

N° d'ordre : 13/2015-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
(ALGER)
FACULTE DE MATHEMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES
En : **MATHEMATIQUES**
Spécialité : **RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Par : Mohamed ZAMIME

Sujet

Contribution à l'étude des problèmes de la b-coloration
dans les graphes

Soutenue publiquement, le 13/12/2015, devant le jury composé de :

M. A. SEMRI, Professeur à USTHB	Président
M. H. AIT HADDADENE, Professeur à USTHB	Directeur de Thèse
M. M. AIDER, Professeur à USTHB	Examineur
M. M. CHELLALI, Professeur à U. Blida1	Examineur
M. H. KHEDDOUCI, Professeur à U. Lyon 1, France	Examineur
M. B. SADI, MCA, à U. Tizi Ouzou	Examineur
Mme. M. KOUIDER, Professeur à U. Orsay, France	Invitée

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES	4
RÉSUMÉ	5
ABSTRACT	6
REMERCIEMENTS	7
INTRODUCTION	8
CHAPITRE 1. NOTIONS DE BASE ET QUELQUES RÉSULTATS	11
1.1. Définitions et notations	11
1.1.1. Graphes, sous-graphes et graphes partiels	11
1.1.2. Voisinages et degrés	12
1.1.3. Chaînes et cycles	13
1.1.4. Distances, diamètres, excentricités, rayons et centres	13
1.1.5. Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum)	14
1.1.6. Graphes particuliers	14
1.1.7. Complexité algorithmique	15
1.1.8. Invariants de graphes	17
1.1.9. Quelques opérations de graphes	17
1.2. La coloration dans les graphes	18
1.2.1. Coloration propre et nombre chromatique	18
1.2.2. a -coloration et nombre a -chromatique	20
1.2.3. b -coloration et nombre b -chromatique	20
1.3. Quelques résultats existants sur la b -coloration	21
1.3.1. Les graphes b -parfaits	25
1.3.2. b -continuité	26

1.3.3. b -monotonie et quasi monotonie	27
CHAPITRE 2. LA b-COLORATION DANS $G-e$	28
2.1. Borne supérieure pour $b(G - e)$	28
2.2. Les graphes G tels que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$	34
2.2.1. Famille \mathcal{F}	34
2.2.2. Caractérisation	41
CHAPITRE 3. LA b-COLORATIONS DANS LES GRAPHES ÉTRIQUÉS	51
3.1. Les graphes étriqués de maille au moins 8	52
3.2. Les graphes étriqués de maille au moins 6	59
3.2.1. Borne inférieure du nombre b -chromatique	60
CHAPITRE 4. L'IMPACT DE CERTAINES OPÉRATIONS DONNÉES SUR LE NOM-	
BRE b-CHROMATIQUE	66
4.1. La suppression d'une arête	66
4.1.1. Les graphes P_4 -laden étendus arête b -critiques:	68
4.1.2. Les blocs graphes arête b -critiques:	78
4.2. L'ajout d'une arête	82
4.2.1. Le nombre b -bondage d'un graphe	84
4.3. Subdivision d'une arête	88
4.3.1. Le nombre de subdivision b -chromatique dans les arbres	89
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	92

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

FIGURE 1.1. Extension de P_4 27

FIGURE 2.1. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{G}_1 32

FIGURE 2.2. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{G}_2 33

FIGURE 2.3. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{G}_3 33

FIGURE 2.4. Exemple d'un graphe H avec $G(u) \neq G(y_t)$ et $d_H(y_t) = 1$ 35

FIGURE 2.5. Exemple d'un graphe H avec $G(u) \neq G(y_t)$ et $d_H(y_t) = 2$ 35

FIGURE 2.6. Exemple d'un graphe H avec $G(u) = G(y_t)$ 36

FIGURE 2.7. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_1 36

FIGURE 2.8. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_2 37

FIGURE 2.9. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_3 38

FIGURE 2.10. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_4 38

FIGURE 2.11. La famille \mathcal{F}_0 39

FIGURE 2.12. Une b -coloration de G avec 5 couleurs 45

FIGURE 2.13. Une b -coloration de G avec 6 couleurs 46

FIGURE 3.1. Une coloration partielle de G avec $m = 8$ et $t = 3$ 61

FIGURE 4.1. Un graphe pseudo-scindé 69

FIGURE 4.2. Une araignée fine 70

FIGURE 4.3. Une araignée épaisse 71

FIGURE 4.4. Une quasi araignée 71

FIGURE 4.5. Un graphe de la famille \mathcal{F}_1 75

FIGURE 4.6. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_3 80

RÉSUMÉ

Une b -coloration est une coloration propre telle que dans chaque classe de couleur, il existe au moins un sommet ayant un voisin dans chacune des autres classes de couleur. Le nombre b -chromatique, noté $b(G)$, est le plus grand entier k tel que G admet une coloration dominante avec k couleurs. Un graphe est dit b -critique si pour toute arête e , $b(G - e) = b(G) - 1$. Un graphe est dit b^+ -critique si pour toute arête $e \in \overline{G}$, $b(G + e) = b(G) + 1$. Le m -degrés d'un graphe G est le plus grand entier m tel que G a au moins m sommet de degrés au moins $m - 1$. Un sommet v est dit dense si $d_G(v) \geq m(G) - 1$. Un graphe G est dit étriqué si G contient exactement m sommets denses de degré $m - 1$. On note par B_m la classe des graphes bipartis (D, D') de maille au moins 6 étriqués avec D l'ensemble des sommets denses.

Cette thèse comporte trois parties.

Dans la première partie de la thèse, on présente une borne supérieure pour $b(G - e)$ en fonction de n et de $b(G)$ et on caractérise les graphes atteignant cette borne.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des graphes étriqués. Dans un premier temps, on montre que si G est un graphe étriqué de maille au moins 8, alors $m(G) - 1 \leq b(G) \leq m(G)$. Ainsi, On vérifie la conjecture de Chang et Lin pour des sous classes de B_m . Dans un second temps, on présente une borne inférieure pour $b(G)$ en fonction de $m(G)$ pour les graphe G de maille au moins 6 appartenant à B_m .

Dans la troisième partie, on étudie l'impact des opérations données sur le nombre b -chromatique. En premier lieu, on donne une caractérisation des graphes P_4 -laden étendus arête b -critiques et les blocs graphes arête b -critiques et les arbres critiques. En second lieu, on introduit deux nouveaux paramètres: $B(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes F ajoutées au graphe G telles que $b(G + F) > b(G)$ et $sd_b(G)$ comme étant le nombre minimum d'arête à subdivisées pour augmenter le nombre b -chromatique.

ABSTRACT

A b -coloring is a proper coloring such that each color class contains at least one vertex that has a neighbor in all other color classes. The b -chromatic number, denoted by $b(G)$, is the largest integer k such that G has a dominating coloring with k colors. A graph is called b -critical if for any edge e , $b(G - e) = b(G) - 1$. A graph is called critical if for any edge $e \in \overline{G}$, $b(G + e) = b(G) + 1$. A graph G is m -tight if it has exactly $m(G)$ dense vertices. We denote by B_m the class of m -tight bipartite graphs (D, D') of girth at least 6, where D is the set of dense vertices.

This thesis has three parts.

In the first part, we present an upper bound for $b(G - e)$ in terms of n and $b(G)$ and characterize the graphs achieving this bound.

In the second part, we show that $m(G) - 1 \leq b(G) \leq m(G)$ for all m -tight graph G of girth at least 8. We verify the conjecture of Chang and Lin for some subclass of B_m and we present a lower bound for $b(G)$ in terms of $m(G)$ in B_m .

In the last part, we study the impact of operations on the b -chromatic number. First, we characterise the extended P_4 -laden graphs, blok graphs edge b -critical and the critical trees. Finally, we introduce two new parameters: $B(G)$ as the minimum number F of edges in graph G such that $b(G + F) > b(G)$ and $sd_b(G)$ as the minimum number of edge subdivided to decrease the b -chromatic number.

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **Hacène Ait Haddadène**, Professeur à USTHB, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser cette thèse sous sa direction.

Je remercie le Professeur **Mekia Kouider**, Chercheur au laboratoire de recherche en informatique Iri, d'avoir guidé avec gentillesse mes travaux. Je la remercie aussi pour son accueil chaleureux lors de mes séjours effectués au sein du laboratoire Iri, Orsay, France.

Je voudrais aussi présenter mes remerciements très sincères au président du jury Monsieur **Ahmed Semri**, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'adresse un grand remerciement à Monsieur **Méziane Aider**, Professeur à l'USTHB, Monsieur **Mustapha Chellali**, Professeur à l'Université de Blida 1, Monsieur **Hamamache Kheddouci**, Professeur à l'Université de Lyon 1, France, Madame **Mekia Kouider**, Professeur à l'Université d'Orsay et chercheur au laboratoire Iri, France, et à Monsieur **Bachir Sadi**, MCA, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs remarques judicieuses.

Un grand merci à tous les enseignants qui ont assuré ma formation tout au long de mon parcours.

Je tiens à remercier mon ami Nouredine Ikhlef Eschouf pour son aide, ses conseils et son encouragement.

Enfin, je remercie mes parents, mes frères, mes sœurs, ma femme et mes enfants pour leur soutien sans faille depuis toujours.

INTRODUCTION

Confronté à un problème donné et pour en faciliter la compréhension, on recourt souvent au schéma. Ce dernier est composé exclusivement de points et de traits les reliant. Les points représentent les différents objets du problème. Quant aux traits, ils représentent les relations existant entre ces différents objets.

Ce schéma est conventionnellement nommé graphe. Les points et les traits sont appelés respectivement "sommets" et "arêtes". Si les traits sont orientés, on parlera d'arcs, au lieu d'arêtes.

La théorie des graphes est la branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des graphes ainsi qu'à la résolution de problèmes en les modélisant sous forme de graphes.

Du point de vue historique, la théorie des graphes est apparue au XVIII^e siècle grâce au mathématicien suisse Leonhard Euler qui posa le problème des sept ponts de la ville russe de Königsberg et qui démontra qu'il est impossible de traverser les sept ponts de la ville une et une seule fois et de revenir au point de départ.

La coloration est considérée comme l'un des thèmes majeurs de la théorie des graphes. L'origine de la coloration des graphes remonte au XIX^e siècle lorsque Francis Guthrie découvrit que quatre couleurs suffisent pour colorier les cantons d'Angleterre de telle façon que deux cantons ayant une frontière commune ne reçoivent pas la même couleur. D'où, il posa le problème de la possibilité de colorier toute carte géographique à l'aide de quatre couleurs sans que deux pays voisins n'aient la même couleur. Le problème est resté ouvert jusqu'en 1976 quand Appel et Haken le démontrèrent par le biais de l'informatique.

La coloration de graphes est à la base de la théorie des graphes du fait de son utilisation dans la résolution de nombreux problèmes pratiques. En effet, ces derniers sont modélisés comme étant des problèmes de coloration.

A titre d'exemple, on peut citer les problèmes de l'ordonnement de tâches et l'allocation de fréquences.

Plusieurs types de colorations font objets de travaux d'éminentes équipes de recherche telles que la coloration des sommets, la coloration des arêtes, la coloration des sommets et des arêtes (la coloration totale) etc. Pour de plus amples détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de Chartrand et Zhang [16] et de Jensen et Toft [61].

Il existe également plusieurs types de colorations de sommets. On cite par exemple la coloration de Grundy, la a -coloration et la b -coloration.

Dans notre recherche nous nous basons sur la b -coloration pour la richesse de son champ de recherche et ses axes qui sont: la recherche des bornes pour $b(G)$, le calcul de $b(G)$, la b -continuité de $b(G)$, la b -monotonie de $b(G)$, la recherche d'algorithmes pour le calcul de $b(G)$ dans des classes de graphes etc.

Notre premier travail de recherche consiste à borner $b(G-e)$ supérieurement et chercher tous les graphes atteignant la borne. Le second appréhende le calcul de $b(G)$ dans les graphes étriqués. Enfin, le dernier s'intéresse à l'impact de quelques opérations données sur le nombre b -chromatique.

Cette thèse s'articule au tour de quatre chapitres.

Le premier chapitre englobe les principales définitions et notations utiles à la compréhension du contenu de cette thèse. Nous donnons également un aperçu sur les principaux résultats liés à la b -coloration et au nombre b -chromatique..

Le second chapitre porte sur la présentation d'une borne supérieure de $b(G - e)$ en fonction de l'ordre de G et de $b(G)$ et la caractérisation des graphes atteignant cette borne.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des graphes étriqués. Dans un premier temps, nous montrons que le nombre b -chromatique d'un graphe étriqué de maille au moins 8 égale à m où $m - 1$. Dans un second temps, nous montrons que le nombre b -chromatique d'une sous classe des graphes étriqués de maille au moins 6 est borné inférieurement par $3 \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$.

Dans le chapitre quatre, nous étudierons l'impact de quelques opérations données sur le nombre b -chromatique:

- L'effet de la suppression d'une arête sur le nombre b -chromatique, dans cette optique nous caractériserons les graphes P_4 -laden étendus arête b -critique et les blocs graphes arête b -critiques.

- L'effet de l'ajout d'une arête sur le nombre b -chromatique, dans ce contexte nous caractériserons les arbres arêtes critiques et nous définirons le nombre de bondage.

- L'effet de la subdivision d'une arête sur le nombre b -chromatique. Dans cette optique nous introduirons un nouveau paramètre qui est le nombre de subdivisions b -chromatique.

Cette thèse s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE ET QUELQUES RÉSULTATS

La première partie de ce chapitre concerne les définitions de la théorie des graphes et les notations utiles à la poursuite de notre travail de recherche. Ces définitions sont consultables avec plus de précision dans les ouvrages suivants: Berge [4], Bondy et Murty [6], Diestel [22]. La seconde partie est consacrée à la présentation de quelques types de colorations de graphes et leurs paramètres associés. Dans ce cadre, nous rappelons les définitions de la coloration classique et de la a -coloration. Par la suite nous nous intéresserons particulièrement à la notion de la b -coloration et le nombre b -chromatique. Enfin, nous rappelons brièvement les principaux travaux réalisés ou existants liés à la b -coloration et au nombre b -chromatique.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes, sous-graphes et graphes partiels

Un *graphe* G est défini par un couple $(V(G), E(G))$ où $V(G)$ est un ensemble de sommets et $E(G)$ est un ensemble de paires de sommets appelées arêtes. Le nombre de sommets de G , noté n , est appelé l'*ordre* de G ; il est fini si l'ordre est fini. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules: u, v, x, y, a, b , etc... Pour $u, v \in V$, on note uv (ou vu) une arête entre u et v . Si $uv \in E$, alors u et v sont dits adjacents (ou voisins). Dans ce cas, u et v sont appelés les *extrémités* de uv . Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité en commun. Une arête e sera dite incidente à un sommet v si v est l'une de ses extrémités; dans ce cas v sera dit incident à e . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues.

Un graphe *simple* est un graphe sans boucle dont tout couple de sommets est relié par au

plus une arête. Dans notre manuscrit, on s'intéresse uniquement aux graphes simples et finis.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et A un sous ensemble de sommets de G . Le sous graphe de G induit par A , noté $G[A]$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets A et pour ensemble d'arêtes toutes les arêtes de E dont les extrémités sont dans A .

On appelle graphe partiel d'un graphe $G = (V, E)$, tout graphe $G' = (V, E')$ ayant le même ensemble de sommets que G tel que $E' \subseteq E$.

Deux graphes G et G' sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V(G) \rightarrow V(G')$ telle que pour tous $u, v \in V(G)$, on a $uv \in E(G)$ si et seulement si $f(u)f(v) \in E(G')$.

On dira que G contient un graphe H s'il existe un sous-graphe induit de G isomorphe à H . Dans le cas contraire, on dira que G est sans H (ou H -libre).

1.1.2 Voisinages et degrés

Soit G un graphe.

- Le *voisinage ouvert* d'un sommet v de G est défini par l'ensemble suivant $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$.
- Le *voisinage fermé* est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- L'ensemble $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous-ensemble $S \subseteq V$.
- Le *degré* d'un sommet v d'un graphe G , noté $d_G(v)$, est le nombre de ses voisins.
- Un sommet de degré nul sera dit *isolé*.
- Un sommet de degré un sera dit *pendant*.
- Un sommet adjacent à un sommet pendant est un *support*.

- On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le *degré maximum* et *minimum* dans G , respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $d(v)$, Δ et δ pour désigner respectivement $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

1.1.3 Chaînes et cycles

- Une *chaîne* P entre deux sommets v_1 et v_k est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k tels que pour chaque i , $1 \leq i \leq k - 1$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G et $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$.

Les sommets v_1 et v_k sont appelés les extrémités de P et les sommets v_2, v_3, \dots, v_{k-1} sont les sommets intérieurs de P . L'entier $k - 1$ représente la longueur de P (au sens des arêtes).

Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple* et une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*.

Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne.

Une chaîne minimale induite par n sommets, notée P_n , est une chaîne élémentaire sans cordes.

- Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. La longueur d'un cycle est le nombre de ses arêtes.

La *maille* d'un graphe G , notée $g(G)$, est la longueur du plus court cycle de G .

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts $v, u \in V$, il existe une chaîne joignant v et u .

1.1.4 Distances, diamètres, excentricités, rayons et centres

Etant donnés deux sommets u et v d'un graphe connexe $G = (V, E)$, on appelle *distance* entre u et v , et on note $d(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . L'*excentricité* de v est $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$, le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$ et le *rayon* de G est $r(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

1.1.5 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum)

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} . Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} et $|A| > |B|$ (resp. $|B| > |A|$) où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A , c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.1.6 Graphes particuliers

- *Le graphe complet* d'ordre n , noté K_n , est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré $n - 1$. Ainsi, deux sommets quelconques de K_n sont adjacents.
- Soit G un graphe. *Le graphe complémentaire* de G est le graphe noté \overline{G} , défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.
- Un graphe G est dit *d-régulier* si tous ses sommets sont de degré d . Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique.
- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles V_1 et V_2 telle que toutes les arêtes de G relient un sommet de V_1 à un sommet de V_2 . *Un graphe biparti complet* est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante: tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2 . Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.
- On appelle *arbre*, et on note par T , un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n - 1)$ arêtes. On appelle *feuille* d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant).
- Une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.
- On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, $n \geq 3$, l'arbre à $n + 1$ sommets ayant n feuilles.
- Un graphe est dit *sans griffes* (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

- Le *graphe adjoint* d'un graphe G (ou graphe de ligne) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondantes à ces deux sommets sont adjacentes.

1.1.7 Complexité algorithmique

Quand on parle d'optimisation combinatoire, il vient toujours à l'esprit la complexité des problèmes à traiter, et existence ou pas d'algorithmes efficaces pour les résoudre. L'efficacité est prise dans le sens de la théorie de la complexité.

Le concept d'algorithme a été souvent défini par des termes équivalents plus ou moins précis: Méthode, procédé, processus, ...etc. Ces termes indiquent l'utilisation de règles ou d'instructions pour obtenir un résultat en un nombre fini d'étapes.

Un algorithme de résolution d'un problème (P) donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires (la comparaison, l'affectation, les quatre opérations usuelles,...), transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème (P) en une chaîne de caractère représentant ses résultats.

La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité, exprimée en termes du nombre de caractère nécessaires pour le codage des données, et le temps d'exécution, exprimé en termes du nombre d'opérations élémentaires. Le codage des données est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre positif N , est égal au plus petit entier supérieur ou égal à $\log_2(N + 1)$.

En 1965, Edmonds a introduit la notion d'algorithme efficace ou polynomial. Un algorithme est dit polynomial si le nombre d'opérations $f(n)$, nécessaire pour résoudre un exemple de taille n , est borné par un polynôme de variable n . Autrement dit, il existe deux constantes c et k telles que $f(n) \leq cn^k$. Un tel algorithme est dit de complexité $o(n^k)$.

Un problème est dit polynomial ou appartient à la classe P (problèmes déterministes polynomiaux), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dites "faciles".

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher une meilleur solution parmi un ensemble fini de solutions réalisables. A chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance ou de décision. Un problème de décision est un problème dont la réponse est de type oui ou non.

Un problème de décision est dans NP (problème non déterministe polynomial) (resp. $CO-NP$) si dans le cas où la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donnée.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que $P \subseteq NP$. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithmes polynomiaux de résolutions. Cependant, la Conjecture $P \neq NP$ reste ouverte.

On dit qu'un problème (P_1) se réduit en temps polynomial à un problème (P_2) , s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la classe NP est dit NP -complet, si tout problème de la classe NP peut être réduit en temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP -complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP . Les problèmes NP -complets sont dites "difficiles".

Les problèmes NP -durs sont des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP -complets et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est NP -complet est NP -dur.

1.1.8 Invariants de graphes

- Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de taille p est notée par K_p . Le cardinal d'une clique maximum de G est noté $\omega(G)$.
- Une *stable* dans un graphe G , appelé aussi, *ensemble indépendant*, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G , noté $\alpha(G)$, est appelé *nombre de stabilité* de G .
- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. Un sommet x de G est dit *saturé* par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x . Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé *couplage parfait* dans G .

1.1.9 Quelques opérations de graphes

- Soit x un sommet d'un graphe $G = (V, E)$. On note $G - x$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V \setminus \{x\}$. Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $G - S$ le sous-graphe engendré par $V \setminus S$. Soit e une arête de G . On note $G - e$ le graphe $G' = (V, E \setminus \{e\})$. En d'autres termes, $G - v$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v . Le graphe $G - e$ est obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés).
- Le produit cartésien de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V(G) = \{(u, v) : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.
- Soient G et H deux graphes. L'union de G et H est le graphe $G + H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup V(H)$ et l'ensemble des arêtes est $E(G) \cup E(H)$. Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG .

- Le joint de G et H est le graphe noté $G \vee H$ obtenu à partir de $G + H$ en ajoutant toutes les arêtes entre G et H .

1.2 La coloration dans les graphes

Le problème de coloration dans les graphes provient de celui des quatre couleurs posé par Francis Guthrie: "Est-il toujours possible de colorer les régions d'une carte de géographie avec seulement quatre couleurs sans que deux régions ayant une frontière commune soient coloriés avec la même couleur?". Ce problème ne fut démontré qu'en juin 1976 par deux chercheurs américains, Appel et Haken [1, 2], de l'université de Illinois, qui utilisèrent un ordinateur.

Robertson et al.[78] ont proposé une preuve plus simple du théorème des quatre couleurs. Pour plus d'information sur l'histoire de ce problème et sa résolution consulter [16] et [61]

Il existe plusieurs types de colorations de graphes: coloration des sommets, coloration des arêtes, coloration des sommets et des arêtes. Cependant, la coloration des sommets est la notion la plus étudiée.

Notre étude portera essentiellement sur la coloration des sommets. Ce domaine fait l'objet de beaucoup de travaux de recherche, ce qui explique son étendue. A titre d'exemple nous citons quelques colorations de sommets et leurs paramètres associés.

1.2.1 Coloration propre et nombre chromatique

Une k -coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c de V dans $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que $c(x) \neq c(y)$ pour tout $xy \in E(G)$. Notons que pour toute k -coloration propre de G , chaque ensemble de sommets correspondant à une couleur donnée est un stable. Ainsi, une k -coloration propre de G peut être vue comme une partition de $V(G)$ en k stables, appelés classes de couleurs.

Il est clair que, tout graphe possède une n -coloration propre, avec $n = |V(G)|$. Donc une coloration propre est intéressante si elle utilise un nombre minimum de couleurs.

D'où la définition du nombre chromatique.

Définition 1.1. *Le nombre chromatique d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs pour une coloration propre de G .*

Le problème de décision lié à ce paramètre est *NP*-complet [39] dans le cas général. De nombreux travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre chromatique en fonction d'autres paramètres. L'un des résultats classiques en terme de borne du nombre chromatique est celui donné par Brooks [14] qui a montré qu'un graphe G de degré maximum $\Delta(G)$ qui n'admet pas comme composante connexe un graphe complet $K_{\Delta(G)+1}$, ni, si $\Delta(G) = 2$, un cycle de longueur impaire, vérifie

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Pour le graphe $K_{\Delta(G)+1}$ et le cycle C_n de longueur impaire, on a évidemment $\chi(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G) + 1$ et $\chi(C_n) = 3 = \Delta(G) + 1$. De ce fait, on a toujours le résultat suivant:

Théorème 1.2. [14] *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dans [4], Berge a montré les deux résultats suivants.

Théorème 1.3. [4] *Tout graphe G d'ordre n , satisfait*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \quad \text{et} \quad \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

L'inégalité suivante est due à Gaddum et Nordhaus [76].

Théorème 1.4. [76] *Soit G un graphe d'ordre n et \overline{G} son complémentaire. Alors*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique; la plupart de ces colorations cherchent à minimiser le nombre de couleurs. Il existe d'autres colorations qui maximisent le nombre de couleurs utilisées, on cite par exemple la *a-coloration* et la *b-coloration*.

1.2.2 a -coloration et nombre a -chromatique

Dans ce paragraphe, nous introduisons la a -coloration et le nombre a -chromatique. Notons que cette coloration et ce paramètre ne font pas l'objet de notre étude, mais comme ils ont été à l'origine de la b -coloration et le nombre b -chromatique, nous rappelons la notion de la a -coloration et le nombre a -chromatique.

Etant donnée une k -coloration propre d'un graphe G , avec $k > \chi(G)$. Une manière de réduire le nombre de couleurs à l'aide d'une recoloration de tous les sommets d'une classe de couleurs par une et une seule couleur. Cette manière de recoloration n'est plus valable dès qu'il existe une arête entre chaque paire de couleurs, d'où l'introduction de la a -coloration par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [46]

Définition 1.5. *Une a -coloration est une coloration propre telle que entre chaque deux classes de couleur il existe au moins une arête. Le nombre a -chromatique d'un graphe G , noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleur dans une a -coloration de G .*

1.2.3 b -coloration et nombre b -chromatique

La définition de la a -coloration présentée précédemment a inspiré Irving et Manlove en 1999 [53, 74] à introduire un autre procédé de coloration. En effet, une autre manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleur en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleur. Cette manière de recoloration n'est plus valable dès qu'il existe dans chaque classe de couleur un sommet qui a des voisins dans toutes les autres classes de couleurs. D'où, la définition de la b -coloration.

Définition 1.6. *Une b -coloration est une coloration propre telle que toute classe de couleur contient un sommet qui a des voisins dans toutes les classes de couleurs.*

- *Un tel sommet est dit sommet b -dominant.*
- *Le nombre b -chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une b -coloration.*

Puisque toute b -coloration vérifie la définition de la a -coloration, alors le résultat suivant est immédiat.

$$b(G) \leq \psi(G).$$

Définition 1.7. Soient G un graphe et c une b -coloration de G avec $b(G)$ couleurs. Un ensemble S de b -sommets de c est dit b -système de c si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

- $|S| = b(G)$
- $\forall x, y \in S, c(x) \neq c(y)$.

1.3 Quelques résultats existants sur la b -coloration

Notre recherche est d'ordre théorique. Cependant, plusieurs travaux d'ordre pratique concernant la b -coloration des graphes ont été introduits. En effet, ce concept a été appliqué dans certains problèmes de classifications et de fouille de données (Voir [20, 21, 27, 28, 29, 26, 30, 31, 32]).

Les premiers travaux s'intéressants au concept de b -coloration sont dûs à Irving et Manlove [53] en 1999 qui ont montré que Le problème de décision lié au nombre b -chromatique est un problème NP -complet en général, même restreint aux graphes bipartis [68]. Par contre, ce problème devient polynomial pour les arbres [53, 74].

Dans [53, 74], Irving et Manlove ont remarqué que pour qu'un graphe G admette une b -coloration avec k couleurs, il doit avoir au moins k sommets de degré supérieur à $k - 1$. De cette observation, ils ont défini le m -degré comme suit:

Définition 1.8. Soient les sommets v_1, v_2, \dots, v_n d'un graphe G ordonnés tels que: $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$, où $d(v_i)$ est le degré de v_i . Le m -degré de G , noté $m(G)$ est défini par

$$m(G) = \max\{i : d(v_i) \geq i - 1\}.$$

Tout sommet v vérifiant $d(v) \geq m(G) - 1$ est dit sommet dense.

Les mêmes auteurs [53, 74] ont également montré que $m(G)$ est une borne supérieure du nombre b -chromatique.

Proposition 1.9. [53, 74] *Pour tout graphe G , $b(G) \leq m(G)$.*

Il est facile de vérifier que cette borne est atteinte pour les chaînes et les cycles d'ordre $n \geq 5$ et pour les cliques. Cependant, il existe d'autres graphes pour lesquels la différence entre $m(G)$ et $b(G)$ est très large. Par exemple, si $G = K_{n,n}$ est le graphe biparti complet, alors $m(G) = n + 1$ et $b(G) = 2$. De ce fait, il est naturel de chercher à caractériser les graphes réalisant l'égalité dans la Proposition 1.9.

L'algorithme de Irving et Manlove [53, 74] a inspiré beaucoup de chercheurs à chercher le nombre b -chromatique dans des classes de graphes ayant une structure proche de celle des arbres. Par exemple les cactus dont le m -degré est au moins 7 [19], [82], les graphes planaires extérieurs dont la maille est au moins 8 [73] et les co-graphes [8] et les P_4 -sparses [7].

Comme le problème de détermination de $b(G)$ dans le cas général est NP -complet, cela a poussé les chercheurs à établir des bornes qui encadrent ce paramètre. Dans ce cadre, les auteurs de [53, 74] ont remarqué que toute coloration minimale de G avec $\chi(G)$ est une b -coloration de G , et que tout sommet de degré $\Delta(G)$ peut avoir au maximum $\Delta(G)$ couleurs voisines et prendre pour lui la couleur $\Delta(G) + 1$.

Proposition 1.10. [53, 74] *Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$. Alors,*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dans [57, 41], les auteurs ont étudiés le concept de la b -coloration dans des classes de graphes généralisant les cographes (graphes sans P_4). Egalement, d'autres études ont été réalisées pour borner ou donner la valeur exacte du nombre b -chromatique pour des classes particulières de graphes. Dans [64], Kouider et Mahéo ont donné les valeurs exactes du nombre b -chromatique pour des graphes simples.

Proposition 1.11. [64] *Soient P_n et C_n respectivement une chaîne et un cycle d'ordre au moins 5. Alors*

$$b(P_n) = b(C_n) = 3.$$

Proposition 1.12. [64] *Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $b(K_{n,p}) = 2$, où $K_{n,p}$ est un graphe biparti complet.*

Ils ont également obtenu d'autres résultats [64] de type *Nordhauss-Gaddhum*.

Théorème 1.13. [64] *Soit G un graphe d'ordre n et \overline{G} son complémentaire. Alors*

$$b(G) + b(\overline{G}) \leq n + 1 \text{ et } b(G)b(\overline{G}) \geq n$$

Par analogie avec les résultats obtenus dans la coloration classique, Kouider et Mahéo [64] ont fourni d'autres bornes supérieures pour le nombre b -chromatique.

Proposition 1.14. [64] *Pour tout graphe $G = (E, V)$ d'ordre n , on a:*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|E|}$$

où $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G .

Proposition 1.15. [64] *Si G est un graphe non connexe avec des composantes connexes C_1, C_2, \dots, C_p , $p \geq 2$ alors*

$$b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}.$$

Dans [66], Kouider et Zaker ont présenté une borne supérieure de $b(G)$ dans le cas d'un graphe sans griffes généralisés (sans $K_{1,t}$).

Théorème 1.16. [66] *Si G est un graphe sans $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$, alors*

$$b(G) \leq (t - 1)(\chi(G) - 1) + 1.$$

Ils ont également montré que cette borne est atteinte.

Proposition 1.17. [66] *Pour tout entier $t \geq 3$ et k , il existe un graphe sans $K_{1,t}$ tel que*

$$\chi(G) = k \text{ et } b(G) = (t - 1)(k - 1) + 1.$$

Si $t = 3$ alors G est dit sans griffe.

Un Corollaire immédiat de cette proposition est le suivant:

Corollaire 1.18. [66] *Si G est sans griffe, alors $b(G) \leq 2\chi(G) - 1$*

Dans [17] les auteurs ont montré que tout graphe sans griffe avec $\alpha(G) \geq 3$ satisfait l'inégalité suivante: $\chi(G) \leq 2\omega(G)$. De ce fait, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.19. [66] *Tout graphe sans griffes avec $\alpha(G) \geq 3$ satisfait $b(G) \leq 4\omega(G) - 1$.*

D'autres travaux ont été effectués pour déterminer le nombre b -chromatique du produit cartésien [65, 64, 72, 59] et du produit croisé, total et lexicographique [56] de deux graphes. Dans [47], les auteurs ont également montré que le nombre b -chromatique du joint de deux graphes est égale à la somme de leurs nombres b -chromatiques.

D'autres résultats intéressants concernant le nombre b -chromatique ont été obtenus dans les graphes de *puissance* [25], les graphes *centraux* [83] et les graphes de *Kneser* [43, 60].

Beaucoup de travaux ont été réalisés dans les graphes réguliers. Les premières investigations concernant ce problème sont dues à El Sahili et Kouider [33].

Théorème 1.20. [33] *Soit G un graphe d -régulier sans cycles d'ordre 6 et de maille au moins 5. Alors le nombre b -chromatique de G est $d + 1$.*

Les mêmes auteurs [33] ont conjecturé que tout graphe d -régulier G de maille au moins 5 satisfait $b(G) = d + 1$. Dans [13], Blidia et al. ont donné une réponse négative à cette conjecture. En effet, ils ont montré que le nombre b -chromatique du graphe de Petersen est égal à 3, ce qui constitue un contre exemple à la conjecture présentée dans [33], ceci découle du fait que le graphe de Petersen est 3-régulier de maille 5. De ce fait, les auteurs de [13] ont reformulé ce problème de la façon suivante:

Conjecture 1.21. [13] *Soit G un graphe d -régulier de maille au moins cinq différent du graphe de Petersen. Alors le nombre b -chromatique de G est $d + 1$.*

Ils ont également montré que la conjecture présentée dans [13] est vraie pour les petites valeurs de d ($d \leq 6$).

D'autres résultats sur le même sujet ont été fournis par Kratochvíl et al. [68].

Théorème 1.22. [68] Soit G un graphe contenant $\Delta(G) + 1$ sommets $v_1, \dots, v_{\Delta(G)+1}$ tels que $d_G(v_i) = \Delta(G)$ pour tout i et $d(v_i, v_j) \geq 4$ pour tout $i \neq j$. Alors $b(G) = \Delta(G) + 1$.

Corollaire 1.23. [68] Soit G un graphe d -régulier ($d \geq 2$) d'ordre $n \geq d^4$. Alors le nombre b -chromatique de G est $d + 1$.

Récemment El Sahili et al.[35] ont donné des réponses partielles au conjecture 1.21.

D'autres travaux sur le nombre b -chromatique ont été réalisés dans la classe des graphes réguliers (Voir [15, 55, 81, 80] pour plus de détails).

1.3.1 Les graphes b -parfaits

Par analogie avec la classe des graphes parfaits, Hoàng et Kouider [47] ont introduit la classes des graphes b -parfaits.

Définition 1.24. [47] Un graphe G est dit b -parfait si $b(H) = \chi(H)$ pour tout sous-graphe induit H de G .

Rappelons que P_n désigne la chaîne sans corde à n sommets. Un diamant, noté D , est le graphe $K_4 - e$, Un graphe G est dit P_4 -sparse si tout sous graphe à 5 sommets de G contient au plus un P_4 .

Dans [47], Hoàng et Kouider ont caractérisé quelques classes de graphes b -parfaits.

Théorème 1.25. [47] Un graphe sans P_4 est b -parfait si et seulement s'il est sans $3P_3$ et sans $2D$.

Théorème 1.26. [47] Un graphe P_4 -sparse est b -parfait si et seulement s'il est sans $3P_3$, sans $P_3 + P_4$ et sans $2D$.

Théorème 1.27. [47] Un graphe biparti est b -parfait si et seulement s'il est sans P_5 , sans $P_3 + P_4$ et sans $3P_3$.

Théorème 1.28. [47] Tout graphe sans $2K_2$ et sans $\overline{P_5}$ est b -parfait.

Les résultats partiels obtenues par Hoàng et Kouider ont encouragé Hoàng, Linhares Sales et Maffray [50] à poursuivre la recherche sur la caractérisation des graphes b -parfaits. Ils sont arrivés à construire une liste \mathcal{F} de 22 graphes b -imparfaits minimaux et ont posé la conjecture suivante:

Conjecture 1.29. [50] *Un graphe est b -parfait si et seulement s'il est \mathcal{F} -libre.*

Cette conjecture a été vérifiée pour les classes des graphes suivantes: bipartis, P_4 -libres, sans diamant, 3-colorables, triangulés, C_4 -libres.

Dans [48] [49] Hoàng, Maffray, Mechebbec ont donné une preuve de la Conjecture 1.29 dans le cas général.

1.3.2 b -continuité

Dans [45], Harary et al. ont montré que pour tout graphe G et pour tout entier k tel que $\chi(G) \leq k \leq \psi(G)$, G admet une a -coloration en utilisant k couleurs. Ils ont appelé ce théorème "Théorème d'interpolation" et le paramètre $\psi(G)$ est un "Invariant d'interpolation".

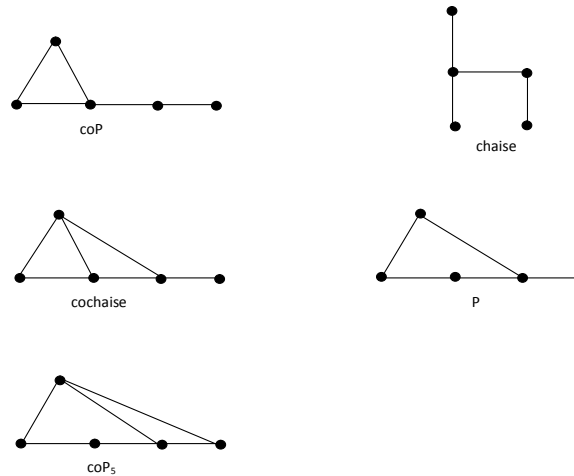
Similairement, Christen, Selkew [17] ont montré que pour tout entier k tel que $\chi(G) \leq k \leq \gamma(G)$, G admet une coloration de Grundy avec k couleurs.

Dans [53, 74], Irving et Manlove ont remarqué que l'hypercube de dimension trois admet une b -coloration avec 2 et 4 couleurs respectivement, mais il n'admet aucune b -coloration avec 3 couleurs. Selon la terminologie de Harary et al., le nombre b -chromatique n'est pas un invariant d'interpolation.

Dans [36], Faik a appelé l'interpolation du nombre b -chromatique " b -continuité"

Définition 1.30. *Un graphe G est dit b -continu, s'il admet une b -coloration avec k couleurs pour tout entier k , avec $\chi(G) \leq k \leq b(G)$.*

Faik a montré que le problème de la continuité d'un graphe G est un problème NP -complet, même si G est un graphe biparti. Ceci nous amène à étudier la b -continuité dans des classes de graphes. Dans [36], Faik a étudié la b -continuité des graphes triangulés. Dans [62], Kara et al. ont montré la b -continuité de certains graphes planaires.

FIGURE 1.1. Extension de P_4

Dans [36], Faik a étudié la b -continuité de quelques classes de graphes, telles que les hypercubes de dimension n , avec $n \neq 3$, certains graphes trois réguliers et quelques produits cartésiens de graphes.

1.3.3 b -monotonie et quasi monotonie

Dans [7], Bonomo et al. ont introduit la notion de la b -monotonie comme étant tout graphe G vérifiant $b(H_1) \geq b(H_2)$, pour tout sous graphe induit H_1 de G et pour tout sous graphe induit H_2 de H_1 . Les mêmes auteurs ont montré que les graphes sans P_4 et les graphes P_4 -sparse sont b -monotones.

Récemment Kouider [63] a introduit la notion de la quasi-monotonie. Un graphe G est dit quasi-monotone si pour tout sommet $v \in V(G)$, $b(G - v) \leq b(G) + 1$. La même auteur a montré la quasi-monotonie des graphes $(P, coP, chaise, cochaise)$ -libre, $(P_5, P, cochaise)$ -libre et (P_5, coP_5, P) -libre. Voir Figure 1.1

CHAPITRE 2

LA b -COLORATION DANS $G-e$

Nous présenterons dans ce chapitre une borne supérieure pour $b(G - e)$ en fonction de l'ordre du graphe G et le nombre b -chromatique de G , et nous donnerons une caractérisation des graphes atteignant cette borne.

A noter que les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans la revue *Discrete Applied Mathematics* [85].

2.1 Borne supérieure pour $b(G - e)$

Nous commençons notre étude par le théorème suivant:

Théorème 2.1. [85] *Pour tout graphe $G = (V, E)$ d'ordre $n \geq 2$, et pour tout $e \in E(G)$ on a: $b(G - e) \leq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.*

Preuve. Puisque G contient au moins une arête, alors

$$b(G) \geq 2. \tag{2.1}$$

On peut vérifier facilement que si $n = 2$ ou 3 , on a $b(G - e) \leq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ pour toute arête e de G . Supposons que $b(G - e) > b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ avec $n \geq 4$. Donc

$$b(G - e) \geq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1. \tag{2.2}$$

Il est clair que pour $n \geq 4$,

$$b(G - e) - b(G) \geq 1. \tag{2.3}$$

Posons $b(G - e) = k$. Soit c une b -coloration de $G - e$ avec k couleurs. Désignons par S l'ensemble de classes de couleurs qui contiennent un seul sommet et T l'ensemble des

autres classes de couleurs. On déduit que $|V(S)| = |S|$, et $|V(T)| \geq 2|T|$. L'ensemble T est non vide sinon $G - e$ est une clique. Soit $c_i \in T$ et $x_i \in c_i$ un sommet b -dominant. Il est facile de voir que l'ensemble $S \cup \{x_i\}$ induit un sous-graphe complet dans $G - e$ et par conséquent dans G . D'où,

$$|S| \leq b(G) - 1. \quad (2.4)$$

On a $b(G - e) = |S| + |T|$, et utilisant les conditions (2.2) et (2.4) on trouve $|T| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Nous considérons deux cas selon la parité de n .

Cas 1: n est pair.

Alors $|T| \geq \frac{n}{2}$ et donc $|V(T)| \geq 2|T| \geq n$. Ceci implique que $|S| = 0$. La condition (2.2) implique que $|T| = b(G - e) \geq b(G) + \frac{n}{2} - 1$. D'après l'inégalité (2.1), on trouve $|T| \geq \frac{n}{2} + 1$. Par conséquent $|V(G - e)| \geq 2|T| \geq 2(\frac{n}{2} + 1) = n + 2$, contradiction.

Cas 2: n est impair.

Alors $|T| \geq \frac{n+1}{2}$. Donc $|V(T)| \geq 2|T| \geq n + 1$. Ceci implique que $V(G) \geq n + 1$, contradiction. Ceci termine la preuve du théorème 2.1. \square

Dans [36] Faik a caractérisé les graphes bipartis tels que le nombre b -chromatique égal à 2. Tout d'abord, on rappelle la définition suivante:

Définition 2.2. [36] *Un sommet x d'une classe X_i , $i = 1$ ou 2 d'un graphe biparti $G = (X_1, X_2, E)$ est dit charismatique si et seulement si $N(x) = X_j$, $j \neq i$, $j \in \{1, 2\}$.*

Le Théorème suivant est dû à Faik [36].

Théorème 2.3. [36] *Soit $G = (X_1, X_2, E)$ un graphe biparti connexe. Alors $b(G) = 2$ si et seulement si chaque classe de la bipartition contient au moins un sommet charismatique.*

Le même auteur donne une généralisation aux graphes bipartis non connexes qui ont des composantes connexes d'ordre supérieur ou égal à 3.

Proposition 2.4. [36] *Soit G un graphe biparti de composantes connexes G_1, G_2, \dots, G_r telles que chaque composantes contient au moins trois sommets. Alors $b(G) = 2$ si et*

seulement si l'une des deux propriétés est vérifiée:

- 1) $r = 1$ et chaque classe de bipartition de G_1 contient au moins un sommet charismatique.
- 2) $r = 2$ et G_1 et G_2 sont des graphes bipartis complets.

On déduit à partir de la Proposition 2.4 le Corollaire suivant:

Corollaire 2.5. *Soit G un graphe biparti d'ordre $n \geq 2$ de composantes connexes G_1, G_2, \dots, G_r d'ordre n_1, n_2, \dots, n_r , respectivement. Alors $b(G) = 2$ si et seulement si l'une des trois propriétés est vérifiée:*

P_1 : $r = 1$ chaque classe de bipartition de G_1 contient au moins un sommet charismatique.

P_2 : $r = 2$ et,

soit pour $i = 1, 2$, $n_i \geq 3$, et G_i est un graphe biparti complet ou bien, $G_1 = K_1$ ou K_2 chaque classe de bipartition de G_2 contient au moins un sommet charismatique.

P_3 : $r \geq 3$ et G contient au plus deux composantes connexes G_p, G_q d'ordre au moins trois où:

- Si $n_p \geq 3$ et $n_q \geq 3$, alors G_p et G_q sont des graphes bipartis complets et pour $i \neq p, q$, G_i est soit K_1 ou K_2 .
- Si une et une seule composante connexe de G , disons G_p contient au moins trois sommets, alors chaque bipartition de G_p contient au moins un sommet charismatique, et pour $i \neq p$, G_i est soit K_1 ou K_2 .
- Si l'ordre de toutes les composantes connexes G_i avec $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ est au plus 2, alors G_i est soit K_1 ou K_2 (au moins l'une d'eux est un K_2).

Dans [9], Blidia et al. ont fourni les deux résultats suivants:

Théorème 2.6. [9] *Tout graphe G d'ordre n différent d'un graphe complet satisfait*

$$b(G) \leq \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor.$$

Le Corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 2.6

Corollaire 2.7. [9] Si G est un graphe sans triangle d'ordre n différent de K_2 , alors

$$b(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

En particulier, tout graphe biparti différent de K_2 satisfait cette inégalité.

Dans [9], les auteurs ont défini les classes \mathcal{G}_i , $0 \leq i \leq 3$ de graphes bipartis comme suit:

Classe \mathcal{G}_0 . Cette classe se compose de tous les graphes bipartis avec au plus quatre sommets différents de K_2 , $\overline{K_3}$ et $\overline{K_4}$.

Classe \mathcal{G}_1 . Un graphe biparti $G = (X, Y; E)$ est dans \mathcal{G}_1 si on peut écrire $X = A \cup C$ et $Y = B \cup D$ où A, B, C et D sont des ensembles disjoints vérifiant les conditions suivantes:

- $|A| = |D| = p$, $|B| = |C| = q$, avec $q \geq p \geq 0$ et $p + q \geq 3$;
- $G[A \cup B] = K_{p,q}$ et $G[B \cup C] = K_{q,q}^*$;
- Si $p > 1$, alors $G[A \cup D] = K_{p,p}^*$, (et il peut y avoir des arêtes entre C et D);
- Si $p = 1$, le sommet unique de D a au moins un non-voisin dans X .

Remarque 2.8. Si $p \geq 2$, alors G est connexe. Si $p = 1$, alors soit d est un sommet isolé et on a deux composantes connexes ou bien G est connexe.

Classe \mathcal{G}_2 . Un graphe biparti $G = (X, Y; E)$ est dans \mathcal{G}_2 si on peut écrire $X = A \cup \{x, u, v\}$ et $Y = B \cup \{y\}$ où A, B et $\{x, y, u, v\}$ sont des ensembles disjoints vérifiant les conditions suivantes:

- $|A| = |B| = p$, avec $p \geq 1$, et $G[A \cup B] = K_{p,p}^*$;

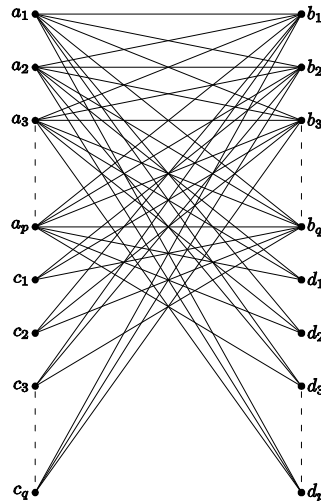


FIGURE 2.1. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{G}_1

- x est adjacent à tous les sommets de $B \cup \{y\}$, et y est adjacent à tous les sommets de $A \cup \{x\}$;
- Tout sommet de B a un voisin dans $\{u, v\}$;
- y a au plus un voisin dans $\{u, v\}$, et si y est adjacent à l'un des deux sommets u, v , disons à u , alors v est adjacent à tous les sommets de B .

Remarque 2.9. Si G un graphe non connexe appartient à \mathcal{G}_2 , alors b est indépendant de l'ensemble $\{u, v\}$. De plus exactement un sommet de l'ensemble $\{u, v\}$ est adjacent à tous les sommets de l'ensemble B , et l'autre sommet est indépendant de l'ensemble B .

Classe \mathcal{G}_3 . Un graphe biparti $G = (X, Y; E)$ est dans \mathcal{G}_3 si on peut écrire $X = A \cup \{x\}$ où A , $\{x\}$ et Y sont des ensembles disjoints vérifiant les conditions suivantes:

- $|A| = |Y| = p$, avec $p \geq 2$, et $G[A \cup Y] = K_{p,p}^*$;
- x est adjacent à tous les sommets de Y .

Les même auteurs dans [9], ont caractérisé les graphes bipartis pour les quels $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

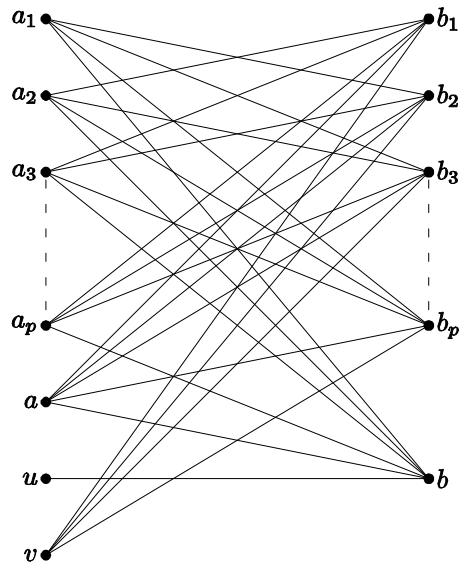


FIGURE 2.2. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{G}_2

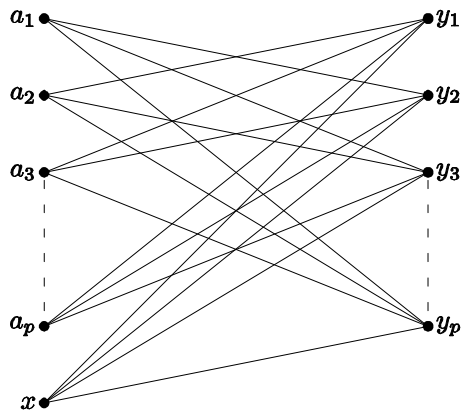


FIGURE 2.3. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{G}_3

Théorème 2.10. [9] Soit G un graphe biparti d'ordre n . Alors $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ si et seulement si $G \in \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$.

La question naturelle qui se pose est la suivante: quels sont les graphes G pour lesquels $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$, pour une certaine arête e de G ?

Dans le paragraphe suivant on donnera une réponse à cette question.

2.2 Les graphes G tels que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$

Dans le but de caractériser les graphes G d'ordre n tels que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$, on définit cinq famille de graphes \mathcal{F}_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), de la manière suivante:

2.2.1 Famille \mathcal{F}

Classe \mathcal{F}_1 : (Voir Figure 2.7) Pour $p > 1$, soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ et $\{u_1, u_2\}$ trois ensembles disjoints. Posons $H = G[Y \cup \{u_1, u_2\}]$, et $G(u)$ (respectivement, $G(y_t)$) la composante connexe de H qui contient u_1, u_2 (respectivement, qui contient y_t). Notons que $G(u)$ peut être égal à $G(y_t)$.

Un graphe $G = (V, E)$ appartient à la classe \mathcal{F}_1 si l'ensemble de sommets V est partitionnée en trois ensembles X, Y et $\{u_1, u_2\}$ avec les propriétés suivantes:

- Il n'existe aucune arête entre les sommets de X .
- Pour $i = 1, 2$, u_i est adjacent à tous les sommets de X et u_1 est adjacent à u_2 .
- Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, chaque sommet $x_i \in X$ est adjacent à tous les sommets de $Y \setminus \{y_i\}$, et pour un certain $t \in \{1, \dots, p\}$, il existe une arête e entre x_i et y_t .
- H est un graphe biparti et

- Si $G(u) \neq G(y_t)$, alors u_1, u_2 sont des sommets charismatiques dans $G(u)$, et $G(y_t)$ est une étoile de centre y_t (peut être réduit à y_t). De plus, si $d_H(y_t) \geq 2$, alors $G(u)$ est un graphe biparti complet. Les autres composantes de H sont soit K_1 ou bien K_2 . (voir Figure 2.5)
- Si $G(u) = G(y_t)$, alors $G(u)$ est un graphe biparti, de bipartition (V_1, V_2) tel que $y_t \in V_1$ et pour $i = 1, 2$, $u_i \in V_i$ où u_2 est un sommet charismatique dans $G(u)$ et au moins l'un des deux sommets u_1, y_t est un sommet charismatique dans $G(u)$. Les autres composantes de H sont soit K_1 ou bien K_2 . (voir Figure 2.4)

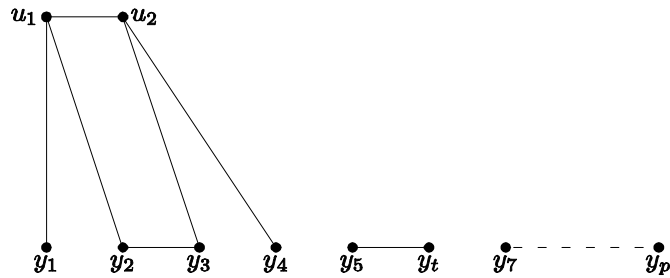


FIGURE 2.4. Exemple d'un graphe H avec $G(u) \neq G(y_t)$ et $d_H(y_t) = 1$.

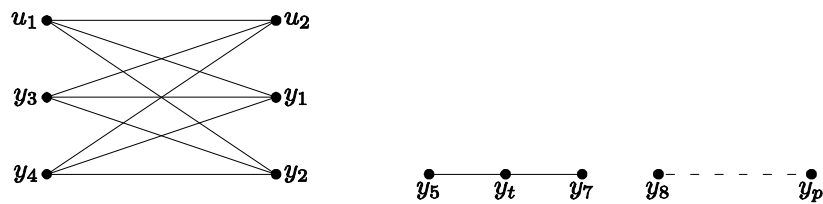


FIGURE 2.5. Exemple d'un graphe H avec $G(u) \neq G(y_t)$ et $d_H(y_t) = 2$

Classe \mathcal{F}_2 : Un graphe biparti G est dans \mathcal{F}_2 s'il est obtenu à partir de \mathcal{G}_1 en ajoutant une arête e telle que:

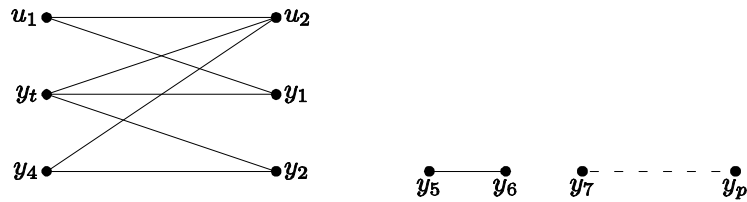


FIGURE 2.6. Exemple d'un graphe H avec $G(u) = G(y_t)$.

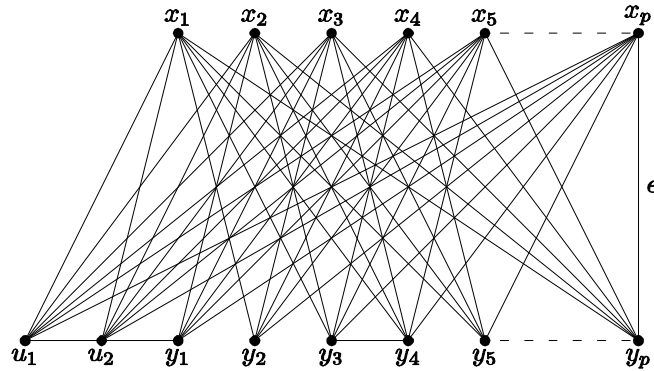


FIGURE 2.7. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_1

- $p = 1$.

Soit d est l'unique sommet de D , alors:

- d est indépendant de C et e connecte un sommet de B avec un sommet de C .
- d a au moins un voisin c_t dans C , alors $e = b_t c_t$; et si d est adjacent à tous les sommets de C , alors $e = ad$ où a l'unique sommet de A . Si d est adjacent à tous les sommets de $X \setminus \{c_i\}$, où c_i est un non-voisin de d dans C , alors $e = dc_i$.

- $p \geq 2$.

Dans ce cas, e connecte un sommet $x_t \in A$ avec un sommet $y_t \in D$ tel que y_t est adjacent à tous les sommets de C , ou bien e connecte un sommet $x_t \in B$ avec un sommet $y_t \in C$ tel que y_t est adjacent à tous les sommets de D . (voir Figure 2.8)

Classe \mathcal{F}_3 : Un graphe biparti G est dans \mathcal{F}_3 s'il est obtenu à partir de \mathcal{G}_2 en ajoutant une arête e telle que:

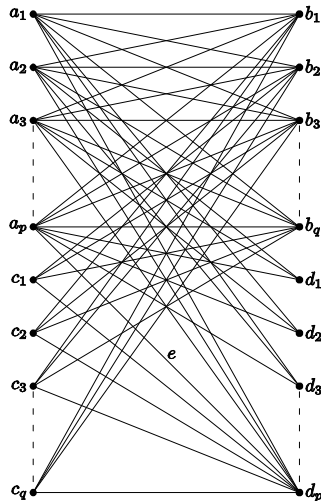


FIGURE 2.8. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_2

- Si pour un certain entier $t \in \{1, \dots, p\}$, le sommet b_t est adjacent aux deux sommets u et v , alors $e = a_t b_t$ ou bien,
- Si b est indépendant de l'ensemble $\{u, v\}$, et l'un des deux sommets u, v est isolé, disons v , alors l'arête e relie un sommet de A à un sommet de B ou bien $e = bu$.
- Si b est adjacent à l'un des deux sommets u, v , disons à u , alors $e = bv$ (voir Figure 2.9).

Class \mathcal{F}_4 : Un graphe biparti G est dans \mathcal{F}_4 s'il est obtenu à partir de \mathcal{G}_3 en ajoutant une arête e qui relie un sommet x_t de A à un sommet y_t de Y . (voir Figure 2.10)

Soient $\mathcal{F}_0 = \{P_2, P_3, 2K_2, P_3 + K_1, C_4, P_4, K_{1,3}, K_{1,3} + e, K_4 - e\}$

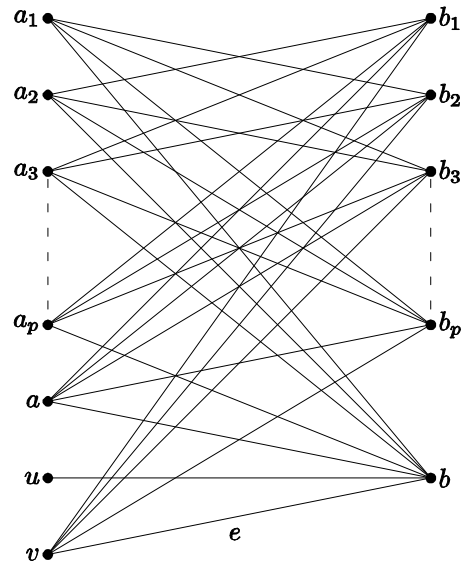
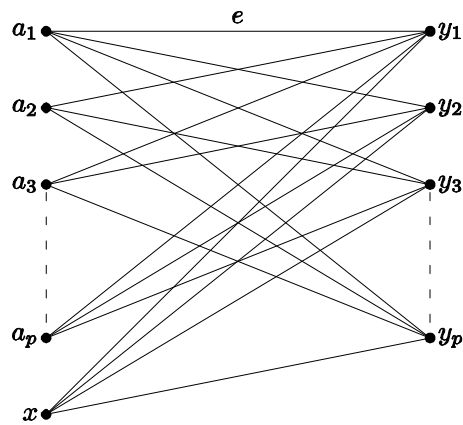
et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$.

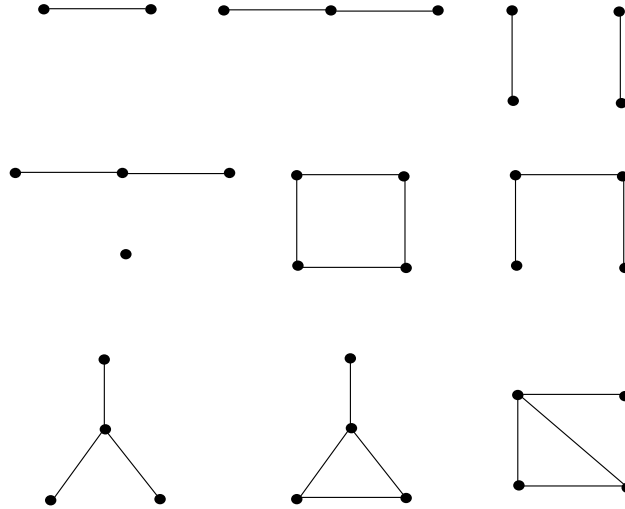
Dans le Lemme suivant, nous montrons que le nombre b -chromatique de tout graphe de la famille \mathcal{F} est égal à deux ou bien à trois.

Lemme 2.11. [85]

i) Si $G \in \mathcal{F}_1$, alors $b(G) = 3$.

ii) Si $G \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$, alors $b(G) = 2$.

FIGURE 2.9. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_3 FIGURE 2.10. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_4

FIGURE 2.11. La famille \mathcal{F}_0

Preuve.

i) Soit $G \in \mathcal{F}_1$. Posons $H = Y \cup \{u_1, u_2\}$. Comme $G[H]$ est un graphe biparti, colorons tous les sommets de H par les couleurs 1 et 2, et tous les sommets de X par 3. Il est clair que les sommets u_1, u_2 et $x_i \in X$ ($i = 1, \dots, p$) sont des sommets b -dominants. Par conséquent le graphe G admet une b -coloration avec trois couleurs, d'où $b(G) \geq 3$.

Maintenant, nous montrons que G n'admet aucune b -coloration avec quatre couleurs. Supposons qu'au contraire le graphe G admet une b -coloration c avec $k \geq 4$ couleurs. Comme u_1, u_2 et x_t forment une clique K_3 , et sans perte de généralité, colorons les sommets u_1, u_2 et x_t par les couleurs 1, 2, 3, respectivement. Comme x_t est adjacent à tous les sommets de Y , la couleur 3 ne peut pas apparaître dans Y . Vu que X est un ensemble stable, alors $X \setminus \{x_t\}$ ne contient aucun sommet b -dominant de couleur c_0 $c_0 \geq 4$. Par conséquent Y contient un sommet b -dominant, disons y_i de couleur 4. Par définition de \mathcal{F}_1 , Les couleurs 1 et 2 ne peuvent pas apparaître dans l'ensemble X . Il découle que les sommets b -dominants de couleur 1 et 2 appartiennent à H . Notons que ces derniers sommets sont de degrés au moins deux dans H .

Par définition de \mathcal{F}_1 , chaque composante connexe de H différent de $G(u)$ et de $G(y_t)$ est soit K_1 ou K_2 . Par conséquent le degré de tout sommet de $H - (G(u) \cup G(y_t))$ est au plus un dans H . Il découle que les sommets b -dominants de couleurs 1, 2, 4 sont dans

$G(u) \cup G(y_t)$.

Supposons que $G(u) \neq G(y_t)$. Si $y_i \in G(y_t)$, alors y_i est le centre d'une étoile et dans ce cas forcément les sommets b -dominants de couleurs 1, 2 sont dans $G(u)$. Vu que $G(u)$ est un graphe biparti complet, alors la couleur 4 ne peut être présent ni dans le voisinage de u_1 ni dans le voisinage de u_2 . Par conséquent, y_i ne peut pas être dans $G(y_t)$, donc forcément $y_i \in G(u)$. Comme u_1 et u_2 sont des sommets charismatiques dans $G(u)$, l'une des couleurs 1 ou 2 ne peut être présente dans le voisinage de y_i , contradiction.

Maintenant, on peut supposer que $G(u) = G(y_t)$. Sans perte de généralité, supposons que $y_t \in V_1$. Comme u_2 est un sommet charismatique, le sommet $y_i \notin V_2$, ceci implique que $y_i \in V_1$. De même, tous les sommets b -dominants de couleur 1 sont dans V_1 . On peut supposer que le sommet u_1 n'est pas charismatique, sinon la couleur 1 ne peut apparaître dans le voisinage de y_i . Donc forcément y_t est un sommet charismatique dans $G(u)$. De ce fait $N(y_t)$ contient les voisinages des sommets b -dominants de différentes couleurs. Il découle que toutes les couleurs sont présentes dans $N(y_t)$, contradiction.

D'où, $b(G) = 3$.

ii) Si $G \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$, alors G est un graphe biparti tel que soit G est connexe et chaque bipartition de G contient au moins un sommet charismatique, ou bien G contient deux composantes connexes G_1 et G_2 avec $G_1 = K_1$ et chaque bipartition de G_2 contient au moins un sommet charismatique. D'après le Corollaire 2.5, $b(G) = 2$. \square

Dans le lemme suivant, nous montrons qu'il existe au moins une arête e de G telle que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.

Lemme 2.12. [85] *Si $G \in \mathcal{F}$, alors il existe au moins une arête e de G telle que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.*

Preuve. Si $G \in \mathcal{F}_0$, alors il est facile de vérifier qu'il existe au moins une arête e de G tel que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$. Supposons que $G \in \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$. D'après le Théorème 2.1, $b(G - e) \leq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$. Pour monter l'égalité, il suffit de donner une b -coloration de $G - e$ avec $b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ couleurs. A cet effet, nous colorons les sommets de $G - e$ comme suit:

Supposons que $G \in \mathcal{F}_1$ avec $e = x_t y_t$. Puisque n est paire, alors le Lemme 2.11 implique

que $b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 = 1 + \frac{n}{2}$. En effet, dans $G - e$, nous affectons la couleur i aux sommets u_i , pour $i = 1, 2$ et la couleur $i + 2$ aux sommets x_i and y_i , $1 \leq i \leq p$ où $p = \frac{n}{2} - 1$. Nous obtenons une b -coloration de $G - e$ avec $\frac{n}{2} + 1$ couleurs .

Maintenant, supposons que $G \in \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$. Comme $G - e \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$, le Théorème 2.6 implique que $b(G - e) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Par conséquent, le Lemme 2.11 implique que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$. \square

2.2.2 Caractérisation

Maintenant, on va caractériser les graphes G pour lesquels $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.

Théorème 2.13. [85] *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Alors il existe au moins une arête e de G telle que $b(G - e) = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Soit $k = b(G - e)$.

Condition suffisante: Si $G \in \mathcal{F}$, alors d'après le Lemme 2.12, $k = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.

Condition nécessaire: Soit G un graphe tel qu'il existe une arête $e = xy$ de G avec

$$k = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2. \quad (2.5)$$

Posons $k = b(G - e)$ et considérons une b -coloration c de $G - e$ avec k couleurs. Soit C_i ($1 \leq i \leq k$) la classe de couleur i . Désignons par S l'ensemble de classes de couleurs qui contiennent un seul sommet, et T l'ensemble des autres classes de couleurs. Il est clair que

$$k = |S| + |T| \text{ et } n = |S| + |V(T)| = \sum_{i=1}^k |C_i|. \quad (2.6)$$

Si $n \leq 4$, alors on peut vérifier facilement que les seuls graphes vérifiant $k = b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ sont ceux qui appartiennent à \mathcal{F}_0 . Alors, on peut supposer par la suite que $n \geq 5$. L'équation 2.5 implique que

$$k \geq b(G) + 1.$$

Nécessairement,

$$x \text{ et } y \text{ appartiennent à la même classe de couleur de } G - e, \quad (2.7)$$

sinon, c reste une b -coloration de G avec k couleurs. En conséquence, $k \leq b(G)$, contradiction.

Vu que $k = |S| + |T|$, les équations (2.4) et (2.5) impliquent que $|T| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Nous considérons deux cas selon la parité de n .

Cas 1: n est impair:

Alors $|T| \geq \frac{n}{2} - 1$. Par conséquent, $|V(T)| \geq 2|T| \geq n - 2$. Donc, on a deux sous cas à distinguer:

Cas 1.1: $|V(T)| = n - 2$: Par ailleurs, l'équation 2.6 implique que $|S| = 2$, et $|T| = \frac{n}{2} - 1$.

Il découle que, $|V(T)| = 2|T|$.

Par conséquent chaque classe de couleur de T contient exactement deux sommets. Les équations (2.5) et (2.6) impliquent que $k = 2 + \frac{n}{2} - 1 = b(G) + \frac{n}{2} - 2$. D'où, $b(G) = 3$. Soit $S = \{u_1, u_2\}$. La définition de S implique que pour $i = 1, 2$, u_i est l'unique sommet b -dominant dans son classe de couleur. Il s'ensuit que u_1 et u_2 sont des sommets b -dominants de c qui sont adjacents. Sans perte de généralité, on peut supposer que $C_1 = \{u_1\}$ et $C_2 = \{u_2\}$. Pour $i \in \{3, \dots, k\}$, soit $C_i = \{x_i, y_i\}$. Posons $X = \{x_3, x_4, \dots, x_k\}$ et $Y = \{y_3, y_4, \dots, y_k\}$. Il est clair que $T = \bigcup_{i=3}^k \{x_i, y_i\}$. On peut supposer aussi que pour $i \in \{3, 2, \dots, k\}$, x_i est un sommet b -dominant de c dans C_i . En conséquence, chaque sommet x_i est adjacent à tous les sommets de S . Pour chaque paire de sommets $x_i \in C_i$, $x_j \in C_j$, ($i \neq j$), x_i est non adjacent à x_j , sinon $\{u_1, u_2, x_i, x_j\}$ est une clique. D'où $\omega(G - e) \geq 4$, and $b(G) \geq \omega(G) \geq 4$, contradiction. Par conséquent X est un stable. Ceci implique que chaque sommet $x_i \in C_i$ est adjacent à tous sommet $y_j \in C_j$ ($i \neq j$). L'équation (2.7) implique qu'il existe un entier $t \in \{3, \dots, k\}$ tel que

$$x = x_t \text{ et } y = y_t.$$

Maintenant, nous montrons que $G[Y \cup S]$ est sans cycle impair. Supposons qu'au contraire $G[Y \cup S]$ contient un cycles impaire C . Vu que $x_t \in X$ est adjacent à tous les sommets de $Y \cup S$, il s'ensuit que $\chi(C \vee \{x_t\}) = \chi(C) + 1 = 4$. Par conséquent $b(G) \geq \chi(G) \geq \chi(C \vee \{x_t\}) = 4$, contradiction. D'où, $G[Y \cup S]$ est un graphe biparti. Supposons que $b(G[Y \cup S]) = b_1 \geq 3$. Soient π_1 une b -coloration de $G[Y \cup S]$ avec b_1 couleurs et π une b -coloration de G obtenue à partir de π_1 en colorant tous les sommets de X par $b_1 + 1$.

Comme X est un ensemble stable et x_t est adjacent à tous les sommets de l'ensemble $Y \cup S$, alors π est une coloration propre de G . Ceci implique que $b(G) \geq b_1 + 1 \geq 4$, contradiction. D'où $b_1 \leq 2$. Vu que u_1 est adjacent à u_2 dans S , alors $b_1 = 2$.

Posons $H = G[Y \cup S]$.

Soient $G(u)$ la composante connexe de H qui contient S , et $G(y_t)$ la composante connexe de H qui contient y_t .

On montre le Fait suivant: □

Fait 1. Si $G(y_t) \neq G(u)$, alors

1. Si $y_i \in V(H \setminus G(u))$, avec $y_i \neq y_t$, alors $d_H(y_i) \leq 1$.
2. $G(y_t)$ est une étoile de centre y_t , peut être réduit au point y_t .
3. Chaque composante connexe de H différente de $G(u)$ et de $G(y_t)$ est soit K_1 où bien K_2 .

Preuve du Fait 1.

1) Supposons qu'au contraire $H \setminus G(u)$ contient un sommet $y_f \neq y_t$, tel que $d_H(y_f) \geq 2$. Soient G_p la composante connexe de H qui contient y_f et V_1 and V_2 la bipartition de G_p . Supposons au premier lieu que $G_p \neq G(y_t)$. Puisque y_f est de degré au moins deux dans H , il existe au moins deux sommets y_s, y_d qui sont adjacents à y_f . Sans perte de généralité, supposons que $y_f \in V_2$ et $y_s, y_d \in V_1$. Maintenant, colorons les sommets de G comme suit.

Assignons la couleur 1 aux sommets u_1 et y_s , assignons la couleur 2 aux sommets u_2 et y_d , colorons les sommets x_f et y_f par la couleur 4, colorons le sommet x_t par la couleur 3. Nous obtenons une b -précoloration de G avec 4 couleurs telle que u_1, u_2, x_t, y_f sont les sommets b -dominants de couleurs 1, 2, 3, 4 respectivement.

Afin de finaliser la coloration de G , nous utilisons l'extension suivante:

Extension (a): Assigner la couleur 1 aux sommets restant de V_1 , colorons par 3 les sommets de X , non-voisins de sommets de V_1 . Soient V_2', V_2'' une partition des sommets non colorés de V_2 définis comme suit:

$$V_2' = \{y_i \in V_2 : y_i \text{ est non coloré et tous les couleurs apparaissent dans } N(y_i)\}.$$

$$V_2'' = \{y_i \in V_2 - V_2' : y_i \text{ est non coloré}\}$$

alors $V_2 = V_2' \cup V_2'' \cup \{y_f\}$. Notons que les ensembles V_2' , V_2'' peuvent être vides.

Si $V_2' \neq \emptyset$, alors posons $V_2' = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}\}$, ($i_m \geq 1$). Colorons y_{i_l} et x_{i_l} ($i_1 \leq i_l \leq i_m$) par la couleur $4 + l$, colorons chaque sommet $v \in V_2''$ par une couleur manquante dans son voisinage, et colorons les non-voisins de v dans X par 3.

Maintenant, colorons les sommets du sous graphe $H \setminus (G_p \cup S)$ par les couleurs 1 et 2, et colorons les non voisins de chaque sommet du sous graphe $H \setminus (G_p \cup S)$, dans X , par la couleur 3. Ceci termine l'extension(a).

Nous remarquons que:

a) Après la coloration de l'ensemble V_2' , chaque sommet de l'ensemble V_2'' a une couleur manquante parmi les couleurs 1 ou 2 dans son voisinage.

b) Après la coloration de l'ensemble V_2'' , on a $c(x_{i_l}) = c(y_{i_l}) = 4 + l$, pour ($i_1 \leq i_l \leq i_m$), alors x_{i_l} , y_{i_l} sont des sommets b -dominants de couleur $4 + l$, et chaque sommet dans $V \setminus \{x_{i_l}, y_{i_l}\}$ est voisin d'un sommet coloré par ($4 + l$).

Nous obtenons une b -coloration de G avec au moins quatre couleurs telle que $S \cup V_2' \cup \{y_f, x_t\}$ est l'ensemble des sommets b -dominants de différentes couleurs (voir Figure 2.12). Contradiction avec $b(G) = 3$. Par conséquent si $y_i \in V(H \setminus G(u))$, avec $y_i \neq y_t$, alors $d_H(y_i) \leq 1$.

Maintenant, supposons que $y_f \in G(y_t)$. Si $y_f \in V_2$, alors nous utilisons la coloration précédente. En conséquence $b(G) \geq 3$, contradiction. Donc $d_H(y_f) = 1$. Si $y_f \in V_1$, alors par la connectivité de $G(y_t)$, il existe un sommet $y \in V_2$ de degré au moins deux dans $G(y_t)$. Par un argument similaire à celui utilisé plus haut, on obtient $b(G) \geq 3$, contradiction. D'où, $d_H(y_f) = 1$.

2) Par la propriété 1) chaque sommet adjacent à y_t est de degré un. Puisque $G(y_t)$ est connexe, alors $G(y_t)$ est une étoile de centre y_t .

3) Soit G_i une composante connexe de H différent de $G(u)$ et de $G(y_t)$. Par la propriété 1), chaque sommet dans G_i est de degré au plus un. Vu que G_i est connexe, alors G_i est soit K_1 ou bien K_2 . Ceci termine la preuve du Fait 1

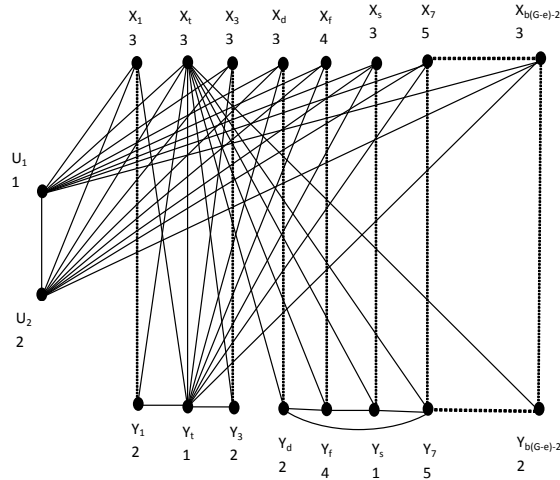


FIGURE 2.12. Une b -coloration de G avec 5 couleurs

Soient S_1 et S_2 la bipartition de $G(u)$ telle que $u_i \in S_i$, $i = 1, 2$. De plus, si $G(u) = G(y_t)$, sans perte de généralité, nous supposons que $y_t \in S_1$.

On montre le Fait suivant:

Fait 2.

1. Si $G(u) \neq G(y_t)$, alors u_1 et u_2 sont des sommets charismatiques dans $G(u)$. De plus, si $d_H(y_t) \geq 2$, alors $G(u)$ est un graphe biparti complet.
2. Si $G(u) = G(y_t)$, alors u_2 est un sommet charismatique dans $G(y_t)$, et au moins l'un des deux sommets y_t ou bien u_1 est un sommet charismatique dans $G(y_t)$.

Preuve du Fait 2.

1) Supposons que $G(u) \neq G(y_t)$. Si $V(G(u)) = S$, alors le résultat est trivial. Donc on peut supposer que $G(u)$ contient au moins trois sommets. Supposons au contraire que l'un des deux sommets u_1, u_2 , disons u_2 , n'est pas un sommet charismatique. Alors S_1 contient un sommet y_i non adjacent à u_2 . Comme $G(u)$ est connexe, S_2 contient un sommet y_j qui est adjacent à y_i et à un autre sommet $y_k \in S_1$ (possible $y_k = u_1$). Maintenant, colorons u_1 et u_2 par 1, 2 respectivement, colorons y_i, y_j, y_k par 2, 4, 1 respectivement. Assignons la couleur 3 à x_t , et la couleur 4 à x_j . Utilisons l'extension (a) en remplaçons y_f, y_s, y_d par y_j, y_k, y_i respectivement et remplaçons V_i par S_i pour $i = 1, 2$. Nous obtenons

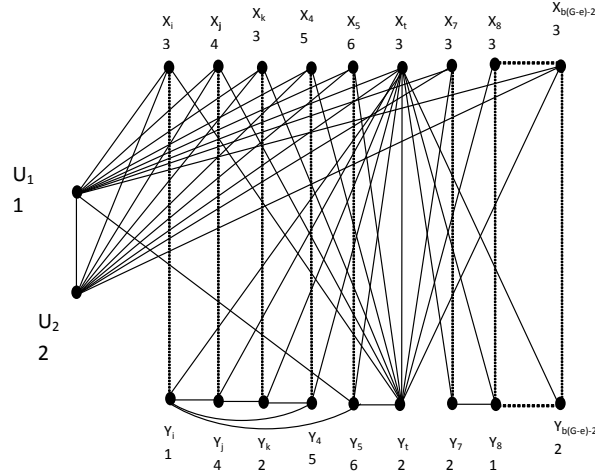


FIGURE 2.13. Une b -coloration de G avec 6 couleurs

une b -coloration de G avec au moins quatre couleurs, contradiction avec $b(G) = 3$. Par conséquent, u_1 et u_2 sont des sommets charismatiques dans $G(u)$.

Maintenant, Supposons que $d_H(y_t) \geq 2$ et $G(u)$ n'est pas un graphe biparti complet. Alors, $G(u)$ contient au moins deux sommets non adjacents disons, v_1, v_2 tels que $v_i \in S_i, i = 1, 2$. Soient y_1, y_2 deux voisins de y_t dans H . Colorons y_i, u_i par $i, i = 1, 2$. Colorons les sommets de X par 3. Colorons y_t, v_i par 4, for $i = 1, 2$. colorons les sommets restant de S_1 et S_2 par 1 et 2 respectivement. Puisque les sommets de l'ensemble X sont déjà colorés par 3, et comme les sommets non-colorés de G sont dans H , alors on peut étendre la coloration au graphe G en utilisant les couleurs 1 et 2. Nous obtenons une b -coloration de G avec quatre couleurs, telle que x_t, y_t sont b -dominants de couleurs 3, 4 respectivement. Comme u_1 et u_2 sont des sommets charismatiques dans $G(u)$, les deux sommets u_1 et u_2 sont des sommets b -dominants, contradiction avec $b(G) = 3$.

2) Si $G(u) = G(y_t)$. Supposons au premier lieu que u_2 n'est pas un sommet charismatique dans $G(y_t)$. Comme $y_t \notin S_2$, nous utilisons la première coloration de la propriété 1) de ce Fait et nous obtenons une b -coloration de G avec au moins quatre couleurs, contradiction (voir Figure 2.13). D'où, u_2 est un sommet charismatique dans $G(y_t)$.

Maintenant, supposons que u_1 et y_t ne sont pas charismatiques dans $G(y_t)$, alors il existe deux sommets $y_1, y_2 \in S_2$ (possible $y_1 = y_2$) tels que y_1 n'est pas adjacent à u_1 et y_2 n'est pas adjacent to y_t . Le Corollaire 2.5, implique que S_1 contient un sommet charismatique disons, y_3 . De ce fait, on distingue deux cas:

Cas 1: Il existe au moins deux sommets y_1, y_2 tels que $y_1 \notin N(u_1)$ et $y_1 \in N(y_t)$, $y_2 \notin N(y_t)$ et $y_2 \in N(u_1)$.

Colorons u_1, y_1 par 1, colorons x_1, x_2, x_t par 3, colorons y_2, y_t par 4. Pour étendre la coloration au graphe G , nous utilisons l'extension (a) en prenant $V_1 = S_2, V_2 = S_1$ et en remplaçant y_f, y_s, y_d par y_t, y_1, u_2 respectivement. Vu que u_2 est un sommet charismatique, u_2 est un sommet b -dominant de couleur 2 et y_t est un sommet b -dominant de couleur 4. Nous obtenons une b -coloration de G avec au moins quatre couleurs, contradiction avec $b(G) = 3$.

Cas 2: Il existe au moins un sommet $y_j \notin N(u_1) \cup N(y_t)$.

Colorons u_1, y_j, y_t par 1, colorons u_2 par 2, colorons x_t, x_j par 3, colorons x_3, y_3 par 4. En utilisant l'extension (a) avec $V_1 = S_2, V_2 = S_1$ et en remplaçant y_f, y_s, y_d par y_3, y_j, u_2 respectivement, comme u_2 est un sommet charismatique, nous obtenons une b -coloration de G avec quatre couleurs, contradiction. Ceci termine la preuve du Claim 2.

Les Faits 1 et 2, impliquent que $G \in \mathcal{F}_1$. Ceci termine le cas $|V(T)| = n - 2$.

Cas 1.2: Si $|V(T)| = n - 1$, alors $|S| = 1$. Il s'ensuit que $|T| = \frac{n}{2} - 1$. Si $|V(T)| = n$, alors $|S| = 0$. En conséquence $|T| = \frac{n}{2}$. Notons que $b(G - e) = |S| + |T|$. Alors dans les deux cas, $b(G - e) = \frac{n}{2}$. Les équations (2.5) et (2.6), impliquent que $b(G) = 2$. Clairement, G est un graphe biparti et donc aussi $G - e$ est un graphe biparti avec $b(G - e) = \frac{n}{2}$. Vu que, n est paire et $n > 5$, Le Théorème 2.10 implique que $G - e \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Notons que le graphe G est obtenu à partir de $G - e$ en ajoutant une arête e du complémentaire de $G - e$. Discutons les différents cas, suivant l'appartenance de G à \mathcal{G}_1 ou bien à \mathcal{G}_2 .

A₁) $G - e \in \mathcal{G}_1$.

Alors $V(G - e) = A \cup B \cup C \cup D$. Soit $t \in \{1, \dots, q\}$. Nous distinguons deux sous cas:

Sous cas 1: $A = \{a\}$ et $D = \{d\}$.

Supposons au premier lieu que $G - e$ est non connexe. Alors la Remarque 2.8, implique que d est un sommet isolé. Dans ce cas $e = b_t c_t$, sinon G contient une clique K_3 ou bien un cycle C_5 ou bien une classe de bipartition de G ne contient pas de sommets charismatiques, contradiction avec $b(G) = 2$.

Preuve. Maintenant, Supposons que $G - e$ est connexe. Discutons les différents choix de l'arête e .

1) $e = dc_t$. Si d a un non-voisin dans $X \setminus \{c_t\}$, alors Y ne contient pas de sommets charismatiques dans G , contradiction avec $b(G) = 2$. Donc, ce cas ne peut pas se produire. En conséquence d est adjacent à tous les sommets de l'ensemble $X \setminus \{c_t\}$, les sommets a et d sont charismatiques dans G .

2) $e = ad$ (si $ad \notin E(G - e)$). Si d a un non-voisin dans C , alors Y ne contient pas de sommets charismatiques dans G . Donc, ce cas ne peut pas se produire. Par conséquent d est adjacent à tous les sommets de C , les sommets a et d sont charismatiques dans G .

3) $e = b_t c_t$. Clairement b_t est un sommet charismatique dans G . Si d est indépendant de c_t et a , alors X ne contient pas de sommets charismatiques dans G . Donc, ce cas ne peut pas se produire. sinon, c_t (où a) est un sommet charismatique dans G .

Pour les autres choix pour e , alors soit G contient une clique K_3 ou bien un cycle C_5 , contradiction avec $b(G) = 2$.

Sous cas 2: $|A| = p \geq 2$.

Dans ce cas G est un graphe biparti connexe. Supposons au premier lieu que pour $i \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, e connecte un sommet c_i de C avec un sommet d_j de D . Dans G , c_i est non adjacent à $b_i \in B$ et d_j est non adjacent à $a_j \in A$. De ce fait, G ne contient pas de sommets charismatiques. Le Théorème 2.3, implique que $b(G) \geq 3$, contradiction. D'où, ce cas ne peut se produire. Si e connecte un sommet $b_t \in B$ avec un sommet $c_t \in C$, alors $N_G(b_t) = A \cup C$, donc b_t est un sommet charismatique dans G . Le sommet c_t est adjacent à tous les sommets de D , sinon la bipartition $A \cup C$ de G ne contient pas de sommets charismatiques. Similairement, si l'arête ajoutée connecte un sommet a_t de A avec un sommet d_t de D , alors d_t est adjacent à tous les sommets de C . Pour les autres choix de e , alors soit G contient une clique K_3 ou bien un cycle C_5 ,

contradiction.

Dans tous les sous cas, $G \in \mathcal{F}_2$.

A₂) $G - e \in \mathcal{G}_2$.

Alors $V(G - e) = X \cup Y$ où $X = A \cup \{a, u, v\}$ et $Y = B \cup \{b\}$. Soit $t \in \{1, \dots, p\}$.

Supposons que $G - e$ est non connexe. De ce fait, selon la Remarque 2.9 et sans perte de généralité, u est adjacent à tous les sommets de B et $G - e - v$ est connexe. Ceci implique que les seuls choix possibles pour l'arête e sont $a_t b_t$ et bu , Car sinon, soit G contient une K_3 ou bien l'une classe de bipartition de G ne contient pas de sommets charismatiques.

Maintenant, Supposons que $G - e$ est connexe. Nous examinons les différents choix possibles pour l'arête e .

1) $e = a_t b_t$. Si b_t a un non-voisin dans $\{u, v\}$, alors Y ne contient pas de sommets charismatiques, contradiction. sinon, a_t et b_t sont des sommets charismatiques dans G .

2) $e = b_t u$ ou bien $e = b_t v$. Alors Y ne contient pas de sommets charismatiques car b_t est non adjacent à a_t .

3) $e = bl$ avec $l = u$ où bien $l = v$ tel que $\{l, l'\} = \{u, v\}$. Clairement, a est un sommet charismatique dans G . Y contient un sommet charismatique si et seulement si $bl' \in E(G - e)$. Pour les autres choix pour e , soit G contient une clique K_3 ou bien un cycle C_5 ou bien une de classe de bipartition de G ne contient pas de sommets charismatiques. D'où, dans tous les cas, $G \in \mathcal{F}_3$.

Cas 2: n est impair.

Alors $|T| \geq \frac{n-1}{2}$ et comme $|V(T)| \geq 2|T|$, ceci implique que $|T| = \frac{n-1}{2}$. Nous considérons deux sous cas:

Cas 2.1: $|V(T)| = n - 1$. Alors $|S| = 1$ et $|T| = \frac{n-1}{2}$. Vu que $b(G - e) = |S| + |T|$, alors $b(G - e) = \frac{n+1}{2}$.

En appliquant les équations (2.5) et (2.6), on obtient $b(G) = 2$. Il s'ensuit que, G est un graphe biparti et ceci implique que $G - e$ est aussi biparti avec $b(G - e) = \frac{n+1}{2}$. Puisque n est impaire et $n \geq 5$, le Theorem 2.10 implique que $G - e \in \mathcal{G}_3$. Alors $V(G - e) = A \cup \{x\} \cup Y$.

En appliquant l'observation (2.7), on obtient $e = a_t y_t$ et dans ce cas les sommets a_t et y_t sont charismatiques dans G . D'où, $G \in \mathcal{F}_4$.

Cas 2.2: $|V(T)| = n$. Alors $|S| = 0$ et $|T| = \frac{n-1}{2}$.

En utilisant les Observations (2.5) et (2.6), on obtient $b(G) = 1$, contradiction avec le fait que G contient au moins une arête e . Donc ce cas ne peut pas se produire. Ceci termine la preuve du Théorème 2.13. □

CHAPITRE 3

LA b -COLORATIONS DANS LES GRAPHE ÉTRIQUÉS

Dans ce chapitre, nous étudions les graphes étriqués. En premier lieu, nous montrons que le nombre b -chromatique des graphes étriqués de maille au moins 8 est égale à m ou bien $m - 1$ et nous cracrérison les graphes étriqués de maille au moins 8 avec $b(G) = m$. En second lieu, Nous nous sommes intéressés à un problème récent concernant les graphes étriqués posé par Chang et Lin dans [69] à savoir: Pour tout graphe $G \in B_m$, alors $b(G) = m(G)$ ou bien $m(G) - 1$.

Nous vérifions la conjecture de Chang et Lin pour des sous classes de B_m . Enfin nous présentons une borne inférieure du nombre b -chromatique pour tout graphe $G \in B_m$.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans la revue "Journal Of combinatorial Optimization" [67].

Définition 3.1. *Un graphe G est dit étriqué s'il a exactement $m(G)$ sommets denses dont chacun d'eux est de degré $m(G) - 1$.*

Pour un graphe étriqué G , soient D l'ensemble des sommets denses et D' l'ensemble des sommets non denses. Notons par B_m avec $m = m(G)$, la classe des graphes bipartis étriqués de bipartition (D, D') tels que pour tous sommets $x, y \in D$, $|N(x) \cap N(y)| \leq 1$.

Notons par K_m la classe de graphes $H = \bigcup_{i=1}^{i=m} K_m^i$ où K_m^i avec $1 \leq i \leq m$ est un graphe complet de m sommets et $|V(K_m^i) \cap V(K_m^j)| \leq 1$ pour $i \neq j$.

Conjecture 3.2 (Erdős-Faber-Lovász). *Si $H \in K_m$, alors $\chi(H) = m$.*

Le Théorème suivant est dû à Lin et Chang [69].

Théorème 3.3. [69] *Si la conjecture d'Erdos-Faber-rovàsz est vraie, alors $b(G) = m$ ou $m - 1$ pour tout graphe $G \in B_m$.*

Les même auteur ont posés la Conjecture suivante:

Conjecture 3.4. [69] *Si $G \in B_m$, alors $b(G) = m(G)$ ou bien $m(G) - 1$.*

3.1 Les graphes étriqués de maille au moins 8

Soit G un graphe étriqué avec $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des sommets denses et Y l'ensemble des sommets non-denses. Pour $y_j \in Y$, soit x_t le premier voisin de y_j dans X . Soient $C = X \cup N\{x_1, x_2, \dots, x_{t-1}\}$, $Y_C = Y \cap C$ et $r(y_j) = |N_C(y_j)| + |N_C(N_X(y_j))| + j - 1$. Donc $r(y_j) = |N_X(y_j) \cup N_X(N_X(y_j)) \cup N_{Y_C}(y_j) \cup N_{Y_C}(N_X(y_j))| + j - 1$. Comme $g(G) \geq 7$, alors $|N_C(y_j)| + |N_C(N_X(y_j))| \leq m$. Nous introduisons les définitions suivantes:

Définition 3.5. [67] *Soit G un graphe étriqué avec X l'ensemble des sommets denses et Y l'ensemble des sommets non denses. Soit $y \in Y$.*

On dit que y 2-domine X si $N_X(y) \cup N_X(N_X(y)) = X$.

On dit que $y \in Y$ est inadmissible si $|N_C(y)| + |N_C(N_X(y))| = m$.

Lemme 3.6. [67] *Si G est un graphe étriqué de maille au moins 8, alors il contient au plus un sommet inadmissible.*

Preuve. Supposons que G possède deux sommets inadmissibles disons, y_0, y_1 . Soit x_{i_j} le premier voisin de y_j avec $j = 0, 1$. Supposons que x_{i_0} précède ou égale à x_{i_1} . On distingue deux cas:

Cas 1: $x_{i_0} = x_{i_1}$. Vu que $d_G(x_{i_0}) = m - 1$, alors par définition de y_0 , on distingue deux sous cas:

Cas 1.1: y_0 a un second voisin disons, $x_2 \in X$, avec $x_2 > x_{i_1}$. Comme $d_G(x_2, y_1) \leq 2$, alors G contient un cycle de longueur au plus 5, contradiction.

Cas 1.2: y_0 est un voisin d'un sommet $y \in Y$. Il s'ensuit que G contient une chaîne $P(y_1, y)$ qui ne contient pas y_0 et de longueur au plus 3 avec les sommets intérieurs sont dans C . Ceci implique que G contient un cycle de longueur au plus 6, contradiction.

Cas 2: $x_{i_0} \neq x_{i_1}$. Comme y_0 est inadmissible, $x_{i_1} \in N_X(y_0) \cup N_X^2(y_0)$. Deux sous cas s'imposent:

Cas 2.1: y_1 possède un autre voisin disons, $x_2 \in X$, avec $x_2 > x_{i_1} > x_{i_0}$. Clairement, x_2 est a distance au plus 2 de y_0 . Par conséquent, G contient un cycle de longueur au plus 6, contradiction.

Cas 2.2: y_1 est adjacent à $y \in Y_C$. Cela implique que G contient une chaîne $P(y_0, y)$ de longueur au plus 3. Par conséquent, il existe dans G un cycle de longueur au plus 7, contradiction. \square

Théorème 3.7. [67] *Soit G un graphe étriqué de maille au moins 8. Alors:*

- (1) $b(G) = m$ si et seulement si Y ne contient aucun sommet qui 2-domine X .
- (2) $b(G) = m - 1$ si et seulement si Y contient un sommet qui 2-domine X .

Preuve.

(1) Condition suffisante: Supposons que $b(G) = m$. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ l'ensemble de sommets denses de G . Il est clair que dans toute b -coloration de G avec m couleurs, tous les sommets de X sont des sommets b -dominants. Sans perte de généralité, colorons x_i par la couleur i avec $1 \leq i \leq m$. Colorons le voisinage de x_i par les couleurs $\{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i\}$ avec $1 \leq i \leq m$. Comme pour tout $1 \leq i \leq m$, $d_G(x_i) = m - 1$, alors tous les voisins de x_i sont colorés. Si Y contient un sommet y qui 2-domine X , alors il n'existe aucune couleur disponible pour y , contradiction. Par conséquent Y ne contient aucun sommet qui 2-domine X .

Condition nécessaire: Supposons que Y ne contient aucun sommet qui 2-domine X . Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ l'ensemble de sommets denses de G . Colorons chaque sommet x_i par la couleur i avec $1 \leq i \leq m$. Maintenant, nous colorons le voisinage du sommet x_i de tel sorte que x_i est un sommet b -dominant pour tout i , $1 \leq i \leq m$. considérons le voisinage de x_1 . Soit $R_1 = \{x \in N(x_1) \text{ tel que } N(x_1) \cap \{x_2, x_3, \dots, x_m\} \neq \emptyset\}$. Ordonnons $N(x_1)$ en commençons par le sous ensemble de sommets R_1 . Si $R_1 = \{y_1\}$, alors comme y_1 ne 2-domine pas X , colorons y_1 par une couleur qui n'existe pas dans $N_X(y_1) \cup N_X^2(y_1)$. Maintenant, supposons que $|R_1| \geq 2$. Pour $y_i \in R_1$, soit $x_{j(i)}$ le plus grand voisin de y_i dans l'ensemble $\{x_2, x_3, \dots, x_m\}$. Colorons y_i par $j(i + 1)$ où $i + 1$ est prie modulo $|R_1|$.

Comme G est sans C_4 , pour tout $i \neq k$, $x_{j(i)} \neq x_{j(k)}$, il s'ensuit que toutes les couleurs de R_1 sont différentes. Par suite on utilise $|R_1| + 1$ couleurs pour colorer $R_1 \cup \{x_1\}$; il restent $m - 1 - |N_X(x_1)| - |R_1|$ couleurs pour $N_Y(x_1) - |R_1|$. Par conséquent, on peut colorer $N(x_1)$ par $m - 1$ couleurs différentes. Supposons que tous les voisins de x_1, x_2, \dots, x_{t-1} , $t - 1 < m$ sont colorés tels que x_i est un sommet b -dominant pour tout i , $1 \leq i \leq t - 1$. Soit C_t l'ensemble de sommets colorés. Il s'ensuit que, $C_t = X \cup_{i \leq t-1} N(x_i)$ et soit

$$Y_C = Y \cap C_t.$$

Maintenant, colorons les sommets de $N(x_t) \setminus C_t$. On ordonne $N(x_t) \setminus C_t$ en commençant par les voisins de l'ensemble $X - \{x_1, \dots, x_t\}$, ensuite les voisins de Y_C . Nous colorons $N(x_t) \setminus C_t$ suivant cette ordre. Soit $R_t = (N\{x_{t+1}, \dots, x_m\} \cup N(Y \cap C_t)) \cap (N(x_t) \setminus C_t)$. Soient y_1, \dots, y_{j-1} les sommets de $N(x_t) \setminus C_t$ qui sont déjà colorés. Pour y_j in $N(x_t)$, soit $i(y_j)$ le nombre de couleurs interdites pour y_j .

On montre le Fait suivant:

Fait 3. [67]

i) Si pour tout y_j , $i(y_j) \leq m - 1$, alors on peut colorer les voisins de x_t tel que x_t soit un sommet b -dominant.

ii) $i(y_j) \leq r(y_j)$. De plus, comme G de maille au moins 7, $r(y_j) \leq m$.

iii) Si $y_j \in N(x_t) \setminus (R_t \cup C_t)$, alors $i(y_j) \leq m - 1$. *Preuve du Fait 3:i)* Supposons que $i(y_j) \leq m - 1$ pour tout $y_j \in R_t$. Nous colorons les sommets de R_t par des couleurs différentes. Soit $R'_t = N(x_t) \setminus (R_t \cup C_t)$. Il reste $m - 1 - |(C_t \cap N(x_t)) \cup R_t| = |R'_t|$ couleurs non utilisées. A cette étape, tout sommet appartient à $N(x_t) \setminus (R_t \cup C_t)$ a $|R_t \cup C_t| + 1$ couleurs interdites. Par conséquent, on peut colorer les sommets de R'_t par des couleurs différentes qui sont non utilisées par $\{x_t\} \cup R_t \cup C_t$. Par suite, x_t est un sommet b -dominant de couleur t .

ii) Supposons qu'on a coloré les sommets y_1, y_2, \dots, y_{j-1} de R_t . Comme la coloration est propre, la couleur assignée à y_j , $c(y_j)$ doit être différente aux couleurs des sommets de l'ensemble $N_C(y_j)$. Vu que la coloration est dominante, $c(y_j)$ est différente des couleurs assignées aux sommets de l'ensemble $N_C(N_X(y_j)) \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{j-1}\}$. Par conséquent,

$i(y_j) = |N_C(y_j)| + |N_C(N_X(y_j))| + (j - 1) = r(y_j)$. Soit $D = [N_C(x_t) \cup \{x_t\}] \cup [\bigcup_{y \in R_t} (N_C(y) \setminus \{x_t\})] \cup [N_C(N_X y_j) \setminus \{x_t\}]$, et soit $r'(y_j) = |N_C(y_j) \setminus \{x_t\}| + |N_C(N_X y_j) \setminus \{x_t\}| = r(y_j) - (j - 1) - d_C(x_t) - 1$. En conséquence, $r'(y_j) = d_{C \setminus \{x_t\}}(y_j) + \sum_{x \in N_X(y_j), x \neq x_t} d_C(x)$. Comme $g(G) \geq 7$, pour tout $y_k, y_l \in R_t$, les deux ensembles $N_C(N_X(y_k) \cup N_C(y_k))$ et $N_C(y_l) \setminus \{x_t\}$ n'ont aucun voisin commun. De plus, pour tout $x \in X$ soit $x \in D \cap X$ ou bien x est adjacent à au plus un sommet de $D \cap Y$. En conséquence, $1 + d_C(x_t) + r'(y_j) + \sum_{y_k \in R_t, y_k \neq y_j} d_{C \setminus \{x_t\}}(y_k) \leq |X|$. Comme $\sum_{y \in R_t, y \neq y_j} d_{C \setminus \{x_t\}}(y) \geq j - 1$, on obtient $r(y_j) \leq |X|$. La définition de R_t implique que $i(y_j) \leq m$.

iii) Si $y_j \in N(x_t) \setminus (R_t \cup C_t)$. On a $i(y_j) \leq d(x_t)$. Ceci termine la preuve du Fait 3

□

On montre le Fait suivant:

Fait 4. [67] i) Si aucune couleur n'est disponible à $y = y_j$, alors on se réduit au cas où $t \neq 1$, m et $N_Y(R_t) = \emptyset$.

ii) Si $r(y_j) = m$, alors $T = R_t \cup \{x_t, \dots, x_m\}$ est un arbre de hauteur au plus 2. $j = 1$ et $|R_t| = 1$, y_1 est inadmissible et y_1 est le centre de T , ou bien $j > 1$ et $|R_t| \geq 2$, alors $d_C(y_k) = d_X(y_k) = 2$ pour tout $k \leq j$, et $\{x_{t+1}, \dots, x_m\} \setminus N_X^2(R_t) \subseteq N_X(x_t)$. De plus, x_t est le centre de T .

Preuve du Fait 4:

i) Supposons que $t = m$.

1) Si $i(y_1) = m$, alors $m \leq r(y_1) = d_C(x_m) + d_{Y_C}(y_1) + 1$. De ce fait il existe une couleur c_0 qui est présente dans $N_Y(y_1)$ et qui n'apparaît pas dans $\{x_m\} \cup N_C(x_m)$. Vu que $g(G) \geq 8$, tout sommet $x_i, i \leq m - 1$ est adjacent à x_m , ou bien il a un voisin commun avec x_m ou bien avec y_1 . Pour tout $i, i' \leq m - 1$, x_i et $x_{i'}$ n'ont pas de voisins communs. On fait un échange de couleur entre c_0 et m dans $N_Y(x_i)$ pour $x_i \in N_X[N_Y(y_1)]$, $i \leq m - 1$. De ce fait, $i(y_1) \leq m - 1$.

2) Si $j \geq 2$, alors $m \leq r(y_j) \leq d(x_m) + d_{Y_C}(y_j)$. En conséquence $d_{Y_C}(y_j) \geq 1$. Comme

$g(G) \geq 8$, $\sum_{k \leq j} d_{Y_C}(y_k) \leq |X| - 1 - d_C(x_m)$. D'où, $r(y_j) \leq |X| - \sum_{k \leq j-1} d_{Y_C}(y_k) + (j-1)$. Si pour un certain i , $d_{Y_C}(y_i) = 0$, alors on fait un échange entre y_i et y_j . Vu que, $r(y_j) = |X|$, $d_{Y_C}(y_i) = 1$ pour tout $i \leq j-1$ et $d_{Y_C}(y_j) = 1$ sinon, y_j est le premier voisin de x_m . Par conséquent, $m \leq r(y_j) = d_C(x_m) + j + 1 \leq d(x_m) + 1 = m$, et $d_C(x_m) = m - 1 - j$. Il s'ensuit que, y_j est le dernier voisin de x_m et $|R_t| = m - 1 - d_C(x_m)$.

Considérons l'ensemble L des $|R_t|$ couleurs qui ne sont pas présentes dans $N_C(x_m) \cup \{x_m\}$. Colorons y_1, y_2, \dots, y_j globalement. Soit $d(c)$ le nombre de sommets de R_t qui sont colorés par la couleur c . Soit $i'(y)$ le nombre de couleurs interdites pour y . Si $N_Y(R_t)$ contient au moins 2 couleurs, alors $i'(y) \leq (m-j) + 1$. Il s'ensuit que pour toute couleur c , $(m - i'(y)) + d(c) \geq |R_t|$. Il existe un couplage parfait entre les deux ensembles R_t et L [34]. Maintenant, supposons que $N_Y(R_t)$ contient une seule couleur c_0 . Comme $i(y) = m$, on peut supposer que $c_0 \neq m$. Il s'ensuit que le sommet x_{c_0} de couleur c_0 n'appartient pas à $N_X[N_Y(R_t)]$. Vu que $g(G) \geq 8$, x_{c_0} n'a pas de voisins communs avec $N_X[N_Y(R_t)]$. Un échange entre les deux couleurs m et c_0 permet de diminuer $i(y)$ pour tout $y \in R_t$. Par conséquent, l'ensemble $N_Y(R_t)$ est vide. Le Fait 3 implique que pour tout $y \in N(x_m)$, $i(y) \leq m - 1$. D'où, on peut colorer $N(x_m)$ par des couleurs différentes. En conséquence x_m est un sommet b -dominant de couleur m .

ii) Si $j = 1$, alors on se réduit au cas où $d_{Y_C}(y_1) = 0$, sinon avec la même recoloration que dans (i.1), on diminue $i(y_1)$. La définition de R_t implique que, y_1 admet au moins un voisin x_{t+k} , avec $k \geq 1$. Il s'ensuit que $|N_X(y_1) \cup N_C[N_X(y_1)]| = |X|$. En conséquence $R_t = \{y_1\}$ et de plus y_1 est un sommet inadmissible et il est à distance au plus 2 de tout sommet x_{t+i} , avec $i \geq 1$.

Si $j \geq 2$, alors comme $g(G) \geq 8$, $r(y_j) \leq |X| - |N_C(y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{(j-1)}) \setminus \{x_t\}| + (j-1) - |N_X^2(y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{(j-1)}) \setminus N_X(x_t)|$. Par suite, $r(y_j) \leq |X| - \sum_{k \leq j-1} [d_X(y_k) - 2] - |N_{Y_C}(y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{(j-1)})| - |N_X^2(y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{(j-1)}) \setminus N_X(x_t)|$. On a $r(y_j) \leq m$. Si $r(y_j) = m$, alors pour tout y_i avec $i \leq j-1$, $d_X(y_i) = d_C(y_i) = 2$ et de plus les ensembles $N_X^2(y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{(j-1)}) \setminus N_X(x_t)$, et $N_{Y_C}(y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{(j-1)})$ sont vides. Comme $d_C(y_j) \neq 0$, on obtient $d_X(y_j) = d_C(y_j) = 2$ sinon, on fait un échange entre y_1 et y_j . Similairement on se réduit au cas où $N_X^2(y_j) = N_X(x_t)$. Si y_{j+r} est le dernier sommet de

R_t qui est différent de y_j , alors on permute y_{j+r} et y_j . En conséquence $r(y_j) \geq m + r$, contradiction avec 2) du Fait 3.

Si $|R_t| \geq 2$, alors $G[R_t \cup \{x_t, \dots, x_m\}]$ est un arbre de hauteur 2, de centre x_t . Si $|R_t| = 1$, alors $G[y \cup \{x_t, \dots, x_m\}]$ est un arbre de hauteur au plus 2, de centre y . Ceci termine la preuve du Fait 4.

Notons que, pour tout ordre de R_t , et dans tous les cas, il existe un seul sommet y de R_t tel que $i(y) = m$ et de plus y est à distance 2 de $t-1$ sommets de l'ensemble $N(x_1, x_2, \dots, x_m) \cup \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Notons que tous les sommets de $N(x_1, x_2, \dots, x_m) \cup \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ont des couleurs différentes et ne sont pas présentes dans $N(y) \cap X$ et y n'a aucun voisin x_i , $i \leq t-1$. On peut supposer que y est voisin de x_m .

Remarque 3.8. *Pour tout $y' \in R_t$, si x_{t+i} est un voisin de y' alors x_{t+i} n'a aucun voisin de couleur t sinon si $y' \neq y$, alors on permute y' et y . Par conséquent, pour tout $z \in R_t$, $i(z) \leq m-1$.*

Le reste de la preuve se fait par l'absurde. Supposons que pour tout ordre θ de X , $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ et pour toute précoloration c de Y , il existe un entier t_c tel qu'on peut colorer les (i_{t_c-1}) premiers voisinages $N(x_{i_1}), N(x_{i_2}), \dots, N(x_{i_{(t_c-1)}})$ et on ne peut pas colorer $N(x_{i_{t_c}})$. Pour tout ordre θ , il existe une précoloration optimale. Soit $t(\theta) = \max\{t_c, c \text{ précoloration}\}$.

Supposons que l'ordre $\theta_1 = x_1, x_2, \dots, x_m$ de X est tel que $t = t(\theta_1)$ est le minimum de $t(\theta)$ pris sur tous les ordres θ de X . Le (a1) du Fait 4, implique que $2 \leq t \leq m-1$. On distingue deux cas:

Cas 1: *Si $N(x_t) \cap [N_Y(x_1) \cup \dots \cup N_Y(x_{t-1})] \cup (x_1 \cup \dots \cup x_{t-1}) \neq \emptyset$. Soit $x_\alpha \in N(x_t) \cup N_X(N_Y(x_t))$, $\alpha \leq t-1$.*

Considérons l'ordre $x_t, x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_{t-1}, x_\alpha, x_{t+1}, \dots, x_m$. Posons $x'_1 = x_t$, $x'_i = x_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq \alpha$. $x'_j = x_j$, avec $\alpha+1 \leq j \leq t-1$. $x'_t = x_\alpha$. $x'_j = x_j$, avec $t+1 \leq j \leq m$. Colorons les voisins de chaque sommets x'_i par des couleurs différentes tels que x'_i est un sommet b -dominant. Soit $j \geq t$ le plus petit entier tel que le voisinage de x'_j contient un sommet non coloré disons y . Supposons que la coloration est tel que j est maximum. Vu que $j \geq t \geq 2$, $y \notin N(x'_1) = N(x_t)$. Il existe une chaîne P d'extrémités x'_j et x_m et

de longueur au plus 3 tels que les sommets intérieurs n'appartiennent pas à $N(x_t) \cap Y$. Si $x'_j = x_\alpha$, alors il existe soit la chaîne $P' = x_t y' x_\alpha$ ou bien l'arête $x_t x_\alpha$. Avec la chaîne $x_t y x_m$ et la chaîne P et P' on obtient un cycle de longueur au plus 7, contradiction. Si $x'_j \neq x_\alpha$, alors le ii) du Fait 4 implique qu'il existe la chaîne (x_t, x'_j) ou bien la chaîne (y, x'_j) de longueur au plus 2. Cette chaîne avec les deux chaînes P et $x_t y x_m$ forment un cycle de longueur au plus 7, contradiction.

Cas 2: Si $N(x_t) \cap [N_Y(x_1) \cup \dots \cup N_Y(x_{t-1})] \cup (x_1 \cup \dots \cup x_{t-1}) = \emptyset$. On peut supposer que y est adjacent à x_m . On distingue deux cas:

Cas 1: Si $e(y, X) \geq 3$. Comme y ne 2-domine pas X , il existe un entier $\beta \leq t-1$ et un sommet y_s de couleur s tels que $y_s \in N(x_m) \cap N(x_\beta)$. Considérons l'ordre $x'_1 = x_m$, $x'_j = x_{j-1}$, avec $2 \leq j \leq \beta$, $x'_{\beta+1} = x_{t-1}$, $x'_{\beta+i} = x_{\beta+i-1}$, avec $2 \leq i \leq t-1$, $x'_t = x_\beta$. Notons que cet ordre est obtenu à partir de l'ordre $x_m, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ en échangeant x_β et x_{t-1} . Soit x'_j le premier sommet de X tel que $N(x'_j)$ est non coloré. Si $x'_j \neq x_\beta$, alors il existe une chaîne $P(x'_j, x_{m-1})$ longueur au plus 3. Comme y est un voisin de x'_1 , cette chaîne ne contient pas y . Notons que G contient les deux chaînes $P(y, x'_j)$ et $P(y, x_{m-1})$ de longueurs au plus 2. Par conséquent, les 3 chaînes $P(x'_j, x_{m-1})$, $P(y, x'_j)$ et $P(y, x_{m-1})$ forment un cycle de longueur au plus 7, contradiction.

Si $x'_j = x_\beta$, alors G contient la chaîne $P(x'_j, x_t)$ de longueur au plus 3. La définition de x_β , implique que G contient la chaîne $x_\beta y_s x_m$. Si $x'_j = x_t$, alors G contient la chaîne $x'_j y' x_{m-1}$, ou bien l'arête $x'_j x_{m-1}$, avec y' est non coloré et différent de y voisin de $x'_1 = x_m$. Par suite avec ces trois chaînes, G contient un cycle de longueur au plus 7, contradiction.

Cas 2: Si $e(y, X) = 2$. Vu que $i(y) = m$ et comme Y ne contient aucun sommet qui 2-domine X , x_m a un voisin commun avec tous $x_i \notin N(x_t)$, avec $i \leq t-1$. Si $s \leq t-1$, alors comme G est sans C_6 , le sommet $y_t \in N(x_\beta)$ de couleur t n'est pas un voisin de x_s . Si $s \geq t+1$, alors par la Remarque 3.8 et par un échange de couleur entre t et $c(y_s)$ dans $N(x_\beta)$, on obtient $i(y_j) \leq m-1$. En conséquence on peut colorer y_j . Par suite on peut colorer tous les voisins de x'_j tels que x'_j est un sommet b -dominant, contradiction.

(2) Si $b(G) = m-1$, alors Y contient un sommet qui 2-domine X , sinon colorons x_i par la couleur i avec $1 \leq i \leq m$. Colorons le voisinage de x_i par les couleurs $\{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i\}$ avec $1 \leq i \leq m$. Par conséquent, G admet une b -coloration avec m couleurs, contradiction.

Etablissons maintenant la condition nécessaire. Supposons qu'il existe $y_0 \in Y$ tel que y_0 2-domine X . Vu que $y_0 \in Y$ 2-domine X , pour toute coloration dominante avec m couleurs, aucune couleur n'est disponible pour y_0 . Maintenant, on montre que $b(G) = m - 1$. On peut supposer que $m \geq 4$. Le Lemme 3.6 implique que y_0 est le seul sommet de G qui 2-domine X . Soit x_1 un voisin de y_0 de maximum degré dans X . Comme $g(G) \geq 8$, alors on peut supposer que $d_X(x_1) = m - 2$. Pour tous $i \neq j$, $N(x_i) \cap N(x_j) = \emptyset$. Soient $G' = G - x_1$ et $X' = X - x_1$. Chaque sommet de X' est de degré $m - 2$ ou bien $m - 1$. Colorons x_i par i , $2 \leq i \leq m$. Colorons $N(x_i)$ par les couleurs $\{2, 3, \dots, m\} \setminus \{i\}$, $2 \leq i \leq m$. Comme $d_{G'}(x_1) = m - 2$, il existe une couleur disponible pour x_1 . Par conséquent, on peut colorer y_0 . D'où, $b(G) = m - 1$.

Corollaire 3.9. [67] Pour un entier $m \geq 3$, soit G un graphe biparti de bipartition (X, Y) tel que $|X| = m$ et de maille au moins 8.

Si tous sommet de X est de degré $m - 1$ et tout sommet de Y est de degré au plus $m - 2$, alors G est arête b -critique.

Preuve. La définition de G implique que G est un graphe tel que Y ne contient aucun sommet qui 2-domine X . Le Théorème 3.7 implique que $b(G) = m$. Vu que pour toute arête e de G , on a $m(G - e) = m(G) - 1$, $b(G - e) \leq m(G - e) = m(G) - 1 \leq b(G) - 1$. D'où G est un graphe arête b -critique. \square

Corollaire 3.10. [67] Si G est un graphe de B_m de maille au moins 8, alors $b(G) = m$

3.2 Les graphes étriqués de maille au moins 6

Théorème 3.11. [67] Soient $m \geq 3$ un entier et $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti de maille au moins 6 tel que $|X| = m$. Si tout sommet de X est de degré $m - 1$, tout sommet de Y est de degré au plus $m - 2$, et chaque sommet possède au plus $\sqrt{m} - 1$ voisins communs avec les autres sommets, alors $b(G) = m$.

Preuve. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Pour tous $1 \leq i \leq m$, colorons x_i par i . Maintenant, nous colorons le voisinage du sommets x_i de tel sorte que x_i est un sommet b -dominant

pour tout i , $1 \leq i \leq m$. Supposons que tous les voisins des sommets x_1, x_2, \dots, x_{t-1} , $t-1 < m$ sont colorés tels que x_i est un sommet b -dominant pour tout i , $1 \leq i \leq t-1$. Soit $C_t = X \cup_{i \leq t-1} N(x_i)$ l'ensemble de sommets colorés. Maintenant, nous colorons les sommets de $N(x_t) \setminus C_t$. On ordonne $N(x_t) \setminus C_t$ en commençant par les voisins de l'ensemble $X - \{x_1, \dots, x_t\}$. Soit $R_t = (N\{x_{t+1}, \dots, x_m\}) \cap N(x_t)$. Par hypothèse, $|R_t| \leq \sqrt{m} - 1$. Soit $y \in R_t$. Comme G est un graphe biparti, $N(y) \subset X$. Il s'ensuit que $d_G(y) \leq \sqrt{m} - 1$. Soit $|N_C(y) \cup N_C^2(y)|$ le nombre de couleurs interdites pour y . $|N_C(y) \cup N_C^2(y)| \leq \sqrt{m} - 1 + d_X(y) \leq m - \sqrt{m}$. Par conséquent, au moins $m - (m - \sqrt{m}) = \sqrt{m}$ couleurs sont disponibles pour tout sommet $y \in R_t$. Comme $|R_t| \leq \sqrt{m} - 1$, on peut colorer tous les sommets de R_t par des couleurs différentes. \square

3.2.1 Borne inférieure du nombre b -chromatique

Théorème 3.12. [67] Soient $m \geq 2$ un entier et $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti de maille au moins 6 tel que $|X| = m$. Si $\forall x \in X$ $d_G(x) \geq m - 1$ et $\forall y \in Y$ $d_G(y) \leq m - 2$, alors $b(G) \geq 3 \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$.

Preuve.

Si $b(G) = 2$, alors par la Proposition 2.4, chaque classe de bipartition contient au moins un sommet charismatique. Ceci implique que G est de maille 4, contradiction. Par conséquent, $b(G) \geq 3$. Par suite le Théorème est vrai pour $m \leq 7$. Supposons que $m \geq 8$. \square

Supposons que si $m = 4m_1$, alors G possède une b -précoloration avec $3m_1$ couleurs. Maintenant si $m = 4m_1 + r$, avec $1 \leq r \leq 3$, alors G contient m' sommets de degré au moins $m' - 1$ où $m' = 4m_1$. D'après le cas précédent G possède une b -précoloration avec $3m'_1 = 3 \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ couleurs. Il s'ensuit que pour construire $3 \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ sommets b -dominants, il suffit de considérer le cas où 4 divise m . Posons $k = \frac{3m}{4}$ et choisissons k sommets x_1, x_2, \dots, x_k dans X . Dans la première étape nous construisons une b -coloration partielle de G avec k couleurs. Pour tout $1 \leq i \leq k$ colorons x_i par la couleur i . Maintenant, pour tout i , avec $1 \leq i \leq k$, nous choisissons un sous ensemble S_i de $N(x_i)$ de taille $k - 1$ et colorons S_i de telle sorte que x_i est un sommet b -dominant. Vu que G est de maille au moins 6, pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ il existe au plus un sommet dans l'ensemble $N(x_i) \cap N(x_j)$.

Choisissons S_1 tel que tout sommet de S_1 n'est pas voisin à tous les sommets x_2, \dots, x_k . Ordonnons les sommets de S_1 en commençant par le sous ensemble de sommets R_1 qui sont voisins de x_2, \dots, x_k . Si $|R_1| = 1$, alors par construction de S_1 il existe un sommet x_j non voisin de y_1 . Par suite colorons y_1 par la couleur j . Supposons que $|R_1| \geq 2$. Soient $y_i \in S_1$ et $x_{j(i)}$ le plus grand voisin de y_i dans $\{x_2, \dots, x_k\}$. Colorons y_i par $j(i+1)$ où $(i+1)$ est pris modulo $|R_1|$. Comme G est sans C_4 , alors pour tous $i \neq k$, $x_{j(i)} \neq x_{j(k)}$. Par conséquent, pour tous sommets $y_i, y_k \in S_1$ leurs couleurs sont différentes. Donc on utilise $|R_1|$ couleurs pour colorer les sommets de R_1 . Il reste $k-1-|R_1|$ couleurs pour $S_1 \setminus R_1$. D'où on peut colorer S_1 de manière que x_1 soit un sommet b -dominant. On procède par induction. Supposons qu'il existe un entier t , avec $t \geq 2$ tel que pour tous $i \leq t-1$, exactement $k-1$ voisins de x_i sont colorés de manière que x_i soit un sommet b -dominant. Soit c une telle b -coloration partielle. On va colorer exactement $k-1$ sommets de $N(x_t)$ de manière que x_t soit un sommet b -dominant. Pour un sommet $y \in N(x_t)$ non coloré, soit $d_c(y)$ le nombre de couleurs possible qu'on peut attribuer à y . Considérons les ensembles suivants $I'_0 = \{y \in N_t \cap (N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_{t-1}) \text{ tel que } y \text{ est non coloré}\}$.
 $I_1 = \{y \in N_t \setminus I'_0 \text{ tel que il existe } t_1, t_2, \text{ avec } t+1 \leq t_1 < t_2 \leq k \text{ et } y \in N_{t_1} \cap N_{t_2}\}$.
 $I_2 = \{y \in N_t \setminus (I'_0 \cup I_1) \text{ tel qu'il existe un unique sommet } t_1, t+1 \leq t_1 \leq k, y \in N_{t_1}\}$
 $B_1 = N_t \cap (N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_{t-1}) \setminus (I'_0 \cup I_1 \cup I_2)$. $I_0 = I'_0 \cup B_1$. $I_3 = N_t \setminus (I_0 \cup I_1 \cup I_2)$.
 Considérons l'exemple suivant avec $x_t = \{x_3\}$, $I'_0 = \{y_8\}$, $B_1 = \{y_6\}$, $I_1 = \{y_{14}\}$, $I_2 = \{y_{15}\}$, $I_3 = \{y_{16}, y_{17}, y_{18}\}$.

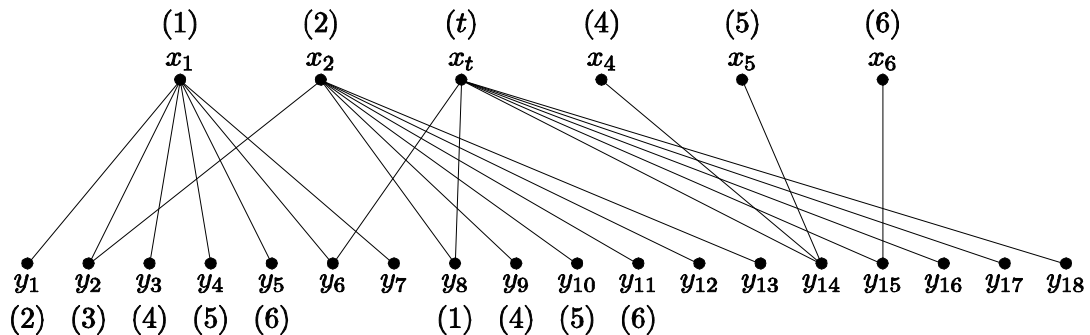


FIGURE 3.1. Une coloration partielle de G avec $m = 8$ et $t = 3$

Fait 5. Soient $y \in B_1$ et F l'ensemble des voisins colorés de x_t non présents dans I'_0 . Alors $d_c(y) \geq k + |B_1| - (|F| + t + 1)$.

Preuve. Soit $y \in B_1$. Vu que y est un voisin de x_t et x_j avec $j \leq t - 1$, alors les couleurs possibles pour y sont différentes des couleurs attribuées à $\{x_t, x_j\} \cup F \cup I'_0$. Il s'ensuit que $d_c(y) \geq k - 2 - |I'_0| - |F|$. Comme $|I'_0| \leq t - 1 - |B_1|$, alors $d_c(y) \geq k + |B_1| - (|F| + t + 1)$. \square

Fait 6. 1) $|I_0| + |I_1| + |I_2| + |I_3| \geq m - 1$.

2) $2|I_1| + |I_2| \leq k - t$.

Preuve. 1) Par définition des ensembles I_0, I_1, I_2, I_3 , on a $d_G(x_t) = |I_0| + |I_1| + |I_2| + |I_3|$ et Comme $d_G(x_t) \geq m - 1$ on obtient $|I_0| + |I_1| + |I_2| + |I_3| \geq m - 1$.

2) Vu que chaque sommet de I_1 a au moins deux voisins dans $\{x_{t+1}, \dots, x_k\}$ et chaque sommet de I_2 a exactement un voisin dans $\{x_{t+1}, \dots, x_k\}$, alors $2|I_1| + |I_2| \leq k - t$. \square

Fait 7. $|I_0| + |I_3| + \lfloor \frac{1}{2} [|I_2| - (t - \frac{m}{4})] \rfloor \geq k - 1$.

Preuve. Au vu du Fait 6 item 2), $|I_1| \leq \frac{1}{2}(k - |I_2| - t)$. En combinant avec le Fait 6 item 1), on obtient $m - 1 \leq |I_0| + |I_2| + |I_3| + \frac{1}{2}(k - |I_2| - t)$. Il s'ensuit que $k - 1 \leq |I_0| + |I_3| + \frac{1}{2} [|I_2| - (t - \frac{m}{4})]$. Comme $k - 1$ est un entier, alors $|I_0| + |I_3| + \lfloor \frac{1}{2} [|I_2| - (t - \frac{m}{4})] \rfloor \geq k - 1$. \square

Soit S_t un ensemble de voisins x_t de cardinal $k - 1$. On va colorer les sommets de S_t de tel sorte que x_t soit un sommet b-dominant. Considérons trois cas:

Cas 1: $2 \leq t \leq \frac{m}{4}$.

Si $|I_1 \cup I_2| < \frac{m}{4}$, alors on peut choisir S_t comme un sous ensemble de $I_0 \cup I_3$. Maintenant on peut supposer que $|I_1 \cup I_2| > \frac{m}{4}$. On supprime $\frac{m}{4}$ sommets de N_t en commençant par les sommets $y \in N_t$ tels que $e(y, X_1) \geq 4$, et on garde les sommets qui restent de I_1 et I_2 , respectivement. Soit $S_t = I_0 \cup I'_1 \cup I'_2 \cup I'_3$ avec $I'_j \subset I_j$, pour $1 \leq j \leq 3$ et $I_0 = B_1 \cup I'_0$. Notons que pour tous $y \in S_t$, $e(y, X_1) \leq 3$. Maintenant, on va colorer les sommets de l'ensemble $I'_1 \cup I'_2 \cup B_1$. Soit $y \in I'_1 \cup I'_2 \cup B_1$. Il est clair que, si $y \in I'_1$, y est adjacent aux sommets x_t, x_i, x_j , avec $t + 1 \leq i, j \leq k$. Vu que x_t a au plus $t - 1 - |B_1|$ voisins qui sont déjà colorés et chacun des sommets x_i, x_j a au plus $(t - 1)$ voisins qui sont déjà

colorés, il s'ensuit que le nombre de couleurs interdites pour y est au plus $3t - |B_1|$. D'où, $d_c(y) \geq k - 3t + |B_1|$. Supposons maintenant que $y \in I'_2$. Notons que y est adjacent aux sommets x_t, x_j avec $t + 1 \leq j \leq k$. Comme x_t a au plus $t - 1 - |B_1|$ voisins qui sont déjà colorés et x_j a au plus $t - 1$ voisins colorés, alors le nombre de couleurs interdites pour y est au plus $2t - |B_1|$. Par conséquent, $d_c(y) \geq k - 2t + 1 + |B_1|$.

Finalement, supposons que $y \in B_1$. Comme y a au plus t voisins colorés et x_t a au plus $t - 1 - |B_1|$ voisins colorés, alors $d_c(y) \geq k - 2t + |B_1|$. Notons que si $|I'_1| \neq 0$, alors par le Fait 6 item (2), $2|I_1| + |I_2| \leq k - t$ et donc, $|I'_1| + |I_2| \leq \frac{m}{4} - t$. Si $|I'_1| = 0$, alors le Fait 6 item (2) implique que $|I_2| \leq k - t - 2|I_1|$. En conséquence, $|I'_1| + |I'_2| \leq \frac{m}{2} - t - |I_1|$. Comme $t \leq \frac{m}{4}$, alors $|I'_1| + |I'_2| \leq k - 2t$. Il s'ensuit que, dans tous les cas $d_c(y) \geq |I'_1| + |I'_2| + |B_1|$. De ce fait, on peut colorer tous les sommets de l'ensemble $I'_1 \cup I'_2 \cup B_1$ par des couleurs différentes. Il reste $k - 1 - |B_1 \cup I'_0 \cup I'_1 \cup I'_2|$ couleurs pour les sommets de l'ensemble I'_3 . En conséquence, on peut colorer les sommets de S_t par des couleurs différentes tels que x_t soit un sommet b -dominant.

Cas 2: $\frac{m}{4} + 1 \leq t \leq \frac{m}{2}$.

Considérons un entier r tel que $\frac{m}{2} + 1 \leq r \leq \frac{3m}{4}$. Il s'ensuit que, $|I_1(r)| + |I_2(r)| \leq k - r < \frac{m}{4}$. Ainsi, on peut supposer que $I_1(r) \cup I_2(r) \cap S_r = \emptyset$. Comme S_r contient exactement $k - 1$ sommets, alors au moins $r - \frac{m}{2}$ sommets de $I_0(r)$ n'appartiennent pas à S_r . En conséquence, on choisit S_r comme un sous ensemble de $I_3(r) \cup I_0(r) \setminus \{y \in N(x_j) \cap N(x_r) \mid m - r \leq j \leq \frac{m}{2}\}$ de cardinal $k - 1$.

Maintenant, on va colorer $k - 1$ sommets de $N(x_t)$ de manière que x_t soit un sommet b -dominant. Alors deux cas s'imposent:

Cas 2.1: $\frac{m}{4} + 1 \leq t \leq \lfloor \frac{5m-1}{12} \rfloor$. D'après le Fait 7, on peut choisir S_t comme un sous ensemble de $I_0 \cup I_2 \cup I_3$. Posons $i = t - \frac{m}{4}$. Si $|I_2| < i$, alors au vu de Fait 7, on choisit S_t comme un sous ensemble de $I_0 \cup I_3$. Il est facile de colorer les sommets de S_t par des couleurs différentes de telle sorte que x_t est un sommet b -dominant. Supposons maintenant que $|I_2| > i$. On va éliminer l'ensemble D de i sommets de I_2 en commençant par l'ensemble $\{y \in N(x_t) \cap N(x_j) \mid t + 1 \leq j \leq t + i\}$. Posons $A = \{y \in (N(x_t) \cap N(x_j)) \setminus (D \cup I_0 \cup I_1), (t+i+1) \leq j \leq k-i\}$, $B_2 = \{y \in [N(x_t) \cap N(x_j)] \setminus (D \cup I_0 \cup I_1) \mid k-i+1 \leq j \leq k\}$.

Comme $t + i < \frac{3m}{4} - i$ et par construction, les ensembles A , B_2 et D sont disjoints. Il est clair que $I_2 = A \cup B_2 \cup D$. Vu que A , B_2 et D sont disjoints, alors $|A| + |B_2| = i_2 - i$. Le Fait 7 implique que $|I_0| + |I_3| + \lfloor \frac{1}{2} (|A| + |B_2|) \rfloor = |I_0| + |I_3| + \lfloor \frac{1}{2} (i_2 - i) \rfloor \geq k - 1$. Par conséquent, on peut choisir S_t comme un sous ensemble de $I_0 \cup A' \cup B' \cup I_3$ avec $|S_t| = k - 1$, où A', B' sont, respectivement, un sous ensemble de A de cardinal au plus $\lfloor \frac{|A|}{2} \rfloor$, un sous ensemble de B_2 de cardinal au plus $\lfloor \frac{|B_2|}{2} \rfloor + 1$.

Maintenant, colorons les sommets de S_t de manière que x_t est un sommet b -dominant. Pour cela on commence par les sommets de l'ensemble A' . Soit $y \in A'$. Notons que y est un voisin de x_t et de x_j avec $j \geq t + i + 1$. La définition de $D(k)$, $\frac{m}{4} + \frac{i}{2} \leq k \leq t$, implique que $N_t \cap S_k = \emptyset$. Par conséquent, x_t a au plus $t - 1 - \frac{i}{2}$ voisins colorés, et x_j a au plus $t - 1$ voisins colorés. Il s'ensuit que $d_c(y) \geq k - 2t + \frac{i}{2}$. On peut vérifier que $|A| \leq \frac{m}{2} - 3i$. Ceci implique que, $\frac{|A|}{2} \leq \frac{m}{4} - \frac{3i}{2}$. Notons que $k - 2t + \frac{i}{2} \geq \frac{m}{4} - \frac{3i}{2}$. En conséquence, $d_c(y) \geq |A'|$. D'où, on peut utiliser $|A'|$ couleurs pour colorer les sommets de A' .

Maintenant, colorons les sommets de B' . Soit $y \in B'$. Notons que y est un voisin de x_t et de x_j avec $k - i + 1 \leq j \leq k$ et $y \notin S_j$. Comme les sommets colorés de S_t sont ceux de l'ensemble $A' \cup I'_0$, alors $d_c(y) \geq k - |I'_0| - \frac{|A|}{2} - 2$. Vu que $|A| \leq \frac{m}{2} - 3i$ et $|I'_0| \leq t - 1 - |B_1|$, alors $d_c(y) \geq |B_1| + \frac{m}{4} + \frac{i}{2} - 1$. D'autre part, $\frac{|B_2|}{2} + 1 \leq \frac{i}{2} + 1$. Comme $m \geq 8$, alors $d_c(y) \geq |B'|$. D'où, on peut colorer les sommets de B' en utilisant $|B'|$ couleurs qui sont différentes et qui ne sont pas présentes dans $A' \cup I'_0$. Finalement, On colore les sommets de B_1 . Soit $y \in B_1$. D'après le Fait 5, $d_c(y) \geq k + |B_1| - (|A'| + |B'|) - t - 1$. Comme $|A'| \leq \frac{m}{2} - 3i$ et $|B'| \leq \frac{i}{2} + 1$, alors $d_c(y) \geq |B_1| + \frac{m}{4} - 2$. Vu que $m \geq 8$, alors $d_c(y) \geq |B_1|$. De ce fait, on peut colorer les sommets de B_1 en utilisant $|B_1|$ couleurs qui ne sont pas présentes dans $I'_0 \cup A' \cup B'$. Enfin, Colorons les sommets de I_3 de telle manière que x_t est un sommet b -dominant.

Cas 2.2: $\lceil \frac{5m}{12} \rceil \leq t \leq \frac{m}{2}$. Soit $B_2 = \{y \in N(x_t) \cap N(x_j) \mid t + i + 1 \leq j \leq k\}$. Par un argument similaire au dernier cas, $I_2 = B_2 \cup D$. Dans ce cas, $t + i > k - i$. Par conséquent, $|B_2| = i_2 - i$. Le Fait 6 implique que $i_0 + i_3 + \lfloor \frac{|B_2|}{2} \rfloor = i_0 + i_3 + \lfloor \frac{1}{2} (i_2 - i) \rfloor \geq k - 1$. De ce fait, choisissons S_t comme un sous ensemble de $I'_0 \cup B_1 \cup I_3 \cup B'$ tel que $|S_t| = k - 1$, avec B' est un sous ensemble de B_2 de cardinalité au plus $\lfloor \frac{|B_2|}{2} \rfloor$. Notons que $\lfloor \frac{|B_2|}{2} \rfloor \leq \frac{m}{4} - i$. D'un autre coté, chaque sommet $y \in B_2$ est adjacent à x_t et à x_j , avec $t + i \leq j \leq k$. Il s'ensuit

que $d_c(y) \geq k - i'_0 - 2$. Vu que $i'_0 \leq t - 1 - |B_1|$, alors $d_c(y) \geq k - t + |B_1| - 1 \geq |B'|$. De ce fait, On peut colorer les sommets de B' en utilisant $|B'|$ couleurs. Maintenant, colorons les sommets de B_1 . Soit $y \in B_1$. D'après le Fait 5, $d_c(y) \geq k + |B_1| - |B'| - t - 1$. Comme $|B'| \leq \frac{m}{4} - i$, alors $d_c(y) \geq |B_1| + \frac{m}{4} - 1$. En conséquence, on peut colorer les sommets de B_1 en utilisant $|B_1|$ couleurs qui ne sont pas utilisées dans $I'_0 \cup B'$. Enfin, colorons les sommets de I_3 tels que x_t est un sommet b -dominant.

Cas 3: $\frac{m}{2} + 1 \leq t \leq k$. Dans la première étape de case 2, on a défini S_t comme un sous ensemble de

$I_3 \cup (I'_0 \cup B_1) \setminus \{y \in N(x_j) \cap N(x_t) \mid m - t \leq j \leq \frac{m}{2}\}$ de cardinal $k - 1$. D'abord, colorons les sommets de B_1 . Soit $y \in B_1$. Il est simple de vérifier que $d_c(y) \geq k - i'_0 - 2$. D'autre part, $|B_1| + i'_0 \leq t - 1 - (t - \frac{m}{2} + 1)$. D'où, $|B_1| \leq \frac{m}{2} - i'_0 - 2$. Par conséquent, $d_c(y) \geq |B_1|$. D'où, on peut colorer les sommets de B_1 par $|B_1|$ couleurs. Colorons les sommets non colorés de S_t de manière que x_t soit un sommet b -dominant.

Dans tous les cas, le graphe G possède une $(3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor)$ b -coloration partielle de G , avec $x_1, x_2, \dots, x_{3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor}$ sont des sommets b -dominants. Maintenant, étendons cette coloration partielle au graphe G de la manière suivante:

Soit $X' = \{x_{3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1}, \dots, x_m\}$. Si X' contient un sommet x tel que toutes les couleurs sont présentes dans $N(x)$. Colorons x par $3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1$. Colorons chaque sommet de $X' \setminus x$ par une couleur manquante dans son voisinage.

Maintenant, colorons les sommets non colorés de Y . Alors deux cas se présentent:

Cas 1: L'ensemble X contient au moins un sommet x coloré par $3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1$. Par définition de G , chaque sommet de $N_i \setminus S_i$, $1 \leq i \leq 3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ n'est pas adjacent à x . Par conséquent, colorons tous les sommets de $N_i \setminus S_i$, avec $1 \leq i \leq 3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ par $3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1$.

Cas 2: L'ensemble X ne contient aucun sommet coloré par $3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1$. Soit $y \in N_i \setminus S_i$, avec $1 \leq i \leq 3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$. Si toutes les couleurs sont présentes dans $N(y)$, alors colorons y par $3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1$, sinon colorons y par une couleur manquante dans son voisinage.

Maintenant, colorons les sommets de l'ensemble $N(X') \setminus \cup_{1 \leq i \leq 3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} N_i$.

Soit $y \in N(X') \setminus \cup_{1 \leq i \leq 3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor} N_i$. Vu que le degré de y est au plus $\frac{m}{4}$, alors colorons y par une couleur manquante dans son voisinage. On obtient une b -coloration de G avec au moins $3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ couleurs. D'où $b(G) \geq 3\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ ■

CHAPITRE 4

L'IMPACT DE CERTAINES OPÉRATIONS DONNÉES SUR LE NOMBRE b -CHROMATIQUE

Dans ce chapitre, nous étudions l'impact de quelques opérations données sur le nombre b -chromatique. Ce travail est motivé par les résultats encourageants de N. Ikhlef Eschouf [52]. Dans le premier paragraphe, nous étudions l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre b -chromatique. Dans ce cadre nous caractérisons quelques graphes arête b -critiques. Dans le deuxième paragraphe, nous étudions l'effet de l'ajout d'une arête sur le nombre b -chromatique. Dans ce contexte nous caractérisons les arbres arête critiques et nous introduisons le nombre de b -bondage. Dans le dernier paragraphe nous étudions l'effet de la subdivision d'une arête sur le nombre b -chromatique. Dans cette optique nous introduisons le nombre de subdivisions b -chromatique.

4.1 La suppression d'une arête

Dans cette section, nous étudions l'effet de la suppression d'une arête quelconque sur le nombre b -chromatique de certains graphes particuliers. Un graphe G est dit arête b -critique si pour toute arête e de G , $b(G - e) < b(G)$. Dans [12], M. Blidia et al. ont montré que décider si un graphe est arête b -critique est un problème NP -complet. Donc il est intéressant de caractériser des classes de graphes arête b -critiques. Dans ce sens, nous caractérisons les graphes P_4 -laden étendu arête critiques et les blocs graphes arête critiques. Dans [52] Ikhlef Eschouf a caractérisé les graphes P_4 -sparse arête b -critiques et les graphes quasi-adjoints arête b -critiques. Par ailleurs dans [12], Blidia et al. ont caractérisé les arbres, les graphes sans P_5 et les graphes réguliers arêtes b -critiques.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été réalisés en collaboration avec Ikhlef Eschouf et ont fait objet d'une communication internationale au colloque Roadef 2015.

Dans [36] Faik a montré que la suppression d'une arête quelconque de G peut faire diminuer le nombre b -chromatique de G par au plus un.

Proposition 4.1. [36] *Soit G un graphe et e une arête de G . Alors $b(G - e) \geq b(G) - 1$.*

Au vu de la définition ci-dessus et de la Proposition 4.1, on propose la définition suivante.

Définition 4.2. *Un graphe G est dit arête b -critique si pour toute arête e de G , $b(G - e) = b(G) - 1$.*

Il convient de remarquer qu'il est inutile de considérer les graphes possédant des sommets isolés car cela ne change rien à la définition 4.2. Pour cette raison, nous nous restreignons à l'étude des graphes sans sommets isolés.

Les deux résultats suivants sont dûs à Ikhlef Eschouf [52].

Théorème 4.3. [52] *Soit $G = (V, E)$ un graphe arête b -critique et soit c une b -coloration de G avec $b(G)$ couleurs. Alors,*

i) c ne possède pas deux b -sommets de même couleur.

ii) Le b -système S de c est unique.

iii) $V \setminus S$ est un stable.

vi) $\forall x \in V \setminus S, d_G(x) \leq |S| - 2$.

Théorème 4.4. [52] *Si G est un graphe arête b -critique, alors $b(G) = \Delta(G) + 1$.*

L'Observation suivante est immédiate.

Observation 4.5. *Soient $G = (V, E)$ un graphe arête b -critique et c une b -coloration optimale de G . Si $x \in V$ est un b -sommets de c , alors $d_G(x) = \Delta(G)$.*

Corollaire 4.6. [12] *Un graphe sans $2K_2$ est arête b -critique si et seulement s'il est complet.*

Par le Théorème 4.3, on déduit l'Observation suivante.

Observation 4.7. [86] Soit G un graphe arête b -critique avec p composantes connexes, $p \geq 2$. Soient c une b -coloration de G avec $b(G)$ couleurs et H une composante connexe de G . Alors

1. H contient au moins un sommet b -dominant. Ainsi, si H contient un seul sommet b -dominant, alors H est une étoile d'ordre $\Delta(G) + 1$.
2. $b(G) = p$ si et seulement si $G = pK_{1,p-1}$.

Preuve. 1. Vu que G est sans sommets isolés, H contient au moins une arête. Ceci implique que H contient au moins un sommet b -dominant sinon, la suppression d'une arête quelconque de H ne fait pas diminuer le nombre b -chromatique de G . Supposons que H contient un seul sommet b -dominant et soit x ce sommet. Comme G est sans sommets isolés, le Théorème 4.3 (ii) et (iv) implique que x connecte chaque sommet de H , de plus $V(H) \setminus \{x\}$ est un stable et $d_G(x) = \Delta(G)$. D'où H est une étoile d'ordre $\Delta(G) + 1$.

2. Il est clair que $b(pK_{1,p-1}) = p$. réciproquement, supposons que $b(G) = p$. Il s'ensuit que d'après l'Observation 4.7 (1) et le Théorème 4.3 (i) et (iv), chaque composante connexe de G contient exactement un seul sommet b -dominant. D'après l'Observation 4.7 (1), $G = pK_{1,p-1}$. □

La Proposition suivante est due à Hoàng et Kouider [47].

Proposition 4.8. [47] Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Alors, $b(G_1 \cup G_2) \geq \max\{b(G_1), b(G_2)\}$.

Lemme 4.9. [86] Soit H une composante connexe d'un graphe G . Si G est arête b -critique, alors $b(G) \geq b(H) + 1$.

Preuve. La Proposition 4.8 implique que $b(G) \geq b(H)$. Supposons que $b(G) = b(H)$. Il s'ensuit que $b(G - e) \geq b(G)$ pour toute arête e dans $G \setminus H$, contradiction. Par conséquent, $b(G) \geq b(H) + 1$. □

4.1.1 Les graphes P_4 -laden étendus arête b -critiques:

Dans cette section, nous caractérisons les graphes P_4 -laden étendus arête b -critiques. Ces graphes sont une généralisation naturelle des graphes sans P_4 . Dans [40], Giakoumakis a

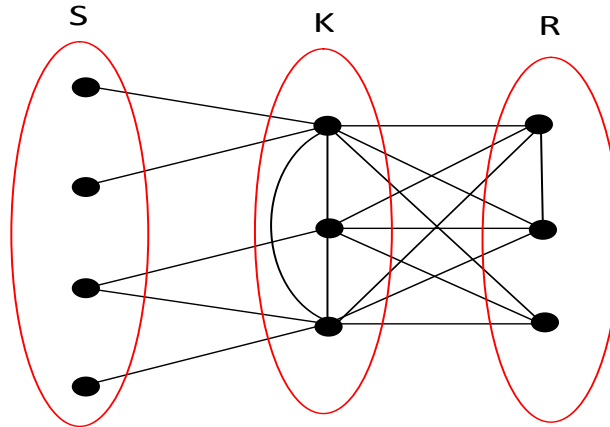


FIGURE 4.1. Un graphe pseudo-scindé

introduit la notion de P_4 -laden étendu comme étant un graphe dont tout sous-graphe H à au plus six sommets vérifie la propriété suivante: Si H contient plus de deux P_4 , alors G est un graphe pseudo scindé.

Commençons cette section par quelques définitions.

Définition 4.10. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit scindé si l'ensemble V est partitionné en une clique K et un stable S .*

Définition 4.11. *Un graphe scindé G est dit original si chaque sommet de S possède un non-voisin dans K , et chaque sommet de K a un voisin dans S .*

Définition 4.12. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit pseudo-scindé si l'ensemble de sommets peut être partitionné en trois ensembles S , K et R , avec R éventuellement vide, tels que:*

- 1) S est un stable et K est une clique;
- 2) $G[S \cup K]$ est un graphe scindé original (avec $S \cup K \neq \emptyset$);
- 3) Tous les sommets de R sont adjacents à tous les sommets de K et à aucun sommet de S .

Définition 4.13. *Un graphe G est dit P_4 -laden étendu si tout sous-graphe H de G à au plus six sommets vérifie la propriété suivante: Si H contient plus de deux P_4 induits, alors G est un graphe pseudo scindé.*

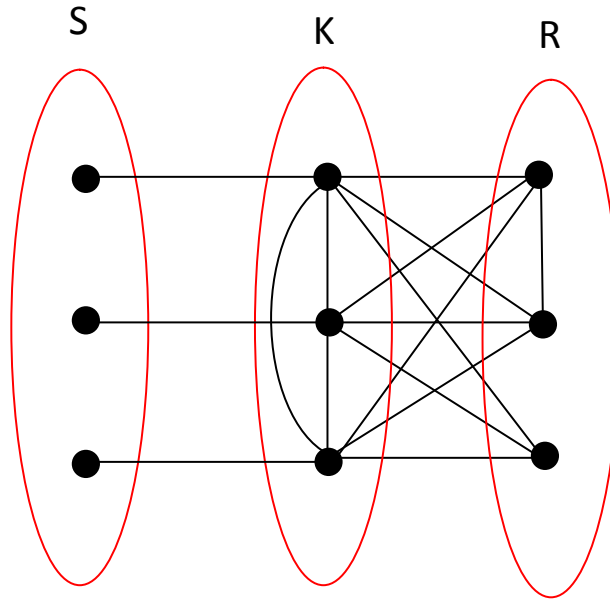


FIGURE 4.2. Une araignée fine

Définition 4.14. Une araignée (S, K, R) est un graphe obtenu à partir d'un graphe pseudo-scindé tel que:

- (a) $|K| = |S| \geq 2$.
- (b) Il existe une bijection $f : S \rightarrow K$ telle que:
 - (b.1) Soit $\forall v \in S, N(v) \cap K = \{f(v)\}$ (araignée fine);
 - ou bien
 - (b.2) Soit $\forall v \in S, N(v) \cap K = K \setminus \{f(v)\}$ (araignée épaisse).

Notons que le graphe complémentaire d'une araignée fine est une araignée épaisse et vice versa. Une araignée avec $|S| = |K| = 2$ est à la fois fine et épaisse. Le triplet (S, C, R) (ou (S, K) si R est vide) est appelé la partition d'araignée, et peut être trouvé en temps linéaire [58]

Définition 4.15. Une quasi-araignée est un graphe obtenu à partir d'une araignée (S, K, R) en remplaçant au plus un sommet de $S \cup K$ par K_2 or \overline{K}_2 . Il est clair qu'une araignée est une quasi-araignée.

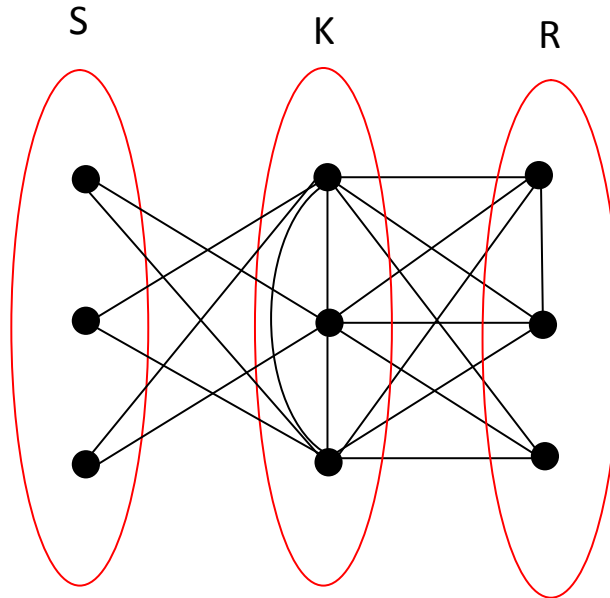


FIGURE 4.3. Une araignée épaisse

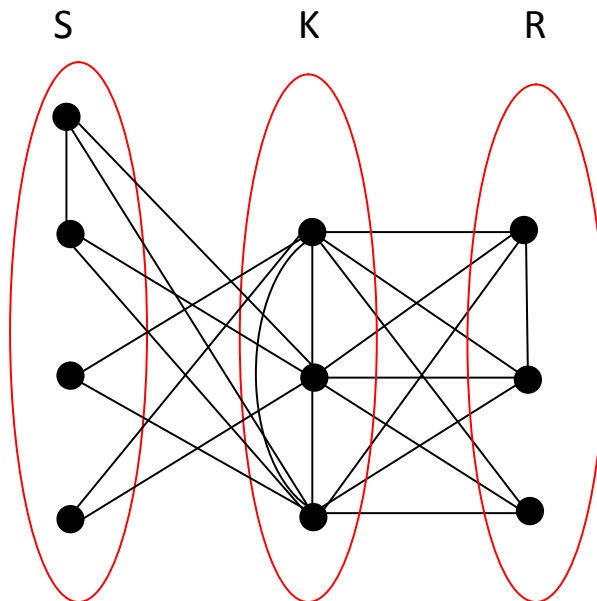


FIGURE 4.4. Une quasi araignée

Définition 4.16. *On dit qu'un graphe G est de type 0 si G est une araignée; de type 1 si G est une araignée (S, K, R) , avec exactement un sommet de S est remplacé par K_2 ; de type 2 si G est une araignée (S, K, R) , avec exactement un sommet de S est remplacé par \overline{K}_2 ; de type 3 si G est une araignée (S, K, R) , avec exactement un sommet de K est remplacé par \overline{K}_2 ; de type 4 si G est une araignée (S, K, R) , avec exactement un sommet de K est remplacé par K_2 .*

Observation 4.17. [86] *Les graphes de type 0 et 4 sont des graphes pseudo-scindé.*

Dans [40] Giakoumakis a caractérisé les les graphes P_4 -laden étendus.

Théorème 4.18. [40] *Un graphe G est P_4 -laden étendu si et seulement si l'une des conditions suivante est satisfaite:*

- (i) *G est est l'union disjoint de deux graphes P_4 -laden étendus.*
- (ii) *G est le joint de deux graphes P_4 -laden étendus.*
- (iii) *G est une quasi-araigné (S, K, R) tel que $G[R]$ est un graphe P_4 -laden étendu.*
- (iv) *G est pseudo-scindé (S, K, R) tel que $G[R]$ est un graphe P_4 -laden étendu.*
- (v) *G est isomorphe à C_5 , P_5 or \overline{P}_5 .*
- (vi) *G à un seul sommet ou bien $V(G) = \emptyset$.*

Du Théorème 4.18, on peut déduire la remarque suivante:

Observation 4.19. [86] *Soit G un graphe P_4 -laden étendu non connexe. Alors, toute composante connexe de G est soit C_5 , P_5 , \overline{P}_5 , quasi araignée, pseudo scindé, ou bien le joint de deux graphes.*

Lemme 4.20. [86] *Si G est un graphe quasi-araignée ou bien pseudo-scindé, alors G n'est pas arête b -critique.*

Preuve. Il immédiat de voir que si G est un quasi-araignée ou bien pseudo-scindé, alors G est sans $2K_2$. Vu que G est différent d'une clique et au vu du Corollaire 4.6 on conclut que G n'est pas arête b -critique. □

Les deux résultats suivants sont dûs à N. Ikhlef Eschouf [52].

Proposition 4.21. [52] *Soient G un graphe P_4 sparse non connexe et H une composante connexe de G . Alors les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- (a) H n'est pas une clique;
- (b) $\Delta(H) = \Delta(G)$;
- (c) H est un graphe scindé d'ensemble de sommets $K \cup S$, où K est une clique et S est un stable avec $|S| \geq 2$. En outre, tous les sommets de K possèdent le même nombre de voisins dans S ;
- (d) H n'est pas une araignée épaisse (S, K, R) . En outre, si H est une araignée fine (K, S) , alors $G = H + K_{1,p}$, avec $p = |K|$.

Proposition 4.22. [52] $G = G_1 \vee G_2$ est arête b -critique si et seulement si G est un graphe complet.

En utilisant les mêmes techniques utilisées par N. Ikhlef Eschouf dans [52], on peut vérifier que les propriétés de la Proposition 4.21 restent vraie pour les graphes P_4 -laden étendus.

Lemme 4.23. [86] *Soient G un graphe P_4 -laden étendu arête b -critique non connexe et H une composante connexe de G . Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (i) H est différent de C_5 , P_5 , $\overline{P_5}$, et de quasi-araignée de types 1, 2, 3.
- (ii) H est une quasi-araignée de types 0, 4, ou bien une pseudo-araignée, de partition (S, K, R) , telle que $S \cup R$ est un stable qui ne contient aucun sommet b -dominant, et tous les sommets de K sont des sommets b -dominants. En outre, pour toute b -coloration optimale de G , toute couleur dans S n'apparaît pas dans R .
- (iii) Tous les sommets b -dominants de H forment une clique.

Preuve. Soit c une b -coloration optimale de G .

i) Si $H = C_5$ ou P_5 , alors d'après le Lemme 4.9, $b(G) \geq 4$. Comme chaque sommet de H est de degré au plus 2, alors H ne contient aucun sommet b -dominant. Il s'ensuit que d'après l'Observation 4.3, G n'est pas arête b -critique, contradiction. Si $H = \overline{P}_5$, alors d'après le Lemme 4.9, $b(G) \geq 4$. Comme $\Delta(H) = 3$, alors $b(G) = 4$. d'un autre côté, H contient deux sommets adjacents u, v de degrés 2. Il s'ensuit que u et v sont des sommets non b -dominants. Ceci contredit le Théorème 4.3 (*ii*). Si H est un quasi-araignée (S, K, R) de type 1, type 2 ou type 3, alors la définition de H , implique que H contient deux sommets adjacents de degrés inférieurs à $\Delta(G)$, contradiction.

ii) Supposons que H est un quasi-araignée de type 0, alors dans [52], on a le résultat désiré. Maintenant si H est un quasi-araignée de type 4, alors chaque sommet de $S \cup R$ est de degré au plus $|R| + |K|$ et chaque sommet de K est de degré au moins $|R| + |K| + 1$. Il s'ensuit que $\Delta(G) \geq |R| + |K| + 1$. Le Théorème 4.3 (*ii*) implique que, $S \cup R$ est un stable. D'autre part, la définition de H implique que tous les sommets de K ont le même degré. Par conséquent, tous les sommets de K sont des sommets b -dominants.

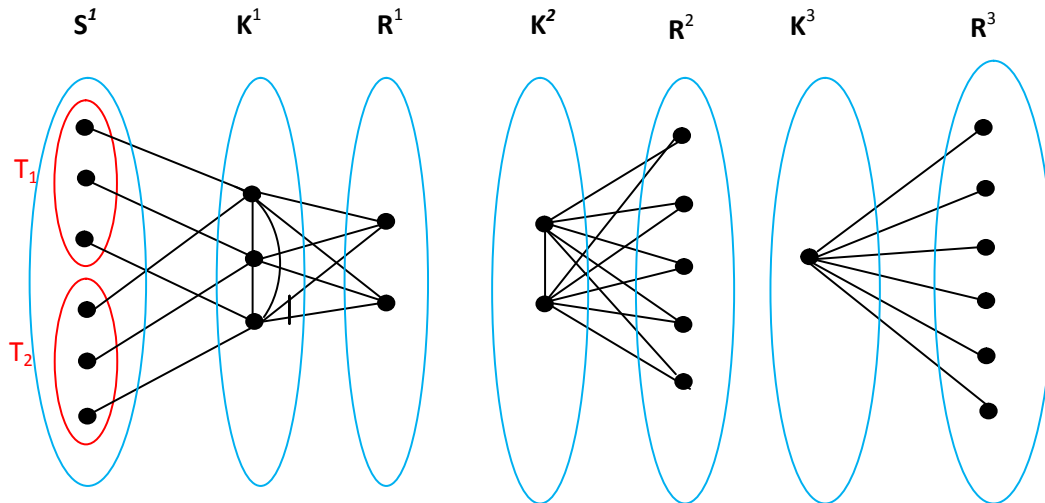
Maintenant supposons que H est un pseudo-scindé (S, K, R) , alors chaque sommet de $S \cup R$ est de degré au plus $|R| + |K| - 1$ et chaque sommet de K est de degré au moins $|R| + |K|$. Il s'ensuit que $\Delta(G) \geq |R| + |K|$. Le Théorème 4.3 implique que, $S \cup R$ est un stable et ne contient aucun sommet b -dominant. Supposons que K ne contient aucun sommet b -dominant. Par définition, chaque sommet de K possède un voisin dans S , contradiction avec le Théorème 4.3 (*ii*). Par conséquent, tous les sommets de K sont des sommets b -dominants.

Maintenant, montrons la deuxième partie. Supposons qu'il existe une couleur i qui est présente à la fois dans S et dans R . Il s'ensuit que, pour tout sommet $u \in K$, et tout sommet $v \in S$ de couleur i , $b(G - uv) \geq b(G)$, contradiction.

(*iii*) C'est une conséquence du Lemme 4.23 (*ii*).

Définissons maintenant la famille de graphes suivante qui nous sera utile pour la suite. \square

Définition 4.24. [86] Un graphe G est dans \mathcal{F}_1 s'ils existent deux entiers k et p avec

FIGURE 4.5. Un graphe de la famille \mathcal{F}_1

$2 \leq p \leq k$ tels que G contient p composantes connexes et chaque composante connexe G_i ($1 \leq i \leq p$) de G satisfait les conditions suivantes:

- $V(G_i) = S^i \cup K^i \cup R^i$.
- $q_i = k - (|K^i| + |R^i|)$ et $|K^1| + \dots + |K^p| = k$ et,
- K^i est une clique et $S^i = (\bigcup_{j=1}^{q_i} T_j) \cup R^i$ est un stable et,
- soit $S^i = \emptyset$ et tout sommet de R^i est adjacent à tous les sommets de K^i avec $|K^i| \geq 1$ et $|R^i| \geq 1$, ou bien
- $S^i \neq \emptyset$, $2 \leq |T_j| \leq |K^i|$, $|K^i| \geq 2$, $|R^i| \geq 0$ et tout sommet de R^i est adjacent à tous les sommets de K^i . Pour tous $1 \leq j \leq q_i$, chaque sommet de K^i possède exactement un voisin dans T_j , et tout sommet de T_j a au moins un non-voisin dans K^i .

Lemme 4.25. [86] Soit G un graphe de \mathcal{F}_1 . Alors G est arête b -critique.

Preuve. Soient G un graphe de \mathcal{F}_1 et $K = \sum_{i=1}^p |K^i|$. La définition de G implique que $\Delta(G) = k - 1$, et tout sommet de K est de degré $k - 1$, et chaque sommet de $V(G) \setminus K$

est de degré au plus $k - 2$. De plus, une b -coloration de G avec k couleurs est obtenue en colorant tous les sommets de l'ensemble $\cup_{i=1}^p K_i$ par des couleurs différentes. Pour tout $1 \leq i \leq p$, colorons tous les sommets de R^i par des couleurs différentes qui n'apparaissent pas dans K^i . Finalement, colorons les sommets de S^i . Comme chaque sommet de K^i possède $k - (|K^i| + |R^i|)$ voisins dans S^i , colorons ces voisins par des couleurs différentes qui ne sont pas présentes dans $(K^i \cup R^i)$. Il s'ensuit que $b(G) = m(G) = \Delta(G) + 1$. Pour toute arête e de G on a $m(G - e) = m(G) - 1$. Comme $b(G - e) \leq m(G - e)$. Par conséquent $b(G - e) \leq b(G) - 1$. D'où, G est un graphe arête b -critique. \square

Dans ce qui suit, nous donnons une caractérisation des graphes P_4 -laden étendus arête b -critiques.

Théorème 4.26. [86] *Soit $G = (V, E)$ un graphe P_4 -laden étendu. Alors G est arête b -critique si et seulement si $G \in \{K_n, P_5\}$, ou bien $G \in \mathcal{F}_1$.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe P_4 -étendu. Il est clair que les graphes complets et P_5 sont arête b -critiques. Par ailleurs, le Lemme 4.25 implique que tout graphe de \mathcal{F}_1 est arête b -critique. Il suffit donc de montrer la condition nécessaire. Soit c une b -coloration de G avec $\Delta(G) + 1$ couleurs. Par le Théorème 4.18 et le Lemme 4.20, on distingue trois cas:

Case 1 : G est isomorphe à C_5, P_5 ou \overline{P}_5 . Il est clair que P_5 est arête b -critique. Mais C_5 et \overline{P}_5 ne sont pas arête b -critiques.

Case 2 : G est le joint de deux graphes. Au vu de la Proposition 4.8, on en conclut que G est un graphe complet.

Case 3 : G est l'union d'au moins deux composantes connexes. Soit G_i une composante connexe de G , avec $1 \leq i \leq p$. D'après le Théorème 4.3 (i) et l'Observation 4.7 (i), $p \in \{2, \dots, k\}$. Au vu de le Lemme 4.23 et l'Observation 4.17, G_i est un pseudo-scindé ou bien le joint de deux P_4 -laden étendus.

Fait 8. G_i n'est pas une quasi araignée épaisse.

\square

Preuve.

Supposons que G_i est une quasi araignée épaisse. Alors d'après le Lemme 4.23 item (ii) et la Proposition 4.21 (d), G_i est une quasi araignée épaisse de type 4 avec $V(G_i) = (S^i, K^i, R^i)$. Il est clair qu' aucune couleur dans K^i ne peut apparaître dans R^i . D'après le Lemme 4.23, aucune couleur dans R^i n'apparaît dans S^i et tous les sommets de K^i sont des sommets b -dominants. Ceci implique que K^i contient un sommet qui a deux voisins dans S^i de même couleur, contradiction.

Fait 9. *Si G_i est un pseudo-scindé (S^i, K^i, R^i) , alors S^i est partitionné en $k - (|K^i| + |R^i|)$ sous ensemble (appelés parties) tel que chaque partie contient au moins deux sommets et tout sommet de K^i a exactement un voisin dans chaque partie.*

□

Preuve. Soit G_i un graphe pseudo-scindé (S^i, K^i, R^i) . D'après le Lemme 4.23, $S^i \cup R^i$ est un ensemble stable. Ainsi, chaque couleur qui est présente dans S^i , ne peut apparaître dans R^i . Ceci implique que $k - (|K^i| + |R^i|)$ couleurs sont présentes dans S^i . Vu que les sommets de K^i sont des sommets b -dominants, alors chaque sommet de K^i possède exactement $k - (|K^i| + |R^i|)$ voisins dans S^i . Il s'ensuit que S^i est partitionné en $k - (|K^i| + |R^i|)$ sous ensemble (parties), et chaque partie contient l sommets de même couleurs avec $2 \leq l \leq |K^i|$. Ainsi, chaque sommet dans K a exactement un voisin dans chaque partie, sinon par le Lemme 4.23, tous les sommets b -dominants sont dans K . Il s'ensuit que la suppression de n'importe quelle arête joignant un sommet de K à un sommet de S de couleur répétée dans S ne fait pas diminuer le nombre b -chromatique, contradiction.

En utilisant l'Observation 4.19 et les Fait 8 et 9, on peut déduire que:

1) G_i est soit le joint de deux graphes $G[K^i]$ et $[S^i]$ où K^i et S^i sont, respectivement, clique et stable vérifiant $\Delta(G_i) = |K^i| + |R^i| - 1$

2) ou bien G_i est un pseudo-scindé (S^i, K^i, R^i) avec $\Delta(G_i) = k - 1$. Le Fait 9 implique que S^i est partitionné en $k - (|K^i| + |R^i|)$ sous ensemble. Pour $1 \leq j \leq q_i$, soit T_j les parties de S^i , où $2 \leq |T_j| \leq |K^i|$. Le Lemme 4.23 et le Théorème 4.3 impliquent que $\bigcup_{i=1}^p K^i$

est l'ensemble de tous les sommets b -dominants de c dans G . D'où, $b(G) = \sum_{i=1}^p |K^i|$. Le Théorème 4.3 (iv) et le Fait 9 impliquent que $\sum_{i=1}^p |K^i| = \Delta(G) + 1 = \Delta(G_i) + 1 = k$. Par conséquent $G \in \mathcal{F}_1$.

□

4.1.2 Les blocs graphes arête b -critiques:

Tout d'abord, donnons un rappel de quelques définitions et résultats qui nous seront, utiles pour la suite.

Définition 4.27. Soit G un graphe connexe, un sommet v est dit sommet d'articulation de G si $G - v$ est non connexe.

Définition 4.28. Un bloc de G est un sous graphe induit qui est maximal connexe et sans sommet d'articulation.

Définition 4.29. Un bloc B est dit bloc terminal si B contient au plus un sommet d'articulation dans G .

Définition 4.30. Un graphe G est un bloc graphe si chaque bloc dans G est une clique.

Définition 4.31. [70] Soit G un graphe étriqué. On dit que G est pivoté s'il existe un ensemble N de sommets non denses, avec $|N| = k$, et un ensemble D de sommets denses, avec $|D| = m(G) - k + 1$, tels que:

1. Pour tous sommets $u, v \in N$, soit u est adjacent à v , ou bien il existe un sommet dense w qui est adjacent aux deux sommets u et v .
2. Pour tous sommets $u \in N, v \in D$, soit u est adjacent à v ou bien u et v sont adjacents à un sommet dense w (n'est pas nécessairement dans D).

Définition 4.32. [70] Soit G un graphe étriqué. Le b -fermeture de G , noté par G^* , est le graphe défini comme suit: L'ensemble des sommets $V(G^*) = V(G)$ et l'ensemble des arêtes $E(G^*) = E(G) \cup \{uv \mid u \text{ et } v \text{ sont deux sommets denses non adjacents}\} \cup \{uv \mid u \text{ et } v \text{ ont un sommet dense commun}\}$.

Définition 4.33. [70] Soit G un graphe étriqué. La b -fermeture partiel de G , noté G_p^* , est le graphe défini comme suit: L'ensemble des sommets $V(G_p^*) = V(G)$ et l'ensemble des arêtes $E(G_p^*) = E(G) \cup \{uv \mid u \text{ et } v \text{ ont un sommet dense commun}\}$.

Lemme 4.34. [70] La b -fermeture partiel d'un bloc graphe est un graphe triangulé.

Théorème 4.35. [70] Soit G un graphe étriqué. Alors G est pivoté si et seulement si $\omega(G^*) > m(G)$.

Corollaire 4.36. [70] Soit G un graphe étriqué. Si G est pivoté, alors $b(G) < m(G)$.

Lemme 4.37. [70] Soit G un graphe étriqué. Alors $b(G) = m(G)$ si et seulement si $\chi(G^*) = m(G)$.

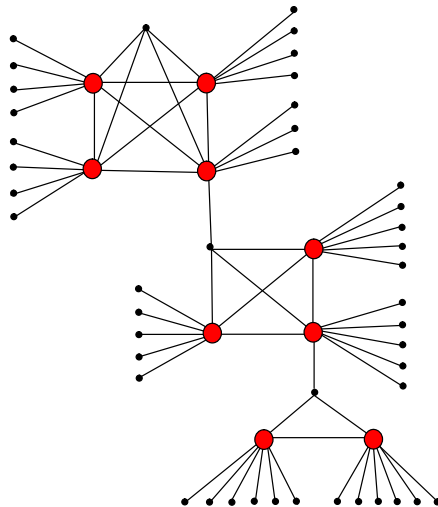
Définissons maintenant la famille suivante:

Définition 4.38. [86] Soit \mathcal{F}_3 la famille de blocs graphes différents de graphe complet:

Un bloc graphe $G \in \mathcal{F}_3$ si les conditions suivantes sont satisfaites:

- G a exactement $\Delta(G) + 1$ sommets de degrés $\Delta(G)$.
- Pour tout bloc H de G :
 - Si H est un bloc terminale, alors $H = K_2$, en outre exactement un sommet de H est de degré $\Delta(G)$.
 - Si H n'est pas un bloc terminal, alors au plus un sommet de H est de degré strictement inférieur à $\Delta(G)$, en outre si H contient un sommet u de degré strictement inférieur à $\Delta(G)$, alors chaque voisin de u dans G est de degré $\Delta(G)$.

Remarque 4.39. Tous les graphes de la famille \mathcal{F}_3 sont des graphes étriqués avec $m(G) = \Delta(G) + 1$.

FIGURE 4.6. Exemple d'un graphe de la famille \mathcal{F}_3

Soit \mathcal{F}_2 la famille des blocs-graphes étriqués qui sont pivotés.

Lemme 4.40. [86] Soit $G \in \mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_2$. Alors $b(G) = m(G) = \Delta(G) + 1$.

Preuve. Soit $G \in \mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_2$. Alors G est un bloc-graphes étriqués qui est non pivoté. Le Theorem 4.35 implique que $\omega(G^*) \leq m$. Vu que les $m(G)$ sommets denses forment une clique dans G^* , alors $\omega(G^*) = m(G)$. D'après le Lemme 4.34 G_p^* est un graphe triangulé. Ceci implique que G^* est un graphe triangulé. Comme les graphes triangulés sont des graphes parfaits, $\chi(G^*) = \omega(G^*) = m(G)$. Le Lemme 4.37 implique que $b(G) = m(G)$. \square

Proposition 4.41. [86] Si $G \in \mathcal{F}_2$, alors G n'est arête b -critique.

Preuve. Soit $G \in \mathcal{F}_2$. D'après le Corollaire 4.36, $b(G) < m(G)$. Vu que $m(G) \leq \Delta(G) + 1$, alors $b(G) < \Delta(G) + 1$. Le Théorème 4.3 implique que G n'est arête b -critique. \square

Maintenant, nous donnons une caractérisation des bloc graphes arête b -critiques.

Théorème 4.42. [86] Soit G un bloc graphe. Alors G est arête b -critique si et seulement si $G = K_n$ ou $G \in \mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_2$.

Preuve. Il est clair que les graphes complets sont arête b -critiques. Soit $G \in \mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_2$. La définition de G implique que G est un bloc graphe étriqué non pivoté avec $m(G) = \Delta(G) + 1$. D'après le Lemme 4.40 $b(G) = \Delta(G) + 1$. Vu que pour toute arête e de G au moins l'une des deux extrémités de e est de degré $\Delta(G)$, alors $G - e$ contient $\Delta(G)$ sommets de degrés au moins $\Delta(G) - 1$. Ainsi, dans $G - e$ ils n'existent pas $\Delta(G) + 1$ sommets de degrés au moins $\Delta(G)$. Par conséquent, $m(G - e) = \Delta(G)$. Ceci implique que $b(G - e) \leq b(G) - 1$. D'où, G est arête b -critique.

Etablissons la condition nécessaire. Soit G un bloc graphe arête b -critique. D'après la Proposition 4.41, G n'est pas un bloc graphe pivoté et par conséquent, $G \notin \mathcal{F}_2$. Considérons une b -coloration c de G avec $b(G)$ couleurs et soit S l'ensemble de tous les sommets b -dominants de c . Le Théorème 4.3 implique que $|S| = \Delta(G) + 1$, en outre $d_G(v) = \Delta(G)$ pour tout $v \in S$ et $d_G(v) \leq \Delta(G) - 1$ pour tout $v \in V \setminus S$. Soit H un bloc de G . D'après le Théorème 4.3, au plus un sommet de H est un sommet non b -dominant.

Supposons en premier lieu que $b(G) = \omega(G)$. Alors G est un graphe complet, sinon, il existe un bloc H de G de cardinalité $\omega(G)$ qui contient un sommet v avec $d_G(v) \geq \omega(G)$. Ceci implique qu'il existe un sommet $u \notin H$ tel que $uv \in E(G)$. En conséquence, c reste une b -coloration de $G - uv$ avec $b(G)$ couleurs, contradiction.

Maintenant, supposons que $b(G) > \omega(G)$. Supposons que G contient un bloc terminal H d'ordre au moins 3. Alors H contient au moins 2 sommets u, v de degrés strictement inférieur à $\omega(G)$. Ceci implique que u et v sont des sommets non b -dominants. Il s'ensuit que $b(G - uv) \geq b(G)$, contradiction. D'où, $H = K_2$. Si G contient un bloc terminal $H = \{u, v\}$ tel que chaque sommet de H est de degré strictement inférieur à $\Delta(G)$, alors $b(G - uv) \geq b(G)$, contradiction. Par suite, exactement un sommet de H est de degré $\Delta(G)$.

Supposons que H n'est pas un bloc terminal. Si H contient au moins deux sommets x, y de degrés strictement inférieur à $\Delta(G)$, alors $b(G - xy) \geq b(G)$, contradiction. D'où, H contient au plus un sommet, disons x de degré strictement inférieur à $\Delta(G)$. Soit z un voisin de x dans G , alors z est de degré $\Delta(G)$ sinon, c reste une b -coloration de $G - xz$ avec $b(G)$ couleurs, contradiction. D'où, $G \in \mathcal{F}_3$. Vu que $G \notin \mathcal{F}_2$, alors $G \in \mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_2$. \square

4.2 L'ajout d'une arête

Du Théorème 2.1 et la Proposition 4.1, on déduit le Corollaire suivant:

Corollaire 4.43. *Pour tout graphe $G \neq K_n$ d'ordre $n \geq 2$ et pour toute arête $e \in \overline{G}$,*

$$b(G) - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \leq b(G + e) \leq b(G) + 1.$$

Définition 4.44. *Un graphe G est dit b^- -arête critique si pour toute arête $e \in \overline{G}$, $b(G + e) < b(G)$*

Proposition 4.45. *Il n'existe aucun graphe b^- -arête critique.*

Preuve. Supposons qu'il existe un graphe $G \neq K_n$ qui est b^- -arête critique. Soient $b(G) = k$ et c une b -coloration de G avec k couleurs. Soient V_1, V_2, \dots, V_k les classes des couleurs de c , où V_i est l'ensemble des sommets colorés par i , $1 \leq i \leq k$. Soit xy une arête manquante de G . Si x et y sont dans deux classes différentes, alors c reste une b -coloration de $G + xy$. Il s'ensuit que l'ajout de l'arête xy dans G ne peut pas diminuer le nombre b -chromatique de $G + xy$. Par conséquent, G contient toutes les arêtes qui joints V_i et V_j avec $1 \leq i \neq j \leq k$. Ainsi, si x, y sont dans la même classe de couleur V_l , avec $l \in \{1, \dots, k\}$, alors la partition $V_1, V_2, \dots, V_l \setminus \{x\}, \dots, V_k, \{x\}$ est une b -coloration de $G + xy$ avec $k + 1$ couleurs. Ceci implique que $b(G + xy) > b(G)$, contradiction. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, V_i est une clique et ils existent toutes les arêtes entre V_i et V_j avec $1 \leq i \neq j \leq k$. Ceci implique que G est un graphe complet, contradiction. \square

Définition 4.46. *Un graphe G est dit b^+ -arête critique si pour toute arête $e \in \overline{G}$, $b(G + e) > b(G)$.*

D'après le Corollaire 4.43, on peut formuler cette définition comme suit:

Définition 4.47. *Un graphe G est dit b^+ -arête critique si pour toute arête $e \in \overline{G}$, $b(G + e) = b(G) + 1$.*

Maintenant, nous caractérisons les arbres b^+ -arête critiques.

Définition 4.48 ([53]). *Un arbre T est dit pivoté si T admet exactement m sommets denses et contient un sommet v distingué (appelé pivot), tel que:*

- (i) *v est non dense;*
- (ii) *Tout sommet dense est adjacent à v ou à un sommet dense adjacent à v ;*
- (iii) *Tout sommet dense adjacent à v et à un autre sommet dense est de degré $m - 1$.*

Remarque 4.49. *Reconnaître si un arbre $T = (V, E)$ est pivoté se fait en temps polynomial.*

Théorème 4.50 ([53]). *Soit T un arbre. Alors $b(T) = m(T) - 1$ si T est pivoté et $b(T) = m(T)$ sinon.*

Proposition 4.51. *Soit G un graphe b^+ -arête critique avec $b(G) \leq 4$. Alors G ne contient pas deux sommets non adjacents de degrés au plus $b(G) - 2$.*

Preuve. Soit G un graphe b^+ -arête critique. Supposons que G possède deux sommets non adjacents, disons x_1, x_2 de degrés au plus $b(G) - 2$. Il est clair que pour toute b -coloration de G avec $b(G)$ couleurs, x_1, x_2 sont des sommets non b -dominants. Soit c une b -coloration de $G + e$ avec $b(G + e)$ couleurs avec $e = x_1x_2$. Vu que pour $i = 1, 2$, $d_{G+e}(x_i) \leq b(G) - 1 \leq b(G + e) - 2$, les sommets x_1, x_2 sont des sommets non b -dominants de c dans $G + e$. Par conséquent, c reste une b -coloration de G avec $b(G + e)$ couleur, contradiction. \square

Corollaire 4.52. *Soit T un arbre. Si $m(T) \geq 5$, ou bien T n'est pas pivoté et $m(T) = 4$, alors T n'est pas b^+ -arête critique.*

Théorème 4.53. *Un arbre T d'ordre $n \geq 3$ est b^+ -arête critique si et seulement si T est une étoile.*

Preuve. On peut vérifier facilement que si T est une étoile, alors $b(T + e) = b(T) + 1 = 3$ pour toute arête manquante e de G . Montrons la condition nécessaire. Soient T un arbre b^+ -arête critique et x, y deux sommets pendants dans T . Il s'ensuit que $b(T + xy) > b(T)$. D'après le Corollaire 4.52, $m(T) \leq 4$. Supposons que $m(T) = 4$. Le Corollaire 4.52 implique que, T est un arbre pivoté. Ceci implique que $b(T) = m(T) - 1 = 3$ et $b(T + xy) = 4$.

Considérons une b -coloration c de $T + xy$ avec 4 couleurs. Comme x, y sont des sommets non b -dominants de c dans $T + xy$, alors c reste une b -coloration de T avec 4 couleurs. Ceci implique que $b(T) = 4$, contradiction. Supposons que $m(T) = 3$. Si T est pivoté et de pivot v , alors $d_T(v) = 1$ car v n'est pas un sommet dense. Soit u l'unique sommet adjacent à v . D'après la Définition 4.48, u est un sommet dense et les deux autres sommets denses de T sont adjacents à u . Ceci implique que $d_T(u) \geq 3$, contradiction avec la Définition 4.48. Par conséquent T est non pivoté et $b(T) = m(T) = 3$. Dans ce cas, ajoutons une arête manquante de T entre deux sommets pendants de T ne fait pas diminuer le m -degré. Il s'ensuit que $b(T + xy) \leq m(T + xy) = m(T)$, contradiction. Finalement, supposons que $m(T) = 2$. Alors T est une étoile ou une double étoile. Vu que la double étoile n'est pas b^+ -arête critique, alors T est une étoile. \square

4.2.1 Le nombre b -bondage d'un graphe

Pour certains graphe, l'ajout d'une arête manquante ne change pas le nombre b -chromatique. Donc la question naturelle qui se pose, quel est le nombre minimum d'arêtes manquantes qu'il faut ajouter à G pour que le nombre b -chromatique du nouveau graphe augmente. Dans ce contexte, on introduit le nombre b -bondage d'un graphe. Dans le Corollaire 4.43, on a montré que l'ajout d'une arête à un graphe peut augmenter le nombre b -chromatique par au plus une unité. Donc la définition du nombre b -bondage se formule comme suit:

Définition 4.54. *Le nombre b -bondage d'un graphe G noté $B(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble d'arêtes F pour lequel $b(G + F) = b(G) + 1$. Notons que si $B(G) = 0$, alors il n'existe aucun ensemble $F \subset E(G)$ tel que $b(G + F) = b(G) + 1$.*

Théorème 4.55. *Si G est un graphe différent d'un graphe complet, alors $B(G) \leq b(G)$.*

Preuve. Soient $b(G) = k$ et c une b -coloration de G avec k couleurs. Soit V_1, V_2, \dots, V_k les classes de couleurs de c , où V_i est l'ensemble des sommets de G colorés par i avec $1 \leq i \leq k$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, soit x_i un sommet b -dominant de la classe de couleur V_i . Comme G est différent d'un graphe complet, alors il existe au moins une classe de couleur V_i qui contient au moins un sommet non b -dominant y_i . On montre qu'on peut

ajouter à G au plus k arêtes manquantes pour augmenter le nombre b -chromatique. Dans la première étape, ajoutons à G , $k - 1$ arêtes manquantes comme suit: Si y_i est l'unique voisin de x_j , $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$, dans V_i , alors ajoutons l'arête entre x_i et x_j , sinon ajoutons l'arête entre y_i et x_j si cette arête n'existe pas dans G . Finalement, ajoutons l'arête $x_i y_i$. Soit F l'ensemble des arêtes ajoutées. Il est clair que, $V(G + F) = V(G)$ et $|F| = k$. Soit π une b -coloration de $G + F$ obtenue à partir de c comme suit. Recolorons y_i par $k + 1$. Pour les autres sommets, on garde la même couleur. Il est clair que π est une b -coloration de $G + F$ avec $k + 1$ couleurs. En conséquence, $b(G + F) \geq k + 1$. Ceci implique que $B(G) \leq k$. \square

Théorème 4.56. *Soit G un graphe biparti complet équilibré d'ordre $2t$ ($t \geq 2$) moins un couplage parfait. Alors $B(G) = b(G) = t$*

Preuve. Soit (X_1, X_2) une bipartition de G avec $|X_i| = t$, $i = 1, 2$. Il est clair que $b(G) = t$. Soit F l'ensemble d'arêtes ajoutées à G et de cardinalité minimum pour lequel $b(G + F) = t + 1$. D'après le Théorème 4.55, $B_b(G) = |F| \leq t$. Pour établir l'égalité, il suffit de montrer que $|F| \geq t$. Soit $b(G + F) = k$. Considérons une b -coloration c de $G + F$ avec k couleurs. Notons par S l'ensemble de tous les sommets b -dominants de c . Posons $B_1 = X_1 \cap S$ et $B_2 = X_2 \cap S$ avec $|B_1| = p_1$ et $|B_2| = p_2$. Il est clair que $p_1 + p_2 \geq k$. Notons que pour $i = 1, 2$, $p_i \geq 1$ (i.e., chaque classe de bipartition contient au moins un sommet b -dominant), sinon une classe de bipartition contient au moins $k \geq t + 1$ sommets, contradiction. Ainsi, il existent au moins deux classes de couleurs contenant un seul sommet, sinon, au moins $k - 1$ classes de couleurs contenant au moins deux sommets. Il s'ensuit que $|V(G + F)| \geq 2(k - 1) + 1$. Par conséquent, $|V(G + F)| \geq 2t + 1$, contradiction. Soient b_1, b_2 deux sommets dans G tels que pour $i = 1, 2$, b_i est le seul sommet de couleur $c(b_i)$. Il est clair que, chaque sommet b_i ($i = 1, 2$) est adjacent à tous les sommets de S et $b_i \in B_1 \cup B_2$. Sans perte de généralité, supposons que $b_1 \in B_1$.

On montre le fait suivant:

Fait 10.

- (i) b_1 n'a aucun voisin dans $X_1 \setminus B_1$,
- (ii) $X_i \setminus B_i$ ($i = 1, 2$) est un ensemble stable,
- (iii) Tous les sommets de B_1 ont des couleurs distincts, (4.1)
- (iv) Il existe une couleur dans B_i qui n'existe pas dans X_j , $j \neq i$,
- (v) Aucune couleur dans X_2 ne peut être répétée dans $X_1 \setminus B_1$.

□

Preuve. Les trois premières propositions sont vérifiées car sinon, c reste une b -coloration de $G + F \setminus \{e\}$ avec k couleurs pour toute arête $e \in F$ telle que: Soit e connecte b_1 avec n'importe quel sommet de $X_1 \setminus B_1$, ou bien e connecte deux sommets de $X_i \setminus B_i$ ($i = 1, 2$), ou bien e connecte b_1 avec sommet $y \in B_1$ tel que la couleur de y est répétée dans B_1 . Ceci contredit la minimalité de F .

(iv) Supposons que toute couleur dans B_i est présente dans X_j , $j \neq i$. Ceci implique que $|X_j| \geq k \geq t + 1$, contradiction.

(v) La dernière proposition est immédiate d'après la définition de G .

Soit F_i ($i = 1, 2$) le sous ensemble de F dont chaque arête a ses extrémités dans X_i , et soit $F_{1,2}$ le sous ensemble de F dont chaque arête a une extrémité dans X_1 et l'autre extrémité dans X_2 . Il est immédiat de voir que, $|F| \geq |F_1| + |F_2| + |F_{1,2}|$. On peut distinguer deux cas:

Cas 1: $b_2 \in B_1$. Vu que $b_1 \in B_1$, il s'ensuit que $p_1 \geq 2$. D'après le Fait (4.1) item (iv), il existe une couleur i dans B_2 qui n'est pas présente dans X_1 . Ceci implique que, chaque sommet de B_2 de couleur $j \neq i$ est adjacent à un sommet de couleur i dans X_2 . Ceci implique que $|F_2| \geq p_2 - 1$. Supposons que $p_1 \geq 3$. Comme chaque sommet de B_1 est adjacent à b_i ($i = 1, 2$) et b_1 est adjacent à b_2 , alors $|F_1| \geq 2(p_1 - 2) + 1$. d'où, $|F| = |F_1| + |F_2| \geq 2p_1 + p_2 - 4$. Vu que $p_1 + p_2 \geq k$, alors $|F| \geq k + p_1 - 4$ et comme $k \geq t + 1$ et $p_1 \geq 3$, alors $|F| \geq t$. Supposons maintenant que $p_1 = 2$. D'après le Fait(4.1) item (i) et item (ii), alors $|F_1| = 1$. Il est clair qu' aucune couleur de B_1 ne peut être présente dans $X_2 \cup (X_1 \setminus B_1)$. Il s'ensuit que d'après le Fait (4.1), on peut supposer que les couleurs 1, 2 sont présentes dans B_1 , les couleurs 3, ..., t sont présentes dans $X_1 \setminus B_1$ et donc toute les couleurs de la coloration c autre que les couleurs 1, 2 sont présentes dans X_2 . D'après la

définition du nombre b -bondage, $k = t + 1$ et donc $t - 1$ sommets de X_2 ont des couleurs distincts. Ces $t - 1$ sommets sont nécessairement des sommets b -dominants dans X_2 et donc b_i ($i = 1, 2$) est adjacent à tous ces sommets. Comme dans le graphe G , b_1 et b_2 n'ont pas des non-voisins communs dans X_2 , il s'ensuit alors que l'un des deux est adjacent à tous les sommets de X_2 . Ceci implique que $|F_{12}| \geq 1$. D'où, $|F| = |F_1| + |F_2| + |F_{12}| \geq p_2 + 1$. Vu que $p_2 + p_1 \geq k$ et $k \geq t + 1$, alors $|F| \geq t$.

Cas 2: $b_2 \in B_2$. Clairement, pour $i = 1, 2$, b_i est adjacent à tous les sommets de $B_1 \cup B_2$. Ceci implique que pour $i = 1, 2$, F_i a au moins $p_i - 1$ arêtes. Supposons qu'il existe une couleur $i \neq c(b_1)$ qui est présente dans B_1 et dans $X_1 \setminus B_1$. Il s'ensuit que la couleur i n'est pas présente dans X_2 , et donc chaque sommet dans B_1 coloré par la couleur $j \neq i, c(b_1)$ est adjacent à un certain sommet de couleur i dans X_1 . Ceci implique que F_1 possède au moins p_1 arêtes. Ceci implique que $|F_1| \geq p_1$. Comme $|F_2| \geq p_2 - 1$, alors $|F| \geq p_1 + p_2 - 1$. D'où, $|F| \geq t$. Supposons maintenant qu'aucune couleur de B_1 n'est présent dans $X_1 \setminus B_1$. D'après le Fait (4.1) item (iii) et item (v), on peut supposer que les couleurs $1, 2, \dots, p_1$ sont présents dans B_1 et les couleurs $p_1 + 1, p_1 + 2, \dots, t$ sont présentes dans $X_1 \setminus B_1$. Il s'ensuit que la couleur $t + 1$ apparaît seulement dans X_2 (car $k = t + 1$). Ceci implique que chaque sommet de B_2 coloré par $j \neq t + 1$ possède un voisin de couleur i dans X_2 . Donc $|F_2| \geq p_2$ et par conséquent, $|F| \geq p_1 + p_2 - 1$. D'où, $|F| \geq t$. \square

Proposition 4.57. *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $A \subset V$ un ensemble stable de G . Si A contient deux sommets adjacents à tous les sommets de $V \setminus A$, alors $B(G) = 1$.*

Preuve. Soient $b(G) = k$ et c une b -coloration de G avec k couleurs. Notons par S l'ensemble des sommets b -dominants de c . Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que x_i ($i = 1, 2$) est adjacent à tous les sommets de $V \setminus A$. Si $A \cap S \neq \emptyset$, alors x_1, x_2 sont des sommets b -dominants et tous les sommets de $(A \cap S) \cup \{x_1, x_2\}$ sont colorés par la même couleur. Si $(V \setminus A) \cap S \neq \emptyset$, alors chaque sommet b -dominant dans $S \cap (V \setminus A)$ est adjacent à x_1, x_2 et ceci implique que x_1, x_2 sont des sommets b -dominants. Par conséquent, dans tous les cas x_1, x_2 sont des sommets b -dominants et de même couleur. Ajoutons l'arête x_1x_2 et considérons une coloration π de $G + x_1x_2$ avec k couleurs obtenue à partir de c comme suit: recolorons x_1 par $k + 1$ et tous les autres sommets gardent les couleurs données par la

coloration c . Clairement π est une b -coloration de $G + x_1x_2$ avec $k + 1$ couleurs et donc $b(G + x_1x_2) > k$. D'où, $B(G) = 1$. \square

Le Corollaire suivant découle immédiatement de la Proposition 4.57.

Corollaire 4.58. *Si G est un graphe multiparti complet, alors $B(G) = 1$.*

Nous donnons dans ce qui suit la valeur exacte du nombre b -bondage pour les chaînes et les cycles.

Proposition 4.59. *Soit P_n la chaîne d'ordre $n \geq 3$. Alors $B(P_n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 3, 4 \\ 3, & \text{if } n = 5 \\ 2, & \text{if } n \geq 6 \end{cases}$.*

Proposition 4.60. *Soit C_n le cycle d'ordre $n \geq 4$. Alors $B(C_n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 4 \\ 3, & \text{if } n = 5 \\ 2, & \text{if } n \geq 6 \end{cases}$.*

4.3 Subdivision d'une arête

Dans cette section, nous étudions l'effet de la subdivision d'une arête sur nombre b -chromatique. On commence par donner une caractérisation des graphes tels que $m(G) = 2$.

Proposition 4.61. *Soient G un graphe sans sommets isolés et t, p, q trois entiers avec $t \geq 0, p \geq q \geq 1$. Alors $m(G) = 2$ si et seulement si $G = tP_2$ (avec $t \geq 1$) ou bien $G = K_{1,p} + K_{1,q} + tP_2$ (avec $p \geq q \geq 2$) ou bien $G = K_{1,p} + tP_2$ ou bien $G = tP_2 + S_{p,q}$.*

Preuve. Vu que $m(G) = 2$, alors la définition de $m(G)$ implique que G contient au moins deux sommets de degré au moins 1, et il contient aussi au plus deux sommets de degré au moins 2. Si G ne contient pas des sommets de degré au moins 2, alors chaque composante connexe de G est un P_2 , donc $G = tP_2$ (avec $t \geq 1$). Si G contient exactement un sommet de degré au moins 2, alors l'un de ses composantes est une étoile d'ordre au moins 3 et chaque autre composante est un P_2 , donc $G = K_{1,p} + tP_2$. Maintenant, si G contient exactement 2 sommets de degré au moins 2, alors dans ce cas on a deux

possibilités. Soit l'un des composante est une étoile double d'ordre au moins 4 et les autres composantes sont des P_2 , ceci implique que $G = tP_2 + S_{p,q}$, ou bien deux composantes sont des étoiles d'ordres au moins 3 et autres composantes sont des P_2 , par conséquent $G = K_{1,p} + K_{1,q} + tP_2$ (avec $p \geq q \geq 2$). \square

Définition 4.62. Une subdivision d'un graphe G c'est une opération qui consiste à remplacer au moins une arête uv de G par un nouveau sommet w et en reliant w à u et à v .

Définition 4.63. Soit G' le graphe obtenu en subdivisant un ensemble d'arêtes F d'un graphe G . Le nombre de subdivision b -chromatique noté par $sd_b(G)$ est le minimum d'arêtes F à subdiviser telles que $b(G') > b(G)$. Notons que si $sd_b(G) = 0$, alors il n'existe aucun ensemble $F \subset E(G)$ tel que $b(G') > b(G)$.

Proposition 4.64. Soient G un graphe avec $m(G) = 2$ et t, p, q trois entiers avec $t \geq 0$, $p \geq q \geq 1$. Alors

$$sd_b(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } G = P_2 \text{ ou } 2P_2 \\ 1 & \text{si } G = K_{1,p} + K_{1,q} + tP_2 \text{ (avec } p \geq q \geq 2 \text{) ou bien } G = tP_2 + S_{p,q} \\ 2 & \text{si } G = K_{1,p} + tP_2 \\ 3 & \text{si } G = tP_2 \text{ (avec } t \geq 3 \text{)} \end{cases}$$

Proposition 4.65. Si $b(G) = m(G) \geq 3$, alors $sd_b(G) = 0$.

Preuve. Soit H le graphe obtenu en subdivisant une arête quelconque de G et soit u le nouveau sommet. Comme le degré de u égale à 2, alors $m(H) = m(G)$. Vu que $b(H) \leq m(H)$, il s'ensuit que $b(H) \leq b(G)$. Ceci implique que $sd_b(G) = 0$. \square

4.3.1 Le nombre de subdivision b -chromatique dans les arbres

Tout d'abord, on rappelle le résultat d'Irving et Manlove [53]

Définition 4.66. [53] Soit T un arbre, on dit que T est pivoté si T contient exactement m sommets denses et un autre sommet v tel que:

- v n'est pas un sommet dense.

- Chaque sommet dense est adjacent à v ou à un autre sommet dense adjacent à v .
- Chaque sommet dense adjacent à v et à un autre sommet dense est de degré exactement $m - 1$.

Théorème 4.67. [53] *Si T est un arbre pivoté, alors $b(T) = m - 1$, sinon $b(T) = m$.*

Proposition 4.68. *Pour tout arbre T , on a*

$$sd_b(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } T = P_4 \text{ ou bien } T \text{ est pivoté} \\ 2 & \text{si } T = P_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. Supposons que $m(T) = 2$. D'après la Proposition 4.61, $T = P_2$, ou bien $T = P_3$, ou bien $T = P_4$. Il s'ensuit que d'après la proposition 4.64 $sd_b(P_2) = 0$, $sd_b(P_3) = 2$, $sd_b(P_4) = 1$. Maintenant, supposons que $m(T) \geq 3$. D'après le Théorème 4.67, $m(T) - 1 \leq b(T) \leq m(T)$. Si $b(T) = m(T)$ alors d'après la Proposition 4.65, $sd_b(T) = 0$. Supposons que $b(T) = m(T) - 1$. Dans ce cas T est un arbre pivoté. Soit T' l'arbre obtenu à partir de T en subdivisant exactement une arête qui connecte le pivot de T avec un sommet dense quelconque de T . Comme le nouveau sommet est de degré 2 et $m(T) \geq 3$, alors $m(T') = m(T)$. Clairement T' est un arbre non pivoté. Ceci implique que $b(T') = m(T')$. Il s'ensuit que $b(T') = b(T) + 1$. Par conséquent, $sd_b(T) = 1$. \square

La remarque suivante est simple à vérifier.

Remarque 4.69. *Si c est une b -coloration de G avec $b(G)$ couleurs telle que $b(G) < m(G)$, alors chaque sommet dense possède au moins deux couleurs qui se répètent dans son voisinage.*

Théorème 4.70. *Pour tout graphe G , on a $sd_b(G) \leq 2b(G) - 1$. De plus cette borne est atteinte pour $G = 3P_2$.*

Preuve. Posons $b(G) = k$. Si $m(G) = k$, alors le théorème est vraie D'après les Propositions 4.65 et 4.64. Supposons que $m(G) \neq k$. Considérons une b -coloration c de G avec k couleurs. Pour $1 \leq i \leq k$, soit x_i un sommet b -dominant de couleur i et soit $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. D'après la Remarque 4.69, x_i avec $1 \leq i \leq k$ possède au moins deux

voisins de même couleurs tels que l'un des deux, disons z_i est à l'extérieur de S car tous les sommets de S ont des couleurs distincts. Vu que $k < m(G)$, alors G contient au moins un sommet dense, disons $y \in V \setminus S$. Notons que $d_G(y) \geq m(G) - 1 \geq k$. Soit r le nombre de couleurs qui sont présentes dans $N_G(y)$. Notons par A l'ensemble des sommets de $N_G(y)$ de couleurs distincts. Clairement, $|A| = r$ et toutes les couleurs qui sont dans $N_G(y) \setminus A$ sont présentes dans A . Comme $d_G(y) \geq k$, alors $|N_G(y) \setminus A| \geq k - r$. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en subdivisant les arêtes suivantes. On commence par subdiviser $k - r$ arêtes qui connectent y avec $k - r$ sommets de $N_G(y) \setminus A$. Si x_i n'est pas adjacent à y , alors on subdivise l'arête $x_i z_i$. Soit π une b -coloration de G' avec $k + 1$ couleurs obtenue à partir de c comme suit: Colorons y et les nouveaux sommets adjacents à x_i par $k + 1$. Colorons le voisinage de y de telle manière que y est sommet b -dominant pour la coloration π dans G' . En effet, colorons les $k - r$ nouveaux sommets par $k - r$ couleurs manquantes et différentes de $k + 1$. Les sommets qui restent garde l'ancienne couleur. Cette coloration est possible car les nouveaux sommets sont de degré 2. Il est clair que cette coloration est propre et b -dominante. Par conséquent, $b(G') \geq k + 1$. Ceci implique qu'au plus $2k - r \leq 2k - 1$ arêtes doit être subdiviser pour augmenter le nombre b -chromatique de G . D'où, $sd_b(G) \leq 2k - 1$. \square

Corollaire 4.71. *Pour tout graphe G , $sd_b(G) \leq 2\Delta(G) + 1$, avec égalité si et seulement si $G = tP_2$ ($t \geq 3$)*

Preuve. D'après le Théorème 4.70, $sd_b(G) \leq 2b(G) - 1$. Vu que $b(G) \leq \Delta(G) + 1$, alors $sd_b(G) \leq 2\Delta(G) + 1$. Maintenant, supposons que $sd_b(G) = 2\Delta(G) + 1$. Dans ce cas $b(G) = m(G) = \Delta(G) + 1$. Donc $sd_b(G) > 0$ et G est sans sommets isolés. D'après la Proposition 4.65, $b(G) = m(G) = 2$, et par suite $\Delta(G) = 1$. Par conséquent, $sd_b(G) = 3$. La Proposition 4.64 implique que $G = tP_2$ ($t \geq 3$). \square

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous avons étudié principalement la notion de la b -coloration dans les graphes. Notre travail s'est articulé sur trois points importants:

- Etablissement des bornes sur le nombre b -chromatique et caractérisation des graphes atteignant ces bornes.
- détermination des valeurs exactes du nombre b -chromatique pour des classes particulières de graphes
- Caractérisation de certains graphes critiques par rapport au nombre b -chromatique.

En premier lieu, nous avons montré que pour tout graphe G et pour toute arête e de G , $b(G - e) \leq b(G) + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ où n est l'ordre de G , ensuite nous avons caractérisé les graphes pour lesquels cette borne est atteinte.

En second lieu, nous avons étudié les graphes étriqués. En effet, nous avons montré que le nombre b -chromatique d'un graphe étriqué de maille au moins 8 est égale à m ou $m - 1$. De plus, nous avons montré que le nombre b -chromatique d'une sous classe des graphes étriqués de maille au moins 6 est borné inférieurement par $3 \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ où m est le m -degré de G .

Enfin, nous avons étudié l'impact de quelques opérations données sur le nombre b -chromatique.

La première opération consiste à supprimer une arête d'un graphe. Dans ce cadre, nous avons caractérisé deux classes de graphes arêtes b -critiques, à savoir les graphes P_4 -Laden étendus et les bloc graphes arête b -critiques. Un graphe est dit b -critique si pour toute arête $e \in E(G)$, $b(G - e) = b(G) - 1$.

La deuxième opération consiste à ajouter une arête. Dans ce contexte, nous avons caractérisé les arbres critiques. Un graphe G est dit critique si pour toute arête $e \in \overline{G}$

$b(G + e) = b(G) + 1$. De plus, nous avons introduit le nombre b -bondage noté par $B(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes qu'il faut ajouter à G pour augmenter le nombre b -chromatique. Nous avons borné supérieurement $B(G)$ par $b(G)$ et nous avons calculé la valeur de $B(G)$ pour des graphes particuliers.

La dernière opération consiste à subdiviser une arête. Dans ce cadre, nous avons introduit le nombre de subdivisions b -chromatique noté par $sd_b(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes à subdiviser pour augmenter le nombre b -chromatique. Nous avons donné la valeur de $sd_b(G)$ dans les arbres et nous avons établi des bornes supérieures pour $sd_b(G)$.

Les travaux réalisés durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs.

Voici une liste de problèmes qui se situent dans le prolongement de cette thèse:

- Montrer que pour tout graphe G , $sd_b(G) \leq 3$.
- Caractériser les graphes G tels que pour toute arête $e \in E(G)$, $b(G_e) < b(G)$, où G_e est le graphe obtenu à partir de G en subdivisant l'arête e .
- Caractériser les graphes G tels que pour toute arête $e \in E(G)$, $b(G_e) > b(G)$.
- Caractériser les graphes G tels que pour toute arête $e \in E(G)$, $b(G_e) = b(G)$.
- Caractériser les graphes G tels que pour toute arête $e \in E(G)$, $b(G - e) \leq b(G) + 1$.
- Etablir une borne supérieure et autre inférieure de $b(G_e)$ en fonction de $b(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$ et caractériser les graphes extrémaux pour une certaine arête $e \in E(G)$.
- Etablir une borne supérieure et autre inférieure de $b(G_{uv})$ en fonction de $b(G)$, pour toute arête $uv \in E(G)$ et caractériser les graphes extrémaux pour une certaine arête $uv \in E(G)$, où G_{uv} est le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arête uv .
- Démontrer la conjecture de Lin et Chang: Si $G \in B_m$, alors $b(G) = m(G)$ ou bien $m(G) - 1$.

RÉFÉRENCES

- [1] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable: Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 (1977) 429 – 490.
- [2] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable: Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., 21 (1977) 491 – 567.
- [3] M. Behzad: A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb.Philos. Soc. 63 (1967) 679 – 681.
- [4] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.
- [5] L.W. Beineke : Characterizations of derived graphs. Journal of Combinatorial Theory, 9(2) (1970) 129 – 135.
- [6] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph theory with applications, North-Holland, New York, 1979.
- [7] F. Bonomo, G. Durán, F. Maffray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. On the b -coloring of cographs and P_4 -sparse graphs. Graphs and Combinatorics 25 (2009) 153 – 167.
- [8] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. Characterization of b -gamma perfect graphs. Australasian Journal of Combinatorics, 9 (1) (2012) 21 – 29.
- [9] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. b -coloring of some bipartite graphs. Australasian Journal of Combinatorics. 53 (2012) 67 – 76
- [10] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On graphs vertex critical with respect to b -chromatic number. Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Informatique COSI'2011, 24 – 28 Avril, Guelma, Algérie.
- [11] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On vertex b -critical trees. Opuscula Mathematica 33 (1) (2013) 19 – 28.

- [12] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On edge b -critical graphs, *Discrete Applied Mathematics*. 180 (2015) 176 – 180.
- [13] M. Blidia, F. Maffray, Z. Zemir. On b -colorings in regular graphs. *Discrete Applied Mathematics* 157 (2009) 1787 – 1793.
- [14] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37 (1941) 194 – 197.
- [15] S. Cabello, M. Jakovac. On the b -chromatic number of regular graphs. *Discrete applied mathematics* 159 (2011). 1303 – 1310.
- [16] G. Chartrand and P. Zhang. *Chromatic graph theory*. *Discrete Mathematics and its Applications*, Series Editor KENNETH H. ROSEN, CRC Press, 2009.
- [17] C. Christen, S. Selkow. Some perfect coloring properties of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 27 (1997) 49 – 59
- [18] M. Chundovsky and P. D. Seymour, The structure of claw-free graphs, *Surveys in combinatorics* (2005), 153–171 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 327, Cambridge Univ. Press (2005).
- [19] V. Compos, C. Linhares, F. Maffray, A. Silva. b -chromatic number of Cacti. *Electronic Notes In Discrete Mathematics*, 35 : 281 – 286, 2009.
- [20] L. Dekar, H. Kheddouci. A Graph b -Coloring Based Method for Composition-Oriented Web Services Classification. A. An et al. (Eds.): *ISMIS, LNAI 4994*, pp. 599 – 604, 2008.
- [21] L. Dekar, H. Kheddouci. Distance-2 Self-stabilizing Algorithm for a b -Coloring of Graphs. S. Kulkarni and A. Schiper (Eds.): *SSS, LNCS 5340* (2008) 19 – 31.
- [22] R. Diestel. *Graph theory*. Electronic Edition 2005, Springer-Verlag, New York 1997, 2000, 2005
- [23] G. A. Dirac. Note on the colouring of graphs. *Math. Z.* 54 (1951) 347-353,

- [24] G. A. Dirac. Property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London, Math. Soc. 27 (1952) 85 – 92.
- [25] B. Effantin, H. Kheddouci. The b -chromatic number of some power graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 6 (2003) 45 – 54.
- [26] B. Effantin, H. Kheddouci. A distributed algorithm for a b -coloring of a graph. In: Guo, M., Yang, L.T., Di Martino, B., Zima, H.P., Dongarra, J., Tang, F. (eds.) ISPA. LNCS, vol. 4330 (2006) 430 – 438.
- [27] H. Elghazel, K. Benabdeslem. Towards b -coloring of SOM. P. Perner (Ed.). MLDM, LNAI 5632 (2009) 322 – 336.
- [28] H. Elghazel, K. Benabdeslem, A.Dussauchoy. Constrained Graph b -Coloring Based Clustering Approach. I.Y. Song, J. Eder, and T.M. Nguyen (Eds.): DaWaK, LNCS 4654 (2007) 262 – 271.
- [29] H. Elghazel, V. Deslandres, M. S. Hacid, A. Dussauchoy, H. Kheddouci. A New Clustering Approach for Symbolic Data and Its Validation: Application to the Healthcare Data. F. Esposito et al. (Eds.): ISMIS, LNAI 4203 (2006) 473 – 482.
- [30] H. Elghazel, H. Kheddouci, V. Deslandres, A. Dussauchoy. A Graph b -coloring Framework for Data Clustering. J Math Model Algor 7 (2008) 389 – 423.
- [31] H. Elghazel, H. Kheddouci, V. Deslandres, A. Dussauchoy. A Partially Dynamic Clustering Algorithm for Data Insertion and Removal. V. Corruble, M. Takeda, and E. Suzuki (Eds.): DS 2007, LNAI 4755 (2007) 78 – 90.
- [32] H. Elghazel, T. Yoshida, V. Deslandres, M.S Hacid, A. Dussauchoy. A New Greedy Algorithm for Improving b -Coloring Clustering. F. Escolano and M. Vento (Eds.): GbRPR, LNCS 4538 (2007) 228 – 239.
- [33] A. El Sahili, M. Kouider. About b -colorings of regular graphs, Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.

- [34] A. El Sahili, M. Kouider, M. Mortada. On the b -chromatic number of regular bounded graphs. arXiv. 3102.4209
- [35] A. El Sahili, H. Kheddouci, M.Kouider, M. Mortada. The b -chromatic number and f -chromatic vertex number of regular graphs. Discrete Applied Mathematics. 179 (2014) 79 – 85.
- [36] T. Faik. La b -continuité des b -colorations: Complexité, Propriétés structurelles et Algorithmes. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.
- [37] S. Francis Raj, R. Balakrishnan. Bounds for the b -chromatic number of $G-v$. Discrete Applied Mathematics.
- [38] S. François, R. Balakrishnan Raj. Bounds for the b -chromatic number of vertex-deleted subgraphs and the extremal graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics 34 (2009) 353 – 358.
- [39] M. R. Garey, D. S., Johnson. Computers and Intractibility: A guide to the Theory of NP -completeness, W. H. Freeman and Company, New York, 1979.
- [40] V. Giakoumakis, P_4 -laden graphs: A new class of brittle graphs, Information Processing Letters (1996) 26 – 36.
- [41] V. Giakoumakis, F. Roussel, H. Thuillier. On P_4 -tidy graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 1 (1997) 17 – 41.
- [42] M.C. Golumbic. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Annals of Discrete Mathematics 57, 2nd Edition, North Holland, 2004.
- [43] H. Hajiabolhassan. On the b -chromatic number of Kneser graphs. Discrete Applied Mathematics 158 (2010) 232 – 234.
- [44] T. Hamada, I. Yoshimura: Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math. 14 (1976) 247 – 256.
- [45] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. The a -chromatic number of graph. Journal of Combinatorial Theory 8 (1970) 154 – 161.

- [46] F. Harary, S. Hedetniemi. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 (1967) 453 – 462.
- [47] C.T. Hoàng, M. Kouider. On the b -dominating coloring of graphs. Discrete Appl. Math. 152 (2005) 176 – 186.
- [48] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b -perfect graphs. arXiv: 1004.5306 [cs.DM] 29 Apr 2010.
- [49] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b -perfect graphs. CoRR, Vol. abs/1004.5306, 2010.
- [50] C.T. Hoàng, C. Linhares Sales, F. Maffray. On minimally b -imperfect graphs. Discrete Applied Mathematics 157 : 3519 – 3530, 2009.
- [51] C.T. Hoàng. Perfect graphs, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, 1985.
- [52] N. Ikhlef Eschouf. Characterization of some b -chromatic edge critical graphs. Australasian Journal of Combinatorics 47 (2010) 21 – 35.
- [53] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b -chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91 (1999) 127 – 141.
- [54] N. Ikhlef Eschouf. Etude de la b -coloration dans les graphes: Graphes extrémaux et graphes critiques. Thèse de Doctorat, Université de Blida, 2012.
- [55] M. Jakovac, S. Klavžar. The b -Chromatic Number of Cubic Graphs. Graphs and Combinatorics 26 (2010) 107 – 118.
- [56] M. Jakovac, I. Peterin. On the b -chromatic number of some graph products. A paraître dans Stud. Sci. Math. Hung.
- [57] B. Jamison, S. Olarui. A tree representation for P_4 -sparse graphs. Discrete Appl. Math. 35 (1992) 115 – 129.

- [58] B. Jamison, S. Olariu. Recognizing P_4 -sparse graphs in linear time. SIAM J. on Comput 21 (1992) 381 – 406.
- [59] R. Javadi, B. Omoomi. On b -coloring of cartesian product of graphs. A paraître dans Ars Combinatoria.
- [60] R. Javadi, B. Omoomi. On b -coloring of the Kneser graphs. Discrete Mathematics 309 (2009) 4399 – 4408.
- [61] T.R. Jensen and B. Toft. Graph Coloring Problems. John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [62] J. Kàra, J. Kratochvíl, M.Voigt. b -continuity. Rapport Technique, 2004.
- [63] M. Kouider. On quasi-monotonous graphs. hal-00801393, version 1– 18 Mar 2013.
- [64] M. Kouider, M. Mahéo. Some bounds for the b -chromatic number of a graph. Discrete Math. 256 (2002) 267 – 277.
- [65] M. Kouider, M. Mahéo. The b -chromatic number of the cartesian product of two graphs. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 44 (1) (2007) 49 – 55.
- [66] M. Kouider, M. Zaker. Bounds for the b -chromatic number of some families of graphs. Discrete mathematics, vol. 306, no 7, pp. 617 – 623, 2006.
- [67] M. Kouider, M. Zamime. On the b -coloring of tight graphs. Journal Of combinatorial Optimization. (2015) DOI 10.1007/s108 – 015 – 9946–y.
- [68] J. Kratochvíl, Z. Tuza, M. Voigt. On the b -chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science 2573, 310 – 320, 2002.
- [69] Wu-Hsiung Lin, Gerard j. Chang. b -coloring of tight bipartite graphs and the Erdos-Faber-Lovasz conjecture. Discrete Applied Mathematics.
- [70] C. Linhares Sales, L. Sampaio. b -coloring of m -tight graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics 35 (2009) 209 – 214.

- [71] F. Maffray, M. Mechebbek. On b -perfect chordal graphs. *Graphs and Combinatorics* 25 (2009) 365 – 375.
- [72] F. Maffray, A. Silva. A b -colouring the cartesian product of trees and some other graphs. *Discrete Mathematics*.
- [73] F. Maffray, A. Silva. b -colouring outerplanar graphs with large girth. *Discrete Mathematics* 312 (10) (2012) 1796 – 1803.
- [74] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems: a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 – 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.
- [75] M. Mechebbek. Etude structurelle de quelques classes de graphes. Thèse de Doctorat. USTHB (2013).
- [76] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. *Ann. Math. Monthly*, 63 (1956) 175 – 177.
- [77] J. Ramirez-Alfonsin, B. Reed. *Perfect Graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, 2001.
- [78] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas. The four-colour theorem. *Journal of Combinatorial Theory B* 70 (1997) 2 – 44.
- [79] D. Seince. On a property of the class of n -colorable graphs. *J. Comb. Theory Ser. B* 16 : 191 – 193, 1974.
- [80] S. Shaebani. The b -Chromatic Number of Regular Graphs via The Edge Connectivity. arXiv:1105.2909 v1 [math.CO] 14 May 2011.
- [81] S. Shaebani. On The b -chromatic number of regular graphs without 4-Cycle. arXiv : 1103.152 v1 [math.CO] 08 Mars 2011.
- [82] A. Silva. The b -chromatic number of some tree-like graphs. Thèse de Doctorat. Université Joseph-Fourier, Grenoble, France, (2010).

- [83] K.Thilagavathi, D.Vijayalakshmi, N.Roopesh. *b*-Colouring of Central Graphs. International Journal of Computer Applications (0975 – 8887) Volume 3 – No.11, July 2010.
- [84] B. West. Introduction to graph theory. Printice Hall of India, 2003.
- [85] M. Zamime, M. Kouider, H. Ait Haddadène. On the b-coloring of G-e. Discrete Applied Mathematics. 188 (2015) 41 – 50,.
- [86] M. Zamime, N. Ikhlef Eschouf, H. Ait Haddadène. Some results in edge b-critical graphs. 16^{ième} Collogue ROADEF 2015, Fevrier 2015, Marseille, France.

Résumé:

Une b -coloration est une coloration propre telle que dans chaque classe de couleur, il existe au moins un sommet ayant un voisin dans chacune des autres classes de couleur. Le nombre b -chromatique, noté $b(G)$, est le plus grand entier k tel que G admet une coloration dominante avec k couleurs. Un graphe est dit b -critique si pour toute arête e , $b(G-e) = b(G)-1$. Un graphe est dit b^+ -critique si pour toute arête $e \in G$, $b(G+e) = b(G)+1$. Le m -degrés d'un graphe G est le plus grand entier m tel que G a au moins m sommets de degrés au moins $m-1$. Un sommet v est dit dense si $d_G(v) \geq m(G)-1$. Un graphe G est dit étriqué si G contient exactement m sommets denses de degré $m-1$. On note par B_m la classe des graphes bipartis (D, D') de maille au moins 6 étriqués avec D l'ensemble des sommets denses.

Dans la première partie de la thèse, on présente une borne supérieure pour $b(G-e)$ en fonction de n et de $b(G)$ et on caractérise les graphes atteignant cette borne.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des graphes étriqués. Dans un premier temps, on montre que si G est un graphe étriqué de maille au moins 8, alors $m(G)-1 \leq b(G) \leq m(G)$. Ainsi, On vérifie la conjecture de Chang et Lin pour des sous classes de B_m . Dans un second temps, on présente une borne inférieure pour $b(G)$ en fonction de $m(G)$ pour les graphes G de maille au moins 6 appartenant à B_m .

Dans la troisième partie, on étudie l'impact des opérations données sur le nombre b -chromatique. En premier lieu, on donne une caractérisation des graphes P_4 -laden étendus arête b -critiques et les blocs graphes arête b -critiques et les arbres critiques. En second lieu, on introduit deux nouveaux paramètres: $B(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes F ajoutées au graphe G telles que $b(G+F) > b(G)$ et $sd_b(G)$ comme étant le nombre minimum d'arête à subdivisées pour augmenter le nombre b -chromatique.

Abstract:

A b -coloring is a proper coloring such that each color class contains at least one vertex that has a neighbor in all other color classes. The b -chromatic number, denoted by $b(G)$, is the largest integer k such that G has a dominating coloring with k colors. A graph is called b -critical if for any edge e , $b(G-e) = b(G)-1$. A graph is called critical if for any edge $e \in G$, $b(G+e) = b(G)+1$. A graph G is m -tight if it has exactly $m(G)$ dense vertices. We denote by B_m the class of m -tight bipartite graphs (D, D') of girth at least 6, where D is the set of dense vertices.

In the first part, we present an upper bound for $b(G-e)$ in terms of n and $b(G)$ and characterize the graphs achieving this bound.

In the second part, we show that $m(G)-1 \leq b(G) \leq m(G)$ for all m -tight graph G of girth at least 8. We verify the conjecture of Chang and Lin for some subclass of B_m and we present a lower bound for $b(G)$ in terms of $m(G)$ in B_m .

In the last part, we study the impact of operations on the b -chromatic number. First, we characterise the extended P_4 -laden graphs, blok graphs edge b -critical and the critical trees. Finally, we introduce two new parameters: $B(G)$ as the minimum number F of edges in graph G such that $b(G+F) > b(G)$ and $sd_b(G)$ as the minimum number of edge subdivided to decrease the b -chromatic number.