

N° d'ordre : 04/2001-E/PH

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTE DE PHYSIQUE

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR D'ETAT EN PHYSIQUE

Spécialité : Mécanique des Fluides

par

Mohand KESSAL

Une simulation numérique simplifiée des écoulements de fluides compressibles en régime non stationnaire.

Recherche des conditions de Cauchy d'une couche limite laminaire en convection mixte.

Soutenue le 25 Octobre 2001 devant la commission d'examen.

A. SALEM	Professeur	(U.S.T.H.B)	Président
M. AMAOUCHE	Professeur	(Univ. Béjaia)	Directeur de thèse
M. BOUHADEF	Professeur	(U.S.T.H.B)	Examineur
A. OUIBRAHIM	Professeur	(Univ. Boumerdès)	Examineur
E.K. SI-AHMED	Professeur	(U.S.T.H.B)	Examineur
S. CHIKH	Maître de Conférences	(U.S.T.H.B)	Examineur

**A mes parents,
à ma femme,
à mes enfants,
pour leur infinie patience.**

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne sous la direction de Monsieur le Professeur M. Amaouche. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour ses conseils et ses suggestions.

Malgré ses multiples occupations Monsieur le Professeur A. Salem m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, je lui présente l'expression de ma respectueuse gratitude.

Il me faut souligner l'honneur que me font Messieurs les Professeurs Malek Bouhadeb, A. OUIBRAHIM et E.K. SI-AHMED ainsi que le Docteur S. CHIKH Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, pour avoir accepté d'examiner ce travail et d'être membres du jury. Je les remercie vivement.

Je remercie également Monsieur A. GACEMI, Président Directeur Général de l'Entreprise de Service aux Puits (E.N.S.P) de Hassi-Messaoud, pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse.

Enfin, je ne saurais oublier mes collègues du Laboratoire de Mécanique des Fluides, particulièrement Monsieur M. DEBIANE ainsi que l'équipe du Polyphasique.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	1
<u>Première partie</u> : Simulation numérique simplifiée des écoulements de fluides compressibles en régime non stationnaire.	
<i><u>Première étude</u> : Simulation numérique simplifiée des écoulements non stationnaires de gaz dans les réseaux de canalisations.....</i>	<i>6</i>
1. Introduction.....	7
2. Développement du modèle mathématique.....	9
3. Schémas numériques de résolution.....	12
3.1. Ecoulements transitoires rapides.....	12
3.2. Ecoulements transitoires lents.....	15
4. Conditions initiales et aux limites.....	19
4.1. Conditions aux limites pour les écoulements rapides.....	19
4.2. Conditions aux limites pour les écoulements lents.....	22
5. Résultats et discussion.....	23
6. Conclusion.....	26
7. Références bibliographiques.....	26
Nomenclature.....	28
<i><u>Deuxième étude</u> : Application d'un schéma explicite de type Lambda pour une simulation numérique des écoulements non stationnaires de gaz dans les conduites sans et avec variation de diamètre.....</i>	<i>34</i>
1. Introduction.....	35
2. Développement du modèle mathématique	36
2. Schéma numérique.....	37

4. Conditions initiales et aux limites.....	41
5. Résultats et discussion.....	43
6. Conclusion.....	47
7. Références bibliographiques.....	47
Nomenclature.....	49

Troisième étude : Etude des régimes transitoires en conduites de liquides contenant des gaz dissous avec prise en compte du dégazage.....55

1. Introduction.....	56
2. Modélisation mathématique.....	59
2.1. Etablissement des équations	60
3. Résolution numérique.....	68
3.1. Schéma à deux pas de temps.....	69
3.2. Schéma de Mac Cormack.....	70
4. Application.....	73
4.1 Rupture de la veine liquide et écoulement cavitant.....	74
5. Conclusion.....	77
6. Références bibliographiques.....	77
Nomenclature.....	79

Deuxième partie : Recherche des conditions de Cauchy d'une couche limite laminaire en convection mixte.....85

1. Introduction.....	86
2. Modélisation théorique.....	88
2.1. Equations de base.....	88
2.2. Equations globales des couches limites dynamique et thermique.....	91
2.3 Conditions de Cauchy associées au système (17)-(18)	95
2.4 Etude du cas où le nombre de Prandtl est voisin de l'unité.....	97

2.4.1. Problème de Cauchy pour l'évolution de δ	98
2.4.2. Etude de certains cas particuliers.....	101
2.4.3. Autres cas particuliers.....	102
3. Résultats et discussion.....	105
3.1. Application au cylindre circulaire.....	105
3.1.1. Cas général (Pr est différent de l'unité).....	105
3.1.2. Cas où Pr est voisin de l'unité.....	105
3. Conclusion.....	113
5. Références bibliographiques.....	115
6. Conclusion générale.....	116
Annexe A : Théorie des caractéristiques.....	118
Annexe B : Calcul des conduites de gaz en régime non stationnaire.....	123
Annexe C : Déformation de la conduite sous l'effet de la pression.....	132
Annexe D : Estimation du coefficient de dégagement de gaz: $G_f(t)$	136
Annexe E : Calcul des grandeurs intégrales et des paramètres de forme ...	140

INTRODUCTION GENERALE

Les écoulements non stationnaires de fluides compressibles ont fait l'objet de plusieurs travaux, pour la plupart suivis d'applications industrielles importantes sur les réseaux de distribution de gaz, les conduits d'air comprimé et les canalisations de liquides tels que les circuits de refroidissement des centrales thermiques.

Si les diverses formulations qui traitent de ces problèmes prennent généralement en compte les conditions opératoires propres à chaque cas étudié, par contre, au plan mathématique, les méthodes numériques de résolution des équations qui décrivent ces écoulements sont très utilisées. Néanmoins, malgré leur souplesse et les divers champs qu'elles peuvent investir, ces méthodes doivent être de plus en plus affinées et optimisées. Dans ce travail seront présentés quelques exemples de techniques de calcul pour satisfaire ces exigences.

Afin d'analyser l'évolution des paramètres d'écoulement, en régime non stationnaire des fluides compressibles, l'équation de conservation de la masse et l'équation de la quantité de mouvement ont été écrites sous des formes appropriées aux divers procédés considérés. La résolution des systèmes d'équations obtenus a été menée à l'aide de techniques numériques adaptées à ces derniers.

Dans une première partie ont été étudiés les écoulements non stationnaires de fluides compressibles dans les conduites. Une première étude porte sur un nouveau schéma aux différences du deuxième ordre à deux pas de temps, du type prédicteur-correcteur. C'est une méthode hybride, qui consiste en un schéma aux différences explicite du premier ordre pour les points intérieurs, et une forme caractéristique des équations pour les conditions aux limites. Afin de tester les performances de schémas proposés, les calculs ont porté sur les écoulements rapide et lent de gaz dans les réseaux.

Une deuxième étude considère la particularité des écoulements de gaz dans les tuyères qui comportent des singularités géométriques. Les équations de compatibilité associées aux systèmes d'équations précités ont été résolues par un schéma aux différences explicite du deuxième ordre, du type Lambda. Les conditions aux limites ont fait l'objet d'un traitement numérique par un schéma explicite simple obtenu après intégration des équations issues de la forme caractéristiques du système d'équations qui décrivent ces écoulements. Deux exemples, une tuyère et une canalisation relativement courte, sont considérés en guise d'applications.

Dans une troisième étude nous proposons une reformulation mathématique et physique complète d'un écoulement homogène de liquide contenant des gaz dissous, c'est-à-dire une prise en compte de l'élasticité de la paroi, le dégagement des gaz dissous et particulièrement le phénomène de rupture de veine. Ce dernier fera l'objet d'une attention particulière par l'introduction d'une nouvelle formulation des équations qui permettra de conserver la continuité du milieu fluide. Le système d'équations obtenu est résolu par deux schémas aux différences à deux pas de temps auxquels est associé un algorithme de type FCT (Flux-Corrective Transport algorithme).

La deuxième partie traite de quelques structures d'écoulement de convection mixte non symétrique dans le cadre de la couche limite laminaire dans laquelle est posée le problème des conditions de Cauchy. Cette question est fondamentale, car elle permet de savoir où et comment la couche limite commence à se développer et par conséquent son évolution le long du corps chauffé considéré. Nous proposons de localiser la zone de stagnation qui résulte d'un équilibre local des effets des convection forcée et naturelle et exécuter une analyse locale qui permet de caractériser le départ de la couche limite. Ceci est réalisé par l'utilisation d'une méthode approximative du type Karman-Pohlhausen. Trois cas limites sont considérés, à savoir le cas classique correspondant à un nombre de Prandtl (Pr) voisin de l'unité et les cas $Pr < 1$ et $Pr > 1$.

PREMIERE PARTIE

**UNE SIMULATION NUMERIQUE SIMPLIFIEE DES
ECOULEMENTS DE FLUIDES COMPRESSIBLES EN
REGIME NON STATIONNAIRE**

**SIMULATION NUMERIQUE SIMPLIFIEE DES ECOULEMENTS
NON STATIONNAIRES DE GAZ DANS LES RESEAUX DE
CANALISATIONS**

1. INTRODUCTION

Les écoulements de gaz en régime non stationnaire dans les conduites concernent essentiellement les réseaux de distribution de gaz et les circuits d'air comprimé. Plusieurs vocables tels que « non permanent », « transitoire » et « instationnaire » sont aussi utilisés pour leur description. Sur le plan théorique cela se traduit par le fait que la dérivée locale de la vitesse ou du débit est différente de zéro. Dans les différentes parties qui constituent ce mémoire ces appellations seront tour à tour usitées afin de ne pas trop se répéter.

Les modèles mathématiques qui décrivent les écoulements transitoires de gaz dans les réseaux de canalisations peuvent se présenter sous la forme d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles. La forme de ces équations varie avec le type d'application et les conditions opératoires correspondantes. Elles peuvent être linéaires, non linéaires, de nature parabolique ou hyperbolique.

Dans cette partie, seront présentés des modèles relativement simplifiés. Compte tenu de la difficulté d'une description précise des phénomènes avec un temps du calcul réduit, il serait alors raisonnable de trouver un compromis qui satisfasse ces deux aspects importants. Ceci peut être réalisé par la mise au point de modèles simplifiés qui peuvent répondre à cette exigence. Ces modèles sont obtenus après simplification de termes généralement non linéaires ou ceux dont les valeurs numériques sont si petites que leur omission n'influe en rien sur la précision des calculs. Néanmoins, ces simplifications varient d'un exemple d'application à un autre. Dans la plupart des cas, les modèles mathématiques existants dépendent de l'exemple pour lequel il est nécessaire de mener une analyse approfondie des conditions opératoires.

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations obtenus peuvent être analytiques ou numériques. Les premières sont généralement longues, parfois compliquées et ne tiennent pas compte de toutes les conditions de fonctionnement des réseaux. Les secondes, plus fréquemment utilisées, et, basées généralement sur les différences finies, permettent de prendre en compte les aspects les plus compliqués de ces écoulements. Les schémas utilisés présentent une forme explicite ou implicite, en fonction de la nature du problème et de la précision demandée des résultats durant la simulation de ces phénomènes.

Les méthodes numériques les plus couramment utilisées incluent la méthode des caractéristiques (Wylie & Streeter [1]), les schémas explicites et implicites (Wylie & Al [2] and Streeter & wylie [3]) et les méthodes variationnelles (Racheford and Dupond [4]). Durant l'application de ces méthodes, les erreurs de calcul numérique, particulièrement les erreurs de troncature, peuvent être réduites en considérant un pas d'espace relativement grand telle que pratiquée par les auteurs précédents.

Il est connu que la méthode des caractéristiques et les différences finies explicites requièrent un espace de stockage de résultats relativement petit comparées aux méthodes implicites. Mais le ratio incrément de temps et pas d'espace ($\Delta t/\Delta x$) est limité par le critère de stabilité du schéma utilisé. Alors le temps de calcul peut être excessif surtout dans le cas des régimes transitoires lents. Pour cela une écriture appropriée des équations et l'introduction d'un multiplicateur d'inertie permet de palier à ce problème (Wylie & Streeter [1]).

Pour des conditions isothermes de fonctionnement, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement associées à l'équation d'état du gaz constituent un système d'équations simple pour la description des écoulements de gaz dans les réseaux de distribution. Compte tenu de la grandeur

de la vitesse d'écoulement et des conditions de fonctionnement de ces derniers, il est possible de considérer deux types d'écoulements de fluides compressibles dans les canalisations : les écoulements rapides et les écoulements lents. Compte tenu de la nature de ces écoulements, différents types de méthodes numériques sont proposés pour la résolution des systèmes d'équations respectifs. Les hypothèses généralement admises concernent la rigidité de la paroi de la canalisation et l'utilisation du modèle d'écoulement stationnaire pour les pertes de charges.

2. DEVELOPPEMENT DU MODELE MATHEMATIQUE

La masse d'un système matériel D de volume W que l'on suit dans son mouvement reste constante, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_w \rho_g dw = 0$$

Dans le cas d'un tube cylindrique :

$$W = Sdx$$

alors l'équation précédente devient :

$$\int_{\Delta x} \left[\frac{d}{dt} (\rho_g S) + \rho_g S \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0$$

En appliquant le théorème de la dérivée particulaire on obtient :

$$\int_{\Delta x} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g S) + V \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g S) + \rho_g S \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0$$

Finalement ceci étant vrai quel que soit Δx , pour chaque section du tube, l'équation de conservation de la masse s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g S V) = 0$$

Si l'on considère une conduite cylindrique de section transversale constante, cette équation et l'équation de la quantité de mouvement, pour un écoulement illustré par une évolution unidirectionnelle (le long de l'axe de la canalisation : x) des paramètres, s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g V) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g V^2) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{f_g \rho_g V |V|}{2D} - \rho_g g \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2)$$

Les deux derniers termes à droite de cette équation désignent respectivement les pertes de charge dues au frottement et l'énergie potentielle de position (z étant la dénivelée).

P étant la pression, donnée par l'équation d'état des gaz:

$$P = \rho_g \frac{Z R T}{\mu_g} \quad (3)$$

Compte tenu des conditions isothermes de l'écoulement, la vitesse de propagation des ondes dans le gaz s'écrit :

$$C = \left(\frac{Z R T}{\mu_g} \right)^{0.5} \quad (4)$$

Rappelons que les régimes transitoires de gaz dans les pipelines peuvent être divisés, en fonction de la vitesse d'écoulement, en écoulements transitoires rapides et en écoulements transitoires lents. Ces deux formes de régimes ont été étudiées par différents auteurs qui ont traité de la dynamique des gaz (Levêque and Yee [5], Wylie & Al [6], Rachford and Dupond [7] et Harten[8]). Dans cette étude on propose une nouvelle formulation le système d'équations précédent en vue d'applications appropriées. En posant $m=\rho_g V$ et, compte tenu des équations (3) et (4), le système d'équations (1)-(2) prend alors la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \vec{A} \quad (5)$$

$$\text{où : } \vec{F} = \vec{F}(\vec{U})$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{U}) \quad (6)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho_g \\ m \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho_g} + C^2 \rho_g \end{pmatrix}$$

En négligeant l'influence de la dénivelée, le terme source s'écrit :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f_g m |m|}{2D\rho_g} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Le système d'équations précédent est unidimensionnel, non linéaire du premier ordre et de nature hyperbolique.

En l'absence de données expérimentales, la distribution des paramètres en régime stationnaire, qui constitue les conditions initiales du problème, fait l'objet de l'application d'une relation analytique appropriée (Zhou and Adewumi [9]):

$$\bar{p} = \frac{f_g m_i^2}{DC^2 \rho_{gi}^2} \left(\frac{D}{f_g} \ln \bar{p} - \Delta l \right) + 1 \quad (8)$$

$$\text{Où : } \bar{p} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_{gi}} \right)^2$$

Cette équation de forme implicite en \bar{p} , convient pour un calcul itératif de la distribution de la densité ou de la pression.

3. SCHEMAS NUMERIQUES DE RESOLUTION

3.1. Ecoulements transitoires rapides

Plusieurs schémas aux différences ont été utilisés pour la résolution du système (5). On peut citer pour cela les schémas de Lax-Wendroff, de Mac

Cormack et de Godunov (utilisés respectivement par Warren [10] et Sod [11]). Ces schémas du second ordre ont l'avantage d'étudier les problèmes des ondes de choc et autres discontinuités avec une précision relativement bonne.

Rappelons que dans cette étude seront présentés deux cas pratiques. Le premier concerne un écoulement non stationnaire rapide de gaz dans une conduite de petite longueur. Les équations, écrites sous forme conservative, seront résolues, pour les points intérieurs, par un schéma de type prédicteur-correcteur de second ordre à deux pas de temps : une nouvelle forme du schéma de Lax-Friedricks comme prédicteur et un schéma de type leapfrog comme correcteur. Les équations correspondant aux conditions aux limites ont été résolues par la méthode des caractéristiques et la technique dite « upwind » (Hirch [12]).

Sous une forme indicielle la forme conservative de la relation (5) s'écrit :

$$\frac{\partial q_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial q_{2i}}{\partial x} = q_{3i} \quad (9)$$

Où q_{ij} (pour $j=1,2,3$ and $i=1,2$) indiquent la densité (ou la pression) et la vitesse (ou le flux massique).

Une nouvelle forme du schéma de Lax –Friedricks appliquée à l'équation (9), nous donne :

$$q_{1i}(x, t + \Delta t) = 0.5 * \left[q_{1i}(x + \Delta x, t) + q_{1i}(x - \Delta x, t) \right] - \left[q_{2i}(x + \Delta x, t) - q_{2i}(x - \Delta x, t) \right] * \Delta t / 2 / \Delta x + \left[q_{3i}(x + \Delta x, t) + q_{3i}(x - \Delta x, t) \right] * \Delta t / 2 \quad (10)$$

Ce schéma est obtenu à partir d'une procédure de stabilisation qui consiste à remplacer le terme $q_{1i}(x, t)$ du schéma original par $0.5 * [q_{1i}(x + \Delta x, t) + q_{1i}(x - \Delta x, t)]$. Ce qui correspond en fait à l'addition d'un terme de dissipation proportionnel à la dérivée seconde du terme $q_{1i}(x, t)$ (Hirch [12]).

La viscosité artificielle est ainsi introduite par le premier terme à droite de l'équation (10). Malheureusement ce schéma cause un amortissement considérable des ondes dynamiques, compte tenu de sa précision du premier ordre par rapport à x . Ceci pourrait alors conduire à des valeurs relativement faibles des amplitudes des surpressions. Une précision du second ordre est obtenue en ajoutant un second schéma (de type leapfrog) à l'équation (10) :

$$q_{1i}(x, t + 2 * \Delta t) = q_{1i}(x, t) - \left[\begin{array}{c} q_{2i}(x + \Delta x, t + \Delta t) - \\ q_{2i}(x - \Delta x, t + \Delta t) \end{array} \right] * \Delta t / \Delta x + \Delta t * \left[\begin{array}{c} q_{3i}(x + \Delta x, t + \Delta t) + \\ q_{3i}(x - \Delta x, t + \Delta t) \end{array} \right] \quad (11)$$

La matrice $[q_{3i}]$ correspond aux termes source dans les équations (1) et (2).

Les équations (10) et (11) constituent un schéma de type prédicteur-correcteur à deux pas de temps, de la famille des schémas de Lax-Wendroff. L'amortissement qu'il produit est appréciable, pourvu qu'un nombre approprié de points de maillage soit choisi. On peut montrer sans difficultés qu'il est consistant avec le système d'équations (9) et peut être linéairement stable si:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{C + |V|}$$

3.2.Écoulements transitoires lents

Le deuxième exemple examiné concerne un écoulement massique de gaz dans un pipeline relativement long. Les équations sous forme non conservative sont résolues, pour les points intérieurs du maillage, par un schéma aux différences explicite simple du premier ordre. Les équations correspondant aux conditions aux limites, écrites sous forme caractéristique, sont résolues par la méthode itérative de Newton-Raphson, en incluant pour cela un multiplicateur d'inertie (modèle de Yow [13]).

Compte tenu des relations (3) et (4) et en introduisant le débit massique $M = m * S$, les équations (1) et (2) s'écrivent:

$$\frac{C^2}{A} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_g \left(V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \rho_g g \frac{\partial z}{\partial x} + f_g \rho_g \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (13)$$

où S désigne la section transversale de la canalisation.

De même que la vitesse d'écoulement du gaz, compte tenu des relations (3) and (4), peut se mettre sous la forme suivante:

$$V = \frac{MC^2}{SP}$$

L'équation du mouvement (13) devient alors :

$$\left[1 - \frac{M^2 C^2}{S^2 P^2}\right] \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2MB^2}{S^2 P} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{P \cdot g}{C^2} \frac{\partial z}{\partial x} + f_g C^2 \frac{M |M|}{2DS^2 g^2 P} = 0 \quad (14)$$

Dans cette équation, les calculs ont montré que le second terme du facteur multiplicatif de $\partial P/\partial x$ est négligeable, comparé à l'unité. Il en est de même pour le terme $\partial M/\partial x$ qui est négligeable devant les autres termes. Avec ces simplifications et en multipliant l'équation (14) par P, l'équation du mouvement non stationnaire du gaz devient:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P^2}{\partial x} + \frac{P}{S} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{P^2 g}{C^2} \frac{\partial z}{\partial x} + f_g C^2 \frac{M |M|}{2DS^2} = 0 \quad (15)$$

Les équations (12) et (15), qui décrivent les écoulements transitoires lents de gaz dans les pipelines constituent un système hyperbolique non linéaire dont la résolution analytique est impossible sous cette forme, à moins d'introduire d'autres simplifications qui limiteraient fortement les applications et la précision des calculs. Certes la solution analytique obtenue réduirait beaucoup le temps de calcul mais elle ne s'appliquerait qu'à des points bien précis de l'écoulement. Afin de considérer plusieurs cas de figure, se rapportant à ces écoulements (livraison, branchements, réception...etc.), une résolution numérique est recommandée.

Les systèmes d'équations qui décrivent les régimes transitoires lents de gaz dans les canalisations peuvent être résolus par plusieurs types de méthodes numériques : les schémas aux différences explicites et implicites ainsi que la méthode des caractéristiques ont fait l'objet de beaucoup d'applications (annexeA). Dans la dernière décennie, les logiciels basés sur la méthode des

éléments finis ont considéré des exemples d'application plus compliqués et ont permis d'affiner les résultats et d'économiser le temps de calcul, bien que la formulation soit lourde et plus difficile. Néanmoins toutes ces méthodes procèdent par étapes numériques de calcul, c'est-à-dire recherchant les valeurs des paramètres (la pression et le débit massique) en tout point de la canalisation au temps $t+\Delta t$ compte tenu de leurs valeurs au temps t .

Dans notre cas, on se propose de discrétiser les équations (12) et (15) dans l'espace x , t de trois manières: une discrétisation arrière, centrée et avancée. Soit Δx le pas d'espace, les solutions seront calculées successivement à un pas de temps supérieur. Alors, en utilisant comme exemple un schéma aux différences avec une discrétisation avancée, les équations précédentes peuvent être résolues en tout point i et en tout temps $t+\Delta t$ comme suit:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial P^2}{\partial x} = \frac{(P^2)_{i+1}^t - (P^2)_i^t}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{M_i^{t+\Delta t} - M_i^t}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{M_{i+1}^t - M_i^t}{\Delta x}$$

où l'indice i indique le point de maillage le long de la direction x et t indique la valeur du paramètre au temps précédent. Les coefficients qui contiennent la pression P et le débit massique M , dans l'équation (15), peuvent être moyennés de la manière suivante :

$$P = \frac{P^t_i + P^t_{i+1}}{2}$$

$$M = \frac{M^t_i + M^t_{i+1}}{2}$$

Ainsi les équations (12) et (15) peuvent être linéarisées en utilisant les schémas précédents. En résolvant pour $P_i^{t+\Delta t}$ et $M_i^{t+\Delta t}$ on obtient:

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{C^2}{S} [M^t_{i+1} - M^t_i] \quad (16)$$

$$M_i^{t+\Delta t} = M_i^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{S}{P_i^t + P^t_{i+1}} \right) x$$

$$\left((P^t)^2_{i+1} - (P^t)^2_i \right) - \frac{Sg \Delta t}{2 (P^t_i + P^t_{i+1}) C^2} \sin \alpha \quad (17)$$

$$- f_g \frac{C^2 \Delta t}{4 DS (P^t_i + P^t_{i+1})} x$$

$$\left[(M^t_i + M^t_{i+1}) |M^t_i + M^t_{i+1}| \right]$$

Cette méthode est rapide d'exécution parce qu'elle requiert moins de temps de calcul que les méthodes implicites ; par contre elle est sujette à des instabilités pour beaucoup d'exemples d'application. Pour ces raisons et aussi à cause des erreurs résultant de l'utilisation des schémas explicites, nous proposons de l'utiliser conjointement avec la méthode des caractéristiques. Les conditions aux limites ont fait l'objet d'une résolution des équations par la méthode des caractéristiques (annexe B).

Dans cet exemple, le choix d'un schéma aux différences simple pour les points intérieurs et de la méthode des caractéristiques pour les conditions aux limites répond essentiellement au besoin de minimiser le temps de calcul.

4. CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

Les conditions initiales et aux limites, correspondant aux conditions opératoires de l'exemple considéré, doivent être spécifiées afin d'obtenir une solution appréciable du système d'équations (1), (2) et (12), (15). Les conditions initiales concernent la densité et la vitesse d'écoulement du gaz pour les écoulements rapides (premier exemple de calcul) et la pression et le débit massique (pour le deuxième exemple de calcul) comme fonction de la distance x le long du pipeline. Les conditions aux limites doivent être aussi spécifiées afin d'obtenir une solution unique. Dans cette partie, les conditions initiales sont données respectivement par la relation (8).

4.1. Conditions aux limites pour les écoulements rapides

Des conditions aux limites sont associées aux extrémités de la canalisation, compte tenu des conditions de fonctionnement. Dans notre exemple d'application, il s'agit d'un débit de gaz constant (ou dont la variation est connue en fonction du temps à l'entrée de la conduite) pour une densité (ou une pression) constante à la sortie. Les deux inconnues sont donc la densité (ou la pression) à l'entrée et la vitesse (ou le débit) à la sortie. Il est proposé dans cette étude de traiter les équations correspondant à ces deux conditions par la méthode des caractéristiques et une technique dite « upwind ». La première convertit les équations aux dérivées partielles (1) et (2) en un système d'équations aux différentielles ordinaires. L'interprétation physique de cette transformation est que les ondes circulent dans la conduite avec une célérité C donnée par la relation (4), propageant ainsi les effets des conditions initiales et

aux limites. La théorie des caractéristiques est généralement utilisée pour suivre le développement des ondes précitées (annexeA). Les équations de compatibilité issues de cette transformation donnent alors :

$$dP \pm \rho_g C dV \pm \rho_g C \frac{f_g |V| V}{2D} dt \pm \rho_g g C \sin \theta dt \quad (18a)$$

Une procédure de calcul pour obtenir P et V avec un incrément de temps Δt et un pas d'espace Δx constant est nécessaire. L'intégration des relations (A14) et (A15) de l'annexe A donne :

$$V_{N+1}^{t+\Delta t} - V_N^t + (1/\rho_g C)_N^t (P_{N+1}^{t+\Delta t} - P_N^t) + f_g \cdot \Delta t \cdot V_N^t |V_N^t| / 2 / D = 0 \quad (18b)$$

$$V_1^{t+\Delta t} - V_2^t - (1/\rho_g C)_2^t (P_1^{t+\Delta t} - P_2^t) - f_g \cdot \Delta t \cdot V_2^t |V_2^t| / 2 / D = 0 \quad (18c)$$

Les valeurs des paramètres au temps précédent sont interpolées linéairement entre les points du maillage 2 et 1 pour (18b) et N+1 et N pour (18c).

La seconde technique est basée sur une différentiation « upwind » de la relation (1) aux extrémités. Pour cela nous avons considéré les relations déduites des travaux de Zhou and Awedumi [14]:

$$\begin{aligned}
(\rho_g)_1^{t+\Delta t} &= (\rho_g)_1^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_1^t - m_2^t \right) \frac{1 - \frac{m_1^t}{C(\rho_g)_1^n}}{1 + \frac{m_1^t}{C(\rho_g)_1^t}} - \\
&\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_1^t - m_2^n \right) \left(\frac{m_1^t}{(\rho_g)_1^n} - C \right) + \frac{m_1^{t+\Delta t} - m_1^t}{C + \frac{m_1^t}{(\rho_g)_1^t}} + \\
&\frac{f_g m_1^t \left| m_1^t \right| \Delta t}{2D (\rho_g)_1^t \left(C + \frac{m_1^t}{(\rho_g)_1^t} \right)}
\end{aligned} \tag{18d}$$

$$\begin{aligned}
(\rho_g)_{n+1}^{t+\Delta t} &= (\rho_g)_{n+1}^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{n+1}^t - m_n^t \right) \frac{1 + \frac{m_{n+1}^t}{C(\rho_g)_{n+1}^t}}{1 - \frac{m_{n+1}^t}{C(\rho_g)_{n+1}^t}} - \\
&\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{n+1}^t - m_n^t \right) \left(\frac{m_{n+1}^t}{(\rho_g)_{n+1}^t} + C \right) - \frac{m_{n+1}^{t+\Delta t} - m_{n+1}^t}{C + \frac{m_{n+1}^t}{(\rho_g)_{n+1}^t}} - \\
&\frac{f_g m_{n+1}^t \left| m_{n+1}^t \right| \Delta t}{2D (\rho_g)_{n+1}^t \left(C - \frac{m_{n+1}^t}{(\rho_g)_{n+1}^t} \right)}
\end{aligned} \tag{18e}$$

4.2. Conditions aux limites pour les écoulements lents.

Pour les raisons invoquées dans la section 3.2, ce schéma explicite est rarement utilisé. Néanmoins il est possible, afin de prévenir les instabilités qui en découleraient, d'utiliser la théorie des caractéristiques pour déduire des équations (12) et (13) les équations correspondant aux extrémités de la canalisation. Alors, réécrivant ces équations en omettant le terme d'inertie, les équations de compatibilité correspondantes sont (annexe B):

$$\alpha \frac{C}{A} (M_i^{t+\Delta t} - M_{i\pm 1}^t) \pm (P_{i\pm 1}^t \pm P_i^{t+\Delta t}) + f_g \frac{C^2 \Delta x}{DS (P_i^{t+\Delta t} + P_{i\pm 1}^t)} X$$

$$\frac{e^s - 1}{s} \left(\frac{M_i^{t+\Delta t} + M_{i\pm 1}^t}{2} \left| \frac{M_i^{t+\Delta t} + M_{i\pm 1}^t}{2} \right| \right) + \frac{(P_i^{t+\Delta t})^2}{P_i^{t+\Delta t} + P_{i\pm 1}^t} (e^s - 1) = 0 \quad (19)$$

Où: $s = (2g\Delta x \sin \theta) / C^2$

Le paramètre α , appelé multiplicateur d'inertie, a été introduit par Yow [15] dans l'équation du mouvement du gaz. Se basant sur un exemple de consommation de gaz à l'extrémité aval de la conduite, sous forme sinusoïdale, le calcul des valeurs de ce multiplicateur a donné des résultats satisfaisants en comparaison avec les méthodes exactes de calcul. Sa procédure a permis aussi de déterminer l'erreur de discrétisation pour le problème considéré. De plus, une évaluation du second ordre est appliquée pour le terme de frottement de l'équation (19) en moyennant linéairement le débit massique. Une procédure itérative de Newton-Raphson est utilisée afin de déterminer les inconnues P et

M aux extrémités de la canalisation pour le temps $t+\Delta t$. Les signes + et - correspondent respectivement aux conditions de sortie et d'entrée de la conduite. Dans notre application, le multiplicateur d'inertie à été calculé par une méthode simple et pratique (Wylie & Streeter [1], annexe B).

5. RESULTATS ET DISCUSSION

Deux exemples pratiques correspondant aux écoulements rapides et lents de gaz dans les canalisations sont simulés en utilisant les schémas numériques précités. Les conditions aux limites respectives sont traitées par la méthode des caractéristiques sans pour cela changer la forme et la désignation des inconnues considérées.

Le premier exemple considère le transport de gaz dans une conduite relativement courte où le mouvement transitoire du fluide à été initié par une pression variable à l'entrée du pipeline. Cet écoulement à été simulé en utilisant le schéma prédicteur-correcteur précité. Cet exemple a été considéré dans les travaux de Wylie and Al [2], Rachford and Dupond [4] et Zhou and Adewumi [14] dans lesquels ont été utilisés respectivement, la méthode des caractéristiques, les méthodes variationnelles, le schéma explicite du premier ordre à trois points de Gudonov et un schéma du deuxième ordre à cinq points TVD pour le terme source, pour résoudre les systèmes d'équations correspondants.

Une conduite de 99.44 m de long et de 0.609 m de diamètre avec une répartition initiale de pression de $41.368 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ pour une extrémité aval fermée a été considérée. Au temps zéro la pression à l'entrée ($P_1^{t+\Delta t} = 0$) commence à augmenter linéairement pour atteindre une valeur de $41.368 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ au temps 0.145 secondes, puis décroît linéairement vers la valeur zéro au temps 0.29 secondes. Elle revient à son niveau initial et le demeure pour le reste

du temps de simulation, l'extrémité avale étant fermée ($V_{N+1}^{t+\Delta t} = 0$). Afin de simuler cet écoulement le schéma prédicteur-correcteur, ainsi que celui déduit des équations de compatibilité (méthode des caractéristiques), font l'objet d'un même incrément de temps Δt pour lequel nous avons imposé le critère de stabilité de Courant, Friedrichs and Lewy (Wylie & Streeter [1]).

L'utilisation des schémas (10) et (11) pour résoudre le système d'équations (9) a permis de tracer sur la figure 1 l'évolution, en fonction du temps, du débit massique du gaz au point situé au milieu de la canalisation ($0.5*L$). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des auteurs référencés [2] et [14] où une bonne adéquation peut être remarquée. Le front d'onde initié a été résorbé en 0.8 secondes. Le comportement du débit massique du gaz au point milieu de la conduite est le résultat de la réflexion de l'onde de pression par l'extrémité aval.

La figure 2 montre la variation de la pression à l'entrée de l'ouvrage ($x/L=0$) où la comparaison de nos résultats avec les mêmes auteurs que sur la figure précédente permet de noter que la durée du pic de pression correspond de manière exacte et que les résultats semblent très satisfaisants.

Sur la figure 3, l'évolution de la pression a été reproduite durant un temps de 2.4 secondes avec une précision relativement bonne. Cependant l'amplitude de la pression semble plus se rapprocher de celle obtenue par la méthode des caractéristiques. Les petites différences observées avec les autres méthodes peuvent être dues aux simplifications introduites par Zhou and Adewumi [14] (par exemple la valeur du coefficient de pertes de charge).

La figure 4 permet de comparer, pour une variation de la pression au point aval de pipeline ($x/L=1$), nos résultats avec ceux des auteurs précités où l'on peut remarquer à nouveau une bonne adéquation.

Afin de mener une vérification complète de la validité des schémas aux différences utilisés, une évolution de la pression pour un temps de 24 secondes à été calculée (figure 5). On peut observer que notre procédure ne cause aucun amortissement ou autres effets indésirables. Le signal est reproduit de façon relativement fidèle en comparaison avec les autres procédures. Finalement, la transformation introduite dans le schéma classique de Lax-Friedricks n'a pas produit un quelconque amortissement ou instabilité.

Le deuxième exemple de calcul considère un écoulement transitoire lent d'une durée de 30 minutes dans une conduite de 1930 m de long et de 0.365 m de diamètre, à l'extrémité de laquelle une évolution sinusoïdale de la consommation de gaz est initiée (figure 6). La procédure de calcul du pas d'espace Δx et du multiplicateur d'inertie α est inspirée des travaux de Yow [13] (annexe B). La forme sinusoïdale de la condition limite aval est donnée par l'expression suivante :

$$M(t) = M_0 + \Delta M \sin(\omega t) \quad (20)$$

où le débit massique initial est $M_0 = 20 \text{ Kg/s}$, t le temps en minutes et ω la fréquence en rad/s.

Pour cet exemple Yow [13] a comparé la solution analytique (solution exacte) pour un système d'équations équivalent à (12) et (14) (où $\Delta x = L/10$ et $\alpha = 1$) avec celle obtenue en utilisant des relations similaires à (19). Dans son exemple, deux valeurs de α (3 and 8) ont été testées.

La figure 7 montre la variation du débit massique du gaz à l'entrée de la canalisation. Les résultats numériques sont obtenus avec l'utilisation des équations (16) et (17) pour les points intérieurs du maillage et (19) pour les points correspondant aux conditions aux limites, en comparaison avec les résultats obtenus par cet auteur ([13]). On remarque une adéquation satisfaisante entre eux, signifiant ainsi que notre modèle reproduit de façon fidèle, c'est-à-dire

sans aucune sorte d'instabilité ou atténuation, la perturbation qui se propage le long de la canalisation .

L'évolution de la pression à la sortie de la conduite est montrée sur la figure 8. Les courbes tracées semblent plus proches de la solution analytique que des résultats obtenus par Yow ([13]). Globalement la correspondance entre les courbes est satisfaisante. Ainsi les modèles numériques proposés dans cette partie, pour résoudre les équations qui décrivent le mouvement lent du gaz dans les pipelines, sans simplification majeure et avec une programmation simple et économique du point de vue temps de calcul, ont produit des résultats globalement satisfaisants et comparables aux schémas aux différences récents.

6. CONCLUSION

Les techniques numériques présentées dans cette première étude permettent de simuler la propagation des perturbations de la pression (ou du débit) de gaz à partir d'une extrémité d'un pipeline de manière satisfaisante. Nous avons montré que l'utilisation d'un schéma aux différences à deux pas de temps peut conduire à une programmation très simple des phénomènes considérés et une réduction du temps de calcul. De plus l'absence d'instabilités ou autres phénomènes d'atténuation font que ces modèles affichent une précision comparable aux récents schémas dits de haute résolution dont l'écriture est généralement plus sophistiquée, particulièrement dans le cas de réseaux de canalisations.

7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Wylie, E.B., and Streeter, V.L., *Fluid transients*, pp. 271-280; Mc Graw Hill, New York 1969 .
2. Wylie, E.B., Stoner, M.A., and Streeter, V.L., Network system transient calculation by implicit methods, *SPEJ* (Dec. 1971).

3. Streeter, V.L., and Wylie, E.B., Natural gas pipeline transients, *SPEJ* (Dec.1969), pp- 357-364 .
4. Racheford, H.H., and Dupond T., A fast High Accurate Means of Modeling Transient Flow in Gas Pipeline Systems by Variational Methods, *SPEJ*, (April 1974).
5. Leveque, R.J., and Yee, H.C., A study of Numerical Methods for Hyperbolic conservation laws with stiff source terms , *J. Comp. Phys.* (1990), 86, 187-210.
6. Wylie, E.B, Streeter, V.L. and Stiner, M.A., Unsteady state Natural gas calculations in complex piping systems , *SPEJ* (Fevr.1974) .
7. Racheford, H.H, and Dupond T., Some application of transient flow simulation to promote understanding the performance gas pipeline systems, *SPEJ* (April 1974) .
8. Harten ,A., High resolution Schemes for hyperbolic Conservation Laws. *J. Comp. Phys.* (1983), 49 .
9. Zhou, Junyang and Adewumi, M.A., The development and testing of a new flow equations, Proc. 1995 pipeline Simulation Interest Group 27trh Annual Meeting, Albuquerque, N.M, Oct. ,19-20 .
10. Sod, G.A., A survey of several finite Difference Methods Systems of Nonlinear Conservation Laws , *J.Comp. Phys.* (1978) , 27 , 1-35 .

11. Warren ,M.D., Open-en Outflow Boundary Approximations for the Solution of the Equations of Unsteady One-dimensional Gas Flow by the Lax-Wendroff Method. *Int. J. Heat & Fluid Flow*, Vol 5, N° 1, March 1984 .
12. Hirsch, C., Numerical Computation of Internal and External Flows; pp. 224-240; Vol 2. Ed. John Wiley & Sons, 1997.
13. Yow, W., Numerical error in natural gas transient calculations, *ASME Trans. J.of Fluids Eng.* (June 1972) 94(2), 422-428 .
14. Juanyang Zou and Adewumi, M.A., Simulation of Transients in Natural Gas pipelines, *SPEJ* (Nov. 1996), 202-208 .

NOMENCLATURE

- A section transversale de la conduite ou vecteur
- C vitesse du son isotherme
- d diamètre du pipeline
- fg facteur de friction du gaz
- F vecteur flux dans l'équation (5)
- g accélération de la pesanteur
- l longueur (relation (8))
- m flux massique de gaz
- M débit massique de gaz
- μ_g poids moléculaire du gaz
- P pression
- R constante universelle des gaz
- t temps
- T température absolue du gaz
- V vitesse du gaz

x coordonnée axiale, L
 Z facteur de compressibilité
 z dénivelée
 ω fréquence
 ρ_g densité du gaz
 ρ_{gi} densité à l'entrée
 Δt incrément de temps
 Δx pas d'espace
 θ angle d'inclinaison du pipeline

indices :

i entrée, point courant, nœud
 g gaz

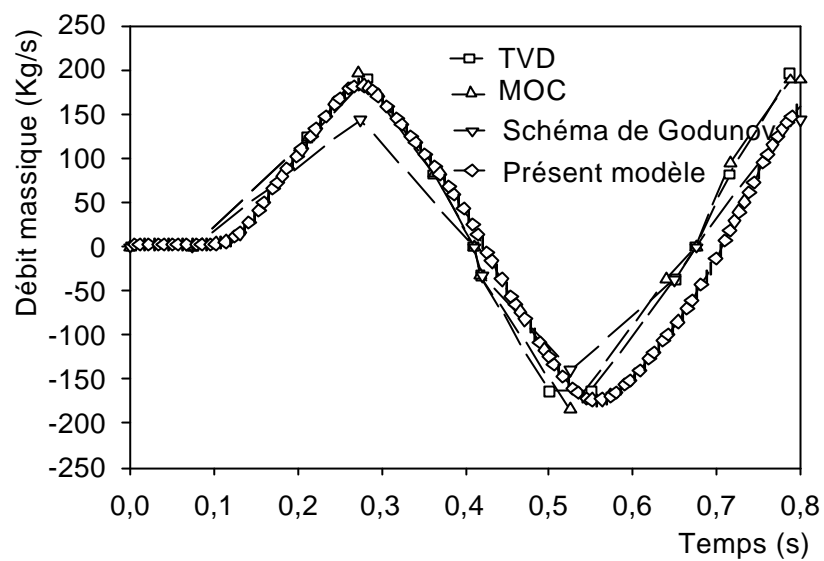


Fig. 1. Variation du débit au point $x=0.5L$

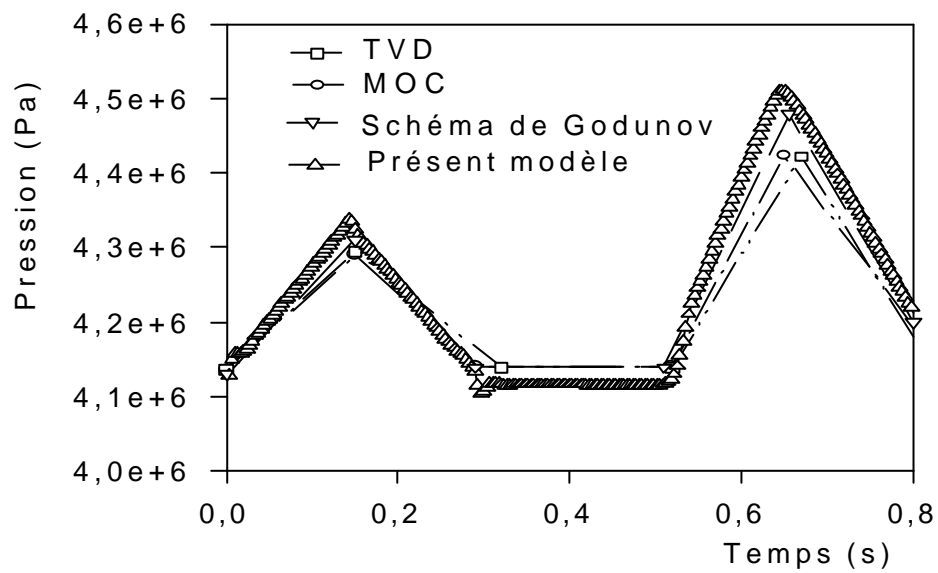


Fig. 2. Pression à l'entrée de la conduite.

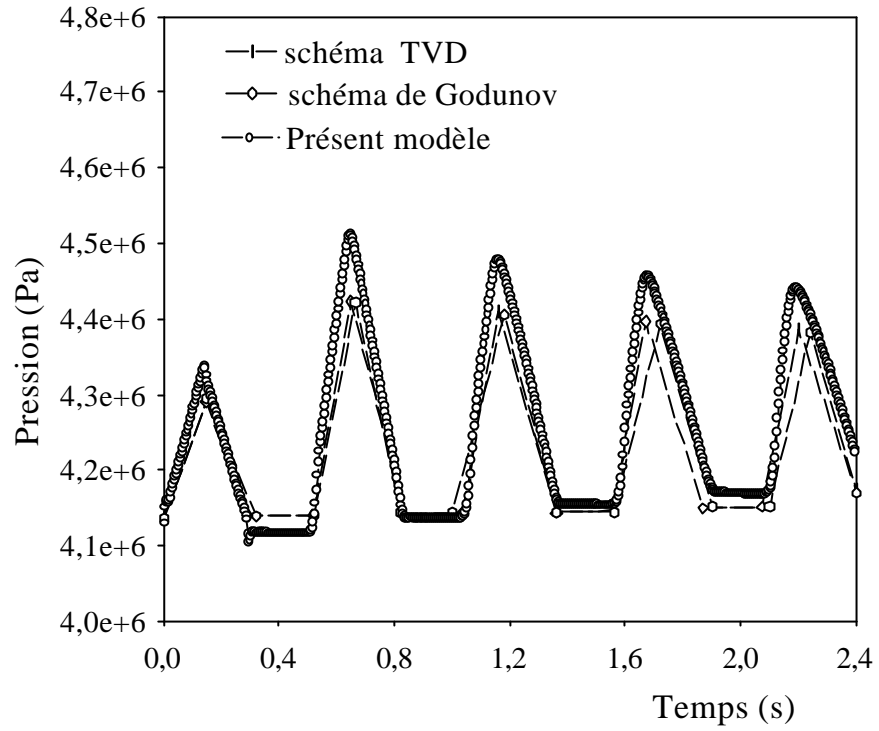


Figure 3. Pression à l'entrée de la conduite.

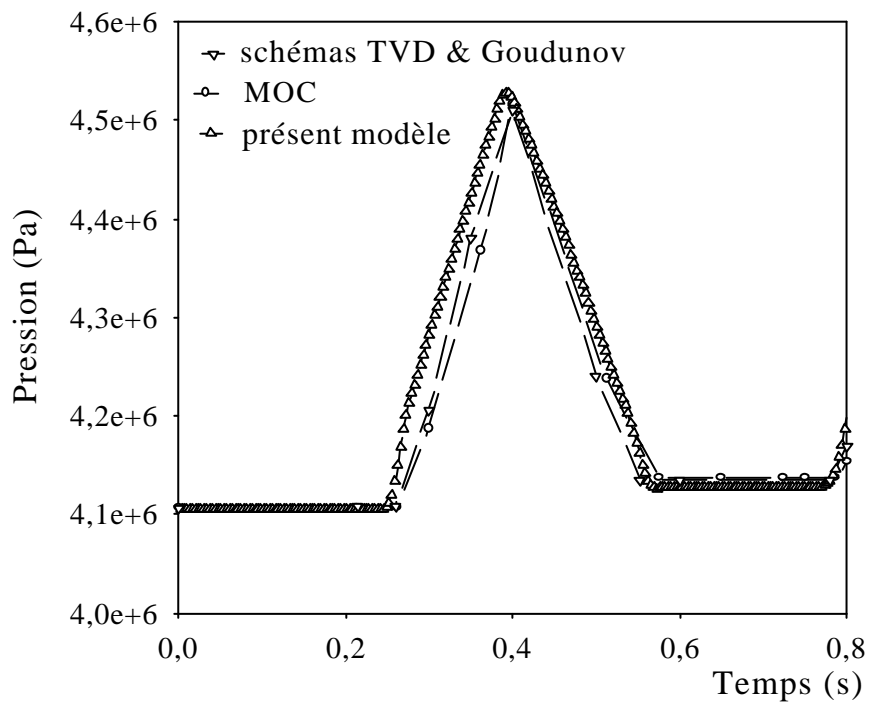


Figure 4. Ecoulement subcritique: pression à la sortie du pipeline.

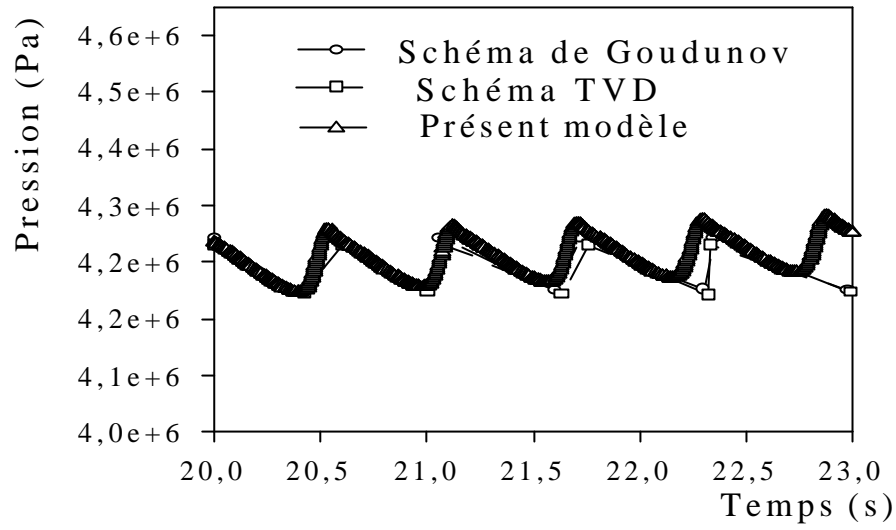


Figure 5. Pression à l'entrée de la conduite.

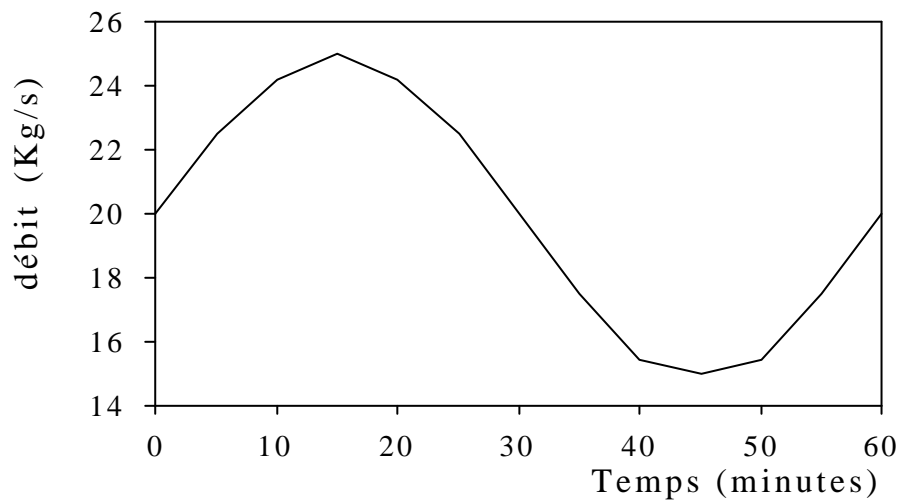


Figure 6. Variation du débit au point aval du pipeline.

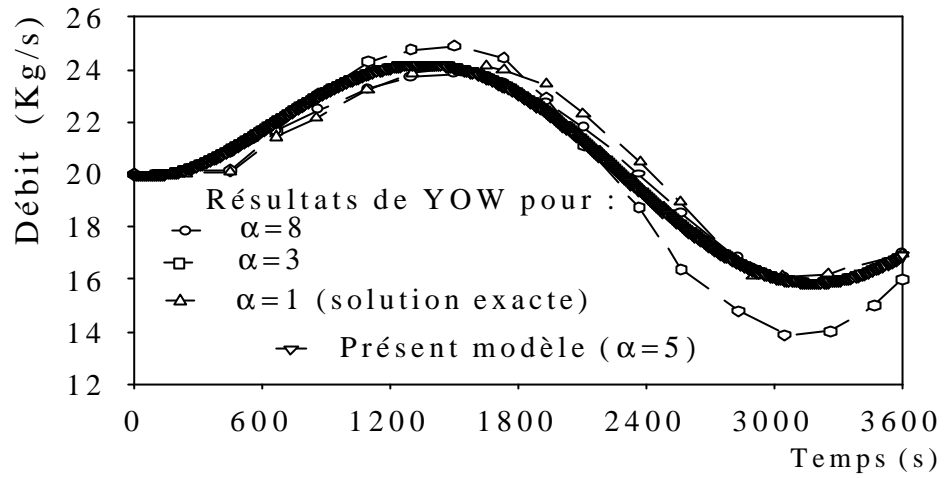


Figure 7. Variation du débit à l'entrée du pipeline.

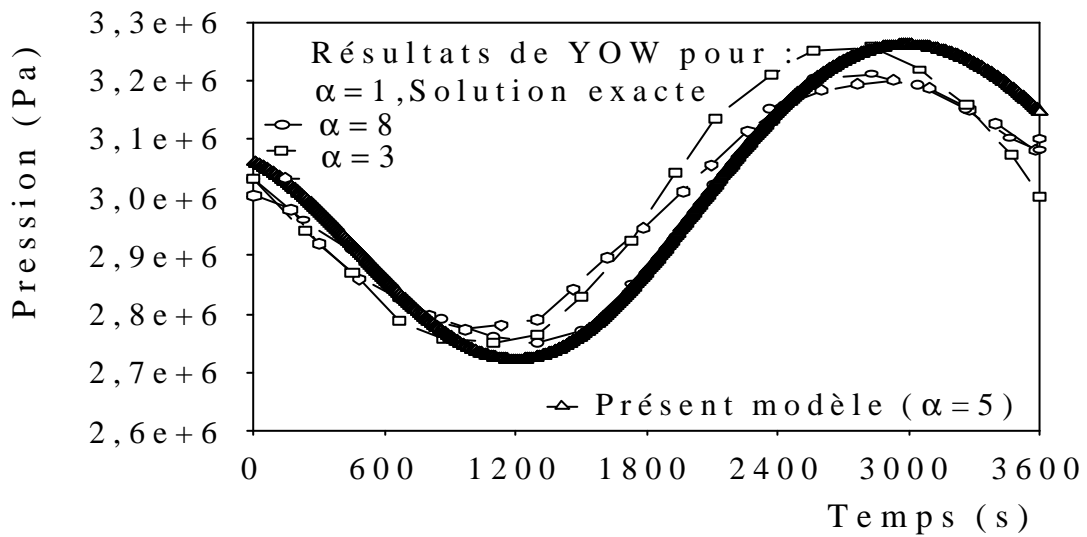


Figure 8. Evolution de la pression à la sortie du pipeline.

**APPLICATION D'UN SCHEMA EXPLICITE DE TYPE
LAMBDA POUR UNE SIMULATION NUMERIQUE DES
ECOULEMENTS NON STATIONNAIRES DE GAZ DANS
LES CONDUITES SANS ET AVEC VARIATION DE
DIAMETRE**

1. INTRODUCTION

Dans une période relativement récente des chercheurs tels que Moretti [1] et Zannetti & Colasurdo [2], ont développé une vieille idée dont l'exploitation a permis d'obtenir un schéma aux différences très attractif du point de vue mathématique et doté d'utilités très intéressantes. Les équations de compatibilité, correspondant aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un fluide compressible, sont transformées en un schéma aux différences de type prédicteur-correcteur de type Λ . Ce schéma peut se présenter sous une forme explicite ou implicite (Moretti [1] et Danone and Napolitano [3]). Son application dépend de la nature du problème considéré.

Certaines qualités et avantages de ces schémas ont été remarqués et expliqués par Moretti [1], particulièrement leur capacité de prise en compte directe des écoulements au niveau des singularités sans pour cela faire appel à une quelconque technique de traitement des discontinuités.

Un autre avantage important de ces schémas est celui se rapportant au concept de « condition aux limites auto-réfléchissante » (Moretti [4]): L'utilisation de la forme caractéristique des équations qui décrivent les écoulements aux extrémités permet d'éviter la méthode de la technique dite de réflexion.

Ainsi, en considérant une forme explicite de ces schémas, Gabutti [5] a étudié les propriétés numériques de cette dernière. Il a vérifié sa stabilité qu'il trouve plus attractive que celle des schémas classiques (de la famille des schémas de Lax-Wendroff).

Nous proposons de réaliser dans cette deuxième étude quelques applications du précédent schéma en le reprenant sous la forme qui convient aux exemples considérés. Alors, compte tenu de la nature des régimes transitoires existants dans les conduites courtes, nous proposons une méthode de résolution efficace et

pratique des équations de conservation de la masse et l'équation de de la quantité de mouvement du gaz, l'évolution de l'écoulement étant supposée isotherme et la paroi de la conduite rigide. Pour les pertes de charges nous avons utilisé les corrélations courantes du régime permanent

2. DEVELOPPEMENT DU MODELE MATHEMATIQUE

Si nous considérons une conduite de section géométriquement variable, l'équation de continuité telle que développée dans l'étude précédente peut s'écrire:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g V) = -\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x}(\rho_g V) \quad (1)$$

L'équation de la quantité de mouvement dans le cas d'un écoulement isotherme s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g VS) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g V^2 S + PS) = -P \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{f_g \rho_g V |V|}{2D} - \rho_g g \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2)$$

L'équation d'état pour le gaz s'écrit :

$$P = \rho_g \frac{ZRT}{\mu} \quad (3)$$

et compte tenu des conditions isothermes de fonctionnement, la vitesse de propagation des ondes devient :

$$C = \left(\frac{ZRT}{\mu_g} \right)^{0.5} \quad (4)$$

Le but de cette étude consiste à reformuler de manière appropriée les équations précédentes pour des applications pratiques d'écoulement de gaz.

Nous reprendrons, pour le calcul des conditions du régime permanent la même démarche que dans la partie précédente, à savoir une forme implicite de la variation longitudinale de la pression dans la canalisation (relation de l'étude précédente).

Dans l'étude précédente, deux applications ont été réalisées pour les cas d'un écoulement rapide et lent de gaz dans une canalisation, en utilisant pour cela deux schémas aux différences explicites (Kessal [6]). Dans cette deuxième étude un schéma explicite de type Lambda est appliqué pour le premier exemple.

3. SCHEMA NUMERIQUE

En utilisant la méthode des caractéristiques pour convertir le système d'équations aux dérivées partielles (1) et (2) en un système différentiel ordinaire (Lister [7]), l'interprétation physique de cette transformation montre que les ondes de pression traversent la conduite avec une célérité, donnée par la relation (4), propageant ainsi la perturbation initiée à l'extrémité du conduit. Cette théorie est généralement utilisée pour suivre le développement des ondes de pression dans les fluides (annexe A). Ainsi les équations différentielles issues de la transformation précédente s'écrivent :

$$\frac{1}{\rho_g C} \frac{dP}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{f_g}{2D} V|V| + g \frac{dz}{dx} + \frac{CV}{S} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho_g C} \frac{dP}{dt} - \frac{dV}{dt} - \frac{f_g}{2D} V|V| - g \frac{dz}{dx} + \frac{CV}{S} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (10)$$

Ces équations sont associées aux directions caractéristiques dont les pentes dans un plan x, t sont données par les relations suivantes :

$$\lambda^+ = \frac{dx}{dt} = V + C \quad (11)$$

$$\lambda^- = \frac{dx}{dt} = V - C \quad (12)$$

L'obtention d'un schéma de type Lambda à partir des équations précédentes requiert les transformations qui suivent.

Utilisant les relations (11) and (12) les équations (9) and (10) prennent la forme :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial P^+}{\partial x} \right] + \rho_g C \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial V^+}{\partial x} \right] + \rho_g C \frac{f}{2D} V |V| + \frac{\rho_g C^2 V}{S} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (13)$$

et

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial P^+}{\partial x} \right] - \rho_g C \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial V^+}{\partial x} \right] - \rho_g C \frac{f}{2D} V |V| + \frac{\rho_g C^2 V}{S} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (14)$$

La sommation de ces deux équations nous donne après simplification :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + 0.5 \left[\lambda^+ \frac{\partial P^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial P^-}{\partial x} \right] + 0.5 \rho_g C \left[\lambda^+ \frac{\partial V^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial V^-}{\partial x} \right] + \frac{2 \rho_g C^2 V}{S} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (15)$$

En soustrayant l'équation (13) de l'équation (14) et après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + 0.5 \left[\lambda^+ \frac{\partial V^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial V^-}{\partial x} \right] + \\ & \frac{0.5}{\rho_g a} \left[\lambda^+ \frac{\partial P^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial P^-}{\partial x} \right] + \frac{f}{2D} V |V| = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Les équations (15) et (16) sont sous une forme dite Lambda. Il faut noter que les indices + et - indiquent les directions caractéristiques le long desquelles les dérivées sont approximées. Les paramètres prédits V_i^* and P_i^* peuvent être obtenus par la substitution des approximations aux différences finies dans les équations (15) and (16):

$$\begin{aligned} P_i^* = & P_i^j - 0.5 \Delta t \left[\lambda^+ \frac{\partial P^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial P^-}{\partial x} \right] - \\ & 0.5 \rho_g C \Delta t \left[\lambda^+ \frac{\partial V^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial V^-}{\partial x} \right] + \frac{2 \rho_g C^2 V}{S} \Delta t \frac{dS}{dx} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V_i^* = & V_i^j - 0.5 \Delta t \left[\lambda^+ \frac{\partial V^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial V^-}{\partial x} \right] - \\ & \frac{0.5 \Delta t}{\rho_g C} \left[\lambda^+ \frac{\partial P^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial P^-}{\partial x} \right] - R V_i^j |V_i^j| \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{Où: } R = \frac{f_g \Delta t}{2D}$$

Ainsi, le schéma prédicteur-correcteur appliqué à notre système d'équations est donné par la procédure suivante (inspirée des travaux de Gabutti [5]).

Les dérivées en x dans les équations (17) et (18) sont approximées de la manière suivante :

Prédicteur:

Première partie:

$$\frac{\partial F^+}{\partial x} = \frac{F_i^j - F_{i-1}^j}{\Delta x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial F^-}{\partial x} = \frac{F_{i+1}^j - F_i^j}{\Delta x} \quad (20)$$

En remplaçant les opérateurs précédents dans les équations (17) et (18) on obtient les valeurs prédites de la vitesse et de la pression V_i^* et P_i^* respectivement.

Deuxième partie.

Les valeurs prédites des dérivées locales $\frac{\partial P^*}{\partial t}$ et $\frac{\partial V^*}{\partial t}$ des équations (15) et (16) sont calculées en utilisant les approximations aux différences suivantes :

$$\frac{\partial F^+}{\partial x} = \frac{2F_i^j - 3F_{i-1}^j + F_{i-2}^j}{\Delta x} \quad (21)$$

$$\frac{\partial F^-}{\partial x} = \frac{-2F_i^j + 3F_{i+1}^j - F_{i+2}^j}{\Delta x} \quad (22)$$

Partie correcteur:

Considérant les approximations aux différences suivantes et en utilisant V^* et P^* au lieu de V et P dans les équations (15) et (16), les valeurs corrigées des dérivées locales $\frac{\partial P}{\partial t}$ et $\frac{\partial V}{\partial t}$ peuvent être obtenues.

$$\frac{\partial F^+}{\partial x} = \frac{F_i^* - F_{i-1}^*}{\Delta x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial F^-}{\partial x} = \frac{F_{i+1}^* - F_i^*}{\Delta x} \quad (24)$$

Finally, the values of P and V at a next time level, are determined by the following equations:

$$P_i^{j+1} = P_i^j + 0.5 \Delta t \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (25)$$

$$V_i^{j+1} = V_i^j + 0.5 \Delta t \left(\frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (26)$$

It can be noted that the previous discretization is only possible at nodes 3, 4, ..., N-1 as can be seen in the second part of the predictor scheme. The nodes adjacent to the boundaries are treated differently. For this we used a staggered approximation for nodes 2 and N.

Note that in the works of Gabutti [5], a two-point finite difference approximation was used for the nodes adjacent to the boundaries. In this study, the time interval of calculation was chosen to satisfy the stability criterion at all points of the mesh. This interval can be reduced in certain examples of gas dynamics calculation.

4. INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS

The initial and boundary conditions of the system of equations (1) and (2) must be specified in order to obtain a meaningful solution. The

conditions initiales de ces systèmes sont requises afin de déterminer la pression et la vitesse initiales comme fonction des positions x le long de la canalisation. Dans cette étude, la relation (8) donne la répartition de la pression le long de la conduite. Les conditions aux limites doivent être aussi spécifiées afin d'obtenir une solution unique au problème. Elles dépendent des exemples pratiques considérés. Dans notre cas il est proposé un traitement numérique des équations qui décrivent les conditions aux limites par la méthode des caractéristiques (annexe A).

Ainsi l'intégration des équations (9) et (10) le long des droites caractéristiques de pente positive et négative (équations (11) et (12)) nous donnent les équations aux différences suivantes (annexe A):

$$V_i^{j+1} - V_{i-1}^j + (1/\rho_g C)_{i-1}^j (P_i^{j+1} - P_{i-1}^j) + RV_{i-1}^j |V_{i-1}^j| = 0 \quad (27)$$

$$V_i^{j+1} - V_{i+1}^j - (1/\rho_g C)_{i+1}^j (P_i^{j+1} - P_{i+1}^j) + RV_{i+1}^j |V_{i+1}^j| = 0 \quad (28)$$

Une procédure de calcul qui permet d'obtenir P ou V est nécessaire en considérant un incrément de temps Δt et un pas d'espace Δx constants. Les valeurs des paramètres du fluide sont calculées à partir de leurs valeurs aux points du maillage $i-1$, i et $i+1$. Ce choix est fait compte tenu du critère de stabilité suivant :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a + |V|} \quad (29)$$

5. RESULTATS ET DISCUSSION

Deux exemples pratiques d'écoulement subcritique de gaz dans les canalisations et de particularités différentes, ont fait l'objet d'applications du précédent schéma. Le premier exemple concerne un tube de 0.61 m de diamètre et de 1 m de long rempli de gaz à une pression de 125 kPa et une température de 300 K. L'extrémité de ce conduit est soudainement ouverte à l'atmosphère ambiante de pression 100 kPa (figure 1.).

La distribution de la pression et de la vitesse d'écoulement du gaz ont fait l'objet d'un calcul numérique dont les résultats sont montrés dans les figures suivantes. L'exemple considéré est illustré par la figure 1a où l'extrémité avale est brusquement ouverte pour débiter dans le milieu ambiant. La solution du problème est calculée en négligeant les pertes d'énergie dues au frottement.

Les conditions initiales au temps $t=0$ sont:

Pour $i=1, \dots, N$: $P_i=125\text{kPa}$, $T_i=3000\text{ K}$, $V_i=0$.

Les conditions aux limites sont supposées être:

Pour $i=1$: $P_1=125\text{kPa}$, $T_1=300\text{ K}$, $V_i=0$.

Pour $i=N+1$: $P_{N+1}=100\text{kPa}$.

Pour une simulation numérique de cet écoulement transitoire très rapide, le maillage de calcul considère $\Delta x=0.01$, avec un pas de temps de $\Delta t=3.36 \times 10^{-5}\text{s}$ et un C.F.L=1 (critère [1], C.F.L=($a\Delta t$)/ Δx) a été adopté. La valeur du pas d'espace Δx peut être diminuée afin d'atténuer les instabilités dues au changement brusque du diamètre.

Dans la figure 2 nous montrons les résultats jugés satisfaisants, obtenus par l'utilisation du schéma de type Lambda en comparaison avec la solution exacte. On peut aussi observer que ce schéma produit une précision similaire à celle des schémas de calcul récemment développés (Harten [8]).

. L'onde d'expansion générée par l'ouverture de l'extrémité avale peut être clairement observée. Ces résultats indiquent que le gaz est évacué du tube à une vitesse d'environ 60m/s pour un diamètre constant. Quelques distributions classiques de la pression et de la vitesse d'écoulement sont tracées sur les figures 3 et 4 dans le cas d'un retrécissement de diamètre sur une longueur donnée

Le rapport des diamètres relatif de la figure1b est défini par :

$$E = \frac{D_2}{D_1} \quad (30)$$

où : $D_1=0.61$ m et $D_2=0.38$ m dans la figure1b.

On peut observer sur ces figures que l'effet de la variation de diamètre sur l'évolution de la pression et de la vitesse d'écoulement gaz est très apparent. Néanmoins quelques instabilités de petites amplitudes, introduites par ces singularités, existent. Pour cela un choix d'un pas de l'espace relativement petit peut être requis, afin d'atténuer ces indésirables phénomènes. Mais cela mènerait certainement à temps de calcul plus élevé. Un compromis raisonnable doit donc être trouvé. Cependant sur le plan de la programmation, l'algorithme de calcul ne nécessite pas un traitement particulier des singularités dues au changement de diamètre, comme dans les exemples pratiques qui existent dans la littérature. Comme il a été mentionné par Moretti [1], la bonne adéquation des résultats obtenus n'est pas due à une quelconque vertu (de ce type de schéma) de capture des ondes de choc mais plutôt à sa stabilité qu'il conserve lors des écoulements à travers une singularité.

Le second exemple concerne un écoulement de gaz dans une conduite relativement courte avec une entrée de gaz variant dans le temps. L'écoulement à l'intérieur de la canalisation est simulé par le précédent schéma aux différences. Cet exemple a été considéré dans les travaux de Wylie and Ai [9], Rachford and Dupont [10] et Zhou & Adewumi [11] dans lesquels les solutions ont été obtenues, en utilisant respectivement la méthode des caractéristiques (MOC), les méthodes variationnelles, et, un schéma explicite du premier ordre à trois points de Godunov un schéma explicite de second ordre de type TVD sans terme source.

Une conduite de dimensions similaire à celle utilisée dans la première partie est considérée avec les mêmes conditions initiales et aux limites. Pour la simulation de cet écoulement le schéma aux différences de type Lambda pour les points de maillage intérieurs et les équations aux caractéristiques pour les extrémités adoptent le même pas de temps pour lequel le critère de stabilité doit être satisfait.

Durant les calculs numériques nous avons adopté un maillage de $\Delta x=0.9144$ m, $\Delta t=0.811 \times 10^{-3}$ s et C.F.L=0.312. Ces hypothèses comparées à celles utilisées par les schémas de Godunov et TVD [19], respectivement: $\Delta x=0.9144$ m, $\Delta t=0.09144 \times 10^{-3}$ s et C.F.L=0.0348; $\Delta x=0.9144$ m, $\Delta t=0.9 \times 10^{-3}$ s et C.F.L=0.348, semblent indiquer que le schéma proposé dans cette partie présente de bonnes caractéristiques numériques.

Quelques résultats de calcul sont illustrés par les figures suivantes. La figure 5 illustre l'évolution du débit massique du gaz au point milieu de la canalisation ($x=0.5 \cdot L$), où nos résultats sont comparés avec ceux obtenus par Zhou & Adewumi [11]. Une bonne adéquation peut être observée. Le front d'onde est complètement résorbé au bout de 0.8 s.

La figure 6 montre l'évolution de la pression à l'entrée de la canalisation ($x/L=0$). Les résultats obtenus par le présent modèle sont très satisfaisants en comparaison avec ceux des auteurs précités. Notons ainsi que la durée des pics de pression est pratiquement la même. L'onde de pression est convenablement capturée et le cycle reproduit de manière aussi exacte que celle des schémas dits de haute résolution (schémas TVD par exemple).

Dans la figure 7 les fronts d'onde de pression sont simulés pour un temps de 2.4 secondes. Les résultats obtenus par le schéma aux différences considéré dans cette partie reproduisent de manière relativement fidèle le phénomène, c'est-à-dire sans une perte importante de la précision. Néanmoins de légères différences existent avec les courbes relatives aux travaux de Zhou and Adewumi [11] qui peuvent être liées au choix de la méthode de calcul du coefficient de frottement. Il faut noter que dans cette figure et dans les deux autres qui suivront, une comparaison avec la méthode des caractéristiques (MOC) n'a pas été considérée par cet auteur.

L'évolution de la pression à l'extrémité aval de la canalisation ($x/L=1$), pour un temps de 0.8 secondes, est montrée dans la figure 8. Les résultats semblent satisfaisants et en bon accord avec ceux des précédents auteurs.

Afin de tester l'efficacité de la méthode numérique proposée dans cette partie, une évolution de la pression pour un temps très proche de la fin du phénomène transitoire est considéré. Cette évolution au point $x/L=0$ de la canalisation, telle que montrée dans la figure 9, est satisfaisante en comparaison avec les résultats de la littérature. Ceci indique que le schéma aux différences de type lambda développé dans les sections précédentes est efficace et reproduit de manière exacte le phénomène étudié, c'est-à-dire sans effets indésirables.

6. CONCLUSION

La méthode de calcul présentée dans cette partie permet de simuler de manière satisfaisante la propagation des perturbations de la pression ou de la vitesse initiées à l'une des extrémités de la canalisation. Nous avons montré que le schéma de type Lambda obtenu permet de réduire le temps de calcul et d'éviter les instabilités relatives à certains schémas aux différences. Il présente aussi une formulation simple en comparaison avec les schémas de haute résolution, certes précis et stables, mais plus sophistiqués et plus difficiles à programmer, particulièrement lorsqu'il s'agit d'étudier les réseaux de distribution de gaz. En outre la prise en compte, de façon directe, des singularités qui peuvent survenir ou exister dans les conduits, permet ainsi d'éviter le recours aux conditions de saut pour le traitement des discontinuités. Les résultats obtenus sont de manière globale aussi satisfaisants que ceux issus de l'application de schémas aux différences plus récents.

7. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Moretti, G. The λ -Schemes, *Computers & Fluids*, Vol.7 N°4, pp. 191-205, 1979.
2. Zannetti, L. and Colasurdo, G., Unsteady Compressible Flow: A Computational Method Consistent with the physical Phenomenon, *AIAA Journal*, Vol. 19, July 1981, pp. 951-956.
3. Danone, A. and M. Napolitano, M., An Implicit Lambda Scheme, *AIAA Journal*, Vol. 21 N°10, pp.1391-1399, October 1983.

4. Moretti, G., Importance of Boundary Conditions on the Numerical Treatment of Hyperbolic Equations, *Physics of Fluids*, Supp. II, 1969, pp.13-20.
5. Gabutti, B., On two Upwind Finite-Difference Schemes for Hyperbolic Equations in Non-Conservative Form, *Computers & Fluids*, Vol.11 N°3, pp. 207-230, 1983.
6. Kessal, M., Simplified Numerical Simulation of Transients in Gas Networks, accepted for publication in *Chem. Eng. Res. Des.* 2000.
7. Lister, M., The Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations By the Method of Characteristics, in Ralston, A., and Wilf, H.S., Eds, *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, New York, 1960, pp. 165-179.
8. Harten ,A., High resolution Schemes for hyperbolic Conservation Laws,. *J. Comp. Phys.* (1983) , **49**, pp. 357-392.
9. Wylie, E.B, Streeter, V.L. and Stiner, M.A., Unsteady state Natural gas calculations in complex piping systems, *SPEJ* (Fevr.1974).
10. Rachford, H.H., and Dupont T., A fast Highly Accurate Means of Modelling Transient Flow in Gas Pipeline Systems By Variational Methods, *SPEJ*, (April 1974), pp. 165-178.
11. Zou Juanyang and Adewumi, M.A., Simulation of Transients in Natural Gas pipelines, *SPEJ* (Nov.1996), pp. 202-208 .

NOMENCLATURE

S	section transversale de la conduite, vecteur
a	vitesse du son
D	diamètre de la conduite
f _g	facteur de friction du gaz
g	accélération de la pesanteur
N	nombre de points du maillage
μ	masse moléculaire
P	pression
R	constante universelle des gaz ou $R = \frac{f_g \Delta t}{2D}$
t	temps
l, L	longueur
T	température absolue du gaz
V	vitesse du gaz
x	coordonnée axiale, L
Z	facteur de compressibilité or élévation
ρ	densité du gaz
ρ _i	densité du gaz à l'entrée
Δt	pas de temps
Δx	pas d'espace

Indices

g	gaz
i	entrée, nœud

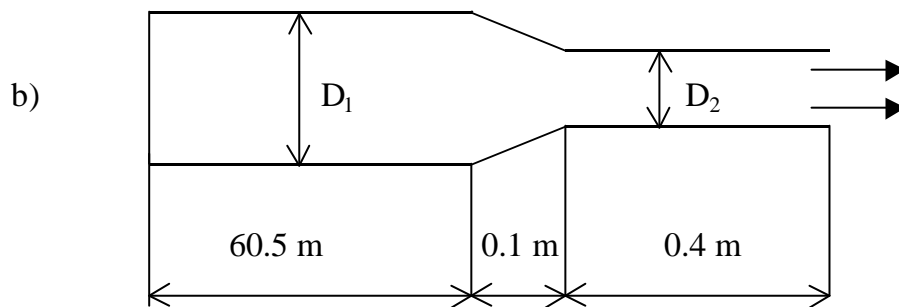
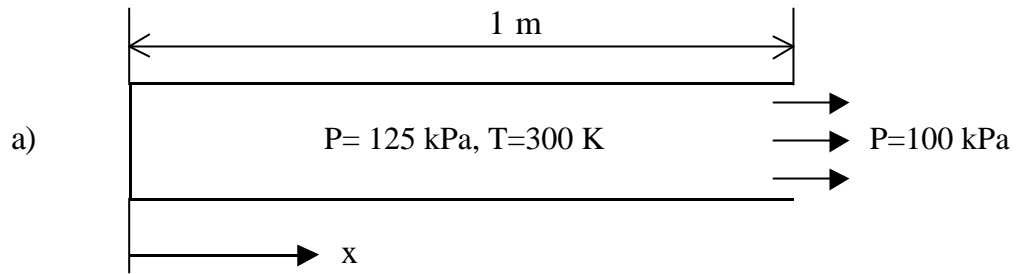


Figure 1.

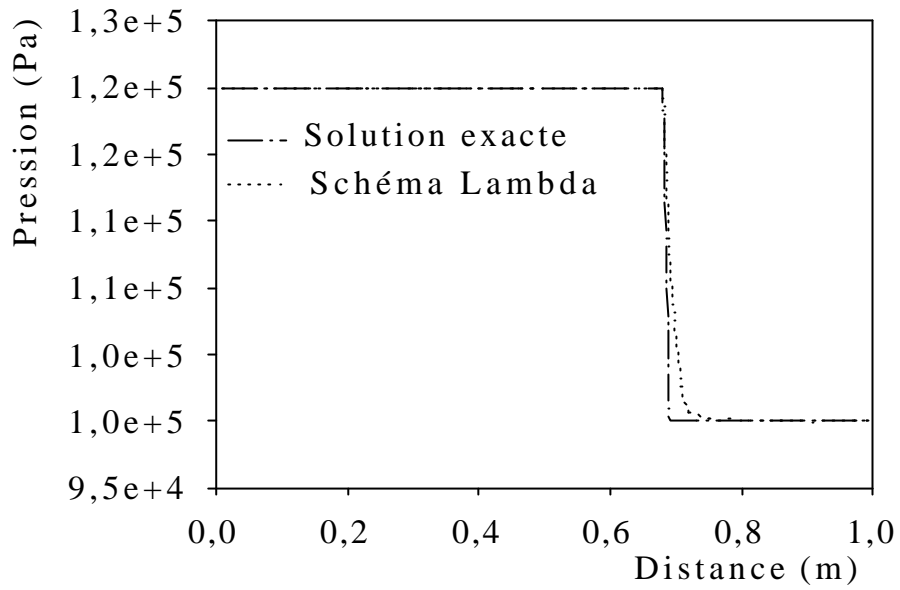


Figure 2. Pression en fonction de la distance (Figure.1a), au temps $t=0.001$ s

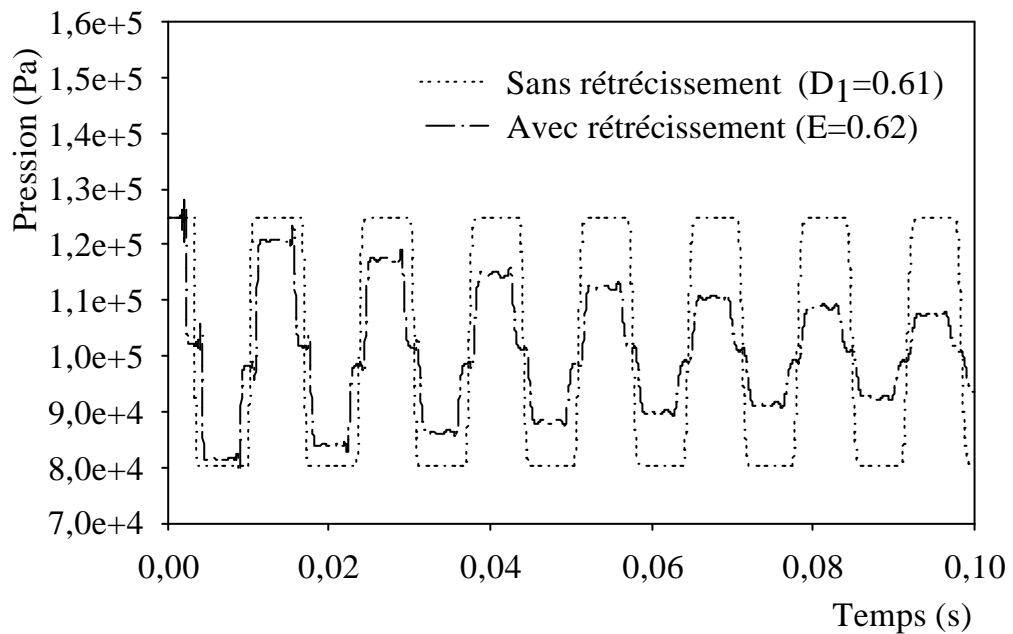


Figure 3. Pression au point $x=L/3$, (Figure 1b).

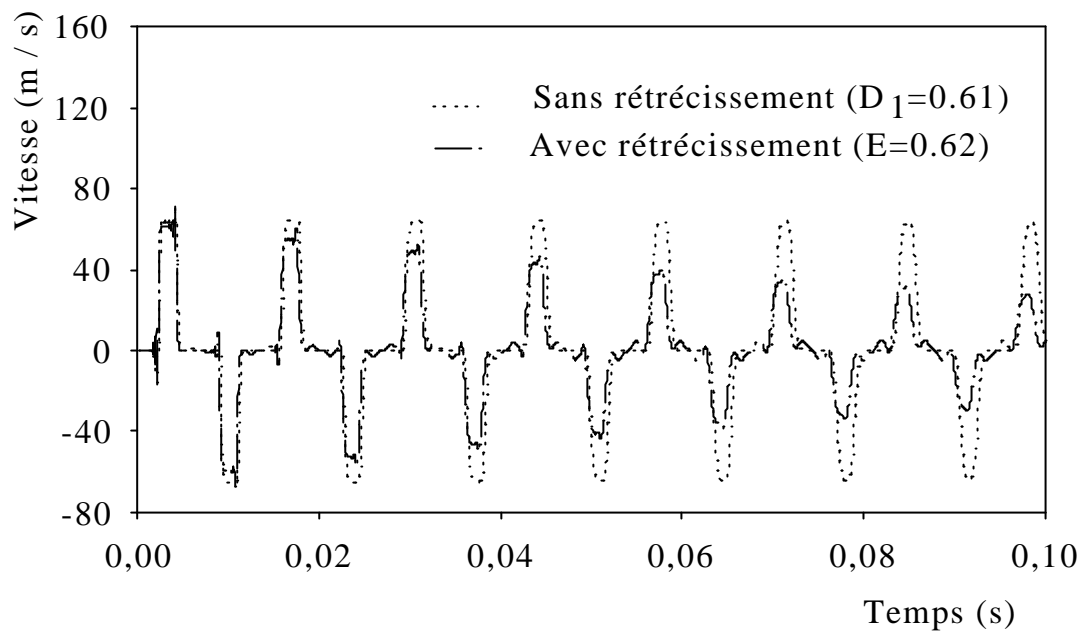


Figure 4. Vitesse au point $x=L/3$, (Figure 1b).

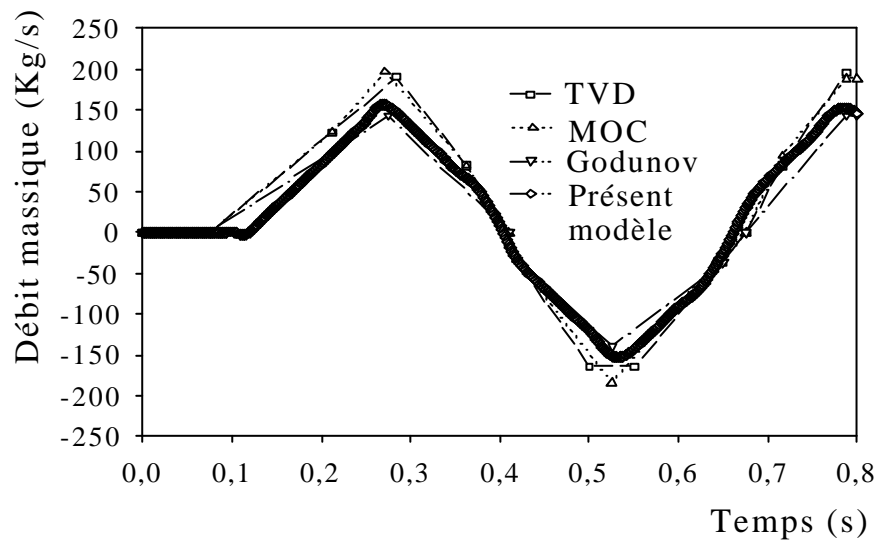


Figure 5. Variation du débit au milieu de la conduite.

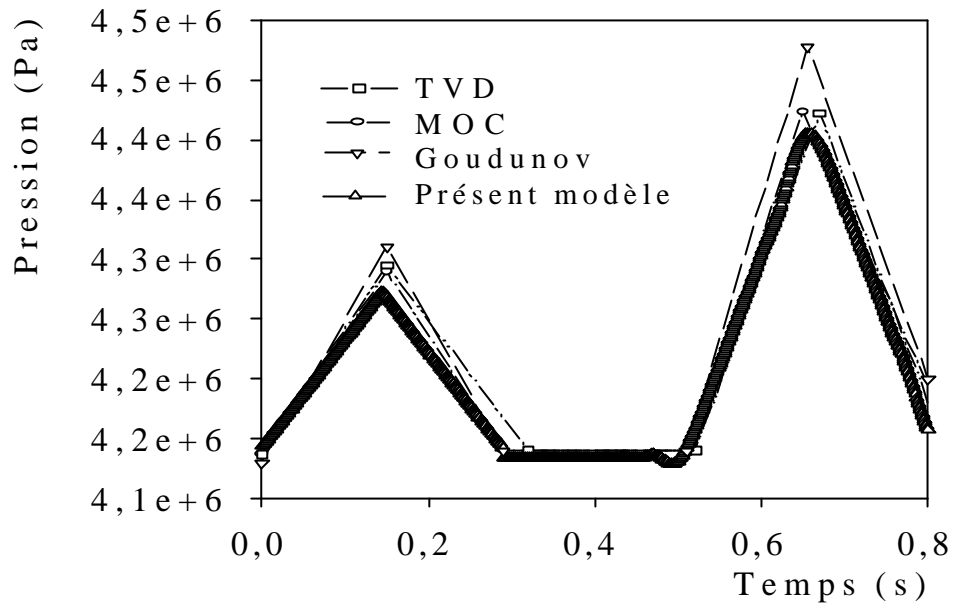


Figure 6. Pression à l'entrée de la conduite.

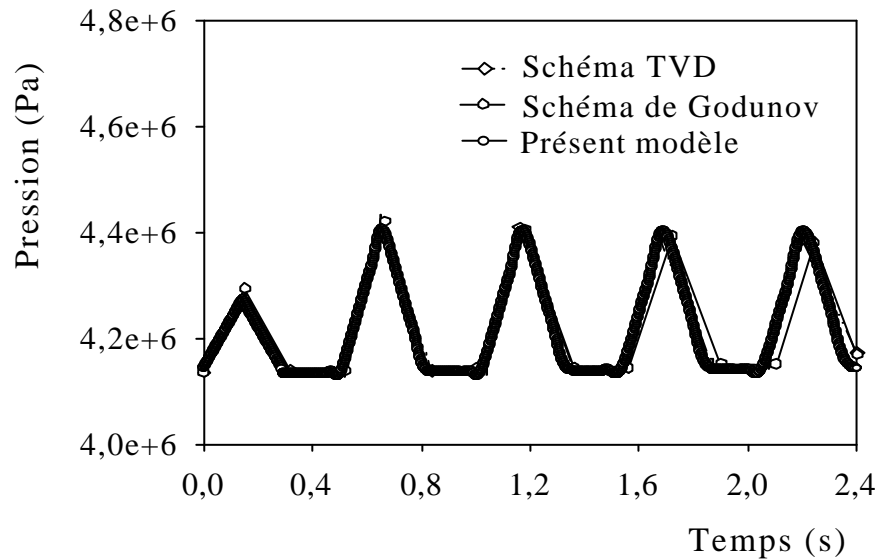


Figure 7. Pression à l'entrée de la conduite.

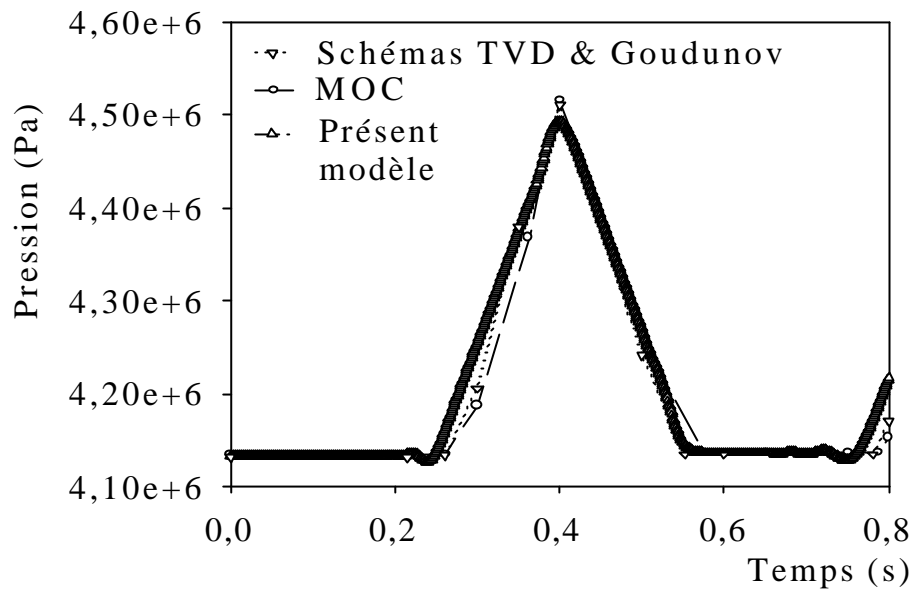


Figure 8. Pression à la sortie de la conduite.

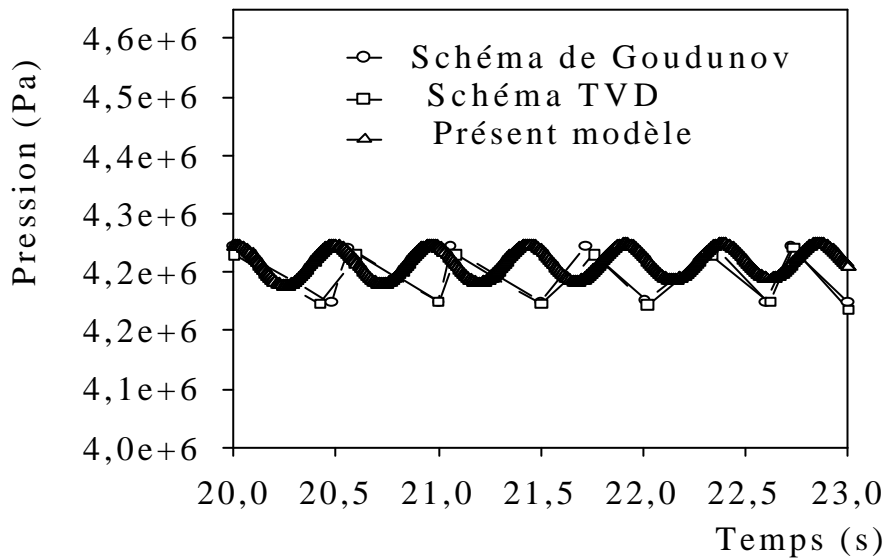


Figure 9. Pression à l'entrée de la conduite.

**ETUDE DES REGIMES TRANSITOIRES EN CONDUITE
DE LIQUIDE CONTENANT DES GAZ DISSOUS AVEC
PRISE EN COMPTE DU DEGAZAGE**

1. INTRODUCTION

Les écoulements en régime transitoire de liquide contenant du gaz ont été étudiés par plusieurs auteurs et ce depuis plusieurs années (Kranenburg [1], Wiggert & Sundquist[2]). Cet écoulement particulier concerne généralement les installations nucléaires, les réseaux de distribution de gaz, de pétrole et d'eau. Quand la pression en un point d'une canalisation chute au dessous d'une certaine valeur critique, l'évolution des germes, contenu dans le liquide, peut donner lieu à la formation de bulles de gaz. Si la valeur de cette pression est proche de celle de la vapeur saturante du liquide considéré, des poches de vapeur, dues à la rupture de la veine liquide, peuvent apparaître en des points particuliers de l'écoulement. Elles peuvent se fermer ou s'ouvrir durant les cycles de va et vient des ondes dynamiques développés par le phénomène transitoire.

Les travaux sur la rupture de la veine liquide ainsi que le dégazage qui l'accompagne, en tant que phénomènes physiques, sont rares. Néanmoins, les auteurs précités ont utilisé, respectivement, un schéma explicite du second ordre à deux pas de temps du type Lax-Wendroff et une nouvelle forme de schéma aux différences issue de l'intégration des équations de compatibilité (méthode des caractéristiques). En outre à été considéré l'influence des gaz dissous ainsi que le dégazage sur l'évolution des paramètres de fonctionnement, particulièrement sur les ondes dynamiques. Malheureusement ces études sont limitées par le nombre de suppositions arbitraires quant au point de rupture la veine liquide et au dégazage. Néanmoins, Baasiri & Thullis [3] ont réalisé une étude expérimentale sur la rupture de la veine aboutissant ainsi à une évaluation quantitative de la quantité de vapeur dégagée dans le cas d'un écoulement transitoire d'un mélange homogène liquide-gaz. Les résultats numériques n'ont pas fait l'objet de comparaison avec un modèle théorique.

Privilégiant seulement l'aspect numérique du problème, Chaudry & al [4], ont utilisé deux schémas aux différences explicites du deuxième ordre pour résoudre l'équation de conservation de la masse et l'équation de la quantité de mouvement du mélange, sans considérer le phénomène de rupture de veine et tout autre problème d'ondes de choc dans la formulation analytique ainsi que dans les calculs. Cependant ils ont montré que l'influence des gaz dissous (ou de vapeur) dans le liquide sur les paramètres de fonctionnement peut être prédite de manière adéquate par cette procédure.

Dans un récent travail, Hadj-Tayeb & al [5], considérant une forme explicite des équations, ont étudié le cas d'un mélange homogène de gaz et de liquide pour des conduites rigides et quasi rigides. Dans l'exemple d'application qu'ils ont considéré, les effets des gaz dissous et l'élasticité de la paroi de la canalisation sur la vitesse de propagation des ondes dynamiques et de la pression sont montrés et discutés.

Plus récemment encore, analysant l'influence de l'air dissous durant les écoulements hydrauliques transitoires dans les pipelines équipés de soupapes d'évacuation d'air aux points hauts du profil comprimé, les résultats expérimentaux de Lee [7] permettent d'observer une montée brusque de l'amplitude de pression (suivie d'une courte rupture de veine) lors de l'évacuation de l'air présent dans la canalisation. Cette surpression résulte de la fermeture rapide de la soupape. Par contre dans le cas d'une fermeture lente nous avons remarqué une atténuation importante de l'amplitude de pression.

Aussi, dans une étude sur les surpressions dans une conduite avec paroi rigide revêtue, Stephenson [6] a montré que l'influence de l'air dissous sur le matériau constitutif de la paroi est un facteur important dans les pipelines soumis à des surpressions. Il faut rappeler que ces dernières dus dues pour la plupart des cas à

des manœuvres accidentelles ou des arrêts brusques des pompes. Ce problème peut survenir aussi durant les essais hydrostatiques des pipelines.

Dans les calculs, l'hypothèse, qui consiste à supposer l'existence de poches de vapeur à des positions particulières du pipeline, donne pour la plupart des cas des résultats satisfaisants. Plusieurs auteurs ([1] and [2]), qui ont utilisé cette technique simple, ont obtenu des résultats satisfaisants en comparaison avec les relevés expérimentaux, pour le cas d'une conduite horizontale. Par contre, si l'on considère l'exemple de réseaux de canalisations, le choix du point de localisation de la cavité de vapeur, pour chaque conduite, peut mener à un temps de calcul excessif avec un programme de calcul plus complexe. La formulation du problème présentée dans ce travail permet d'éviter ces difficultés.

Plusieurs types de systèmes d'équations ont été considérés par plusieurs auteurs avec un nombre d'inconnues généralement égal au nombre d'équations. Analysant le modèle à deux fluides (avec quatre équations) et considérant les fréquences des oscillations des bulles, Kessal [8] a retrouvé le modèle de Wiggert & Sundquist [2] avec une application au cas d'un écoulement cavitant. Reprenant cette application sous une forme plus générale, il est proposé dans cette étude de réduire le nombre d'équations et de calculer les trois inconnues (pression, vitesse et taux de vide) de manière implicite. Ainsi, compte tenu de l'influence des gaz dissous sur la déformation de la paroi, il serait donc utile de tenir compte dans la formulation des équations de l'élasticité des phases en présence et du métal constituant la paroi, afin d'analyser les interactions éventuelles. Dans le présent travail les calculs sont donnés uniquement pour le cas de l'influence des gaz dissous.

Nous proposons alors une reformulation mathématique et physique complète d'un écoulement homogène de liquide contenant des gaz dissous, c'est-à-dire une prise en compte de l'élasticité de la paroi, le dégagement de gaz et

particulièrement le phénomène de rupture de veine. Ceci est réalisé en réécrivant tous les paramètres de l'écoulement en fonction de la pression. La rupture de veine fera l'objet d'une attention particulière par l'introduction d'une nouvelle formulation des équations qui permettra de conserver la continuité du milieu fluide. Le dégazage sera quantifié à partir de la loi de diffusion gazeuse et des hypothèses de Boussinesq [9].

Afin de cerner les phénomènes précités, les hypothèses suivantes relatives à une cavitation vaporeuse et gazeuse seront introduites dans les calculs :

1. Le mélange fluide à deux composants est homogène.
2. L'échange de quantité de mouvement entre les phases est négligé. Pour cela les vitesses respectives seront supposées égales.
3. Les paramètres d'écoulement ainsi que les propriétés physiques des phases en présence sont moyennés sur la section transversale de la canalisation.
4. Le débit de dégazage par unité de volume est fonction des paramètres suivants : la pression(p), la tension de vapeur saturante du liquide (p_v), le temps (t) la pression de saturation du liquide et la température.
5. L'énergie d'agitation est négligée.

2. MODELISATION MATHEMATIQUE

Le modèle mathématique est basé sur une approche unidimensionnelle d'un écoulement de liquide contenant des gaz dissous. D'une manière générale le processus de transfert de chaleur dans une cavité ou poche de vapeur et de gaz est très lent dans en comparaison avec le temps de variation de la pression. Par

conséquent, la tension de vapeur et la température dans la poche peuvent être considérées comme constantes. De même que l'équation du mouvement des deux phases en présence peut être remplacée par celle du mélange.

2.1. Etablissement des équations

Pour le modèle précité les composants (si l'on somme les gaz dissous et la vapeur) seront traités comme un mélange possédant les mêmes paramètres moyens sur une section transversale de la canalisation. En négligeant le glissement entre phases, les équations du mouvement seront écrites pour cette section. Considérant un volume de contrôle de la conduite, les équations de conservation de la masse et l'équation de la quantité de mouvement pour chaque phase, dans le cas d'un écoulement non permanent s'écrivent (Wiggert & Sundquist [2]) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a \in S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a \in SV) = \Gamma_g S \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l(1-\epsilon)S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l(1-\epsilon)SV) = -\Gamma_g S \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a \in VS) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a \in V^2S) + \epsilon S \frac{\partial p}{\partial x} = -\pi D_g \tau_g + g \rho_a \in S \sin \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l(1-\epsilon)VS) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l(1-\epsilon)V^2S) + (1-\epsilon)S \frac{\partial p}{\partial x} = -\pi D_l \tau_l + g \rho_l(1-\epsilon)S \sin \alpha \quad (4)$$

où: $\rho_a = \rho_g + \rho_v$

ρ_g , ρ_v , ρ_l et S étant respectivement les densités du gaz, de la vapeur ou du liquide et la section transversale de la canalisation et Γ_g le taux de production de gaz donné en Kg/s par unité de volume du mélange.

Le taux de vide ϵ est le ratio du volume de gaz par unité de volume de mélange, V est la vitesse commune moyenne de l'écoulement. Les indices **g**, **l** et **a** se réfèrent respectivement au gaz, au liquide et au gaz+vapeur ou au mélange.

Les termes de frottement pour le gaz et le liquide sont donnés respectivement par les corrélations suivantes :

$$\tau_a = \frac{1}{2} C_{fa} \rho_a |V|V \quad \text{et} \quad \tau_l = \frac{1}{2} C_{fl} \rho_l (1-\epsilon) |V|V$$

Dans cette étude nous considérerons:

$$\tau_a = \tau_g \quad \text{et} \quad C_{fa} = C_{fg}$$

Où : C_f , p , $D_{g,l}$, $\tau_{g,l}$, et α sont respectivement le coefficient de frottement, la pression moyenne, le diamètre hydraulique relatif à une conduite remplie par chacun des deux fluides, les contraintes de frottement visqueuses et l'angle d'inclinaison de la conduite par rapport à l'horizontale.

La sommation des équations 1+2 et 3+4 donnent les équations du mélange:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho S V) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho S V^2 + P) = -\pi D \tau_w + \rho g S \sin \alpha \quad (6)$$

Dans ces équations ρ désigne la masse volumique apparente du mélange:

$$\rho = \rho_a + \rho_l (1-\epsilon) \quad (7)$$

où la force de pression P est donnée en fonction de la section transversale de la conduite :

$$P = \int S dp \quad (8)$$

L'équation donnant la déformation de la paroi de la conduite en fonction de la pression s'écrit (Annexe C):

$$\frac{dS}{S} = \frac{D\mu}{Ee} dp \quad (9)$$

Où e , E et μ sont respectivement l'épaisseur de la paroi, le module d'élasticité du matériau constituant la paroi et le coefficient de Poisson.

L'intégration de l'équation (8) compte tenu de la relation (9) nous donne (Annexe C):

$$P = \frac{S_o(p - p_o)}{1 - \frac{(p - p_o)D_o}{2eE}} \quad (10)$$

En posant: $\zeta = \rho S$ (11)

Les équations (5) et (6) deviennent:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta V) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta V) + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta V^2 + P) = -\zeta g \sin \alpha + \zeta \pi D \tau_1 \quad (13)$$

En désignant par la suite, pour plus de simplicité, la masse volumique du mélange vapeur+gaz dissous par ρ_g , les paramètres relatifs à ce mélange seront exprimé avec un indice g.

Si l'on néglige les termes de viscosité d'une bulle de rayon R, contenant de la vapeur et entourée de liquide saturé de gaz, l'équation d'équilibre dans ce milieu s'écrit :

$$p_g = p - p_v + \frac{2\sigma}{R} \quad (14)$$

où p_g , p_v et σ sont respectivement les pressions de gaz, de la vapeur et la tension superficielle.

L'équation d'état pour le gaz ou le liquide s'écrivent :

$$\frac{d\rho_g}{\rho_g} = \frac{1}{K_g} dp \quad (15a)$$

$$\frac{d\rho_l}{\rho_l} = \frac{1}{K_l} dp \quad (15b)$$

Où K_g et K_l sont les coefficients de compressibilité du gaz et du liquide.

La combinaison des relations (1) et (5) permettent d'écrire une équation de conservation de la masse sous la forme suivante (Kessal [10]):

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{\rho_g} \frac{d\rho_g}{dt} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{\Gamma_g}{\rho_g \epsilon} \quad (15c)$$

L'intégration de l'équation précédente, compte tenu des relations (7), (10) et (11) permet d'exprimer le paramètre ζ sous la forme suivante :

$$\zeta = \rho_o \frac{\epsilon}{\epsilon_o} P^\bullet \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{S_o}} - \frac{p - p_o}{eE\sqrt{\pi}} \right)^2} G_r \quad (16)$$

où le coefficient G_r est fonction du taux de dégagement Γ_g (Annexe D):

$$G_r = \frac{1}{1 + \int_0^t \frac{\Gamma_g}{\rho_o \rho_{g_o} \epsilon_o} dt} \quad (17)$$

et

$$P^\bullet = \frac{p - p_v + \frac{2\sigma}{R}}{p_o - p_{v_o} + \frac{2\sigma}{R}} \quad (18)$$

si l'on pose :

$$P^\bullet = \frac{p_g}{p_{g_o}}$$

Dans cette équation, le rayon de la bulle est déterminé à partir de son équation d'équilibre dans laquelle on néglige les phénomènes dynamiques du à la vitesse de déformation de l'interface de la bulle. Ceci peut être justifié si l'échelle de temps du mouvement transitoire est supérieure à la période des oscillations des bulles.

Considérant les équations (7) et (15), le taux de vide peut être exprimé en fonction de la pression :

$$\epsilon = \frac{\rho_{10} \exp \left(K_1^{-1} \left(p - p_o \right) \right)}{\rho_{10} \exp \left(K_1^{-1} \left(p - p_o \right) \right) - \rho_v + \left(\frac{\rho_o}{\epsilon_o} - \rho_{go} \right)} \quad (19)$$

Si l'on introduit une forme adimensionnelle de ζ telle que: $\zeta^\bullet = \frac{\zeta}{\rho_o S_o}$ le système d'équations (12) - (13) devient:

$$\frac{\partial \zeta^\bullet}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta^\bullet V) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta^\bullet V) + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta^\bullet V^2 + P') = -\zeta^\bullet g \sin \theta - 2C_f \frac{\zeta^\bullet}{D_h} |V|V \quad (21)$$

Où :

$$P' = \frac{P}{\rho_o S_o} \quad (22)$$

Compte tenu de l'équation (10) cette équation devient :

$$P' = \frac{p - p_o}{\rho_o} \frac{1}{1 - \frac{(p - p_o) D_o}{2eE}} \quad (23)$$

En négligeant la tension superficielle σ et après simplification, le paramètre ζ^\bullet en fonction du rapport des pression s'écrit:

$$\zeta^\bullet = \frac{P^\bullet [1 + E o' (P^\bullet - 1)]}{\epsilon_o' + (1 - \epsilon_o') P^\bullet} G_r \quad (24)$$

où :

$$\epsilon_o' = \epsilon_o \left[1 - (Eo1 + \frac{\rho_{v_o}}{\rho_{l_o}}) \right]$$

$$Eo' = Eo1 + \frac{D_o}{e} Eos$$

$$Eos = \frac{p - p_o}{E} \quad \text{and} \quad Eo1 = K_1^{-1}(p - p_o)$$

L'équation précédente permet d'exprimer le ratio P^\bullet en fonction de ζ^\bullet , tel que:

$$P^\bullet = \frac{(1 - \epsilon_o')\zeta^\bullet - (1 - Eo') + \sqrt{[(1 - Eo')\zeta^\bullet - (1 - Eo')]^2 + 4\epsilon_o' Eo'}}{2Eo'} \quad (25)$$

et

$$P' = \frac{(P^\bullet - 1) Pr_o}{1 - (P^\bullet - 1) Dro} \quad (26)$$

où:

$$Pr_o = \frac{Eos}{\rho_o} \quad \text{et} \quad Dro = \frac{D_o}{2e} Eos$$

Considérant la relative complexité des relations précédentes les termes Eos, Eo1, Eo', Pro, et Dro ont été utilisés pour faciliter les calculs sur ordinateur.

La méthode des caractéristiques peut être utilisée pour transformer le système d'équations (20) et (21) en système d'équations ordinaires (Courant and Hilbert [11]). Alors la forme caractéristique de ces équations (ou équations de compatibilité) est:

$$\delta P' \pm \zeta^\bullet a \delta V \pm (\zeta^\bullet a g \sin \theta - \frac{2C_f}{D_h} \zeta^\bullet a |V|V) \delta t = 0 \quad (27)$$

Ces équations sont associées aux directions caractéristiques :

$$\frac{dx}{dt} = V \pm a \quad (28)$$

Où l'opérateur différentiel du système (27) s'écrit :

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \quad (29)$$

où a est la célérité de propagation des perturbation de la pression et de la vitesse d'écoulement qui peut être exprimée de manière qui conviendrait à une forme adimensionnelle des équations, telle que :

$$a = \left(\frac{d\zeta^{\bullet}}{dP^{\bullet}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

Compte tenu des équations (20) et (21), la célérité a devient:

$$a = \frac{A_1}{1 - \frac{D_o}{2e} E_o' (P^{\bullet} - 1)} \sqrt{\frac{\frac{E_s}{\rho_o} E_{os}}{(A_2 + P^{\bullet} E_o') A_1 - A_2 P^{\bullet} (1 - \epsilon_o')}} \quad (31)$$

où :

$$A_1 = \epsilon_o' + (1 - \epsilon_o') P^{\bullet}$$

$$A_2 = 1 + E_o' (P^{\bullet} - 1)$$

Il est à remarquer dans les équations précédentes que la présence d'une quantité de gaz libre dans le liquide influence sensiblement la pression et la

vitesse de propagation de l'onde dynamique. Cette dernière varie en fonction de la pression. Cette équation considère simultanément l'influence des gaz dissous ainsi que la déformation de la paroi de la conduite.

Une forme adimensionnelle complète des équations peut être obtenue en exprimant les paramètres inconnus en fonction de la vitesse initiale, du temps et de la longueur.

$$\frac{\partial \zeta^{\bullet}}{\partial t^{\bullet}} + \frac{\partial}{\partial x^{\bullet}} (\zeta^{\bullet} V^{\bullet}) = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^{\bullet}} (\zeta^{\bullet} V^{\bullet}) + \frac{\partial}{\partial x^{\bullet}} (\zeta^{\bullet} V^{\bullet 2} + P') = -\zeta^{\bullet} S g \frac{DX_o}{V_o^2} \sin \theta - \frac{2C_f}{D_h} \zeta^{\bullet} DX_o |V^{\bullet}| V^{\bullet} \quad (33)$$

$$\delta P' \pm \zeta^{\bullet} a^{\bullet} \delta V^{\bullet} = \mp \left(\zeta^{\bullet} g \frac{DX_o}{V_o^2} \sin \theta - \frac{2C_f}{D_h} \zeta^{\bullet} DX_o \right) a^{\bullet} t_o \delta t^{\bullet} \quad (34)$$

Où: $a^{\bullet} = \frac{a}{V_o}$; $V^{\bullet} = \frac{V}{V_o}$; $t^{\bullet} = \frac{t}{t_o}$; $x^{\bullet} = \frac{x}{DX_o}$; $t_o = \frac{DX_o}{V_o}$

Dans cette formulation: $P' = \frac{P}{\rho_o S_o V_o^2}$

3 . RESOLUTION NUMERIQUE

Le système d'équations (33) et (34) peut être présentée sous la forme matricielle suivante:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial F_4}{\partial x} = F_5 \quad (36)$$

Où F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 sont les matrices contenant les paramètres ζ^* et V^* .

La résolution de ce système d'équations est réalisée par types de schémas aux différences. Le premier schéma est explicite de type prédicteur-correcteur à deux pas de temps pour les points de maillage intérieurs : une nouvelle forme du schéma de Lax-Friedricks comme prédicteur et un schéma de type leapfrog comme correcteur (voir la première étude). Les conditions aux limites font l'objet d'un traitement par la méthode des caractéristiques.

3.1. Schéma à deux pas de temps.

Une forme nouvelle du schéma de Lax –Friedricks appliquée aux système d'équations (35) et (36) , nous donne :

$$\left. \begin{aligned} [F_1]_i^{n+1} &= 0.5 * ([F_1]_{i+1}^n + [F_1]_{i-1}^n) - 0.5 * \kappa \{ [F_2]_{i+1}^n - [F_2]_{i-1}^n \} \\ [F_3]_i^{n+1} &= 0.5 * ([F_3]_{i+1}^n + [F_3]_{i-1}^n) - 0.5 * \kappa \{ [F_4]_{i+1}^n - [F_4]_{i-1}^n \} \\ &+ 0.5 * \Delta t ([F_5]_{i+1}^n + [F_5]_{i-1}^n) \end{aligned} \right\} (37)$$

Ce schéma est obtenu par une procédure similaire à celle donnée dans la première partie de l'ouvrage de Hirsch [12].

Le rapport des premiers termes de ces deux schémas nous donne la vitesse d'écoulement du mélange à un temps $t+\Delta t$.

Une viscosité numérique est ainsi introduite par le premier terme du membre de droite de l'équation (37). Malheureusement ce schéma cause un

amortissement considérable compte tenu de sa précision du premier ordre, ce qui mènerait à des pressions de faible amplitude. Ainsi une précision du deuxième ordre peut être obtenue en ajoutant à l'équation (10) un deuxième schéma du type leapfrog, correspondant à un deuxième pas de temps.

$$\left. \begin{aligned} [F_1]_i^{n+2} &= [F_1]_i^n - \kappa \left([F_2]_{i+1}^{n+1} + [F_2]_{i-1}^{n+1} \right) \\ [F_3]_i^{n+2} &= [F_3]_i^n - \kappa \left([F_4]_{i+1}^{n+1} + [F_4]_{i-1}^{n+1} \right) + \\ &0.5 * \ddot{A}t \left([F_5]_{i+1}^{n+1} + [F_5]_{i-1}^{n+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Le rapport des deux premiers termes des schémas précédents donne la vitesse d'écoulement du mélange au temps $t+2*\Delta t$.

Les équations (37) et (38) constituent un schéma prédictor-correcteur à deux pas de temps de la famille des schémas de Lax-Wendroff. L'amortissement qu'il produit est appréciable pourvu qu'un nombre de points de maillage adéquat soit bien choisi. Sa consistance avec le système d'équations (32)-(33) peut être aisément vérifiée et sa stabilité linéaire satisfaite pour:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{C + |V|} \quad (39)$$

3.2. Schéma de Mac Cormack.

Compte tenu de la forme conservative du système d'équations (32)-(33), il est relativement bien établi que l'utilisation des schémas de la famille S_β^α pour des valeurs arbitraires de α et β (Lerat & Peret[13]) peut être recommandé pour leur résolution numérique. Pour des valeurs de $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ nous obtenons le schéma prédictor-correcteur de Mac Cormack (utilisé dans cette étude) qui est

généralement employé pour la résolution de plusieurs problèmes de la dynamique des gaz.

Ce schémas aux différences est obtenu à partir d'une discrétisation explicite pour le prédicteur en $(i+\beta)$ à un niveau de temps $(n+\alpha)$. Par une technique de différentiation avancée, il peut s'écrire :

$$[\bar{F}_1]_i^{n+1} = [F_1]_i^n - \kappa \{ [F_2]_{i+1}^n - [F_2]_i^n \} \quad (40)$$

$$[\bar{F}_2]_i^{n+1} = [F_3]_i^n + \kappa \{ [F_4]_{i+1}^n - [F_4]_i^n \} + 0.5 * \Delta t \left([F_5]_i^n + [F_5]_{i+1}^n \right) \quad (41)$$

Le schéma correcteur est défini afin d'assurer une précision du deuxième ordre, telle que :

$$[F_1]_i^{n+1} = 0.5 \left\{ \left([F_1]_i^n + [\bar{F}_1]_i^n \right) - \kappa \left([\bar{F}_2]_i^n - [\bar{F}_2]_{i-1}^n \right) \right\} \quad (42)$$

$$[F_3]_i^{n+1} = 0.5 \left\{ \left([F_3]_i^n + [\bar{F}_3]_i^n \right) - \kappa \left([\bar{F}_4]_i^n - [\bar{F}_4]_{i-1}^n \right) + \Delta t \left([\bar{F}_5]_i^n + [\bar{F}_5]_{i-1}^n \right) \right\} \quad (43)$$

Où le rapport $\kappa = (\Delta t / \Delta x)$ est calculé pour satisfaire le critère de stabilité suivant :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\text{Max} (|V| + a)} \quad (44)$$

Sachant que le phénomène de rupture de veine n'est pas seulement un problème d'hydrodynamique mais aussi un problème de changement de phase, il n'est pas nécessaire d'utiliser des schémas sophistiqués (de haute résolution par exemple) pour résoudre le système d'équations précédent. Aussi il est bien

admis, comme reporté par Fletcher [14], que les schémas de Godunov du deuxième ordre (par exemple) produit une solution plus précise que les schémas précédents, mais de programmation plus sophistiquée et moins économique du point de vue du temps de calcul. Cependant les algorithmes FCT sont plus précis que la viscosité artificielle. Alors, dans le souci de réaliser un traitement convenable du problème de l'onde choc qui accompagne le phénomène de rupture de veine (du à une fermeture brusque de la vanne), un algorithme FCT est ajouté aux deux précédents prédicteur-correcteur schémas comme des pas de calcul additionnels.

L'application des schémas prédicteur-correcteur aux équations (32) et (33) donne les valeurs des paramètres ζ^* et V^* . Une procédure de calcul est employée afin de calculer à partir des équations (25), (19) et (A1-7) les inconnues p , α et Q . Celles correspondant aux conditions aux limites sont déduites des relations de compatibilité (34) pour lesquelles une interpolation linéaire a été appliquée (Lister [15]). Il est important de noter que dans le cas d'un réseaux de canalisations il n'est pas nécessaire de calculer le volume de la cavité (ou la rupture de veine) pour chaque conduite. Cette procédure peut être évitée en introduisant dans le programme principal une subroutine se rapportant à cette condition.

En outre, les calculs numériques sont facilités en considérant dans le programme uniquement le schéma aux différences (qui donne les valeurs de ζ^* et de V^*). Aux extrémités les paramètres P' and V' par l'utilisation de la forme caractéristique (34). Ainsi l'intégration des relations (34) le long des directions caractéristiques $\frac{dx}{dt} = V^* \pm a^*$ donne:

$$\left(P_i^{j+1} - P_{i+1}^j \right) - \alpha a \left(V_i^{j+1} - V_{i+1}^j \right) - \left(g \frac{V_o}{DX_o} \sin \epsilon - \frac{2C_f}{D_h} DX_o \right) \alpha a t_o \Delta t = 0 \quad (45)$$

$$\left(P_i^{j+1} - P_{i-1}^j \right) + \alpha a \left(V_i^{j+1} - V_{i-1}^j \right) + \left(g \frac{V_o}{DX_o} \sin \theta - \frac{2C_f}{D_h} DX_o \right) \alpha a t_o \Delta t = 0 \quad (46)$$

Où les signes \bullet et $'$ sont ignorés pour plus de clarté.

Une procédure de calcul pour obtenir les paramètres P et V est nécessaire en appliquant un incrément de temps Δt et un pas d'espace Δx constants. Les valeurs des paramètres au temps initial sont obtenus par une interpolation linéaire entre les points du maillage $i-1$, i et $i+1$.

4 . APPLICATIONS

Un pipeline de 295 m de long et de 0.0254 m de diamètre a fait l'objet d'une série de tests hydrauliques reportés dans les travaux de Wiggert and Sundquist [2] (figure a). Les résultats numériques y sont présentés pour plusieurs concentrations de gaz dissous (Table 1). Les graphes concernent le point amont de la conduite localisé en $x=0$ et $x=0.5*L$. Les régimes transitoires simulés sont dus à une fermeture brusque et instantanée d'une vanne au point amont.

Les six graphes suivants retracent les résultats expérimentaux et les résultats numériques produits par les précédents auteurs et ceux produits par la formulation ainsi que les schémas proposés dans la présente étude. Dans les calculs, les suppositions et conditions suivantes y sont imposées :(1) le taux de vide initial est très petit; (2) la distribution initiale de la pression est calculée à partir des corrélations de pertes de charge en régime permanent ; (3) la température du gaz est constante et (4) la fermeture de la vanne est instantanée. Les valeurs des coefficients et paramètres K_T , β et P_S dans l'équation (A1-5) sont calculées à partir de la loi sur la diffusion gazeuse et le recours à l'estimation de la quantité de gaz dégagée telle que formulée dans l'Annexe D.

4.1 Rupture de la veine liquide et l'écoulement cavitant .

Dans les travaux présentés dans la bibliographie, la cavitation transitoire fait généralement l'objet d'un test au point où la rupture de colonne de liquide est supposée se produire (figure b) :

Si $p < p_v$ alors $p = p_v$

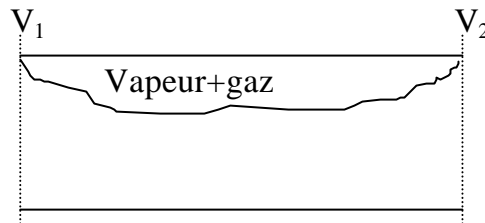


Figure b.

et le volume de la poche de vapeur peut être calculé. La technique généralement employée pour calculer ce volume W_c est basée sur les vitesses (V_2 , V_1) adjacentes à la cavité de vapeur:

$$W_c^{t+\Delta t} = W_c^t + \Delta t(V_2 - V_1)$$

Les calculs prennent fin quand W_c est < 0 .

Néanmoins la technique suivante permet d'éviter cette lourde et coûteuse procédure. Dans le cas d'une fermeture brusque de la vanne au point amont de la conduite l'équation aux différences finies (46) est utilisée où P_1^{n+1} y est calculée pour $V_1^{n+1} = 0$. La valeur obtenue de P' étant négative, ce qui

entraîne une valeur négative de P^* . Puis, déduisant P^* de l'équation (26) on obtient :

$$P^* = \frac{P'}{Pr_0 + P'Dr_0} + 1$$

Puisque la valeur de P^* est inférieure à zéro alors une condition telle que :

$$\text{Si } P^* < 0 \text{ alors } P^* = 0 \text{ (ou égale à une très petite valeur)}$$

peut être imposée en ce point et tout point du maillage.

On remarque que pour cette valeur la relation (18) donne $P = P_v$, si la contrainte σ est négligé. Ainsi au point de vanne ($x=0$) la rupture de la veine liquide peut être obtenue par une procédure numérique sans le recours au traditionnel calcul du volume de la poche de vapeur.

Les figures 1, 3 et 5 montrent l'évolution des pressions produites en $x=0$ telles que mises en évidence par les expériences et les résultats de calcul de Wiggert and Sundquist [2] et le modèle développé dans cette partie et ce, pour différentes concentrations initiales de gaz dissous. On peut remarquer l'évolution du volume de la cavité qui croît et se ferme au fur et à mesure des aller et retour de l'onde de choc. Pendant ce cycle, la dépression se propage en aval de la conduite et se transforme, après réflexion par le point aval, en surpression à la vanne et au point de la vanne et se propage de nouveau jusqu'à amortissement du phénomène.

Le dégazage est calculé sans introduction d'un nombre de bulles dans le mélange (Kranenburg [1]), mais en supposant une concentration initiale de gaz dissous C_0 . Les résultats obtenus sont satisfaisants, montrant ainsi que le schéma de Mac Cormack (M.C dans les figures 1-6) et le schéma de Lax-Friedricks-

leapfrog (L.F.L dans la figures) confirment la validité du modèle physique proposé dans cette étude.

Dans ces figures, et pour de grandes concentration de gaz dissous, il semble que le dégazage cause une diminution de la durée de la poche de vapeur qui se forme et se reforme durant les différents cycles ce qui entraîne des surpressions d'amplitude plus petite. Ce résultat peut être expliqué de la manière suivante : le dégagement de gaz cause une sorte de dilatation de la colonne de fluide dans la région dite d'écoulement cavitant. Cette région peut être située entre deux point du maillage de calcul numérique, c'est-à-dire entre les points adjacents à la cavité, dès qu'une chute brutale de pression a lieu. Par conséquent, le volume de cette cavité serait inférieur à celle correspondant au cas où le dégazage serait négligé. Il diminue avec l'augmentation de la concentration C_0 . Ainsi la cavité de vapeur se fermera à un temps plus petit.

Les figures 2, 4 et 6 concernent les réponses des pressions au point milieu de la canalisation ($x=0.5*L$). Il apparaît une petite cavité de courte durée durant les premiers temps du phénomène. Comme dans les figures précédentes, l'augmentation de C_0 cause un amortissement appréciable des pics successifs de pression.

Comme on peut le remarquer dans ces figures, nos résultats sont satisfaisants comparés avec les relevés expérimentaux principalement pour les premiers pics de pression et surtout dans les premiers temps du phénomène. Cependant durant les formations successives des cavités de vapeur, la configuration de l'écoulement change. On peut vérifier ainsi que l'inclusion d'une faible quantité de gaz dissous, comme terme source dans les équations (1) et (2), n'exerce pas une profonde influence sur l'aspect de l'écoulement ainsi que sur les paramètres, mais quand cette concentration dépasse une certaine valeur, nous assistons à un fort amortissement des paramètres dynamiques. Le modèle homogène développé dans cette étude n'est plus valable ou nécessite certains changements.

5. CONCLUSION

Un modèle d'écoulement homogène de liquide contenant des gaz dissous a été développé avec une formulation adimensionnelle complète. Un système de deux équations seulement a été obtenu en tenant compte de l'élasticité de la paroi de la canalisation, de la compressibilité des phases en présence et de l'influence du phénomène de dégazage sur les paramètres de l'écoulement. Pour cela, un exemple d'application d'une cavitation transitoire vaporeuse et gazeuse a été étudié en résolvant le nouveau système d'équations par des techniques numériques appropriées. Les résultats obtenus sont en bonne adéquation en comparaison avec ceux qui considèrent la méthode de la cavité localisée.

6. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Kranenburg, C., (1974), Gas Release During Transient cavitation in Pipes, *Journal of the Hydraulics Division*, Vol 100, N° HY10, Oct., pp. 1383-1398.
2. Wiggert, D.C., and Sundquist M.J., The Effects of Gaseous Cavitation on Fluid Transients, ASME *Journal of Fluids Engineering* , Vol 101 , March 1979
3. Baasiri, M., and Tullis, J.P., Air Release During Column Separation, ASME *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 105, March 1983, pp 113-118.
4. Chaudry M.H., Bhallamudi S.M. & Martin M., Analysis of transient in bubbly homogeneous, gas-liquid mixtures, ASME, *Journal of Fluids Engineering*, Vol 112, pp.225-23, June 1990.

5. Hadj-Tayeb E., Mseddi M. & Lili T., Ecoulements transitoires de mélanges homogènes gaz-liquide dans les conduites rigides et quasi-rigides, *Entropie* N° 197, 1996.
6. Stephenson, D., 1997, Effects of Air Valves and Pipework on Water Hammer Pressures, ASCE, *Journal of Transportation Engineering*, Vol. 123, N°2, pp. 101-106, March-April.
7. Lee, T.S., Air Influence on Hydraulic Transients on Fluid System With Air Valve, *J. of Fluids Engineering*, Vol. 121, September 1999.
8. Kessal, M. , The Dispersed Bubbles Two-phase Flow Model : Theory and Application, CHT'97, *Advances In Computational Heat Transfer*, May 26-30, 1997, Cesme, Izmir, Turkey. Edited by Begell House, INC, New York, 1998.
9. Boussinesq J., Calcul du Pouvoir Refroidissant des Courants Fluides, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Paris, Vol.6, N°1,1905, pp. 285-332.
10. Kessal ,M., *Modélisation , en écoulement homogène, des phénomènes de cavitation lors des régimes transitoires en conduite*, Thèse de Doctorat D'Ingénieur, Oct. 1987, INSA de lyon, France.
11. Courant, R. and Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol.2, Interscience Publications, New York, 1962.
12. Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*; pp. 224-240; Vol 2. Ed. John Wiley & Sons, 1997.

13. Lerat A., & Peret R., Sur le Choix des Schemas Aux Différence du Second Ordre Fournissant des Profils de Choc sans Oscillations, *C.R.. Acad. des Sc.* Paris, t. 277., Sep. 1973.
14. Fletcher C.A.J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics* 2. 3rd Ed. Springer-Verlag Berlin, 1997.
15. Lister M., *The numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations by the Method of Characteristics*, in Ralston, A., and Wilf, H.S., eds., *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, New York, 1960.

NOMENCLATURE

a	vitesse de propagation des ondes
C_0	concentration initiale de gaz
C_f	coefficient de friction pour le fluide
D_h	diamètre hydraulique
e	épaisseur de la paroi de la conduite
E	module de Young du matériau constituant la paroi
g	accélération de la gravité
G_r	coefficient de dégazage
H	constante de proportionnalité d'Henry
K_r	coefficient de dégazage
L	longueur de la conduite
m	volume molaire des gaz dissous
n	nombre de moles de gaz par unité de volume de fluide
p	pression moyenne du mélange
p_v	tension de vapeur
p_s	pression de saturation du liquide
R	rayon de la bulle

S	section transversale de la canalisation
t	temps
T	température absolue du mélange
V	vitesse d'écoulement moyenne
W_c	volume de la poche (ou cavité) de vapeur
x	distance (axiale)

Symbôles grecs

α	angle d'inclination
β	coefficient dans la relation A6
ϵ	taux de vide moyen sur une section transversale
Γ_g	taux de dégazage par unité de volume de mélange
ϕ	nombre de moles de gaz dissous/nombre de moles de mélange
ρ	densité apparente
σ	tension superficielle
γ	constante dans la relation (A3)
v	volume molaire
τ	contrainte de viscosité
μ	coefficient de poisson

Indices

g gaz; l liquide ; v vapeur ; a=g+v, s saturation; c cavité; o conditions de référence; f frottement; w paroi.

Table 1 . Conditions expérimentales

Localisation de la vanne	Vitesse initiale	Gaz	Quantité initiale de gaz dissous * (C_o)	Pression dans le réservoir ($10^3 \times N/M^2$)	Température du fluide ($^{\circ}C$)
Point amont	0.77	Air	0.02	172 ^b	16
Point amont	0.77	CO ₂	0.60	170 ^b	16
Point amont	0.77	CO ₂	1.15	175 ^b	16

* Rapport volume de gaz/volume total aux conditions standards.

b Réservoir au point aval.

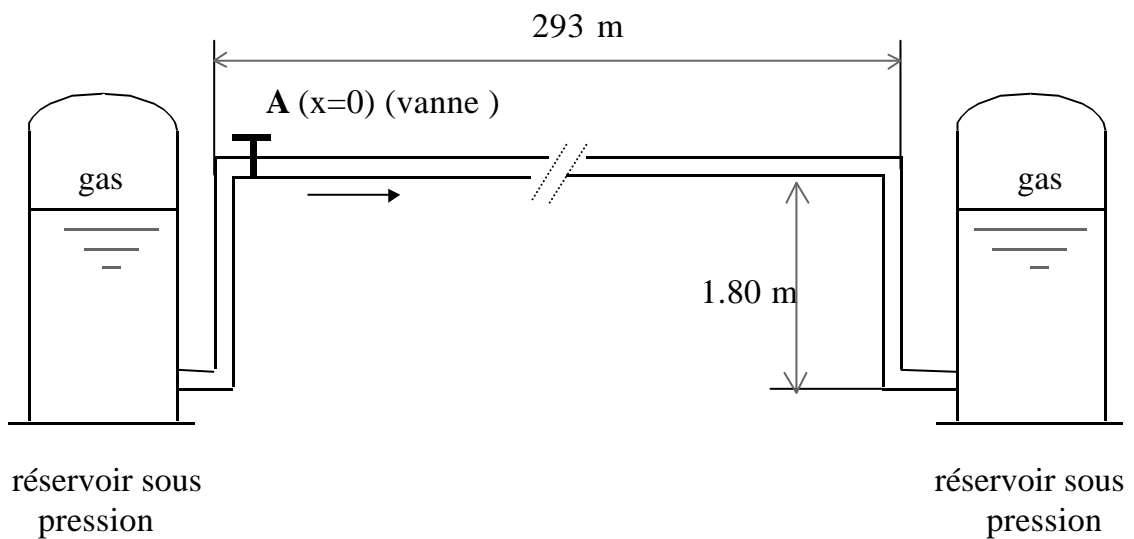


Figure a.

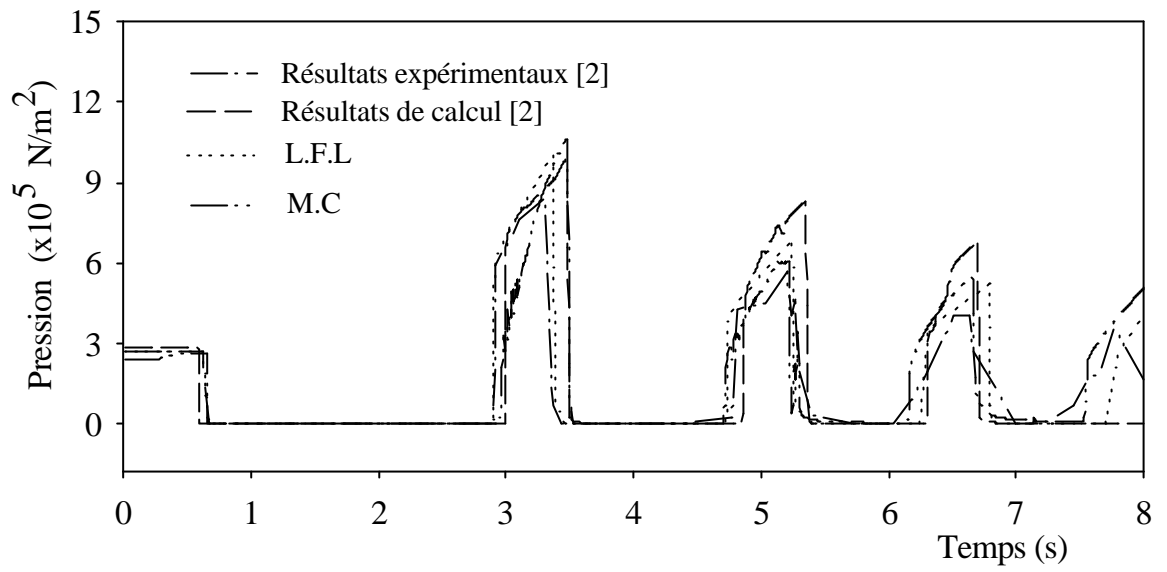


Figure 1. Pression au point $x=0$, pour $C_0=0.02$.

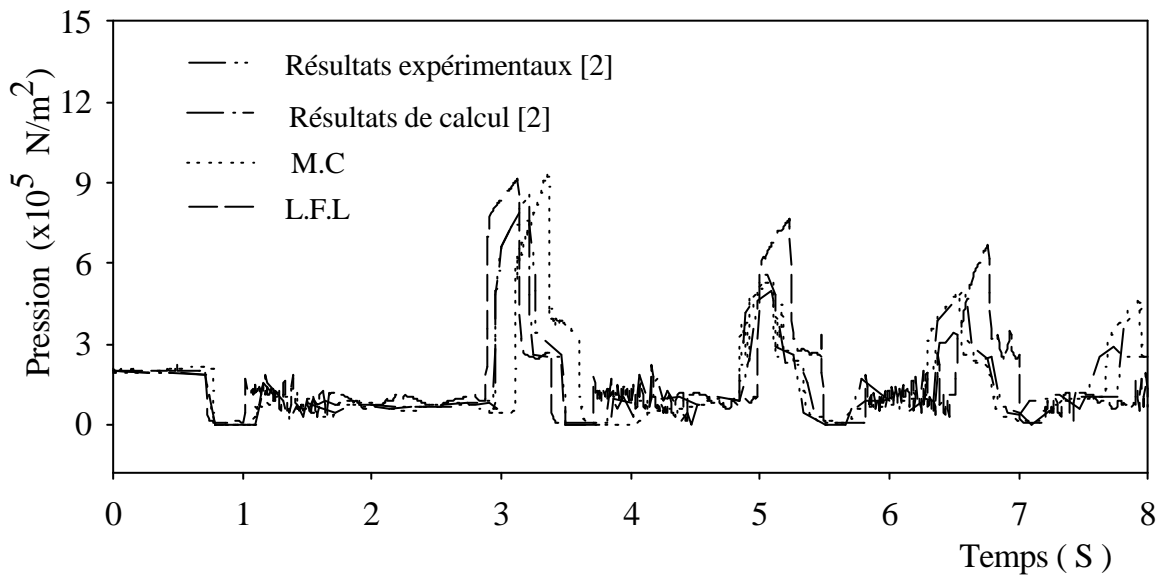


Figure 2. Pression au point $x=0.5*L$, pour $C_0=0.02$.

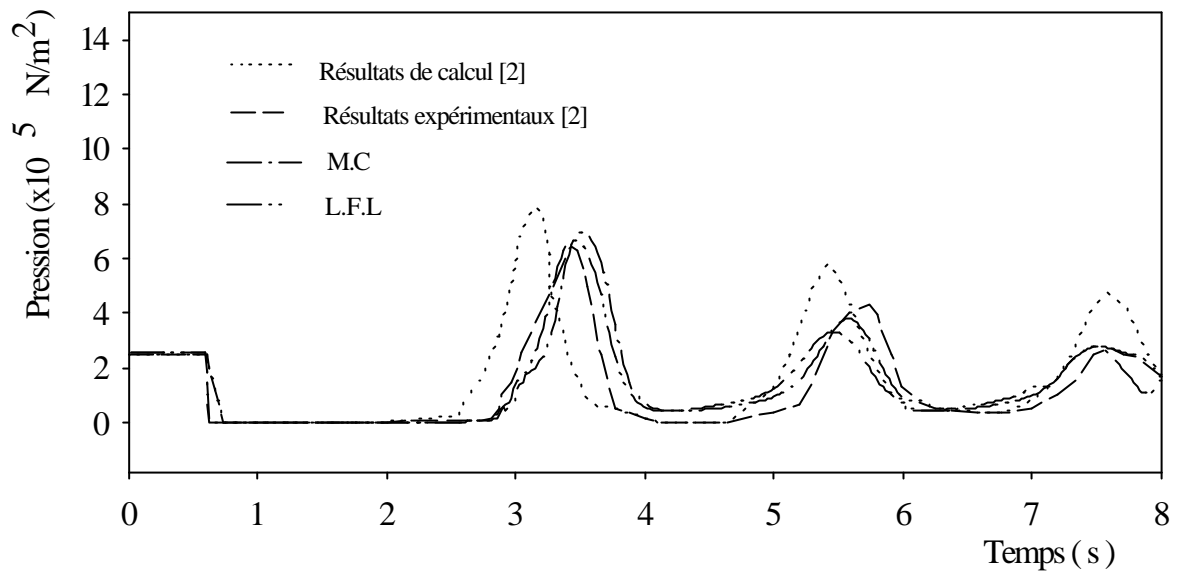


Figure 3. Pression au point $x=0$, pour $C_0=0.6$.

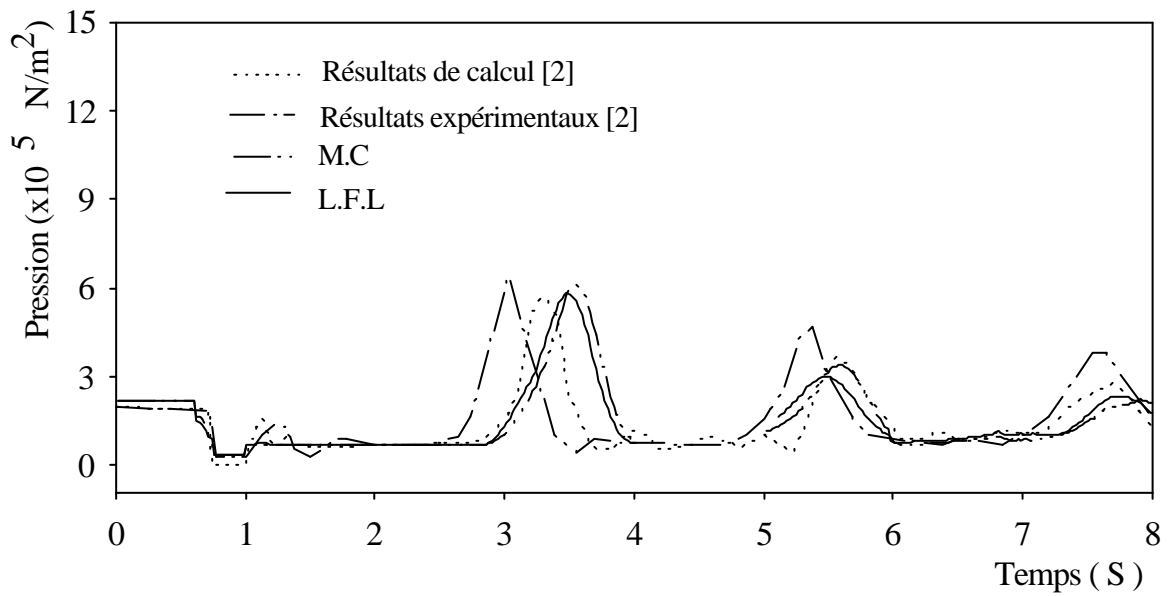


Figure 4. Pression au point $x=0.5 \cdot L$, pour $C_0=0.6$.

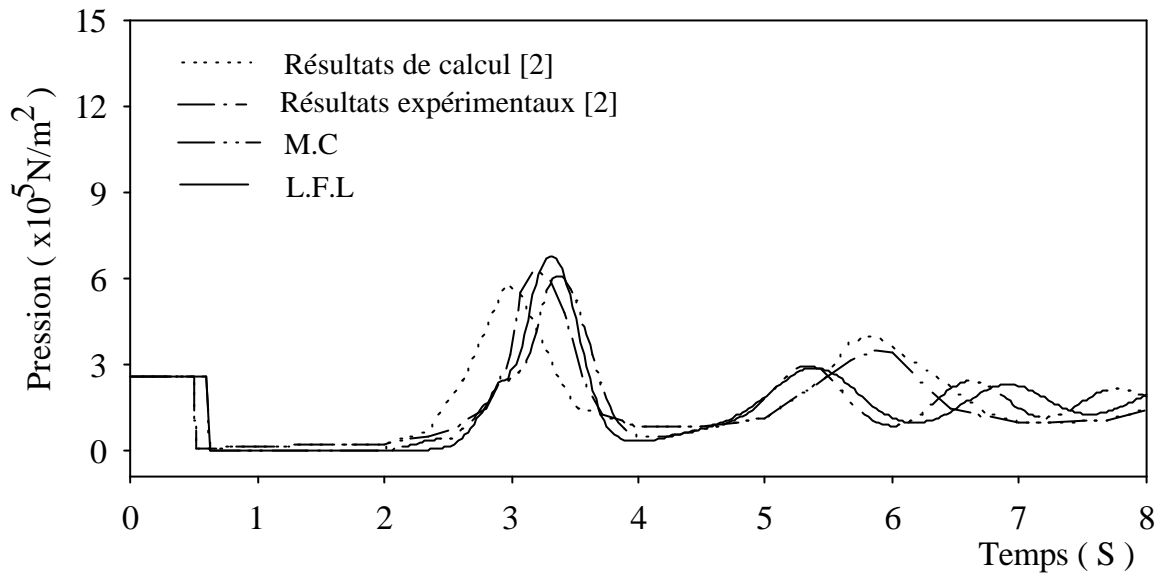


Figure 5. Pression au point $x=0$, pour $C_0=1.15$.

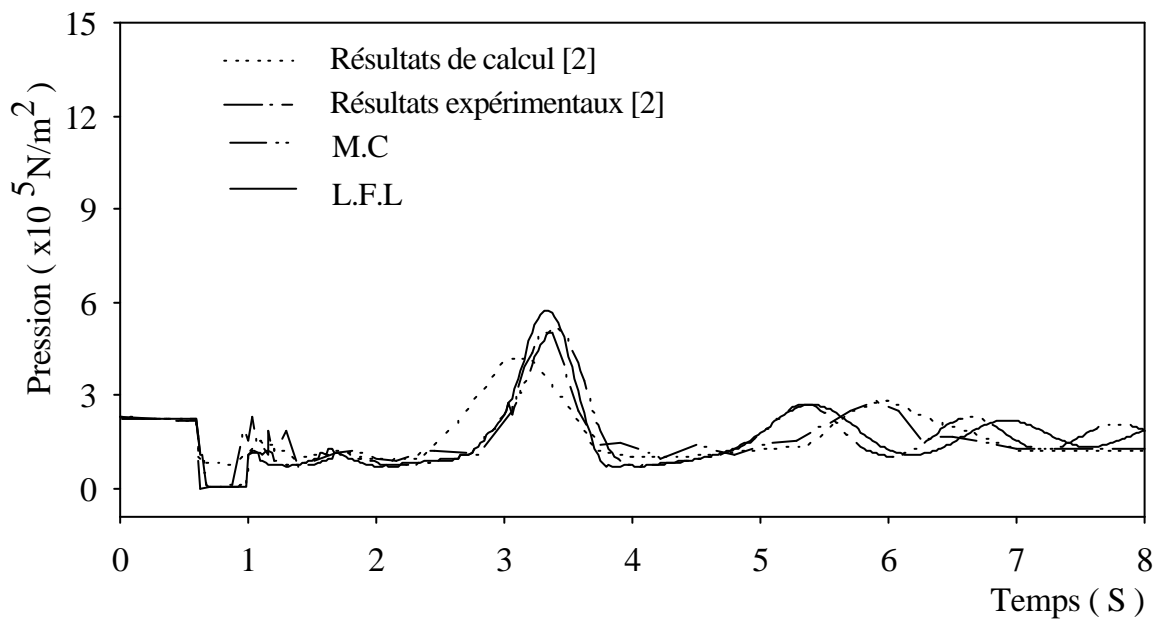


Figure 6. Pression au point $x=0.5*L$, pour $C_0=1.15$.

DEUXIÈME PARTIE

RECHERCHE DES CONDITIONS DE CAUCHY D'UNE COUCHE LIMITE LAMINAIRE EN CONVECTION MIXTE

1. INTRODUCTION

Les couches limites qui se développent le long d'une paroi ont fortement tendance à s'épaissir, voire même à décoller, dès que l'écoulement est ralenti, particulièrement sous l'effet d'un gradient de pression adverse, d'une onde de choc, etc... Dans le cas présent, ce sont les forces d'origine thermique qui provoquent le ralentissement dans certains domaines dits de convection mixte défavorable. Aussi faibles soient elles, elles existent au voisinage du point de stagnation de convection forcée, où le sens de l'écoulement pariétal est imposé par ces forces plutôt que par les gradients de pression extérieure. C'est ainsi que se crée une zone de retour dont les caractéristiques sont décrites dans la référence [1] dans le cas d'un écoulement normal à une plaque plane chauffée. Dans le cas d'une paroi quelconque, l'analyse habituelle n'est qu'approximative dans la mesure où elle ne tient pas compte de l'influence de la courbure. L'abscisse à partir de laquelle se séparent les couches limites inférieure et supérieure constitue une inconnue supplémentaire du problème. Ce fait se traduit, rappelons le [2], par l'impossibilité de mener pas à pas le calcul à l'aide d'une série de Blasius et s'explique par le caractère elliptique des équations, compte tenu des interactions amont-aval. Quand on considère une formulation intégrale du problème à l'aide de la méthode de Pohlhausen, on est confronté au même type de difficulté, difficultés également rencontrées en utilisant les méthodes numériques. Ces difficultés ne sont pas liées aux méthodes de résolution utilisées mais reflètent le caractère elliptique de l'écoulement à l'approche du point de séparation. Ce caractère elliptique peut être retrouvé en imposant, non plus un gradient de pression extérieur, mais une autre condition pour la fermeture du problème. L'une des conditions les plus usitées, qui traduit un couplage fort entre l'écoulement dans la couche limite et l'écoulement extérieur consiste à imposer l'évolution de l'épaisseur de déplacement. L'équation de continuité intégrée sur l'épaisseur de la couche limite permet ainsi

de déduire l'écoulement extérieur. Pour cela il est possible d'employer les méthodes intégrales.

Le principe même de ces méthodes est de remplacer le système d'équations aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles ordinaires, après intégration selon la direction normale des équations de la couche limite. Signalons qu'il est possible dans une telle intégration d'obtenir une infinité d'équations intégrales distinctes. On peut alors adopter pour solutions numériques approchées celles qui vérifient les n premières équations de moment ainsi que les conditions aux limites. Le système ainsi défini est cependant ouvert et n'a de sens qu'associé à des relations auxiliaires de fermeture. La qualité de la méthode réside aussi bien dans le choix des relations de fermeture que dans le choix et le nombre d'équations à résoudre.

Les premiers calculs sur l'évolution de la couche limite laminaire en convection mixte furent effectués à l'aide d'une représentation polynomiale du quatrième degré des profils de vitesse (méthode de Pohlhausen), puis du cinquième degré par Makovski [3]. Les résultats restant imparfaits dans les zones décollées, Crocco et Lees [4] utilisent une équation d'entraînement en tant qu'équation auxiliaire. Toutefois, la difficulté de relier le coefficient ainsi introduit aux caractéristiques des profils conduisit Honda [5] et Tani [6] à remplacer l'équation d'entraînement par l'équation du premier moment de quantité de mouvement. Lees et Reeves [7] firent une synthèse des améliorations apportées depuis lors et donnèrent aux méthodes intégrales leur formulation actuelle.

Nous nous limiterons pour notre part, à une méthode simple inspirée de celle de Pohlhausen (Polidori et Al [8]). Sa relative simplicité de mise en œuvre et son efficacité font qu'elle est employée pour résoudre divers problèmes de couche limite.

Pour la clarté de l'exposé, nous nous placerons dans les conditions d'application des Hypothèses de Boussinesq. Nous admettrons aussi dans une

première partie que le nombre de Prandtl est différent de l'unité et dans une deuxième partie voisin de l'unité c'est-à-dire une égalité des épaisseurs des couches limites dynamique et thermique.

2. MODELISATION THEORIQUE

2.4. Equations de base

Sous leur forme addimensionnelle les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} &= U_e \frac{dU_e}{ds} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{g\beta_m L}{U_o^2} J_s \tilde{\theta} \\ u \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial s} + v \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A ces équations sont associées les conditions aux limites portant sur la vitesse et la température :

$$u=v=0 \quad \text{quand } n=0; \quad \theta=\theta_p(s)$$

$$u=u_i \quad \text{quand } n \rightarrow \infty; \quad \theta \rightarrow 0$$

Les variables géométriques et cinématique s , n , u et v sont rapportées respectivement aux grandeurs de référence L , $L.Re^{-0.5}$, U_o et $U_o.Re^{-0.5}$. Les paramètres L , Re et U_o peuvent représenter, respectivement, le rayon du cylindre pour L , le nombre de Reynolds de l'écoulement extérieur pour Re et la vitesse de l'écoulement extérieur U_o .

En introduisant les variables de similitude $\zeta = \frac{n}{\delta_D(s)}$ et $\eta = \frac{n}{\delta_T(s)}$, où δ_D et δ_T représentent respectivement les couches limites dynamique et thermique il est

possible d'exprimer les profils de vitesse et de température dans la couche limite sous formes de polynômes du quatrième degré en ζ et η . Compte tenu des conditions d'adhérence et des données thermiques à la paroi, ces profils s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u(s, \eta) &= a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + a_4 \zeta^4 \\ \tilde{\theta}(s, \eta) &= \tilde{h}(s) \left(1 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + b_4 \eta^4 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où $\tilde{h}(s)$ représente la distribution de la température à la paroi :

$$\tilde{h}(s) = \tilde{\theta}(s)$$

Les conditions d'adhérence permettent de déduire, en annulant les termes de convection dans les équations du mouvement et de l'énergie, les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=0} &= 0 \\ \left(\frac{d^2 u}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=0} &= -\delta^2 \left(U_e \frac{dU_e}{ds} + \frac{g\beta_m L}{U_o^2} J_s \tilde{h} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Le comportement asymptotique de l'écoulement à la frontière extérieure de la couche limite est décrit par les relations:

$$\left. \begin{aligned}
u(1) &= U_e \\
\tilde{\theta}(1) &= 0 \\
\left(\frac{du}{d\zeta}\right)_{\zeta=1} &= \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta}\right)_{\eta=1} = 0 \\
\left(\frac{d^2u}{d\zeta^2}\right)_{\zeta=1} &= \left(\frac{d^2\tilde{\theta}}{d\eta^2}\right)_{\eta=1} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) suffisent pour déterminer complètement les coefficients a_1, \dots, b_1, \dots des relations (2).

Après quelques manipulations élémentaires, les profils de vitesse et de température prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
u(s, n) &= U_e(s)(1 - F(\zeta)) + \tilde{\Lambda}(s).G(\zeta) \\
\tilde{\theta}(s, n) &= \tilde{h}(s).F(\zeta)
\end{aligned} \quad (5)$$

Où les fonctions F et G sont données par les expressions :

$$\begin{aligned}
F(\zeta) &= (1 - \zeta)^3(1 - \zeta) \\
G(\zeta) &= \frac{1}{6}\zeta(1 - \zeta)^3 \\
\tilde{\Lambda}(s) &= -\delta^2 \left(U_e \frac{dU_e}{ds} + \frac{g\beta_m L}{U_o^2} J_s \tilde{h} \right)
\end{aligned} \quad (6)$$

$\tilde{\Lambda}(s)$ représente le paramètre de forme.

Nous poserons dans la suite :

$$\tilde{h}(s) = \left(\frac{1}{2} \delta_D(s) \right)^k h^*(s) \quad (7)$$

Cette écriture permet de considérer les deux types classiques de données thermiques à la paroi :

$h^*(s) = \tilde{\theta}_p(s)$, $k=0$ quand la distribution de température de paroi est fixée.

$h^*(s) = -\phi_p(s)$, $k=1$ quand la distribution de densité de flux thermique à la paroi est fixée.

La détermination complète des profils (6) nécessite la connaissance de l'évolution, le long de la paroi, des épaisseurs δ_D et δ_T des couches limites. On utilise à cet effet, l'équation du mouvement sous la forme globale, c'est-à-dire intégrée sur la plus grande de ces deux épaisseurs.

2.2. Equations globales des couches limites dynamique et thermique

Les équations locales (1) intégrées sur la plus grande des deux épaisseurs deviennent :

$$\frac{d}{ds} \tilde{\delta}_2 + \delta_1 \frac{dU_e}{ds} = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} - m_{cm} J_s I_D \quad (8)$$

$$\frac{d}{ds} I_T = - \frac{v}{P_r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_{n=0} \quad (9)$$

$$\text{où : } m_{cm} = \frac{g \beta_m \Delta T}{U_o}$$

où m_{cm} désigne le paramètre de convection mixte, δ_1 , δ_2 , I_D et I_T sont les grandeurs intégrales définies par :

$$\left. \begin{aligned}
\tilde{\delta}_1 &= \int_0^{\delta_p} (U_e - u) dn \\
\tilde{\delta}_2 &= \int_0^{\delta_p} u(U_e - u) dn \\
I_D &= \int_0^{\delta_p} \theta(s, n) dn \\
I_T &= \int_0^{\delta_r} u \theta(s, n) dn
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Remarquons que les grandeurs $\tilde{\delta}_1$ et $\tilde{\delta}_2$ sont reliées aux épaisseurs de déplacement δ_1 et de quantité de mouvement δ_2 par les équations :

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_1 &= U_e \cdot \delta_1 \\
\tilde{\delta}_2 &= U_e^2 \cdot \delta_2
\end{aligned} \quad (11)$$

Elles ont l'avantage d'être régulières sur toute l'épaisseur de la couche limite. Les épaisseurs classiques δ_1 et δ_2 par contre peuvent présenter des singularités quand n et U_e ne s'annulent pas simultanément. Cette situation peut se produire justement quand la convection mixte n'est pas uniformément favorable ou défavorable.

Ces grandeurs dynamiques sont reliées à l'épaisseur de la couche limite dynamique par :

$$\left. \begin{aligned}
\tilde{\delta}_2 &= P_2(U_e, \tilde{\Lambda}) \cdot \delta_D \\
\tilde{\delta}_1 &= P_1(U_e, \tilde{\Lambda}) \cdot \delta_D
\end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

avec :

$$P_1 = \frac{3}{10} U_e - \frac{1}{120} \tilde{\Lambda} \quad (12b)$$

$$P_2 = \frac{37}{315} U_e^2 - \frac{1}{945} U_e \tilde{\Lambda} - \frac{1}{9072} \tilde{\Lambda}^2$$

nous avons aussi, compte tenu des expressions (5) et (6) :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} &= \frac{1}{\delta_D} P_o(U_e, \tilde{\Lambda}) \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_{n=0} &= -\frac{2}{\delta_T} \theta_p(s) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{Où : } P_o = 2U_e + \frac{\tilde{\Lambda}}{6}$$

Compte tenu des relations (5) et (6) les grandeurs intégrales I_D et I_T prennent la forme suivante :

$$I_D = \theta_p(s) \cdot \delta_T \cdot H_o(\Delta) \quad (14)$$

où Δ représente le rapport des épaisseurs des couches limites dynamique et

thermique : $\Delta = \frac{\delta_T}{\delta_D}$ et les paramètres :

$$H_o = \begin{cases} \frac{3}{10} & \text{si } \Delta \leq 1 \\ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{2\Delta^4} - \frac{1}{5\Delta^5} & \text{si } \Delta > 1 \end{cases}$$

pour :
$$I_T = \theta_p(s) \cdot \delta_T(s) [U_e(s)H_1(\Delta) + \tilde{\Lambda}(s)H_2(\Delta)] \quad (15)$$

$$H_1(\Delta) = \begin{cases} \frac{2}{15}\Delta - \frac{3}{140}\Delta^3 + \frac{1}{180}\Delta^4 & \text{si } \Delta \leq 1 \\ \frac{3}{10} - \frac{3}{10}\frac{1}{\Delta} + \frac{2}{15}\frac{1}{\Delta^2} - \frac{3}{140}\frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{180}\frac{1}{\Delta^5} & \text{si } \Delta > 1 \end{cases}$$

$$H_2(\Delta) = \begin{cases} \frac{\Delta}{90} - \frac{\Delta^2}{84} + \frac{3}{560}\Delta^3 - \frac{1}{1080}\Delta^4 & \text{si } \Delta \leq 1 \\ \frac{1}{120}\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{180}\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{840}\frac{1}{\Delta^4} - \frac{1}{3024}\frac{1}{\Delta^5} & \text{si } \Delta > 1 \end{cases}$$

Le calcul des grandeurs intégrales I_D et I_T ainsi que les polynômes H_0 , H_1 et H_2 est donné dans l'annexe E.

L'équation (8), multipliée par δ_D , après y avoir remplacé I_D , par l'expression (14), nous donne:

$$\delta \frac{dP_2}{ds} + P_2 \frac{d\delta}{ds} + \delta \cdot P_1 \frac{dU_e}{ds} = P_o - m \cdot J_s \cdot \Delta \cdot \theta_p(s) \cdot H_o(\Delta) \quad (16)$$

$$\text{où : } \delta = \delta_D^2$$

Cette équation, transformée à l'aide des expressions (12b) donne l'équation dynamique d'évolution des épaisseurs des couches limites:

$$\left(2 \tilde{\Lambda} \frac{\partial P_2}{\partial \tilde{\Lambda}} + P_2 \right) \frac{d\delta}{ds} + 2 \frac{\partial P_2}{\partial \tilde{\Lambda}} \frac{dg}{ds} \delta^2 + \delta \left[2 \frac{dU_e}{ds} \left(P_1 + \frac{\partial P_2}{\partial U_e} \right) + 2 \cdot m \cdot J_s \cdot \theta_p(s) \cdot \Delta \cdot H_o(\Delta) \right] - 2 P_o = 0 \quad (17)$$

De la même manière, l'équation de l'énergie (9) devient, après avoir utilisé l'expression de l'intégrale I_r (annexe E) :

$$\delta^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta \cdot \frac{d}{ds} \left(\theta_p(s) U_e \delta^{\frac{1}{2}} \tilde{H}_1(\Delta) + \theta_p(s) f \delta^{\frac{3}{2}} \tilde{H}_2(\Delta) \right) - \frac{2}{P_r} \theta_p(s) = 0 \quad (18)$$

$$\text{où : } \quad \tilde{H}_1(\Delta) = \Delta \cdot H_1(\Delta) \quad \text{et} \quad \tilde{H}_2(\Delta) = \Delta \cdot H_2(\Delta)$$

Cette équation s'écrit après quelques réarrangements :

$$\begin{aligned} \delta \Delta \theta_p(s) \left(U_e \frac{d\tilde{H}_1}{d\Delta} + \tilde{\Lambda} \frac{d\tilde{H}_2}{d\Delta} \right) \frac{d\Delta}{ds} + \Delta \frac{\theta_p(s)}{2} \left(\tilde{H}_1 U_e + \tilde{\Lambda} \tilde{H}_2 \right) \frac{d\delta}{ds} + \\ \delta \Delta \left(\tilde{H}_1 \frac{d}{ds} (U_e \theta_p(s)) + \tilde{H}_2 \frac{d}{ds} (\theta_p(s) \tilde{\Lambda}) \right) - \frac{2\theta_p(s)}{P_r} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

2.3. Conditions de Cauchy associés au système (17)-(18)

Sur le plan mathématique, résoudre le problème de Cauchy pour le système d'équations précédent consiste à prévoir l'évolution des paramètres de la couche limite en fonction des coordonnées cylindriques choisies, sachant qu'au temps $t=t_0$ le système est décrit par x_0, y_0 . Ces derniers ainsi que les paramètres correspondants qui en seront déduits sont appelés conditions de Cauchy de notre problème (Demally [9]).

Pour des raisons de commodité, écrivons le système (17)-(18) sous la forme :

$$A \frac{d\delta}{dx} = F \quad (20)$$

$$B \frac{d\delta}{dx} + C \frac{d\Delta}{dx} = G \quad (21)$$

Les conditions de Cauchy pour le système (20)-(21) sont données par les singularités correspondant à l'annulation du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, soit :

$$A \cdot C = 0$$

Une évolution régulière des conditions aux limites impose l'annulation simultanée des fonctions A et C. Dans le cas contraire, l'une des épaisseurs aurait un comportement singulier. La condition A=0 fournit une relation entre le paramètre de forme $\tilde{\Lambda}$ et la vitesse externe :

$$\tilde{\Lambda} = -17.76 \quad (22)$$

La condition C=0, compte tenu de (3), donne la valeur de Δ :

$$\text{Soit :} \quad \Delta = \Delta_0 \quad (23)$$

Le report de (22) et (23) dans l'équation F=0 permet de trouver les positions du point singulier d'où démarrent les deux couches limites. Ce dernier résultat conduit à la valeur correspondant de l'épaisseur δ_D à partir de (22).

L'évaluation des fonctions G et B donne la valeur de la dérivée $\left(\frac{d\delta}{dx} \right)_{x=x_0}$.

Un développement limité à l'ordre un de l'équation (20) permet d'obtenir la dérivée $\left(\frac{d\Delta}{dx} \right)_{x=x_0}$. Ces valeurs constituent les conditions de Cauchy pour les équations d'évolution des épaisseurs des couches limites dont la résolution est effectuée au moyen d'une méthode de Runge Kutta d'ordre 4.

2.4. Etude du cas où le nombre de Prandtl est voisin de l'unité.

La première équation du système (20)-(21) intégrée sur l'épaisseur de la couche limite s'écrit :

$$\int_0^{\delta} \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} - U_e \frac{dU_e}{ds} \right) dn = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_0^{\delta} + \frac{g \beta_m L}{U_o^2} J_s \int_0^{\delta} \tilde{\theta}(s, n) dn \quad (24)$$

En écrivant le terme d'inertie sous la forme conservative :

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial(u^2)}{\partial s} + \frac{\partial(uv)}{\partial n}$$

le premier membre de l'équation (24) devient ainsi :

$$\int_0^{\delta} \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} - U_e \frac{dU_e}{ds} \right) dn = \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial s} - U_e \frac{dU_e}{ds} \right) dn + (uv)_o^{\delta} \quad (25)$$

L'équation de continuité permet d'écrire :

$$v(s, n) = - \int_0^{\delta} \frac{\partial u(s, n)}{\partial s} dn$$

on obtient alors :

$$(uv)_o^{\delta} = - U_e \int_0^{\delta} \frac{\partial u(s, n)}{\partial n} dn \quad (26)$$

$$(uv)_o^{\delta} = \int \left(u \frac{dU_e}{ds} - \frac{\partial(uU_e)}{\partial s} \right) dn$$

Compte tenu des expressions (25) et (26), l'équation (24) devient :

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial s} (u(U_e - u)) dn + \frac{dU_e}{ds} \int_0^{\delta} (U_e - u) dn = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} - \frac{3}{10} \frac{1}{2^k} \frac{g\beta_m L}{U_o^2} J_s h^* \delta^{k+1} \quad (27)$$

posons:

$$\tilde{\delta}_1 = \int_0^{\delta} (U_e - u) dn \quad (28)$$

$$\tilde{\delta}_2 = \int_0^{\delta} u(U_e - u) dn$$

l'équation (27) prend finalement la forme :

$$\frac{d}{ds} \tilde{\delta}_2 + \tilde{\delta}_1 \frac{dU_e}{ds} = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_n - \frac{3}{10} \frac{1}{2^k} \frac{g\beta_m L}{U_o^2} J_s h^* \delta^{k+1} \quad (29)$$

2.4.1. Problème de Cauchy pour l'évolution de δ

2.4.1.1. Equation différentielle.

Après introduction des expressions (12a) dans l'équation (29), on obtient, compte tenu de l'expression du paramètre de forme, l'équation différentielle suivante :

$$\left(P_3 + \frac{k}{2} f_1 \delta^{\frac{k}{2}+1} P_4 \right) \frac{d\delta}{ds} + \delta^2 \left(\frac{df_o}{ds} + \delta^{\frac{k}{2}} \frac{df_1}{ds} \right) P_4 + \delta \left(P_5 \frac{dU_e}{ds} + \frac{3}{5} \delta^{\frac{k}{2}} f_1 \right) - 2P_o = 0 \quad (30)$$

Le frottement à la paroi s'écrit aussi :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} = \frac{1}{\delta_D(s)} P_o(U_e, \tilde{\Lambda}) \quad (31)$$

où :

$$\delta = \delta_D^2$$

$$f_o = U_e \frac{dU_e}{ds}$$

$$f_1 = \frac{1}{2^k} \frac{g\beta_m L}{U_o^2} J_s h^*$$

$$P_3 = P_2 + 2 \frac{\partial P_2}{\partial \tilde{\Lambda}} = \frac{37}{315} U_e^2 - \frac{1}{315} U_e \tilde{\Lambda} - \frac{5}{9072} \tilde{\Lambda}^2$$

$$P_4 = 2 \frac{\partial P_2}{\partial \tilde{\Lambda}} = -\frac{2}{945} U_e - \frac{1}{2268} \tilde{\Lambda}$$

$$P_5 = 2 \left(P_1 + \frac{\partial P_2}{\partial U_e} \right) = \frac{337}{315} U_e - \frac{71}{3780} \tilde{\Lambda}$$

2.4.1.2. Recherche d'une condition initiale.

La condition de départ nécessaire à la détermination complète de l'épaisseur de la couche limite est plus ou moins facile à trouver selon la nature du problème considéré. Ecrivons afin de simplifier la discussion, l'équation (30) sous la forme générale suivante :

$$P(s, \delta) \frac{d\delta}{ds} = F(s, \delta) \quad (32)$$

$$\text{où : } P(s, \delta) = P_3 + \frac{k}{2} f_1 \delta^{\frac{k}{2}+1} P_4$$

$$F(s, \delta) = 2P_o - \delta^2 \left(\frac{df_o}{ds} + \delta^{\frac{k}{2}} \frac{df_1}{ds} \right) P_4 - \delta \left(P_5 \frac{dU_e}{ds} + \frac{3}{5} \delta^{\frac{k}{2}} f_1 \right)$$

Compte tenu des conditions initiales S_o et δ_o , le développement des termes $P(s, \delta)$ et $F(s, \delta)$ en série de Taylor permet d'écrire l'équation ci-dessus sous la forme générale suivante :

$$A_1 \left(\frac{d\delta}{ds} \right)^2 + B_1 \frac{d\delta}{ds} + C_1 = 0 \quad (33)$$

$$\text{où : } A_1 = f \frac{\partial P_3}{\partial \tilde{\Lambda}}$$

$$B_1 = \frac{dU_e}{ds} \left[\frac{\partial P_3}{\partial u_e} + P_5 + \tilde{\Lambda} \frac{\partial P_5}{\partial \tilde{\Lambda}} \right] + \delta \frac{df}{ds} \left[\frac{\partial P_3}{\partial \tilde{\Lambda}} + 2P_4 + \tilde{\Lambda} \frac{\partial P_4}{\partial \tilde{\Lambda}} \right] + \frac{3}{5} f_1 - 2f \frac{\partial P_o}{\partial \tilde{\Lambda}}$$

$$C_1 = \delta^3 \frac{\partial P_4}{\partial \tilde{\Lambda}} \left(\frac{df}{ds} \right)^2 + \delta^2 \left[P_4 \frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{du_e}{ds} \frac{df}{ds} \left(\frac{\partial P_5}{\partial \tilde{\Lambda}} + \frac{\partial P_4}{\partial U_e} \right) \right] + \delta \left[\left(\frac{dU_e}{ds} \right)^2 \frac{\partial P_5}{\partial U_e} - 2 \frac{df}{ds} \frac{\partial P_o}{\partial \tilde{\Lambda}} + P_5 \frac{d^2 U_e}{ds^2} + \frac{3}{5} \frac{df_1}{ds} \right] - 2 \frac{\partial P_o}{\partial U_e} \frac{dU_e}{ds}$$

$$\text{avec : } f = f_o + f_1$$

$$\tilde{\Lambda} = \delta \cdot f(s)$$

2.4.2. Etude de certains cas particuliers

2.4.2.1. Convection naturelle

En convection naturelle ($U_e=0$), les profils de vitesse prennent la forme suivante :

$$u(s,\zeta) = \tilde{\Lambda}(s).G(\zeta) \quad (34)$$

$$\text{avec : } \tilde{\Lambda}(s) = \frac{1}{2^k} J_s h^* \cdot \delta_D^{k+2}$$

l'épaisseur de la couche limite est ici normalisée par le paramètre $G_r^{\frac{1}{4}}$.
L'équation (13) devient :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\tilde{\Lambda}^2}{9072} \delta_D \right) = -\frac{\tilde{\Lambda}}{6\delta} + \frac{3}{10} \frac{1}{2^k} J_s \cdot h^* \cdot \delta_D^{k+1} \quad (35)$$

En remplaçant $\tilde{\Lambda}$ par son expression, on obtient :

$$\frac{d}{ds} \left((J_s \cdot h^*)^2 \delta_D^{2k+5} \right) = \frac{9072}{15} 2^{k+1} J_s \cdot h^* \cdot \delta_D^{k+1} \quad (36)$$

En posant :

$$Z = (J_s \cdot h^*)^2 \delta_D^{2k+5} \quad (37)$$

on obtient finalement :

$$Z^{\frac{k+4}{2k+5}} = \frac{9072}{15} 2^{k+1} \frac{k+4}{2k+5} \int_0^s (J_s \cdot h^*)^{\frac{3}{2k+5}} dn \quad (38)$$

La constante d'intégration est nulle car $\tilde{\Lambda}(0) = 0$ puisque $u(0, \zeta) = 0$.

A partir de (36) et de (38), on déduit l'expression, en fonction de l'abscisse, de la couche limite :

$$\delta_D(s) = \left(\frac{9072}{15} 2^{k+1} \frac{k+4}{2k+5} \right) (J_{S \cdot h^*})^{-\frac{3}{2k+5}} \left(\int_0^S (J_{S \cdot h^*})^{\frac{3}{2k+5}} dn \right)^{\frac{4}{k+4}} \quad (39)$$

L'épaisseur initiale de la couche limite se déduit de l'expression précédente par un passage à la limite $S \rightarrow 0$.

Soit $J_{S \cdot h^*} \approx S^m$ le comportement du produit $J_{S \cdot h^*}$ au voisinage de $S=0$, on obtient :

$$\delta_D(s)_{S \rightarrow 0} = \left(9072 \frac{2^{k+1}}{15} \frac{k+4}{3m+2k+5} \right)^{\frac{1}{k+4}} S^{\frac{1-m}{k+4}} \quad (40)$$

Cette expression montre que l'épaisseur de la couche limite n'admet une valeur finie non nulle que si $m=1$. Cette condition est obtenue pour des données aux limites constantes, si le bord d'attaque de convection naturelle est arrondi, on a alors :

$$\delta_D(0) = 4.959 \text{ si } T_p \text{ est fixée}$$

$$\delta_D(0) = 4.1355 \text{ si } \phi_p \text{ est fixée}$$

2.4.3. autres cas particuliers

Les autres cas particuliers sont caractérisés par la condition: la fonction $J_S \cdot \tilde{h} \cdot U_e^{-1}$ n'est pas infinie au point de stagnation ($S=0$) de l'écoulement de

fluide parfait. Cette condition est réalisée si $(J_S, \tilde{h})(S) = 0$ ou $(J_S, \tilde{h}) \approx S^m (m \geq 1)$ puisque $(U_e)_{S \rightarrow 0} \approx S$. Les problèmes de la convection forcée ($J_S=0$) et de la convection mixte verticale appartiennent à cette classe de cas particuliers.

Dans cette condition, le point d'arrêt de fluide parfait est un point de stagnation. L'expression des profils de vitesse montre en effet que :

$$U_e(S_o) = 0 \quad \rightarrow \quad u(S_o) = 0 \quad (41)$$

Introduisons alors le paramètre de forme Λ , défini par :

$$\Lambda = \tilde{\Lambda} \cdot U_e^{-1}$$

Ce paramètre constitue une généralisation du paramètre de forme de la convection forcée.

L'équation (33) devient ainsi :

$$U_e \left(P_3(1, \Lambda) + \frac{k}{2} \tilde{f}_1 \delta^{\frac{k}{2}+1} P_4(1, \Lambda) \right) \frac{d\delta}{ds} + \delta^2 \left(\frac{df_o}{ds} + \delta^{\frac{k}{2}} \frac{df_1}{ds} \right) P_4(1, \Lambda) + \delta \left(P_5(1, \Lambda) \frac{dU_e}{ds} + \frac{3}{5} \delta^{\frac{k}{2}} \tilde{f}_1 \right) - 2P_o(1, \Lambda) = 0 \quad (42)$$

$$\text{avec : } \tilde{f}_1 = f_1 \cdot U_e^{-1}$$

Au point de stagnation on obtient l'équation :

$$\left(\frac{dU_e}{ds} \right)_0 \left(\Lambda_0^2 P_4(1, \Lambda_0) + \Lambda_0 P_5(1, \Lambda_0) - 2P_o(1, \Lambda_0) \right) = \delta_0^{\frac{k}{2}} \tilde{f}_1(0) \left(2P_o(1, \Lambda_0) - \frac{3}{5} \Lambda_0 \right) \quad (43)$$

avec , bien entendu , la relation :

$$\Lambda_0 = \delta_0 \left(\left(\frac{dU_e}{ds} \right)_0 + \delta_0^{\frac{k}{2}} \tilde{f}_1(0) \right) \quad (44)$$

Cette équation permet de calculer la valeur initiale de l'épaisseur de la couche limite et de déduire la valeur correspondante du paramètre de forme. Après quelques manipulations élémentaires on obtient aussi, sous réserve que

$\left(\frac{d^2 U_e}{ds^2} \right)_0 = 0$, l'équation permettant de calculer la quantité $\left(\frac{d\delta}{ds} \right)_0$, s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{d\delta}{ds} \left\{ \frac{dU_e}{ds} \left(P_3 + \frac{k}{2} \tilde{f}_1 P_4 \Delta^{\frac{k}{2}+1} \right) - \left(\frac{dU_e}{ds} + \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \delta^{\frac{k}{2}} \tilde{f}_1 \right) \left(-\delta^2 \frac{dU_e}{ds} \frac{dP_4}{d\Lambda} \left(\frac{dU_e}{ds} + \delta^{\frac{k}{2}} \tilde{f}_1 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \delta \frac{dU_e}{ds} \frac{dP_5}{d\Lambda} - 2 \frac{dP_0}{d\Lambda} \right) - \frac{3}{5} \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \tilde{f}_1 \delta^{\frac{k}{2}} - P_5 \frac{dU_e}{ds} - 2 \frac{dU_e}{ds} \left(\frac{dU_e}{ds} + \tilde{f}_1 \delta^{\frac{k}{2}} \right) \delta P_4 \right\} = \quad (45) \\ & \delta^{\frac{k}{2}+1} \frac{d\tilde{f}_1}{ds} \left\{ \frac{3}{5} + 2\delta P_4 \frac{dU_e}{ds} + \delta^2 \frac{dU_e}{ds} \left(\frac{dU_e}{ds} + \tilde{f}_1 \delta^{\frac{k}{2}} \right) \frac{dP_4}{d\Lambda} + \delta \frac{dU_e}{ds} \frac{dP_5}{d\Lambda} - 2 \frac{dP_0}{d\Lambda} \right\} \end{aligned}$$

Dans les problèmes où les conditions aux limites vérifient la condition :

$$\left(\frac{d\tilde{f}_1}{ds} \right)_{s=0} = 0$$

on obtient :

$$\left(\frac{d\delta}{ds} \right)_{s=0} = 0 \quad (46)$$

Cette condition est vérifiée quand les comportements , au voisinage du point de stagnation , des fonctions $J_s \cdot \tilde{h}$ et U_e sont semblables.

3. RESULTATS ET DISCUSSION

3.1. Application au cylindre circulaire (figure a)

3.1.1. Cas général (P_r est différent de l'unité)

Compte tenu de la procédure de calcul exposée au paragraphe 2.3, la figures 1 nous montre une répartition quasi-linéaire de la position du point de démarrage de la couche limite en fonction du paramètre de convection mixte G_c , et, ce pour plusieurs valeurs du nombre de Prandtl. La même allure peut être observée, sur la figure 2, pour le cas de la répartition de l'épaisseur de la couche limite dynamique au point de démarrage de la couche limite x_0 .

3.1.2. Cas où P_r est voisin de l'unité

On présente ici quelques résultats numériques concernant la convection naturelle et la convection mixte autour d'un cylindre horizontal. Ces résultats sont exprimés en termes d'évolution de l'épaisseur de la couche limite (figure3), du nombre de Nusselt (Figure 4) et du coefficient de frottement (Figure 5). Ils sont obtenus dans le cas où le cylindre est chauffé à température constante. On remarque que quelle que soit la valeur du paramètre de convection mixte G_c le décollement a lieu au même point. L'équation (42) munie d'une condition initiale déduite de l'équation (43) et de la condition (46), est résolue de proche en proche par un schéma de Runge Kutta d'ordre 4.

Le point de stagnation n'est pas à priori le seul point de départ pour la résolution de l'équation (42). Dans le cas, par exemple, d'une température de paroi fixée, la fonction P , qui se réduit au polynôme P_3 , s'annule pour les deux valeurs suivantes :

$$\Lambda_1 = 12 ; \quad \Lambda_2 = -17.76 \quad (47)$$

Le calcul numérique montre toutefois que le point de stagnation est l'unique point de démarrage de la couche limite car les fonctions $F(S_1, \Lambda_1)$ et $F(S_2, \Lambda_2)$, gardent partout sur l'intervalle $[0, \pi]$ un signe constant.

L'épaisseur de la couche limite au point de stagnation est obtenue en résolvant, par un processus de dichotomie, l'équation (43). Cette équation admet deux racines positives distinctes. En convection forcée, par exemple, les deux racines, indépendantes dans des conditions thermiques fixées à la paroi, sont :

$$\delta_{D1} = 1.8778 \quad \delta_{D2} = 2.9835 \quad (48)$$

Dans tous les cas envisagés, seul la plus petite des deux racines conduit à une évolution réaliste de la couche limite. En effet, prenons comme exemple celui de la convection forcée, l'épaisseur $\delta_{D2}(0)$ donne comme valeur du paramètre Λ en $S=0$:

$$\Lambda(0) = 17.8025$$

Comme $-12 < \Lambda(S) < \Lambda(0)$ (la valeur -12 est atteinte au point de séparation) la valeur $\Lambda_1=12$ serait alors atteinte en un point situé quelque part entre les points de stagnation et de décollement.

Le choix de la plus grande des racines $\delta_{D1}(0)$ et $\delta_{D2}(0)$ comme épaisseur initiale de la couche limite, conduirait donc à l'existence d'un point singulier où la dérivée $\frac{d\delta}{ds}$ serait infinie.

Ces remarques restent valables en convection mixte quelle que soit la condition limite thermique imposée. La détermination de l'épaisseur de la couche limite permet ensuite de déduire le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement à la paroi.

On remarque lors de la recherche des conditions de Cauchy (Annexe E, Polidori [9]) dans le cas d'une couche limite laminaire en convection mixte que le paramètre de convection mixte a pour effet d'éloigner le point de stagnation de la position du point d'arrêt de l'écoulement d'un fluide parfait dans le sens, vers le point de convection naturelle. Dans le tableau ci-dessous sont données quelques indications sur les caractéristiques de la zone de stagnation en fonction du paramètre de convection mixte et pour $Pr=1$.

$\frac{g\beta_m\Delta T}{U_\infty}$	0.5	0.75	1	2	2.75	4	10
$-S_A$	0.0583	0.0852	0.1134	0.2297	0.3163	0.4635	1.14
S_1	0.0454	0.0681	0.0909	0.1823	0.2513	0.3679	0.93
δ_1	2.0356	2.1367	2.2555	2.7145	2.9357	3.2707	4.73

Où $\frac{g\beta_m\Delta T}{U_\infty}$, S_A , S_1 et δ_{D1} désignent respectivement le paramètre de convection mixte, le point de stagnation, le point de démarrage et l'épaisseur de la couche limite dynamique.

Sur les figures 6,7,8, et 9 sont données les profils de répartition transversale de vitesse correspondant à des G_r différents et pour des positions angulaires différentes sur la circonférence du cylindre. Il es à remarquer que pour $G_r=4$ et $G_r=10$ un écoulement avec un gradient transversal de vitesse négatif apparaît en certains point de la paroi.

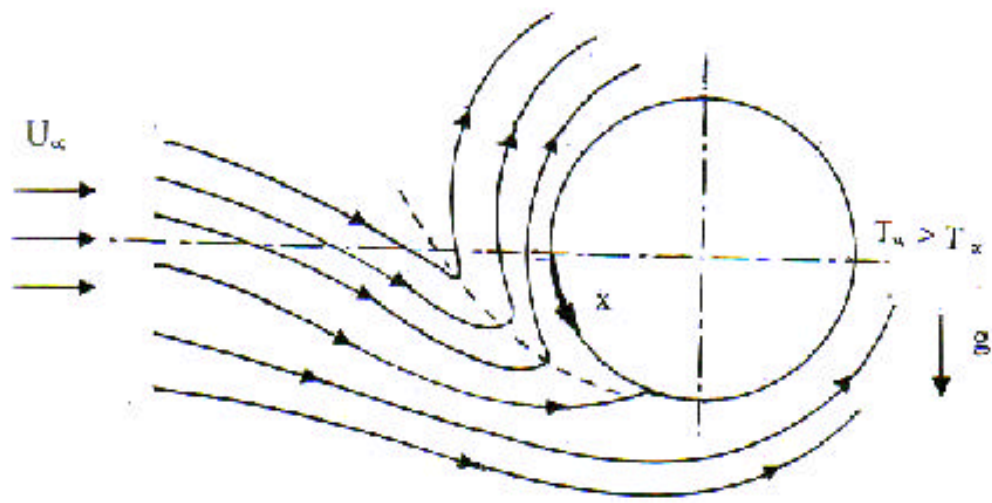


Figure a.

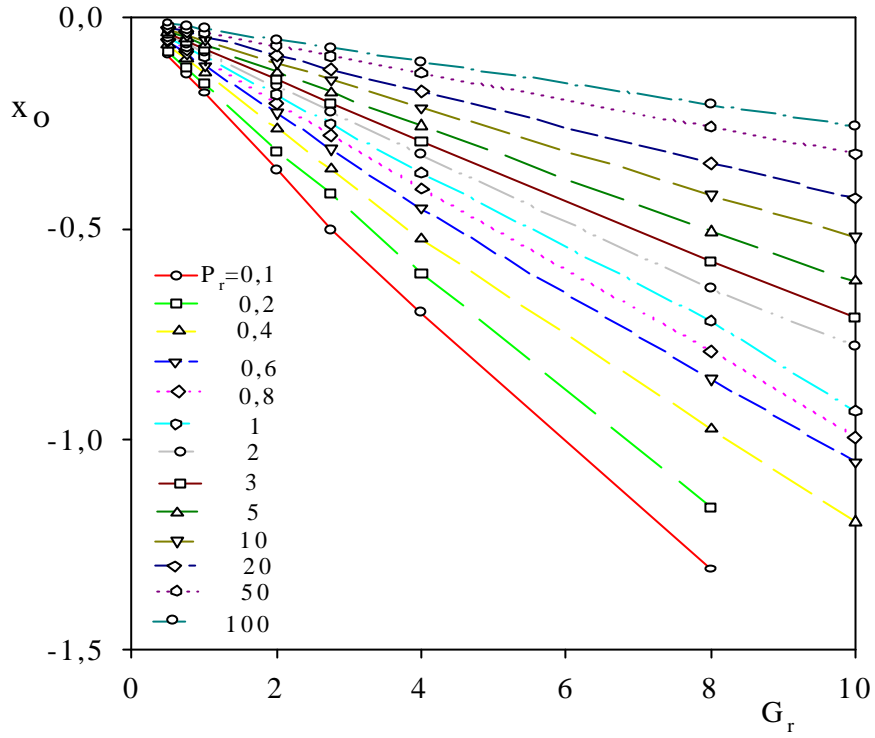


Figure 1. Evolution de x_0 en fonction de G_r et P_r .

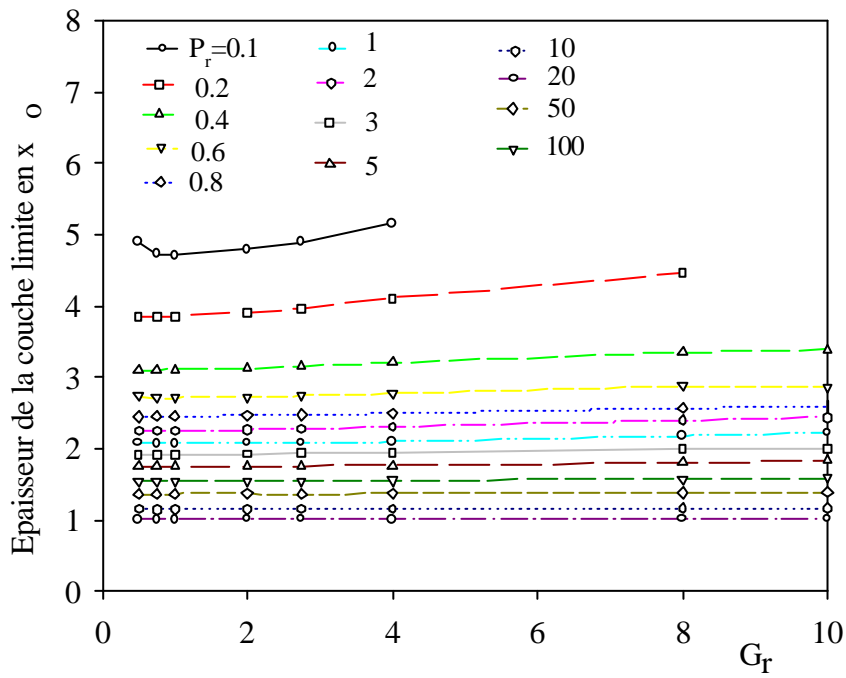


Figure 2. Evolution de l'épaisseur de la couche limite en x_0

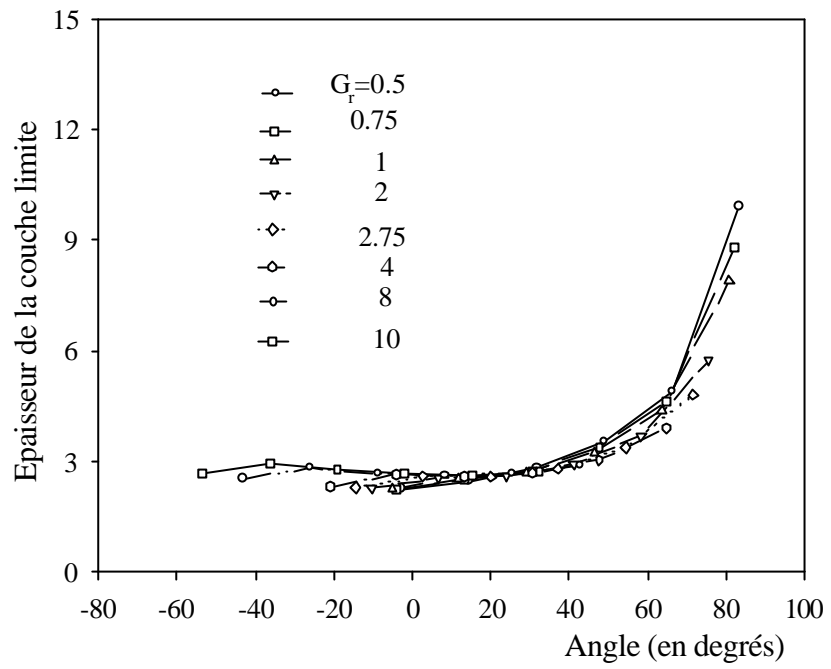


Figure 3. Evolution de l'épaisseur de la couche limite.

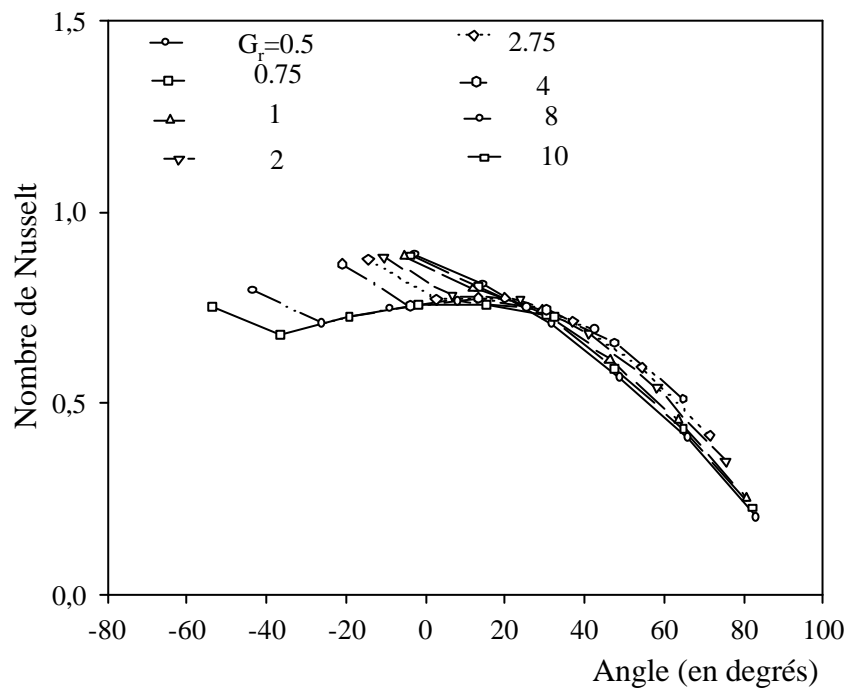


Figure 4. Evolution du nombre de Nusselt.

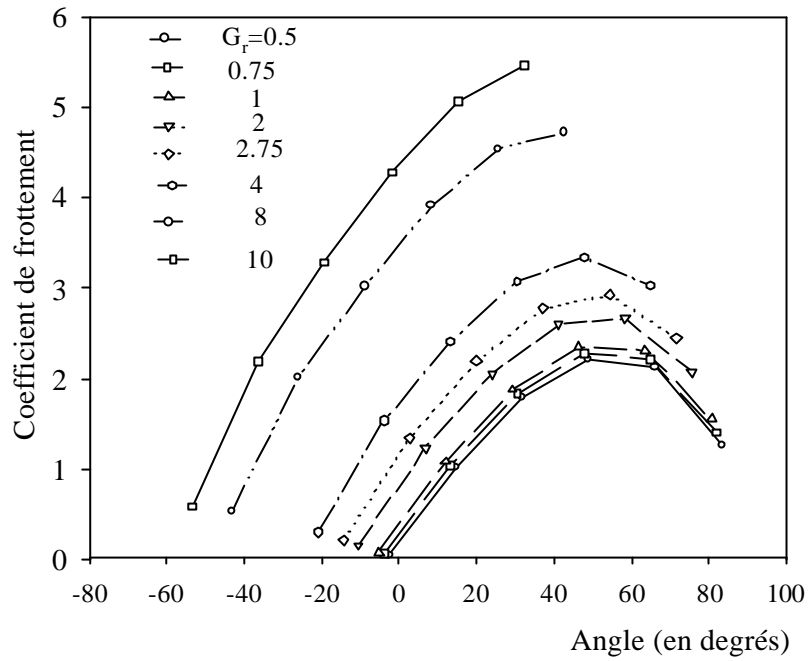


Figure 5. Evolution du coefficient de frottement.

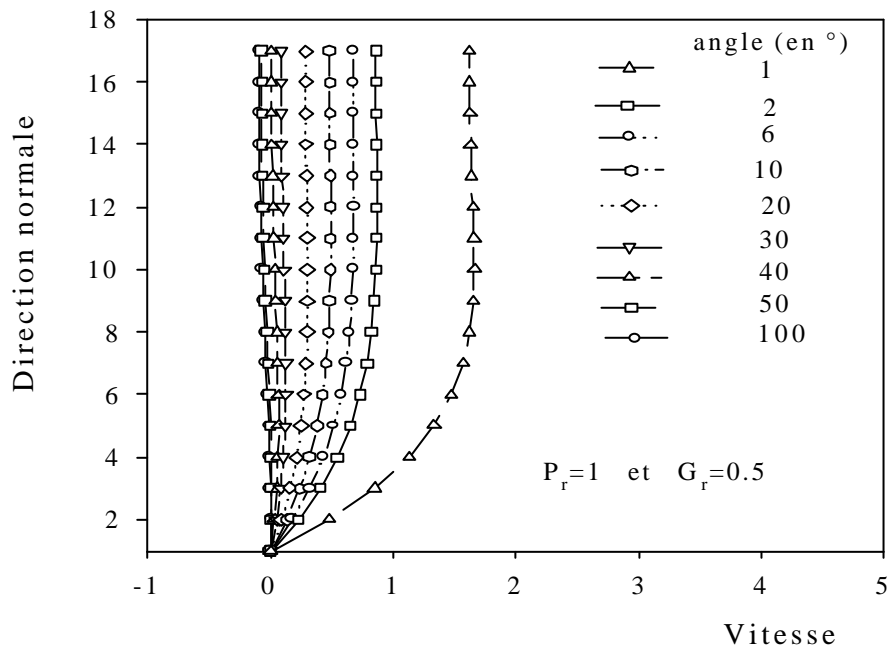


Figure 6. Profil transversal de vitesse.

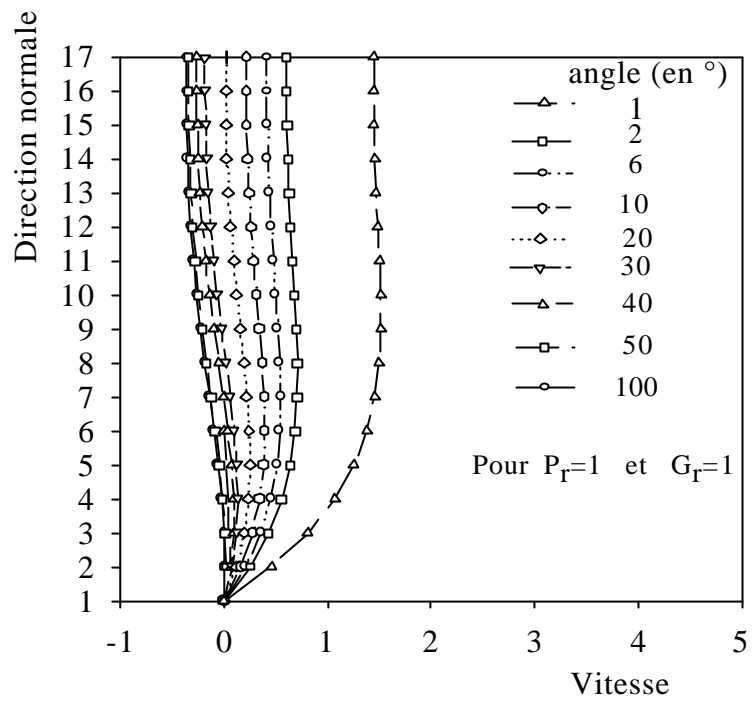


Figure 7. Profil transversal de vitesse.

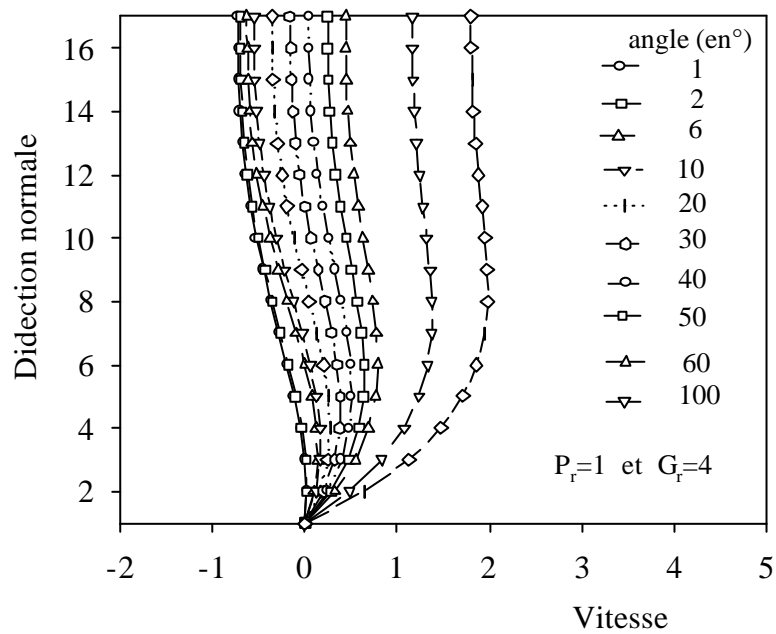


Figure 8. Evolution transversale de la vitesse.

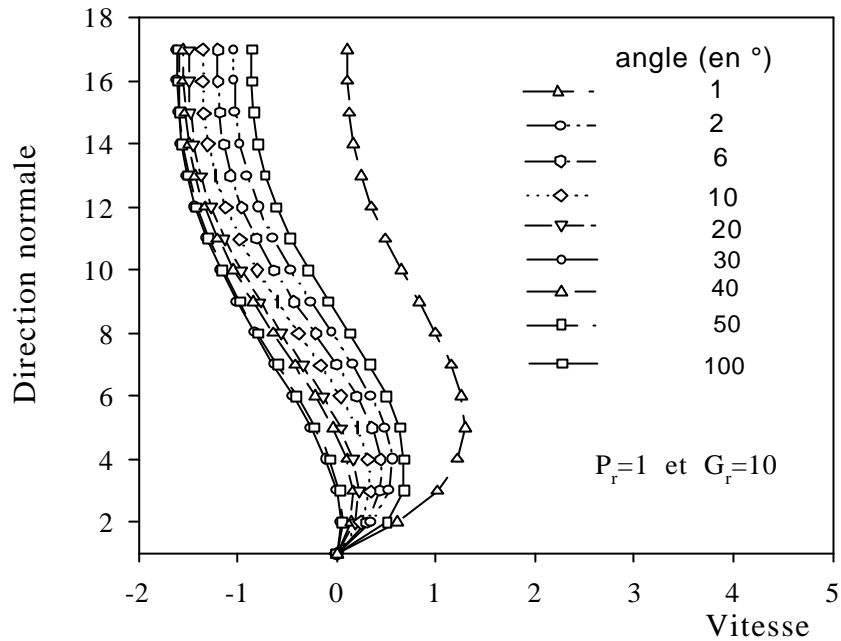


Figure 9. Profil transversal de vitesse.

4. CONCLUSION

La recherche du point de démarrage de la couche limite laminaire en fonction du nombre de Prandtl a permis de montrer l'interaction des couches limites dynamiques et thermiques ainsi que leur influence sur ce point et l'épaisseur de cette couche. La formulation générale du problème a permis de retrouver les valeurs correspondant au cas particulier où le nombre de Prandtl est voisin de l'unité. Sur le plan numérique, et, afin de palier le caractère approximatif des méthodes intégrales il serait plus réaliste de prendre en compte la variation des paramètres de l'écoulement extérieur.

6. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. F.J. Higuera, Opposite mixed convection flow in a wall jet over a horizontal plate, *J. Fluids Mechanics*, Vol. 342, pp. 355, 375, 1997.
2. M. Amaouche et A. Chennafi, Sur le refroidissement d'un cylindre chauffé en régime permanent de convection mixte, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 41, N°16, 1998, pp. 2419-2428.
3. R. Makovski, A two parameter method for shock wave laminar boundary layer interaction in flow separation. 1963.
4. L. Crocco and L. Lees, A mixing theory for the interaction between dissipative flows and nearly isentropic streams. *Aero. Science*, 25, 1952.
5. M. Honda, A theoretical investigation of the interaction between shock waves and boundary layers. *J.A.S.*, 25 , 1958.
5. I. Tani, On the approximative solution of the laminar boundary layer equations. *J .A.S.*, 21, 1954.
6. L. Lees and B.L. Reeves, Supersonic separated and reattaching laminar flows. Part. 1. General theory and application to adiabatic boundary layer shock wave interactions. , *A.I.A.A. Journal*, 2, 1964.
8. G. Polidori, M. Rebai et J. Padet, Retour sur les résultats de la théorie de la convection forcée laminaire établie en écoulement de couche limite externe 2D, *Int. J. Therm. Sc.* (1999), 38, 398-409.

9. J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Presses Universitaires de Grenoble, 1993.

NOMENCLATURE

- s direction parallèle à la paroi
n direction normale à la paroi
 J_s vecteur unitaire vertical ascendant
 J_s composante de J suivant s
 U_e vitesse de l'écoulement potentiel
 U vitesse d'écoulement dans la couche limite
 δ_D épaisseur de la couche limite dynamique
 δ_T épaisseur de la couche limite thermique
 L longueur de référence (dans notre cas elle est égale au rayon du cylindre).
 Δ rapport des couches limites dynamique et thermique
 β coefficient de dilatation thermique
 θ_p température réduite
 Λ paramètre de forme en convection mixte
 $\tilde{\Lambda} = \Lambda U_e$
 P_0, P_1, P_2, P_3 polynômes fonction de Λ et U_e
- F, G fonctions

Indices

o, s, e, D, T, p, respectivement : initial, coordonnée curviligne, extérieur, dynamique, thermique, paroi.

CONCLUSION GENERALE

Dans la première partie de ce mémoire nous avons présenté un ensemble de techniques numériques afin de simuler les écoulements de fluides compressibles en régime non stationnaire. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, en comparaison avec ceux produits par les schémas aux différences récents ou connus pour leur haute résolution. Les exemples d'application considérés ont fait l'objet d'une programmation sur ordinateur relativement simple avec une réduction sensible du temps de calcul.

Les techniques numériques présentées dans la première étude permettent de simuler la propagation des perturbations de la pression (ou du débit) de gaz à partir d'une extrémité d'un pipeline de manière satisfaisante. Nous avons montré que l'utilisation d'un schéma aux différences à deux pas de temps peut conduire à une programmation très simple des phénomènes considérés et une réduction du temps de calcul. De plus l'absence d'instabilités ou autres phénomènes d'atténuation font que ces modèles affichent une précision comparable aux récents schémas dits de haute résolution dont l'écriture est généralement plus sophistiquée, particulièrement dans le cas de réseaux de canalisations.

Dans une deuxième étude, l'introduction de la forme dite lambda des schémas aux différences finies pour le calcul de la dynamique des gaz à travers certaines singularités a permis une certaine souplesse de calcul pour les cas considérés. Des avantages similaires aux schémas récents ont été obtenus. L'application pour l'exemple de conduite avec un diamètre constant offre cependant une meilleure précision et un temps de calcul plus réduit. Néanmoins il reste à tester cette méthode pour les écoulements bidimensionnels.

Les phénomènes de cavitation lors d'un écoulement non stationnaire d'un mélange de liquide+gaz dissous ont fait l'objet d'une formulation analytique globale en tenant compte de la continuité du milieu fluide. La résolution

numérique des équations obtenues, dans le cas d'une conduite simple, a permis de reproduire de manière fidèle les observations expérimentales considérées. Afin de simplifier les calculs et optimiser le travail de programmation le nombre d'équations a été réduit. En outre, une nouvelle approche globale sur le dégazage, produit par les chutes successives brutales de la pression, est présentée. L'influence du gaz dégagé a pu être observée sur l'évolution des paramètres dynamiques de l'écoulement. Le travail futur consistera à quantifier le débit massique par unité de mélange de gaz dégagé par une analyse plus approfondie de la diffusion gazeuse à travers l'interface bulle-liquide

Dans la dernière partie ont été étudiées quelques structures d'écoulement de convection mixte dans le cadre des approximations de la couche limite. Nous avons mis en évidence que la non existence de conditions de Cauchy triviales pour un écoulement de couche limite laminaire en convection mixte non symétrique est en fait le résultat de l'interaction amont-aval qui confère à l'écoulement de la couche limite un caractère elliptique. L'utilisation de la méthode intégrale de type Karman-Pohlhausen a permis de caractériser le démarrage de la couche limite et recouvrer par conséquent la nature parabolique de l'écoulement dans le sens global. Il est montré que les deux couches limites, dynamique et thermique, ne démarrent pas du même point, excepté pour $Pr=1$. Dans les cas limites $Pr <$ et $Pr > 1$, la couche limite thermique démarre respectivement du point de stagnation de l'écoulement potentiel et du point d'annulation du terme de frottement. L'étape suivante pourrait traiter le cas général, qui consiste à analyser l'évolution des paramètres de la couche limite pour les autres valeurs du nombre de Prandtl en prenant comme point de départ les cas précédents.

Annexe A. Théorie des caractéristiques.

Considérons le système général de n équations à n inconnues $f_i(x,y)$.

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x} + b_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial y} \right) + d_i = 0 \quad (\text{A1})$$

Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , d_i ; $i,j=1, 2, \dots, n$, sont fonctions des $(n+2)$ variables (x, y, \dots, f_n) , deux fois continuellement différentiables, à dérivée première vérifiant une condition de Lipschitz* par rapport aux $(n+2)$ variables.

Nous noterons A et B les matrices:

$$A = [a_{ij}] \quad \text{et} \quad B = [b_{ij}] \quad i,j=1, 2, \dots, n$$

F et D les colonnes.

$$F = [f_i] \quad \text{et} \quad D = [d_i] \quad i=1,2 \dots, n$$

Le système (A1) s'écrit donc sous forme matricielle:

$$A \frac{\partial F}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial y} + D = 0 \quad (\text{A2})$$

Introduisons alors une transformation linéaire

$$L = [l_{ij}(x, y, f_i)] \quad \text{telle que:}$$

$$\left| \begin{array}{l} \det L \neq 0 \\ LA = \lambda LB \end{array} \right. \quad (\text{A3})$$

où λ est une matrice diagonale.

Appliquant L à (A2), on obtient:

$$LA \frac{\partial F}{\partial x} + LB \frac{\partial F}{\partial y} + LD = 0 \quad (A4)$$

Et notons:

$$LB = A^* = \left\| a_{ij}^* \right\|$$

$$LD = D^* = \left\| d_i^* \right\|$$

L'équation (A4) s'écrit alors:

$$CA^* \frac{\partial F}{\partial x} + A^* \frac{\partial F}{\partial y} + D^* = 0 \quad (A5)$$

La i ème équation de (A4) s'écrit:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^* \left(\frac{\partial f_j}{\partial y} + \lambda_{ii} \frac{\partial f_j}{\partial x} \right) + d_i^* = 0 \quad (A6)$$

Si ξ et η sont les composantes d'un vecteur unitaire tel que $\lambda_{ii} = \frac{\xi}{\eta}$ alors:

$$\frac{\partial f_j}{\partial y} + \lambda_{ii} \frac{\partial f_j}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial y} \eta + \lambda_{ii} \frac{\partial f_j}{\partial x} \xi \right) / \eta = 0$$

est proportionnel à la dérivée de f_j dans la direction définie par le vecteur (ξ, η) .

D'après (A3), la i ème ligne donne:

$$\sum_{k=1}^n l_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ii} l_{ik} b_{kj}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (A7)$$

soit:

$$\sum_{k=1}^n 1_{ik} (a_{kj} - \lambda_{ii} b_{kj}) = 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

Comme $\det L \neq 0$, on doit avoir:

$$\det (A - \lambda_{ii} B) = 0 \quad (A8)$$

$$\text{ou bien : } \det (A \cdot B^{-1} - \lambda_{ii}) = 0$$

Qui permet de trouver les valeurs de λ_{ii} .

Si toutes les racines λ_{ii} de (A8) sont réelles et distinctes. Le système (A1) est un système quasilinéaire de type hyperbolique (si en outre $\det A^* \neq 0$), et la direction du vecteur de composante (ξ, η) tel que $\lambda_{ii} = \frac{\xi}{\eta}$ est dite i ème direction caractéristique.

La forme (A6) est appelée forme caractéristique normale.

Application:

Le système d'équations (1) et (2) peut se mettre sous la forme matricielle suivante (où y est remplacé par la variable t):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & \rho C^2 \\ 1 & \rho V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda}{2D_h} \rho |V| V - \rho g \sin \theta \end{bmatrix} \quad (A9)$$

Ou bien:

$$[B] [F]_t + [A] [F]_x = [D] \quad (A10)$$

Le déterminant de la matrice A est égal à:

$$\det [B] = \rho$$

ce déterminant étant différent de zéro; le système équivalent à la relation (A10) s'écrit:

$$[F]_x + [B]^{-1} [A] [F]_t = [B]^{-1} [D] \quad (A11)$$

Pour déterminer la nature du système nous devons étudier les racines de son déterminant caractéristique (équation (A8)).

$$\det \left([A] [B]^{-1} - \lambda_i [I] \right) = 0 \quad (A12)$$

Où [I] est la matrice unité.

Les valeurs propres sont égales à:

$$\lambda_{1,2} = V \pm C$$

Elles représentent les directions caractéristiques de pentes:

$$\frac{dx}{dt} = V \pm C \quad (\text{voir Figure 1.})$$

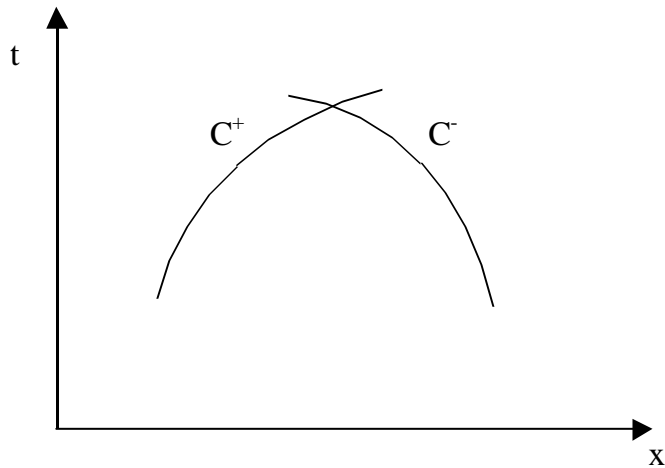


Figure 1.

Le système d'équations (1)-(2) est donc hyperbolique puisque $\lambda_{1,2}$ sont réelles et distinctes. Il est alors possible d'écrire ces équations sous la forme suivante dite normale (équation (A6)):

$$\frac{dP}{dt} \pm \rho_g C \frac{dV}{dt} \pm \rho_g g C \sin \theta \pm \rho_g C f_g \frac{V |V|}{2D} = 0 \quad (A13)$$

L'intégration de ce nouveau système d'équations permet de calculer l'évolution de la pression et de la vitesse d'écoulement en tout point de la canalisation.

Les conditions initiales sont donnée par les relations classiques du régime permanent. Les équations précédentes peuvent être appliqués comme conditions aux limites aux extrémités.

$$\frac{dP}{dt} + \rho_g C \frac{dV}{dt} + \rho_g g C \sin \theta + \rho_g C f_g \frac{V |V|}{2D} = 0 \quad (A14)$$

associée à la direction caractéristique: $\lambda_1 = V + C$, pour l'extrémité avale.

Elle permet de calculer l'évolution de la pression en ce point (pour une fermeture linéaire par exemple).

Si au point amont la pression est restée constante ($P=\text{constante}$), l'équation suivante permet de calculer la variation de la vitesse en ce point:

$$\frac{dP}{dt} - \rho_g C \frac{dV}{dt} - \rho_g g C \sin \theta - \rho_g C f_g \frac{V |V|}{2D} = 0 \quad (A15)$$

associée à la direction caractéristique: $\lambda_2 = V - C$

Annexe B. Calcul des conduites de gaz en régime non stationnaire.

Dans l'exemple présenté calcul nous ferons les suppositions suivantes :

- L'écoulement est isotherme
- L'élasticité de la paroi de la conduite est négligée
- L'inclinaison en tout point est constante
- L'écoulement est unidimensionnel
- Le frottement est en fonction de la rugosité de la paroi et du nombre de Reynolds
- Les relations du régime permanent peuvent être utilisées pour les conditions initiales.
- La variation de l'énergie cinétique dans la conduite ($V dV$) peut être négligée pour un gazoduc de diamètre constant.

1. équation d'état

L'équation d'état du gaz s'écrit :

$$P = Z\rho_g RT \quad (B1)$$

Dans cette équation P , Z , R , ρ_g , et T désignent respectivement la pression absolue, le coefficient de compressibilité, la constante du gaz, la densité et la température absolue. Z varie de 1 à 1.08 pour une variation de pression et de température de l'ordre de 7 à 60 bars et de 15 à 40°C respectivement. Pour tout problème de régimes transitoires, une valeur moyenne de Z est considéré contenue de l'hypothèse de l'écoulement isothermique (température est constante).

$$C = \sqrt{\frac{P}{\rho_g}} = \sqrt{ZRT} \quad (B2)$$

2. équation de continuité

Si l'on considère un volume de contrôle de longueur δx , la différence de quantité massique entrée et sortie est égale à la variation locale de la masse du fluide.

$$-\frac{\partial M}{\partial x} \delta x = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g S \delta x) \quad (\text{B3})$$

dans laquelle M est le débit massique des conduites, x la coordonnée axiale, t le temps et S la section transversal de la conduite.

Puisque $\rho_{g1} = \frac{P_1}{C^2}$ alors l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{C^2}{S} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (\text{B4})$$

3. équation de mouvement

L'équation de mouvement intégré sur un élément d'écoulement peut s'écrire :

$$-P \cdot \delta x \cdot S - \tau_0 \pi D \cdot \delta x - \rho_g g S \delta x \cdot \sin \theta = \alpha^2 \rho_g \delta x \frac{dV}{dt} \quad (\text{B5})$$

où τ_0 est contrainte de frottement, θ l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontal et α un facteur adimensionnel (appelé multiplicateur d'inertie). Dans le cas simple il est égal à l'unité. Il peut prendre des valeurs supérieures à 1 déterminés par une méthode appropriée. La contrainte de frottement τ_0 peut être exprimé par la relation de Darcy.

$$\tau_0 = \frac{\rho_g f_g V^2}{8} = \frac{\rho_g f_g}{8} \frac{M^2 C^2}{P^2 S^2} \quad (\text{B6})$$

Par substitution des équations (B6) et (B4) dans l'équation (B5) on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f_g C^2 M^2}{2DS^2 P} + \frac{P}{C^2} g \cdot \sin \theta + \frac{\alpha^2}{S} \left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{M}{P} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0 \quad (B7)$$

L'utilisation de l'équation (B4) nous donne :

$$-\frac{M}{P} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{M}{P} \frac{C^2}{S} \frac{\partial M}{\partial x} = V \frac{\partial M}{\partial x} \approx \frac{V}{C} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (B8)$$

Puisque : $\frac{V}{C} \ll 1$ donc l'équation (B8) devient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f_g C^2 M^2}{2DS^2 P} + \frac{P}{C^2} g \cdot \sin \theta + \frac{\alpha^2}{S} \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \quad (B9)$$

Cette équation est l'équation de continuité (B4) sont utilisées pour décrire les écoulements non stationnaires dans les gazoducs.

3. équations de l'écoulement en régime permanent

Lors du régime permanent, et si l'écoulement est isotherme, le débit massique M est constant et $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$. On peut dire aussi que le nombre de Reynolds est constant si f_g est constant. L'équation (B9) devient :

$$dP + \left(\frac{P \cdot g \cdot \sin \theta}{C^2} + \frac{f_g C^2 M^2}{2DS^2 P} \right) dx = 0 \quad (B10)$$

L'intégration de cette équation entre $x = 0, P = P_1$ à $x = \Delta x, P = P_2$ nous donne:

$$\frac{P_1^2 + f_g \cdot C^4 M^2}{2 g D S^2 \sin \theta} \Bigg/ \frac{P_2^2 + f_g \cdot C^4 M^2}{2 g D S^2 \sin \theta} = e^{s_p} \quad (\text{B11})$$

$$\text{où : } s_p = \frac{(2 g \Delta x \sin \theta)}{C^2}$$

Donc :

$$P_2^2 = \left(P_1^2 - \frac{f_g \cdot C^4 M^2}{D S^2} \Delta x \frac{e^{s_p} - 1}{s_p} \right) e^{s_p} \quad (\text{B12})$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$P_1 - P_2 = \frac{f_g \cdot C^2 M^2 \Delta x}{(P_1 + P_2) D S^2} \frac{e^{s_p} - 1}{s_p} + \frac{P_2^2}{P_1 + P_2} (e^{s_p} - 1) \quad (\text{B13})$$

Pour les conduites horizontales $s_p = 0$, $\frac{(e^{s_p} - 1)}{s_p} = 1$ et l'équation (B12) devient :

$$P_2^2 = P_1^2 - \frac{F \cdot B^4 M^2}{D A^2} \Delta x \quad (\text{B14})$$

Les relations empiriques largement utilisé dans l'industrie du gaz pour le calcul de la variation de pression s'inspirent de cette dernière et se présentent sous la forme générale suivante :

$$P_2^2 = P_1^2 - \text{const} \frac{M^n}{D^m} \Delta x \quad (\text{B15})$$

dans lequel les coefficients n , m dépendent du nombre de Reynolds et de la rugosité.

Néanmoins l'équation (B13) peut être utilisée dans le régime stationnaire pour le cas d'un pipe-line simple ou un réseau. Pour le cas d'une conduite simple nous aurons pour seules inconnues P et M où bien m ; mais dans le cas d'une jonction entre deux conduites, l'équation de continuité doit être appliquée (le débit sortant d'une canalisation égale au débit entrant dans une autre conduite). On considère ainsi que la pression est la même au point de jonction dans le cas d'un système de conduite simple, l'équation (B13) peut être écrite pour chaque conduite et l'équation de continuité à chaque jonction tout en connaissant l'une des pression P_1 ou P_2 .

5. solution par la méthode de caractéristiques :

Reprenant l'équation de continuité (B4), et en suivant la méthode donnée dans l'annexe A, il vient:

$$L_1 = \frac{C^2}{S} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (\text{B16})$$

L'équation de mouvement (B9) s'écrit:

$$L_2 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f C^2 M^2}{2DS^2 P} + \frac{P}{C^2} g \cdot \sin \theta + \frac{\alpha^2}{C} \frac{\partial M}{\partial t} = 0 \quad (\text{B17})$$

La combinaison entre ces deux équations nous donne :

$$L = \lambda^{-1} L_1 + L_2 = \frac{\alpha^2}{S} \left[\frac{\lambda^{-1} C^2}{\alpha^2} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial t} \right] + \lambda^{-1} \left[\frac{1}{\lambda^{-1}} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} \right] + \frac{Pg \sin \theta}{C^2} + \frac{f_g C^2 M^2}{2DS^2 P} = 0 \quad (\text{B18})$$

On admet que λ prend deux valeurs réelles et on obtient deux équations. En se référant aux premier terme entre crochets , nous savons d'après les calculs que la dérivée totale en fonction de $M(x, t)$ est égale à :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial M}{\partial t}$$

pour :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda^{-1} C^2}{\alpha^2}$$

la quantité entre crochets est $\frac{dM}{dt}$. D'une manière similaire : $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\lambda^{-1}}$.

Dans le deuxième crochet on peut écrire $\frac{dP}{dt}$ pour $\frac{dx}{dt}$ dans les deux équations on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda^{-1} C^2}{\alpha^2} = \frac{1}{\lambda^{-1}}$$

$$\text{où: } \lambda = \pm \frac{C}{\alpha}$$

Nous avons trouver deux valeurs de λ qui transforme L en :

$$L = \frac{\alpha^2}{S} \frac{\partial M}{\partial t} \pm \frac{\alpha}{C} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P g \sin \theta}{C^2} + \frac{f_g C^2 M^2}{2 D S^2 P} = 0 \quad (\text{B19})$$

$$\text{Pour : } \frac{dx}{dt} = \pm \frac{C}{\alpha}$$

$\frac{dx}{dt}$ n'est pas la vitesse du particule dans cette équation mais la direction (sur le plan (x, t)) pour les quels les équations (B15-B18) sont valables. En fait $\frac{dx}{dt}$ définit les directions caractéristiques C^+ et C^- dont les équations de la comptabilités associées sont:

$$C^+ \begin{cases} \frac{\alpha^2}{S} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\alpha}{C} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P g \sin \theta}{C^2} + \frac{f_g C^2 M^2}{2DS^2 P} = 0 \\ dx = \frac{C}{\alpha} dt \end{cases} \quad (B20a)$$

$$C^- \begin{cases} \frac{\alpha^2}{S} \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\alpha}{C} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P g \sin \theta}{C^2} + \frac{f_g C^2 M^2}{2DS^2 P} = 0 \\ dx = -\frac{C}{\alpha} dt \end{cases} \quad (B20b)$$

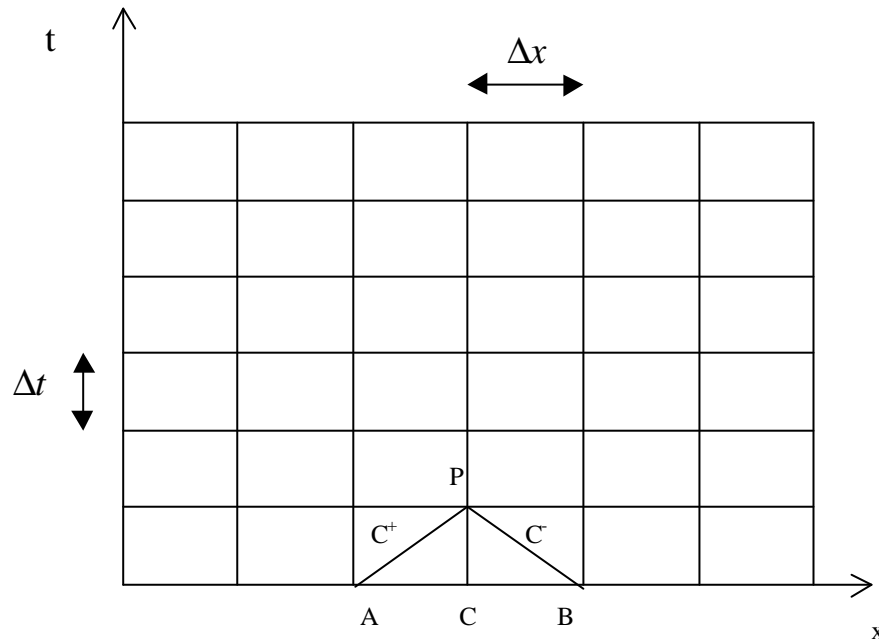


Figure 5.

L'intégration de l'équation (B19) le long de la ligne caractéristique C^+ entre A et P nous donne :

$$\frac{\alpha C}{S} (M_P - M_A) + (P_P - P_A) + \int_A^P \left(\frac{\rho g \sin \theta}{C^2} + \frac{f_g C^2 M^2}{2DS^2 P} \right) dx = 0 \quad (B21)$$

Après développement du terme de perte de charge on obtient :

$$C^+ : \frac{\alpha C}{S} (M_P - M_A) + (P_P - P_A) + \frac{f_g C^2 \Delta x}{(P_P + P_A) D S^2} \frac{e^{S_p} - 1}{S_p} x$$

$$\left(\frac{M_P + M_A}{2} \left| \frac{M_P + M_A}{2} \right| \right) + \frac{P_P^2}{P_P + P_A} (e^{S_p} - 1) = 0 \quad (\text{B22})$$

et d'une manière similaire pour l'équation C :

$$C^- : \frac{\alpha C}{S} (M_P - M_B) - P_P + P_B \frac{f C^2 \Delta x}{(P_P + P_B) D S^2} \frac{e^{S_p} - 1}{S_p} x$$

$$\left(\frac{M_P + M_B}{2} \left| \frac{M_P + M_B}{2} \right| \right) + \frac{P_P^2}{P_P + P_B} (e^{S_p} - 1) = 0 \quad (\text{B23})$$

6) Evaluation du coefficient d'inertie α :

Le calcul du multiplicateur α dans le cas des conduites simples permet d'analyser l'erreur de discrétisation Ψ sur la pression, $\Psi = \frac{\Delta P_{\text{erreur}}}{P}$, en introduisant pour cela les paramètres adimensionnels suivants :

$$m = \frac{V_0}{C}, \quad \sigma = \frac{f L}{2D}, \quad P_d = \sqrt{1 - 2\sigma m^2}$$

$$\omega^* = \frac{\omega}{C}, \quad \Delta q = \frac{\Delta M}{M_0}, \quad h = \frac{\Delta x}{L}$$

où V_0 est vitesse de l'écoulement stationnaire à l'amont de Δx , Δm la fluctuation débit massique, D diamètre et ω fréquence angulaire des oscillations

de débit. Le pas d'espace est $\Delta x=L/N$. Le paramètre α est donné en fonction des termes précédents :

$$\hat{a}^2 = 1 - \frac{(\sigma mh)^2}{3p_d} + \phi \frac{\sqrt{p_d [1 + (\sigma m \hat{u}^*)^2]}}{m \hat{u}^* \ddot{A}_q}$$

Annexe C : Déformation de la conduite sous l'effet de la pression

Appelons σ_1 , σ_2 les contraintes longitudinale et radiale, ξ_1 et ξ_2 les déformations correspondantes. E étant le module d'élasticité (module de Young) et ν le module de Poisson ($\nu = -\xi_2/\xi_1$). La loi de Hooke permet d'écrire

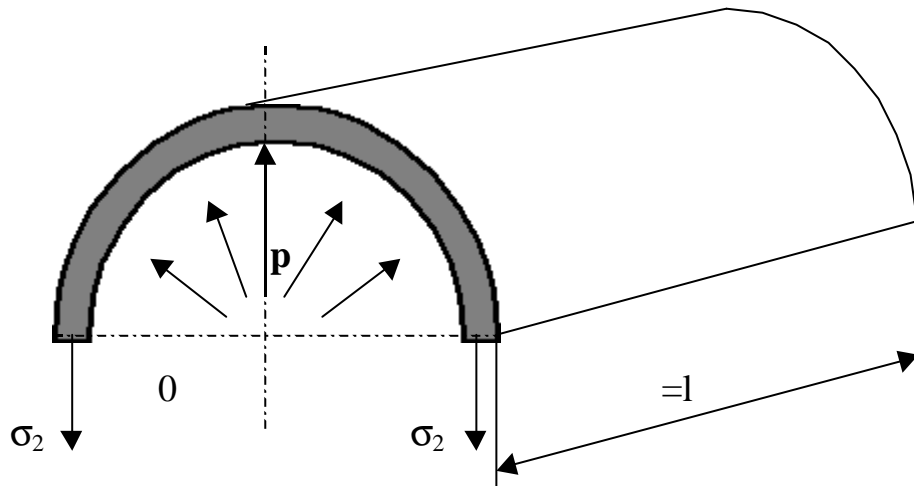
$$\xi_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2) \text{ et } \xi_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1).$$

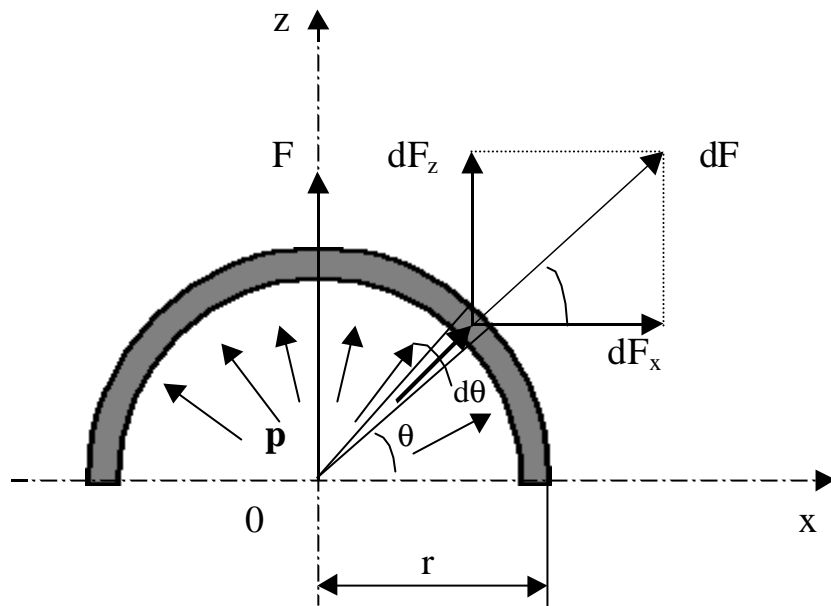
Essayons d'exprimer les **contraintes σ_1**

Contrainte σ_2

Cette canalisation est en équilibre sous l'action des forces suivantes (figures ci-dessous):

- forces dues à la pression interne.
- Forces résultant des contraintes radiales (ou tangentiels) σ_2 .





Les forces élémentaires de pression dF s'écrivent:

$$dF = p.r.d\theta.l \quad (C1)$$

Sa projection sur l'axe oz est de:

$$dF_z = p.r.d\theta.l.\sin \theta \quad (C2)$$

La projection de dF_x s'annulant par symétrie, l'intégration le long d'un demi-cercle, on obtient la résultante F :

$$F = \int_0^{\pi} dF_z \quad (C3)$$

En remplaçant par la relation précédente et après intégration il vient:

$$F = p.D.l \quad (C4)$$

Cette force est équilibrée par les forces de contraintes σ_2 s'exerçant sur la section de longueur l et d'épaisseur e :

$$F = 2 \cdot \sigma_2 \cdot e \cdot l \quad (C5)$$

La contrainte est donc: $\sigma_2 = \frac{pD}{2e}$.

Contrainte σ_1

1^{er} Cas: si la conduite a suffisamment de joints, on peut considérer qu'il n'y a ni contraintes, ni déformations longitudinales et que les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux (donc $\nu=0$). Dans ce cas, on a $\sigma_1=\nu=0$ (ν n'est pas alors le module de Poisson du matériau proprement dit mais son équivalent pour la canalisation globale).

2^{ième} Cas: la contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont le tuyau est ancré aux extrémités.

Tuyau ancré aux extrémités: on a donc $\xi l=0$ et par conséquent $\sigma_1 = \nu \sigma_2$.

Tuyau libre à une extrémité: la force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est égale à $\frac{p \cdot \pi D^2}{4}$. Cette pression peut d'ailleurs être nulle dans le cas où la vanne d'extrémité est grande ouverte. Cette force s'exerce sur le périmètre entier du tuyau πD , donc sur la surface $\pi D e$. La contrainte est donc $\sigma_1 = \frac{pD}{4e}$ qu'on peut écrire $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2}$.

Récapitulation: Nous avons donc dans tous les cas $\sigma_2 = \frac{pD}{2e}$ comme expression de la contrainte radiale. Pour la contrainte longitudinale, on peut l'exprimer sous

la forme $\sigma_1 = k\sigma_2$ dans les trois cas étudiés que, pour être conforme à la littérature en ce domaine nous allons synthétiser comme suit:

- Cas A: conduite sans joints, libre à une extrémité $k=0.5$
 Cas B: conduite sans joints, ancrée aux deux extrémités $k=v$
 Cas C: conduite avec de nombreux joints $k=0$

Variation de section de la conduite: la section de l'élément de la conduite s'écrit:

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dR}{R} = 2d\xi_2 = \frac{2}{E} (d\sigma_2 - v.d\sigma_1) \quad (C6)$$

compte tenu de la relation $\sigma_1 = k\sigma_2$, alors si l'on pose: $\mu = 1 - kv$ on obtient:

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\mu}{E} d\sigma_2 = \frac{D}{Ee} \mu dp \quad (C7)$$

Cette relation peut aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = \frac{2}{Ee\sqrt{\pi}} \mu dp \quad (C8)$$

dont l'intégration donne S en fonction de p:

$$S = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{S_0}} - \frac{p - p_0}{Ee\sqrt{\pi}} \right)^2} \quad (C9)$$

Annexe D : Estimation du coefficient de dégagement de gaz: $G_r(t)$.

La loi d'Henry pour un mélange de liquide avec des gaz dissous s'écrit:

$$P_s = \phi H \quad (D1)$$

où P_s est la pression de saturation du liquide et ϕ ratio entre le nombre de moles de gaz dissous et le nombre de moles du mélange. H est la constante de proportionnalité qui dépend de la nature des gaz dissous et de la température. Il peut être exprimée simplement par la relation suivante (Gaid (1984)):

$$H = H_{10} \times 1.02^{(T-10)} \quad (D2)$$

Où H_{10} est la constante de proportionnalité d'Henry à $T=10^\circ\text{C}$ (H_{10} 5.49×10^4 Pa pour le cas de l'air dans l'eau). Dans son travail sur le phénomène de dégazage, Kranenburg (1974) a défini une concentration C_K comme le nombre de moles de gaz n par m^3 de fluide:

$$C_K = \gamma P_g \quad (D3)$$

Où γ est une constante donnée en moles/J.

Compte tenu de la relation (D1) cette concentration devient:

$$C_K = \phi \times n \quad (D4)$$

Wiggert & Sundquist (1979) ont défini une concentration C_0 comme étant le ratio du volume de gaz dissous par m^3 de mélange. Ainsi, en considérant la relation (D3), cette concentration, sous des conditions standards, prend la forme suivante:

$$C_0 = \frac{P_s}{H} \times n \times v \quad (D5)$$

Où $v=22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ est le volume molaire sous des conditions standards.

Le calcul de la quantité Γ_g dans la relation (17) a été inspiré des travaux de Wiggert & Sundquist (1979):

$$\Gamma_g = \begin{cases} K_r \beta (p_s - p) , & p_s < p \\ 0 & , p_s > p \end{cases} \quad (D6)$$

Dans ce travail, les valeurs du coefficient $K_r = 7.6 \times 10^{-4}$, 1.1×10^{-3} and $1.1 \times 10^{-3} \text{ S}^{-1}$ correspondant respectivement à $C_0=0.02$, 0.6 et 0.15 , comme fixés par le précédent auteur, ont été considérés. Par contre les valeurs de β et P_s doivent être calculées en fonction de la température.

Compte tenu de la relation (D2), il est possible d'exprimer le coefficient β (défini par Wiggert & Sundquist (1974)) en fonction de la masse moléculaire m des gaz dissous:

$$\beta = \gamma \times m \quad (D7)$$

Alors en considérant les relations (A4) et (A5), ce coefficient devient:

$$\beta = \frac{n \times m}{H} \quad (D-8)$$

La pression de saturation P_s peut être déduite de la relation (D5).

Exemple d'application pour de l'air dissous dans l'eau à $T=16^\circ\text{C}$:

$H=6.18 \times 10^4 \text{ Pa}$; $\beta=2.641 \times 10^{-7} \text{ S}^2 / \text{m}^2$; $P_s=1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Considérant les relations (14) et (18) qui donnent:

$$P^{\bullet} = \frac{\rho_g}{\rho_{g_0}}$$

et de la relation (16), nous pouvons exprimer la densité du gaz de la manière suivante:

$$\rho_g \in = \zeta^{\bullet} \rho_{g_0} \in_0 \frac{S}{S_0} \frac{1}{G_r} \quad (D9)$$

Où le coefficient G_r est donné par la relation (17):

$$G_r = \exp \left(- \int_0^t \frac{\Gamma_g}{\rho_g \in} dt \right) \quad (D10)$$

L'évolution en fonction du temps de ce coefficient s'écrit:

$$G_r(t + \Delta t) = G_r(t) \exp \left(- \int_t^{t+\Delta t} \frac{\Gamma_g}{\rho_g \in} dt \right) \quad (D11)$$

Après développement celui-ci devient:

$$G_r(t + \Delta t) = G_r(t) \left(1 - \frac{\Gamma_g}{(\rho_g \in)_t} \Delta t \right) \quad (D12)$$

En remplaçant le terme $\rho \in$ par la relation (D9), cette équation s'écrit:

$$G_r(t + \Delta t) = G_r(t) \left(1 - \frac{\Gamma_g \Delta t}{\zeta^* \rho_{g0} \alpha_0} \frac{S}{S_0} G_r(t) \right) \quad (D13)$$

En utilisant les relations (14) et (18) la pression prend la forme suivante:

$$p = p_v + P^*(p_o - p_{v_o}) \quad (D14)$$

En remplaçant le ratio $\frac{S_o}{S}$, dans la relation (D13), par une équation déduite de la variation de la section transversale (Kessal (1987)), $S = S(P^*)$:

$$\frac{S_o}{S} = \left[1 + \frac{D_o}{e} \text{Eos} (P^* - 1) \right]^{-1} \quad (D15)$$

et la quantité Γ_g de la relation (D6), alors la relation (D13) prendra la forme définitive suivante:

$$G_r(t + \Delta t) = G_r(t) \left\{ 1 - (K_1 - K_2 P^*) G_r(t) \frac{\left[1 - \frac{D_o}{e} \text{Eos}(P^* - 1) \Delta t \right]}{\zeta^*} \right\} \quad (D16)$$

où les coefficients K_1 et K_2 sont fonction de p_s , p , p_o et p_{v_o} :

$$K_1 = \frac{K_\Gamma \beta (p_s - p)}{\rho_{g_o} \alpha_o} \quad \text{and} \quad K_2 = \frac{K_\Gamma (p_o - p_{v_o})}{\rho_{g_o} \alpha_o}$$

Annexe E : Calcul des grandeurs intégrales et des paramètres de forme.

Calcul de I_D :

$$I_D = \int_0^{\delta_D} \theta(s, n) dn = \begin{cases} \int_0^{\delta_T} \theta(s, n) dn & \text{si } \delta_T < \delta_D \\ \delta_T \int_0^{\frac{1}{\Delta}} \theta_p(s, n) \cdot F(\xi) d\xi & \text{si } \delta_T > \delta_D \end{cases}$$

d'où :

$$I_D = \delta_T \cdot \theta_p \cdot H_o(\Delta)$$

Calcul de I_T :

$$I_T = \begin{cases} \delta_T \int_0^1 u(s, \eta) \theta(s, \xi) d\xi & \text{si } \delta_T < \delta_D \\ \delta_T \int_0^{\delta_D} u \theta dn + \int_{\delta_D}^{\delta_T} U_e \theta dn & \text{si } \delta_T > \delta_D \end{cases}$$

pour $\Delta < 1$:

$$I_T = \delta_T \theta_p \left\{ U_e \int_0^1 [1 - F(\eta)] F(\xi) d\xi + \tilde{\Lambda}(s) \int_0^1 G(\eta) F(\xi) d\xi \right\}$$

pour $\Delta > 1$:

$$I_D = \delta_T \theta_P \left\{ \begin{array}{l} U_e \int_0^{\frac{1}{\Delta}} [1 - F(\eta)] F(\xi) d\xi + \\ \tilde{\Lambda}(s) \int_0^{\frac{1}{\Delta}} G(\eta) F(\xi) d\xi + U_e \int_0^1 F(\xi) d\xi \end{array} \right\}$$

$$I_T = \delta_T \theta_P \left\{ U_e \left(\int_0^1 F(\xi) d\xi - \int_0^{\frac{1}{\Delta}} F(\eta) F(\xi) d\xi \right) + \tilde{\Lambda}(s) \int_0^1 G(\eta) F(\xi) d\xi \right\}$$

L'intégrale I_T se met donc sous la forme indiquée avec:

$$H_1(\Delta) = \left\{ \begin{array}{ll} \int_0^1 (1 - F(\eta)) F(\xi) d\xi & \text{si } \Delta < 1 \\ \int_0^1 F(\xi) d\xi - \int_0^{\frac{1}{\Delta}} F(\eta) F(\xi) d\xi & \text{si } \Delta > 1 \end{array} \right.$$

$$H_2(\Delta) = \left\{ \begin{array}{ll} \int_0^1 G(\eta) F(\xi) d\xi & \text{si } \Delta < 1 \\ \int_0^{\frac{1}{\Delta}} G(\eta) F(\xi) d\xi & \text{si } \Delta > 1 \end{array} \right.$$

