d'ordre 1 en  $\gamma$ ).

En substituant (3.68) dans la condition au bord suivante

$$\gamma_1(u_1) - \text{op}(b_1)\gamma_0(u_1) + \text{op}(\chi_1)\Theta(x')\gamma_0[(D_y - b_2(\gamma))w_2] + \hat{v} = i\text{op}(\chi_1)e^{\gamma\varphi_1(x',0)}f_0$$

on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_1(u_1) - \text{op}(b_1)\gamma_0(u_1) + \text{op}(\chi_1)\Theta(x')[(G(\gamma) - b_2(\gamma))\gamma_0(w_2) + \text{op}(\chi_1)\Theta(x')\frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v}] \\ + \hat{v} = i\text{op}(\chi_1)e^{\gamma\varphi_1(x',0)}f_0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

On remplace (3.69) dans (3.53) on a

$$\begin{aligned} [1 - \text{op}(\tau_1) - \text{op}(\tau_2)\text{op}(b_1)]\gamma_0(u_1) = -\text{op}(\tau_2)\text{op}(\chi_1)\Theta(x')[(G(\gamma) - b_2(\gamma))\gamma_0(w_2) \\ + v - \text{op}(\tau_2)\hat{v} - \text{op}(\tau_2)\text{op}(\chi_1)\Theta(x')\frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v} + i\text{op}(\tau_2)\text{op}(\chi_1)e^{\gamma\varphi_1(x',0)}f_0, \end{aligned} \quad (3.70)$$

où

$$\begin{cases} \text{op}(b_1) = a\mu - i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1, \\ b_2(\gamma) = -i\gamma\partial_y\varphi_2, \\ \hat{v} = [D_{x_n} - \text{op}(b_1), \text{op}(\chi_1)]\gamma_0(w_1). \end{cases}$$

Puisque  $(1 - \text{op}(\tau_1) - \text{op}(\tau_2)\text{op}(b_1))$  est elliptique sur le support de  $\chi_1$  d'où (3.70) implique

$$\begin{aligned} |\gamma_0(u_1)|_1^2 \leq C \left[ |\Theta|_1|\gamma_0(w_2)|^2 + |\hat{v}|_{x_n=0}|_0^2 + |v|_{x_n=0}|_1^2 \right. \\ \left. + |\Theta|_1|\tilde{v}|_{y=0}|^2 + e^{c\gamma}|f_0|_0^2 + \gamma^{-1}\|w_1\|_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Comme

$$|\hat{v}|_{x_n=0}|_0^2 \leq C\gamma^{-1}\|w_1\|_1^2, \quad (3.72)$$

on déduit alors de (3.54), (3.65), (3.71) et (3.72)

$$\begin{aligned} |\gamma_0(u_1)|_1^2 \leq C \left[ |\Theta|_1|\gamma_0(w_2)|^2 + \gamma^{-1}\|w_1\|_1^2 + \gamma^{-2}\|\tilde{w}_1\|_0^2 + \gamma^{-2}|D_{x_n}w_1|_{x_n=0}|_0^2 \right. \\ \left. + \gamma^{-2}|\Theta|_1 \left[ \|\tilde{w}_2\|_0^2 + \|w_2\|_0^2 \right] + e^{c\gamma}|f_0|_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

et de (3.69) on a

$$|\gamma_1(u_1)|_0^2 \leq C \left[ |\gamma_0(u_1)|_1^2 + |\Theta|_1 |\gamma_0(w_2)|^2 + |\tilde{v}|_{x_n=0}|_0^2 + |\Theta|_1 |\tilde{v}|_{y=0}|^2 + e^{c\gamma} |f_0|_0^2 \right]. \quad (3.74)$$

(3.65), (3.72), (3.73) et (3.74) impliquent

$$\begin{aligned} C\gamma |\gamma_0(u_1)|_{1,\gamma}^2 &\leq \|(Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1\|_0^2 + \|w_1\|_1^2 + e^{c\gamma} |f_0|_0^2 \\ &\quad + |\Theta|_0 \left[ \|(P_{\varphi_2} + \mu^2)w_2\|_0^2 + \|w_2\|_1^2 + \gamma^3 |\gamma_0(w_2)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

D'autre part

$$\gamma^3 |\gamma_0(w_2)|^2 \leq \gamma^3 |\Theta|_0 |\gamma_0(w_1)|_0^2 \quad (3.76)$$

et de (3.68) on a

$$\gamma |\gamma_1(w_2)|^2 \leq C\gamma^3 |\gamma_0(w_2)|^2 + \|\tilde{w}_2\|_0^2 + \|w_2\|_1^2 \quad (3.77)$$

La combinaison des inégalités (3.75)-(3.77) engendre l'inégalité du point (iii) du lemme 3.15. ■

**Preuve du lemme 3.16.** Nous introduisons le lemme ci-dessous, déjà démontré dans le paragraphe 3 de Lebeau-Robbiano [LR095].

**Lemme 3.17.** *Il existe  $C_1 > 0$ ,  $\gamma_0 > 0$ ,  $L_0 \in \mathcal{E}^0$  et  $L_1 \in \mathcal{D}^1$  tels que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et tout  $w_1 \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  on a*

$$\|(Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1\|_0^2 \geq C_1\gamma \|w_1\|_1^2 + \text{Re} [\gamma\beta(w_1) + \gamma(D_{x_n}w_1 + L_1w_1|L_0w_1)_0]$$

où

$$\begin{cases} \beta(w_1) = (2\partial_{x_n}\varphi_1 D_{x_n}w_1|D_{x_n}w_1)_0 & + (A_1w_1|D_{x_n}w_1)_0 + (A'_1 D_{x_n}w_1|w_1)_0 \\ & + (A_2w_1|w_1)_0 \\ \sigma(A_1) = \sigma(A'_1) = 2q_1 \\ \sigma(A_2) = -2\partial_{x_n}\varphi_1 q_2. \end{cases}$$

Nous allons appliquer le lemme 3.17 à  $\text{op}(\chi_2)w_1$ . D'autre part, il est évident que

$$\begin{aligned} \|\text{op}(\chi_2)(Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1\|_0 &\geq \|(Q_{\varphi_1} + \mu^2)\text{op}(\chi_2)w_1\|_0 - \|[(Q_{\varphi_1} + \mu^2), \text{op}(\chi_2)]w_1\|_0 \\ &\geq \|(Q_{\varphi_1} + \mu^2)\text{op}(\chi_2)w_1\|_0 - C\|w_1\|_1. \end{aligned}$$

L'association de cette inégalité au lemme 3.17 implique

$$\begin{aligned} \|\text{op}(\chi_2)(Q_{\varphi_1} + \mu^2)w_1\|_0^2 &\geq C_1\gamma \|\text{op}(\chi_2)w_1\|_1^2 \\ &\quad + \text{Re} [\gamma\beta(\text{op}(\chi_2)w_1) + \gamma(D_{x_n}\text{op}(\chi_2)w_1 + L_1\text{op}(\chi_2)w_1|L_0\text{op}(\chi_2)w_1)_0] - C\|w_1\|_1^2. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Sur le  $\text{supp } \chi_2$  on a  $|\xi'| \leq c\gamma$ ;  $c > 0$  et donc le terme de bord est majorable par :

$$C\gamma |D_{x_n}w_1|_{x_n=0}|_0^2 + C\gamma^3 |w_1|_{x_n=0}|_0^2.$$

Ceci achève la preuve de la première partie du lemme 3.16.

D'autre part, sous les hypothèses du lemme 3.16 et si, sur  $\text{supp } \Theta$ ,  $\varphi_1(x', 0) - \varphi_2(0) = 0$  alors

$$\begin{aligned} D_{x_n} \text{op}(\chi_2)w_1 &= \text{op}(b_1)\text{op}(\chi_2)w_1 - \text{op}(\chi_2)\Theta(x') [G(\gamma) - b_2(\gamma)]\gamma_0(w_2) \\ &\quad - \widehat{v} - \text{op}(\chi_2)\Theta(x') \frac{1}{g_2(\gamma)} \widetilde{v} + i \text{op}(\chi_2) e^{\gamma\varphi_1(x', 0)} f_0 \text{ sur } x_n = 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \text{op}(b_1) &= a\mu - i\gamma\partial_{x_n}\varphi_1, \\ b_2(\gamma) &= -i\gamma\partial_y\varphi_2, \\ \widehat{v} &= [D_{x_n} - \text{op}(b_1), \text{op}(\chi_2)]\gamma_0(w_1), \\ G(\gamma) &\text{ est définie dans (3.69),} \\ \widetilde{v} &\text{ est définie dans (3.64).} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} &|(D_{x_n} \text{op}(\chi_2)w_1 + L_1 \text{op}(\chi_2)w_1 | L_0 \text{op}(\chi_2)w_1)_0| \leq \\ &C \left( \gamma |\Theta|_0^2 |w_1|_{x_n=0}|_0^2 + e^{C\gamma} |f_0|_{x_n=0}|_0^2 + \gamma^2 |\Theta|_0 (|w_2|_{y=0}|^2 + |\widetilde{v}|_{y=0}|^2) \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

et

$$\beta(\text{op}(\chi_2)w_1) = (B_2 \text{op}(\chi_2)w_1 | \text{op}(\chi_2)w_1)_0 + R(\text{op}(\chi_2)w_1, w_2, \text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1} f_0) \quad (3.80)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma(B_2) &= 2\partial_{x_n}\varphi_1 |\sigma(\text{op}(b_1))|^2 + 2\sigma(A_1) \text{Re}(\sigma(\text{op}(b_1))) + \sigma(A_2) \\ &= 2\partial_{x_n}\varphi_1 \left[ (\gamma\partial_{x_n}\varphi_1)^2 + \mu^2 + \left( \frac{q_1}{\partial_{x_n}\varphi_1} + a\mu \right)^2 - (q_2 + \mu^2 + \left( \frac{q_1}{\partial_{x_n}\varphi_1} \right)^2) \right]. \end{aligned}$$

Or  $\mu \sim \gamma$  et sur le support de  $\chi_2$  on a  $|\xi'| < c\gamma$  et (3.38), alors

$$\sigma(B_2) > \delta'(\gamma^2 + |\xi'|^2); \delta' > 0.$$

L'inégalité de Gårding (3.30) implique alors que pour  $\gamma$  grand

$$(B_2 \text{op}(\chi_2)w_1 | \text{op}(\chi_2)w_1)_0 \geq C |\text{op}(\chi_2)w_1|_1^2. \quad (3.81)$$

Comme

$$R(\text{op}(\chi_2)w_1, w_2, \text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1} f_0) = (A|B) + (C|D) + (E|F) + (G|H)$$

où

$$\begin{aligned}
A &= 4\partial_{x_n}\varphi_1\text{op}(b_1)\text{op}(\chi_2)w_1 + 2\partial_{x_n}\varphi_1\text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1}f_0 + 2A_1\text{op}(\chi_2)w_1, \\
B &= \text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1}f_0 - \text{op}(\chi_2)\Theta(x')(G(\gamma) - b_2(\gamma))\gamma_0(w_2) - \text{op}(\chi_2)\Theta(x')\frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v} - \widehat{v}, \\
C &= 2\partial_{x_n}\varphi_1\text{op}(\chi_2)\Theta(x')(G(\gamma) - b_2(\gamma))\gamma_0(w_2), \\
D &= \text{op}(\chi_2)\Theta(x')(G(\gamma) - b_2(\gamma))\gamma_0(w_2) - \text{op}(\chi_2)\Theta(x')\frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v} - \widehat{v} + \text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1}f_0, \\
E &= 2\partial_{x_n}\varphi_1\text{op}(\chi_2)\Theta(x')\frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v}, \\
F &= \text{op}(\chi_2)\Theta(x')\frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v} + \text{op}(\chi_2)\Theta(x')(G(\gamma) - b_2(\gamma))\gamma_0(w_2) + \widehat{v} - \text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1}f_0, \\
G &= 2\partial_{x_n}\varphi_1\widehat{v}, \\
H &= \widehat{v} + \text{op}(\chi_2)\Theta(x')(G(\gamma) - b_2(\gamma))\gamma_0(w_2) + \text{op}(\chi_2)\Theta(x')\frac{1}{g_2(\gamma)}\tilde{v} - \text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1}f_0.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|R(\text{op}(\chi_2)w_1, w_2, \text{op}(\chi_2)e^{\gamma\varphi_1}f_0)| &\leq c\left[\gamma^2|\Theta|_0|w_1|_{x_n=0}|_0^2 + e^{C\gamma}|f_0|_0^2 + \gamma^{-1}\|w_1\|^2\right. \\
&\quad \left. + \gamma^2|\Theta|_0(|w_2|_{y=0}|^2 + |\tilde{v}|_{y=0}|^2)\right]; \quad c \text{ et } C > 0.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

En combinant les inégalités (3.65) et (3.76)-(3.82) on obtient la deuxième partie du lemme 3.16.  $\blacksquare$

**Preuve de la proposition 3.11.** Il suffit de construire  $\chi_1$  vérifiant les hypothèses du point (i) du lemme 3.15 et  $\chi_2$  vérifiant les hypothèses du point (i) du lemme 3.16 et tels que  $\chi_1 \geq 0$  et  $\chi_2 \geq 0$  sur  $K_1$  et  $\chi_1 + \chi_2 \geq 1$  sur  $K_1$ , ce qui est possible car dès que  $|\xi'|$  est grand, l'ellipticité de l'opérateur assure que  $q_2(x, \xi') + \mu^2 \geq \delta|\xi'|^2$  ce qui implique l'hypothèse du lemme 3.15. Ensuite on combine l'inégalité obtenue avec l'inégalité du point (ii) du lemme 3.15, on a alors le résultat de la proposition 3.11.  $\blacksquare$

**Preuve de la proposition 3.12.** Il suffit de construire  $\chi_1$  vérifiant les hypothèses du point (iii) du lemme 3.15 et  $\chi_2$  vérifiant les hypothèses du point (ii) du lemme 3.16 et tels que  $\chi_1 \geq 0$  et  $\chi_2 \geq 0$  sur  $K_1$  et  $\chi_1 + \chi_2 \geq 1$  sur  $K_1$ , grâce aux hypothèses suivantes :

$$\partial_{x_n}\varphi_1(x', 0) > 0 \text{ pour } (x', 0) \in K_1,$$

$$\partial_y\varphi_2(0) < 0 \text{ et}$$

$$1 > a^2 \text{ pour } (x', 0) \in K_1.$$

Il suffit de prouver que sur  $x_n = 0$  et  $y = 0$  il existe  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$  tel qu'on a soit (3.83) et (3.84) soit (3.84) et (3.85), où

$$q_2 + \mu^2 + \frac{|q_1|^2}{(\partial_{x_n}\varphi_1)^2} \geq \delta_1(\gamma^2 + |\xi'|^2) \tag{3.83}$$

$$p_2 + \mu^2 \geq \delta_2 \gamma^2 \quad (3.84)$$

$$(\gamma \partial_{x_n} \varphi_1)^2 + \mu^2 + \left(\frac{q_1}{\partial_{x_n} \varphi_1} + a\mu\right)^2 - \left(q_2 + \mu^2 + \left(\frac{q_1}{\partial_{x_n} \varphi_1}\right)^2\right) > 0. \quad (3.85)$$

et  $|\xi'|$  borné.

Quand  $|\xi'|$  est grand c'est-à-dire  $|\xi'| > C\gamma$ ,  $C > 0$  et  $c_1\gamma < \mu < c_2\gamma$ ;  $c_1, c_2 > 0$  on a alors (3.83) et (3.84). Soit on a (3.85), sinon on aura  $(\gamma \partial_{x_n} \varphi_1)^2 + \mu^2 = 0$ ,  $\left(\frac{q_1}{\partial_{x_n} \varphi_1} + a\mu\right)^2 = 0$  et  $q_2 + \mu^2 + \left(\frac{q_1}{\partial_{x_n} \varphi_1}\right)^2 = 0$  ce qui est absurde avec les hypothèses.

Si (3.83) et (3.84) sont vérifiées, en combinant l'inégalité de la proposition 3.11 et l'inégalité du point (iii) du lemme 3.15, on a le résultat.

Sinon si (3.84) et (3.85) sont vérifiées, alors grâce à l'inégalité du point (ii) du lemme 3.16 et la proposition 3.11, on a le résultat de la proposition 3.12. ■

### Inégalité d'interpolation locale

Le but de ce paragraphe est de prouver l'inégalité (3.5). Pour ce faire, dans le lemme 3.19 ci-dessous, on va d'abord contrôler  $w_1$  près du bord où  $a > 0$ . Ensuite, dans le lemme 3.20, on contrôle  $w_1$  loin du bord de  $\Omega$  et de la tige  $\omega$ . Puis dans le lemme 3.21,  $w_1$  sera contrôlé près du bord  $\Omega$  et hors d'un voisinage de la tige. Le recollement des inégalités ainsi obtenues permettra d'estimer  $w_1$  sur tout  $\Omega$  excepté au voisinage de la tige. Enfin, on contrôlera  $w_1$  et  $w_2$  au voisinage de la jonction entre  $\Omega$  et  $\omega$ , par des constructions géométriques permettant de compléter ainsi la preuve de l'inégalité (3.5).

### Quelques rappels

D'abord on va rappeler une estimation, démontrée dans le chapitre deux, qu'on peut appliquer près du bord où  $a > 0$ , pour cela notons  $\tilde{\omega}$  un voisinage de  $l$  et  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \tilde{\omega}$ ,  $\Gamma_\delta = \{x \in \partial\Omega; a(x) > \delta\}$ , et on suppose  $\Gamma_\delta \neq \emptyset$ .

Nous noterons  $B^+(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq r, x_n > 0\}$ ,  $B_\epsilon^+(0, r) = (-\epsilon, \epsilon) \times B^+(0, r)$ ,  $B_{2\epsilon}^+(0, 5r) = (-2\epsilon, 2\epsilon) \times B^+(0, 5r)$  tel que  $\epsilon > 0$  fixé et  $\tilde{w}_1 = e^{\mu x_0} w_1(x)$ .

**Lemme 3.18.** *Il existe  $\tilde{\mu} \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $\tilde{w}_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , on ait*

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_1\|_{L^2(B_\epsilon^+(0, r))} &\leq C \left( \|(\tilde{Q} + D_{x_0}^2)\tilde{w}_1\|_{L^2(B_{2\epsilon}^+(0, 5r))} + \|\tilde{w}_1\|_{L^2(B_{2\epsilon}^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_{x_n} \tilde{w}_1\|_{L^2(B_{2\epsilon}^+(0, 5r) \cap \{x_n=0\})} \right)^{\tilde{\mu}} \left( \|\tilde{w}_1\|_{H^1(B_{2\epsilon}^+(0, 5r))} \right)^{1-\tilde{\mu}} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Le lemme 3.18 implique, par régularité elliptique et le fait que  $C'e^{-C'\mu} \leq \|e^{\mu x_0}\|_{L^2(-\epsilon, \epsilon)} \leq Ce^{C'\mu}$  tel que  $C, C' > 0$ , le lemme 3.19 ci-dessous. Les détails de ces deux lemmes se trouvent dans le chapitre deux (cf. Lemmes 2.22 et 2.23).

**Lemme 3.19.** *Il existe  $\tilde{\mu} \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  et un ouvert  $U$  non vide de  $\tilde{\Omega}$ , pour tout  $w_1 \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ , on ait en posant  $U_0 \subset U$  :*

$$\|w_1\|_{H^1(U_0)} \leq C e^{C\mu} \left( \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|w_1|_{\Gamma_\delta}\|_{L^2(\Gamma_\delta)} + \|\partial_\eta w_1|_{\Gamma_\delta}\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \right)^{\tilde{\mu}} \cdot \left( \|w_1\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \right)^{1-\tilde{\mu}}. \quad (3.87)$$

Ensuite on va rappeler une estimation sur  $\Omega_{\hat{\delta}}$ , démontrée à partir de Ouksel [Ou07] (cf. Chapitre deux. Estimation sur  $X_\delta$ , p. 40) et en majorant et minorant le terme  $\|e^{\mu x_0}\|_{L^2(-\epsilon, \epsilon)}$ .

On note  $\Omega_{\hat{\delta}} = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \hat{\delta}\}$ , où  $\hat{\delta}$  est fixé.

**Lemme 3.20.** *Il existe  $\tilde{\mu} \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  pour tout ouvert  $U$  non vide de  $\tilde{\Omega}$ , pour tout  $w_1 \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ , on ait :*

$$\|w_1\|_{H^1(\Omega_{\hat{\delta}})} \leq C e^{C\mu} \left( \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|w_1\|_{H^1(U)} \right)^{\tilde{\mu}} \left( \|w_1\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \right)^{1-\tilde{\mu}}. \quad (3.88)$$

Puis on va rappeler une estimation près du bord  $\Omega$  et hors d'un voisinage de la tige, pour cela on note  $\tilde{\Omega}_{\hat{\delta}} = (\Omega \setminus (\Omega_{\hat{\delta}/2} \cup \tilde{\omega}))$ .

**Lemme 3.21.** *Il existe  $\tilde{\mu} \in ]0, 1[$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $w_1 \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ , on ait*

$$\|w_1\|_{H^1(\tilde{\Omega}_{\hat{\delta}})} \leq C e^{C\mu} \left( \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(\Omega)} + \|w_1\|_{H^1(\Omega_{\hat{\delta}})} \right)^{\tilde{\mu}} \left( \|w_1\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \right)^{1-\tilde{\mu}}. \quad (3.89)$$

La preuve de ce lemme est donnée dans chapitre deux (cf. preuve de l'inégalité (2.74)), en utilisant une inégalité de Carleman explicitée dans la proposition 2 de Lebeau-Robbiano [LRo97].

Un cas particulier du lemme 3.20, en dimension un, est donné dans le lemme 3.22 ci-dessous

**Lemme 3.22.** *Pour tout  $r > 0$  Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $w_2 \in C^\infty(\omega)$ , on ait :*

$$\|w_2\|_{H^1(\omega)} \leq C e^{C\mu} \left[ \|(\tilde{P} + \mu^2)w_2\|_{L^2(\omega)} + \|w_2\|_{H^1((l,r))} \right]. \quad (3.90)$$

### Estimation près de la tige

On pose  $r_1 = \frac{r}{2}$ ,  $r'_1 = r$ ,  $r_2 = 2r$ ,  $r'_2 = 6r$ ,  $r_3 = 7r$ ,  $r'_3 = 8r$  de sorte que  $r_1 < r'_1 < r_2 < r'_2 < r_3 < r'_3$  et  $\alpha_1 = \frac{r}{5}$ ,  $\alpha'_1 = \frac{2}{5}r$ ,  $\alpha_2 = \frac{3}{5}r$ ,  $\alpha'_2 = \frac{5}{2}r$ ,  $\alpha_3 = 3r$ ,  $\alpha'_3 = 4r$  de sorte que  $\alpha_1 < \alpha'_1 < \alpha_2 < \alpha'_2 < \alpha_3 < \alpha'_3$ . Soient deux fonctions de troncature

$$\chi_1(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n < 2 \\ 1 & \text{si } x_n \geq 3. \end{cases}$$

et

$$\chi_2(x') = \begin{cases} 1 & \text{si } |x'| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x'| \geq 1. \end{cases}$$

Et soit

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -rx_n \left(1 - \chi_1\left(\frac{x_n}{r}\right)\right) \chi_2\left(\frac{x'}{2r}\right) \\ &\quad + \left(1 - \left[1 - \chi_1\left(\frac{x_n}{r}\right)\right] \chi_2\left(\frac{x'}{2r}\right)\right) \left[|4r - x_n|^2 - 16r^2 + |x'|^2\right] \end{aligned}$$

et

$$\psi_2(y) = |y + r|^2.$$

On a  $\nabla\psi_1 \neq 0$  si  $x \neq (0, 4r)$ . En effet, si  $(1 - \chi_1(\frac{x_n}{r}))\chi_2(\frac{x'}{2r}) = 0$  alors on a  $\psi_1(x) = |4r - x_n|^2 - 16r^2 + |x'|^2$  ce qui implique  $\nabla\psi_1 \neq 0$  dans ce domaine : soit  $x_n \geq 3r$  soit  $|x'| \geq 2r$ .

Si  $0 \leq x_n \leq 3r$  et  $|x'| \leq 2r$  on a  $\partial_{x_n}\psi_1(x) < 0$ . En effet,

$$\begin{aligned} \partial_{x_n}\psi_1(x) &= -r \left(1 - \chi_1\left(\frac{x_n}{r}\right)\right) \chi_2\left(\frac{x'}{2r}\right) \\ &\quad + \left(1 - \left[1 - \chi_1\left(\frac{x_n}{r}\right)\right] \chi_2\left(\frac{x'}{2r}\right)\right) \left[-8r + 2x_n\right] \\ &\quad + r \frac{x_n}{r} \chi_1\left(\frac{x_n}{r}\right) \chi_2\left(\frac{x'}{2r}\right) + \frac{1}{r} \chi_1\left(\frac{x_n}{r}\right) \chi_2\left(\frac{x'}{2r}\right) \left[-8rx_n + x_n^2 + |x'|^2\right] \end{aligned}$$

on vérifie facilement que le dernier terme de  $\partial_{x_n}\psi_1(x)$  est négatif sur  $0 \leq x_n \leq 3r$  et  $|x'| \leq 2r$  ceci montre que  $\partial_{x_n}\psi_1(x) < 0$ .

On pose

$$\begin{aligned} V &= \left\{x \in \Omega; r_1^2 - (4r)^2 < \psi_1(x) < (r'_3)^2 - (4r)^2\right\} \\ V_j &= \left\{x \in \Omega; r_j^2 - (4r)^2 < \psi_1(x) < (r'_j)^2 - (4r)^2\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W &= \left\{y \in \omega; \alpha_1^2 < \psi_2(y) < (\alpha'_3)^2\right\} \\ W_j &= \left\{y \in \omega; \alpha_j^2 < \psi_2(y) < (\alpha'_j)^2\right\} \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 3.10 (en divisant l'inégalité de cette proposition par  $\gamma$ ), on a pour  $\gamma > \gamma_1$ ,  $(v_1, v_2) \in C_{\tilde{V}}^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times C_{\tilde{W}}^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} C \left[ \|e^{\gamma e^{-\beta\psi_1(x)}} v_1\|_{H^1(V)} + \|e^{\gamma e^{-\beta\psi_2(y)}} v_2\|_{H^1(W)} \right] &\leq \|e^{\gamma e^{-\beta\psi_1(x)}} (\tilde{Q} + \mu^2) v_1\|_{L^2(V)} \\ &\quad + \|e^{\gamma e^{-\beta\psi_2(y)}} (\tilde{P} + \mu^2) v_2\|_{L^2(W)} + \|e^{\gamma e^{-\beta\psi_1(x)}} h\|_{L^2(\partial V \cap \{x_n=0\})}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Introduisons les fonctions de troncature  $\tilde{\chi}_1$  de  $\theta_1$  et  $\tilde{\chi}_2$  de  $\theta_2$  définies par

$$\tilde{\chi}_1(\theta_1) = \begin{cases} 1; & r^2 \leq \theta_1 \leq 49r^2 \\ 0; & \theta_1 \leq \frac{r^2}{4} \text{ ou } \theta_1 \geq 64r^2, \end{cases}$$

et

$$\tilde{\chi}_2(\theta_2) = \begin{cases} 1; & \frac{4}{25}\alpha^2 \leq \theta_2 \leq 9\alpha^2 \\ 0; & \theta_2 \leq \frac{\alpha^2}{25} \text{ ou } \theta_2 \geq 16\alpha^2, \end{cases}$$

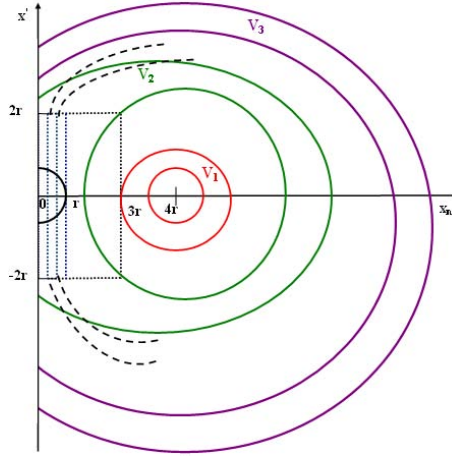


Fig. 3.2. La fonction  $\varphi_1 = e^{-\beta\psi_1}$  est décroissante le long des Lignes de niveau  $V_j$ .

et considérons  $\hat{\chi}_1 \in C_{\tilde{V}}^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\hat{\chi}_2 \in C_{\tilde{W}}^\infty(\mathbb{R})$  définies par  $\hat{\chi}_1(x) = \tilde{\chi}_1(\psi_1(x))$  et  $\hat{\chi}_2(y) = \tilde{\chi}_2(\psi_2(y))$ , on prend  $v_1 = \hat{\chi}_1 w_1$  et  $v_2 = \hat{\chi}_2 w_2$  et de (3.91) on obtient en écrivant

$$(\tilde{Q} + \mu^2)v_1 = \hat{\chi}_1(\tilde{Q} + \mu^2)w_1 + [(\tilde{Q} + \mu^2), \hat{\chi}_1]w_1$$

et

$$(\tilde{P} + \mu^2)v_2 = \hat{\chi}_2(\tilde{P} + \mu^2)w_2 + w_2 \tilde{P} \hat{\chi}_2$$

$[(\tilde{Q} + \mu^2), \hat{\chi}_1]$  est un opérateur différentiel d'ordre 1 supporté sur  $V_1 \cup V_3$ ) et

$$\partial_{x_n} v_1 = \hat{\chi}_1 \partial_{x_n} w_1 + (\partial_{x_n} \hat{\chi}_1) w_1.$$

et

$$\partial_y v_2 = \hat{\chi}_2 \partial_y w_2 + (\partial_y \hat{\chi}_2) w_2.$$

on vérifie que  $B^+(0, r) \subset V_2$ .

$$\begin{aligned} C \left[ e^{\gamma e^{-\beta r'_2}} \|w_1\|_{H^1(B^+(0, r))} + e^{\gamma e^{-\beta \alpha'_2}} \|w_2\|_{H^1((0, r))} \right] &\leq e^{\gamma e^{-\beta r_1}} \left[ \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(V_+)} \right. \\ &+ \|w_1\|_{H^1(V_1)} + \|h\|_{L^2(\partial V \cap \{x_n=0\})} \left. \right] + e^{\gamma e^{-\beta r_3}} \|w_1\|_{H^1(V_+)} \\ &+ e^{\gamma e^{-\beta \alpha_1}} \|(\tilde{P} + \mu^2)w_2\|_{L^2(W_+)} + e^{\gamma e^{-\beta \alpha_3}} \|w_2\|_{H^1(W_+)}. \end{aligned}$$

En posant  $C_1 = e^{-\beta \alpha_1} - e^{-\beta r'_2} > 0$  et  $C_2 = e^{-\beta r'_2} - e^{-\beta r_3} > 0$ , et puisque  $\gamma \sim \mu$  alors

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{H^1(B^+(0, r))} + \|w_2\|_{H^1((0, r))} &\leq e^{C_1 \mu} \left[ \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(V_+)} + \|(\tilde{P} + \mu^2)w_2\|_{L^2(W_+)} \right. \\ &+ \|w_1\|_{H^1(V_1)} + \|h\|_{L^2(\partial V \cap \{x_n=0\})} \left. \right] + e^{-C_2 \mu} \left[ \|w_1\|_{H^1(V_+)} + \|w_2\|_{H^1(W_+)} \right]. \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{\omega}$  l'image de  $B(0, r)$  (resp.  $(l, r')$  l'image de  $(0, r)$  tel que  $r' > 0$ ) par le diféomorphisme faisant passer des coordonnées de la situation droite à la situation

courbe on a

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{H^1(\tilde{\omega})} + \|w_2\|_{H^1((l,r'))} &\leq e^{C_1\mu} \left[ \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(\Omega)} + \|(\tilde{P} + \mu^2)w_2\|_{L^2(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|w_1\|_{H^1(\Omega \setminus \tilde{\omega})} + \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \right] + e^{-C_2\mu} \left[ \|w_1\|_{H^1(\Omega)} + \|w_2\|_{H^1(\omega)} \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

En combinant les inégalités (3.87)-(3.89) et (3.92) on obtient

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{H^1(\tilde{\omega})} + \|w_2\|_{H^1((l,r'))} &\leq e^{C_1\mu} \left[ \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(\Omega)} + \|(\tilde{P} + \mu^2)w_2\|_{L^2(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} \right] + e^{-C_2\mu} \left[ \|w_1\|_{H^1(\Omega)} + \|w_2\|_{H^1(\omega)} \right] \\ &\quad + Ce^{\tilde{C}\mu} \left( \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(\Omega)} + \|w_1|_{\Gamma_\delta}\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_\eta w_1|_{\Gamma_\delta}\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \right)^{\tilde{\mu}} \left( e^{-C_2\mu} \|w_1\|_{H^1(\Omega)} \right)^{1-\tilde{\mu}}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

A partir des inégalités (3.90), (3.89) et (3.93) et le fait que  $\|w_1|_{\Gamma_\delta}\|_{L^2(\Gamma_\delta)} + \|\partial_\eta w_1|_{\Gamma_\delta}\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \leq c\|\sqrt{a}w_1\|_{L^2(\Gamma_\delta)}$ , tel que  $c > 0$ , on a alors

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{H^1(\Omega)} + \|w_2\|_{H^1(\omega)} &\leq Ce^{\tilde{c}\mu} \left[ \|(\tilde{Q} + \mu^2)w_1\|_{L^2(\Omega)} + \|(\tilde{P} + \mu^2)w_2\|_{L^2(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|h\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\sqrt{a}w_1\|_{L^2(\Gamma_\delta)} \right]; \quad C > 0, \tilde{c} > 0. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Ce qui achève la preuve du théorème 3.5. ■

# Annexe A

## Résultats élémentaires

### Sommaire

---

1	Courbes paramétrées . . . . .	78
2	Module . . . . .	78
3	Distance géodésique . . . . .	78
4	$\delta$ -Suite de boules . . . . .	79

---

### 1 Courbes paramétrées

On considère le cas où  $I = [a, b]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $g$  est une fonction continue.

**Définition A.1.** *On dit que le couple  $(I, g)$  est une courbe paramétrée ou un chemin, et on appelle  $V_{(I, g)}$  la longueur de cette courbe, lorsque  $V_{(I, g)}$  est finie on dit que la courbe est rectifiable.*

### 2 Module

Soient  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\sigma$  une partie finie de  $I$ , avec  $\sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  où  $a = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = b$ .

**Définition A.2.** *On appelle module de  $\sigma$  le nombre  $\mu(\sigma) = \sup_{0 \leq i \leq n-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i|$ .*

**Théorème A.3. (cf. [Ch73])** *Pour toute courbe paramétrée  $(I, g)$ ,  $V_{(I, g)}$  est la limite des  $V_{(\sigma, g)}$  lorsque le module  $\mu(\sigma)$  tend vers 0. Autrement dit (en supposant  $V_{(I, g)} < \infty$  pour fixer les idées)*

*Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $(\mu(\sigma) < \eta) \implies (0 \leq V_{(I, g)} - V_{(\sigma, g)} < \epsilon)$ .*

### 3 Distance géodésique

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe par arc, muni de la métrique riemannienne usuelle de  $\mathbb{R}^n$ , de la manière suivante :

Soient  $x_1, x_2 \in \Omega$  et  $\gamma$  un chemin  $C^1$  par morceaux et contenu dans  $\Omega$ , on définit  $L(\gamma) = V_{([0,1],\gamma)}$  avec  $\gamma(0) = x_1$ ,  $\gamma(1) = x_2$ , on appelle la longueur de  $\gamma$  le nombre :  $L(\gamma) = \left[ \int_0^1 \|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$ .

**Définition A.4.** On appelle distance géodésique entre  $x_1$  et  $x_2$  notée  $d(x_1, x_2)$  la borne inférieure de tout les  $L(\gamma)$  c'est-à-dire :

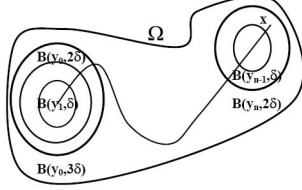
$d(x_1, x_2) = \inf\{L(\gamma), \gamma \subset \Omega \text{ chemin } C^1 \text{ par morceaux, avec } \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2\}$ . Autrement dit :

la distance géodésique est la longueur du plus court chemin de classe  $C^1$  par morceaux reliant  $x_1$  et  $x_2$  en restant dans  $\Omega$ .

## 4 $\delta$ -Suite de boules

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0, x$  deux points de  $\Omega$ .

**Définition A.5.** On dit qu'une suite de boules  $B(y_j, \delta)$ ;  $j = 0, \dots, N$  est une  $\delta$ -suite de boules reliant  $x_0$  à  $x$  si elle vérifie les conditions suivantes :



- 1-  $y_0 = x_0$ ,
- 2-  $x \in B(y_N, 2\delta)$ ,
- 3-  $B(y_{j+1}, \delta) \subset B(y_j, 2\delta)$ ;  $j = 0, \dots, N-1$ ,
- 4-  $B(y_j, 3\delta) \subset \Omega$ .

**Théorème A.6.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $\Psi$  une fonction  $C^\infty(\overline{\Omega})$  (à valeurs réelles) vérifiant  $\nabla\Psi(x) \neq 0$  pour  $x \in \overline{\Omega}$  et  $P(x, D)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients dans  $L^\infty(\Omega)$ .

On suppose de plus que les coefficients de la partie principale  $P_m(x, D)$  sont dans  $C^1(\overline{\Omega})$  et que  $P_m$  est elliptique dans  $\overline{\Omega}$  (i.e.  $P_m(x, \xi) \neq 0$  si  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ ). Si pour tous :  $\zeta = \xi + i\gamma\nabla\Psi \neq 0$  où  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  et  $P_m(x, \zeta) = 0$  on a :

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x, \zeta) \overline{\frac{\partial P_m}{\partial \xi_k}(x, \zeta)} + \gamma^{-1} \text{Im} \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_m}{\partial x_k}(x, \zeta) \overline{\frac{\partial P_m}{\partial \xi_k}(x, \zeta)} > 0. \quad (\text{A.1})$$

Alors il existe des constantes  $C > 0$  et  $\gamma_0 > 0$  telles que pour  $\gamma > \gamma_0$  on a

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \gamma^{2(m-|\alpha|)-1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 e^{2\gamma\Psi} dx \leq C \int_{\Omega} |P(x, D)u|^2 e^{2\gamma\Psi} dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pour la preuve du théorème A.6 voir Hörmander [Hö63] théorème 8.3.1.

**Théorème A.7.** *Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a_{j,k}(x)$  des fonctions lipschitziennes dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  vérifiant  $(\operatorname{Re} a_{j,k}(x))_{1 \leq j,k \leq n}$  définie positive, alors si  $f \in L^2_{loc}(\Omega)$  et  $u \in L^2_{loc}(\Omega)$  est solution de  $\sum_{1 \leq j,k \leq n} D_j(a_{j,k} D_k u) = f$ , donc  $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ .*

*De plus pour tout  $f \in L^2_{loc}(\Omega)$  cette équation admet toujours une solution  $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ .*

Pour la preuve du théorème A.7 voir Hörmander [Hö83] théorème 17.2.7.

# Annexe B

## Résultats

### 1 Détails de la formule (2.2) du chapitre 2

Notons  $C = \partial_{\eta_A} - \sum_{1 \leq j \leq n} a_j(x) \eta_j$ , où  $\partial_{\eta_A} = - \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{j,k}(x) \eta_j D_k$  est la dérivée conormale extérieure à  $\Omega$  et  $\eta(x) = (\eta_j(x))_{1 \leq j \leq n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  en  $x$ .

Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  deux fonctions suffisamment régulières telles que  $\text{supp } \Phi|_{\partial\Omega} \subset \Gamma$ , si  $C\Phi = 0$  sur  $\partial\Omega$  alors

$$\int_{\Omega} [A\Phi\bar{\Psi} - \Phi\overline{A^*\Psi}] dx = \int_{\Gamma} \Phi \partial_{\eta_A} \bar{\Psi} d\sigma.$$

En effet, on a

$$Au = \sum_{1 \leq j, k \leq n} D_j(a_{j,k}(x) D_k u) + \sum_{1 \leq j \leq n} a_j(x) D_j u + a_0(x) u.$$

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} \langle u, D_k(\overline{a_{j,k}}(x) D_j v) \rangle - \sum_{1 \leq j \leq n} \langle u, D_j(\overline{a_j}(x) v) \rangle + \langle u, \overline{a_0}(x) v \rangle \\ &= \langle u, A^* v \rangle \end{aligned}$$

d'où

$$A^* v = \sum_{1 \leq j, k \leq n} D_k(\overline{a_{j,k}}(x) D_j v) - \sum_{1 \leq j \leq n} D_j(\overline{a_j}(x) v) + \overline{a_0}(x) v.$$

En outre puisque  $a_{j,k} = \overline{a_{k,j}}$  alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A\Phi.\bar{\Psi} dx - \int_{\Omega} \Phi\overline{A^*\Psi} dx &= \langle A\Phi, \Psi \rangle - \langle \Phi, A^*\Psi \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} \int_{\Omega} [\bar{\Psi} D_j(a_{j,k}(x) D_k \Phi) - \Phi D_k(a_{j,k}(x) D_j \bar{\Psi})] dx \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{\Omega} [(a_j(x) D_j \Phi) \bar{\Psi} + D_j(a_j(x) \bar{\Psi}) \Phi] dx \\ &+ \int_{\Omega} [a_0(x) \Phi \bar{\Psi} - a_0(x) \bar{\Psi} \Phi] dx \end{aligned}$$

on pose

$$I_1 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \int_{\Omega} \left[ \bar{\Psi} D_j(a_{j,k}(x) D_k \Phi) - \Phi D_k(a_{j,k}(x) D_j \bar{\Psi}) \right] dx,$$

$$I_2 = \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{\Omega} \left[ (a_j(x) D_j \Phi) \bar{\Psi} + D_j(a_j(x) \bar{\Psi}) \Phi \right] dx.$$

D'une part on a

$$\begin{aligned} (a_j(x) D_j \Phi) \bar{\Psi} + D_j(a_j(x) \bar{\Psi}) \Phi &= a_j(x) \bar{\Psi} D_j \Phi + a_j(x) \Phi D_j \bar{\Psi} + \Phi \bar{\Psi} D_j a_j(x) \\ &= D_j(a_j \Phi \bar{\Psi}) \end{aligned}$$

donc

$$I_2 = \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{\partial \Omega} a_j(x) \Phi \bar{\Psi} \cos(x_j, \eta) d\sigma.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} D_j(a_{j,k}(x) D_k \Phi) &= D_j(a_{j,k}(x) \bar{\Psi} D_k \Phi) - a_{j,k}(x) D_k \Phi D_j \bar{\Psi}, \\ \Phi D_k(a_{j,k}(x) D_j \bar{\Psi}) &= D_k(a_{j,k}(x) \Phi D_j \bar{\Psi}) - a_{j,k}(x) D_k \Phi D_j \bar{\Psi}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$I_1 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \left\{ \int_{\partial \Omega} a_{j,k}(x) \bar{\Psi} D_k \Phi \eta_j d\sigma - \int_{\partial \Omega} \overline{a_{k,j}}(x) \Phi D_j \bar{\Psi} \eta_k d\sigma \right\}.$$

Ce qui démontre la formule (2.2). ■

# Conclusion et perspectives

Cette thèse a porté en premier temps sur l'étude de la contrôlabilité approximative du système d'évolution ((2.4) p. 24), c'est-à-dire que l'on a cherché l'existence d'un contrôle  $g \in L^2(\Gamma_T)$  qui, partant de  $(v_0, v_1)$ , amènerait le système à l'instant  $T$  à l'état  $(v(T, x) = z_0, v'(T, x) = z_1)$  avec  $(v_0, v_1) \in B((z_0, z_1), \epsilon); \forall \epsilon > 0$ . Le problème étant linéaire, on peut se ramener à l'état d'équilibre, c'est-à-dire  $z_0 = z_1 = 0$  et donc  $(v_0, v_1) \in B(0, \epsilon)$ .

Ce résultat a été obtenu en analysant le point d'observabilité. Il s'agit de savoir si l'observation de la solution, durant un temps assez grand, détermine de manière unique celle-ci.

Cette observation est équivalente au théorème d'unicité 1.1 (p. 3). Ce théorème a été prouvé par Holmgren [Hl01] en 1901, avec des coefficients analytiques (avec la constante  $K$  du théorème 1.1 égale 2). Dans le cas où les coefficients sont seulement de classes  $C^\infty$  et dépendent de  $t$ , un contre exemple à l'unicité est donné dans les commentaires du chapitre un. Lorsque les coefficients sont indépendants du temps et peu réguliers, Robbiano [Ro91] a montré – grâce aux inégalités de Carleman – l'existence d'une constante  $K > 0$  telle que si  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$  et  $T > KD$  la solution devient nulle. Par la suite Hörmander [Hö92] a donné une estimation de la valeur de la constante  $K$  ( $0 < K \leq 2\sqrt{\frac{27}{23}}$ ). Tataru [Ta95] a montré, dans un cas particulier, que cette constante vaut 2, ce qui permet d'optimiser le temps durant lequel le contrôle doit agir.

Dans cette thèse nous avons établi, dans le chapitre un, le théorème 1.3 déduit du théorème d'unicité 1.1, puis il a été appliqué à notre problème de contrôle.

Ensuite nous avons démontré une estimation d'une fonction de coût pour les solutions des équations hyperboliques à coefficients réguliers ; celle-ci est donnée dans le théorème 2.2 du chapitre deux. Ce théorème est démontré grâce au théorème 2.1 qui permet une estimation à basse fréquence. Cette estimation donne un résultat pertinent dès que l'on a

$$\frac{E(\vec{u})}{\|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2} = \mathcal{O}(1) \tag{B.1}$$

où  $E(\vec{u})$  représente l'énergie du système (2.4). En l'absence de décomposition de

Fourier explicite, le rapport figurant au membre de gauche de (B.1) est la manière la plus physique d'estimer le carré de la fréquence.

Dans la troisième partie de cette thèse, notre travail a consisté à poser le problème (3.1)-(3.3) qui représente une structure multidimensionnelle, définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , liée à une tige modélisée par un segment de  $\mathbb{R}$ .

L'étude de cette structure n'est pas nouvelle. Elle a déjà été considérée par Puel-Zuazua [PuZu91] qui ont étudié la contrôlabilité exacte avec une condition aux limites de type Dirichlet sur  $\partial\Omega$  et d'autres conditions de transmission en appliquant la méthode H.U.M. Le résultat de [PuZu91] a été généralisé par Burq [Bu94] en utilisant des méthodes d'analyse micro-locale et de propagation des singularités, développées par Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92].

Nous avons prouvé la stabilisation logarithmique donnée dans le théorème 3.3, c'est-à-dire la décroissance de l'énergie, obtenue par une condition dissipative sur le bord de l'ouvert du type Neumann.

Le théorème 3.3 est analogue aux théorèmes suivants : le théorème 1 de Lebeau [L96] qui a étudié le problème de stabilisation à l'intérieur d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , celui de Lebeau-Robbiano [LRo97] qui traitent le problème de stabilisation au bord d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , celui de Burq [Bu98] qui est applicable au cas de l'équation des ondes pour le problème extérieur, ainsi que celui de Bellassoued [Bl03] pour un ouvert avec obstacle transparent.

Notre résultat a été obtenu grâce aux inégalités de Carleman données dans le théorème 3.5. Des difficultés se sont présentées pour démontrer le théorème 3.5 au niveau de la liaison ouvert-tige. Dans les étapes de la démonstration nous nous sommes ramené à construire deux fonctions phases (au niveau du point de jonction)  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de telle sorte à supposer, dans toute cette troisième partie, que  $\text{supp } a \cap \mathcal{C}\text{supp } \Theta \neq \emptyset$ .

Il est probablement possible d'obtenir les mêmes résultats que ceux établis dans la deuxième partie de cette thèse quand la régularité des coefficients du problème hyperbolique est abaissée, mais cela nécessiterait de remplacer le calcul pseudo-différentiel par d'autres outils adaptés à des opérateurs à régularités limitées.

La contrôlabilité exacte du système (2.4), du chapitre deux, avec une condition au bord de type Dirichlet et Dirichlet-Neumann a déjà été examinée dans le cas des coefficients réguliers par plusieurs auteurs dont Avellaneda-Lin [AL89], Ho [Ho86, Ho87], Komornik [K89], Lasiecka-Triggiani-Yao [LaTrYa97], J.-L. Lions [Lio88, Li88] et Bardos-Lebeau-Rauch [BLR92]. Zuazua [Zu90] a traité le même problème mais pour des coefficients  $a_{jk} = \delta_{jk}a(x)$ ,  $a_j = 0$ . J. L. Lions [Lin88] et Muñoz-Rivera [Mu90] ont étudié le cas où  $a_{jk} = \delta_{jk}a(t)$ ,  $a_j = 0$  et  $a(t)$  étant

---

une fonction donnée. Miranda [Mir95] a abordé dans le cas où  $a_{jk} = (\delta_{jk} - k^2(t)x_jx_k)k^{-2}(t)$  pour une fonction donnée  $k(t)$  avec la présence des termes  $\nabla v$  et  $\nabla v'$  dans la première équation du système (2.4). Robbiano [Ro91, Ro95] a obtenu la contrôlabilité approchée pour des coefficients peu réguliers qui ne dépendent pas du temps. Lui-Williams [LiuWi98] a obtenu des résultats de contrôlabilité exacte de l'équation des ondes pour des coefficients variables, dépendant de  $t$  et  $x$  avec condition au bord du type Neumann.

Mais d'après notre revue de littérature il semble qu'il n'y ait pas eu d'étude sur l'estimation de la fonction de coût pour le même problème hyperbolique avec des coefficients peu réguliers. Nous pensons qu'il serait intéressant de traiter ce problème.

L'analyse présentée dans la troisième partie de cette thèse ouvre la perspective d'étudier la stabilisation logarithmique pour la même structure multidimensionnelle, mais avec une condition aux limites de type Dirichlet-Neumann.

Nous avons déjà indiqué plus haut que la contrôlabilité exacte de la structure multidimensionnelle a été abordée par Puel-Zuazua [PuZu91] et Burq [Bu94] mais seulement avec des conditions aux limites de type Dirichlet. De plus la stabilisation de cette structure n'a pas été étudiée. C'est ce qui motive, à notre sens, d'étudier la stabilisation logarithmique, en absence du contrôle géométrique, du problème traité par Puel-Zuazua [PuZu91] en déployant les inégalités de Carleman.

Il serait également utile, à notre avis, d'étudier la stabilisation logarithmique sur un ouvert joint à un autre ouvert en un point avec les conditions de transmission traitées par Puel-Zuazua [PuZu91] et ceux du chapitre trois.

# Bibliographie

- [Al83] S. Alinhac, *Non-unicité du problème de Cauchy*, Annals of mathematics, **117**, 1983, 77-108.
- [AlBa95] S. Alinhac and M.-S. Baouendi, *A non uniqueness result for operators of principal type*, Math. Z., **220**, 1995, 561-568.
- [AL89] M. Avellaneda and F.-H. Lin, *Homogenization of poisson's kernel and applications to boundary control*, J. Math. Pures et Appl., **68**, 1989, 1-29.
- [Ba87] H. Bahouri, *Dépendance non linéaire des données de Cauchy pour des solutions des équations aux dérivées partielles*, J. Math. Pures. Appl., **66**, 1987, 127-138.
- [Ba] C. Bardos, "communication privée".
- [BLR92] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., **30**, 1992, 1024-1065.
- [Bl03] M. Bellassoued, *Carleman estimates and distribution of resonances for the transparent obstacle and application to the stabilization*, Asymptotic, Anal., **35**, 2003, 257-279.
- [Be96] S. Bennett, *A brief history of automatic control*, Control Systems Magazine, IEEE., **16**, 1996, 17-25.
- [Br01] M. Bercovier, *In memoriam : J. L. Lions (1928-2001)*, Int. J. Comput. Fluid syn., **15**, No 2, 2001, i-ii.
- [Bu93] N. Burq, *Contrôle de l'équation des palques en présence d'obstacles strictement convexes*, Mém. Soc. Math. France (N. S.), **55**, Marseilles, 1993.
- [Bu94] N. Burq, *Un théorème de contrôle d'une structure multidimensionnelle*, Com. Partial Diff. Eq., **19**, 1994, 199-211.
- [Bu98] N. Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonances au voisinage du réel*, Acta. Marh., **1**, 1998, 1-29.
- [B98] N. Burq, *Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts comportant des coins*, Bull. de la Soc. Math. De France., **126**, 1998, 601-637.
- [ChPr81] J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier Villars, 1981.
- [Ch73] G. Choquet, *Cours d'analyse : Topologie*, tome 2, Masson, 1973.

- [CoBr90] B. Cotterell and J. Kamminga, *Mechanics of pre-industrial technology : An introduction to the mechanics of ancient and traditional material culture*, Cambridge Univ. Press., 1990, 59-61.
- [Du02] T. Duyckaerts, *Optimal decay rates of the energy of an hyperbolic-parabolic system coupled by an interface*, European Union Projects "Smart System" 2002.
- [DZZ06] T. Duyckaerts, X. Zhang and E. Zuazua, *On the optimality of the observability inequalities for parabolic and hyperbolic systems with potentials*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, accepted 3 July 2006, to appear (corrected proofs available online).
- [Fa92] C. Fabre, *Résultats de contrôlabilité exacte interne pour l'équation de Schrödinger et leurs limites asymptotiques : Application à certaines équations de plaques vibrantes*, Asym. Anal., **5**, 1992, 343-379.
- [FCZu00] E. Fernández-Cara and E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations : The linear case*, Adv. Diff. Eq., **5**, 2000, 465-514.
- [FeZu00] E. Fernández-Cara and E. Zuazua, *Control theory : History, mathematical achievements and perspectives* Bol. Soc. Esp. Apl., **0**, 2000, 1-63.
- [FuIm96] A.-V. Fursikov and O. Yu Imanivilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Ser., **34**, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [GeLe93] P. Gerard and E. Leichtnam, *Ergodic properties of the eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke. Math. Journal., **71**, 1993, 559-607.
- [Ha85] A. Haraux, *Stabilisation of trajectoires for some weakly damped hyperbolic equations*, J. Diff. Eq., **59**, 1985, 145-154.
- [Hi76] D.-R. Hill, *Archimedes On the Construction of Water-Clocks*, Paris. 1976.
- [Hi98] D.-R. Hill, *Studies in Medieval Islamic Technology : From Philo to al-Jazari, From Alexandria to Diyar Bakr*, Edited by David A. King (Variorum Collected Studies, Series 555), Aldershot, England, Brookfield, Vt. : Ashgate, **IV**, 1998, p. 30.
- [Ho86] L.-F. Ho, *Observabilité frontière de l'équation des ondes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **302**, 1986, 443-446.
- [Ho87] L.-F. Ho, *Exact controllability of second order hyperbolic systems with control in the Dirichlet boundary condition*, J. Math. pures et Appl., **66**, 1987, 363-368.
- [Hi01] E. Holmgren, *Über Systeme von linearen Partiellen Differential gleichungen Ofversigt af Kongl. Vetenskapsakad. Forh*, **58**, 1901, 91-103.
- [Hö63] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [Hö83] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Hö92] L. Hörmander, *A uniqueness theorem for second order hyperbolic differential equation*, Comm. Partial Diff. Equ., **17**, 1992, 699-714.

- [Hö96] L. Hörmander, *On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions*, Springer-Verlag, 1996.
- [Is80] V.-M. Isakov, *On the uniqueness of the solution of the Cauchy problem*, Sov.Math. Dokl., **22**, 1980, 639-642.
- [Jo60] F. John, *Continuous dependence on data for solution of partial differential equations with prescribed bound*, Comm. Pure. Appl. Math., **17**, 1960, 551-585.
- [K89] V. Komornik, *Exact controllability in short time for the wave equation*, Annal. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire, **6**, 1989, 153-164.
- [K94] V. Komornik, *Exact controllability and stabilisation. The Multiplier Method*, Masson-John Wiley, Paris, 1994.
- [KZ90] V. Komornik and E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of wave equation*, J. Math. Pures et Appl., **69**, 1990, 33-54.
- [La83] J.-E. Lagnese, *Decay of solutions of wave equations in a boundary region with boundary dissipation*, J. Diff. Eq., **50**, 1983, 163-182.
- [LaTr87] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Uniform exponential decay of wave equations in a bounded region with  $L^2(0, \infty; L^2(\Gamma))$ -feedback control in the Dirichlet boundary conditions*, J.Diff. Equ., **66**, No 3, 1987, 340-390.
- [LaTr92] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilisation of schrödinger equation with Dirichlet control*, Diff. Integral. Eq., **5**, 1992, 521-535.
- [LaTrYa97] I. Lasiecka, R. Triggiani and P.-F. Yao, *Exact controllability for second order hyperbolic equations with variable coefficient-principal part and first order terms*, Nonlinear, Anal. T. M. A., **30**, 1997, 111-122.
- [RoSh] M.-M. Lavrent'ev, V.-G. Romanov and S.-P. Shishatskii, *Ill posed problems in mathematical physics and analysis*, In "translations of mathematical monographs". Amer. Math. Soc. Providence RI. Vo 64, 1986.
- [Lb92] G. Lebeau, *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, J. Math. Pures. Appl., **71**, No 9, 1992. 267-291.
- [L92] G. Lebeau, *Contrôle analytique I : estimation a priori*, Duk. Math. J., **68**, 1992, 1-30.
- [LRo95] G. Lebeau et L. Robbiano, *Contrôle exacte de l'équation de la chaleur*, Comm Partial. Diff. Eq., **20**, 1995, 335-356.
- [L96] G. Lebeau, *Equation des ondes amorties*, "dans Algebraic, and Geometric Methods in Mathematical Physics, Math. Phys. Stud., **19**, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht., 1996. 73-109.
- [LRo97] G. Lebeau et L. Robbiano, *Stabilisation de l'équation des ondes par le bord*, Duke, Math. Journal., **86**, No 3, 1997, 465-491.
- [Lp92] A.-M. Lepschy, *Feedback Control in Ancient Water and Mechanical Clocks*, IEEE Transactions on Education, **35**, No 1, 1992.
- [Le88] N. Lerner, *Uniqueness for an ill-posed problem*, Journal of Differential Equations, **71**, 1988, 255-260.

- [Lw96] F.-L. Lewis, *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall, 1992.
- [Li68] J.-L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod. 1968
- [Lio88] J.-L. Lions, *Exact Controllability stabilization and perturbation for distributed systems*, SIAM. **30**, No 1, 1988, 1-68.
- [Li88] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, Masson. Collection. RMA. Paris., 1988.
- [Lin88] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, Collège de France, Dep. de Maths. Paris., 1988.
- [LiSt67] J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Com. Pure. Appl. Mat. **261**, 1967, 221-234.
- [LiMa68] J.-L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol 1. Dunod. Paris., 1968.
- [LiuWi98] W.-J. Liu and G.-H. Williams, *Exact Neumann boundary controllability for second order hyperbolic equations*, Colloquium, Math., **76**, 1998, 117-142.
- [Ma94] E. Machtyngier, *Exact controllability for Schrödinger equation*, Siam J. control. Optim., **32**, 1994, 24-34.
- [MeSj69] R. B. Melrose and J. Sjostrand, *Singularities of boundary value problems*, Comm. Pure and Appl. Math., **31**, 1969, 593-617.
- [Mi04] L. Miller, *Geometric bounds on the growth rate of null-controllability cost of the heat equation in small time*, J. Diff. Eq., **2004**, 2004, 202-226.
- [Mi05] L. Miller, *On the null-controllability of the heat equation in unbounded domains*, Bulletin des Sciences Mathématiques., **129**, No 2, 2005, 175-185.
- [Mir95] M.-M. Miranda, *HUM and the wave equation with variable coefficients*, Asym. Anal., **11**, 1995, 317-341.
- [Mu90] J.-E. Muñoz Rivera, *Exact controllability : Coefficient depending on the time*, SIAM. J. Control and Optim., **28**, 1990, 289-303.
- [Na07] G. Nadarajan, *Islamic Automation : A Reading of Al-Jazari's The Book of Ingenious Mechanical Devices (1206)*, in O. Grau (ed.), MediaArtHistories, MIT Press, Cambridge 2007, 163-178.
- [Ou07] L. Ouksel, *Inégalité d'observabilité du type logarithmique et estimation de la fonction de coût des solutions des équations hyperboliques*, Esaim., COCV., Doi., **10**, 2007, 1-25.
- [Ph01] K.-D. Phung, *Observability and control of schrödinger equation*, Siam J. Control Optim., **40**, No 1, 2001, 211-230.
- [Ph03] K.-D. Phung, *Remarque sur l'observabilité pour l'équation de Laplace*, ESAIM. Cont. Opt. Cal. Var., **9**, 2003, 621-635.
- [Ph04] K.-D. Phung, *Note on the cost of the approximate controllability for the heat equation with potentiel*, J. Math. Anal. Appl., **295**, No 2, 2004, 527-538.

- [Pi98] D. Pingree, *Legacies in Astronomy and Celestial Omens*, in *D. Stephanie : The Legacy of Mesopotamia*, Oxford Univ. Press., 1998, 125-126.
- [PuZu91] J.-P. Puel and E. Zuazua, *Exact controllability for some models of multidimensional vibrating structures*, Mathematics, climate and environment, 1991, 288-295.
- [RaTa72] J. Rauch and M. Taylor, *Penetrations in, shadow regions and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems*, Indiana univ., Math. Journal **22**, 1972, 277-285.
- [RaTa74] J. Rauch and M. Taylor, *Exponential Decay of solutions to hyperbolic equations in bounded Domains*, Indiana Univ., Math. Journal **24**, No 1, 1974, 7-86.
- [RZZ05] J. Rauch, X. Zhang and E. Zuazua, *Polynomial decay for a hyperbolic-parabolic coupled system*, J. Math. Pures. Appl., **84**, No 4, 2005, 407-470.
- [ReSi75] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, volume I-IV*, Academic Press., 1975.
- [Ro91] L. Robbiano, *Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques*, Comm Partial. Diff. Eq., **16**, 1991, 789-800.
- [Ro95] L. Robbiano, *Fonction de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques*, Asym. Anal., **10**, 1995, 95-115.
- [RoZu98] L. Robbiano and C. Zuily, *Uniqueness in the Cauchy problem for operator with partially holomorphic coefficients*, Inventiones Mathematicae., **131**, 1998, 493-539.
- [Ru73] D. Russell, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Stud. Appl. Math., **52**, 1973, 189-212.
- [Sy83] W. Symes, *A trace theorem for solutions of the wave equation, and the remote determinations of acoustic sources*, Meth. Math. In the app. Sci., **5**, 1983, 131-152.
- [Ta95] D. Tataru, *Unique continuation for solution to P. D. E'S between Hörmander theorem and Holmgren's theorem*, Comm. On PDE., **20**, 1995, 855-884.
- [Ta96] D. Tataru, *Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary-value problems*, J. Math. Pures. Appl., **75**, 1996, 367-408.
- [TA99] D. Tataru, *Unique continuation for partial differential operators with partially analytic coefficients*, J. Math. Pures. Appl., **78**, 1999, 505-521.
- [Ta91] M. Taylor, *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE*, Birkhäuser., 1991.
- [Tu84] A. J. Turner, *Time Measuring Instruments ; Part 3. Water-clocks, Sand-glasses, Fire-clocks*, Rockford, IL. vol. I, 1984.
- [ZhZu03] X. Zhang and E. Zuazua, *Polynomial decay and control of a 1-d model for fluid-structure interaction*, C.R. Acad. Sci., Paris, Serie I., **336**, 2003, 745-750.
- [ZZu03] X. Zhang and E. Zuazua, *Control, observation and polynomial decay for a coupled heat-wave system*, C. R. Acad. Sci., Paris, Serie I., **336**, 2003, 823-828.

- 
- [ZhZu06] X. Zhang and E. Zuazua, *Long time behavior of a coupled heat-wave system arising in fluid structure interaction*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **184**, No 1, 2007, 49-120.
- [Zu90] E. Zuazua, *An introduction to the exact controllability for distributed systems*, CMAF. Univ. de Lisboa Portugal, 1990.