

N° d'ordre:01/2011-D/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
"HOUARI BOUMEDIENNE"
FACULTÉ DE PHYSIQUE



THESE

présentée pour l'obtention du grade de Doctorat

EN: PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

Par

BENRABIA Djaafer

Sujet

**Particule Etendue Stochastique avec une
Extension Intrinsèque à Symétrie Interne de
de Sitter**

Soutenue publiquement, le 16 /05/ 2011, devant le jury composé de :

Mr.	Abdallah SMIDA	Professeur	U.S.T.H.B	Président
Mr.	Mahmoud HACHEMANE	Professeur	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
Mr.	Djilali BENAYAT	Professeur	ENS de Kouba	Examineur
Mr.	Mustapha BENTAIBA	Professeur	U. de Blida	Examineur
Mr.	Smain KOUADIK	Maître de Conférences A	U. de Médéa	Examineur
Mme.	Amel-Hiba HAMICI	Maître de Conférences A	U.S.T.H.B	Invité

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de Physique Théorique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB) sous la direction de Monsieur M. HACHEMANE, Professeur à l'U.S.T.H.B à qui j'exprime toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a accordée, sa patience, sa disponibilité, et ses conseils tout au long de ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur A. SMIDA, Professeur à l'U.S.T.H.B pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie également Madame A.-H. HAMICI, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie vivement, Messieurs M. BENTAIBA Professeur à l'Université de Blida, D. BENAYAT Professeur à l'ENS de Kouba et K. KOUADIK Maître de Conférences à l'Université de Médea d'avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie Madame F. Z. IGHEZOU Professeur à l'U.S.T.H.B, Messieurs F. Boubnider Professeur à l'U.S.T.H.B, A. CHOUCHAOUI Professeur à l'U.S.T.H.B, R. TAOUNIT Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B et R. ANNOU Professeur à l'U.S.T.H.B pour leur encouragement.

Je remercie également tous mes amis et en particulier Messieurs K. BOUCHACHIA, S. BENLALA et M. KHEROUBI, collègues du laboratoire de physique théorique et tous ceux avec qui j'ai eu la chance de travailler pour leur sympathie et leur encouragement.

Enfin, je ne pourrai jamais assez remercier mes parents, mes frères et sœurs pour leur encouragement et soutien tout au long de mes études. Je tien à remercier ici toute ma

famille ainsi que les amis de mon père pour l'aide qu'ils m'ont apporté ces deux dernières années.

Table des matières

Introduction	1
1 Modèle de l'oscillateur harmonique relativiste et modèle géométro-différentiel de la particule étendue	5
1.1 Introduction	6
1.2 L'oscillateur harmonique relativiste	8
1.3 Les représentations de Poincaré de l'oscillateur harmonique et interprétations des fonctions d'onde	10
1.4 Particule étendue à symétrie de Poincaré	12
1.5 Conclusion	17
2 Quantification par les représentations induites et quantification géométro-stochastique	19
2.1 Introduction	19
2.2 Symétrie de de Sitter	21
2.2.1 Les espaces de configuration et des impulsions	21
2.2.2 Classification des représentations irréductibles	25
2.2.3 La quantification par la méthode des représentations induites du groupe de Sitter et système d'imprimitivité	28
2.3 Quantification stochastique et système de covariance	32
2.3.1 Le cas non relativiste	32
2.3.2 Le cas relativiste	35
2.4 Conclusion	36

3	Particule étendue stochastique non relativiste avec une extension intrinsèque à symétrie interne de de Sitter	38
3.1	Introduction	39
3.2	Espaces des états réels et système d'imprimitivité	40
3.3	Propagation	41
3.4	Etats localisés et système de covariance	44
3.5	Conclusion	46
4	Particule étendue stochastique relativiste avec une extension intrinsèque a symétrie interne de de Sitter	48
4.1	Introduction	49
4.2	Propagation libre de la particule étendue	52
4.3	Les fibrés et la connexion	55
4.4	Propagation de la particule étendue dans un espace-temps courbe	60
4.5	Conclusion	63
	Conclusion	67

Introduction

Les hadrons sont des particules étendues avec une structure interne [1, 2]. S'ils se meuvent à des vitesses relativistes, le centre de masse est alors soumis aux transformations de Poincaré (ou de Galilée dans le cas non relativiste). Cependant, il y a plusieurs approches pour la description de la structure interne (mouvement relatif) [3, 4, 5].

Le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique [6, 7, 8, 9] décrit le hadron comme un système quark-antiquark scalaire interagissant par un potentiel harmonique. Les états liés du hadron sont alors décrits avec les variables du centre de masse x et du mouvement relatif ξ , par un champ bilocal $\phi(x, \xi)$.

Dans le modèle du rotateur relativiste [10, 11, 12], le groupe de de Sitter $SO(4, 1)$ est utilisé comme groupe dynamique [13] pour expliquer la relation entre la masse et le spin des hadrons. Ceci est basé sur l'idée qu'au voisinage du hadron, l'interaction forte est telle qu'elle courbe localement l'espace-temps sur une étendue de l'ordre du Fermi. En particulier, pour une courbure constante R , cet espace-temps désormais interne est celui de de Sitter.

Le modèle du rotateur relativiste [14] utilise une structure géométrique de fibré [15] introduite par Drechsler [16, 17, 18]. En effet, ce dernier décrit le hadron comme une particule étendue avec une structure interne spatio-temporelle par un fibré dont la variété de base peut être un espace-temps de Minkowski en absence de gravitation ou un espace-temps Riemannien en présence de celle-ci. La fibre est l'espace-temps de de Sitter où le groupe de de Sitter (groupe de jauge qui agit sur la fibre) joue le rôle de groupe structural. Ce modèle semi-classique [19] a été ensuite quantifié par la théorie quantique géométrique-stochastique [20, 21, 22].

La théorie géométrique-stochastique [23, 24] prétend unifier la théorie quantique avec les théories de la relativité restreinte et générale. Cette théorie traite de la localisation et de

l'extension des particules liées aux erreurs irréductibles des appareils de mesures. La localisation est alors décrite par des opérateurs à valeurs positives (POV) qui ne sont pas des projecteurs orthogonaux. En présence de groupe de symétrie, ces POV constituent un système de covariance [23, 25] qui généralise les systèmes d'imprimitivités. Ces derniers, sont des projecteurs orthogonaux (PV) bien adaptés à la description des systèmes quantiques (non relativistes) [26]. L'extension de la particule est considérée d'un point de vue opérationnel. En d'autres termes, la mesure de la position ou de l'impulsion de la particule ne donne plus une valeur exacte, mais peut prendre plusieurs valeurs avec une certaine densité de probabilité. La particule étendue stochastique est alors décrite par une représentation irréductible dans l'espace des phases stochastique. Les fonctions d'onde décrivant cette particule ainsi que les opérateurs positifs, s'expriment en termes de vecteurs d'onde propres. Ces fonctions d'onde propres, décrivent des particules d'essai jouant le rôle de micro-détecteurs dans le cas non-relativiste, et sont utilisées pour définir des repères quantiques locaux en relativité générale.

Le modèle géométro-différentiel [27], adopte une conception du hadron analogue au modèle géométrique semi-classique [18, 28, 29]. Cependant, la particule étendue est composée de deux modes quantiques locaux. Le mode externe correspond au centre de masse alors que le mode interne peut décrire le mouvement relatif. Une image intuitive de cette particule étendue est que le mode externe décrit un point spécifique du hadron alors que le mode interne décrit le mouvement des quarks supposés ponctuels et confinés dans un espace-temps interne.

Les fondements physiques du modèle géométro-différentiel [27, 30, 31] se trouvent dans une théorie quantique fonctionnelle de Destouches [32, 33] qui tente de décrire les particules élémentaires comme des objets intrinsèquement étendus en remplaçant le point géométrique $x \in R^3$ par une fonction d'onde physique u qui apparaît dans la théorie de la double solution de de Broglie [34]. Cette théorie quantique se base sur l'analyse des implications liées à la distinction d'un système (la particule) du reste de l'univers (l'extérieur) et du caractère approximatif de l'introduction du champ qui caractérise l'influence de l'extérieur sur le système considéré. Cette analyse montre que, d'un point de vue physique, la représentation de la particule par un point est insuffisante pour tenir compte de l'influence de l'extérieur

sur les caractéristiques propres de la particule. Ces mêmes considérations montrent qu'on ne peut adopter pour la particule une figure géométrique de corps rigide. La théorie quantique fonctionnelle se présente comme une alternative pour améliorer ces approximations, sans nier complètement le caractère ponctuel de la particule mais le considère comme un aspect partiel de la réalité physique. L'onde physique u décrit toutes les caractéristiques propres de la particule et ne possède pas une interprétation probabiliste. Les probabilités de mesures sont données par une fonctionnelle $X[u, t]$ qui se réduit à la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ analogue à celle de la mécanique quantique habituelle dans l'approximation ponctuelle. La fonction d'onde abstraite u peut être traitée en adoptant un modèle physique spécifique pour la particule comme un globule fluide qui obéit à une équation d'onde linéaire de la mécanique quantique avec un potentiel non-linéaire [32].

La fonctionnelle $X[u]$ est choisie comme un champ bilocal $X[\Psi_x(\xi)] = \Psi(x, \xi)$ décrivant le mouvement d'un mode externe et d'un mode interne composant la particule étendue [27]. Les deux modes ont été quantifiés par la méthode des représentations induites [35, 36] qui est basée sur la commutation de la représentation réductible de configuration et de la représentation irréductible des impulsions (de masse et de spin bien définis). Les états de ces deux représentations sont alors appelés localisés et réels (ou matériels), respectivement. La commutation est interprétée comme une localisation, matérialisation ou une propagation selon la nature de l'état quantique initial et final.

Dans la première version du modèle géométo-différentiel de la particule étendue [27], une symétrie de de Sitter décrivant une théorie de jauge de l'interaction forte a été considérée. Les deux modes ponctuels composant la particule étendue ont été quantifiés par la méthode des représentations induites. Ainsi, une théorie quantique des particules étendues dans un espace-temps courbe a été construite. La propagation est décrite dans une structure géométrique de fibré de Hilbert. Le propagateur semi-classique inspiré de la théorie quantique géométo-stochastique, décrit une propagation dans une fibre suivie d'un transport parallèle entre deux points de l'espace-temps courbe. Le propagateur total est une somme de ces propagateurs semi-classiques sur tous les chemins physiquement possibles. Cependant, le problème de la localisation du mode externe dans l'espace-temps lié à la quantification par la méthode des représentations induites reste posé. Le but du présent

travail, est de surmonter cette difficulté en adoptant un point de vue géométro-stochastique pour la quantification de ce mode. Le mode interne reste ponctuel et quantifié par la méthode des représentations induites.

Récemment [37], une nouvelle version du modèle a été construite pour une particule étendue (scalaire) non relativiste. Le mode externe est quantifié par la théorie quantique stochastique alors que le mode interne reste ponctuel et quantifié par la méthode des représentations induites. Les deux modes composant la particule étendue possèdent la symétrie de Galilée. La justification physique de ce modèle est que le mode externe est directement soumis au processus de mesure alors que le mode interne est observé d'une manière indirecte. Des interprétations probabilistes acceptables ont été obtenues dans ce cas.

Sur ces bases, nous avons d'abord construit un modèle de la particule étendue scalaire non relativiste avec une symétrie interne de de Sitter. La structure géométrique n'a pas été considérée dans ce cas. Ensuite, nous avons considéré le cas relativiste. Le mode externe stochastique possède la symétrie de Poincaré, alors que le mode interne reste ponctuel et quantifié par la méthode des représentations induite pour une symétrie interne de de Sitter. La propagation dans un espace-temps courbe qui reflète la présence d'un champ gravitationnelle classique représenté par une connexion de Poincaré externe est considéré dans une structure géométrique de fibré de Hilbert [38]. L'interaction forte est représentée par une connexion interne de de Sitter.

Dans le premier chapitre, nous introduisons le modèle géométro-différentiel de la particule étendue (à symétrie de Poincaré) en le comparant avec le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique. En particulier, Les similitudes et différences ont été mises en relief. Ceci justifie le modèle géométro-différentiel par la considération d'une symétrie interne de de Sitter au lieu de l'interaction harmonique. Le deuxième chapitre, contient un rappel du groupe de de Sitter, de la quantification par les méthodes des représentations induites et géométro-stochastique ainsi que les systèmes d'imprimitivité et de covariance. Dans le troisième chapitre, nous construisons un modèle de la particule étendue à symétrie interne de de Sitter où le mode externe n'est pas relativiste. Le cas relativiste fait l'objet du quatrième chapitre. Nous terminons avec une conclusion où nous résumons l'ensemble des résultats obtenus et nous donnons les perspectives.

Chapitre 1

Modèle de l'oscillateur harmonique relativiste et modèle géométro-différentiel de la particule étendue

Résumé

Les fonctions d'onde jouent un rôle central dans la construction des théories et modèles physiques. Nous allons présenter deux modèles décrivant les états du hadron à savoir, le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique et le modèle géométro-différentiel de la particule étendue à symétrie de Poincaré. Le premier modèle décrit le hadron comme un système quark-antiquark interagissant par un potentiel harmonique. Dans le deuxième modèle, ce système est vu comme deux modes quantiques ponctuels en mouvement libre dans des espaces externe et interne de Minkowski. Ces deux modes sont quantifiés par la méthode des représentations induites. L'intérêt est porté sur la construction des états et leurs interprétations. En particulier, notre intérêt pour le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique réside dans sa structure interne qui est aussi décrite par une représentation unitaire du groupe de Poincaré.

1.1 Introduction

La description de la structure interne spatio-temporelle du hadron par des modèles de l'oscillateur harmonique relativistes, date des travaux de Yukawa [39] suivis des travaux de Feynman et *al* [40] et plus récemment par Kim et Noz [5].

Dans le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique [5, 7, 8], le hadron est vu comme un objet étendu qui consiste en un système quark-antiquark interagissant par un potentiel harmonique. Les états liés du hadron peuvent s'écrire avec les variables du centre de masse et du mouvement relatif x et ξ , respectivement, comme un champ bilocal $\phi(x, \xi)$. La variable du centre de masse décrit le mouvement du hadron dans l'espace-temps externe de Minkowski. La variable ξ décrit le mouvement interne des constituants. Ces deux variables sont soumises aux transformations de Poincaré. La fonction d'onde $\phi(x, \xi)$ peut s'écrire comme un produit, d'une partie externe $f(x)$ et d'une partie interne $\psi(\xi)$. La partie externe, est une solution d'une équation de Klein-Gordon. La partie interne, est une solution normalisable de l'équation différentielle linéaire de l'oscillateur harmonique relativiste de Feynman et *al* [40]. Ces solutions forment une représentation unitaire du groupe de Poincaré.

D'autre part, le modèle géométro-différentiel tente de décrire le hadron comme un objet étendu par une structure géométrique de fibré [27, 30, 31]. Contrairement au modèle de l'oscillateur harmonique relativiste, le hadron est conçu comme étant composé de deux modes quantiques ponctuels plutôt que de sous-particules. Un mode externe, qui peut décrire le mouvement du centre de masse x localisé dans un espace-temps externe et un mode interne décrivant les degrés de liberté internes des quarks dans un espace-temps interne. Ces deux modes ont été quantifiés par la méthode des représentations induites pour les symétries de Galilée, de de Sitter et de Poincaré [36]. Les éléments du fibré sont alors, l'espace-temps externe (la variété de base), un espace de Hilbert des états internes (la fibre) et une représentation induite $U(G)$ du groupe de symétrie G de l'espace-temps interne (le groupe structural). La section du fibré $\Psi_x(\xi)$ décrit les états internes qui se transforment par la représentation $U(G)$. Les probabilités sont données par une fonctionnelle $X[\Psi_x(\xi)]$ choisie comme un champ bilocal $\Psi(x, \xi)$ qui décrit les états du hadron.

Dans [27], un modèle géométo-différentiel d'une particule étendue à symétrie de de Sitter décrivant une théorie de jauge de l'interaction forte des hadrons a été construit. La courbure R de l'espace-temps de de Sitter V_4^R correspond à l'interaction harmonique dans le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique. En absence d'interaction $R \rightarrow \infty$ (contraction), l'espace-temps V_4^R devient celui de Minkowski M et la symétrie celle de Poincaré [41].

Le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique a permis de donner une relation masse spin acceptable pour le spectre de masse des hadrons et possède beaucoup d'autres applications [5]. Dans le modèle géométo-différentiel, on s'intéresse à la propagation des objets étendus dans des espaces-temps plans et courbes. Bien que ces modèles décrivent des aspects différents du hadron, ils présentent des similarités. Le but du présent travail, est d'introduire le modèle géométo-différentiel de la particule étendue (à symétrie de Poincaré) en le comparant au modèle relativiste de l'oscillateur harmonique. Les difficultés et les similitudes des deux modèles sont présentées. L'intérêt est porté sur la construction des états et leurs interprétations. En particulier, notre intérêt pour le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique réside dans sa structure interne qui est aussi décrite par une représentation unitaire du groupe de Poincaré.

Dans le deuxième paragraphe, le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique est introduit. Les représentations du groupe de Poincaré de l'oscillateur harmonique et les interprétations des fonctions d'onde sont considérées dans le troisième paragraphe. Dans le quatrième paragraphe, le modèle géométo-différentiel de la particule étendue est introduit comme une généralisation du modèle de l'oscillateur harmonique, bien qu'à l'origine, il fut développé indépendamment de ce dernier. En particulier, la quantification par la méthode des représentations induites du groupe de Poincaré est brièvement rappelée, la structure géométrique du modèle est présentée et la propagation de la particule étendue est considérée dans cette structure. La conclusion est donnée dans le cinquième paragraphe.

1.2 L'oscillateur harmonique relativiste

Les variables du centre de masse x et du mouvement relatif ξ , s'expriment en fonction des coordonnées x_1 et x_2 du premier et du deuxième quark constituant le hadron comme suit [5]

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (1.2.1)$$

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad (1.2.2)$$

Le champ bilocal $\phi(x, \xi)$ qui décrit les états du hadron est une solution de l'équation différentielle (m_0 est un paramètre de masse)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} - \xi_i^2 \right) \right] \phi(x, \xi) = 0 \quad (1.2.3)$$

et peut s'écrire comme un produit

$$\phi(x, \xi) = f(x) \psi(\xi) \quad (1.2.4)$$

La fonction $f(x)$ décrivant le mouvement du centre de masse du hadron dans un espace-temps de Minkowski externe obéit à une équation de Klein-Gordon (λ est une constante de séparation des variables)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m_0^2 - (\lambda + 1) \right) f(x) = 0 \quad (1.2.5)$$

Ces dernières fonctions, prennent la forme d'une onde plane avec la variable P qui désigne le quadri-vecteur impulsion du hadron

$$f(x) = \exp \pm iPx \quad (1.2.6)$$

La valeur propre λ se détermine à partir de la résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique relativiste [5] que vérifie la partie interne $\psi(\xi)$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} + \xi_i^2 \right) \psi(\xi) = (\lambda + 1) \psi(\xi) \quad (1.2.7)$$

A présent, considérons le mouvement du hadron avec une vitesse v dans la direction x_3 qui est aussi la direction de la variable interne ξ_3 [5]. Les coordonnées de la variable interne ξ

dans le repère du laboratoire sont liées aux coordonnées ξ' dans le repère lié au hadron par une transformation (un boost) de Lorentz v_{L_3}

$$\begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 \\ \xi'_2 = \xi_2 \\ \xi'_3 = \frac{(\xi_3 - v\tau)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \tau' = \frac{\left(\tau - \frac{v}{c^2}\xi_3\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{cases} \quad (1.2.8)$$

L'équation différentielle (1.2.7) peut s'écrire sous une forme manifestement invariante dans une transformation de Lorentz

$$\left[-\nabla_{\xi'}^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} + \left[(\xi')^2 - \tau'^2 \right] \right] \psi(\xi') = (\lambda + 1) \psi(\xi') \quad (1.2.9)$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle contient des états normalisables et des états non-normalisables. Les solutions normalisables s'écrivent en fonction des coordonnées de la variable interne ξ' et les polynômes d'Hermite comme suit [5] (a, b, n, k sont des nombres entiers) :

$$\psi_v(\xi') = \left(\frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{(a+b+n+k)} \left[\frac{1}{a!b!n!k!} \right]^{\frac{1}{2}} H_a(\xi'_1) H_b(\xi'_2) H_n(\xi'_3) \quad (1.2.10)$$

$$\times H_k(\tau') \exp \left[-\frac{1}{2} (\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2 + \tau'^2) \right] \quad (1.2.11)$$

avec

$$\lambda = a + b + n - k \quad (1.2.12)$$

Pour une valeur donnée λ , il y' a une infinité de combinaisons possibles des nombres quantiques a, b, n et k à cause du signe $(-)$ de k . Ces solutions sont de dimensions infinies. Les solutions de dimensions finies vérifient la condition [5]

$$P^i \left(\xi'_i + \frac{\partial}{\partial \xi'_i} \right) \psi_v(\xi') = 0 \quad (1.2.13)$$

qui est équivalente à poser $k = 0$ dans la relation (1.2.12). La valeur propre

$$\lambda = a + b + n \quad (1.2.14)$$

correspond alors à un nombre fini des valeurs (a, b, n) et les solutions prennent la forme

$$\begin{aligned} \psi_v^{abn}(\xi') &= \left(\frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{(a+b+n)} \left[\frac{1}{a!b!n!}\right]^{\frac{1}{2}} H_a(\xi'_1) H_b(\xi'_2) H_n(\xi'_3) \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2 + \tau'^2)\right] \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

La condition (1.2.13) a pour effet de sélectionner, parmi les solutions normalisables, celles qui sont finies en éliminant les excitations dans la direction temporelle [5]. A l'exception du temps qui apparaît dans la gaussienne cette solution est celle d'un oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions. Ces fonctions d'onde forment une base pour la construction des représentations unitaires et irréductibles du groupe de Poincaré [5, 7, 8].

1.3 Les représentations de Poincaré de l'oscillateur harmonique et interprétations des fonctions d'onde

Pour une particule ponctuelle, le groupe de Poincaré externe P transforme les points x de l'espace-temps de Minkowski M par une translation a et une transformation de Lorentz l

$$x' = g(a, l) x = lx + a \quad (1.3.1)$$

Les transformations de Lorentz peuvent s'écrire comme le produit d'une rotation r et d'un boost de vitesse v_L et laissent invariant le produit scalaire

$$\eta_{ij} x^i x^j, \quad \eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.3.2)$$

$$i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (1.3.3)$$

Pour l'oscillateur harmonique, les coordonnées des deux variables, externe x et interne ξ définies respectivement par les relations (1.2.1) et (1.2.2), sont soumises aux transformations de Poincaré. Cependant, pour une translation, la variable externe se transforme selon $x \rightarrow x + a$ alors que la variable interne est invariante. Les générateurs des translations et des transformations de Lorentz applicables à la partie externe et interne du champ bilocal $\psi(x, \xi)$ prennent la forme suivante, respectivement [5]

$$P_i = i \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad L_{ij}^* = -i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad (1.3.4)$$

$$L_{ij} = -i \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi^j} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right) \quad (1.3.5)$$

Les dix générateurs applicables au système (quark-antiquark) constituent l'ensemble des générateurs des translations P_i et des générateurs des transformations de Lorentz précédents qui peuvent s'écrire sous la forme [5, 7]

$$M_{ij} = L_{ij}^* + L_{ij} \quad (1.3.6)$$

Ces générateurs vérifient l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré

$$[P_i, P_k] = 0 \quad (1.3.7)$$

$$i[P_i, M_{jk}] = \eta_{ik}P_j - \eta_{ij}P_k \quad (1.3.8)$$

$$i[M_{ij}, M_{kl}] = \eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jl}M_{ik} - \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jk}M_{il} \quad (1.3.9)$$

Les deux casimirs du groupe de Poincaré

$$\begin{aligned} P^2 &= P_i P^i \\ W^2 &= W_i W^i, \quad W_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} P_j M_{kl} \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

commutent avec tous les éléments de l'algèbre de Lie du groupe. La masse $M = m_0^2 + (\lambda + 1)$ est associée au premier casimir. La valeur propre $M^2 \ell (\ell + 1)$ est associée au deuxième casimir.

La partie spatiale de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (1.2.9) est séparable en coordonnées sphériques [5]

$$\begin{aligned} r' &= [\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2]^{\frac{1}{2}} \\ \cos \theta' &= \frac{\xi_3'}{r'} \\ \tan \phi' &= \frac{\xi_2'}{\xi_1'} \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

En tenant compte de la condition (1.2.13), les solutions (1.2.15) s'écrivent en termes des fonctions radiales $R_\mu^\ell(r')$ (les $L_\mu^{\ell+\frac{1}{2}}(r'^2)$ sont les fonctions de Laguerre associées)

$$R_\mu^\ell(r') = \left[\frac{2(\mu!)}{\Gamma(\mu + \ell + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} r'^\ell L_\mu^{\ell+\frac{1}{2}}(r'^2) e^{-\frac{r'^2}{2}} \quad (1.3.12)$$

de l'oscillateur harmonique à trois dimensions et des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$\psi_{v\lambda\ell}^m(\xi') = R_\mu^\ell(r') Y_l^m(\theta', \phi') \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp -\frac{\tau'^2}{2} \quad (1.3.13)$$

$$\lambda = 2\mu + \ell \quad (1.3.14)$$

Ces solutions se construisent comme les vecteurs propres des deux casimirs et de l'opérateur d'hélicité, projection du spin dans la direction du mouvement, avec les valeurs propres correspondantes. Le nombre quantique ℓ représente le moment angulaire intrinsèque du hadron (spin) dû au mouvement interne des quarks (scalaire). Le nombre quantique m est la valeur propre de l'opérateur d'hélicité qui est dans ce cas L_3

$$P^2 \phi(x, \xi) = M \phi(x, \xi) \quad (1.3.15)$$

$$W^2 \phi(x, \xi) = M^2 \ell(\ell + 1) \phi(x, \xi) \quad (1.3.16)$$

$$L_3 \phi(x, \xi) = m \phi(x, \xi) \quad (1.3.17)$$

L'interprétation physique des fonctions

$$\phi(x, \xi) = \exp \pm i(xP) \psi_{v\lambda\ell}^m(\xi) \quad (1.3.18)$$

est la suivante: elles décrivent des états libres du hadron avec une impulsion bien définie et une structure interne (extension) spatio-temporelle correspondant à une représentation unitaire et irréductible du groupe de Poincaré. Le problème avec ces fonctions d'onde est qu'elles ne possèdent pas une interprétation probabiliste [5] et [8, 42, 43]. En effet, la partie interne est normalisable avec une intégrale sur l'espace mais aussi sur le temps ce qui implique la possibilité de création (ou de disparition) spontanée de la particule.

1.4 Particule étendue à symétrie de Poincaré

Dans le modèle de l'oscillateur harmonique, le système quark-antiquark a été décrit par les coordonnées x et ξ en supposant qu'un seul groupe de Poincaré agit sur les deux variables. Cependant, on sait que la coordonnée du centre de masse x est repérée par rapport au laboratoire et que la coordonnée interne peut être écrite dans un système de référence lié au hadron et indépendant de celui du laboratoire. Par conséquent, nous considérons non

pas un seul groupe de Poincaré mais deux, l'un externe et l'autre interne. Dans ce cas, les translations internes signifient que l'origine du système de référence interne ne coïncide pas obligatoirement avec le centre de masse du hadron. De plus, la particule étendue est composée de modes quantiques locaux assurant un confinement naturel dans l'espace interne du hadron (contrairement aux sous-particules, les modes qui leur sont totalement semblables ne sont pas observables hors de la particule, même en principe). L'avantage de ce point de vue est que la structure naturelle de l'espace des états est un fibré $E(M, H^D, U)$ dont la base est l'espace-temps externe, la fibre est l'espace H^D des états internes $\Psi_x(\xi)$ et le groupe structural est la représentation $U(P')$ du groupe de Poincaré interne. En effet, cette structure est capable d'inclure l'interaction comme un champ de jauge. Dans cette section, nous ne considérons pas l'interaction pour nous concentrer sur la quantification par la méthode des représentations induites qui sera d'abord présentée dans le cas des particules ponctuelles [35, 36].

Pour décrire une particule ponctuelle, la méthode des représentations induites se base sur le fait que le quotient du groupe de Poincaré P par rapport à son sous-groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ est isomorphe à l'espace-temps de Minkowski $M = P/\mathcal{L}$ doté d'une mesure invariante $dx = d^4x$. Ceci permet d'obtenir la représentation réductible de configuration $U(a, l)$ à partir de la représentation irréductible $D(\mathcal{L})$ du sous-groupe de Lorentz. Son action sur un état $\hat{\psi}(x)$ appartenant à l'espace de Hilbert H^D s'écrit

$$\left[U(a, l) \hat{\psi} \right] (x) = D(l) \hat{\psi}(l^{-1}(x - a)) \quad (1.4.1)$$

La masse m et le spin σ d'une particule caractérisent une représentation unitaire et irréductible $U^{m\sigma}(a, l)$ du groupe de Poincaré qui se construit dans l'espace des impulsions V_m^+ (la partie supérieure de l'hyperboloïde de masse)⁽¹⁾

$$V_m^+ = \{k \in \mathbb{R}^4 / \eta_{ij} k^i k^j = m^2, k^0 > 0\} \quad (1.4.2)$$

L'espace des impulsions peut être vu comme un espace homogène isomorphe au quotient $V_m^+ = P/(T \otimes R)$ du groupe de Poincaré externe à son sous-groupe $T \otimes R$, produit semi-direct des translations de l'espace-temps T et des rotations tridimensionnelles R avec une

⁽¹⁾Pour simplifier, nous ne considérons que les particules décrites par V_m^+ . Les antiparticules correspondent à $V_m^- = \{k \in \mathbb{R}^4 / \eta_{ij} k^i k^j = m^2, k^0 < 0\}$, la partie inférieure de l'hyperboloïde de masse, et apparaîtront dans le propagateur.

mesure invariante $d\Omega = d^3k/2k^0$. La représentation $U^{m\sigma}(a, l)$ s'obtient à partir de la représentation unitaire et irréductible $\Delta^{m\sigma}(ar)$ du sous-groupe $T \otimes R$.

L'action de la représentation induite $U^{m\sigma}(a, l)$ sur les fonctions $\varphi^{m\sigma}(\zeta)$ appartenant à l'espace de Hilbert $H^{m\sigma}$ est donnée par la relation suivante :

$$[U^{m\sigma}(a, l) \varphi^{m\sigma}](k) = \exp(ia.k) \Delta^\sigma[(l, l^{-1}k)_R] \varphi^{m\sigma}(l^{-1}k) \quad (1.4.3)$$

où $(l, l^{-1}k)_R$ est une rotation de Wigner. L'espace H^D est réductible, il est susceptible de décrire des états localisés $\hat{\psi}(x)$ de masse et de spin indéfinis. Par contre, les états $\varphi^{m\sigma}(k)$ appartenant à l'espace de Hilbert irréductible $H^{m\sigma}$ décrivent des particules de masse et de spin bien définis et s'interprètent comme des états matériels ou réels. L'opérateur de commutation $J^{m\sigma}$ nous permet de passer d'un état localisé $\hat{\psi}(x)$ vers un état matériel $\varphi^{m\sigma}(k)$ et correspond à un processus de matérialisation des états localisés (J^σ est une matrice constante et l_k un boost de Lorentz)

$$[J^{m\sigma} \hat{\psi}](k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_M d^4x \exp(ik.x) J^\sigma D(l_k^{-1}) \hat{\psi}(x) \quad (1.4.4)$$

Le passage inverse se réalise à l'aide de l'opérateur de commutation $I^{m\sigma}$ qui fait passer d'un état $\varphi^{m\sigma}(k)$ vers un état $\hat{\psi}^{m\sigma}(x)$ et qui s'interprète comme un processus de localisation des états matériels (I^σ est une matrice constante)

$$[I^{m\sigma} \varphi^{m\sigma}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{V_m^+} d\Omega(k) \exp(-ik.x) D(l_k) I^\sigma \varphi^{m\sigma}(k) \quad (1.4.5)$$

La combinaison $\Pi^{m\sigma} = I^{m\sigma} J^{m\sigma}$ d'une matérialisation suivie d'une localisation définit une propagation du mode externe

$$[\Pi^{m\sigma} \hat{\psi}](x) = \int dx' \Pi^{m\sigma}(x - x') \hat{\psi}(x') \quad (1.4.6)$$

avec [36]

$$\Pi^{m\sigma}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_m^+} d\Omega(k) \exp[ik.(x - x')] S^\sigma(l_k) \quad (1.4.7)$$

$$S^\sigma(l_k) = D(l_k) J^\sigma I^\sigma D(l_k^{-1}) \quad (1.4.8)$$

Le propagateur obtenu correspond aux particules évoluant dans le futur, il est noté avec un signe (+). La propagation des antiparticules (-) a lieu dans le passé. Le propagateur

causal peut s'obtenir alors en utilisant la fonction de Heaviside θ

$$\Pi^c(x - x') = \theta(x - x') \Pi^{m\sigma+}(x - x') + \theta(x' - x) \Pi^{m\sigma-}(x - x') \quad (1.4.9)$$

Maintenant, nous allons utiliser cette procédure pour une particule étendue décrite par un champ bilocal $\psi(x, \xi)$ qui peut s'écrire comme un produit [27]

$$\Psi(x, \xi) = \hat{\psi}(x) \Psi_x(\xi) \quad (1.4.10)$$

comme dans le modèle de l'oscillateur harmonique. La partie interne $\Psi_x(\xi)$ correspond à un mode interne localisé au point ξ de l'espace-temps interne de Minkowski M' de la particule étendue. La partie externe $\hat{\psi}(x)$, qui correspond au mode externe localisé au point x de l'espace de Minkowski externe M , décrit le mouvement du centre de masse et obéit aux lois de la mécanique quantique habituelle. La quantification des deux modes, de masses m et μ et de spins σ et s , est réalisée par la méthode des représentations induites [36] pour les symétries de Poincaré, externe et interne. Pour cela, en plus du fibré $E(M, H^D, U)$, on a besoin des fibrés $E_{\mu s}(M, H^{\mu s}, U^{\mu s})$, $E^{m\sigma}(V_m^+, H^D, U)$ et $E_{\mu s}^{m\sigma}(V_m^+, H^{\mu s}, U^{\mu s})$ pour étudier la propagation de la particule étendue. Il est question de définir le passage de la fonction $\Psi(x, \xi)$ du fibré configuration-configuration E vers une fonction $\Psi_{\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta)$ du fibré impulsion-impulsion $E_{\mu s}^{m\sigma}$ qui s'interprète comme une matérialisation ($\zeta \in C^{\mu+}$ l'espace des impulsions internes). Elle sera suivie d'une localisation complète des états matériels $\Psi_{\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta) \rightarrow \Psi_{\mu s}^{m\sigma}(x, \xi) \in E$ qui s'interprète comme une localisation de la particule étendue. Par exemple, une matérialisation des états complètement localisés $\Psi(x, \xi)$ peut s'effectuer selon la voie suivante :

$$E \rightarrow E^{m\sigma} \rightarrow E_{\mu s}^{m\sigma} \quad (1.4.11)$$

$$\Psi(x, \xi) \rightarrow \Psi^{m\sigma}(k, \xi) \rightarrow \Psi_{\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta) \quad (1.4.12)$$

D'autre part, la localisation des états complètement matériels $\psi_{\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta)$ peut s'effectuer selon la voie

$$E_{\mu s}^{m\sigma} \rightarrow E_{\mu s} \rightarrow E \quad (1.4.13)$$

$$\Psi_{\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta) \rightarrow \Psi_{\mu s}^{m\sigma}(x, \zeta) \rightarrow \Psi_{\mu s}^{m\sigma}(x, \xi) \quad (1.4.14)$$

La combinaison d'une matérialisation complète des états localisés $\psi(x, \xi)$ suivie d'une localisation complète des états matériels $\psi_{\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta)$ définit une propagation de la particule

étendue. Cette propagation est décrite par la relation suivante :

$$\Psi_{\mu s}^{m\sigma}(x', \xi') = \int_{M, M'} d^4x d^4\xi \Pi_{\mu s}^{m\sigma}(x, \xi; x', \xi') \Psi(x, \xi) \quad (1.4.15)$$

où le propagateur total

$$\Pi_{\mu s}^{m\sigma} = \Pi_{\mu s}(x', x) \Pi^{m\sigma}(\xi', \xi) \quad (1.4.16)$$

est un produit du propagateur interne et du propagateur externe ponctuels (1.4.7). Ce processus peut se réaliser selon plusieurs voies toutes commençant dans E et finissant dans E . Notons aussi qu'il peut se réaliser sans passer par un état complètement matériel, contrairement au cas ponctuel. En fait, n'importe quel chemin passant par l'espace des états complètement matériels $E_{\mu s}^{m\sigma}$ décrit la même propagation.

Le produit scalaire défini sur le fibré configuration peut s'écrire sous la forme [27]

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle &= \int_{M, M'} d^4x d^4\xi \langle \Psi_1(x, \xi) | \Psi_2(x, \xi) \rangle \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

$$= \int_{M, M'} d^4x d^4\xi \langle \psi_1(x) | \psi_2(x) \rangle \langle \Psi_{1x}(\xi) | \Psi_{2x}(\xi) \rangle \quad (1.4.18)$$

et se sépare dans l'espace-temps externe et l'espace interne. Il est défini par une intégrale sur le temps qui ne possède pas une interprétation probabiliste. De même dans le fibré impulsions nous avons [27]

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{1\mu s}^{m\sigma} | \Psi_{2\mu s}^{m\sigma} \rangle &= \int_{V_m^+, C^{\mu+}} d\Omega(k) d\Omega(\zeta) \langle \Psi_{1\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta) | \Psi_{2\mu s}^{m\sigma}(k, \zeta) \rangle \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

$$= \int_{V_m^+, C^{\mu+}} d\Omega(k) d\Omega(\zeta) \langle \varphi_1^{m\sigma}(k) | \varphi_2^{m\sigma}(k) \rangle \langle \Phi_{1,\mu s}(\zeta) | \Phi_{2,\mu s}(\zeta) \rangle \quad (1.4.20)$$

Ce produit scalaire peut s'interpréter comme l'amplitude de probabilité de trouver la particule étendue avec un mode externe d'impulsion k et un mode interne avec une impulsion interne ζ .

1.5 Conclusion

Nous avons présenté deux modèles relativistes décrivant les états du hadron par un champ bilocal avec les variables du centre de masse et du mouvement relatif correspondant. Dans le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique, le champ bilocal $\phi(x, \xi)$ peut s'écrire comme produit d'une partie externe et d'une partie interne, $f(x)$ et $\psi_{v\lambda\ell}^m(\xi)$ respectivement. La partie externe $f(x)$ obéit à une équation de Klein-Gordon et décrit le mouvement du centre de masse x dans un espace-temps externe de Minkowski. La partie interne $\psi_{v\lambda\ell}^m(\xi)$ est une solution normalisable de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique relativiste de Feynman et *al* [40]. Ces solutions forment une base pour la construction des représentations unitaires du groupe de Poincaré.

Cette décomposition du champ bilocal $\Psi(x, \xi) = \hat{\psi}(x) \Psi_x(\xi)$ est considérée dans le modèle géométrique-différentiel comme un cas particulier où l'interaction n'est pas prise en compte. La partie externe décrit le mouvement du centre de masse et correspond à un mode quantique externe évoluant dans un espace-temps externe de Minkowski. La partie interne $\Psi_x(\xi)$ décrit le mouvement relatif du mode interne composant la particule étendue dans un espace-temps interne de Minkowski. Les deux modes sont quantifiés par la méthode des représentations induites pour la symétrie de Poincaré [36].

Nous avons indiqué que le mouvement externe de l'oscillateur harmonique relativiste, décrit par la fonction scalaire $f(x)$ peut correspondre à un mode scalaire externe massif décrit par la fonction d'onde $\hat{\psi}(x)$ dans le modèle géométrique-différentiel. En ce qui concerne le mouvement interne des deux modèles, il paraît différent même si la structure interne spatio-temporelle du modèle relativiste de l'oscillateur harmonique est décrite dans l'espace interne par une représentation unitaire et irréductible du groupe de Poincaré spécifiée par les paramètres de masse $M = m_0^2 + (\lambda + 1)$ et de spin ℓ . En effet, il est plus difficile d'établir une correspondance directe entre les fonctions $\psi_{v\lambda\ell}^m(\xi)$ et les fonctions $\Psi_x(\xi)$. Il faut remarquer que la fonction $\Psi_x(\xi)$ définie dans l'espace-temps interne est normalisable et se transforme par une représentation configuration réductible du groupe de Poincaré. La composante irréductible est non-normalisable [36]. Il est tentant de voir si l'on peut décrire le mouvement interne du modèle géométrique-différentiel par les fonctions d'onde interne de

l'oscillateur harmonique étant donné le succès de ce dernier. Cette question fera l'objet d'un autre travail.

Pour l'instant, notons que bien que les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique relativiste ne possèdent pas une interprétation probabiliste, ce modèle présente de nombreuses applications dont l'étude des déformations des hadrons [5]. Cette même difficulté ne nuit pas au modèle géométrique-différentiel tant que l'on s'intéresse à la propagation du mode interne car sa localisation dans l'espace interne n'est pas directement accessible par les processus de mesure (à notre connaissance, il n'y a pas de procédure expérimentale qui puisse déterminer la position d'un mode interne). Par contre, le problème de la localisation de la particule étendue dans l'espace-temps externe reste posé. Dans le chapitre suivant, nous présentons une autre méthode de quantification (stochastique) qui permet de surmonter cette difficulté. De plus, nous présentons la quantification par la méthode des représentations induites pour le groupe de de Sitter qui constituera la symétrie de l'espace interne dans les prochains chapitres (ainsi l'interaction du modèle de l'oscillateur harmonique sera remplacée par la courbure de l'espace-temps interne de de Sitter).

Chapitre 2

Quantification par les représentations induites et quantification géométro-stochastique

Résumé

Nous allons présenter deux méthodes de quantification, à savoir la méthode des représentations induites (qui a été déjà présentée pour la symétrie de Poincaré) et la théorie quantique (géométro-)stochastique. La première permet de construire la théorie quantique relativiste des particules ponctuelles. Dans le cas présent, l'espace-temps et l'espace des impulsions sont ceux de de Sitter. La théorie quantique stochastique, traite du problème de localisation des particules dans l'espace-temps et semble le résoudre dans un espace des phases stochastique. La localisation des particules est alors décrite par des systèmes de covariances. Le cas non-relativiste est d'abord présenté ensuite généralisé au cas relativiste pour une symétrie de Poincaré.

2.1 Introduction

En introduisant le modèle géométro-différentiel de la particule étendue, nous avons quantifié les deux modes externe et interne composant la particule par la méthodes des représentations

induites [36] pour une symétrie de Poincaré externe et interne. Nous allons reprendre cette méthode en gardant à l'esprit qu'elle sera utilisée pour une symétrie interne de de Sitter seulement. Le mode externe, sera quantifié par la théorie quantique stochastique.

Rappelons que la méthode des représentations induites est basée sur la commutation des représentations configuration réductible et de la représentation impulsion irréductible, et permet d'obtenir le propagateur libre des particules ponctuelles. La théorie quantique stochastique [23, 24] traite du problème de localisation et attribue une extension stochastique aux particules due aux imperfections des appareils de mesure.

Le groupe de de Sitter et les espaces de configuration et impulsions sur lesquels ce dernier agit comme un groupe de transformations font l'objet du deuxième paragraphe. Nous donnons la classification des représentations unitaires et irréductibles du groupe de de Sitter ainsi que leurs contractions vers celles du groupe de Poincaré (massif et de masse nulle) quand elles existent. La méthode des représentations induites et son lien avec les systèmes d'imprimitivité est brièvement revue [23, 26].

L'idée de base de la théorie stochastique [23, 24] est que toute mesure est entachée d'erreurs dues aux imperfections (irréductibles) des appareils de mesures et ceci doit être considéré dans la construction de la théorie. Sa généralisation, la théorie géométro-stochastique, est fondée sur trois principes. Le principe d'indétermination irréductible lié aux processus de mesure. Le principe de l'information quantique complète assure l'existence d'un procédé de mesure qui permet de déterminer complètement l'état du système physique. Le troisième principe est celui de la relativité générale quantique qui spécifie la structure géométrique en fibré.

La théorie géométro-stochastique est ainsi basée sur deux composantes. La composante stochastique est liée aux processus de mesure et traite de la localisation et de l'extension des particules. La localisation est décrite par des opérateurs à valeur positive (POV) qui ne sont plus des projections orthogonales (la particule n'est plus parfaitement localisée). L'extension est attribuée au caractère statistique de la mesure. En fait, on mesure des fluctuations autour de la position de la particule qui paraît ainsi stochastiquement étendue.

La composante géométrique est basée sur la définition opérationnelle de l'espace-temps (comme dans la relativité générale) où les repères d'inertie classiques sont remplacés par des

repères quantiques locaux permettant ainsi de définir un espace-temps quantique unifiant la relativité générale et la mécanique quantique dans une structure géométrique de fibré de Hilbert. Dans le troisième paragraphe, la théorie quantique (géométro-)stochastique est présentée dans le cas non relativiste. Ensuite, généralisée au cas relativiste pour la symétrie de Poincaré. La conclusion est donnée dans le quatrième paragraphe.

2.2 Symétrie de de Sitter

Les espaces de dimension quatre possèdent un groupe de symétrie à dix générateurs [44]. Ces espaces symétriques sont caractérisés par un rayon de courbure constante R . Les espaces-temps de de Sitter et de Minkowski sont des exemples de tels espaces. Ce sont des solutions de l'équation d'Einstein dans le vide [44]. Les groupes de symétries correspondant sont respectivement, les groupes de de Sitter $G = SO(4, 1)$ et de Poincaré $P = T \otimes \mathcal{L}$ (un produit semi-direct des sous-groupes des translations de l'espace-temps T et de Lorentz $\mathcal{L}$).

L'espace-temps de Minkowski M est un espace homogène isomorphe au quotient du groupe de Poincaré à son sous-groupe de Lorentz $\mathcal{L}$

$$M = P/\mathcal{L} \quad (2.2.1)$$

c'est un espace à courbure nulle (un espace plan) $R = 0$. L'espace-temps de de Sitter est un espace à courbure constante positive $R > 0$. A cause de la courbure de l'espace-temps de de Sitter, les générateurs des translations (boost de de Sitter) ne commutent pas, contrairement à ceux du groupe de Poincaré. Cette propriété est la source de difficultés de quantification dans l'espace-temps de de Sitter.

2.2.1 Les espaces de configuration et des impulsions

L'espace-temps de de Sitter V_4^R est un espace à quatre dimensions, qui peut être vu comme un hyperboloïde a une nappe dans un espace pseudo-euclidien à cinq dimensions $E_{1,4}$, de métrique $\eta_{ab} = \text{diag} (1, -1, -1, -1, -1)$, déterminée par la forme quadratique $[\xi, \xi]$ [28]

$$\xi \in V_4^R, \quad [\xi, \xi] = \eta_{a,b} \xi^a \xi^b = -R^2 \quad (2.2.2)$$

$$a, b = 0, 1, 2, 3, 5 \quad (2.2.3)$$

L'espace V_4^R peut aussi être vu comme une sphère (t a le sens d'une transposée)

$$(\boldsymbol{\xi})^2 + (\xi^5)^2 = (\xi^0)^2 + R^2 \quad (2.2.4)$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)^t \quad (2.2.5)$$

de rayon $\sqrt{(\xi^0)^2 + R^2}$ centré à l'origine dans l'hyperplan $(\boldsymbol{\xi}, \xi^5)$.

L'espace des impulsions de de Sitter C est caractérisé par des vecteurs $\tilde{\zeta}^\varepsilon = (\tilde{\zeta}^0, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \tilde{\zeta}^5)$ vérifiant

$$C = \left\{ \tilde{\zeta}^\varepsilon / \zeta^\varepsilon = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}^i \\ -\epsilon \end{pmatrix}, \eta_{ij} \tilde{\zeta}^i \tilde{\zeta}^j = 1, \tilde{\zeta}^0 > 0, \varepsilon = \pm 1 \right\} \quad (2.2.6)$$

$$i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.2.7)$$

Les composantes $\tilde{\zeta}^0$ et $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ sont les analogues de l'énergie et du vecteur impulsion de l'espace-temps de Minkowski, respectivement. La dernière composante est $\tilde{\zeta}^5 = -\varepsilon$.

Le groupe de de Sitter $G = SO(4, 1)$ est le groupe de transformations des espaces de configuration V_4^R et des impulsions C de de Sitter. Ses éléments g peuvent s'écrire comme un produit d'un boost de de Sitter ξ_T et d'une transformation Λ du sous-groupe de Lorentz $L = SO(3, 1)$

$$g = \xi_T \Lambda \quad (2.2.8)$$

Les espaces de configurations et des impulsions se comportent comme des espaces homogènes vis-a-vis de l'action du groupe de de Sitter. Le premier espace est isomorphe au quotient

$$V_4^R = SO(4, 1) / SO(3, 1) \quad (2.2.9)$$

du groupe de de Sitter à sons sous-groupe de Lorentz $L = SO(3, 1)$. Ce dernier laisse invariante l'origine des coordonnées⁽¹⁾ [28]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\xi}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ -R \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

⁽¹⁾Dans la méthode des représentations induites (voir plus loin), la référence [36] utilise une normalisation de l'origine qui est choisie comme étant $\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{R})^t$

Ceci permet de mettre en correspondance un point $\xi \in V_4^R$ avec un boost de de Sitter ξ_T représentant une classe de $SO(4, 1)/SO(3, 1)$. Tous les points $\xi \in V_4^R$ peuvent alors être atteints par l'application d'un boost de de Sitter ξ_T à l'origine ξ^0

$$\xi = \xi_T \xi^0 \quad (2.2.11)$$

D'autre part, l'espace des impulsions est isomorphe au quotient

$$C = SO(4, 1)/H \quad (2.2.12)$$

du groupe de de Sitter à sons sous-groupe H qui laisse invariante la direction $(e_0 - e_5) = (1, 0, 0, 0, -1)^t$. Les boosts de Lorentz $\zeta_L I_\varepsilon$ (où I_ε est une matrice diagonale avec des éléments $(1, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$) représentent la classe $SO(4, 1)/H$. Les vitesses sont alors obtenues de la façon suivante [36] :

$$\zeta_L I_\varepsilon (e_0 - e_5) = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}^i \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

Les représentants des points $g\xi \in V_4^R$ et $g\zeta \in C$ sont reliés aux éléments $(g, \xi)_L$ et $(g, \zeta)_H$ appartenant aux sous-groupes L et H , respectivement par les relations suivantes [36] :

$$(g\xi)_T = g\xi_T (g, \xi)_L^{-1}, \quad (g\zeta)_L I_\varepsilon = g\zeta_L I_\varepsilon (g, \zeta)_H^{-1} \quad (2.2.14)$$

Les éléments $(g, \xi)_L$ et $(g, \zeta)_H$ forment un systèmes de facteurs.

La décomposition d'Iwazawa [45, 36] permet de décomposer le groupe de de Sitter $G = SO(4, 1)$ en trois sous-groupes

$$G = KAN \quad (2.2.15)$$

$K = SO(4)$ est le sous-groupe compact maximal du groupe de de Sitter dont les éléments η_k peuvent s'écrire sous la forme [36]

$$\eta_k = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^t}{1+n} & -\mathbf{n} \\ 0 & \mathbf{n}^t & n \end{pmatrix} \quad (2.2.16)$$

Le vecteur $(\mathbf{n}^t, n)$ appartient à la surface S^3 à trois dimensions. Les éléments τ_A du sous-groupe abélien A sont paramétrés par la variable $\tau \in \mathbb{R}$ [36]

$$\tau_A = \begin{pmatrix} \cosh \tau & \mathbf{0}^t & \sinh \tau \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \sinh \tau & \mathbf{0}^t & \cosh \tau \end{pmatrix} \quad (2.2.17)$$

Les éléments a_T du sous-groupe N sont déterminés par le vecteur tridimensionnel $\mathbf{a}$ [36]

$$a_T = \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{a}^2/2 & -\mathbf{a}^t & \mathbf{a}^2/2 \\ -\mathbf{a} & \mathbf{1} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a}^2/2 & -\mathbf{a}^t & 1 + \mathbf{a}^2/2 \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

et tous les points $\xi \in V_4^R$ peuvent alors s'obtenir par l'application des éléments $\tau_A a_T I_\epsilon \in SO(4, 1)$ à l'origine [36] ξ^+

$$\begin{aligned} \xi &= \tau_A a_T I_\epsilon \xi^+ \\ \xi^+ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ +R \end{pmatrix} \\ I_\epsilon &= \begin{cases} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \epsilon = -1 \\ I_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \epsilon = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

L'application des éléments $a_T I_\epsilon$ ($\epsilon = \pm 1$) à l'origine ξ^+ engendre ce qu'on appelle des horosphères fondamentales. Un espace qui passe par l'origine ξ^+ ($\epsilon = +1$) et l'autre passant par ξ^- ($\epsilon = -1$). Pour une valeur fixée du paramètre τ , les éléments $\tau_A a_T I_\epsilon$ déterminent une horosphère parallèle à l'une des horosphères fondamentales.

Les horosphères de première espèce $V_4^{R(+)}$, $V_4^{R(-)}$ désignent les familles d'horosphères parallèles à celles qui passent par ξ^+ et ξ^- , respectivement. Ces dernières sont définies par

[19]

$$\left| \left[\xi, \tilde{\zeta} \right] \right| = 1 \quad (2.2.21)$$

avec

$$\left[\xi, \tilde{\zeta} \right] = -1 \text{ pour celle qui passe par } \xi^+ \quad (2.2.22)$$

$$\left[\xi, \tilde{\zeta} \right] = +1 \text{ pour celle qui passe par } \xi^- \quad (2.2.23)$$

Pour un même vecteur $\tilde{\zeta} \in C$, les horosphères $H_{\tilde{\zeta}}^c$ définies par (c est une constante)

$$\left| \left[\xi, \tilde{\zeta} \right] \right| = c \quad (2.2.24)$$

sont parallèles à $H_{\tilde{\zeta}}^1$. La distance qui sépare l'horosphères $H_{\tilde{\zeta}}^1$ de l'origine ξ^0 est donnée par [19]

$$R \log (c) = \langle \xi, \tilde{\zeta} \rangle \quad (2.2.25)$$

Cette distance $\langle \xi, \tilde{\zeta} \rangle$ vérifie la relation suivante

$$\langle g\xi, \tilde{\zeta} \rangle = \langle \xi, g^{-1}\tilde{\zeta} \rangle + \langle g\tilde{\zeta}, \xi \rangle \quad (2.2.26)$$

avec le dernier terme $\langle g\tilde{\zeta}, \xi \rangle$ qui peut s'écrire sous la forme [19]

$$\langle g\tilde{\zeta}, \xi \rangle = -\langle g^{-1}\xi, g^{-1}\tilde{\zeta} \rangle \quad (2.2.27)$$

2.2.2 Classification des représentations irréductibles

Une transformation $g \in SO(4, 1)$ peut s'exprimer sous la forme exponentielle en termes des générateurs M_{ab} et paramètres $w^{ab} = -w^{ba}$ du groupe

$$g(w) = \exp \left(-\frac{i}{2} w^{ab} M_{ab} \right) \quad (2.2.28)$$

Les dix générateurs du groupe de de Sitter $M_{ab} = -M_{ba}$ vérifient les relations de commutations

$$i [M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ab} M_{cd} + \eta_{cd} M_{ab} - \eta_{ad} M_{bc} - \eta_{bc} M_{ad} \quad (2.2.29)$$

avec

$$M_{ab} = I_{ab} + S_{ab} \quad (2.2.30)$$

est une somme d'une partie moment orbital et spin, respectivement [17, 45]

$$I_{ab} = i \left(\xi_a \frac{\partial}{\partial \xi^b} - \xi_b \frac{\partial}{\partial \xi^a} \right) \quad (2.2.31)$$

$$S_{ab} = \frac{i}{4} [\gamma^a, \gamma^b], \gamma^a = (\gamma^\mu, \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \quad (2.2.32)$$

les γ^μ sont les matrices de Dirac. Le moment orbital satisfait aux mêmes relations de commutation que les générateurs de l'algèbre de de Sitter. En introduisant les générateurs des boosts de de Sitter [17]

$$\Pi_i = \frac{1}{R} M_{5i} = \frac{1}{R} L_{5i}; \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.2.33)$$

les relations de commutations (2.2.29) peuvent s'écrire sous la forme [17]

$$[\Pi_i, \Pi_k] = -\frac{1}{R^2} M_{ik} \quad (2.2.34)$$

$$i [\Pi_i, M_{jk}] = \eta_{ik} \Pi_j - \eta_{ij} \Pi_k \quad (2.2.35)$$

$$i [M_{ij}, M_{kl}] = \eta_{ik} M_{jl} + \eta_{jl} M_{ik} - \eta_{il} M_{jk} - \eta_{jk} M_{il} \quad (2.2.36)$$

qui fait apparaître les générateurs M_{ij} du sous-groupe de Lorentz. Ces relations de commutations deviennent, à la limite $R \rightarrow \infty$ ($\Pi_i \rightarrow P_i$), celles du sous-groupe de Poincaré [17]

$$[P_i, P_k] = 0 \quad (2.2.37)$$

$$i [P_i, M_{jk}] = \eta_{ik} P_j - \eta_{ij} P_k \quad (2.2.38)$$

$$i [M_{ij}, M_{kl}] = \eta_{ik} M_{jl} + \eta_{jl} M_{ik} - \eta_{il} M_{jk} - \eta_{jk} M_{il} \quad (2.2.39)$$

Le groupe de Sitter possède deux opérateurs de Casimir [45]

$$Q_1 = \frac{1}{2R^2} M_{ab} M^{ab} \quad (2.2.40)$$

$$Q_2 = W_a W^a, W_a = \frac{1}{8R} \varepsilon_{abcde} M^{bc} M^{de} \quad (2.2.41)$$

dont les valeurs propres (avec des paramètres e et f), respectivement [46]

$$R^{-2} [e(e+1) + f(f-1) - 2] \quad (2.2.42)$$

$$R^{-2} [e(e+1)f(f-1)] \quad (2.2.43)$$

caractérisent des représentations unitaires et irréductibles du groupe de de Sitter. A savoir, la série principale [46]

$$C_{e,\mu}^0; \quad e \geq 0, \quad f = \frac{1}{2} + i\mu; \quad e \in \mathbb{N}^+; \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2.44)$$

$$C_{e,\mu}^{\frac{1}{2}}; \quad e \geq \frac{1}{2}; \quad f = \frac{1}{2} + i\mu; \quad 2e = 2n+1; \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2.45)$$

la série discrète

$$D_{e,f}^{\pm}; \quad e \geq f \geq \frac{1}{2}; \quad e-f \in \mathbb{N}^+ \quad (2.2.46)$$

$$D_{e,1}^0; \quad f = 1; \quad e \in \mathbb{N}^+ \quad (2.2.47)$$

et la série complémentaire

$$E_{e,r}; \quad e \geq 0; \quad f = \frac{1}{2} + r; \quad e \in \mathbb{N}^+; \quad 0 < r < \frac{1}{2} \quad (2.2.48)$$

Les représentations de la série discrète avec des signes opposés, D^+ et D^- , désignent deux représentations inéquivalentes. Pour la série principale, les représentations avec un signe opposé de μ sont équivalentes [45, 47].

Les solutions d'une équation d'onde de Klein-Gordon ou de Dirac dans l'espace-temps de de Sitter sont données sous la forme d'ondes horosphériques [45] caractérisées par un nombre complexe $\varkappa$

$$\varphi_{\tilde{\zeta}}(\xi) = \left| \left[\xi, \tilde{\zeta} \right] \right|^{\varkappa} \quad (2.2.49)$$

$$\xi \in V_4^R, \quad \tilde{\zeta} \in C, \quad \varkappa \in \mathbb{C} \quad (2.2.50)$$

pour une représentation scalaire (massive) du groupe de de Sitter [45]

$$C_{0,\mu}^0; \quad \varkappa = -\frac{3}{2} + i\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2.51)$$

et pour une représentation spinorielle

$$C_{\frac{1}{2},\mu}^{\frac{1}{2}}; \quad \varkappa = -2 + i\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2.52)$$

Les ondes horosphériques $\varphi_{\tilde{\zeta}}(\xi)$ sont analogues aux fonctions d'onde planes dans l'espace-temps de Minkowski. A la limite $R \rightarrow \infty$ (contraction), ces fonctions d'onde tendent vers les ondes planes dans l'espace-temps de Minkowski [45].

Les représentants de la série principale $C_{e,\mu}^0$ et $C_{e,\mu}^{\frac{1}{2}}$ du groupe de de Sitter contractent vers les représentations unitaires et irréductibles massives du groupe de Poincaré de spin entier et demi-entier, respectivement. Les représentations de masse nulle du groupe de Poincaré apparaissent dans le cas scalaire (helicité nulle) par contraction d'une représentation unitaire et irréductible de la série complémentaire. Le cas d'helicité non nulle s'obtient par contraction d'une représentation de la série discrète⁽¹⁾.

2.2.3 La quantification par la méthode des représentations induites du groupe de Sitter et système d'imprimitivité

Les représentations induites du groupe de de Sitter

La méthode des représentations induites [48] permet de construire les théories quantiques, non relativiste et relativiste, des systèmes élémentaires (la particule libre) en considérant les symétries de l'espace-temps correspondant. En effet, une particule élémentaire, au sens de Wigner [49], est une représentation unitaire et irréductible du groupe de symétrie. Dans le cas du groupe de de Sitter $G = SO(4, 1)$, la représentation configuration [36]

$$U^D(G) = D(L) \uparrow G \quad (2.2.53)$$

est induite à partir de la représentation irréductible $D(L)$ du sous-groupe de Lorentz $L = SO(3, 1)$. La représentation U^D est définie [36] par son action sur les fonctions $\psi(\xi)$ de l'espace de configuration V_4^R et à valeurs sur l'espace L^D support de la représentation $D(L)$

$$[U^D(g)\psi](\xi) = D\left[(g^{-1}, \xi)_L^{-1}\right]\psi(g^{-1}\xi)$$

⁽¹⁾Pour plus de détails, en ce qui concerne la contraction des représentations unitaires irréductibles (massive et de masse nulle) du groupe de de Sitter vers celles du groupe de Poincaré, voir [47] (et les références citées dans l'article)

Cette représentation est unitaire par rapport au produit scalaire

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \int_{V_4^R} d\mu(\xi) \langle \psi(\xi) | \psi'(\xi) \rangle_{L^D} \quad (2.2.54)$$

$$d\mu(\xi) = \delta([\xi, \xi] + R^2) d^5\xi \quad (2.2.55)$$

La représentation induite U^D est réductible. La représentation irréductible [36] $U^{\mu j}$ ($\mu \in \mathbb{R}, j = 0, \frac{1}{2}, 1 \dots$)

$$U^{\mu j}(G) = \Delta^{\mu j}(H) \uparrow G \quad (2.2.56)$$

se construit dans l'espace des impulsions à partir de la représentation $\Delta^{\mu j}(h)$ du petit groupe H , contenant la représentation irréductible $\Delta^j(r)$ du groupe des rotations tridimensionnelles

$$\Delta^{\mu j}(h = \tau_A a_T r) = \exp \left[\tau \left(i\mu + \frac{3}{2} \right) \right] \Delta^j(r) \quad (2.2.57)$$

La représentation $U^{\mu j}(\xi_T \Lambda)$ agit sur les fonctions $\varphi^{\mu j}(\tilde{\zeta})$ définies sur l'espace des impulsions C et à valeurs dans l'espace L^Δ support de la représentation $\Delta^{\mu j}$. Dans l'expression de la représentation $U^{\mu j}$ [36], nous allons identifier les fonction $\varphi^{\mu j}(\tilde{\zeta})$ avec les fonctions $\varphi^{\mu j}(\zeta_L I_\varepsilon)$ où la variable $\tilde{\zeta}$ est remplacée par son représentant $\zeta_L I_\varepsilon$

$$[U^{\mu j}(\xi_T \Lambda) \varphi^{\mu j}](\zeta_L I_\varepsilon) = \left| \frac{[\xi, \zeta]}{R} \right|^{i\mu + \frac{3}{2}} \varphi^{\mu j}(l^{-1}((\zeta_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi)_L^{-1}) \quad (2.2.58)$$

Cette représentation est unitaire vis-à-vis du produit scalaire

$$\langle \varphi^{\mu j} | \varphi'^{\mu j} \rangle = \int_C d\Omega(\tilde{\zeta}) \langle \varphi^{\mu j}(\tilde{\zeta}) | \varphi'^{\mu j}(\tilde{\zeta}) \rangle_{L^\Delta} \quad (2.2.59)$$

$$d\Omega(\tilde{\zeta}) = \delta([\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}]) d^4\tilde{\zeta} \quad (2.2.60)$$

Les fonctions ψ et $\varphi^{\mu j}$ appartiennent aux espaces de Hilbert H^D et $H^{\mu j}$ supports des représentations U^D et $U^{\mu j}$, respectivement [36]. Les états ψ sont appelés localisés et les états $\varphi^{\mu j}$ sont appelés réels (matériels). Les états localisés peuvent être aussi bien réels que virtuels.

L'opérateur de commutation $J^{\mu j}$ nous permet de passer d'un état localisé ψ vers un états matériel $\varphi^{\mu j}$ et correspond à un processus de matérialisation des états localisés (J^j est une matrice constante)

$$\begin{aligned}\varphi^{\mu j}(\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) &= [J^{\mu j} \psi](\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) \\ \varphi^{\mu j}(\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) &= \int_{V_4^R} d\mu(\xi') \left[\frac{[\xi', \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} + i0 \right]^{i\mu - \frac{3}{2}} J^j D \left[((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi')_L \right] \psi(\xi')\end{aligned}\quad (2.2.61)$$

La localisation correspond au processus inverse de la matérialisation. Ce processus se réalise au moyen de l'opérateur de commutation $I^{\mu j}$ qui nous permet de passer d'un état matériel $\varphi^{\mu j}$ vers un état localisé $\psi^{\mu j} \in H^{D\mu j} \subset H^D$. La forme intégrale est donnée par (I^j est une matrice constante)

$$\begin{aligned}\psi^{\mu j}(\xi) &= [I^{\mu j} \varphi^{\mu j}](\xi) \\ \psi^{\mu j}(\xi) &= \int_C d\Omega(\tilde{\zeta}) \left[\frac{[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} - i0 \right]^{-i\mu - \frac{3}{2}} D \left[\left((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi \right)_L^{-1} \right] \\ &\quad \times I^j \varphi^{\mu j}(\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)\end{aligned}\quad (2.2.62)$$

La double commutation ($\psi \rightarrow \varphi^{\mu j} \rightarrow \psi^{\mu j}$) définit une propagation [36]

$$[\Pi^{\mu j} \psi](\xi) = \int_{V_4^R} d\mu(\xi') \Pi^{\mu j}(\xi - \xi') \psi(\xi') \quad (2.2.63)$$

avec [36]

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu j}(\xi - \xi') &= \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int_C d\Omega(\tilde{\zeta}) \left\{ \left[\frac{[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} - i0 \right]^{-i\mu - \frac{3}{2}} D \left[\left((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi \right)_L^{-1} \right] \right. \\ &\quad \left. \times I^j J^j D \left[\left((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi' \right)_L \right] \left[\frac{[\xi', \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} + i0 \right]^{i\mu - \frac{3}{2}} \right\}\end{aligned}\quad (2.2.64)$$

Ainsi définie, la propagation d'une particule ponctuelle passe toujours par un état matériel (ou réel).

Système d'imprimitivité et localisation

Les représentations induites possèdent la propriété d'imprimitivité. Précisément, la représentation $U^D(G)$ possède une application P qui associe à chaque sous-ensemble B de V_4^R un

opérateur de projection $P(B)$ dans l'espace H^D de la représentation induite. Un système d'imprimitivité, ayant l'espace homogène $V_4^R = G/L$ comme base d'imprimitivité, est une application satisfaisant aux conditions suivantes [50, 26, 23] :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i); \quad (B_i \cap B_j = \emptyset; \quad i \neq j) \quad (2.2.65)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (2.2.66)$$

$$P(V_4^R) = 1 \quad (2.2.67)$$

$$P(B) = P^\dagger(B) = P^2(B) \quad (2.2.68)$$

$$U^D(g)P(B)U^D(g)^{-1} = P(gB); \quad \forall B \subset V_4^R \quad (2.2.69)$$

L'opérateur de projection défini au moyen de la fonction caractéristique $\chi_B(\mathbf{x})$ qui est égale à un quand $\mathbf{x}$ appartient à B , et nulle dans le cas contraire[26]

$$\left[P(B)\hat{\psi}\right](\mathbf{x}) = \chi_B(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x}) \quad (2.2.70)$$

donne un sens stricte à la localisation d'une particule dans le domaine non relativiste ($\hat{\psi}(\mathbf{x})$ appartient à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^3)$ des fonctions scalaires). La probabilité $P_\psi(B)$ de trouver une particule décrite par un état quantique normalisé $|\psi\rangle$ dans une région $B \subset \mathbf{R}^3$ de l'espace est la valeur moyenne du projecteur $P(B)$ dans cet état

$$P_\psi(B) = \langle \hat{\psi} | P(B) | \hat{\psi} \rangle = \int_B \left| \hat{\psi}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \quad (2.2.71)$$

La mesure $P(B)$ à valeur projectionnelle (PV) décrit une localisation au sens stricte (ou parfaite): nous pouvons toujours affirmer qu'une particule se trouve avec certitude $P_\psi(B) = 1$ dans une région finie de l'espace. Un élément g du groupe de Galilée $\mathcal{G}$ transforme la région $B \subset \mathbf{R}^3$ en la région $gB \subset \mathbf{R}^3$ et sa représentation transforme l'état $|\hat{\psi}\rangle$ en l'état $|\hat{\psi}'\rangle = U^D(g)|\hat{\psi}\rangle$. La propriété de covariance (relation 2.2.69) du système d'imprimitivité est équivalente à l'invariance de la probabilité lors de cette transformation

$$\langle \hat{\psi} | P(B) | \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{\psi}' | P(gB) | \hat{\psi}' \rangle \quad (2.2.72)$$

Les difficultés d'une localisation parfaite des particules ponctuelles dans le domaine quantique relativiste a été revue par plusieurs auteurs [51, 52, 23] et récemment dans [53]. Il semble qu'une localisation au sens stricte d'une particule relativiste ponctuelle dans une

région finie de l'espace ou de l'espace-temps est impossible. Les $P(B)$ ne peuvent être considérés comme des projecteurs orthogonaux. En fait, toute tentative d'une localisation stricte viole le principe de causalité (théorème de Hegerfeld [54]).

Par conséquent, la quantification par la méthode des représentations induites dans l'espace-temps de de Sitter comporte les mêmes difficultés que la théorie quantique relativiste habituelle dans l'espace-temps de Minkowski.

L'alternative est une localisation dans un espace des phases stochastique [55, 56]. La quantification géométro-stochastique introduite par Prugovecki [23, 24], en reconsidérant la notion de mesure, associe à la particule une extension stochastique liées aux imperfections des appareils de mesures. Comme conséquence, les systèmes d'imprimitivités sont remplacés par des systèmes d'imprimitivités généralisés (ou systèmes de covariance). Dans ce qui suit, nous allons présenter le cas quantique stochastique non relativiste à symétrie de Galilée, le cas relativiste s'obtient en considérant le groupe de Poincaré [23] ou de de Sitter [19] et l'espace des phases stochastique correspondant.

2.3 Quantification stochastique et système de covariance

2.3.1 Le cas non relativiste

La théorie stochastique est basée sur des considérations de symétries de l'espace-temps et décrit les particules comme étant étendues. L'extension de ces particules est considérée d'un point de vue opérationnel. En d'autres termes, c'est le procédé opérationnel de la mesure (imparfait) qui engendre l'extension. En fait, la position $\mathbf{q}$ et l'impulsion $\mathbf{p}$ d'une particule système sont déterminées avec des fonctions de confiance (densité de probabilité) $\chi_{\mathbf{q}}^\eta$ et $\chi_{\mathbf{p}}^\eta$ qui décrivent la nature imparfaite des appareils de mesures. Ces fonctions de confiances sont liées à des fonctions $\tilde{\eta}$ (dans la représentation impulsion) et $\hat{\eta}$ (dans la représentation configuration) qui spécifient une représentation unitaire et irréductible du groupe de Galilée dans l'espace des phases.

L'espace de Hilbert $L^2(\Gamma_\eta)$ support de la représentation espace des phases irréductible du groupe de Galilée⁽¹⁾ $\mathcal{G}$, contient des fonctions de carré intégrable $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ définies sur l'espace des phases non relativiste $\Gamma = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) / (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbf{R}^6\}$. Le produit scalaire est défini par

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \int_{\Gamma} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \psi'(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rangle \quad (2.3.1)$$

Les fonctions d'onde $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sont reliées aux fonctions d'onde de la représentation configuration et impulsions du groupe de Galilée au moyen des applications $\hat{W}_\eta$ et $\tilde{W}_\eta$, respectivement

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\hat{W}_\eta \hat{\psi})(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int \hat{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.3.2)$$

$$= (\tilde{W}_\eta \tilde{\psi})(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^*(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2.3.3)$$

Dans la représentation configuration, les fonctions d'onde propres (m est la masse de la particule)

$$\hat{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \left[\hat{U} \left(0, \mathbf{q}, \frac{\mathbf{p}}{m}, \mathbf{I} \right) \hat{\eta} \right](\mathbf{x}) = \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})] \hat{\eta}(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \quad (2.3.4)$$

s'obtiennent à partir de la fonction d'onde $\hat{\eta}$ par l'application d'une translation temporelle nulle $b = 0$, d'une translation spatiale $\mathbf{q}$, d'un boost de vitesse $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$ et d'une rotation triviale $R = \mathbf{I}$, respectivement. Les fonctions d'onde $\hat{\eta}(\mathbf{x})$ s'interprètent comme des fonctions d'onde propres d'une particule d'essai stochastiquement étendue marquant l'origine d'un repère inertiel. La fonction $\hat{\eta}(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbf{R}^3)$ est rotationnellement invariante et de norme

$$\|\hat{\eta}(\mathbf{x})\| = (2\pi\hbar)^{-3/2} \quad (2.3.5)$$

C'est le représentant dans l'espace de configuration de l'état η qui génère la résolution de l'identité

$$\int_{\Gamma} |\eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}| = \mathbf{1} \quad (2.3.6)$$

⁽¹⁾Le groupe de Galilé $\mathcal{G}$ est le groupe de transformations qui lient deux repères d'inerties. C'est un groupe à dix paramètres, à savoir, une translation dans le temps $b \in \mathbf{R}^1$, une translation d'espace $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$, un boost de vitesse $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ et une rotation $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3)$. Un element $g \in \mathcal{G}$, peut s'ecrire alors, sous la forme [25]

$$g = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{R})$$

dans l'espace de Hilbert de la représentation irréductible de l'espace des phases, de telle sorte que toute fonction $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ peut se décomposer sur la base des états $|\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}}\rangle$

$$|\psi\rangle = \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) |\eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \quad (2.3.7)$$

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}} | \psi \rangle = \langle \hat{\eta}_{\mathbf{q}\mathbf{p}} | \psi \rangle \quad (2.3.8)$$

La localisation stochastique est décrite par un opérateur à valeur positive (POV)

$$\mathbf{P}_{\eta}(B) = \int_B |\eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \langle \eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}|, \quad B \subset \Gamma \quad (2.3.9)$$

défini sur un espace B dans l'espace des phases non relativiste, et qui constitue un système de covariance (un système d'imprimitivité généralisé) vis-a-vis de la représentation espace des phases U du groupe de Galilée

$$U(g) \mathbf{P}_{\eta}(B) U^{-1}(g) = \mathbf{P}_{\eta}(gB) \quad (2.3.10)$$

La valeur moyenne

$$P_{\psi}^{\eta}(B) = \langle \psi | \mathbf{P}_{\eta}(B) | \psi \rangle = \int_B d\mathbf{q}d\mathbf{p} |\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})|^2 \quad (2.3.11)$$

donne la probabilité pour qu'une mesure simultanée de la position stochastique et de l'impulsion stochastique aient une valeur $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ dans l'ensemble $B \subset \Gamma$, avec des fonctions de confiances $\chi_{\mathbf{q}}^{\eta}$ et $\chi_{\mathbf{p}}^{\eta}$

$$\chi_{\mathbf{q}}^{\eta}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3 |\hat{\eta}(\mathbf{x} - \mathbf{q})|^2 \quad (2.3.12)$$

$$\chi_{\mathbf{p}}^{\eta}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 |\tilde{\eta}(\mathbf{k} - \mathbf{p})|^2 \quad (2.3.13)$$

En mécanique quantique stochastique non relativiste, le propagateur libre est une généralisation du propagateur de la mécanique quantique non relativiste conventionnelle ($U(t, t')$ est l'opérateur d'évolution libre)

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \langle \eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}} | U(t, t') | \eta_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'} \rangle \quad (2.3.14)$$

avec

$$U_{(t,t')} = \exp \frac{-i}{\hbar} H_0 (t - t') \quad (2.3.15)$$

$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ étant l'Hamiltonien de la particule libre.

2.3.2 Le cas relativiste

La généralisation au domaine relativiste est obtenue en remplaçant le groupe de Galilée par celui de Poincaré et en considérant l'hypersurface

$$\Sigma = \sigma \times V_m^+ \quad (2.3.16)$$

de l'espace des phases relativiste. L'hypersurface σ de genre espace dotée de la mesure invariante $d\sigma(q)$ est un sous-espace de l'espace-temps de Minkowski M . La partie supérieure de l'hyperboloïde de masse V_m^+ est dotée de la mesure invariante $d\Omega(k) = d\mathbf{k}/2k^0$. Le produit scalaire est défini par

$$\langle \psi | \psi' \rangle = \int_{\Sigma} d\Sigma(q, p) \langle \psi(q, p) | \psi'(q, p) \rangle \quad (2.3.17)$$

De même que dans le cas non-relativiste, la mesure à valeur positive $\mathbf{P}_{\eta}(\Delta)$ s'écrit en termes des fonctions propres $\tilde{\eta}_{q,p}(k)$

$$\mathbf{P}_{\eta}(\Delta) = \int_{\Delta} |\tilde{\eta}_{q,p}\rangle d\Sigma(q, p) \langle \tilde{\eta}_{q,p}|, \quad \Delta \subset \Sigma \quad (2.3.18)$$

en représentation impulsions, les vecteurs d'états propres $\tilde{\eta}_{q,p}(k)$ s'obtiennent à partir des états propres $\tilde{\eta}(k)$ marquant l'origine d'un repère quantique de Lorentz, par l'application d'une translation q et d'un boost de Lorentz l_p

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = [\tilde{U}(q, l_p)\tilde{\eta}](k) = \exp(\imath k \cdot q) \tilde{\eta}(l_p^{-1}k) \quad (2.3.19)$$

Quand Δ couvre tout l'espace des phases relativiste Σ , l'opérateur $\mathbf{P}_{\eta} = \mathbf{P}_{\eta}(\Sigma)$ est un opérateur de projection réduisant l'espace $L^2(\Sigma)$ à un sous-espace $\mathbf{P}_{\eta}L^2(\Sigma)$ où il constitue une résolution de l'identité

$$\mathbf{P}_{\eta} = \int_{\Sigma} |\tilde{\eta}_{q,p}\rangle d\Sigma(q, p) \langle \tilde{\eta}_{q,p}| = 1$$

La valeur moyenne

$$P_{\psi}^{\eta}(\Delta) = \langle \psi | \mathbf{P}_{\eta}(\Delta) | \psi \rangle = \int_{\Delta} d\Sigma(q, p) |\psi(q, p)|^2 \quad (2.3.20)$$

$$d\Sigma(q, p) = d\sigma(q) d\Omega(k) \quad (2.3.21)$$

donne la probabilité approximative⁽¹⁾ de trouver la particule dans l'état ψ localisé aux points stochastiques $(q, p) \in \Delta$. La transformation unitaire W_η de l'espace de Hilbert de la représentation impulsion $L^2(V_m^+)$ vers le sous-espace $\mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma) \subset L^2(\Sigma)$

$$\psi(q, p) = [W_\eta \psi](q, p) = \int_{V_m^+} \tilde{\eta}_{q,p}^*(k) \psi(k) d\Omega(k) \quad (2.3.22)$$

définit une représentation espace des phases unitaire et irréductible du groupe de Poincaré. La mesure à valeur positive $\mathbf{P}_\eta(\Delta)$ est un système de covariance pour la représentation irréductible espace des phases du groupe de Poincaré (elle vérifie les propriétés 2.2.65-2.2.69).

Le propagateur s'écrit aussi en termes des fonctions d'onde propres $\eta_{q,p}$

$$K_{\tilde{\eta}}(q, p; q', p') = \langle \eta_{q,p} | \eta_{q',p'} \rangle = \int_{V_m^+} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q - q') \cdot k\right] \tilde{\eta}^*(p' \cdot k) \tilde{\eta}(p \cdot k) d\Omega(k) \quad (2.3.23)$$

$$\tilde{\eta}(p \cdot k) = \tilde{\eta}(l_p^{-1} k) \quad (2.3.24)$$

La composante géométrique de la théorie géométrico-stochastique est une structure en fibré

$$E(M, F = \mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma), U(P)) \quad (2.3.25)$$

dont la variété de base M est le lieu d'une localisation moyenne aux points x . La fibre est l'espace de Hilbert $\mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma)$ support de la représentation espace des phases irréductible du groupe de Poincaré, et le groupe structural est cette même représentation U . Le point essentiel est que les états propres

$$\{\eta_{x,(q,p)}; (q, p) \in \Sigma = M \times V_m^+\} \quad (2.3.26)$$

constituent un repère quantique local (au point x).

2.4 Conclusion

Ayant présenté les méthodes de quantification par les représentations induites et la théorie quantique stochastique, il apparaît que la théorie quantique stochastique est plus adaptée à la quantification du mode externe composant la particule étendue. En effet, le mode externe décrit la localisation globale de la particule et est directement soumis au processus

⁽¹⁾Voir [23] pour les détails.

de mesure. Le mode interne composant la particule étendue décrit le mouvement relatif qui est observé d'une manière indirecte et sa position exacte n'est pas, à notre connaissance, accessible à la mesure. Ce dernier, sera quantifié par la méthode des représentations induites pour une symétrie interne de de Sitter.

La prochaine étape sera de considérer un modèle non relativiste de la particule étendue avec un mode externe à symétrie de Galilée.

Chapitre 3

Particule étendue stochastique non relativiste avec une extension intrinsèque à symétrie interne de de Sitter

Résumé

Un modèle non relativiste de la particule étendue est considéré en combinant les idées d'une théorie quantique fonctionnelle et d'une théorie quantique stochastique. La particule intrinsèquement et stochastiquement étendue est composée de deux modes quantiques scalaires. Dans le présent travail, nous considérons le cas le plus simple où le champ bilocal décrivant la particule étendue s'écrit comme un produit d'une partie externe et d'une partie interne. La partie externe décrit le mouvement du mode externe qui représente le centre de masse dans un espace-temps externe à symétrie de Galilée. La partie interne décrit le mouvement relatif du mode interne dans l'espace-temps interne de de Sitter. Le mode externe est quantifié par la théorie stochastique qui semble être consistante avec la théorie de la relativité générale. Le mode ponctuel interne est quantifié par la méthode des représentations induites. Nous construisons les états et nous décrivons la propagation libre de la particule étendue. Aussi, nous analysons les propriétés de localisation de la particule.

ule étendue dans l'espace-temps et l'espace interne en termes de système d'imprimitivité et système de covariance.

3.1 Introduction

Le modèle géométro-différentiel de la particule étendue a été amélioré [37] en reconsidérant les idées de bases de la théorie quantique fonctionnelle [32, 33] et de la théorie quantique stochastique [24, 57]. Les deux modes composant la particule étendue possèdent la symétrie de Galilée. Rappelons que la première théorie conçoit les particules élémentaires comme étant des objets intrinsèquement étendus. La mesure s'effectue avec des appareils classiques (parfaits) et considère des mesures exactes de la position ou de l'impulsion. Par contre, en théorie géométro-stochastique, la mesure s'effectue avec des appareils de mesures réels (imparfaits) et tout résultat de mesure est entaché d'erreurs. En d'autres termes, l'extension est considérée d'un point de vue opérationnel.

Dans le présent travail, nous allons d'abord considérer un modèle non relativiste⁽¹⁾ de la particule étendue avec un mode ponctuel interne quantifié par la méthode des représentations induites pour une symétrie interne de de Sitter. Le mode externe (stochastique), à symétrie de Galilée, est quantifié par la théorie quantique stochastique. Le cas relativiste avec une symétrie externe de Poincaré [38] fera l'objet du chapitre suivant.

Nous considérons le cas le plus simple, avec un champ bilocal décrivant la particule étendue qui peut s'écrire comme un produit d'une partie externe et d'une partie interne. Dans le deuxième paragraphe, nous construisons l'espace de Hilbert des états réels. Nous donnons aussi l'interprétation des états et le système d'imprimitivité correspondant. Dans le troisième paragraphe, la propagation libre de la particule étendue est considérée. Dans le quatrième paragraphe, nous définissons les états localisés décrivant la particule étendue et le système de covariance (POV) qui les décrit. En particulier, nous donnons les probabilités de mesures simultanées de la position et de l'impulsion avec les probabilités marginales qui en résultent. Dans le quatrième paragraphe, nous donnons la conclusion.

⁽¹⁾Le modèle non relativiste qu'on se propose de construire peut décrire des hadrons qui se meuvent à des vitesses non relativistes. Le quarkonium est un exemple, c'est un hadron constitué d'un quark et d'un antiquark lourds [59, 60].

3.2 Espaces des états réels et système d'imprimitivité

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^3 \times C)$ qui contient des fonctions $\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^\varepsilon)$ de carré intégrable définies sur l'espace des impulsions $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^3$ externe de Galilée et l'espace des impulsions interne C de de Sitter

$$C = \left\{ \tilde{\zeta}^\varepsilon / \zeta^\varepsilon = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}^i \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \eta_{ij} \tilde{\zeta}^i \tilde{\zeta}^j = 1, \tilde{\zeta}^0 > 0, \varepsilon = \pm 1 \right\} \quad (3.2.1)$$

$$\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2.2)$$

comme étant l'espace de Hilbert support de la représentation produit direct des représentations induites irréductibles d'impulsions des groupes de Galilée externe $\mathcal{G}$ et de de Sitter interne $G = SO(4, 1)$, respectivement

$$\tilde{U}_m^\mu = \tilde{U}_m(g) \otimes \tilde{U}^\mu(\xi_T \Lambda) \quad (3.2.3)$$

$$g \in \mathcal{G}, \quad (\xi_T \Lambda) \in G, \quad \Lambda \in SO(3, 1) \quad (3.2.4)$$

Le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R}^3 \times C)$ est défini par

$$\langle \tilde{\Phi} | \tilde{\Phi}' \rangle = \int_{\mathbf{R}^3 \times C} d\mathbf{k} d\Omega(\tilde{\zeta}) \tilde{\Phi}^*(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \tilde{\Phi}(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \quad (3.2.5)$$

$$d\Omega(\tilde{\zeta}) = \delta([\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}]) d^4 \tilde{\zeta} \quad (3.2.6)$$

L'interprétation physique des fonctions $\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \in L^2(\mathbf{R}^3 \times C)$ est qu'elles décrivent des états réels de la particule étendue composée d'un mode quantique ponctuel externe de masse m et d'un mode ponctuel interne de masse m' . La probabilité pour que les modes externe et interne aient des impulsions $\mathbf{k}$ et $\tilde{\zeta}$ dans les ensembles de Borel B et B' , respectivement, peut être définie par la valeur moyenne

$$P_\Phi(B \times B') = \langle \tilde{\Phi} | \mathbf{P}_\eta(B \times B') \tilde{\Phi} \rangle \quad (3.2.7)$$

$$B \times B' \subset \mathbf{R}^3 \times C \quad (3.2.8)$$

du projecteur

$$\mathbf{P}_\eta = \int_{B \times B'} d\mathbf{k} d\Omega(\tilde{\zeta}) \left| \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}\tilde{\zeta}} \right\rangle \left\langle \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}\tilde{\zeta}} \right| \quad (3.2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}\tilde{\zeta}}(\mathbf{k}', \tilde{\zeta}'^\varepsilon) &= (\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} \otimes \tilde{\varphi}_{\tilde{\zeta}})(\mathbf{k}', \tilde{\zeta}'^\varepsilon) \\ &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\tilde{\zeta}^\varepsilon - \tilde{\zeta}'^\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

qui constitue un système d'imprimitivité par rapport à la représentation $\tilde{U}_m^\mu(g, \xi_T \Lambda)$

$$\tilde{U}_m^\mu \mathbf{P}_\eta(B \times B') \left[\tilde{U}_m^\mu \right]^{-1} = \mathbf{P}_\eta((g, \xi_T \Lambda)(B \times B')) \quad (3.2.11)$$

3.3 Propagation

Les états localisés de la particule étendue $\tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi)$ appartiennent à l'espace de Hilbert $L^2(\Gamma \times V_4^R)$ défini au moyen de l'espace des phases externe (non relativiste) Γ avec des variable $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ et l'espace de configuration de de Sitter interne V_4^R avec des variables ξ

$$\Gamma = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3\} \quad (3.3.1)$$

$$V_4^R = \{\xi / \eta_{a,b} \xi^a \xi^b = -R^2, \eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)\} \quad (3.3.2)$$

$$a, b = 0, 1, 2, 3, 5 \quad (3.3.3)$$

L'espace de Hilbert $L^2(\Gamma \times V_4^R)$, est l'espace support de la représentation produit direct des représentations espace des phases du groupe de Galilée externe $\mathcal{G}$ et de configuration de de Sitter, U et U^D , respectivement

$$U(g, \xi_T \Lambda) = U(g) \otimes U^D(\xi_T \Lambda) \quad (3.3.4)$$

Cette représentation est unitaire vis-à-vis du produit scalaire

$$\langle \tilde{\Psi} | \tilde{\Psi}' \rangle = \int_{\Gamma \times V_4^R} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mu(\xi) \tilde{\Psi}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) \tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) \quad (3.3.5)$$

Les deux représentations U et U^D sont réductibles. Les composantes irréductibles peuvent s'obtenir au moyen de l'application

$$I_\eta^\mu = \left(\tilde{W}_\eta \otimes I^\mu \right) \quad (3.3.6)$$

L'application unitaire $\tilde{W}_\eta$ réalise le passage de la représentation irréductible d'impulsions du groupe de Galilée externe définie sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^3)$ vers une représentation espace des phases irréductible définie dans le sous-espace $\mathbf{P}_\eta L^2(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$. L'application I^μ est l'opérateur de commutations des représentations induites du groupe de de Sitter dans $L^2(C)$ vers le sous-espace de Hilbert irréductible $H^{D\mu} \subset L^2(V_4^R)$

$$\begin{aligned} I_\eta^\mu; L^2(\mathbf{R}^3 \times C) &\rightarrow \mathbf{P}_\eta L^2(\Gamma) \times H^{D\mu} \subset L^2(\Gamma \times V_4^R) \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}) &\mapsto \left[I_\eta^\mu \tilde{\Phi} \right](\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Ces transformations sont des transformations intégrales telles que (I^0 est une matrice constante)

$$\begin{aligned} [I_\eta^\mu \Phi](\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) &= \tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) \\ \tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) &= \int_{\mathbf{R}^3 \times C} d\mathbf{k} d\Omega \left(\tilde{\zeta} \right) \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^*(\mathbf{k}) \left[\frac{[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} - i0 \right]^{-i\mu - \frac{3}{2}} I^0 \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) = \langle \eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi} | \Psi \rangle = \langle \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi} | \Psi \rangle \quad (3.3.9)$$

Dans la représentation impulsion du groupe de Galilée, les vecteurs propres

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}(\mathbf{k}) &= \left[\hat{U} \left(0, \mathbf{q}, \frac{\mathbf{p}}{m}, \mathbf{I} \right) \tilde{\eta} \right](\mathbf{k}) \\ &= \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{q})] \tilde{\eta}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

s'obtiennent des états $\tilde{\eta}$ par l'application d'une translation temporelle nulle $b = 0$, d'une translation spatiale $\mathbf{q}$, d'un boost de vitesse $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$ et d'une rotation triviale $R = \mathbf{I}$.

L'opérateur

$$\mathbf{P}_\eta = \int_\Gamma |\eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}| \quad (3.3.11)$$

réalise une résolution de l'identité dans $\mathbf{P}_\eta L^2(\Gamma)$. Les vecteurs impropres $\psi_\xi(\xi') = \delta(\xi - \xi')$ réalisent une résolution de l'identité dans l'espace de Hilbert $H^{D\mu}$. Ces derniers s'interprètent comme des états localisés ponctuels à l'intérieur de l'espace-temps de de Sitter interne. Les fonctions

$$\eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi} = \eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \otimes \psi_\xi \quad (3.3.12)$$

peuvent s'interpréter comme les vecteurs propres d'une particule intrinsèquement et stochastiquement étendue. En d'autres termes, le mode externe est localisé dans un sens stochastique alors que le mode interne est parfaitement localisé.

Le produit scalaire

$$A(\Psi, \tilde{\Phi}) = \langle \Psi | I_\eta^\mu \tilde{\Phi} \rangle \quad (3.3.13)$$

peut s'interpréter comme une amplitude de probabilité pour que la particule étant réelle ou matérielle (dans un état Φ) se transforme en un état localisé Ψ (localisation). L'amplitude de probabilité que la particule étant dans un état localisé Ψ se transforme en un état matériel Φ (matérialisation) est donnée par

$$A(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}) = \langle I_\eta^\mu \tilde{\Phi} | \tilde{\Psi} \rangle \quad (3.3.14)$$

Une autre application

$$J_\eta^\mu = \left(\tilde{W}_\eta^{-1} \otimes J^\mu \right) \quad (3.3.15)$$

peut être définie par

$$\begin{aligned} J_\eta^\mu & : \quad \mathbf{P}_\eta L^2(\Gamma \times V_4^R) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^3 \times C) \\ \tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) & \mapsto \left[J_\eta^\mu \tilde{\Psi} \right](\mathbf{k}, \tilde{\xi}^\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

avec (J^0 est une matrice constante)

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\xi}^\varepsilon) = \int_{\Gamma, V_4^R} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mu(\xi) \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}(\mathbf{k}) \left[\frac{[\xi, \tilde{\xi}^\varepsilon]}{R} + i0 \right]^{i\mu - \frac{3}{2}} J^0 \tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi) \quad (3.3.17)$$

$$d\mu(\xi) = \delta([\xi, \xi] + R^2) d^5 \xi \quad (3.3.18)$$

L'opérateur d'évolution $U_{(t', t)}$ permet de définir l'opérateur

$$\begin{aligned} K_\eta^\mu & = \quad I_\eta^\mu J_\eta^\mu = U_{(t', t)} \otimes \Pi^\mu \\ K_\eta^\mu & : \quad \mathbf{P}_\eta L^2(\Gamma \times V_4^R) \rightarrow \mathbf{P}_\eta L^2(\Gamma) \times H^{D\mu} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \xi') \mapsto \left[K_\eta^\mu \tilde{\Psi} \right](\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \xi) \quad (3.3.20)$$

qui peut prendre la forme intégrale suivante :

$$\left[K_\eta^\mu \tilde{\Psi} \right](\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \xi) = \int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' d\mu(\xi') K_\eta^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \xi; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \xi') \tilde{\Psi}(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \xi') \quad (3.3.21)$$

Le noyau

$$K_\eta^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \xi; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \xi') = K_\eta(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') \Pi^\mu(\xi, \xi') \quad (3.3.22)$$

est un produit du propagateur stochastique externe

$$\begin{aligned} K_\eta(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') & = \langle \eta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} | U(t, t') | \eta_{\mathbf{q}', \mathbf{p}'} \rangle \\ & = \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k} \exp \left\{ -\frac{i\mathbf{k}^2}{2m\hbar} (t - t') \right\} \tilde{\eta}_{\mathbf{q}', \mathbf{p}'}^*(\mathbf{k}) \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

avec

$$U_{(t', t)} = \exp \frac{-i}{\hbar} H_0 (t - t')$$

et du propagateur interne

$$\Pi^\mu(\xi, \xi') = \sum_\varepsilon I^0 J^0 \int_C d\Omega(\tilde{\xi}) \left\{ \left[\frac{[\xi, \tilde{\xi}^\varepsilon]}{R} - i0 \right]^{-i\mu - \frac{3}{2}} \left[\frac{[\xi', \tilde{\xi}^\varepsilon]}{R} + i0 \right]^{i\mu - \frac{3}{2}} \right\} \quad (3.3.24)$$

L'amplitude de probabilité

$$A(\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}') = \langle \tilde{\Psi} | K_{\eta}^{\mu} \tilde{\Psi}' \rangle$$

correspond à la transition d'un état Ψ localisé vers un autre état localisé Ψ' en passant par un état matériel Φ . En termes des fonctions propres $\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\xi}$, ceci donne

$$\begin{aligned} A(\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\xi}, \eta_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'\xi'}) &= K_{\eta}^{\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \xi; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \xi') = \langle \eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\xi} | K_{\eta}^{\mu} \eta_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'\xi'} \rangle \\ &= \langle \eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}} | U(t, t') \eta_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} \rangle \langle \psi_{\xi} | \Pi^{\mu} \psi_{\xi'} \rangle \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

et correspond à la propagation de la particule étendue.

3.4 Etats localisés et système de covariance

Pour décrire la localisation de la particule étendue dans l'espace des phases externe, nous avons besoin de l'espace de Hilbert $L^2(\Gamma) \times H^{\mu}$ qui porte la représentation $U^{\mu}(g, \xi_T \Lambda)$ produit direct des représentations espace des phases du groupe de Galilée externe et la représentation induite d'impulsions du groupe de de Sitter interne, respectivement

$$U^{\mu}(g, \xi_T \Lambda) = U(g) \otimes U^{\mu}(\xi_T \Lambda) \quad (3.4.1)$$

Le produit scalaire est

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\mathbf{R}^3 \times C} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mu(\tilde{\zeta}) \Psi_1^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon}) \Psi_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon}) \quad (3.4.2)$$

L'application unitaire

$$\tilde{W}_{\eta} = \tilde{W}_{\eta} \otimes Id \quad (3.4.3)$$

définie par

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\eta} &: L^2(\mathbf{R}^3 \times C) \rightarrow \mathbf{P}_{\eta} L^2(\Gamma) \times H^{\mu} \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon}) &\mapsto [\tilde{W}_{\eta} \tilde{\Phi}](\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

extrait les états localisés

$$\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon}) = \int_{\Gamma, C} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\Omega(\tilde{\zeta}) \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^*(\mathbf{k}) \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon}) \quad (3.4.5)$$

$$\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon}) = \langle \eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\zeta} | \Psi \rangle \quad (3.4.6)$$

dans la représentation impulsions

$$\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\zeta} = \tilde{\eta}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \otimes \tilde{\varphi}_\zeta, \quad \tilde{\varphi}_\zeta(\tilde{\zeta}^\varepsilon) = \delta(\tilde{\zeta}^\varepsilon - \tilde{\zeta}^{\varepsilon'}) \quad (3.4.7)$$

$$\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\zeta}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^{\varepsilon'}) = \tilde{\eta}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \delta(\tilde{\zeta}^\varepsilon - \tilde{\zeta}^{\varepsilon'}) \quad (3.4.8)$$

Les états $|\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\zeta}\rangle$ peuvent s'interpréter comme les vecteurs propres d'un micro-detecteur possédant des degrés de libertés internes ponctuels. Un système de covariance par rapport à $U^\mu(g, \xi_T \Lambda)$ peut être défini

$$\mathbf{P}_\eta(B \times B') = \int_{BB'} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\Omega(\tilde{\zeta}) |\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\zeta}\rangle \langle \eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\zeta}| = \int_B |\eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}| \otimes \int_{B'} d\Omega(\tilde{\zeta}) |\tilde{\varphi}_\zeta\rangle \langle \tilde{\varphi}_\zeta| \quad (3.4.9)$$

tel que

$$U^\mu \mathbf{P}(B \times B') [U^\mu]^{-1} = \mathbf{P}((g, \xi_T \Lambda)(B \times B')) \quad (3.4.10)$$

La valeur moyenne

$$P_\psi^\eta((B \times B')) = \langle \Psi | \mathbf{P}_\eta(B \times B') | \Psi \rangle = \int_{B'} d\Omega(\tilde{\zeta}) \int_B d\mathbf{q} d\mathbf{p} \left| \tilde{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2 \quad (3.4.11)$$

donne la probabilité pour que la mesure simultanée de la position et de l'impulsion stochastiques externes donne la valeur $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \subset B$ et que l'impulsion interne $\tilde{\zeta}$ soit dans B' . Ces interprétations sont acceptables car la composante marginale

$$\mathbf{P}_\eta(B') = \mathbf{P}_\eta(\Gamma \times B') = 1 \otimes \int_{B'} d\Omega(\tilde{\zeta}) |\tilde{\varphi}_\zeta\rangle \langle \tilde{\varphi}_\zeta| \quad (3.4.12)$$

est un système d'imprimitivité par rapport à la représentation induite du groupe de de Sitter interne et

$$\mathbf{P}_\eta(B) = \mathbf{P}_\eta(B \times C) = \int_B |\eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}| \otimes 1 \quad (3.4.13)$$

est un système de covariance par rapport à la représentation espace des phases externe de Galilée. Ce dernier opérateur est identique à celui de la théorie stochastique. Ses composantes marginales sont

$$\mathbf{P}_\eta(\Delta_1) = \mathbf{P}_\eta((\Delta_1 \times \mathbf{R}^3) \times C) = \int_{\Delta_1} d\mathbf{q} \int_{\mathbf{R}^3} |\eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\rangle d\mathbf{p} \langle \eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}| \otimes 1 \quad (3.4.14)$$

et

$$\mathbf{P}_\eta(\Delta_2) = \mathbf{P}_\eta((\mathbf{R}^3 \times \Delta_2) \times C) = \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{q} \int_{\Delta_2} |\eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\rangle d\mathbf{p} \langle \eta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}| \otimes 1 \quad (3.4.15)$$

dont les valeurs moyennes

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \mathbf{P}_\eta (\Delta_1 \times \mathbf{R}^3) \Psi \rangle &= \int_{\Delta_1} d\mathbf{q} \int_{\mathbf{R}^3, C} \left| \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2 \\ &= \int_{\Delta_1} d\mathbf{q} \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x} \chi_{\mathbf{q}}^\eta(\mathbf{x}) \int_C d\Omega(\tilde{\zeta}) \left| \hat{\Psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2\end{aligned}\quad (3.4.16)$$

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \mathbf{P}_\eta (\mathbf{R}^3 \times \Delta_2) \Psi \rangle &= \int_{\Delta_2} d\mathbf{p} \int_{\mathbf{R}^3, C} \left| \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2 \\ &= \int_{\Delta_2} d\mathbf{p} \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k} \chi_{\mathbf{p}}^\eta(\mathbf{k}) \int_C d\Omega(\tilde{\zeta}) \left| \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2\end{aligned}\quad (3.4.17)$$

donnent les probabilités que seule la mesure de la position ou de l'impulsion stochastique de la particule intrinsèquement et stochastiquement étendue prenne la valeur $\mathbf{q} \in \Delta_1$ ou $\mathbf{p} \in \Delta_2$ avec les fonctions de confiances correspondantes, respectivement

$$\chi_{\mathbf{q}}^\eta(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3 |\hat{\eta}(\mathbf{x} - \mathbf{q})|^2 \quad (3.4.18)$$

$$\chi_{\mathbf{p}}^\eta(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 |\tilde{\eta}(\mathbf{k} - \mathbf{q})|^2 \quad (3.4.19)$$

Ce dernier résultat est identique à celui de la mécanique quantique stochastique dans lequel la densité de probabilité $|\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2$ d'une particule ponctuelle a été remplacée par la densité de probabilité marginale $\int_C d\Omega(\tilde{\zeta}) |\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^\varepsilon)|^2$ d'une particule intrinsèquement étendue. Remarquons aussi qu'à cause du fait que

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\hat{W}_\eta \hat{\psi})(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int \hat{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.4.20)$$

$$= (\tilde{W}_\eta \tilde{\psi})(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int \tilde{\eta}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^*(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.4.21)$$

on aurait pu utiliser les fonctions d'onde $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) = \hat{\psi}(\mathbf{x}) \tilde{\varphi}(\tilde{\zeta}^\varepsilon)$ à la place des fonctions $\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tilde{\zeta}^\varepsilon) = \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\tilde{\zeta}^\varepsilon)$ pour la construction des états $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \xi)$ et $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\zeta}^\varepsilon)$ décrivant la particule étendue. Ceci conduit à décrire la même propagation libre de la particule étendue.

3.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons construit un modèle non relativiste de la particule étendue stochastique avec un mode ponctuel interne à symétrie de de Sitter. Le mode interne est

quantifié par la méthode des représentations induites qui est basée sur la commutation des représentations configuration et impulsion. En adoptant un point de vue stochastique pour la quantification du mode externe, nous avons pu décrire les processus de matérialisation, de localisation et de propagation de la particule étendue. Nous avons calculer les amplitudes de probabilités en termes des opérateurs I_η^μ , J_η^μ et $K_\eta^\mu = I_\eta^\mu J_\eta^\mu$ pour une particule étendue scalaire. Le noyau du propagateur K_η^μ est l'amplitude de probabilité de transition entre les états impropres $\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\xi}$. C'est un produit du propagateur stochastique externe et du propagateur interne.

D'autre part, les fonctions $\eta_{\mathbf{q}\mathbf{p}\zeta}$, dont la composante interne est dans la représentation induite d'impulsions du groupe de de Sitter interne, définissent un système de covariance qui reproduit une localisation externe stochastique avec des probabilités marginales analogues à celles de la théorie stochastique.

Le présent travail, peut être amélioré en considérant l'interaction. Ceci peut se faire en utilisant le groupe de Galilée élargi à la place du groupe de Galilée et en adoptant une structure géométrique de fibré dans lequel une connexion représentant une interaction gravitationnelle classique pourrait être introduite (voir référence [61]).

Dans ce qui suit, nous allons considérer un modèle d'une particule étendue relativiste où le groupe de Poincaré externe prend le rôle du groupe de Galilée externe dans le formalisme présenté plus haut. La propagation de la particule étendue dans un espace courbe qui reflète la présence d'un champ gravitationnelle classique est considérée dans une structure géométrique de fibré de Hilbert.

Chapitre 4

Particule étendue stochastique relativiste avec une extension intrinsèque a symétrie interne de de Sitter

Résumé

Nous donnons la propagation de la particule étendue dans un espace courbe quelconque. La particule étendue peut être un système de deux quarks vu comme étant deux modes. Précisément, le premier mode qui représente la localisation globale de la particule étendue dans l'espace courbe est quantifié par la méthode géométro-stochastique qui semble être adéquate pour ce but. L'autre mode qui représente le mouvement relatif est naturellement confiné dans un espace interne de de Sitter, et quantifié par la méthode des représentations induites. Ceci correspond à l'oscillateur harmonique dans lequel l'interaction a été remplacée par la courbure de l'espace interne (rotateur relativiste). Les états de la particule sont alors définis dans une structure en fibré de Hilbert avec le produit direct du groupe de Poincaré externe et du groupe interne de de Sitter qui joue le rôle du groupe structural. Les opérateurs de commutation sont utilisés pour définir

le propagateur dans la fibre comme une probabilité de transition entre ce qu'on appelle les repères quantiques locaux. Le transport parallèle de ces repères définit le propagateur total de la particule étendue comme dans la théorie stochastique.

4.1 Introduction

La conception des hadrons couramment acceptée est qu'ils sont composés de quarks considérés comme étant élémentaires. Cependant, l'absence de preuve du confinement permanent des quarks a ouvert la voie à d'autres modèles. Le rotateur relativiste est l'un de ces modèles qui, basé sur une symétrie dynamique de de Sitter, conduit à une relation masse-spin acceptable [10, 11, 12]. Ce modèle a été lié à une théorie de jauge de de Sitter décrivant le mouvement collectif d'une particule étendue avec interaction forte [62]. Cette théorie a adopté l'idée d'un modèle géométrique semi-classique du hadron étendu qui attribue l'extension à des propriétés géométriques (telle que la courbure de l'espace-temps de de Sitter) plutôt qu'à la présence de constituants [18, 28, 29]. Ce dernier modèle a été quantifié par la méthode géométro-stochastique qui introduit une nouvelle extension liée à l'indivisibilité de l'espace-temps à petite échelle (la longueur de Planck par exemple) [19, 63].

Le but de ce travail, est d'ouvrir la voie vers la combinaison des idées géométriques qui tentent d'expliquer le confinement avec tous les succès du modèle des quarks dans le contexte d'un espace-temps courbe. La construction est complètement générale et ne prétend pas conduire à des résultats expérimentalement vérifiables. Nous allons donner la structure mathématique et la formule générale du propagateur d'une particule étendue scalaire vue comme un système quark-antiquark sans spécifier la symétrie unitaire.

Ce programme a commencé avec la proposition du modèle géométro-différentiel dans lequel la particule étendue est composée d'un mode quantique externe et d'un mode interne [27, 64]. Nous savons que le mode externe représente la localisation globale (moyenne) de la particule dans un espace-temps externe M avec des points x , et le mode interne joue le rôle de constituant localisé dans l'espace interne de de Sitter V_4^R avec des points ξ . Une image analogue a été considérée dans l'étude des représentations unitaires du groupe de Poincaré de

l'oscillateur harmonique⁽¹⁾ décrivant un système quark-antiquark avec la variable du centre de masse x et du mouvement relatif ξ [5]. Dans notre modèle, l'interaction de l'oscillateur harmonique a été remplacée par la courbure de l'espace-temps interne de de Sitter.

Rappelons que la première construction était basée sur l'idée d'une théorie quantique fonctionnelle qui adopte une conception de corps non-rigide pour la particule décrite au moyen d'une onde physique u [32, 33]. Cette onde physique décrit toutes les propriétés intrinsèques de la particule et ne possède pas une interprétation probabiliste. Ce dernier rôle est joué par l'onde fonctionnelle $X[u, t]$. Comparée à la mécanique quantique habituelle, la théorie fonctionnelle remplace le point x par la fonction u et la fonction d'onde $\psi(x, t)$ par la fonctionnelle $X[u, t]$. Pour pouvoir traiter la fonction u , on doit adopter un modèle réaliste. Ce choix est quantique dans notre cas : la fonctionnelle $X[\Psi_x(\xi)] = \Psi(x, \xi)$ est un champ bilocal décrivant le mouvement d'un mode externe et d'un mode interne, tous les deux quantiques. La quantification des deux modes a été réalisée par la méthode des représentations induites qui est basée sur la commutation de la représentation réductible de configuration et de la représentation irréductible d'impulsions définie par la masse et le spin [35, 36]. Les états de la première représentation ont été appelés localisés et ceux de la deuxième réels (ou matériels). La commutation est alors interprétée comme une localisation, matérialisation ou une propagation des états quantiques selon la nature de l'état initial et final. Nous n'allons pas suivre ces interprétations dans le présent travail, mais utiliser la méthode des représentations induites comme un outil mathématique pour construire le propagateur dans l'espace-temps interne. Nous allons étudier ces interprétations dans des travaux ultérieurs.

Dans des travaux précédents, nous avons utilisé un fibré d'Hilbert sur un espace-temps externe dans lequel la structure ponctuelle du mode externe était un handicap pour la propagation de la particule dans un espace-temps externe courbe. Dans le présent travail, ce dernier est pourvu d'une extension stochastique en accord avec la théorie géométrostochastique pour surmonter les difficultés d'un espace-temps courbe. En effet, la quantification par la méthode géométrostochastique permet une approche unifiée aux théories

⁽¹⁾Voir le premier Chapitre.

quantiques non-relativiste, relativiste et générale dénuée des inconsistances que comportent les théories conventionnelles [23, 24].

Nous savons déjà que cette théorie se base sur le concept de valeurs stochastiques des résultats de mesures des grandeurs physiques plutôt que sur des mesures exactes. En d'autres termes, quand la mesure de la position donne une valeur x , elle s'interprète comme la position réel de la particule en mécanique quantique habituelle. En mécanique quantique stochastique, la mesure peut donner une autre valeur avec une densité de probabilité qui représente l'imperfection de tout appareil de mesure. La formulation mathématique de cette idée se base sur l'utilisation des opérateurs à valeurs positives (POV) qui reprennent le rôle des opérateurs de projections (PV) en mécanique quantique conventionnelle. Dans la présence d'un groupe d'invariance, le système de POV conduit à la notion de système de covariance qui est la généralisation des systèmes d'imprimitivités pour les systèmes quantiques [58]. Ainsi, la particule stochastiquement étendue est décrite au moyen de fonctions de carré intégrable $\psi(q, p)$ dans un espace des phases avec des variables (q, p) . Les fonctions $\psi(q, p)$ sont définies en termes de vecteurs d'états propres décrivant des particules d'essai et jouant le rôle de micro-détecteurs dans le cas non-relativiste et utilisées pour définir des repères quantiques locaux en relativité générale [24].

La justification physique du présent travail est que le mode externe est soumis à la mesure directe et est concerné par le problème de localisation qui semble être résolu par la théorie géométro-stochastique. Contrairement, et à cause du confinement, le mode interne est observé par des mesures indirectes et sa position réel dans l'espace interne n'est pas très importante.

Dans le deuxième paragraphe, nous présentons la structure non-géométrique mais relativiste avec les groupes de symétries, externe de Poincaré et interne de de Sitter. Nous considérons le cas scalaire et montrons que le propagateur est le produit des propagateurs externe et interne quand il n'y a pas d'interaction. Dans le troisième paragraphe, nous définissons les fibrés qui décrivent les états de la particule étendue et donnons les connexions qui représentent l'interaction. Dans le quatrième paragraphe, nous remplaçons les opérateurs de commutations de la représentation induite par des opérateurs locaux qui agissent sur une fibre. Ensuite, la propagation totale est définie comme une intégrale sur le

chemin selon la recette géométro-stochastique qui utilise le transport parallèle des repères quantiques. Dans le cinquième paragraphe, nous donnons la conclusion.

4.2 Propagation libre de la particule étendue

Le groupe de symétrie de la particule étendue est un produit direct

$$ISO(3, 1) \otimes SO(4, 1) \quad (4.2.1)$$

du groupe de Poincaré externe $P = ISO(3, 1)$ et du groupe de de Sitter interne $G = SO(4, 1)$. Le premier, est composé des translations de l'espace-temps $a \in T$ et des transformations de Lorentz $l \in \mathcal{L}$. Le groupe de de Sitter G est défini comme étant le groupe de transformations g qui laissent la forme quadratique $[\xi, \xi]$ invariante dans l'espace de de Sitter V_4^R (espace à courbure constante R)

$$\begin{aligned} V_4^R &= \{ \xi / [\xi, \xi] = \eta_{a,b} \xi^a \xi^b = -R^2, \eta_{ab} = \text{diag} (1, -1, -1, -1, -1) \} \\ a, b &= 0, 1, 2, 3, 5 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Pour décrire la particule étendue, considérons tout d'abord l'espace de Hilbert $L^2(V_m^+ \times C)$ des fonctions $\Phi(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon)$ de carré intégrable définies sur l'espace des impulsions externe de Poincaré (la partie supérieures de l'hyperboloïde de masse) et l'espace des impulsions internes de de Sitter, respectivement

$$\begin{aligned} V_m^+ &= \{ k / \eta_{ij} k^i k^j = m^2, k^0 > 0, \eta_{ij} = \text{diag} (1, -1, -1, -1) \} \\ C &= \left\{ \tilde{\zeta}^\varepsilon / \tilde{\zeta}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}^i \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \eta_{ij} \tilde{\zeta}^i \tilde{\zeta}^j = 1, \tilde{\zeta}^0 > 0, \varepsilon = \pm 1 \right\} \\ i, j &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Les espaces, C et V_4^R , peuvent être vus comme des espaces homogènes isomorphes aux espaces quotients du groupe de de Sitter

$$C \cong G/H, V_4^R \cong G/L \quad (4.2.4)$$

Le sous-groupe H est le petit groupe qui laisse invariante la direction $(e_0 - e_5)$. Le sous-groupe de Lorentz L ($\Lambda \in L$) laisse invariante l'origine $\overset{0}{\xi} = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{R})^t$ de V_4^R . Aux points

ξ et $\tilde{\zeta}$, correspondent des classes dont les représentants sont un boost de de Sitter ξ_T et un boost de Lorentz $\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon$, où I_ε est une matrice diagonale avec des éléments $(1, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$. Ces représentants sont reliés par une transformation de Lorentz $((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi)_L$ [36]

$$(\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1} \xi_T = \left((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1} \xi \right)_T \left((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi \right)_L \quad (4.2.5)$$

On peut définir alors, l'action du produit direct

$$\tilde{U}_m^\mu = \tilde{U}_m(a, l) \otimes \tilde{U}^\mu(\xi_T \Lambda) \quad (4.2.6)$$

des représentations induites irréductibles d'impulsions des groupes de Poincaré et de de Sitter, respectivement, sur le champ scalaire bilocal $\Phi(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon)$. Dans la forme explicite de la représentation $\tilde{U}_m^\mu((a, l), \xi_T \Lambda)$, nous allons identifier les fonctions $\Phi(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon)$ avec les fonctions $\Phi(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)$, où la variable interne d'impulsion $\tilde{\zeta}^\varepsilon$ est remplacée par son représentant $\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon$ [36]

$$\begin{aligned} \left[\tilde{U}_m^\mu((a, l), \xi_T \Lambda) \Phi \right] (k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) &= \exp(\imath a \cdot k) \left[\frac{[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} \right]^{i\mu + \frac{3}{2}} \\ &\times \left\{ \Phi \left(l^{-1} k, \Lambda^{-1} \left((\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)^{-1}, \xi \right)_L^{-1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Le paramètre m désigne la masse du mode externe et $\mu \in \mathbb{R}^+$ est le paramètre qui caractérise une représentation unitaire et irréductible du groupe de de Sitter (un élément de la série principale). Pour une valeur fixe du paramètre μ , la relation entre la masse m' du mode interne et le rayon de courbure R est donnée par [36]

$$(m' R)^2 = \mu^2 + \frac{1}{4}; \quad \hbar = c = 1 \quad (4.2.8)$$

La localisation de la particule étendue est traitée en considérant l'espace de Hilbert $L^2(\Sigma \times V_4^R)$ des fonctions $\Psi(q, p, \xi)$ définies sur l'espace interne de de Sitter V_4^R et une hypersurface $\Sigma(q, p)$ de l'espace des phases externe

$$\Sigma(q, p) = \{(q, p) ; (q, p) \in \sigma \times V_m^+\} \quad (4.2.9)$$

avec une mesure invariante $d\Sigma(q, p) = p_k d\sigma^k d\Omega(p)$ où σ est une hypersurface de genre espace dans l'espace-temps de Minkowski externe M . La mesure invariante est égale à $d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{p}$ quand

σ est un hyperplan à temps fixe ($q^0 = \text{Const}$) [23]. Le produit direct

$$\hat{U} = U(a, l) \otimes U^D(g) \quad (4.2.10)$$

de la représentation espace des phases du groupe de Poincaré externe $U(a, l)$ et de la représentation configuration (induite) de de Sitter $U^D(g)$ agit sur les états $\Psi(q, p, \xi)$ comme suit [23, 36]

$$\left[\hat{U}((a, l), g) \right] (q, p, \xi) = \Psi(l^{-1}(q - a), l^{-1}p, g^{-1}\xi) \quad (4.2.11)$$

Les deux représentations, $U(a, l)$ et $U^D(g)$, sont réductibles. La composante irréductible $U^{D\mu}$ de la représentation configuration du groupe de de Sitter s'obtient au moyen d'un opérateur de commutation I^μ de l'espace de Hilbert de la représentation impulsion H^μ vers le sous-espace $H^{D\mu}$ de l'espace de Hilbert de la représentation configuration H^D . D'autre part, la composante irréductible $\tilde{U}_m$ de la représentation espace des phases du groupe de Poincaré s'obtient au moyen d'un opérateur unitaire de commutation W_η de l'espace de Hilbert de la représentation impulsion $L^2(V_m^+)$ dans le sous-espace $\mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma)$ de $L^2(\Sigma)$. La projection $\mathbf{P}_\eta$ de $L^2(\Sigma)$ dans $\mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma)$ peut s'exprimer par les vecteurs d'états propres $\tilde{\eta}_{q,p}$ [23]

$$\mathbf{P}_\eta = \int_\Sigma |\tilde{\eta}_{q,p}\rangle d\Sigma(q, p) \langle \tilde{\eta}_{q,p}| \quad (4.2.12)$$

Dans la représentation impulsion, les vecteurs d'états propres $\tilde{\eta}_{q,p}(k)$ s'obtiennent à partir des états $\tilde{\eta}(k)$ par l'application d'une translation q et d'un boost de Lorentz l_p

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = \left[\tilde{U}(q, l_p) \tilde{\eta} \right](k) = \exp(\imath k \cdot q) \tilde{\eta}(l_p^{-1}k) \quad (4.2.13)$$

Maintenant, nous passons à la propagation libre de la particule étendue

$$[K_\eta^\mu \Psi](q, p, \xi) = \int d\Sigma(q', p') d\mu(\xi') K_\eta^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') \Psi(q', p', \xi') \quad (4.2.14)$$

Le noyau $K_\eta^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi')$ est défini comme étant l'amplitude de probabilité de transition entre les vecteurs d'états impropres $\eta_{q,p,\xi}$

$$K_\eta^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') = \langle \eta_{q,p,\xi} | K^\mu \eta_{q',p',\xi'} \rangle \quad (4.2.15)$$

$$\eta_{q,p,\xi} = \tilde{\eta}_{q,p} \otimes \psi_\xi, \quad \psi_\xi(\xi') = \delta(\xi - \xi') \quad (4.2.16)$$

$$K^\mu = 1 \otimes \Pi^\mu \quad (4.2.17)$$

C'est un produit

$$K_\eta^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') = K_\eta(q, p; q', p') \Pi^\mu(\xi, \xi') \quad (4.2.18)$$

du propagateur stochastique externe [24]

$$\begin{aligned} K_\eta(q, p; q', p') &= \langle \tilde{\eta}_{q,p} | \tilde{\eta}_{q',p'} \rangle \\ &= \int_{v_m^+} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q - q') \cdot k\right] \hat{\eta}^*(p' \cdot k) \hat{\eta}(p \cdot k) d\Omega(k) \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

et du propagateur ponctuel interne

$$\Pi^\mu(\xi, \xi') = \langle \psi_\xi | \Pi^\mu \psi_{\xi'} \rangle \quad (4.2.20)$$

L'opérateur Π^μ est la composition des opérateurs I^μ et J^μ [36]

$$\Pi^\mu = I^\mu J^\mu \quad (4.2.21)$$

où I^μ a été défini plus haut et J^μ renvoie l'espace de Hilbert de la représentation configuration réductible H^D dans l'espace de Hilbert de la représentation impulsions H^μ . Le propagateur causal interne $\Pi_x^{c\mu}(\xi, \xi')$ s'obtient en considérant la propagation des modes précédents en avant dans le temps et la propagation des antismodes en arrière dans le temps

$$\Pi_x^{c\mu}(\xi - \xi') = \theta(\xi'^0 - \xi^0) \Pi^{\mu+}(\xi - \xi') + \theta(\xi^0 - \xi'^0) \Pi^{\mu-}(\xi - \xi') \quad (4.2.22)$$

Les signes en position haute (+) et (−) dans Π^μ font référence aux modes et antismodes, respectivement. Pour éviter les répétitions, nous allons donner les formes explicites des opérateurs W_η , I^μ , J^μ , et K_η dans le quatrième paragraphe, où nous considérons la propagation de la particule étendue dans une structure géométrique de fibré que nous allons introduire dans la section qui suit.

4.3 Les fibrés et la connexion

Nous allons continuer maintenant avec la construction du modèle géométro-différentiel pour une particule étendue composée d'un mode quantique stochastique externe à symétrie de Poincaré et d'un mode ponctuel interne à symétrie de de Sitter. Nous avons besoin de deux fibrés, à savoir, le fibré impulsion E_m^μ et le fibré configuration E .

Commençons par définir le fibré impulsion E_m^μ

$$E_m^\mu \left(M, L^2(V_m^+ \times C), \tilde{U}_m^\mu \right) \quad (4.3.1)$$

dont la variété de base est un espace-temps courbe M . La fibre type est un espace de Hilbert des impulsions $L^2(V_m^+ \times C)$ qui contient des fonctions $\tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)$ définies sur l'espace des impulsions externe de Poincaré et l'espace des impulsions interne de de Sitter, respectivement. Le groupe structural $\tilde{U}_m^\mu = \tilde{U}_m(a, l) \otimes \tilde{U}^\mu(\xi_T \Lambda)$ agit sur les états $\tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)$ appartenant à la fibre au dessus du point x de la variété de base comme défini dans la section précédente

$$\begin{aligned} \left[\tilde{U}_m^\mu \tilde{\Phi}_x \right] \left(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon \right) &= \left[\frac{[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} \right]^{i\mu + \frac{3}{2}} \exp i(a.k) \\ &\times \left\{ \tilde{\Phi}_x \left(l^{-1}k, \Lambda^{-1} \left(\left(\tilde{\zeta}_L I_\varepsilon \right)^{-1}, \xi \right)_L^{-1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

L'interprétation physique des états $\tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon)$ est qu'ils donnent l'amplitude de probabilité d'avoir le mode externe et interne avec une impulsion k et $\tilde{\zeta}$ respectivement, alors que la particule étendue est localisée en moyenne au point x de l'espace-temps courbe externe en accord avec la théorie stochastique. Le produit scalaire est donné par

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_x | \tilde{\Phi}'_x \rangle &= \int_{V_m^+, C} d\Omega(k) d\Omega(\tilde{\zeta}) \tilde{\Phi}_x^*(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) \tilde{\Phi}'_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) \\ d\Omega(k) &= \frac{d^3 \mathbf{k}}{2k^0}, \quad d\Omega(\tilde{\zeta}) = \delta([\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}]) d^4 \tilde{\zeta} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Les probabilités pour que les modes externe et interne aient respectivement des impulsions k et $\tilde{\zeta}$ comprises dans $\Delta \subset V_m^+$ et $\Delta' \subset C$, peut se définir par

$$P_\Phi(\Delta \times \Delta') = \langle \tilde{\Phi} | \mathbf{P}(\Delta \times \Delta') \tilde{\Phi} \rangle \quad (4.3.4)$$

Les mesures à valeur projectorielle (PV)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_{\Delta \times \Delta'} d\Omega(k) d\Omega(\zeta) |\Phi_{k, \zeta}\rangle \langle \Phi_{k, \zeta}| \\ \tilde{\Phi}_{k, \zeta}(k', \zeta') &= \left(\tilde{\phi}_k \otimes \tilde{\varphi}_\zeta \right)(k', \zeta') \\ &= \delta(k - k') \delta(\tilde{\zeta} - \tilde{\zeta}') \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

constituent un système d'imprimitivité par rapport à $\tilde{U}^\mu$

$$\tilde{U}_m^\mu \mathbf{P}(\Delta \times \Delta') \left[\tilde{U}_m^\mu \right]^{-1} = \mathbf{P}(g(\Delta \times \Delta')) \quad (4.3.6)$$

$$\tilde{U}_m(a, l) \otimes \tilde{U}^\mu(\xi_T \Lambda) = \tilde{U}_m^\mu((a, l), \xi_T \Lambda) \quad (4.3.7)$$

$$g = ((a, l), \xi_T \Lambda) \quad (4.3.8)$$

L'opérateur

$$W_\eta \equiv W_\eta \otimes Id$$

défini par

$$\begin{aligned} W_\eta : L^2(V_m^+ \times C) &\rightarrow \mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma) \otimes \tilde{H}^\mu \\ \tilde{\Phi}(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon) &\longmapsto \left[W_\eta \tilde{\Phi} \right] (q, p, \tilde{\zeta}^\varepsilon) = \tilde{\Psi}(q, p, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

extrait les états localisés

$$\tilde{\Psi}(q, p, \tilde{\zeta}^\varepsilon) = \int d\Omega(k) \exp(-ik \cdot q) \hat{\eta}(k, p) \tilde{\Phi}(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \quad (4.3.10)$$

Nous pouvons définir une mesure POV sur des ensembles de Borel $(\Delta \times \Delta') \subset (\Sigma \times C)$

$$E((\Delta \times \Delta')) = \int_{\Delta, \Delta'} d\Sigma(q, p) d\Omega(\zeta) |\eta_{q, p, \tilde{\zeta}}\rangle \langle \eta_{q, p, \tilde{\zeta}}| \quad (4.3.11)$$

$$\eta_{q, p, \zeta} = \eta_{q, p} \otimes \varphi_\zeta$$

où

$$\varphi_\zeta(\tilde{\zeta}^{\varepsilon'}) = \delta(\tilde{\zeta}^\varepsilon - \tilde{\zeta}^{\varepsilon'}) \quad (4.3.12)$$

telle que

$$\eta_{q, p, \zeta}(q', p', \tilde{\zeta}^{\varepsilon'}) = K_\eta(q', p'; q, p) \delta(\tilde{\zeta}^\varepsilon - \tilde{\zeta}^{\varepsilon'}) \quad (4.3.13)$$

Cette mesure POV constitue un système de covariance par rapport à la représentation U^μ

$$U^\mu(g) E((\Delta \times \Delta')) U^\mu(g^{-1}) = E(g(\Delta \times \Delta')) \quad (4.3.14)$$

$$U(a, \Lambda) \otimes \tilde{U}^\mu(\xi_T \Lambda) = U^\mu((a, l), \xi_T \Lambda) \quad (4.3.15)$$

car

$$E(\Delta \times \Delta') = \mathbf{P}_\eta(\Delta) \otimes P(\Delta') \quad (4.3.16)$$

$$(\Delta \times \Delta') \subset (\Sigma \times C) \quad (4.3.17)$$

est un produit du système de covariance de l'espace des phases stochastique externe

$$\mathbf{P}_\eta(\Delta) = \int_{\Delta} d\Sigma(q, p) |\eta_{q,p}\rangle \langle \eta_{q,p}| \quad (4.3.18)$$

par rapport à $U(a, \Lambda)$ et du système d'imprimitivité de l'espace des impulsions internes

$$P(\Delta') = \int_{\Delta'} d\Omega(\zeta) |\varphi_{\tilde{\zeta}}\rangle \langle \varphi_{\tilde{\zeta}}| \quad (4.3.19)$$

qui est une mesure à valeur projectorielle (PV) covariante par rapport à $\tilde{U}^\mu(\xi_T \Lambda)$.

Si la particule est dans un état Ψ , la probabilité que la mesure simultanée de la position et de l'impulsion stochastiques donne la valeur $(q, p) \in \Delta$ et que l'impulsion interne soit dans Δ' , est donnée par

$$\begin{aligned} P_\psi(\Delta \times \Delta') &= \langle \Psi | E(\Delta \times \Delta') | \Psi \rangle \\ &= \int_{\Delta, \Delta'} d\Sigma(q, p) d\Omega(\zeta) \left| \Psi(q, p, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

$$\Psi(q, p, \tilde{\zeta}^\varepsilon) = \langle \eta_{q,p,\tilde{\zeta}} | \Psi \rangle. \quad (4.3.21)$$

Cette interprétation est possible du fait que la probabilité marginale que la mesure du triplet $(q, p, \tilde{\zeta}^\varepsilon)$ donne une valeur contenue dans $(\sigma \times \Delta \times C)$, pour des hyper-plans σ à temps constant ($q^0 = \text{const.}$), est

$$P_\psi = (2\pi)^3 \int_{\Delta} d^3\mathbf{p} \int_{V_m^+, C} \frac{d\Omega(k)}{2k^0} d\Omega(\zeta) |\hat{\eta}(p.k)|^2 \left| \tilde{\Phi}(k, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2 \quad (4.3.22)$$

A la limite des impulsions externes "exactes", la probabilité précédente tend vers la probabilité [23]

$$\int_{\Delta, C} d\Omega(p) d\Omega(\zeta) \left| \tilde{\Phi}(p, \tilde{\zeta}^\varepsilon) \right|^2 \quad (4.3.23)$$

conventionnelle pour l'impulsion externe avec une intégration par rapport à l'impulsion interne.

La deuxième structure géométrique dont on a besoin est le fibré configuration E

$$E(M, L^2(\Sigma \times V_4^R), \hat{U}) \quad (4.3.24)$$

dans lequel M est la variété de base et la fibre type est l'espace de Hilbert $L^2(\Sigma \times V_4^R)$ qui porte la représentation espace des phases externe du groupe de Poincaré et la représentation

configuration du groupe de de Sitter interne. La représentation produit direct $\hat{U} = U(a, l) \otimes U^D(g)$

$$\left(\hat{U}\Psi_x\right)(q, p, \xi) = \Psi_x(l^{-1}(q - a), l^{-1}p, g^{-1}\xi) \quad (4.3.25)$$

constitue le groupe structural.

Le produit scalaire est

$$\langle \Psi_x | \Psi'_x \rangle = \int_{\Sigma, V_4^R} d\Sigma(q, p) d\mu(\xi) \Psi_x^*(q, p, \xi) \Psi'_x(q, p, \xi) \quad (4.3.26)$$

L'interprétation physique des états $\Psi_x(q, p, \xi)$ est plus difficile car elle fait intervenir une intégrale à quatre dimensions par rapport aux variables internes ($d\mu(\xi) = \delta([\xi, \xi] + R^2) d^5\xi$). En effet, seule la partie externe possède une interprétation probabiliste stochastique pour des fonctions d'onde appartenant à la composante irréductible $(\mathbf{P}_\eta \otimes \mathbf{1}) L^2(\Sigma \times V_4^R)$ de l'espace des phases externe. Qui correspond à des probabilités d'observer des fluctuations (q, p) autour d'une valeur moyenne x [23, 24].

Une interaction classique est prise en compte en introduisant une connexion dans la structure géométrique en fibré

$$\Gamma_T(x) = \Gamma(x) + \Gamma^R(x) \quad (4.3.27)$$

La connexion $\Gamma_T(x)$ est la somme de la connexion externe de Poincaré $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = dx^\mu \theta_{\mu k} (I^k \otimes 1) + \frac{1}{2} dx^\mu \Gamma_{\mu kl}(x) (I^{kl} \otimes 1) \quad (4.3.28)$$

et de la connexion interne de de Sitter $\Gamma^R(x)$

$$\Gamma^R(x) = \frac{1}{2} dx^\mu \Gamma_{\mu ab}^R(x) (1 \otimes I^{ab}) \quad (4.3.29)$$

Les générateurs I^k et I^{kl} du groupe de Poincaré, peuvent prendre dans la représentation espace des phases la forme suivante [57]

$$\begin{aligned} I_k &= P_k = \imath \partial / \partial q^k \\ I_{kl} &= M_{kl} = (Q_k P_l - Q_l P_k) \\ Q_k &= q_k - \imath \partial / \partial p^k \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Les générateurs correspondant au groupe de de Sitter, s'écrivent dans la représentation configuration [19]

$$I_{ab} = i \left(\xi_a \frac{\partial}{\partial \xi^b} - \xi_b \frac{\partial}{\partial \xi^a} \right) \quad (4.3.31)$$

Les coefficients de la connexion $\Gamma_{\mu kl}(x)$ jouent le rôle d'un champs de gravitation externe alors que les coefficients $\Gamma_{\mu ab}^R(x)$ jouent le rôle d'un champ de jauge de de Sitter interne décrivant l'interaction forte entre les hadrons.

4.4 Propagation de la particule étendue dans un espace-temps courbe

La méthode des représentations induites permet de déterminer le propagateur d'une particule ponctuelle au moyen d'opérateurs de commutations. Il s'avère que la généralisation de ces applications à la particule étendue est possible. Pour ce faire, considérons tout d'abord l'application qui nous fait passer d'un état $\tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) \in L^2(V_m^+ \times C)$ vers un état $\Psi_x(q, p, \xi) \in (\mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma) \otimes H^{D\mu}) \subset L^2(\Sigma \times V_4^R)$ et qui s'effectue au moyen de l'opérateur de commutation locale

$$I_{x,\eta}^\mu = W_{x,\eta} \otimes I_x^\mu \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} I_{x,\eta}^\mu : L^2(V_m^+ \times C) &\rightarrow (\mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma) \otimes H^{D\mu}) \subset L^2(\Sigma \times V_4^R) \\ \tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) &\mapsto \left[I_{x,\eta}^\mu \tilde{\Phi}_x \right] (q, p, \xi) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Les applications $W_{x,\eta}$ et I_x^μ sont des transformations intégrales (voir [24] et [36]) de telle sorte que l'opérateur $I_{x,\eta}^\mu$ prend la forme suivante (I^0 est une constante)

$$\begin{aligned} \left[I_{x,\eta}^\mu \tilde{\Phi}_x \right] (q, p, \xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{V_m^+, C} d\Omega(k) d\Omega(\tilde{\zeta}) \exp[-i(k.q)] \\ &\times \eta(k.p) \left[\frac{[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} - i0 \right]^{-i\mu - \frac{3}{2}} I^0 \tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

L'application inverse est réalisée au moyen de l'opérateur local

$$J_{x,\eta}^\mu = W_{x,\eta}^{-1} \otimes J_x^\mu \quad (4.4.4)$$

$$J_{x,\eta}^\mu : \mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma \times V_4^R) \rightarrow L^2(V_m^+ \times C)$$

$$\Psi_x(q, p, \xi) \mapsto [J_{x,\eta}^\mu \Psi_x] \left(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon \right) \equiv \tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) \quad (4.4.5)$$

qui prend la forme intégrale suivante (J^0 est une constante)

$$\tilde{\Phi}_x(k, \tilde{\zeta}_L I_\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma, V_4^R} d\Sigma(q, p) d\mu(\xi) \exp[i(k.q)]$$

$$\times \eta(k.p) \left[\frac{\left[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon \right]}{R} + i0 \right]^{i\mu - \frac{3}{2}} J^0 \Psi_x(q, p, \xi) \quad (4.4.6)$$

L'opérateur $K_{x,\eta}^\mu$

$$K_{x,\eta}^\mu = I_{x,\eta}^\mu J_{x,\eta}^\mu = 1 \otimes \Pi_x^\mu \quad (4.4.7)$$

$$K_{x,\eta}^\mu : \mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma \times V_4^R) \rightarrow \mathbf{P}_\eta L^2(\Sigma) \otimes H^{D\mu}$$

$$\Psi_x(q', p', \xi') \mapsto [K_{x,\eta}^\mu \Psi_x](q, p, \xi). \quad (4.4.8)$$

correspond à la propagation

$$[K_{x,\eta}^\mu \Psi_x](q, p, \xi) = \int d\Sigma(q', p') d\mu(\xi') K_{x,\eta}^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') \Psi_x(q', p', \xi') \quad (4.4.9)$$

dans l'espace des phases tangent et l'espace interne de de Sitter au dessus du point x de l'espace courbe. Pour la construction du propagateur dans un espace-temps courbe, nous allons suivre la théorie géométro-stochastique. En effet, l'ensemble de tous les vecteurs d'états impropres $\eta_{x,q,p,\xi}$ constituent un repère quantique local [24] et la propagation ci-dessus peut être définie par

$$K_{x,\eta}^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') = \langle \eta_{x,q,p,\xi} | K_x^\mu \eta_{x,q',p',\xi'} \rangle \quad (4.4.10)$$

Avec la connexion introduite dans la section précédente, nous définissons un propagateur semi-classique K_γ^μ comme étant le propagateur local libre K_x^μ entre les vecteurs d'états $\eta_{x,q,p,\xi}$ et les vecteurs d'états ayant subi un transport parallèle $\tau(\gamma) \eta_{x',q',p',\xi'}$ le long d'une courbe quelconque γ dans M

$$K_{\gamma\eta}^\mu(x, q, p, \xi; x', q', p', \xi') = \langle \eta_{x,q,p,\xi} | K_x^\mu \tau(\gamma) \eta_{x',q',p',\xi'} \rangle \quad (4.4.11)$$

Dans le cas scalaire, le transport parallèle n'affecte que les variables (q', p') et ξ' par les éléments $g(\Gamma)$ et $g(\Gamma^R)$ des groupes de Poincaré et de de Sitter, respectivement [27, 64]

$$g(\Gamma) = P \left(\exp \left(-i \int_{\gamma} \Gamma(x) \right) \right) \in ISO(3, 1) \quad (4.4.12)$$

$$g(\Gamma^R) = P \left(\exp \left(-i \int_{\gamma} \Gamma^R(x) \right) \right) \in SO(4, 1) \quad (4.4.13)$$

et le propagateur s'écrit alors sous la forme

$$K_{\gamma\eta}^{\mu}(x, q, p, \xi; x', q', p', \xi') = K_{\eta}(q, p; g(\Gamma) q', g(\Gamma) p') \Pi^{\mu}(\xi, g(\Gamma^R) \xi') \quad (4.4.14)$$

La connexion doit être considérée dans la représentation matricielle des variables sur lesquelles elle agit.

Ensuite, on considère une foliation de l'espace-temps courbe avec des hypersurfaces $\sigma(t_n)$ de genre-espace où $x' = x_0 \in \sigma(t_0)$, $x = x_N \in \sigma(t_N)$, et $n = 0, 1, \dots, N$. Pour chaque point x_{n-1} , on impose que x_n appartiennent à l'intersection entre $\sigma(t_n)$, le future causal de x_{n-1} et le passé causal du point finale $x = x_N$. On définit aussi la valeur moyenne du propagateur $K_{\eta}^{\mu}(X_n, X_{n-1})$ avec $X_n = (x_n, q_n, p_n, \xi_n)$, comme étant le propagateur $K_{\gamma\eta}^{\mu}(X_n, X_{n-1})$ divisé par l'aire de cette intersection. Le propagateur total est la limite [24]

$$K(x, q, p, \xi; x', q', p', \xi') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int K_{\eta}^{\mu}(X_N, X_{N-1}) \times \prod_{n=N-1}^1 d\sigma(x_n) d\Sigma(q_n, p_n) d\mu(\xi_n) K_{\eta}^{\mu}(X_n, X_{n-1}) \quad (4.4.15)$$

où $\varepsilon = \max(t_n - t_{n-1})$.

Quand la variété de base externe M est un espace-temps plan de Minkowski identifié avec tout son espace-tangent et le transport parallèle ne dépend plus du chemin suivi, ce propagateur ce réduit au produit

$$K_{x,\eta}^{\mu}(q, p, \xi; q', p', \xi') = K_{x,\eta}(q, p; q', p') \Pi_x^{c\mu}(\xi, \xi') \quad (4.4.16)$$

du propagateur externe stochastique

$$K_{x,\eta}(q, p; q', p') = \int_{V_m^+} d\Omega(k) \tilde{\eta}_{q,p}^*(k) \tilde{\eta}_{q',p'}(k) \quad (4.4.17)$$

et du propagateur causal interne $\Pi_x^{c\mu}(\xi, \xi')$ ponctuel

$$\Pi_x^{c\mu}(\xi - \xi') = \theta(\xi'^0 - \xi^0) \Pi_x^{\mu+}(\xi - \xi') + \theta(\xi^0 - \xi'^0) \Pi_x^{\mu-}(\xi - \xi') \quad (4.4.18)$$

avec

$$\Pi_x^{\mu\pm}(\xi - \xi') = \sum_{\varepsilon} I^{0\pm} J^{0\pm} \int_C d\Omega(\tilde{\zeta}) \left\{ \left[\frac{[\xi, \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} \mp i0 \right]^{-i\mu - \frac{3}{2}} \left[\frac{[\xi', \tilde{\zeta}^\varepsilon]}{R} \pm i0 \right]^{i\mu - \frac{3}{2}} \right\} \quad (4.4.19)$$

4.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons construit un modèle d'une particule étendue relativiste scalaire en mouvement dans un espace-temps courbe qui reflète la présence d'un champ gravitationnel. Les degrés de liberté internes sont décrits par un mode quantique interne en mouvement dans un espace-temps de de Sitter. L'interaction forte entre particules élémentaires correspond à une théorie de jauge de la symétrie interne de de Sitter alors que l'interaction gravitationnelle correspond à la symétrie externe de Poincaré. Le mode interne est quantifié par la méthode des représentations induites avec des opérateurs de commutation donnant le propagateur interne. La propagation entre deux points différents de l'espace-temps externe a été réalisée par l'utilisation des éléments du repère quantique $\eta_{x,q,p,\xi}$ qui permettent la définition d'un transport parallèle quantique.

Pour arriver à une application concrète du présent travail, on doit d'abord tester les idées de bases de l'adoption d'une représentation stochastique pour le mode externe et une représentation ponctuelle pour le mode interne dans le régime non-relativiste. Nous avons obtenu une interprétation probabiliste acceptable dans ce cas malgré la formulation générale utilisée [37].

Aussi, nous pouvons spécifier une symétrie de jauge unitaire (de couleur) correspondant à une interaction forte dans l'espace interne de de Sitter. On s'attend à ce que ceci donne de bons résultats. Comme nous ne connaissons pas bien les symétries unitaires, nous projetons de réaliser de telles applications à une étape ultérieure de notre programme.

En ce qui concerne la propagation, on doit choisir un espace-temps courbe avec sa connexion de Poincaré, mais plus difficile est la détermination de la connexion de de Sitter. Cette dernière peut être déduite d'un ensemble tels que les équations des champs d'Einstein et de Yang-Mills dérivé de la structure en fibré dans la représentation non-linéaire de la

symétrie de de Sitter, en plus d'une équation d'onde pour la brisure de symétrie du champ [29, 64, 63] (voire la référence [62] dans le cas du rotateur relativiste).

Le présent travail comporte quelques difficultés. Premièrement, le produit scalaire dans l'espace interne est défini avec une intégrale sur le temps qui ne possède pas une interprétation probabiliste mais peut être évitée par le passage à la seconde quantification. Ce type d'intégration a été utilisé dans le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique [5]. La deuxième difficulté, peut surgir quand on considère la représentation non-linéaire de la symétrie de de Sitter dont la brisure de symétrie a été identifiée avec la gravitation [63]. Il est clair de la présente formulation que l'interaction gravitationnelle (symétrie de Poincaré externe) et forte (symétrie interne de de Sitter) ont été distinguées dès le départ. Ces deux questions feront l'objet d'un travail ultérieur. Des particules avec des modes spinoriels (tels que les quarks) seront considérées.

Conclusion

En adoptant un point de vue géométro-stochastique pour la quantification du mode externe composant la particule étendue, nous avons apporté une amélioration au modèle géométro-différentiel sur deux points. Le premier, concerne la localisation de la particule étendue dans l'espace-temps externe. Le deuxième point, concerne la propagation dans un espace-temps courbe.

En effet, le mode externe composant la particule étendue représente la localisation globale de la particule étendue (centre de masse) dans l'espace-temps externe. Il est directement accessible au processus de mesure. La quantification par la théorie géométro-stochastique est plus adaptée au mode externe car elle traite du problème de la localisation des particules dans un espace des phases stochastique. Le mode externe, acquiert alors une extension stochastique. En ce qui concerne les degrés de libertés internes (mouvement relatif), il y a plusieurs manières de les quantifier⁽¹⁾. Ces derniers sont inaccessibles à la mesure directe et sont quantifiés par la méthode des représentations induites qui décrit des particules ponctuelles.

Notre propre travail a été entrepris en trois phases. On a commencé par une comparaison simple entre le modèle de l'oscillateur harmonique relativiste et le modèle géométro-différentiel de la particule étendue pour éclaircir le sens du champ bilocal et montrer ses limites (interprétation probabiliste du mode interne dans l'espace de configuration).

Dans la deuxième étape, on a considéré un mode externe non relativiste pour pouvoir comparer nos résultats avec la théorie stochastique dans un domaine où ses interprétations sont claires. Le mode externe possède la symétrie de Galilée et le mode interne effectue

⁽¹⁾D'autres méthodes de quantification dans l'espace de de Sitter ont été récemment développées [65, 66, 67] et [68].

un mouvement interne dans l'espace-temps de de Sitter. L'interaction n'est pas prise en compte et le champ bilocal décrivant la particule étendue a la forme d'un produit d'une partie externe et d'une partie interne. Un système d'imprimitivité est défini sur l'espace des impulsions externe de Galilée et interne de de Sitter. La propagation est définie comme l'amplitude de probabilité de transition entre les états impropres $\eta_{\mathbf{qp}\xi}$. C'est un produit, du propagateur stochastique externe et du propagateur ponctuel interne. Les fonctions $\eta_{\mathbf{qp}\xi}$, dont la composante interne est dans la représentation induite d'impulsion du groupe de de Sitter, définissent un système de covariance qui est un produit du système de covariance dans l'espace des phases externe de Galilée et du système d'imprimitivité dans l'espace des impulsions interne de de Sitter. Ce système de covariance est en bon accord avec la théorie stochastique quand les probabilités marginales sont calculées. La structure géométrique n'a pas été considérée.

Ensuite, nous avons construit un modèle relativiste d'une particule intrinsèquement et stochastiquement étendue à symétrie interne de de Sitter. Le rôle du groupe de Galilée externe dans le modèle non-relativiste est repris par celui du groupe externe de Poincaré. Les états de la particule étendue sont alors définis dans une structure de Fibré de Hilbert avec le produit direct des groupes de Poincaré externe et de de Sitter interne comme groupe structural. L'interaction gravitationnelle classique est introduite comme une connexion de Poincaré externe indépendamment de la connexion de de Sitter interne qui représente l'interaction forte. Les opérateurs de commutation définissent la propagation dans une fibre comme une amplitude de transition entre les repères quantiques locaux $\eta_{x,q,p,\xi}$. Le transport parallèle de ces repères quantiques, est utilisé pour déterminer le propagateur semi-classique, puis total, de la particule étendue comme dans la théorie géométrostochastique.

En ce qui concerne l'absence d'interprétation probabiliste dans l'espace-temps interne de de Sitter, cette difficulté ne nuit pas au modèle car le but est de décrire la propagation de la particule étendue dans un espace courbe qui reflète la présence d'un champ gravitationnelle classique. Ceci a été réalisée dans le cas relativiste et peut se faire dans le cas non-relativiste en ce basant sur le travail de la référence [61].

La prochaine étape consiste en la considération de la représentation non-linéaire du groupe de de Sitter dont la brisure de symétrie a été identifiée avec la gravitation [63]. Bien

que ce dernier point ne soit pas encore très clair dans notre cas, nous entendons l'aborder incessamment.

Aussi, nous projetons de nous tourner vers des applications concrètes de notre modèle citées dans la conclusion du dernier chapitre de cette thèse. Un autre développement du présent travail consiste à quantifier le champ de gravitation, dans le modèle géométro-différentiel de la particule étendue, en suivant la procédure de la théorie géométro-stochastique [24, 69].

Bibliographie

- [1] Aitchinson I J R, Hey A J G 2003 *Gauge Theories in Particle Physics* (Bristol : Institute of Physics Publishing)
- [2] Close F E 1979 *An Introduction to Quarks and Parton* (New York : Academic Press)
- [3] Böhm A *et al.* 1988 *Int. J. Mod. Phys. A* **3** 1103-1121
- [4] Aldinger R R 1985 *Phys. Rev.* **D28** 1503-1511
- [5] Kim Y S, Noz M E 1986 *Theory and Applications of the Poincaré Group* (Dordrecht : Reidel)
- [6] Han D, Noz M E et al 1983 *Phys. Rev.* **D25** 6 1740-1743
- [7] Kim Y S, Noz M E 1979 *J. Math. Phys.* **20** 7 1341-1344
- [8] Kim Y S, Noz M E 1978 *Am. J. Phys.* **46** 5 480-483
- [9] Kim Y S, Noz M E 1978 *Am. J. Phys.* **46** 5 484-488
- [10] Barut A O and Böhm A 1965 *Phys. Rev.* **139B** 1107–1112
- [11] Böhm A 1966 *Phys. Rev.* **145**, 1212–1214
- [12] Aldinger R R *et al.* 1983 *Phys. Rev.* **D28** 3020-3031
- [13] Böhm A 1993 *Found. Phys.* **23** 751-767
- [14] Aldinger R R 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 527-544

- [15] Nakahara M 1992 *Geometry, Topology and Physics* (Bristol : Institute of Physics Publishing)
- [16] Drechsler W 1979 *in Group Theoretical Methods in Physics, Lecture Notes in Physics vol 94* (Berlin : Springer)
- [17] Drechsler W 1977 *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories, Lecture Notes in Physics vol 67* (Berlin : Springer)
- [18] Drechsler W 1975 *Fortschr. Phys.* **23** 607–647
- [19] Drechsler W, Prugovečki E 1991 *Found. Phys.* **21**, 513–546
- [20] Prugovečki E 1987 *Nuovo Cimento A* **97** 837–878
- [21] Prugovečki E 1988 *Nuovo Cimento A* **100** 289–297
- [22] Prugovečki E, Warlow S 1989 *Found. Phys. Lett.* **2** 409–423
- [23] Prugovečki E 1984 *Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time* (Dordrecht : Reidel)
- [24] Prugovečki E 1992 *Quantum Geometry* (Dordrecht : Kluwer)
- [25] Ali S T, Prugovečki E 1986 *Acta. Appl. Math* **6** 19-45
- [26] Ali S T 1984 *Riv. Nuovo Cimento* **8** 1-128
- [27] Smida A, Hachemane M and Fellah M 1995 *Found. Phys.* **25** 1769–1795
- [28] Drechsler W 1985 *J. Math. Phys.* **26** 41–54
- [29] Drechsler W 1989 *Found. Phys.* **19** 1479–1497
- [30] Hachemane M, Benbitour M A and Smida A 1997 *Found. Phys.* **27** 579-594
- [31] Smida A, Hachemane M and Hamici A-H 1998 *Found. Phys.* **28** 1367-1381
- [32] Destouches J 1958 *La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules* (Paris : Gauthier- Villars)

- [33] Destouches J 1958 *Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle* (Paris : Gauthier-Villars)
- [34] de Broglie J L 1971 *La Réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire* (Paris : Gauthier-Villars)
- [35] Mensky M 1976 *Commun. Math. Phys.* **47** 97–108
- [36] Mensky M 1976 *The Method of Induced Representations: Space-Time and the Concept of Particles* (Moscow : Nauka)
- [37] Smida A, Hachemane M, Hamici A H and Oualili Y 2008 *Int. J. Theor. Phys.* **47** 1459-70
- [38] Benrabia D, Hachemane M, Smida A and Hamici A-H 2008 *J. Phy. A: Math. Theor.* **41** 304005
- [39] Yukawa H 1953 *Phys. Rev.* **91** 416-417
- [40] Feynmann R P, Kislinger M and Ravndal F 1971 *Phys. Rev.* **D3** 2706-2732
- [41] Smida A, Hamici A-H and Hachemane M 2000 *Ann. Fond. Louis de Broglie* **25** 137-154
- [42] Han D, Kim Y S and Noz M E 1981 *Found. Phys.* **11** 895–905
- [43] Kim Y S, Noz M E 2005 *Found. Phys.* **35** 1289-1305
- [44] Griffiths J B, Podolsky J 2009 *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity* (Cambridje : Cambridje University press)
- [45] Drechsler W, Sasaki R 1978 *Nuovo Cimento* **46** 527-567
- [46] Kuriyan J B, Mukunda N et Sudershan E C G 1968 *Commun. Math. Phys.* **8** 204–227
- [47] Gazeau J P, Lachiéz R 2006 *Quntum field theory in de Sitter space: A survey of recent approaches* arXiv:hep/061029v1
- [48] Mackey G W 1955 *The Theory of Group Representations* (Chicago : University of Chicago notes)

- [49] Wigner E P 1939 *Ann. Math.* **40** 149-204
- [50] Barut A O and Raczka R 1986 *Theory of Group Representations and Applications* (Singapore : World Scientific)
- [51] Kàlnay A J 1971 *The localisation problem eds Bung M* (Berlin :Springer)
- [52] Wigner E P 1983 *in Quantum Theory and Musurement* eds Wheeler J A and Zurek H (Princeton : Princeton University press)
- [53] Gazeau J P 2001 *Dans L'espace physique entre mathematiques et philosophie coordonné par Marc Lachieze-Rey (EDP Sciences)*
- [54] Hegerfeld G C 1974 *Phys. Rev.* **D10** 3320-3321
- [55] Prugovečki E 1981 *Found. Phys.* **11** 355–382
- [56] Prugovečki E 1984 *Found. Phys.* **11** 1147–1162
- [57] Prugovečki E 1985 *Nuovo Cimento* **A 85** 105-125
- [58] Ali S T, Prugovečki E 1986 *Acta. Appl. Math* **6** 1-18
- [59] Rougé A 1997 *Introduction à la Physique Subatomique (Editeur ellipses)*
- [60] Perkins D H 2000 *Introduction to Hight Energy Physics* (Cambridje : Cambridje University press)
- [61] Prugovečki E 1987 *Class. Quantum Grav.* **4** 1659-1678
- [62] Aldinger R R 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 1885-1907
- [63] Drechsler W 1992 *Found. Phys.* **22** 1041–1077
- [64] Hachemane M, Smida A and Djelid R 1999 *Found. Phys.* **29** 1479–1494
- [65] Bross J, Gazeau J P et Moshella U 1994 *Phys. Rev. Lett.* 1746-1749
- [66] Moshella U 1995 *Ann. Inst. Henri Poincaré* **63** 411-426

- [67] Bross J, Moshella U 1996 *Rev. Math. Phys.* **8** 327-392
- [68] Pol'shin S A 1999 *Phys. Lett. B* **449** 56-59
- [69] Prugovečki E 1995 *Principles of Quantum General Relativity* (Singapore : World Scientific)