

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene**  
**Faculté des Mathématiques**



**Thèse de Doctorat**

**Présentée pour l'obtention du grade de Docteur**

**En : Mathématiques**

**Option : Equations aux dérivées partielles et applications**

**Par : Rokia KECHKAR**

**Etude d'un problème de diffusion neutronique de type anisotrope non local,  
dégénéré**

Soutenue publiquement le 17-07-2019 à 10h devant le jury composé de :

M <sup>me</sup>	.N.AISSA	Professeur	à l'USTHB	Présidente
M	.M.S.MOULAY	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse
M	.S.GUESMIA	Professeur	à Zurich	Co-directeur de thèse
M	.T.ALIZIANE	Professeur	à l'USTHB	Examineur
M	.M.BOUSSELSAL	Professeur	à l'ENS-Kouba	Examineur
M	.A.SENGOUGA	professeur	à l'Université de M'Sila	Examineur

---

## Remerciements

---

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la force, le courage et la patience pour accomplir ce travail.

Je remercie aussi mes directeurs de thèse Moulay Mohamed Said et Guesmia Senoussi de m'avoir proposé ce sujet très intéressant, je les remercie pour leurs orientations et leurs remarques pertinentes ainsi que la rigueur qu'ils m'ont transmis.

Je remercie également M<sup>r</sup> Ali Ziane Tarik, M<sup>me</sup> Aissa Naima, M<sup>r</sup> Bousselsal Mahmoud et M<sup>r</sup> Sengouga Abdelmouhcene de m'avoir honoré en acceptant de faire partie du jury.

Je tiens vivement à remercier mes chers parents pour le soutien qui m'ont apporté durant toute ma vie et en particulier ma très chère mère qui n'a épargné aucun effort pour que ce travail voit le jour.

Un très grand merci pour mon mari Abdelkhalek qui m'a accompagné durant ce travail, je te remercie du fond du coeur pour ton soutien et ta patience. Je remercie aussi mes précieuses filles Hala et Darine et mon fils Abdelbari qui a vécu avec moi cette expérience d'une manière très particulière.

Je remercie très chaleureusement mes chères soeurs pour leurs soutien continuel et inconditionnel, elles ont fait tout pour m'apporter de l'aide. Sans oublier mon frère Mohamed qui m'a apporté un grand soutien moral. Je remercie mes nièces et neveux Abderrahmane, Younes, Nada, Naila et Assia, vous valez beaucoup pour moi.

Je tiens à remercier mes tantes Saida et Nacera qui m'ont beaucoup soutenues, vos prières m'ont touché. Je remercie en particulier ma tante Fatiha qui m'a accompagné durant tout mon cursus universitaire, merci pour tout ce que tu m'a offert.

Je remercie également ma belle famille pour le soutien dont ils m'ont apporté.

A la fin je remercie toute personne qui a m'a apporté un soutien, je cite mes amies Ouzzane Hadjer, Louardani Asma et Boutaleb Asma.

---

## Résumé

---

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution d'une classe de problèmes intégral-différentielles semilinéaires de type anisotrope et dégénéré avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord. Malgré que la différentiation est prise dans seulement quelques directions, il ne sera pas possible de voir ces problèmes comme paramétrés par le reste des coordonnées vu la présence du terme non local. Nous établissons l'existence de solutions faibles dans un espace de Sobolev à poids en utilisant une méthode de perturbations singulières comme une voie naturelle de régularisation. Chaque problème obtenu après perturbation est semi-linéaire classique et non local. La limite des sous suites des solutions du problème perturbé sont solutions du problème initiale. Nous proposons quelques améliorations concernant l'espace d'existence de solutions et les résultats de convergences dépendant du poids. Le travail donne une idée sur l'étude des perturbations singulières anisotrope dans le cadre des espaces de Sobolev à poids. anisotropes dans les espaces à poids.

**Mots clés.** Equations elliptiques, semilinéaires, dégénérés, paraboliques, anisotropes, problèmes integro-différentiels, perturbations singulières, comportement asymptotique.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels mathématiques et généralités sur les perturbations singulières anisotropes</b>	<b>5</b>
1.1 Rappels mathématiques . . . . .	5
1.1.1 Quelques inégalités . . . . .	5
1.1.2 Théorèmes . . . . .	6
1.1.3 Définitions . . . . .	8
1.1.4 Existence et unicité de l'équation de Laplace . . . . .	10
1.1.5 Existence et unicité de l'équation de la chaleur . . . . .	10
1.2 Généralités sur les perturbations singulières anisotropes . . . . .	11
1.2.1 Principe de la méthode des perturbations singulières . . . . .	11
1.2.2 Perturbations singulières anisotropes . . . . .	12
<b>2 Etude du problème stationnaire</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Premier problème . . . . .	17
2.2.1 Position du problème et théorème d'existence . . . . .	17
2.2.2 Preuve du théorème 2.2.1 . . . . .	18
2.2.2.1 Etude du problème perturbé (2.11) . . . . .	19
2.2.2.2 Estimation des solutions du problème perturbé . . . . .	23
2.2.2.3 Passage à la limite . . . . .	24
2.2.3 Amélioration des poids . . . . .	33
2.2.3.1 Quelques estimations a priori . . . . .	34
2.2.3.2 Passage à la limite . . . . .	35

2.3	Deuxième problème . . . . .	38
2.3.1	Position du problème et théorème d'existence . . . . .	38
2.3.2	Etude du problème perturbé . . . . .	40
2.3.2.1	Existence de solutions du problème perturbé . . . . .	40
2.3.2.2	Passage à la limite . . . . .	42
2.3.3	Amélioration des poids . . . . .	49
2.3.3.1	Premier cas . . . . .	50
2.3.3.2	Deuxième cas . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Etude du problème d'évolution</b>	<b>56</b>
3.1	Position du problème et théorème d'existence . . . . .	56
3.2	Preuve du théorème d'existence . . . . .	57
3.2.1	Le problème perturbé . . . . .	58
3.2.2	Existence de solution du problème perturbé . . . . .	58
3.2.3	Estimation des solutions du problème perturbé . . . . .	62
3.2.4	Passage à la limite sur $\varepsilon$ . . . . .	64
3.2.4.1	Convergences faibles . . . . .	64
3.2.4.2	Convergences fortes . . . . .	67
3.3	Amélioration des poids . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Conclusion générale et Perspectives</b>	<b>84</b>

---

## Notations

---

$\omega_1$	ouvert borné de $\mathbb{R}^p$ , $p$ entier positif.
$\omega_2$	ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-p}$ , $n$ entier positif.
$\Omega = \omega_1 \times \omega_2$	ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ .
$X_1 \in \omega_1, X_2 \in \omega_2$	$X_1 = (x_1, \dots, x_p), X_2 = (x_{p+1}, \dots, x_{n-p})$ .
$\partial\Omega$	bord de $\Omega$ .
$ \Omega $	mesure de $\Omega$ .
$L^2(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et }  u ^2 \in L^1(\Omega)\}$ .
$L^2(\Omega)^n$	$\{u = (u_1, \dots, u_n), u_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$ .
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } \exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ telle que }  u(x)  \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}$ .
$L^2_{loc}(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u _K \in L^2(\Omega) \forall K \subset \Omega \text{ compact}\}$ .
$\mathcal{C}(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ continue}\}$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\Omega$ .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distributions sur $\Omega$ , dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ .

$H_0^1(\Omega)$	fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ .
$H^{-1}(\Omega)$	dual de $H_0^1(\Omega)$ .
$W^{1,\infty}(\Omega)$	$\{u \in L^\infty(\Omega), \partial_{x_i} u \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$ .
$L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$	$\{u : ]0, T[ \rightarrow H_0^1(\Omega) \text{ avec } \left( \int_0^T \ u(t)\ _{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} < \infty\}$ .
$L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$	dual topologique de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .
$L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$	$\{u : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega) \text{ tel que } \sup_{0 < t < T} \ u(t)\ _{L^2(\Omega)} < \infty\}$ .
$u'$	$\frac{\partial}{\partial t} u$ .
$ \cdot _{L^p}$	norme dans $L^p$ .
$\Delta_{X_1} u$	$\sum_{i=1}^p \partial_{x_i}^2 u$ .
$\Delta_{X_2} u$	$\sum_{i=1}^{n-p} \partial_{x_i}^2 u$ .
$\nabla_{X_1}$	$\nabla_{X_1} = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_p} u)^T$ (gradient par rapport à $X_1$ ).
$\nabla_{X_2}$	$\nabla_{X_2} = (\partial_{x_{p+1}} u, \dots, \partial_{x_n} u)^T$ (gradient par rapport à $X_2$ ).
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	crochet de dualité.
$(\cdot, \cdot)_{L^2}$	produit scalaire dans $L^2$ .
$\text{supp } u$	support de $u$ .

---

## Introduction générale

---

La motivation de ce travail remonte à l'équation de Boltzmann modélisant la distribution neutronique dans un réacteur nucléaire gouvernée par une équation aux dérivées partielles du premier ordre, hyperbolique et donnée par

$$(1) \quad \frac{1}{v} \psi_t(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \sigma(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = q(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t),$$

où  $t$  désigne le temps,  $\vec{r}$  est la position spatiale du neutron,  $\hat{\Omega}$  sa direction,  $E$  représente l'énergie,  $v$  est la vitesse du faisceau des neutrons dans la direction de  $\hat{\Omega}$ ,  $\psi(r, \hat{\Omega}, E, t)$  est le flux angulaire du neutron et  $\sigma(\vec{r}, E)$  représente la section efficace macroscopique. Le symbole  $\nabla$  dénote l'opérateur gradient par rapport à la variable  $\vec{r}$  et  $q(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$  est le terme source vérifiant

$$q = q_f + q_{ex} + q_s,$$

où  $q_f$  est le terme de fission,  $q_{ex}$  représente la source extérieure et

$$q_s(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) = \int_0^\infty dE' \int_{\hat{\Omega}'} d\Omega' \sigma_s(\vec{r}, E \rightarrow E', \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}, t) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E, t),$$

où  $\sigma_s$  est la section efficace microscopique.

Dans un premier temps on examine le cas stationnaire, en faisant les hypothèses suivantes : vitesse constante, absence de matériaux fissiles (ceci veut dire que  $q_f = 0$ ), faisceau monoénergétique (c'est à dire l'énergie est constante). On considère le cas où la diffusion à travers la section efficace microscopique est isotrope ce qui se traduit par  $\sigma_s = \sigma_s(r)$ .

Tenant compte des simplifications précédentes  $q_s$  devient

$$q_s = \sigma_s(r) \int_{\hat{\Omega}} \psi(r, \hat{\Omega})$$

Remplaçant dans (1), on obtient l'équation de Boltzmann simplifiée suivante

$$(2) \quad \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) - \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) = s(\vec{r}, \hat{\Omega}),$$

où  $\phi(\vec{r}) = \int_{\hat{\Omega}} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega}$  est le flux scalaire et  $s(\vec{r}, \hat{\Omega})$  est le terme de source extérieure.

On applique la méthode dite de Vladimirov à l'équation (2) qui consiste à examiner l'équation vérifiée par la partie positive du flux angulaire  $\psi$ . Pour plus de détails sur l'application de la méthode de Vladimirov voir [6, 12, 16] et leurs références. On considère pour cela les parties positive et négative de  $\psi(\vec{r}, \hat{\Omega})$  :

$$\psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2}(\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \psi(\vec{r}, -\hat{\Omega})),$$

$$\psi^-(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2}(\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) - \psi(\vec{r}, -\hat{\Omega})).$$

Par suite

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \psi^-(\vec{r}, \hat{\Omega}),$$

et le flux scalaire s'écrit

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\hat{\Omega}} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Omega}} \psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega},$$

grâce au fait

$$\int_{\hat{\Omega}} \psi^-(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = 0$$

puisque  $\psi^-$  est impaire et le domaine d'intégration étant symétrique (domaine angulaire).

On réécrit l'équation (2) en remplaçant  $\hat{\Omega}$  par  $-\hat{\Omega}$ , on obtient

$$(3) \quad -\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, -\hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\psi(\vec{r}, -\hat{\Omega}) - \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) = s(\vec{r}, -\hat{\Omega}).$$

En faisant la somme de (2) et (3) on obtient

$$(4) \quad \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) - \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) = s^+(\vec{r}, \hat{\Omega}),$$

Et par différence, on a

$$(5) \quad \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\psi^-(\vec{r}, \hat{\Omega}) = s^-(\vec{r}, \hat{\Omega}).$$

Où les termes  $s^+$  et  $s^-$  sont donnés par

$$s^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2}(s(\vec{r}, \hat{\Omega}) + s(\vec{r}, -\hat{\Omega})),$$

et

$$s^-(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2}(s(\vec{r}, \hat{\Omega}) - s(\vec{r}, -\hat{\Omega})).$$

On écrit  $\psi^-(\vec{r}, \hat{\Omega})$  en fonction de  $\psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega})$ , à partir de (5) on a alors :

$$(6) \quad \psi^-(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \frac{1}{\sigma(\vec{r})} \left[ s^-(\vec{r}, \hat{\Omega}) - \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) \right], \quad \sigma(\vec{r}) \neq 0.$$

Par substitution dans (4), on obtient l'équation suivante vérifiée par  $\psi^+$

$$(7) \quad -\hat{\Omega} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\sigma(\vec{r})} \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) \right) + \sigma(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) \\ = \sigma_s(\vec{r}) \int_{\hat{\Omega}} \psi^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} + s^+(\vec{r}, \hat{\Omega}) - \hat{\Omega} \cdot \nabla \frac{s^-(\vec{r}, \hat{\Omega})}{\sigma(\vec{r})}.$$

L'équation (7) est une équation aux dérivées partielles du second ordre en  $\vec{r}$  avec un terme non local donné par l'intégrale sur le domaine angulaire.

Motivé par le modèle précédent, nous nous intéressons, dans notre travail, à l'étude d'une classe de problèmes intégral-différentiels de type anisotrope dégénéré qui englobe (7). Plus précisément, on considère les problèmes aux limites de la forme suivante

Le cas stationnaire

$$(8) \quad \begin{cases} -\nabla_{x_2} \cdot (A \nabla_{x_2} u) = l(u) & \text{dans } \Omega, \\ u(X_1, \cdot) = 0 & \text{sur } \partial\omega_2 \text{ p.p. } X_1 \in \omega_1, \end{cases}$$

Le cas d'évolution

$$(9) \quad \begin{cases} u_t - \nabla_{x_2} \cdot (A \nabla_{x_2} u) = l(u) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u(t, X_1, \cdot) = 0 & \text{sur } \partial\omega_2, \text{ p.p. } t, X_1 \in [0, T[ \times \omega_1, \\ u(0, x) = u^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Où  $\Omega = \omega_1 \times \omega_2$ ,  $\omega_1$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^p$  et  $\omega_2$  dans  $\mathbb{R}^{n-p}$  ( $\Omega$  peut être un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  plus général),  $x = (X_1, X_2) \in \omega_1 \times \omega_2$ ,  $l(u)$  est un terme non local et non linéaire et  $A$  est une matrice définie positive (qui peut s'annuler sur une partie du domaine). Par exemple, dans l'équation (7)

$$A \equiv \hat{\Omega} \cdot \frac{1}{\sigma(\vec{r})} \hat{\Omega} = \frac{1}{\sigma(X_2)} \|X_1\|^2,$$

qui dégénère pour  $X_1 = 0$ .

Noter que les problèmes (8) et (9) considérés ci dessus sont plus proches du modèle réel que celui qui est étudié dans [6] vu qu'il tienne compte du caractère dégénéré de l'équation.

On étudie pour chacun de ces problèmes l'existence des solutions. Pour cela on utilise la méthode

des perturbations singulières anisotropes développée dans [1, 3–10] en introduisant une suite de problèmes perturbés  $(P_\varepsilon)$ , où  $\varepsilon \geq 0$  est un nombre destiné à tendre vers zero. En utilisant des résultats de l'analyse fonctionnelle et le théorème du point fixe, on montre l'existence d'une suite de solutions classiques  $(u_\varepsilon)_\varepsilon$  qui a pour limite, dans des espaces de Sobolev à poids appropriés, une solution pour chacun des problèmes étudiés.

Comme l'existence et la convergence seront envisagées dans le cadre des espaces de Sobolev à poids, on se donne l'objectif d'optimiser les poids dans le sens d'avoir la puissance minimale possible de ces derniers.

Les difficultés de ce travail sont dûes essentiellement aux termes non locaux et non linéaires ainsi qu'au passage à la limite en  $\varepsilon$ . Pour contourner ces difficultés on utilise entre autres des techniques établies dans [3–10] ainsi qu'un résultat de compacité de Lions [14].

Le manuscrit est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de la méthode des perturbations singulières anisotropes. Nous examinerons un problème modèle présenté par Chipot et Guesmia dans [2].

Dans le deuxième chapitre on étudie le problème stationnaire (8) dans lequel on traite deux cas : dans le premier cas on considère un terme non local simplifié pour mieux percevoir les difficultés dûes à la dégénérescence et l'anisotropie de l'opérateur ; dans le deuxième cas on considère un terme non local assez général. on suivra dans les deux cas la méthode expliquée plus haut. En particulier, pour pouvoir identifier la limite dans les termes non linéaires dans les problèmes approchés on établit des convergences fortes qui serviront également à améliorer les poids considérés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du cas d'évolution (9). Dans cette partie, on généralise le procédé utilisé dans le chapitre précédent au cas des problèmes d'évolution, en considérant des espaces de Sobolev à poids plus appropriés et en tenant compte de certaines propriétés caractéristiques des problèmes paraboliques comme l'effet régularisant entre autres.

On achève le manuscrit par une conclusion dans laquelle on résume et on évalue les résultats obtenus et on donne quelques perspectives pour compléter ce travail.

# Rappels mathématiques et généralités sur les perturbations singulières anisotropes

---

Le but de ce chapitre est de rappeler dans un premier lieu les principaux outils mathématiques utilisés dans ce travail et dans un second lieu présenter les méthodes de perturbations singulières et de perturbations singulières anisotropes à travers des exemples élémentaires.

## 1.1 Rappels mathématiques

Dans cette section on présente une nomenclature d'outils mathématiques utilisés dans ce travail.

### 1.1.1 Quelques inégalités

On rappelle quelques inégalités utilisées fréquemment dans ce travail, notamment dans l'étude des estimations a priori.

**Proposition 1.1.1. (Inégalité de Cauchy Schwarz).** Soient  $u$  et  $v$  des fonctions dans  $L^2(\Omega)$ . Alors le produit  $uv$  est dans  $L^1(\Omega)$  et on a :

$$|uv|_{L^1(\Omega)} \leq |u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)}.$$

**Proposition 1.1.2. (Inégalité de Young)** Soit  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $a, b > 0$ . Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Proposition 1.1.3. (Inégalité de Poincaré)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . Pour  $1 \leq p < \infty$  il existe une constante  $C = C(\Omega, p)$  telle que

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) |\nabla u|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Proposition 1.1.4. (Inégalité de Gronwall)**

**Forme différentielle.** Soit  $\eta(\cdot)$  une fonction positive, absolument continue sur  $[0, T]$  satisfaisant pour presque tout  $t$ , l'inégalité

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

avec  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions positives, intégrables sur  $[0, T]$ . Alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} [\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds].$$

**Forme intégrale.** Soit  $\xi(\cdot)$  une fonction positive, intégrable sur  $[0, T]$  qui satisfait presque partout l'inégalité

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2,$$

avec  $C_1, C_2$  deux constantes positives. Alors

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}) \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

En particulier, si

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds,$$

alors

$$\xi(t) = 0 \text{ p.p.}$$

**1.1.2 Théorèmes**

Dans cette section on rappelle les principaux théorèmes utilisés dans ce travail

**Théorème de la convergence dominée de Lebesgue**

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue constitue dans ce travail un outil fondamental pour montrer certaines convergences importantes.

**Théorème 1.1.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  une fonction dans  $L^p(\Omega)$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles dans  $L^p(\Omega)$  tel que pour tout  $n$

$$f_n \rightarrow f \text{ p.p.}$$

Supposons qu'il existe une fonction  $g$  dans  $L^p(\Omega)$  à valeurs réelles, positive telle que :

$$|f_n| \leq g \text{ p.p.}$$

Alors on a :

$$\int_{\Omega} |f_n - f|^p dx \rightarrow 0.$$

### **Théorème de la réciproque de la convergence dominée de Lebesgue**

La réciproque du théorème de la convergence dominée de Lebesgue représente dans ce travail un outil technique très utile.

**Théorème 1.1.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $(f_n)$  une suite de  $L^p(\Omega)$  et soit  $f \in L^p(\Omega)$  telle que  $|f_n - f|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Alors il existe une sous suite  $(f_{n_k})$  et une fonction  $h \in L^p(\Omega)$  tel que

- $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  p.p. dans  $\Omega$ ,
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k, \text{ p.p. dans } \Omega$ .

### **Théorème de Fubini**

Ce théorème représente un outil pratique, il permet d'invertir les intégrales dans certain cas.

**Théorème 1.1.3.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\omega_1 \times \omega_2$ . Supposant que  $f \in L^1(\omega_1 \times \omega_2)$ . Alors

$$f(x_1, \cdot) \in L^1(\omega_2) \text{ p.p. } x_1 \in \omega_1, \quad \int_{\omega_2} f(x_1, \cdot) dx_2 \in L^1(\omega_1).$$

De façon similaire on a

$$f(\cdot, x_2) \in L^1(\omega_1) \text{ p.p. } x_2 \in \omega_2, \quad \int_{\omega_1} f(\cdot, x_2) dx_1 \in L^1(\omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\omega_1} \left( \int_{\omega_2} f dx_2 \right) dx_1 = \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} f dx_1 \right) dx_2 = \int_{\omega_1 \times \omega_2} f dx_1 dx_2.$$

### **Théorème du point fixe de Schauder**

Le théorème du point fixe de Schauder est utilisé dans ce travail pour montrer l'existence de solutions pour certaines familles de problèmes non linéaires.

**Théorème 1.1.4.** Soit  $B$  un espace de Banach et  $K$  un fermé, convexe de  $B$ . Soit  $F$  une application continue de  $K$  dans lui même telle que  $F(K)$  est relativement compact alors  $F$  admet un point fixe.

### **Théorème de compacité d'Aubin**

Ce résultat est utilisé dans ce travail pour obtenir certaines convergences importantes.

**Théorème 1.1.5.** Soit  $B_0, B, B_1$  trois espaces de Banach tel qu'on a

1. L'inclusion algébrique et topologique suivante :

$$B_0 \subset B \subset B_1 \quad .$$

2. Les espaces  $B_i$  réflexifs  $i = 1, 2$ .
3. L'injection  $B_0 \rightarrow B$  est compacte.

Soit  $W$  l'espace défini par

$$W = \{u/u \in L^{p_0}(0, T; B_0), u' = \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}.$$

Alors pour  $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$ , l'injection de  $W$  dans  $L^{p_0}(0, T; B)$  est compacte.

### **Théorème de Rellich-Kondrachov**

Tout comme le théorème précédent, ce théorème nous sert à conclure des convergences fortes dans le cas elliptique.

**Théorème 1.1.6.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ . On suppose que  $1 \leq p < n$ , alors :

$$W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow[\text{compact}]{} L^q(\Omega),$$

pour tout  $q$  tel que  $1 \leq q < p^*$  où  $p^* = \frac{np}{n-p}$

### **Densité de l'espace $\mathcal{D}(\omega_1) \times \mathcal{D}(\omega_2)$ dans $\mathcal{D}(\omega_1 \times \omega_2)$**

Le théorème suivant donne une justification de certain choix de fonctions test.

**Théorème 1.1.7.** Soit  $\Omega, \omega_1, \omega_2$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{n-p}$  tels que  $\Omega = \omega_1 \times \omega_2$ . Le sous espace vectoriel  $\mathcal{D}(\omega_1) \times \mathcal{D}(\omega_2)$  est dense dans  $\mathcal{D}(\omega_1 \times \omega_2)$ .

## **1.1.3 Définitions**

Dans ce paragraphe on donne quelques définitions de modes de convergences.

**Définition 1.1.1. (Convergence forte dans  $L^p$ ).** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $(u_n)$  une suite de fonctions de  $L^p(\Omega)$  et  $u \in L^p(\Omega)$ . On dit que  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

**Définition 1.1.2. (Convergence faible dans  $L^p$ ).** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(u_n)$  une suite de fonctions de  $L^p(\Omega)$  et  $u \in L^p(\Omega)$   $1 \leq p \leq \infty$ .

1. Si  $p \leq 1 < \infty$ , on dit que  $(u_n)$  converge faiblement vers  $u$  dans  $L^p(\Omega)$  et on note  $u_n \rightharpoonup u$  si

$$\int_{\Omega} u_n v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u v \, dx,$$

pour tout  $v \in L^q(\Omega)$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

2. Si  $p = \infty$  on dit que  $(u_n)$  converge faiblement  $*$  vers  $u$  dans  $L^\infty(\Omega)$  et on note  $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$  si

$$\int_{\Omega} u_n v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u v \, dx,$$

pour tout  $v \in L^1(\Omega)$ .

**Définition 1.1.3. (Convergence dans l'espace  $L^p(\Omega)^{n'}$ ).** Soit  $\Omega$  un ouvert,  $(u_n) = (u_n^1, \dots, u_n^{n'})$  une suite de fonctions de  $L^p(\Omega)^{n'}$  et  $u = (u^1, \dots, u^{n'})$  une fonction de  $L^p(\Omega)^{n'}$ . On dit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $L^p(\Omega)$  si :

$$u_n^i \rightarrow u^i \text{ dans } L^p(\Omega) \quad i = 1, \dots, n'.$$

**Définition 1.1.4. (Fonction Caratheodory).** Soient  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . On dit que  $f$  est une fonction Caratheodory si elle est mesurable par rapport à  $x_1$  et continue par rapport à  $x_2$ .

**Définition 1.1.5. (L'espace  $H^{-1}$ ).** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace  $H^{-1}(\Omega)$  est le dual de l'espace  $H_0^1(\Omega)$ .

**Caractérisation des éléments de  $H^{-1}$**

Ce théorème est utilisé pour montrer qu'un élément  $f$  est dans  $H^{-1}$ .

**Théorème 1.1.8.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Il existe des fonctions  $f^0, f^1, \dots, f^n$  dans  $L^2(\Omega)$  telles que

$$(1.1) \quad \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_i \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

### 1.1.4 Existence et unicité de l'équation de Laplace

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction telle que

$$(1.2) \quad f \in L^2(\Omega).$$

On considère le problème aux limites suivant

$$(1.3) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'étude du problème (1.3) par l'approche variationnelle consiste à introduire le problème variationnel suivant

$$(1.4) \quad \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Théorème 1.1.9.** Sous l'hypothèse (1.2) il existe un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de (1.4). De plus  $u$  vérifie

$$-\Delta u = f \quad \text{p.p. } \Omega,$$

et

$$u \in H^2(\Omega).$$

Pour les preuves voir [18].

### 1.1.5 Existence et unicité de l'équation de la chaleur

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  où  $T$  est un temps final  $T > 0$ .

Soit  $f$  et  $u_0$  deux fonctions telles que

$$(1.5) \quad f \in L^2(Q_T), \quad u_0 \in L^2(\Omega).$$

On considère le problème aux limites suivant

$$(1.6) \quad \begin{cases} u' - \Delta u = f & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

**Théorème 1.1.10.** Sous les hypothèses (1.5) l'équation de la chaleur (1.6) admet une unique solution  $u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \cap C(]0, T[, L^2(\Omega))$  et  $u' \in L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ .

Pour les preuves voir [18].

## 1.2 Généralités sur les perturbations singulières anisotropes

Avant de présenter la méthode de perturbations singulières anisotropes qui représente la méthode de résolution des problèmes étudiés dans ce travail et pour mieux comprendre cette dernière on commence par présenter la méthode de perturbations singulières.

### 1.2.1 Principe de la méthode des perturbations singulières

Cette théorie est développée pour étudier les problèmes dont les vitesses de diffusion sont très petites. Elle s'intéresse principalement à l'étude du comportement asymptotique de la solution de tels problèmes quand la vitesse de diffusion s'approche de 0.

Dans ce paragraphe, on va présenter la méthode sur un exemple classique (voir [2, 13, 14])

#### Un problème modèle de perturbation singulière

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\varepsilon > 0$  un paramètre petit destiné à tendre vers 0, on considère  $u_\varepsilon$  la solution faible du problème suivant

$$(1.7) \quad \begin{cases} -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Le problème (1.7) admet une solution unique, voir [2] Théorème 4.1.

La question est donc de déterminer ce qui se passe quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pour cela passant formellement à la limite dans (1.7) on obtient

$$(1.8) \quad u_\varepsilon \longrightarrow u_0 = f,$$

et ceci évidemment pour une norme appropriée.

On peut tout de suite voir que si  $f \notin H_0^1(\Omega)$  on ne peut pas avoir la convergence  $u_\varepsilon \rightarrow f$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Nous allons donner sans démonstration les principaux résultats

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $u_\varepsilon$  la solution de (1.7). On a alors*

$$(1.9) \quad u_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega).$$

**Théorème 1.2.2.** *On suppose que  $f \in L^2(\Omega)$  alors si  $u_\varepsilon$  est la solution de (1.7) on a*

$$(1.10) \quad u_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

**Théorème 1.2.3.** *On suppose que  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $2 \leq p < +\infty$ , alors si  $u_\varepsilon$  est la solution de (1.7) on a*

$$(1.11) \quad u_\varepsilon \in L^p(\Omega), \quad u_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{dans } L^p(\Omega).$$

**Théorème 1.2.4.** *On suppose que  $f \in H_0^1(\Omega)$  alors si  $u_\varepsilon$  est la solution de (1.7) on a*

$$(1.12) \quad u_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

Pour les démonstrations on réfère le lecteur à [2].

## 1.2.2 Perturbations singulières anisotropes

Dans ce paragraphe on examine un problème modèle de perturbation singulière anisotrope. Pour simplifier soit  $\Omega = \omega_1 \times \omega_2$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction telle que

$$(1.13) \quad f \in L^2(\Omega).$$

Soit  $\varepsilon$  un nombre destiné à tendre vers 0. On considère le problème suivant

$$(1.14) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \partial_{x_1}^2 u_\varepsilon - \partial_{x_2}^2 u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La vitesse de diffusion étant très petite seulement dans la direction de  $x_1$ , le problème (1.14) est un problème de perturbation singulière anisotrope, en contraste avec les perturbations isotropes par rapport à toutes les directions.

Noter que pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe un unique  $u_\varepsilon$ , solution faible du problème (1.14) vérifiant :

$$(1.15) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \varepsilon^2 \partial_{x_1} u_\varepsilon \partial_{x_1} v + \partial_{x_2} u_\varepsilon \partial_{x_2} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

La question qui se pose alors est de voir comment se comportent les solutions  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Formellement, à la limite et si on dénote par  $u_0$  la limite de  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a :

$$(1.16) \quad \int_{\Omega} \partial_{x_2} u_0 \partial_{x_2} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

La forme bilinéaire du côté gauche de (1.16) n'est pas coercive sur  $H_0^1(\Omega)$ . Par suite le problème (1.16) est mal posé.

On peut procéder de la manière suivante en considérant la variable  $x_1 \in \omega_1$  comme un paramètre et on suppose que :

$$(1.17) \quad f(x_1, \cdot) \in L^2(\omega_2) \quad p.p. x_1 \in \omega_1.$$

Il existe alors une unique solution  $u_0 = u_0(x_1, \cdot)$  du problème

$$(1.18) \quad \begin{cases} u_0 \in H_0^1(\omega_2) \quad p.p. x_1 \in \omega_1, \\ \int_{\omega_2} \partial_{x_2} u_0 \partial_{x_2} v \, dx = \int_{\omega_2} f(x_1, \cdot) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega_2) \end{cases}$$

Noter que l'existence et l'unicité de la solution de (1.18) est une conséquence du théorème de Lax-Milgram puisque

$$\left\{ \int_{\omega_2} (\partial_{x_2} v)^2 \, dx \right\}$$

est une norme sur  $H_0^1(\omega_2)$ .

On souhaite maintenant montrer la convergence de la suite  $(u_\varepsilon)_\varepsilon$  dans un espace approprié.

**Lemme 1.2.1. (Convergences faibles)** *Sous l'hypothèse (1.13), la suite  $(u_\varepsilon)$  des solutions de (1.14) vérifie quand  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$(1.19) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \partial_{x_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \partial_{x_2} u_0, \quad \varepsilon \partial_{x_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

**Preuve.** On pose  $v = u_\varepsilon$  dans (1.15), on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans le second membre :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\partial_{x_1} u_\varepsilon|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\partial_{x_2} u_\varepsilon|^2 \, dx \leq |f|_{L^2(\Omega)} |u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant les inégalités de Poincaré et de Young on aura

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\partial_{x_1} u_\varepsilon|^2 + |\partial_{x_2} u_\varepsilon|^2 \, dx \leq C |f|_{L^2(\Omega)} |\partial_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C^2}{2} |f|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |\partial_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ce qui donne

$$(1.20) \quad u_\varepsilon, |\varepsilon \partial_{x_1} u_\varepsilon|, |\partial_{x_2} u_\varepsilon|, \text{ sont bornés dans } L^2(\Omega).$$

Par conséquent, il existe  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in (L^2(\Omega))^p$  et  $u_2 \in (L^2(\Omega))^{n-p}$  tel que, à une sous suite près, on a

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \varepsilon \partial_{x_1} u_\varepsilon \rightharpoonup u_1, \quad \partial_{x_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_2 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Comme la convergence dans  $L^2(\Omega)$  implique la convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  on peut donc identifier  $u_1$  et  $u_2$ , ce qui donne

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \varepsilon \partial_{x_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \partial_{x_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \partial_{x_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

On laisse  $\varepsilon$  tendre vers 0 dans (1.15), on aura alors

$$(1.21) \quad \int_{\Omega} \partial_{x_2} u_0 \cdot \partial_{x_2} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui achève la preuve.

A ce stade là, on ne sait pas encore si pour presque  $x_1 \in \omega_1$  on a

$$(1.22) \quad u_0(x_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2).$$

Pour voir cela, nous aurons besoin que les convergences dans (1.19) soient des convergences fortes dans  $L^2(\Omega)$ , ce qui fera l'objet du lemme suivant :

**Lemme 1.2.2. (Convergences fortes)** *Sous l'hypothèse (1.13) on a :*

$$(1.23) \quad u_\varepsilon \longrightarrow u_0, \quad \partial_{x_2} u_\varepsilon \longrightarrow \partial_{x_2} u_0, \quad \varepsilon \partial_{x_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

où  $u_0$  est la solution de (1.18).

**Preuve.** Posons

$$(1.24) \quad I_\varepsilon = \int_{\Omega} \varepsilon^2 \partial_{x_1} u_\varepsilon \cdot \partial_{x_1} u_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} \partial_{x_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \partial_{x_2} (u_\varepsilon - u_0) \, dx$$

Développant  $I_\varepsilon$  et tenant compte de (1.15) écrite pour  $v = u_\varepsilon$  on aura

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega} f u_\varepsilon \, dx - 2 \int_{\Omega} \partial_{x_2} u_0 \cdot \partial_{x_1} u_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} \partial_{x_2} u_0 \cdot \partial_{x_2} u_0 \, dx.$$

Passant à la limite on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{\Omega} f u_0 \, dx - \int_{\Omega} \partial_{x_2} u_0 \cdot \partial_{x_2} u_0 \, dx = 0$$

Ce qui donne

$$\varepsilon \partial_{x_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \partial_{x_2} u_\varepsilon \longrightarrow \partial_{x_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Utilisant l'inégalité de Poincaré dans la direction de  $x_2$  on obtient

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0.$$

Ce qui achève la preuve.

**Condition au bord**

La deuxième convergence dans (1.23) peut s'écrire également

$$\int_{\omega_1} \int_{\omega_2} |\partial_{x_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dx_2 dx_1 \longrightarrow 0.$$

Ceci implique que

$$\int_{\omega_2} |\partial_{x_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dx_2 \longrightarrow 0 \quad p.p. x_1 \in \omega_1.$$

Comme

$$\left\{ \int_{\omega_2} |\partial_{x_2} v|^2 dx_2 \right\}$$

est une norme sur  $H_0^1(\omega_2)$  et  $u_\varepsilon(x_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2)$  et par conséquent

$$(1.25) \quad u_0(x_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2),$$

pour presque tout  $x_1 \in \omega_1$ .

Tout ceci est à une sous suite près. Maintenant comme le problème (1.18) admet une unique solution, les convergences (1.23) ont lieu pour toute la suite.

Par suite on a montré grâce à la méthode des perturbations singulière anisotrope le résultat suivant

**Proposition 1.2.1.** *Le problème (1.16) admet une solution  $u_0$  vérifiant (1.25).*

Nous nous proposons dans les chapitres suivants de généraliser cette méthode aux cas des problèmes anisotropes dégénérés et non locaux.

## Etude du problème stationnaire

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on souhaite utiliser la méthode de perturbations singulières anisotropes pour la résolution d'une classe de problèmes intégrro-différentiels elliptiques.

Soit  $\Omega = \omega_1 \times \omega_2$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  avec  $x = (X_1, X_2)$  où  $X_1 \in \mathbb{R}^p, X_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$  On considère la classe de problèmes suivants

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\nabla_{X_2} \cdot (A \nabla_{X_2} u) = l(u) \\ u(X_1, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_2 \text{ p.p. } X_1 \in \omega_1, \end{cases}$$

où  $l$  est la forme non linéaire en  $u$  et  $A = a_{ij}(x)$  est une matrice de taille  $n \times n$  telle que

$$(2.2) \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$(2.3) \quad \beta |\xi|^2 \leq \frac{A(x)}{\lambda(X_1)} \xi \cdot \xi \leq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

où  $\lambda$  est une fonction définie sur  $\omega_1$  positive suffisamment régulière qui peut s'annuler sur  $\partial\omega_1$  vérifiant

$$(2.4) \quad \lambda \in W^{1,\infty}(\omega_1),$$

et  $\alpha, \beta$ , sont des nombres réels positifs.

**Remarque 2.1.1.** Dans la suite du document et pour simplifier les calculs, on suppose que  $\beta = 1$ .

On remarquera que le problème (2.1) est anisotrope puisque la dérivée en  $X_1$  est absente et qu'il est de plus dégénéré sur  $\{(X_1, X_2) \in \Omega / \lambda(X_1) = 0\}$ .

Enfin, le terme  $l(u)$  dans (2.1) représente la partie non linéaire et non locale du problème, qui prendra des formes variées selon les cas qui seront examinées.

Plus précisément, on considère dans ce chapitre deux problèmes avec des formes différentes du terme  $l(u)$ .

Pour le premier problème on montre l'existence d'une solution dans un espace de Sobolev à poids approprié. Dans ce cas on considère une hypothèse assez restrictive sur le terme non local  $l$  afin de mettre l'accent sur les méthodes développées pour contourner les difficultés inhérentes à l'anisotropie et la dégénérescence. Enfin, le deuxième problème est une généralisation du premier avec un terme non local plus large.

Dans la suite on considère l'espace fonctionnel  $L^2_\xi(\omega_1; H^1_0(\omega_2))$  pour un poids donné  $\xi = \xi(X_1) > 0$  p.p. sur  $\omega_1$  comme suit

$$(2.5) \quad L^2_\xi(\omega_1; H^1_0(\omega_2)) = \{u \in L^2_{\text{loc}}(\omega_1; L^2(\omega_2)) / \xi u, \xi \nabla_{X_2} u \in L^2(\Omega), u(X_1, \cdot) \in H^1_0(\omega_2) \text{ p.p. } X_1 \in \omega_1\}.$$

## 2.2 Premier problème

### 2.2.1 Position du problème et théorème d'existence

Dans ce premier problème le terme non linéaire noté  $a = a(x, r)$  est une fonction définie, mesurable sur  $\Omega \times \mathbb{R}$  vérifiant

$$(2.6) \quad \begin{cases} a(x, \cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ a \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}). \end{cases}$$

On suppose que

$$(2.7) \quad f \in L^2(\Omega).$$

On souhaite utiliser la méthode de perturbations singulières anisotrope pour montrer l'existence d'une solution du problème intégral-différentiel stationnaire suivant :

Trouver  $u$  telle que

$$(2.8) \quad \begin{cases} -\nabla_{X_2}(A \nabla_{X_2} u) = \int_{\omega_1} a(x, u) dX_1 + f \text{ in } \Omega, \\ u(X_1, \cdot) = 0 \text{ on } \partial\omega_2 \text{ p.p. } X_1 \in \omega_1. \end{cases}$$

**Remarque 2.2.1.** Il clair qu'en raison du terme non local

$$l(u) = \int_{\omega_1} a(x, u) dX_1,$$

il n'est pas possible de considérer le problème (2.8) comme une famille à paramètre ( $X_1 \in \omega_1$ ) associés à l'opérateur en  $X_2$  :

$$P = -\nabla_{X_2}(A\nabla_{X_2}\cdot).$$

Dans la suite on adoptera la définition d'une solution faible du problème (2.8) suivante :

**Définition 2.2.1.** On dit qu'une fonction  $u_0 : u_0 \in L^2_\lambda(\omega_1; H^1_0(\omega_2))$  est une solution faible du problème (2.8) si elle satisfait l'identité intégrale suivante

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} A\nabla_{X_2}u \cdot \nabla_{X_2}v \, dx = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, u) \, dX_1 v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx,$$

pour tout  $v \in H^1_0(\Omega)$ .

**Remarque 2.2.2.** Si on prend  $v(X_1, X_2) = \varphi(X_1)\psi(X_2)$ , dans (2.9), pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_1)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(\omega_2)$  on aura alors, en utilisant le théorème de Fubini

$$\int_{\omega_1} \varphi \left( \int_{\omega_2} A\nabla_{X_2}u_0 \cdot \nabla_{X_2}\psi \, dX_2 \right) dX_1 = \int_{\omega_1} \varphi \left( \int_{\omega_2} \int_{\omega_1} a(x, u_0) \, dX_1 \psi \, dX_2 + \int_{\omega_2} f\psi \, dX_2 \right) dX_1$$

Par conséquent on a

$$(2.10) \quad \int_{\omega_2} A\nabla_{X_2}u_0 \cdot \nabla_{X_2}\psi \, dX_2 = \int_{\omega_2} \psi \int_{\omega_1} a(x, u_0) \, dX_1 \, dX_2 + \int_{\omega_2} f\psi \, dX_2,$$

pour tout  $v \in H^1_0(\omega_2)$  et pour presque tout  $X_1 \in \omega_1$ .

On a le résultat principal suivant :

**Théorème 2.2.1.** Sous les hypothèses (2.2)- (2.7), il existe au moins une solution  $u_0$  du problème (2.8) telle que

$$\begin{cases} u_0 \in L^2_{\lambda^3}(\omega_1; H^1_0(\omega_2)) \cap L^2_{loc}(\omega_1; H^1_0(\omega_2)) \\ \int_{\Omega} A\nabla_{X_2}u_0 \cdot \nabla_{X_2}v \, dX_2 = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, u_0)v \, dX_1 \, dx + \int_{\Omega} f v \, dX_2, \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

## 2.2.2 Preuve du théorème 2.2.1

Soit  $\varepsilon > 0$ . On considère la suite de problèmes perturbés suivants :

$$(2.11) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{X_1} u_\varepsilon - \nabla_{X_2}((A + \varepsilon^2 I)\nabla_{X_2} u_\varepsilon) = \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \text{ dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

On adoptera la notion de solution faible suivante :

**Définition 2.2.2.** On dit qu'une fonction  $u_\varepsilon$  telle que  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ , est une solution faible de (2.11) si l'identité intégrale

$$(2.12) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v \, dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v \, dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) \, dX_1 v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx$$

est satisfaite pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Il est clair que le problème (2.11) est un problème elliptique semilinéaire nonlocal avec des conditions au bord de Dirichlet homogènes.

### 2.2.2.1 Etude du problème perturbé (2.11)

L'existence de solution  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  fixé, du problème (2.11) peut être montrée en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. On a en effet :

**Théorème 2.2.2.** Sous les hypothèses (2.2)- (2.7), il existe au moins une solution faible du problème (2.11).

**Preuve.** Pour  $w \in L^2(\Omega)$ , soit  $u \in H_0^1(\Omega)$  la solution unique du problème parabolique linéaire suivant

$$(2.13) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{X_1} u - \nabla_{X_2}((A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u) = \int_{\omega_1} a(x, w) \, dX_1 + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

On définit l'application  $T$  de  $L^2(\Omega)$  dans lui-même par :

$$(2.14) \quad w \mapsto u = T(w).$$

Le couple  $(w, u) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  satisfait

$$(2.15) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u \nabla_{X_1} v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v \, dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v \, dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, w) \, dX_1 v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant  $v = u$  dans (2.15) et en tenant compte de (2.3) on obtient :

$$(2.16) \quad \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, w) \, dX_1 + f \right) u \, dx.$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le second membre de (2.16)

$$(2.17) \quad \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u|^2 dx + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u|^2 dx + \int_{\Omega} |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u|^2 dx \\ \leq \left( \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, w) dX_1 + f \right) dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2}.$$

Par application de l'inégalité de Poincaré dans la direction  $X_1$  et en tenant compte de (2.6) et (2.7) on obtient :

$$\int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u|^2 dx + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u|^2 dx + \int_{\Omega} |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u|^2 dx \leq C_1 \left( \int_{\Omega} |\nabla_{X_1} u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

En appliquant cette fois ci l'inégalité de Poincaré dans la direction de  $X_2$ , on aura

$$\int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u|^2 dx + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u|^2 dx + \int_{\Omega} |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u|^2 dx \leq C_2 \left( \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes indépendantes de  $w$ . Ceci en particulier implique que

$$\varepsilon^2 \left( \int_{\Omega} |\nabla_{X_1} u|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_1.$$

Et

$$\varepsilon^2 \left( \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} u|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_2.$$

Utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré on déduit que

$$(2.18) \quad |\nabla_{X_1} u|_{L^2(\Omega)}, \quad |\nabla_{X_2} u|_{L^2(\Omega)}, \quad |u|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

indépendamment de  $w$ .

Par conséquent,  $\varepsilon > 0$  étant fixé on a

$$(2.19) \quad |u|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

Où  $C$  est une constante indépendante de la fonction  $w$ .

On montre maintenant que  $T$  est continu sur  $L^2(\Omega)$ . Pour cela soit  $(w_n) \subset L^2(\Omega)$  une suite telle que

$$(2.20) \quad w_n \rightarrow w \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

On a donc

$$(2.21) \quad w_{n'} \longrightarrow w \text{ p.p dans } \Omega.$$

On pose  $u_n = T(w_n) \in B$ . Grâce à (2.19), on a  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et il existe une sous suite  $(u_{n'})$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$(2.22) \quad u_{n'} \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Par suite, grâce à l'injection compacte de Sobolev  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  on a

$$(2.23) \quad u_{n'} \longrightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fortement.}$$

Par suite le couple  $(w_{n'}, u_{n'})$  satisfait, grâce à (2.12), l'identité intégrale :

$$(2.24) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_{n'} \nabla_{X_1} v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_{n'} \nabla_{X_2} v \, dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_{n'} \nabla_{X_2} v \, dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, w_{n'}) \, dX_1 v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx.$$

En passant à la limite en  $n'$ , on obtient :

$$(2.25) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u \nabla_{X_1} v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v \, dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v \, dx \\ = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, w_{n'}) \, dX_1 v \, dx \right) + \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Pour calculer la limite dans le second membre de (2.25), on a d'abord grâce à la continuité de  $a$  et (2.21) :

$$(2.26) \quad a(x, w_{n'}) \rightarrow a(x, w) \text{ p.p.}$$

D'autre part grâce à (2.6), on peut déduire que la suite :

$$(2.27) \quad (a(x, w_{n'}))_{n'} \text{ est bornée dans } L^2(\Omega).$$

De (2.26) et (2.27) et utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on en déduit :

$$(2.28) \quad a(x, w_{n'}) \rightarrow a(x, w) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fortement.}$$

Par suite, grâce à La réciproque de la convergence dominée de Lebesgue appliquée à  $(\int_{\omega_1} a(x, w_{n'}) \, dX_1)_{n'}$  on a à une sous suite près indexée aussi par  $n'$  :

$$(2.29) \quad \int_{\omega_1} a(x, w_{n'}) \, dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} a(x, w) \, dX_1 \text{ p.p.}$$

On a aussi grâce à (2.6) :

$$(2.30) \quad \left( \int_{\omega_1} a(x, w_{n'}) dX_1 \right)_{n'} \text{ est bornée dans } L^2(\Omega).$$

De (2.29) et (2.30) et utilisant de nouveau le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et on en déduit :

$$(2.31) \quad \int_{\omega_1} a(x, w_{n'}) dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} a(x, w) dX_1 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fortement.}$$

Utilisant (2.31) et passant à la limite dans (2.25) on obtient l'équation suivante :

$$(2.32) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u \nabla_{X_1} v dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, w) dX_1 v dx + \int_{\Omega} f v dx.$$

Ainsi on a

$$-\varepsilon^2 \Delta_{X_1} u - \nabla_{X_2} ((A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u) = \int_{\omega_1} a(x, w) dX_1 + f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme  $u \in H_0^1(\Omega)$  on a bien  $u$  solution de (2.13) au sens de la définition 2.2.2 et par conséquent on a

$$u = T(w).$$

Par unicité de la solution du problème (2.13) on déduit que les convergences (2.22) et (2.23) ont lieu pour toute la suite. Par conséquent l'application  $T$  est continue.

Soit  $\bar{B}(0, C)$  la boule fermée de  $H^1(\Omega)$  centrée en 0 et de rayon  $C$  où  $C$  est la constante donnée par (2.19). Il est clair que  $T(\bar{B}(0, C)) \subset \bar{B}(0, C)$ .

D'autre part on a  $T(\bar{B}(0, C))$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ . Comme  $H^1(\Omega) \xrightarrow[\text{compact}]{} L^2(\Omega)$  on déduit que  $T(\bar{B}(0, C))$  est relativement compacte dans  $L^2(\Omega)$ .

Cela nous conduit en utilisant le théorème du point fixe de Schauder déduire l'existence d'une solution du problème (2.11).

Ceci achève la démonstration du théorème 2.2.2 concernant le problème perturbé (2.11).

Dans la suite, on examine le passage à la limite par rapport au paramètre  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (2.11). ceci nous conduit à établir des estimations a priori sur la suite  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ .

### 2.2.2.2 Estimation des solutions du problème perturbé

Maintenant dans le but de montrer l'existence d'une solution  $u_0$  de (2.8) on fait tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (2.12) et on montre que la fonction limite des solutions  $u_\varepsilon$  du problème (2.11) est une solution du problème (2.8). On commence par donner quelques estimations a priori

**Lemme 2.2.1. (Estimations a priori)** Soit  $m$  un nombre réel tel que  $m \geq 3$ . Sous les hypothèses (2.3), (2.4) et (2.7), on a :

$$(2.33) \quad \varepsilon^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|, \varepsilon |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|, |\varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|, \varepsilon^2 u_\varepsilon, \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon, |\varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|, |\lambda^{(m+1)/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon| \text{ sont bornés dans } L^2(\Omega).$$

**Preuve.** En posant  $v = u_\varepsilon$  dans (2.12), on obtient l'équation suivante :

$$(2.34) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon + (A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx = \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) u_\varepsilon dx.$$

En utilisant (2.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \\ \leq \left[ \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right)^2 dx \right]^{1/2} \left( \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré dans la direction  $X_1$  et en tenant compte de (2.6) on obtient :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2}.$$

$C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Ceci en particulier implique que

$$(2.35) \quad \varepsilon^2 \left( \int_{\Omega} |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq C, \text{ et } \varepsilon^2 \left( \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq C.$$

Où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Par conséquent

$$(2.36) \quad (\varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon), (\varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \text{ sont bornées dans } L^2(\Omega).$$

Utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$(2.37) \quad \varepsilon^2 u_\varepsilon \text{ borné dans } L^2(\Omega).$$

On pose cette fois  $v = \lambda^m(X_1)u_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$  dans (2.12) il vient que :

$$(2.38) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + (A + \varepsilon^2 I) \lambda^m \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon(x) dx \\ = \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) \lambda^m u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} m \varepsilon^2 \lambda^{m-1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx.$$

Utilisant (2.3) et l'inégalité de Young on obtient

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda^{m+1} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right)^2 dx \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{4C_{\omega_2}} \lambda^{m+1} u_\varepsilon^2 dx + \int_{\Omega} m^2 C_{\omega_2} \lambda^{m-3} \left| \nabla_{X_1} \lambda \right|_\infty^2 \varepsilon^4 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{4C_{\omega_2}} \lambda^{m+1} u_\varepsilon^2 dx.$$

Où  $C_{\omega_2}$  est la constante indépendante de  $\varepsilon$ .

En appliquant l'inégalité de Poincaré dans la direction de  $X_2$  dans le second membre on obtient :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda^{m+1} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq \int_{\Omega} C \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right)^2 dx \\ + m^2 C_{\omega_2} \left| \nabla_{X_1} \lambda \right|_\infty^2 \varepsilon^4 \int_{\Omega} \lambda^{m-3} |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda^{m+1} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx,$$

ce qui donne en particulier :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda^{m+1} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \\ \leq \int_{\Omega} C \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right)^2 dx + m^2 C_{\omega_2} \left| \nabla_{X_1} \lambda \right|_\infty^2 \varepsilon^4 \int_{\Omega} \lambda^{m-3} |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx.$$

Grâce à (2.36) et comme  $a \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ , on a alors

$$(\lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon)_\varepsilon, \quad (\varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon)_\varepsilon, \quad (\varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon)_\varepsilon, \quad (\lambda^{(m+1)/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon)_\varepsilon \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega),$$

indépendamment de  $\varepsilon$ .

Ce qui achève la preuve.

### 2.2.2.3 Passage à la limite

Du paragraphe précédent on peut en déduire les convergences faibles suivantes

**Lemme 2.2.2. (Convergences faibles).** *Il existe des fonctions  $\tilde{u}^m, \chi$  dans  $L^2(\Omega)$  est une sous suite encore notée  $u_\varepsilon$  telles que*

$$(2.39) \quad \lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}^m, \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$(2.40) \quad \lambda^{(m+1)/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} \tilde{u}^m, \varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \text{ dans } (L^2(\Omega))^n.$$

$$(2.41) \quad a(x, u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^2(\Omega).$$

$$(2.42) \quad \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 \rightharpoonup \int_{\omega_1} \chi dX_1 \text{ dans } L^2(\omega_2). \text{ p.p. } X_1 \in \omega_1.$$

De plus  $\tilde{u}^m$  satisfait l'égalité d'énergie suivante :

$$(2.43) \quad \int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^m dx = \int_{\Omega} \lambda^m u_0 \left( \int_{\omega_1} \chi dX_1 \right) dx + \int_{\Omega} f \lambda^m u_0 dx.$$

Où  $u_0 \in L^2_{loc}(\Omega)$  vérifiant la relation

$$(2.44) \quad \tilde{u}^m = \lambda^{m+1} u_0.$$

**Preuve.** A partir du lemme 2.2.1 on déduit qu'il existe  $\tilde{u}^m \in L^2(\Omega)$ ,  $u_1^m \in (L^2(\Omega))^n$ ,  $u_2^m \in (L^2(\Omega))^p$  tels qu'à une sous suite près, notée encore  $(u_\varepsilon)_\varepsilon$  on a :

$$\lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}^m, \lambda^{(m+1)/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_1^m, \varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup u_2^m \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

(La convergence veut dire composante par composante). Comme les dérivées sont continues dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\lambda > 0$  sur  $\Omega$  on obtient

$$(2.45) \quad u_1^m = \nabla_{X_2} \tilde{u}^m, \quad u_2^m = 0,$$

ce qui veut dire que

$$(2.46) \quad \lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}^m, \lambda^{(m+1)/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} \tilde{u}^m, \varepsilon \lambda^{m/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part, pour tout  $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ , comme  $\lambda > 0$  et continue sur  $\Omega$  pouvant être nulle seulement sur le bord on déduit de (2.39) qu'il existe  $u_0 \in L^2_{loc}(\Omega)$  (indépendamment du choix de  $\tilde{\Omega}$ ) vérifiant la relation :

$$(2.47) \quad \tilde{u}^m = \lambda^{(m+1)/2} u_0.$$

Et tel que :

$$(2.48) \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} u_0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Revenons à l'équation (2.12) satisfaite par  $u_\varepsilon$  et passons à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  en prenant  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On calcule la limite terme par terme.

Comme  $\text{supp } v \subset\subset \Omega$  et  $\lambda > 0$  sur  $\Omega$  on a grâce à (2.48)

$$(2.49) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v \, dx \rightarrow 0, & \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v \, dx \rightarrow 0, \\ \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} v \, dx \end{cases}$$

Pour les termes du second membre de (2.12), on a les convergences suivantes :

Comme  $a$  est borné, il existe  $\chi \in L^2(\Omega)$  tel que

$$a(x, u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Par conséquent, en prenant  $v = 1_{\omega_1} \varphi$  où  $1_{\omega_1}$  est la fonction caractéristique de  $\omega_1$  et  $\varphi \in L^2(\omega_2)$  quelconque, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, u_\varepsilon) \varphi \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} \chi \varphi \, dx \\ \int_{\Omega} a(x, u_\varepsilon) \varphi \, dx &= \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) \varphi(X_2) \, dX_1 \right) dX_2 \rightarrow \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} \chi \varphi(X_2) \, dX_1 \right) dX_2 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire aussi que

$$\int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 \rightharpoonup \int_{\omega_1} \chi dX_1 \quad \text{dans } L^2(\omega_2).$$

Donc quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  on déduit de (2.12), (2.49) et (2.2.2.3) que :

$$(2.50) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} \chi dX_1 \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ceci est encore valable, quand on remplace  $v$  par  $\lambda^{(m+1)/2} v$ , à

$$\int_{\Omega} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} \lambda^{(m+1)/2} v \int_{\omega_1} \chi dX_1 \, dx + \int_{\Omega} f \lambda^{(m+1)/2} v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  la dernière identité devient

$$(2.51) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} \lambda^{(m+1)/2} v \int_{\omega_1} \chi dX_1 \, dx + \int_{\Omega} f \lambda^{(m+1)/2} v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On prend maintenant  $v = \lambda^{(m-1)/2} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  dans (2.51).

Pour le premier terme on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} \lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \, dx.$$

On a alors

$$\int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^m dx = \int_{\Omega} \lambda^m u_0 \int_{\omega_1} \chi dX_1 dx + \int_{\Omega} f \lambda^m u_0 dx.$$

Ce qui achève la démonstration.

Dans le but d'identifier la limite faible  $\chi$  du terme non linéaire en fonction de  $u_0$  on établit les convergences fortes. Commençons d'abord par donner le lemme suivant

**Lemme 2.2.3.** *On a la convergence forte suivante :*

$$(2.52) \quad \int_{\omega_1} \lambda^m u_{\varepsilon} dX_1 \longrightarrow \int_{\omega_1} \lambda^m u_0 dX_1 \quad \text{dans } L^2(\omega_2) \text{ fortement.}$$

Pour tout  $m \geq 3$

**Preuve.** *On pose*

$$\varphi_{\varepsilon} = \int_{\omega_1} \lambda^m(X_1) u_{\varepsilon}(X_1, X_2) dX_1 \text{ et } \varphi_0 = \int_{\omega_1} \lambda^m(X_1) u_0(X_1, X_2) dX_1.$$

On a par l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$(2.53) \quad |\varphi_{\varepsilon}|_{L^2(\omega_2)} = \int_{\omega_2} \left| \int_{\omega_1} \lambda^m u_{\varepsilon} dX_1 \right|^2 dX_2 \leq \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} \lambda^{m-1} dX_1 \right) \left( \int_{\omega_1} \lambda^{m+1} u_{\varepsilon}^2 dX_1 \right) dX_2 \\ \leq \left( \int_{\omega_1} \lambda^{m-1} dX_1 \right) \cdot \int_{\Omega} \lambda^{m+1} u_{\varepsilon}^2 dx \leq C |\lambda^{\frac{m+1}{2}} u_{\varepsilon}|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par conséquent grâce à au lemme 2.2.1 on a

$$(2.54) \quad \int_{\omega_2} \left| \int_{\omega_1} \lambda^m u_{\varepsilon} dX_1 \right|^2 dX_2 \quad \text{est bornée dans } L^2(\Omega).$$

De la même façon on a

$$(2.55) \quad |\nabla_{X_2} \varphi_{\varepsilon}|_{L^2(\omega_2)}^2 \leq C |\lambda^{\frac{m+1}{2}} \nabla_{X_2} u_{\varepsilon}|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par conséquent grâce à (2.2.1) on a

$$(2.56) \quad \int_{\omega_2} \left| \int_{\omega_1} \lambda^m \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} dX_1 \right|^2 dX_2 \quad \text{est bornée dans } L^2(\Omega).$$

Donc la suite  $(\varphi_{\varepsilon})$  est bornée dans  $H^1(\omega_2)$ . A une sous suite près on a

$$(2.57) \quad \varphi_{\varepsilon} = \int_{\omega_1} \lambda^m(X_1) u_{\varepsilon}(X_1, \cdot) dX_1 \rightharpoonup \psi_0 \quad \text{dans } H^1(\omega_2).$$

Et on a de plus

$$\psi_0 = \varphi_0,$$

car en effet  $\forall \eta \in L^2(\omega_2)$  on a :

$$(2.58) \quad \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} \lambda^m u_\varepsilon dX_1 \eta \right) dX_2 = \int_{\Omega} (\lambda^m u_\varepsilon) \eta dx,$$

et grâce à (2.2.2) et (2.47) on a

$$(2.59) \quad \int_{\Omega} (\lambda^m u_\varepsilon) \eta dx = \int_{\Omega} (\lambda^{\frac{m+1}{2}} u_\varepsilon) (\lambda^{\frac{m-1}{2}}) \eta dx \\ \longrightarrow \int_{\Omega} (\lambda^{\frac{m+1}{2}} u_0) (\lambda^{\frac{m-1}{2}}) \eta dx = \int_{\Omega} (\lambda^m u_0) \eta dx.$$

Ce qui veut dire que :

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi_0 \text{ dans } H^1(\omega_2).$$

et donc

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } L^2(\omega_2).$$

Ce qui achève la preuve

Dans le lemme suivant on établit les convergences fortes.

**Lemme 2.2.4. (Convergences fortes).** A partir du lemme 2.2.1 et (2.39) on a

$$(2.60) \quad \varepsilon \lambda^{5/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \lambda^3 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \lambda^3 \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda^3 u_\varepsilon \longrightarrow \lambda^3 u_0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Et

$$(2.61) \quad \chi = a(x, u_0).$$

De plus on a

$$(2.62) \quad \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

**Preuve.** On pose

$$I_\varepsilon^m = \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} (\lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon - \tilde{u}^m) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon - \tilde{u}^m) dx.$$

Développant  $I_\varepsilon^m$  on obtient

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^m &= \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ &+ \int_{\Omega} \lambda^m A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \lambda^{(m-1)/2} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ &- \int_{\Omega} \lambda^{(m-1)/2} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^m dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^m dx. \end{aligned}$$

Utilisant (2.38), on déduit que

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^m &= \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) \lambda^m u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} m \varepsilon^2 \lambda^{m-1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx \\ &- \int_{\Omega} \lambda^{(m-1)/2} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \lambda^{(m-1)/2} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^m dx \\ (2.63) \quad &+ \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^m \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^m dx. \end{aligned}$$

Grâce a (2.52) on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda^m u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 dx &= \int_{\Omega} a(x, u_\varepsilon) \int_{\omega_1} \lambda^m u_\varepsilon dX_1 dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} \chi \int_{\omega_1} \lambda^m u_0 dX_1 dx = \int_{\Omega} \lambda^m u_0 \int_{\omega_1} \chi dX_1 dx. \end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale dans (2.63) on a en prenant  $m = 5$  et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\left| \int_{\Omega} 5 \varepsilon^2 \lambda^4 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx \right| \leq 5 \varepsilon |\lambda|^{1/2} \left| \nabla_{X_1} \lambda \right|_{\infty} \left| \lambda^2 u_\varepsilon \right|_2 \left| \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \right|_2,$$

et à partir des estimations du lemme 2.2.1, écrites pour  $m = 3$ , la limite de l'intégrale ci-dessus tend vers 0.

D'autre part prenant en considération (2.46), écrite pour  $m = 5$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx &\rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 dx \\ (2.64) \quad \int_{\Omega} \lambda^2 A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 dx &\rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 dx. \end{aligned}$$

Utilisant ce qui précède et (2.43) pour passer à la limite dans (2.63), on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^5 = \int_{\Omega} \lambda^5 u_0 \int_{\omega_1} \chi dX_1 dx + \int_{\Omega} f \lambda^5 u_0 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^5 dx = 0.$$

Il s'en suit donc que

$$(2.65) \quad \varepsilon \lambda^{5/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \lambda^3 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \lambda^3 \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda^3 u_\varepsilon \longrightarrow \lambda^3 u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

La preuve de (2.60) est donc établie.

On déduit, du fait que  $\lambda > 0$  sur  $\Omega$ , à une sous suite près que :

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Par application du théorème de Lebesgue et la continuité de  $a$  par rapport à la deuxième variable et (2.6), on a :

$$(2.66) \quad a(x, u_\varepsilon) \rightarrow a(x, u_0) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

$$(2.67) \quad a(\cdot, u_\varepsilon) \rightarrow a(\cdot, u_0) \quad L^2(\Omega).$$

Ceci implique que

$$(2.68) \quad \chi = a(x, u_0).$$

Par conséquent la relation (2.61) est établie.

Maintenant revenant à (2.50) utilisant (2.68) on en déduit que

$$\int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0) dX_1 dx + \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On reprend maintenant la relation (2.34), on multiplie les deux cotés de l'équation par  $\varepsilon^2$ , en utilisant (2.37) et (2.67) et en passant à la limite en  $\varepsilon$  on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varepsilon^4 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon + (\varepsilon^2 A + \varepsilon^4 I) \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) \varepsilon^2 u_\varepsilon dx = 0.$$

Par conséquent on aura grâce à (2.3) et l'inégalité de Poincaré :

$$\varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Cela achève la preuve.

Maintenant pour compléter l'étude du problème principale (2.8), examinons la condition aux bord vérifiée par  $u_0$ .

### Condition au bord

Grâce à (2.60) on a

$$(2.69) \quad \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} \left( \lambda^3 |\nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)| \right)^2 dX_2 dX_1 \longrightarrow 0.$$

Il s'en suit grâce à la réciproque du théorème de la convergence dominée 1.1.2 :

$$\lambda^6 \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 \longrightarrow 0, \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

Comme

$$\left\{ \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2} v|^2 dX_2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur  $H_0^1(\omega_2)$ ,  $\lambda > 0$  sur  $\omega_1$  et que pour presque tout  $X_1$   $u_\varepsilon(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2)$  on déduit que

$$u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2) \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

De plus, grâce à (2.60) on a

$$(2.70) \quad u_0 \in L_{\lambda^3}^2(\omega_1; H^1(\omega_2)).$$

Et donc finalement

$$(2.71) \quad u_0 \in L_{\lambda^3}^2(\omega_1; H_0^1(\omega_2)).$$

On déduit de ce qui précède qu'il existe au moins une solution faible  $u_0$  du problème (2.8) telle que

$$\begin{cases} u_0 \in L_{\lambda^3}^2(\omega_1; H_0^1(\omega_2)) \cap L_{loc}^2(\omega_1; H_0^1(\omega_2)) \\ \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dX_2 = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, u_0) v dX_1 dx + \int_{\Omega} f(X_1, \cdot) v dX_2, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Ce ci achève la démonstration du théorème.

Il nous reste une dernière étape pour compléter les résultats du théorème 2.2.1. Celle de l'amélioration du poids dans l'espace contenant la solution  $u_0$ .

Pour cela nous aurons besoin d'améliorer les convergences fortes obtenues dans le lemme 2.2.4.

C'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 2.2.5. (Amélioration des convergences fortes).** Grâce à (2.60) et (2.62) on a les convergences fortes suivantes

$$(2.72) \quad \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^2 \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda^2 u_\varepsilon \rightarrow \lambda^2 u_0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

$$(2.73) \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \nabla_{X_2} u_0, \quad u_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ dans } L_{loc}^2(\omega_2).$$

**Preuve.** Grâce aux convergences fortes du lemme 2.2.4 on peut reprendre le passage à la limite dans (2.63) pour  $m = 3$ . On aura en effet :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^3 &= \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) \lambda^3 u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} 3\varepsilon^2 \lambda^2 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \lambda (A + \varepsilon I) \nabla_{X_2} \tilde{u}^3 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \lambda (A + \varepsilon I) \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^3 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} (A + \varepsilon I) \nabla_{X_2} \tilde{u}^3 \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^3 dx. \end{aligned}$$

Calculons la limite de  $I_\varepsilon^3$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

la limite du premier terme est obtenue en remplaçant tout juste  $\varepsilon$  par 0, grâce à (2.60) et (2.61).

On réécrit ensuite le second terme comme suit :

$$(2.74) \quad \int_{\Omega} 3\varepsilon^2 \lambda^2 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \lambda dx = \int_{\Omega} 3\varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx,$$

Pour calculer la limite de  $I_\varepsilon^3$  on utilise (2.67) on remplace juste  $\varepsilon$  par 0 dans la première intégrale quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Donc on peut facilement voir que la deuxième intégrale tend 0 si on la réécrit de la manière suivante

$$\int_{\Omega} (3\nabla_{X_1} \lambda) \cdot (\varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon) (\varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon) dx,$$

et on voit que ce terme tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0, grâce à la convergence forte donnée par (2.62) et la convergence faible donnée par (2.39) avec  $m = 3$ .

Enfin pour les termes suivants dans  $I_\varepsilon^3$ , on utilise dans le passage à la limite en  $\varepsilon > 0$ , (2.39) avec  $m = 3$  pour avoir

$$(2.75) \quad \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}_\varepsilon^3 dx = \int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} (\lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}_\varepsilon^3 dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} \nabla_{X_2} \tilde{u}_\varepsilon^3 \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}_\varepsilon^3 dx.$$

et on utilise (2.62) pour avoir

$$(2.76) \quad \int_{\Omega} \varepsilon \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}_\varepsilon^3 dx \rightarrow 0.$$

Finalement on obtient, grâce à (2.43) :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^3 &= \int_{\Omega} \lambda^3 u_0 \left( \int_{\omega_1} a(x, u_0) dX_1 + f \right) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u}^3 \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u}^3 dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda^3 u_0 \left( \int_{\omega_1} a(x, u_0) dX_1 + f \right) dx - \int_{\Omega} \lambda^3 A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \lambda^2 \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda^2 u_\varepsilon \longrightarrow \lambda^2 u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

*Cela achève la preuve.*

Suite à ce qui précède, on peut affirmer une première amélioration du poids par le résultat suivant :

**Théorème 2.2.3.** *Sous les hypothèses (2.2)- (2.7), il existe au moins une solution  $u_0$  du problème (2.8) telle que  $u_0 \in L^2_{\lambda^2}(\omega_1, H_0^1(\omega_2)) \cap L^2(\omega_1, H_0^1(\omega_2))$  vérifiant :*

$$(2.77) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0) \, dX_1 \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

### 2.2.3 Amélioration des poids

Dans cette section on propose une amélioration des convergences fortes, pour cela on suppose, en plus de l'hypothèse (2.4), que

$$(2.78) \quad \Delta_{X_1} \lambda \leq 0$$

dans un voisinage de  $\partial\Omega$ .

Soit  $\Omega' \subset\subset \Omega$  tel que  $\Delta_{X_1} \lambda \leq 0$  sur  $\Omega/\Omega'$ . Comme  $\lambda$  est supposée suffisamment régulière, il existe des réels  $m, M > 0$  tel que

$$(2.79) \quad m \leq \lambda \leq M, \quad \left| \Delta_{X_1} \lambda \right| \leq M \quad \text{sur } \Omega'.$$

**Théorème 2.2.4.** *Sous les hypothèses (2.2)- (2.7), (2.78) et (2.79), il existe au moins une solution du problème suivant*

$$\begin{cases} u_0 \in L^2_{\lambda}(\omega_1; H_0^1(\omega_2)) \cap L^2_{loc}(\omega_1; H_0^1(\omega_2)) \\ \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(x, u_0) \, dX_1 v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dX \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Dans le but de démontrer le théorème précédant, on commence par donner les estimations a priori suivantes

### 2.2.3.1 Quelques estimations a priori

**Lemme 2.2.6.** Soit  $u_\varepsilon$  une solution de (2.11). Sous les hypothèses (2.3) et (2.7), on a

$$(2.80) \quad \lambda u_\varepsilon, \quad |\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \quad |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon| \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega),$$

indépendamment de  $\varepsilon$ .

**Preuve.** Comme  $\lambda$  est supposée suffisamment régulières, on prend  $v = \lambda(X_1)u_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$  comme une fonction test dans (2.12) on obtient :

$$(2.81) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} (\lambda u_\varepsilon) dx + \int_{\Omega} (A + \varepsilon^2 I) \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx = \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u) dX_1 + f \right) \lambda u_\varepsilon dx.$$

L'utilisation de L'inégalité de Young donne

$$(2.82) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega} \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon^2 \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx + \int_{\Omega} \lambda^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq \\ \int_{\Omega} \frac{1}{2C_\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u) dX_1 + f \right)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{C_\Omega}{2} \lambda^2 u_\varepsilon^2 dx$$

Où  $C_\Omega$  est la constante de Poincaré.

On a :

$$\int_{\Omega} \nabla_{X_1} u_\varepsilon^2 \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx = - \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 \Delta_{X_1} \lambda dx.$$

Revenant à (2.82), tenant compte de (2.79) et utilisant l'inégalité de Poincaré dans la direction  $X_2$  on aura

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + \lambda^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} u_\varepsilon^2 \Delta_{X_1} \lambda dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \\ \leq C + M \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} u_\varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx.$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit ( $M\varepsilon < 2m^2$ ) L'inégalité précédentes devient

$$(2.83) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + \frac{\lambda^2}{2} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C + \varepsilon \int_{\Omega'} m^2 u_\varepsilon^2 dx \\ \leq C + \varepsilon \int_{\Omega'} \lambda^2 u_\varepsilon^2 dx \\ \leq C + \varepsilon \int_{\Omega} \lambda^2 u_\varepsilon^2 dx.$$

On utilise l'inégalité de Poincaré dans la direction  $X_2$ , et pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on obtient

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + \frac{\lambda^2}{2} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \lambda^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx.$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + \frac{\lambda^2}{4} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C,$$

donc

$$\lambda u_\varepsilon, \quad |\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \quad |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon| \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega),$$

indépendamment de  $\varepsilon$ .

Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.6.

### 2.2.3.2 Passage à la limite

Du paragraphe précédent on a les convergences faibles suivantes

**Lemme 2.2.7. (Convergences faibles).** *Sous les hypothèses du lemme 2.2.6 il existe  $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ , et  $\chi \in L^2(\Omega)$  tel qu'à une sous suite près on a*

1. *Les convergences faibles suivantes :*

$$(2.84) \quad \lambda u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} \tilde{u}, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

et il existe  $u_0 \in L^2_{loc}(\Omega)$  tel que :

$$\tilde{u} = \lambda u_0$$

2.  $\tilde{u}$  satisfait l'identité intégrale suivante :

$$(2.85) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx = \int_{\Omega} \tilde{u} \int_{\omega_1} \chi dX_1 dx + \int_{\Omega} f \tilde{u} dx.$$

**Preuve.** La preuve est la même que celle du lemme 2.2.2

**Proposition 2.2.1. (Convergences fortes)** *On a les convergences fortes suivantes*

$$(2.86) \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \lambda \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda u_\varepsilon \longrightarrow \lambda u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

$$(2.87) \quad \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \nabla_{X_2} u_0, \quad u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \quad \text{dans } L^2_{loc}(\Omega).$$

De plus on a

$$\chi = a(x, u_0).$$

**Preuve.** De l'identité (2.81), on obtient par le même procédé utilisé dans (2.83) :

$$(2.88) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda \nabla_{X_1} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_1} u_{\varepsilon} + A \lambda \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} dx - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} u_{\varepsilon}^2 \Delta_{X_1} \lambda dx \\ = \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(x, u_{\varepsilon}) dX_1 + f \right) \lambda u_{\varepsilon} dx.$$

Maintenant on pose

$$I_{\varepsilon} := \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda \nabla_{X_1} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_1} u_{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} (\lambda u_{\varepsilon} - \tilde{u}) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda u_{\varepsilon} - \tilde{u}) dx \\ - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} (u_{\varepsilon} - u_0)^2 \Delta_{X_1} \lambda dx.$$

Développant  $I_{\varepsilon}$  on obtient

$$I_{\varepsilon} = \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda \nabla_{X_1} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_1} u_{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} dx - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} u_{\varepsilon}^2 \Delta_{X_1} \lambda dx \\ - \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx \\ + \varepsilon^2 \int_{\Omega'} u_{\varepsilon} u_0 \Delta_{X_1} \lambda dx - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} u_0^2 \Delta_{X_1} \lambda dx.$$

Utilisant (2.88) on aura

$$I_{\varepsilon} \leq \int_{\Omega} \lambda u_{\varepsilon} \int_{\omega_1} a(x, u_{\varepsilon}) dX_1 dx + \int_{\Omega} f \lambda u_{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} dx \\ - \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega'} u_{\varepsilon} u_0 \Delta_{X_1} \lambda dx \\ (2.89) \quad - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} u_0^2 \Delta_{X_1} \lambda dx.$$

Noter que  $\int_{\omega_1} \lambda u_{\varepsilon} dX_1$  converge fortement vers  $\int_{\omega_1} \tilde{u} dX_1$  dans  $L^2(\omega_2)$  (voir lemme 2.2.3). Prenant ceci en considération on aura alors

$$\int_{\Omega} \lambda u_{\varepsilon} \int_{\omega_1} a(x, u_{\varepsilon}) dX_1 dx = \int_{\Omega} a(x, u_{\varepsilon}) \int_{\omega_1} \lambda u_{\varepsilon} dX_1 dx \rightarrow \int_{\Omega} \chi \int_{\omega_1} \tilde{u} dX_1 dx = \int_{\Omega} \tilde{u} \int_{\omega_1} \chi dX_1 dx.$$

Maintenant on passe à la limite dans (2.89), utilisant (2.85) et les convergences faibles,

$$(2.90) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon} \leq \int_{\Omega} \tilde{u} \int_{\omega_1} \chi dX_1 dx + \int_{\Omega} f \tilde{u} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx = 0.$$

D'un autre coté , pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on procède comme dans (2.83) on obtient

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon &= \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} \nabla_{X_2} (\lambda u_\varepsilon - \tilde{u}) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda u_\varepsilon - \tilde{u}) dx \\
 &\quad - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} (u_\varepsilon - u_0)^2 \Delta_{X_1} \lambda dx \\
 &= \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \frac{A}{\lambda} \nabla_{X_2} (\lambda u_\varepsilon - \tilde{u}) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda u_\varepsilon - \tilde{u}) dx \\
 &\quad - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega'} \frac{1}{\lambda^2} (\lambda u_\varepsilon - \tilde{u})^2 \Delta_{X_1} \lambda dx \\
 (2.91) \quad &\geq \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} (\lambda u_\varepsilon - \tilde{u})|^2 dx \geq 0.
 \end{aligned}$$

Combinant (2.90) et (2.91) on obtient

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \geq 0.$$

Mais comme la suite  $I_\varepsilon$  est positive on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} (\lambda u_\varepsilon - \tilde{u})|^2 dx = 0.$$

Il s'ensuit donc que

$$\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \lambda \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda u_\varepsilon \longrightarrow \lambda u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Par suite (2.86) est bien établie et on déduit facilement (2.87).

D'autre part, on peut aussi déduire, de (2.86) et comme  $\lambda > 0$  sur  $\omega_1$  qu'à une sous suite près

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{p.p dans } \Omega.$$

Prenant ceci en considération, Le théorème de Lebesgue et la continuité de  $a$  par rapport à la dernière variable sont suffisants pour déduire que

$$\chi = a(x, u_0).$$

Cela achève la preuve 2.2.1.

En consequence de la proposition précédente, on peut réécrire l'identité (2.50) comme suit :

$$(2.92) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0) dX_1 dx + \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il nous reste maintenant à préciser la condition au bord vérifiée par la solution  $u_0$  de l'équation intégrale

**Condition au bord.**

La deuxième convergence dans (2.86) peut s'écrire comme

$$(2.93) \quad \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} \lambda^2 |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 dX_1 \longrightarrow 0.$$

On déduit donc que pour presque tout  $X_1 \in \omega_1$

$$\lambda^2 \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 \longrightarrow 0.$$

comme

$$\left\{ \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2} v|^2 dX_2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur  $H_0^1(\omega_2)$  et que  $u_\varepsilon(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2)$  et  $\lambda > 0$  on a

$$(2.94) \quad u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2) \quad p.p. X_1 \in \omega_1$$

De (2.92) et (2.94) on achève la preuve du théorème 2.2.3.

Dans la suite, on examine le problème (2.1) avec un terme non linéaire plus général.

## 2.3 Deuxième problème

### 2.3.1 Position du problème et théorème d'existence

Dans ce paragraphe, on présente un problème qui généralise celui qu'on a étudié dans le paragraphe précédent. Dans le cas présent, on suppose que  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathbb{C}^2$  On suppose également que

$$(2.95) \quad \lambda \in \mathbb{C}^1(\bar{\Omega}).$$

Le terme non linéaire est représenté par des fonctions caratheodory de valeurs réelles et vectorielles  $a = a(x, r, \mathbf{s})$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, X'_1, r) = (a_1, \dots, a_n)$  définies sur  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $\Omega \times \omega_1 \times \mathbb{R}$  respectivement (mesurable par rapport à  $x, X'_1$ , continues par rapport à  $r, \mathbf{s}$ ). De plus elles satisfont aux conditions suivantes

$$(2.96) \quad \begin{cases} |\nabla \mathbf{a}(x, X'_1, r)|, |\mathbf{a}(x, X'_1, r)|, |a(x, r, \mathbf{s})| \leq a_0(x), \\ |\partial_r \mathbf{a}(x, X'_1, r)| \leq b, \forall r \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n, p.p. (x, X'_1) \in \Omega \times \omega_1, \end{cases}$$

où  $a_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $b$  est une constante positive et  $\nabla \mathbf{a}$  représente la matrice Jacobienne.

Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution du problème intégral-différentiel suivant

$$(2.97) \quad \begin{cases} -\nabla_{X_2} \cdot (A \nabla_{X_2} u) = \int_{\omega_1} a(x, u, \nabla_{X_2} u) dX_1 \\ -\nabla_{X_2} \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k(X'_1) u(X'_1, X_2)) dX'_1 \quad \text{dans } \Omega \\ u(X_1, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_2 \text{ p.p. } X_1 \in \omega_1, \end{cases}$$

où  $k$  est un nombre réel positif. Noter que l'équation est elliptique semilinéaire en  $X_2$  sujette à des conditions de Dirichlet sur le bord de la section  $X_2 \times \omega_2$  pour presque tout  $X_1$  dans  $\omega_1$ .

**Définition 2.3.1.** On dit qu'une fonction  $u$  telle que pour  $m > 0$ ,  $u \in L^2_{\lambda^m}(\omega_1; H^1_0(\omega_2))$  est une solution faible du problème (2.97) si l'identité intégrale

$$(2.98) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u, \nabla_{X_2} u) dX_1 dx \\ + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k(X'_1) u(X'_1, X_2)) dX'_1 dx,$$

ait lieu pour tout  $v$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$

**Remarque 2.3.1.** Si on prend  $v(X_1, X_2) = \varphi(X_1) \psi(X_2)$  tel que  $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_1)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(\omega_2)$  dans (2.98) et pour les mêmes raisons que dans la remarque 2.2.2 on obtient la formulation suivante

$$\int_{\omega_2} A \nabla_{X_2} u \cdot \nabla_{X_2} \psi dX_2 = \int_{\omega_2} \psi \int_{\omega_1} a(x, u, \nabla_{X_2} u) dX_1 dX_2 \\ + \int_{\omega_2} \nabla_{X_2} \psi \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k(X'_1) u(X'_1, X_2)) dX'_1 dX_2, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\omega_2).$$

Si  $a = 0$  et  $\mathbf{a}$  est indépendante de  $u$  et de  $X'_1$ , le problème (2.97) est réduit à une famille de problèmes elliptiques définies sur  $\omega_1$  et  $X_1$  joue le rôle d'un paramètre, ce qui n'est pas possible en général pour le problème (2.97) à cause du terme non local qui, aussi, oblige le problème à être dégénéré près de la frontière de  $\omega_1$ .

**Théorème 2.3.1.** Sous les hypothèses (2.2)-(2.4) et (2.96) il existe au moins une solution faible  $u_0$  du problème (2.97) telle que

$$(2.99) \quad \begin{cases} u_0 \in L^2_{\lambda^3}(\omega_1; H^1_0(\omega_2)) \cap L^2_{loc}(\omega_1, H^1(\omega_2)) \\ \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) dX_1 dx \\ + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) dX'_1 dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

Pour la démonstration du théorème 2.3.1 nous commençons par l'étude du problème perturbée qui fera l'objet de la prochaine section.

### 2.3.2 Etude du problème perturbé

Ici la voie naturelle pour étudier l'existence des solutions du problème (2.97) consiste à utiliser la méthode des perturbations singulières pour régulariser l'équation dans (2.97) et ceci en introduisant le problème perturbé suivant :

$$(2.100) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{X_1} u_\varepsilon - \nabla_{X_2} \cdot ((A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u_\varepsilon) = \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 \\ -\nabla_{X_2} \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k(X'_1) u_\varepsilon(X'_1, X_2)) dX'_1 \quad \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Delta_{X_1}$  est l'opérateur de Laplace en  $X_1$ , où  $I$  est la matrice identité et  $\varepsilon$  est un paramètre positif destiné à tendre vers 0, Le problème perturbé si dessus est un problème elliptique semilinéaire nonlocal avec des conditions de Dirichlet homogènes classiques.

**Définition 2.3.2.** *On dit qu'une fonction  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  est une solution faible du problème (2.100) si elle vérifie l'identité suivante*

$$(2.101) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} v dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} v dx \\ & = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 dx + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k(X'_1) u_\varepsilon(X'_1, X_2)) dX'_1 dx, \end{aligned}$$

pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

#### 2.3.2.1 Existence de solutions du problème perturbé

Pour  $\varepsilon$  fixé, l'existence d'une solution  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  du problème (2.100) peut se montrer en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. On a en effet :

**Théorème 2.3.2.** *Sous les hypothèses (2.2)-(2.4) et (2.96), il existe au moins une solution faible du problème perturbé (2.100).*

**Preuve.** *On suit les mêmes étapes de preuve du théorème 2.2.2. Pour plus de détail voir [19], [20]*

**Lemme 2.3.1.** (*Estimations a priori*) Sous les hypothèses (2.2), (2.3), (2.4) et (2.96) on a

$$(2.102) \quad \varepsilon \lambda^{3/2} |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \lambda^2 u_\varepsilon, \lambda^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon| \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega)$$

et

$$(2.103) \quad \varepsilon^2 u_\varepsilon, \varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon, \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon, \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon, \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega)$$

**Preuve.** Commençons par les estimations (2.103) et regardons l'identité d'énergie suivante

$$(2.104) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} (A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ = \int_{\Omega} u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 dx + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 dx,$$

cette identité est obtenue en testant (2.101) par  $v = u_\varepsilon$ . Utilisant (2.3), (2.96) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda^{1/2} |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx \\ \leq |\omega_1|^{1/2} |a_0|_{L^2(\Omega)} (|u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}) \\ \leq (C_{\omega_2}^{1/2} + 1) |\omega_1|^{1/2} |a_0|_{L^2(\Omega)} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}$$

où  $C_{\omega_2}$  est la constante de Poincaré dans la direction  $\omega_2$ . Ceci implique en particulier que

$$\varepsilon^2 |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq (C_{\omega_2}^{1/2} + 1) |\omega_1|^{1/2} |a_0|_{L^2(\Omega)},$$

et par conséquent

$$\varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}, \varepsilon |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq (C_{\omega_2}^{1/2} + 1) |\omega_1|^{1/2} |a_0|_{L^2(\Omega)}.$$

Les deux estimations dans (2.103) sont obtenues en utilisant l'inégalité de Poincaré. Ainsi la preuve de (2.103) est achevée.

Maintenant dans le but de montrer les estimations (2.102) et comme  $\lambda$  est supposée suffisamment régulière, on prend  $v = \lambda^m (X_1) u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ , avec  $m$  un entier positif, comme une fonction test dans (2.101), on aura

$$(2.105) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^m \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} (A + \varepsilon^2 I) \lambda^m \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ = \int_{\Omega} \lambda^m u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda^m \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 dx \\ - \int_{\Omega} m \varepsilon^2 \lambda^{m-1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx.$$

Utilisant (2.3) et l'inégalité de Young, on obtient

$$(2.106) \quad \begin{aligned} & \varepsilon^2 |\lambda^{\frac{m}{2}} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{\frac{m}{2}} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda^{\frac{m+1}{2}} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_{\Omega} C \lambda^{m-1} \left( \int_{\omega_1} a_0 dX_1 \right)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{8} \lambda^{m+1} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{8C_{\omega_2}} \lambda^{m+1} |u_\varepsilon|^2 dx \\ & \quad + \varepsilon^4 m^2 C_{\omega_2} \int_{\Omega} \lambda^{m-3} |\nabla_{X_1} \lambda|^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{4C_{\omega_2}} \lambda^{m+1} u_\varepsilon^2 dx. \end{aligned}$$

Ici on suppose que  $m \geq 3$ . Appliquant l'inégalité de Poincaré dans la direction  $X_2$  on obtient

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 |\lambda^{\frac{m}{2}} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{\frac{m}{2}} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |\lambda^{\frac{m+1}{2}} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C |\omega_1| |a_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^4 m^2 C_{\omega_2} |\lambda^{\frac{m-3}{2}} \nabla_{X_1} \lambda|_{\infty}^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Grâce à (2.103) on a

$$(2.107) \quad \lambda^{(m+1)/2} u_\varepsilon, \varepsilon \lambda^{m/2} |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \lambda^{(m+1)/2} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon| \text{ sont bornés dans } L^2(\Omega)$$

indépendamment de  $\varepsilon$ .

Ainsi on achève la preuve de (2.102) en prenant  $m = 3$ .

### 2.3.2.2 Passage à la limite

Comme une première étape le lemme précédent permet de passer à la limite dans (2.101). C'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 2.3.2. (Convergences faibles)** *Sous les hypothèses (2.2)-(2.4) et (2.96), il existe des fonctions  $\tilde{u}, \chi_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $\chi_1 \in [L^2(\Omega \times \omega_1)]^n$  et une sous suite, encore notée  $u_\varepsilon$  tel que, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$(2.108) \quad \lambda^2 u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}, \lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} \tilde{u}, \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et

$$(2.109) \quad \begin{cases} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi_0 & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi_1 & \text{dans } (L^2(\Omega \times \omega_1))^n, \\ \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 \rightharpoonup \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 & \text{dans } L^2(\omega_2), \\ \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 \rightharpoonup \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1 & \text{dans } (L^2(\Omega))^n. \end{cases}$$

De plus,  $\tilde{u}$  satisfait l'égalité d'énergie suivante

$$(2.110) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx = \int_{\Omega} \lambda \tilde{u} \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla_{X_2} \tilde{u} \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1 dx$$

De plus, il existe  $u_0$  dans  $L^2(\omega_1; L^2(\omega_2))$ , tel que

$$(2.111) \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\omega_1; L^2(\omega_2)).$$

Tel que

$$(2.112) \quad \tilde{u} = \lambda^2 u_0$$

**Preuve du lemme 2.3.2.** De (2.102), on déduit qu'il existe  $\tilde{u} \in L^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in (L^2(\Omega))^n$ ,  $u_2 \in (L^2(\Omega))^p$  tel qu'à une sous suite près

$$\lambda^2 u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}, \quad \lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_1, \quad \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup u_2 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a d'une part

$$(2.113) \quad \int_{\Omega} \lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u_1, \varphi \, dx$$

$$(2.114) \quad \int_{\Omega} \lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \lambda^2 u_\varepsilon \nabla_{X_2} \varphi \, dx \rightarrow - \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla_{X_2} \varphi \, dx = \int_{\Omega} \nabla_{X_2} \tilde{u} \varphi \, dx.$$

On en déduit que

$$(2.115) \quad u_1 = \nabla_{X_2} \tilde{u}$$

D'une autre part on a dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :

$$(2.116) \quad \varepsilon \lambda^3 \nabla_{X_1} u_\varepsilon = \varepsilon \nabla_{X_1} (\lambda^3 u_\varepsilon) - 3\varepsilon \lambda^2 \nabla_{X_1} \lambda u_\varepsilon.$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  on a :

$$(2.117) \quad \int_{\Omega} \varepsilon \lambda^3 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \lambda^{3/2} \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u_2 \lambda^{3/2} \varphi \, dx = \int_{\Omega} \lambda^{3/2} u_2 \varphi \, dx.$$

On a aussi grâce à (2.108) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon \lambda^3 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \varphi \, dx &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla_{X_1} (\lambda^3 u_\varepsilon) \varphi \, dx - 3\varepsilon \int_{\Omega} (\nabla_{X_1} \lambda) \lambda^2 u_\varepsilon \varphi \, dx \\ &= -\varepsilon \int_{\Omega} \lambda^2 u_\varepsilon \lambda \nabla_{X_1} \varphi \, dx - 3\varepsilon \int_{\Omega} \lambda^2 u_\varepsilon, \nabla_{X_1} \lambda \varphi \, dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que :

$$\lambda^{3/2} u_2 = 0.$$

Comme  $\lambda > 0$  sur  $\Omega$ , on obtient que

$$u_2 = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Ceci veut dire que (2.108) est montré.

D'un autre coté, pour  $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ , comme  $\lambda > 0$  et est continue on déduit de (2.102) qu'il existe  $u_0 \in L^2(\tilde{\Omega})$  tel que :

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\tilde{\Omega})$$

On peut facilement voir que  $u_0$  est indépendante du choix de  $\tilde{\Omega}$  et

$$u_0 \in L^2_{loc}(\Omega), \quad u_0 = \frac{\tilde{u}}{\lambda^2} \text{ sur } \Omega.$$

Comme  $a$  et  $\mathbf{a}$  sont uniformément bornés dans  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Omega \times \omega_1)$  respectivement, il existe  $\chi_0 \in L^2(\Omega)$  et  $\chi_1 \in [L^2(\Omega \times \omega_1)]^n$  tel qu'à une sous suite près

$$a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi_0, \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi_1 \quad \text{dans } L^2(\Omega \times \omega_1),$$

et par conséquent

$$(2.118) \quad \begin{cases} \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 \rightharpoonup \int \chi_0 dX_1 & \text{dans } L^2(\omega_2), \\ \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 \rightharpoonup \int \chi_1 dX'_1 & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Revenons maintenant à l'équation (2.101) et passons à la limite pour  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  ( $\text{supp} v \subset\subset \Omega$  et  $\lambda > 0$ ), on déduit

$$(2.119) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 dx + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1 dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ceci est équivalent aussi (en remplaçant  $v$  par  $\lambda^2 v$ ) à

$$(2.120) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} \lambda^2 v \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda^2 \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1 dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  la dernière identité devient

$$(2.121) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} \lambda^2 v \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda^2 \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1 dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On prend maintenant  $v = \lambda u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  dans l'identité précédente on aura alors

$$(2.122) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} (\lambda^2 u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} \lambda^3 u_\varepsilon \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda^3 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \chi_1 dX_1 dx;$$

on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient alors (2.110) ce qui termine la preuve du lemme 2.3.2.

Pour identifier la limite du terme non linéaire, c'est à dire passer à la limite à l'intérieur de  $a$  et  $\mathbf{a}$  on a besoin de convergences fortes qui sont assurés par le lemme suivant

La demarche suivie consiste en réalité, à poursuivre l'analyse précédente pour  $m = 5$  et en se servant des estimations précédentes ( $m = 3$ ), on obtient en premier lieu des convergences fortes pour  $m = 5$ .

Ensuite on profite de ces résultats pour montrer des convergences fortes pour  $m = 3$ .

**Lemme 2.3.3.** *Sous l'hypothèse (2.96), on a :*

$$(2.123) \quad \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 \rightarrow \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

**Preuve.** On pose

$$(2.124) \quad \varphi_\varepsilon = \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1.$$

On a grâce à (2.96) :

$$|\varphi_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left| \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 \right|^2 dx \leq C.$$

Et

$$|\nabla_{X_1} \varphi_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left| \nabla_{X_1} \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 \right|^2 dx \leq C.$$

De la même manière on a :

$$\begin{aligned} |\nabla_{X_2} \varphi_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \left| \nabla_{X_2} \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left| \int_{\omega_1} \nabla_{X_2} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) dX'_1 + \int_{\omega_1} \partial_r \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) \lambda^k \nabla_{X_2} u_\varepsilon dX'_1 \right|^2 dx \leq C. \end{aligned}$$

Où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Donc

$$(2.125) \quad (\varphi_\varepsilon)_\varepsilon \quad \text{est bornée dans } H^1(\Omega).$$

Par conséquent, il existe  $\psi_0 \in H^1(\Omega)$  tel que

$$(2.126) \quad \varphi_\varepsilon \rightharpoonup \psi_0.$$

On peut vérifier que :

$$(2.127) \quad \psi_0 = \varphi_0.$$

Et par conséquent :

$$(2.128) \quad \varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

**Lemme 2.3.4. (Convergences fortes)** *Sous les hypothèses précédentes et si*

$$(2.129) \quad \lambda^k \nabla_{X_2} u_\varepsilon \text{ est borné dans } L^2(\Omega),$$

*on a les convergences fortes suivantes, à une sous suite près*

$$(2.130) \quad \varepsilon \lambda^{5/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda^3 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^3 \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda^3 u_\varepsilon \rightarrow \lambda^3 u_0 \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et

$$(2.131) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, & \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \\ \varepsilon^2 u_\varepsilon \rightarrow 0, & \varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon \rightarrow 0, & \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \end{cases} \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

De plus, la dernière convergence dans (2.109) est forte et on a

$$\chi_0 = a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0), \quad \chi_1 = \mathbf{a}(x, X_1', \lambda^k u_0).$$

**Preuve.** On pose d'abord

$$I_\varepsilon := \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^5 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^5 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} (\lambda^2 u_\varepsilon - \tilde{u}) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda^2 u_\varepsilon - \tilde{u}) \, dx$$

Il est maintenant clair que (2.129) est assuré quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Commencant par la dernière limite.

Développant  $I_\varepsilon$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^5 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^5 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \lambda^5 A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} \lambda^3 A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx \\ &- \int_{\Omega} \lambda^3 A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} \, dx + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} \, dx. \end{aligned}$$

Utilisant (2.105) pour  $m = 5$ , on déduit

$$(2.132) \quad I_\varepsilon = \int_{\Omega} \lambda^5 u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda^5 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 dx \\ - 5 \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^4 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx - \int_{\Omega} \lambda^3 A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ - \int_{\Omega} \lambda^3 A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx.$$

Noter que  $\int_{\omega_1} \lambda^5 u_\varepsilon dX_1$  converge fortement vers  $\int_{\omega_1} \lambda^5 u_0 dX_1$  dans  $L^2(\omega_2)$  voir lemme 2.2.3 et lemme 3.1 de [6]. Prenant ceci en considération on obtient

$$\int_{\Omega} \lambda^5 u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 dx = \int_{\Omega} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \int_{\omega_1} \lambda^5 u_\varepsilon dX_1 dx \\ \rightarrow \int_{\Omega} \chi_0 \int_{\omega_1} \lambda^5 u_0 dX_1 dx = \int_{\Omega} \lambda^5 u_0 \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 dx$$

Pour le deuxième terme non linéaire  $\mathbf{a}$ , on ne peut pas procéder comme pour  $a$  vu que l'intégrale  $\int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1$  dépend aussi de  $X_1$  et aussi le gradient de  $u_\varepsilon$  pour lequel on ne peut pas appliquer le lemme 2.2.3. Donc on intervertit simplement les rôles D'où grâce à (2.108) et (2.122) notre limite est conclue.

Revenons maintenant à (2.131), grâce à (2.108) on a la limite suivante :

$$\left| \int_{\Omega} 5 \varepsilon^2 \lambda^4 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda dx \right| \leq 5 \varepsilon |\lambda|^{1/2} \left| \nabla_{X_1} \lambda \right|_{\infty} \left| \lambda^2 u_\varepsilon \right|_2 \left| \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \right|_2 \rightarrow 0.$$

Finalement on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{\Omega} \lambda^3 \tilde{u} \int_{\omega_1} \chi_0 dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda^3 \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \int_{\omega_1} \chi_1 dX'_1 dx \\ - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx.$$

La limite qu'on obtient n'est rien d'autre que la différence entre les deux cotés de l'identité (2.120) écrite pour  $v = \lambda^3 u_0$  (écrite pour  $v = \lambda^3 u_\varepsilon$  ensuite on passe à la limite en  $\varepsilon$ ). Ce qui veut dire que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0.$$

Comme est mentionné précédemment, (2.129) est conclue.

On peut maintenant en déduire, comme  $\lambda > 0$  sur  $\Omega$  qu'à une sous suite près on a

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \nabla_{X_2} u_0, \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Prenant ceci en considération, le théorème de Lebesgue, la continuité de  $a$  par rapport à la deuxième et la troisième variable et la continuité de  $\mathbf{a}$  par rapport à la troisième variable sont suffisants pour déduire que

$$(2.133) \quad \begin{cases} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \rightarrow a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) & \text{p.p. dans } \Omega, \\ a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \rightarrow a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) & \text{p.p. dans } \Omega \times \omega_1, \\ \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) & \text{dans } L^2(\Omega \times \omega_1). \end{cases}$$

Ce qui implique que

$$(2.134) \quad \chi_0 = a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0), \quad \chi_1 = \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0).$$

Pour terminer la preuve et montrer (2.130) on multiplie (2.104) par  $\varepsilon$  et on passe à la limite en utilisant (2.103), (2.132), on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varepsilon^4 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} (\varepsilon^2 A + \varepsilon^4 I) \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega} u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 dx + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX_1 dx = 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré on obtient  $\varepsilon^2 u_\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Ce qui achève la preuve du lemme 2.3.4.

Nous allons maintenant montrer la condition au bord que vérifie la solution  $u_0$  du problème (2.97).

### Condition au bord

De (2.129), on peut déduire que pour presque tout  $X_1 \in \omega_1$

$$\lambda^3 \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 \rightarrow 0.$$

Comme

$$\left\{ \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2} v|^2 dX_2 \right\}^{1/2},$$

est une norme sur  $H_0^1(\omega_2)$  et que  $u_\varepsilon(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2)$  p.p.  $X_1 \in \omega_1$  et  $\lambda > 0$  on a :

$$(2.135) \quad u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2) \quad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1.$$

les convergences faibles (2.108) suggèrent qu'une amélioration en terme d'existence et de convergences fortes avec un poids meilleur est possible et ce qui fera l'objet du théorème suivant comme une première amélioration du poids.

**Théorème 2.3.3.** *Sous les hypothèses précédentes et si  $k \geq 2$ , on a quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , à une sous suite près*

$$\begin{aligned} \varepsilon \lambda^{3/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon &\rightarrow 0 \quad \lambda^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^2 \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda^2 u_\varepsilon \rightarrow \lambda^2 u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon &\rightarrow 0, \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \nabla_{X_2} u_0, \quad u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{dans } L^2_{loc}(\omega_1, L^2(\omega_2)). \end{aligned}$$

En plus  $u_0 \in L^2_{\lambda^2}(\omega_1; H^1_0(\omega_2)) \cap L^2_{loc}(\omega_1, H^1(\omega_2))$  et vérifiant l'identité suivante :

$$(2.136) \quad \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) \, dX_1 \, dx \\ + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) \, dX'_1 \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Preuve.** Posons

$$\begin{aligned} \hat{I}_\varepsilon := \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^3 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon \, dx &+ \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda^3 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} (\lambda^2 u_\varepsilon - \tilde{u}) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda^2 u_\varepsilon - \tilde{u}) \, dx. \end{aligned}$$

Ici aussi on doit montrer que  $\hat{I}_\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour cela on utilise (2.105) avec  $m = 3$ , ce qui mène à écrire  $\hat{I}_\varepsilon$  comme suit

$$\begin{aligned} \hat{I}_\varepsilon &= \int_{\Omega} \lambda^3 u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \, dX_1 \, dx + \int_{\omega_1} \lambda^3 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) \, dX'_1 \, dX_1 \\ &\quad - \int_{\Omega} 3\varepsilon^2 \lambda^2 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} \, dx \end{aligned}$$

Maintenant on est en mesure de passer à la limite dans les trois premières intégrales en utilisant (2.108), les limites fortes (2.129), (2.130), (2.132) et on peut juste remplacer  $\varepsilon$  par 0. Pour la dernière intégrale on utilise les convergences faibles (2.108). On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{I}_\varepsilon &= \int_{\Omega} \lambda^3 u_0 \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) \, dX_1 \, dx + \int_{\omega_1} \lambda^3 \nabla_{X_2} u_0 \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) \, dX'_1 \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} \, dx = 0. \end{aligned}$$

Où on a tenu compte de (2.110).

Ce qui achève la preuve du théorème 2.3.3.

### 2.3.3 Amélioration des poids

Dans la section précédente, on a montré l'existence d'une solution  $u_0 \in L^2_{\lambda^2}(\omega_1; H^1_0(\omega_2))$  du problème (2.97) avec la condition  $k \geq 2$ . L'argument de base qui nous a conduit à ce résultat est celui des estimations affirmées dans le lemme 2.3.1.

L'amélioration de ces dernières estimations pourront donc nous conduire à une améliorations du poids de l'espace contenant la solution limite  $u_0$ . Cette amélioration est possible avec  $k \geq 1$  sous certaines conditions que nous allons préciser dans deux situations.

#### 2.3.3.1 Premier cas

On suppose qu'il existe une constante  $M$  arbitraire tel que l'hypothèse suivante soit satisfaite

$$(2.137) \quad \Delta_{X_1} \lambda \in L^\infty(\omega_1), \quad \Delta_{X_1} \lambda \leq M\lambda,$$

presque partout dans un voisinage de  $\partial\omega_1$ .

**Théorème 2.3.4.** *Sous les hypothèses (2.2)-(2.4), (2.96) et (2.136) il existe au moins une solution faible  $u_0$  du problème (2.97) telle que*

$$(2.138) \quad \begin{cases} u_0 \in L^2_\lambda(\omega_1; H^1_0(\omega_2)) \cap L^2_{loc}(\omega_1; H^1_0(\omega_2)) \\ \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) \, dX_1 \, dx \\ + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) \, dX'_1 \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

**Lemme 2.3.5.** *Sous les hypothèses (2.2)-(2.4) et (2.96) On a*

$$(2.139) \quad \lambda u_\varepsilon, \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon, \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega)$$

indépendamment de  $\varepsilon$ . De plus il existe  $u_0 \in L^2_\lambda(\omega_1; H^1_0(\omega_2))$  on a à une sous suite près

$$(2.140) \quad \lambda u_\varepsilon \rightharpoonup \lambda u_0, \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \lambda \nabla_{X_2} u_0,$$

dans  $L^2(\Omega)$ . La solution limite  $u_0$  satisfait, pour  $k \geq 1$ , :

$$(2.141) \quad \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dx = \int_{\Omega} \lambda u_0 \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) \, dX_1 \, dx \\ + \int_{\Omega} \lambda \nabla_{X_2} u_0 \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) \, dX'_1 \, dx.$$

**Preuve.** Si on tient compte de l'hypothèse (2.136) et on utilise comme fonction test  $v = \lambda(X_1)u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ , on obtient de (2.101)

$$(2.142) \quad \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} \lambda \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 \, dx \\ + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} \lambda u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \, dX_1 \, dx \\ + \int_{\Omega} \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X_1', \lambda^k u_\varepsilon) \, dX_1' \, dx.$$

Ce qui implique, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré que

$$(2.143) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon^2 \cdot \nabla_{X_1} \lambda \, dx + \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\omega_1|^{1/2} |a_0|_{L^2(\Omega)} (|\lambda u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}) \\ \leq (C_{\omega_2} + 1) |\omega_1| |a_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2.$$

on a utilisé ici (2.3) et (2.96). Donc par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on obtient

$$(2.144) \quad \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq (C_{\omega_2} + 1) |\omega_1| |a_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} \Delta_{X_1} \lambda u_\varepsilon^2 \, dx.$$

Comme on sait que la norme  $L^2$  de  $u_\varepsilon$  est bornée loin de la partie du bord  $\partial\omega_1 \times \omega_2$ , l'hypothèse (2.136) sera utilisé ici pour traiter le dernier terme de l'inégalité précédente. On choisit  $\omega'_1 \subset\subset \omega_1$  tel que (2.136) soit satisfaite sur  $\Omega \setminus (\omega'_1 \times \omega_2)$  et qu'il existe une constante  $m > 0$ , tel que

$$(2.145) \quad |\Delta_{X_1} \lambda| \leq m, \quad \text{dans } \Omega.$$

Revenant à (2.143) et utilisant l'hypothèse (2.136), on aura alors

$$\varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C + M \varepsilon^2 \int_{\omega'_1 \times \omega_2} \lambda u_\varepsilon^2 \, dx + m \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\omega'_1 \times \omega_2} u_\varepsilon^2 \, dx \leq C.$$

et ceci en utilisant le fait que  $\varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon$  est borné dans  $L^2(\Omega)$  déjà montré dans le lemme 2.3.1. Par conséquent

$$\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega),$$

indépendamment de  $\varepsilon$ . Le fait que  $\lambda u_\varepsilon$  soit borné dans  $L^2(\Omega)$  se déduit en utilisant l'inégalité de Poincaré.

Ceci achève la preuve du lemme 2.3.5.

Nous aurons besoin dans la suite des convergences fortes suivantes :

**Proposition 2.3.1.** *Sous les hypothèses (2.3)-(2.96) et (2.136), on a pour  $k \geq 1$*

$$(2.146) \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda u_\varepsilon \rightarrow \lambda u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

**Preuve.** On considère l'hypothèse (2.136) et on pose

$$(2.147) \quad J_\varepsilon := \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) dx - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} \Delta_{X_1} \lambda u_\varepsilon^2 dx,$$

qui n'est pas nécessairement positif. Cependant si  $J_\varepsilon$  tend vers 0 il servira à montrer les convergences (2.145) grâce aux convergences du théorème 2.3.3 et les hypothèses (2.136). En développant  $J_\varepsilon$ , on obtient :

$$J_\varepsilon = \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} \Delta_{X_1} \lambda u_\varepsilon^2 dx \\ - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx$$

Utilisant (2.141), on aura

$$J_\varepsilon = \int_{\Omega} \lambda u_\varepsilon \int_{\omega_1} a(x, u_\varepsilon, \nabla_{X_2} u_\varepsilon) dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_\varepsilon) dX'_1 dx \\ - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx$$

Prenant en considération le lemme 2.3.4, (la condition (2.128) ici est satisfaite pour  $k \geq 1$ ) et il suffit juste de remplacer  $\varepsilon$  par 0 dans l'intégrale des termes non linéaires et grâce aux convergences faibles du lemme 2.3.5 on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \int_{\Omega} \lambda u_0 \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) dX_1 dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla_{X_2} u_0 \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) dX'_1 dx \\ - \int_{\Omega} \lambda A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx,$$

En utilisant (2.140) on peut facilement déduire

$$(2.148) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = 0$$

Jusqu'à présent on ne dispose pas encore des limites souhaitées. Posant donc

$$\hat{J}_\varepsilon = \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Il est clair que

$$\hat{J}_\varepsilon \leq J_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} \Delta_{X_1} \lambda u_\varepsilon^2 dx.$$

On cherche à montrer que  $\hat{J}_\varepsilon \rightarrow 0$ , pour cela on divise la dernière intégrale en deux intégrales, l'une d'elle est prise sur  $\Omega \setminus (\omega'_1 \times \omega_2)$  pour appliquer (2.136). On obtient alors

$$\begin{aligned} \hat{J}_\varepsilon &\leq J_\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega \setminus (\omega'_1 \times \omega_2)} \Delta_{X_1} \lambda u_\varepsilon^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\omega'_1 \times \omega_2} \Delta_{X_1} \lambda u_\varepsilon^2 dx \\ &\leq J_\varepsilon + \frac{M}{2} \int_{\Omega \setminus (\omega'_1 \times \omega_2)} \lambda \varepsilon^2 u_\varepsilon^2 dx + \frac{m}{2} \int_{\omega'_1 \times \omega_2} \varepsilon^2 u_\varepsilon^2 dx. \end{aligned}$$

Maintenant, on passe à la limite en utilisant le fait que  $u_\varepsilon \in L^2_{loc}(\Omega)$  quand l'intégrale est prise sur  $\omega'_1 \times \omega_2$ , la convergence forte  $\varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  montrée dans le lemme 2.3.4 et (2.147), on en déduit donc que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

On a aussi

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Par suite les convergences fortes (2.145) ont lieu, ce qui achève la preuve de la proposition 2.3.1. De la même manière on peut montrer (2.134) et par conséquent on aboutit à  $u_0 \in L^2_\lambda(\omega_1; H^1_0(\omega_2))$ .

### 2.3.3.2 Deuxième cas

on suppose cette fois ci qu'il existe une constante  $M$  positive telle que l'hypothèse suivante est satisfaite

$$(2.149) \quad \Delta_{X_1} \lambda \in L^\infty(\omega_1), \quad |\nabla_{X_1} \lambda|^2 \leq M\lambda,$$

presque partout dans un voisinage de  $\partial\omega_1$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.3.5.** *Sous les hypothèses (2.2)-(2.4), (2.96) et (2.148) il existe au moins une solution faible  $u_0$  du problème (2.97) telle que*

$$\begin{cases} u_0 \in L_{\lambda^{3/2}}(\omega_1; H_0^1(\omega_2)) \cap L_{loc}^2(\omega_1; H_0^1(\omega_2)) \\ \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) \, dX_1 \, dx \\ + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X_1', \lambda^k u_0) \, dX_1' \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

**Lemme 2.3.6.** *Sous les mêmes hypothèses précédente on a :*

$$(2.150) \quad \lambda^{3/2} u_\varepsilon, \quad \varepsilon \lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon, \quad \lambda^{3/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \quad \text{bornés dans } L^2(\Omega)$$

*indépendamment de  $\varepsilon$ . De plus on a à une sous suite près*

$$(2.151) \quad \lambda^{3/2} u_\varepsilon \rightharpoonup \lambda^{3/2} u_0, \quad \varepsilon \lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda^{3/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \lambda^{3/2} \nabla_{X_2} u_0,$$

*dans  $L^2(\Omega)$ . La solution limite  $u_0 \in L_{\lambda^{3/2}}^2(\omega_1, H_0^1(\omega_2))$  et satisfait, pour  $k \geq \frac{3}{2}$ ,*

$$(2.152) \quad \int_{\Omega} \lambda^2 A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dx = \int_{\Omega} \lambda^2 u_0 \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) \, dX_1 \, dx \\ + \int_{\Omega} \lambda^2 \nabla_{X_2} u_0 \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X_1', \lambda^k u_0) \, dX_1' \, dx.$$

**Preuve.** En tenant compte de (2.148) et en utilisant  $v = \lambda^2(X_1)u_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$  comme une fonction test dans (2.101) et en procédant comme précédemment on obtient alors l'équivalent de (2.143) :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 |\lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |\lambda^{1+1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C(C_{\omega_2} + 1) |\omega_1| |a_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \int_{\Omega} (|\nabla_{X_1} \lambda|^2 + \lambda \Delta_{X_1} \lambda) u_\varepsilon^2 \, dx. \end{aligned}$$

en se servant de (2.148) et le fait que  $\varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon$  est borné dans  $L^2(\Omega)$ . La preuve de (2.139) et (2.140) est la même que ce qu'on vient de faire pour montrer le lemme 2.3.2. La limite du terme non linéaire peut être identifiée à l'aide du lemme (2.105) comme (2.128) est vérifiée pour  $k \geq 1 + 1/2$ . Ce qui complète la preuve du lemme.

En plus des résultats précédents, on a les convergences fortes suivantes :

**Proposition 2.3.2.** *Sous l'hypothèse (2.148), on aura pour  $k \geq 1 + \frac{1}{2}$ ,*

$$(2.153) \quad \varepsilon \lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda^{3/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^{3/2} \nabla_{X_2} u_0, \quad \lambda^{3/2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^{3/2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

De plus  $u_0$  est une solution du problème :

$$(2.154) \quad \begin{cases} u_0 \in L^2_{\lambda^{3/2}}(\omega_1; H_0^1(\omega_2)) \cap L^2_{loc}(\omega_1, H^1(\omega_2)) \\ \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} v \int_{\omega_1} a(x, u_0, \nabla_{X_2} u_0) \, dX_1 \, dx \\ + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} v \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u_0) \, dX'_1 \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

**Preuve.** On pose

$$(2.155) \quad J_\varepsilon := \varepsilon^2 |\lambda \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \lambda^2 A \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \, dx \\ - \varepsilon^2 \int_{\Omega} (|\nabla_{X_1} \lambda|^2 + \lambda \Delta_{X_1} \lambda) u_\varepsilon^2 \, dx$$

En suivant les mêmes étapes précédentes on déduit que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = 0$  et le dernier terme peut être traité de la manière suivante

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} (|\nabla_{X_1} \lambda|^2 + \lambda \Delta_{X_1} \lambda) u_\varepsilon^2 \, dx \leq \varepsilon^2 \int_{\Omega \setminus (\omega'_1 \times \omega_2)} (|\nabla_{X_1} \lambda|^2 + \lambda \Delta_{X_1} \lambda) u_\varepsilon^2 \, dx \\ + \varepsilon^2 \int_{\omega'_1 \times \omega_2} (|\nabla_{X_1} \lambda|^2 + \lambda \Delta_{X_1} \lambda) u_\varepsilon^2 \, dx \leq C \varepsilon^2 \int_{\Omega \setminus (\omega'_1 \times \omega_2)} \lambda u_\varepsilon^2 \, dx + C \varepsilon^2 \int_{\omega'_1 \times \omega_2} u_\varepsilon^2 \, dx$$

Les deux dernières intégrales tendent vers 0 grâce au fait que  $u_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2_{loc}(\Omega)$  et la convergence forte  $\varepsilon \lambda^{1/2} u_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  montrée dans le lemme 2.3.4. Noter que (2.128) est maintenant satisfaite pour  $k \geq 1 + \frac{1}{2}$  qui garantit les résultats du lemme 2.3.4. Ce qui complète la preuve du théorème.

## Etude du problème d'évolution

---

### 3.1 Position du problème et théorème d'existence

Il s'agit dans ce chapitre d'examiner le cas d'évolution (9) Plus précisément s'intéresse à l'étude d'une classe de problèmes intégro-différentiels paraboliques anisotropes dégénérés et non locaux en utilisant la méthode de perturbations singulières anisotropes.

Soit  $\Omega = \omega_1 \times \omega_2 \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ ,  $T > 0$  réel et  $Q_T = ]0, T[ \times \Omega$ .

Soit  $A = (a_{ij}(t, x))_n$  une matrice de taille  $n \times n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $(t, x) \in Q_T$  telle que

$$(3.1) \quad a_{ij} \in L^\infty(Q_T), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$$(3.2) \quad \beta |\xi|^2 \leq \frac{A(t, x)}{\lambda(X_1)} \xi \cdot \xi \leq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{p.p. } t \in [0, T[, \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

tels que  $\alpha, \beta$  sont des nombres réels positifs et  $\lambda$  est une fonction définie sur  $\omega_1$  telle que

$$(3.3) \quad \lambda \in W^{1,\infty}(\omega_1), \quad 0 < \lambda \leq M, \quad \text{dans } \omega_1,$$

et qui peut s'annuler sur  $\partial\omega_1$ .

Soit

$$(3.4) \quad u^0 \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^\infty(\Omega),$$

Et que

$$(3.5) \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

Où  $C$  est une constante positive.

On considère également une fonction non linéaire à valeurs réelles  $a = a(t, x, r)$  définie, mesurable sur  $Q_T \times \mathbb{R}$  et continue par rapport à la dernière variable satisfaisant

$$(3.6) \quad |a(t, x, r)| \leq C_1 + C_2|r|, \quad p.p. (t, x) \in Q_T.$$

Le problème d'évolution consiste alors à montrer l'existence d'une fonction  $u = u(t, X_1, X_2)$  solution du problème intégral-différentiel suivant :

$$(3.7) \quad \begin{cases} u' - \nabla_{X_2}(A\nabla_{X_2}u) = \int_{\omega_1} a(t, x, u) dX_1 + f & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u(t, X_1, \cdot) = 0 & \text{dans } \partial\omega_2, \quad p.p. t, X_1 \in [0, T[ \times \omega_1, \\ u(0, \cdot) = u^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On définit l'espace fonctionnel  $L^2_\xi(\omega_1; L^2(0, T; H^1_0(\omega_2)))$  pour un poids donné  $\xi = \xi(X_1) > 0$  p.p. sur  $\omega_1$  comme étant l'espace :

$$L^2_\xi(\omega_1; L^2(0, T; H^1_0(\omega_2))) = \{u \in L^2_{loc}(\omega_1; L^2(0, T \times \omega_2)), \xi u, \xi \nabla_{X_2} u \in L^2(Q_T), u(\cdot, X_1, \cdot) \in L^2(0, T; H^1_0(\omega_2)) p.p. X_1 \in \omega_1\}.$$

On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit de dualité entre  $H^1_0(\omega_2)$  et  $H^{-1}(\omega_2)$

**Définition 3.1.1.** On dit qu'une fonction  $u$  est une solution faible du problème (3.7) si

i)  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $\lambda^{1/2}u \in L^2(0, T; H^1_0(\omega_2))$  p.p.  $X_1 \in \omega_1$ ,  $u'(\cdot, X_1, \cdot) \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2))$  p.p.  $X_1 \in \omega_1$ ,

ii) l'identité intégrale

$$(3.8) \quad \langle u'(t, X_1, \cdot), v \rangle + \int_{\omega_2} A\nabla_{X_2}u \nabla_{X_2}v dX_2 = \int_{\Omega} a(t, x, u)v dx + \int_{\omega_2} fv dX_2,$$

ait lieu pour presque tout  $(t, X_1) \in (0, T) \times \omega_1$  et  $\forall v \in H^1_0(\omega_2)$ .

**Théorème 3.1.1.** Sous les hypothèses (3.2)-(3.6) il existe une solution  $u_0$  du problème (3.7) au sens de la définition 3.1.1.

## 3.2 Preuve du théorème d'existence

L'approximation du problème (3.7) est la voie naturelle pour montrer l'existence d'une solution. Ceci fera l'objet de ce paragraphe. On introduit donc un problème de perturbations singulières ou encore appelé problème perturbé qui est en fait une famille de problèmes classiques dont on montre l'existence de solution pour chaque problème grâce au théorème du point fixe de Schauder. Dans une seconde étape on donne les estimations à priori de ces solutions avant de faire le passage à la limite et montrer que la limite de sous suites de solutions est une solution du problème initiale (3.7).



Muni de la norme

$$|w|_W = |w|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + |w'|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$

Pour  $w \in L^2(Q_T)$ , soit  $u \in W$  la solution unique du problème parabolique linéaire suivant

$$(3.11) \quad \begin{cases} u' - \varepsilon^2 \Delta_{X_1} u - \nabla_{X_2}((A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u) \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\omega_1} a(t, x, w) dX_1 + f \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On définit l'application  $S$  de  $L^2(Q_T)$  dans lui même par

$$(3.12) \quad w \mapsto u = S(w).$$

Le couple  $(w, u) \in L^2(Q_T) \times W$  satisfait pour presque tout  $t$  dans  $]0, T[$  l'égalité suivante

$$(3.13) \quad \langle u', v \rangle + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u \nabla_{X_1} v dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, w) dX_1 v dx + \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose  $v = u$  dans (3.13), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u|^2 dx + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u|^2 dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \cdot \nabla_{X_2} u dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, w) u dX_1 dx + \int_{\Omega} f u dx.$$

En intégrant sur  $(0, t)$  et utilisant (3.2) et l'inégalité de Young on obtient

$$\frac{1}{2} |u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u|^2 dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \left( \int_{\omega_1} a(t, x, w) dX_1 \right)^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx ds + \frac{1}{2} |u(0)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Utilisant (3.6), on obtient

$$\frac{1}{2} |u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K_1 + K_2 \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx ds,$$

On utilise l'inégalité de Gronwall, il vient que

$$(3.14) \quad |u(t)|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

indépendamment de  $w$ . En particulier on a

$$(3.15) \quad |u|_{L^2(Q_T)} \leq C,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $w$ .

Maintenant on montre que  $u'_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Pour cela soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |\langle u', v \rangle_{(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))}| &\leq (C_1|\omega_1| + |f|_{L^2(\Omega)})|v|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{x_1} u|_{L^2(\Omega)} |\nabla_{x_1} v|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (|\varepsilon \nabla_{x_2} u|_{L^2(\Omega)} + |\lambda^{1/2} \nabla_{x_2} u|_{L^2(\Omega)}) |\nabla_{x_2} v|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (C_1|\omega_1| + |f|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{x_1} u|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{x_2} u|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |\lambda^{1/2} \nabla_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + ) |v|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On prend le carré des deux cotés et en intégrant sur  $(0, T)$  et utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$|u'|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq K \{ \{ K_1^2 + |f|_{L^2(Q_T)} + |\varepsilon \nabla_{x_1} u|_{L^2(Q_T)} + |\varepsilon \nabla_{x_2} u|_{L^2(Q_T)} + |\lambda^{1/2} \nabla_{x_2} u|_{L^2(Q_T)} \} \}.$$

Grâce à (3.14), il suit que

$$|u'|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C.$$

Par conséquent

$$(3.16) \quad |u|_W \leq C.$$

Indépendamment de  $w$ .

On montre maintenant que  $S$  est continu. Soit  $(w_n) \subset L^2(Q_T)$  une suite telle que

$$(3.17) \quad w_n \rightarrow w \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

De (3.17) et par la réciproque du théorème de la convergence dominée de Lebesgue il existe une sous suite encore notée  $(w_{n'})$  telle que

$$(3.18) \quad w_{n'} \longrightarrow w \text{ p.p dans } Q_T.$$

Et il existe  $g \in L^2(Q_T)$  telle que

$$(3.19) \quad |w_{n'}| \leq g \quad \text{p.p.}$$

On pose  $u_n = S(w_n) \in B$ . Il existe donc grâce à (3.14) une sous suite  $n'$  et  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  tel que

$$(3.20) \quad u_{n'} \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Et par le théorème de compacité d'Aubin on a

$$(3.21) \quad u_{n'} \longrightarrow u \text{ dans } L^2(Q_T).$$

On reprend (3.13), le couple  $(w_{n'}, u_{n'})$  satisfait dans  $\mathcal{D}'(0, T)$

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \langle u'_{n'}, v \rangle + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_{n'} \nabla_{X_1} v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_{n'} \nabla_{X_2} v \, dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_{n'} \nabla_{X_2} v \, dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, w_{n'}) \, dX_1 v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

En passant à la limite en  $n'$  dans (3.22), on obtient

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \langle u', v \rangle + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u \nabla_{X_1} v \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v \, dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v \, dx \\ = \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, w_{n'}) \, dX_1 v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx. \end{aligned}$$

Précisons maintenant la limite dans la partie droite de l'équation. Tenant compte de la continuité de  $a$  et (3.18) on a

$$(3.24) \quad a(t, x, w_{n'}) \rightarrow a(t, x, w) \text{ p.p. } Q_T \times \mathbb{R}$$

De (3.6) et (3.19) on déduit que

$$(3.25) \quad a(t, x, w_{n'}) \text{ borné dans } L^2(Q_T).$$

Grâce à (3.24) et (3.25), en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on déduit que

$$(3.26) \quad a(t, x, w_{n'}) \rightarrow a(t, x, w) \text{ dans } L^2(Q_T).$$

De (3.26) à une sous suite près on a grâce à la réciproque du théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$(3.27) \quad \int_{\omega_1} a(t, x, w_{n'}) \, dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} a(t, x, w) \, dX_1 \text{ p.p. } (t, x_2) \in (0, T) \times \omega_2.$$

D'autre part on a

$$(3.28) \quad \left| \int_{\omega_1} a(t, x, w_{n'}) dX_1 \right| \leq C.$$

Grâce à (3.27) et (3.28), utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on a

$$(3.29) \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, w_{n'}) dX_1 dx = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, w) dX_1 dx.$$

Ainsi on a

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \langle u', v \rangle + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u \nabla_{X_1} v dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u \nabla_{X_2} v dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, w) dX_1 v dx + \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \text{ p.p.t } \in ]0, T[. \end{aligned}$$

Comme  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  on a

$$u = S(w).$$

Par unicité de la solution du problème (3.10) on déduit que les convergences (3.20) et (3.21) ont lieu pour toute la suite. Par conséquent l'application  $S$  est continue.

Soit  $\bar{B}(0, C)$  la boule fermée de centre 0 et de rayon  $C$ , la constante  $C$  est donnée par (3.16). Il est clair que  $S(\bar{B}(0, C)) \subset \bar{B}(0, C)$ .

D'autre part  $S(\bar{B}(0, C))$  est bornée dans  $W$ .

Comme  $W \xrightarrow{\text{compact}} L^2(Q_T)$  (d'après le théorème d'Aubin) donc  $S(\bar{B}(0, C))$  est relativement compact dans  $L^2(Q_T)$ .

En utilisant le théorème du point fixe de Schauder on déduit l'existence d'une solution du problème (3.9).

### 3.2.3 Estimation des solutions du problème perturbé

Dans le but de montrer l'existence de  $u_0$  solution de (3.8) on fait tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (3.10) et on montre que la limite est une solution du problème (3.8).

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'étude du problème perturbé (3.9), nous commençons par donner quelques estimations a priori qui vont permettre de passer à la limite pour certains termes.

**Lemme 3.2.1. (Estimations a priori).** *Sous les hypothèses (3.2)-(3.4), on a les estimations suivantes*

$$(3.31) \quad u_\varepsilon, \text{ bornée dans } L^2(Q_T) \text{ et dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(3.32) \quad |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \quad |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|, \quad |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|, \quad \text{bornés dans } L^2(Q_T),$$

$$(3.33) \quad u'_\varepsilon \quad \text{bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

indépendamment de  $\varepsilon$ .

**Preuve.** On prend  $v = u_\varepsilon$  dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} f u_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Intégrant sur  $(0, t)$  et utilisant (3.2) et l'inégalité de Young on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx ds \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (a(t, x, u_\varepsilon))^2 dx ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx ds + \frac{1}{2} |u_\varepsilon(0)|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Utilisant (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx ds \leq K_1 + K_2 \int_0^t \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx ds, \end{aligned}$$

où  $K_1, K_2$  sont des constantes indépendantes de  $\varepsilon$ . On utilise l'inégalité de Gronwall, il vient

$$u_\varepsilon \quad \text{bornée dans } L^2(Q_T).$$

Par conséquent on a

$$|\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \quad |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|, \quad |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon| \quad \text{bornés dans } L^2(Q_T),$$

indépendamment de  $\varepsilon$ .

Maintenant on montre que  $u'_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Pour cela soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |\langle u'_\varepsilon, v \rangle_{(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))}| &\leq (C_1|\omega_1| + C_2|\omega_1||u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |f|_{L^2(\Omega)})|v|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon\nabla_{x_1}u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}|\nabla_{x_1}v|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (|\varepsilon\nabla_{x_2}u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\lambda^{1/2}\nabla_{x_2}u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)})|\nabla_{x_2}v|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (C_1|\omega_1| + C_2|\omega_1||u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 + |f|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon\nabla_{x_1}u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon\nabla_{x_2}u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |\lambda^{1/2}\nabla_{x_2}u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)})|v|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On prend le carré des deux cotés et en intégrant sur  $(0, T)$ , on obtient

$$|u'_\varepsilon|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C\{K_1^2 + K_2^2|u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)} + |f|_{L^2(Q_T)} + |\varepsilon\nabla_{x_1}u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)} + |\varepsilon\nabla_{x_2}u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)} + |\lambda^{1/2}\nabla_{x_2}u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)}\}.$$

Grâce à (3.31) et (3.32), il suit que

$$u'_\varepsilon \text{ bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Le corollaire suivant est une conséquence du lemme précédent

**Corollaire 3.2.2.** *Sous les mêmes hypothèses du lemme (3.2.1), on a les estimations suivantes*

$$(3.34) \quad \lambda^{1/2}u_\varepsilon, \quad \varepsilon\lambda^{1/2}|\nabla_{X_1}u_\varepsilon|, \quad \varepsilon\lambda^{1/2}|\nabla_{X_2}u_\varepsilon|, \quad |\lambda\nabla_{X_2}u_\varepsilon|, \quad \text{bornés dans } L^2(Q_T),$$

$$(3.35) \quad \lambda^{1/2}u'_\varepsilon \text{ bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

indépendamment de  $\varepsilon$ .

## 3.2.4 Passage à la limite sur $\varepsilon$

### 3.2.4.1 Convergences faibles

Du paragraphe précédant on a les convergences faibles suivantes

**Lemme 3.2.2. (Convergences faibles).** *Sous les mêmes hypothèses du lemme (3.2.1), il existe une sous suite aussi notée  $u_\varepsilon$ ,  $u_0 \in L^2(Q_T)$  et  $\chi \in L^2(Q_T)$  telles que*

$$(3.36) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \varepsilon\nabla_{X_1}u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon\nabla_{X_2}u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \lambda^{1/2}\nabla_{X_2}u_\varepsilon \rightharpoonup \lambda^{1/2}\nabla_{X_2}u_0, \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

$$(3.37) \quad u'_\varepsilon \rightharpoonup u'_0 \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

$$(3.38) \quad a(t, x, u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^2(Q_T).$$

et

$$(3.39) \quad \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \rightharpoonup \int_{\omega_1} \chi dX_1 \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

De plus la fonction limite  $u_0$  satisfait l'identité suivante :

$$(3.40) \quad - \int_0^t (u_0, v')_{L^2(\Omega)} ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} v dx dt = \int_{Q_T} \left( \int_{\omega_1} \chi dX_1 + f \right) v dx dt, \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

D'autre part, il existe  $\tilde{u} \in L^2(Q_T)$  tel que, à une sous suite près, on a

$$(3.41) \quad \lambda^{1/2} u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon \nabla_{X_2} \lambda^{1/2} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} \tilde{u}, \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

$$(3.42) \quad \lambda^{1/2} u'_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}' \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

avec

$$(3.43) \quad \tilde{u} = \lambda^{1/2} u_0.$$

De plus, la fonction  $\tilde{u}$  satisfait l'identité suivante :

$$(3.44) \quad \int_0^t (\tilde{u}', \tilde{u})_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx dt = \int_{Q_T} \left( \int_{\omega_1} \chi dX_1 + f \right) \lambda u_0 dx dt,$$

**Preuve.** Il résulte de (3.32) et (3.33) qu'il existe, à une sous suite près,  $u_0$  dans  $L^2(Q_T)$ ,  $u_1$  dans  $(L^2(Q_T))^p$ ,  $u_2, u_3$  in  $(L^2(Q_T))^n$  et  $u_4$  dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  tels que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup u_1, \quad \varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_2, \quad \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_3, \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

$$u'_\varepsilon \rightharpoonup u_4 \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

(Convergence dans  $L^2(Q_T)^n$  veut dire convergence composante par composante).

D'un coté on a

$$\int_{Q_T} \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot v dx dt \rightarrow \int_{Q_T} u_3 \cdot v dx dt$$

D'un autre coté on a

$$\int_{Q_T} \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot v dx dt = - \int_{Q_T} \lambda^{1/2} u_\varepsilon \operatorname{div}_{X_2} v dx dt \rightarrow - \int_{Q_T} \lambda^{1/2} u_0 \operatorname{div}_{X_2} v dx dt = \int_{Q_T} \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_0 \cdot v dx dt,$$

donc

$$u_3 = \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_0$$

De la même manière on peut montrer que

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

$$u'_\varepsilon \rightharpoonup u'_0 \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Par ailleurs on a , grâce à (3.6)

$$\int_{Q_T} a(t, x, u_\varepsilon)^2 dx dt \leq \int_{Q_T} (C_1 + C_2 |u_\varepsilon|)^2 dx dt \leq C,$$

ce qui veut dire que  $a$  est bornée dans  $L^2(Q_T)$ , donc il existe  $\chi \in L^2(Q_T)$  tel que

$$a(t, x, u_\varepsilon) \rightharpoonup \chi \quad \text{in } L^2(Q_T).$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 v dx dt &= \int_{Q_T} a(t, x, u_\varepsilon) \int_{\omega_1} v dX_1 dx dt \\ &\rightarrow \int_{Q_T} \chi \int_{\omega_1} v dX_1 dx dt = \int_{Q_T} v \int_{\omega_1} \chi dX_1 dx dt. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire

$$\int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \rightharpoonup \int_{\omega_1} \chi dX_1 \quad \text{in } L^2(Q_T).$$

Par ailleurs, pour ,  $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , on a de (3.10)

(3.45)

$$\begin{aligned} - \int_0^t (u_\varepsilon, v') ds + \int_{Q_T} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} v dx dt + \int_{Q_T} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v dx dt + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v dx dt \\ = \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 v dx dt + \int_{Q_T} f v dx dt. \end{aligned}$$

L'équation (3.45) est équivalente à

$$\begin{aligned} - \int_0^t (u_\varepsilon, v') ds + \int_{Q_T} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} v dx dt + \int_{Q_T} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v dx dt \\ + \int_{Q_T} \frac{A}{\lambda^{1/2}} \nabla_{X_2} (\lambda^{1/2} u_\varepsilon) \nabla_{X_2} v dx dt = \int_{Q_T} \left( \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) v dx dt \end{aligned}$$

Donc par (3.36), (3.37) et (3.39) on fait tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (3.45) et on obtient

$$(3.46) \quad - \int_0^t (u_0, v') ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} v dx dt = \int_{Q_T} \int_{\omega_1} \chi dX_1 v dx dt + \int_{Q_T} f v dx dt.$$

En remplaçant  $v$  par  $\lambda^{1/2} v$  l'équation précédente et en tenant compte de (3.43) on obtient

$$- \int_0^t (\tilde{u}, v') ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \nabla_{X_2} v dx dt = \int_{Q_T} \left( \int_{\omega_1} \chi dX_1 + f \right) \lambda^{1/2} v dx dt.$$

pour tout  $v \in \mathcal{D}(Q_T)$ . Maintenant, par densité de  $\mathcal{D}(Q_T)$  dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  la dernière identité devient

$$\int_0^t (\tilde{u}', v) ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \nabla_{X_2} v dx dt = \int_{Q_T} \left( \int_{\omega_1} \chi dX_1 + f \right) \lambda^{1/2} v dx dt,$$

pour tout  $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . En remplaçant maintenant  $v$  par  $\lambda^{1/2} u_\varepsilon$  dans la dernière identité et en passant à la limite sur  $\varepsilon$  on obtient

$$\int_0^t (\tilde{u}', \tilde{u}) ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx dt = \int_{Q_T} \left( \int_{\omega_1} \chi dX_1 + f \right) \lambda u_0 dx dt.$$

Ce qui achève la preuve.

### 3.2.4.2 Convergences fortes

Maintenant dans le but d'identifier la limite du terme non linéaire  $\chi$  en fonction de  $u_0$ , c'est à dire passer à la limite à l'intérieur de  $a$  on établit des résultats de convergences fortes sur les solutions approchées  $u_\varepsilon$ . Pour cela on commence par donner les lemmes suivants

**Lemme 3.2.3.** Soit  $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\omega_1)$  telle que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  dans  $L^2(\omega_1)$ , on a

$$(i) \quad \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1 \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)),$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi_n u_\varepsilon dX_1 \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1 \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)).$$

**Preuve.** Soit  $v \in \mathcal{D}(Q_T)$ , avec  $v(t, x_1, x_2) = \theta(t) \varphi(x_1) \psi(x_2)$  tel que  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_1)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(\omega_2)$ .

Réécrivait d'abord le terme  $\int_0^t \langle u'_\varepsilon, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} ds$  comme suit

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle u'_\varepsilon, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} ds &= - \int_0^t \int_{\Omega} u_\varepsilon v' dx ds \\
 &= - \int_0^t \int_{\omega_2} \int_{\omega_1} u_\varepsilon (\varphi \psi \theta)' dx_1 dx_2 ds \\
 &= - \int_0^t \int_{\omega_2} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon (\psi \theta)' dX_1 dX_2 ds \\
 &= - \int_0^t \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1 \right) (\psi \theta)' dX_2 ds \\
 &= \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1, \psi \theta \right\rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} ds \\
 &= \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \theta ds.
 \end{aligned}$$

Réécrivait maintenant l'équation (3.45) comme suit

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \langle u'_\varepsilon, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} ds &= \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \theta ds \\
 &= \int_{Q_T} \left( \varphi \left( \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) - \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \varphi \right) \psi \theta dx dt \\
 &\quad - \int_{Q_T} \varphi (\varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon + A \nabla_{X_2} u_\varepsilon) \nabla_{X_2} \psi \theta dx dt.
 \end{aligned}$$

Utilisons la caractérisation des éléments de  $L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2))$  en identifiant

$$f^0 = \varphi \left( \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) - \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \varphi.$$

et

$$f^1 = -\varphi (\varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon + A \nabla_{X_2} u_\varepsilon).$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1 \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)).$$

Ainsi la preuve de (i) est achevée.

D'autre part on a grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi_n u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle \theta ds &= \int_0^t \frac{d}{dt} \left\langle \int_{\omega_1} \varphi_n u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle \theta ds = \int_0^t \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi_n \psi \theta' dx ds = - \int_{\omega_1} \varphi_n \int_0^t \theta' \int_{\omega_2} u_\varepsilon \psi dX_2 \\ &\rightarrow - \int_{\omega_1} \varphi \int_0^t \theta' \int_{\omega_2} u_\varepsilon \psi dX_2 ds dX_1 = \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle \theta ds. \end{aligned}$$

Ce qui eut dire

$$\int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi_n u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle \theta ds \rightarrow \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle \theta ds \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)).$$

Ce qui achève la preuve de (ii) et du lemme 3.2.3.

**Lemme 3.2.4.** Sous les hypothèses de la proposition 3.2.1, (3.32) et (3.33), on a

$$(3.47) \quad \int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} \lambda u_0 dX_1 \quad \text{dans } L^2((0, T) \times \omega_2).$$

**Preuve.** Pour montrer la convergence (3.47) on utilise le lemme de Lions Aubin, pour cela la preuve est donnée dans deux étapes.

**Etape 1.** On montre d'abord que  $\int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1$  est borné dans  $L^2(0, T; H_0^1(\omega_2))$ .

De (3.36) on a pour  $v = v(t, x_2)$

$$\int_0^t \int_{\omega_2} \int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 v dX_2 ds \rightarrow \int_0^t \int_{\omega_2} \int_{\omega_1} \lambda u_0 dX_1 v dX_2 ds.$$

ce qui veut dire que

$$(3.48) \quad \int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} \lambda u_0 dX_1 \quad \text{dans } L^2((0, T) \times \omega_2).$$

Par conséquent

$$\int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 \quad \text{est borné dans } L^2((0, T) \times \omega_2).$$

**Etape 2.** On montre maintenant que  $\frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1$  est borné dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2))$ .

Soit  $v \in \mathcal{D}(Q_T)$  tel que  $v(t, x_1, x_2) = \theta(t) \varphi(x_1) \psi(x_2)$  dans (3.45), avec  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_1)$ ,

$\psi \in \mathcal{D}(\omega_2)$  tel que  $|\varphi| \leq M$  où  $M = |\lambda|_{L^\infty(\omega_1)} + 1$ . on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle_{H^{-1}(\omega_2), H_0^1(\omega_2)} \theta ds \right| &\leq \int_{Q_T} |\varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \varphi \psi \theta| dx dt \\ &+ \int_{Q_T} |\varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} \psi \varphi \theta| dx dt + \int_{Q_T} |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} \psi \varphi \theta| dx dt \\ &+ \int_{Q_T} \left| \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \varphi \psi \theta \right| dx dt + \int_{Q_T} f \varphi \psi \theta dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, (3.6), (3.31) et (3.32) on obtient :

$$\left| \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1, \psi \right\rangle \theta ds \right| \leq C |\psi|_{H_0^1(\omega_2)} |\theta|_{L^2(\omega_2)}.$$

On a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi u_\varepsilon dX_1 \quad \text{borné dans } L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)).$$

Soit  $\varphi_n$  une suite de  $\mathcal{D}(\omega_1)$  qui converge fortement vers  $\lambda$  dans  $L^2(\omega_1)$ . D'après le lemme 3.2.3 on a quand  $n \rightarrow +\infty$

$$(3.49) \quad \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \varphi_n u_\varepsilon dX_1 \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)).$$

Par suite on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 \quad \text{borné dans } L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)).$$

On peut donc déduire de la partie 1 et la partie 2 en utilisant le théorème de Lions Aubin que

$$\int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} \lambda u_0 dX_1 \quad \text{dans } L^2((0, T) \times \omega_2).$$

Par conséquent on a

$$\int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} \lambda u_0 dX_1 \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

Ce qui achève la preuve du lemme 3.2.4.

On établit maintenant les convergences fortes

**Lemme 3.2.5.** *On a les convergences suivantes*

(3.50)

$$\lambda u_\varepsilon \rightarrow \lambda u_0, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda \nabla_{X_2} u_0, \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

$$(3.51) \quad u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad p.p. \quad Q_T.$$

$$(3.52) \quad a(t, x, u_\varepsilon) \rightarrow a(t, x, u_0) \quad p.p.$$

**Preuve.** Dans toute la preuve  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité entre  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ .

Commençons d'abord par poser  $v = \lambda u_\varepsilon$  dans (3.10) et intégrons sur  $(0, T)$  on obtient

$$(3.53) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \langle u'_\varepsilon, \lambda u_\varepsilon \rangle ds + \int_{Q_T} \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dxdt + \int_{Q_T} \varepsilon^2 |\lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dxdt + \int_{Q_T} A \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dxdt \\ & = \int_{Q_T} \left( \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 + f \right) \lambda u_\varepsilon dxdt - \int_{Q_T} \varepsilon^2 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \lambda dxdt. \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$(3.54) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon := & \int_{Q_T} |\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dxdt + \int_{Q_T} |\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dxdt \\ & + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} (\lambda^{1/2} u_\varepsilon - \tilde{u}) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda^{1/2} u_\varepsilon - \tilde{u}) dxdt. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que  $\mathcal{J}_\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour cela développons  $\mathcal{J}_\varepsilon$  et tenant compte de (3.53) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon = & \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \lambda u_\varepsilon dxdt + \int_{Q_T} f \lambda u_\varepsilon dxdt \\ & - \int_{Q_T} \varepsilon^2 u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \lambda dxdt - \int_0^t \langle u'_\varepsilon, \lambda u_\varepsilon \rangle ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dxdt \\ & - \int_{Q_T} A \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dxdt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon dxdt. \end{aligned}$$

Soit  $(\xi_k) \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , une suite de fonctions régulières indépendantes de  $t$  qui sera choisie ultérieurement. On a

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'_\varepsilon, \lambda u_\varepsilon \rangle dt & = \int_0^T \langle \lambda^{1/2} u'_\varepsilon, \lambda^{1/2} u_\varepsilon \rangle dt = \int_0^T \langle (\lambda^{1/2} u_\varepsilon - \xi_k)', (\lambda^{1/2} u_\varepsilon - \xi_k) \rangle dt \\ & + \int_0^T \langle \xi'_k, \lambda^{1/2} u_\varepsilon - \xi_k \rangle dt + \int_0^T \langle \lambda^{1/2} u'_\varepsilon, \xi_k \rangle dt \\ & = \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u_\varepsilon - \xi_k|_{2, \Omega}^2(T) - \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u^0 - \xi_k|_{2, \Omega}^2 + \int_0^T \langle \lambda^{1/2} u'_\varepsilon, \xi_k \rangle dt. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_\varepsilon &:= \mathcal{J}_\varepsilon + \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u_\varepsilon - \xi_k|_{L^2(\Omega)}^2(T) \\
 &= \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u^0 - \xi_k|_{2,\Omega}^2 - \int_0^T \langle \lambda^{1/2} u'_\varepsilon, \xi_k \rangle dt + \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \lambda u_\varepsilon dx dt \\
 &\quad + \int_{Q_T} f \lambda u_\varepsilon dx dt - \int_{Q_T} A \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx dt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx dt \\
 &\quad - \int_{Q_T} \varepsilon^2 \lambda u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \lambda dx dt + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx dt.
 \end{aligned}$$

Noter que grâce au théorème de Fubini on a

$$(3.55) \quad \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \lambda u_\varepsilon dx dt = \int_{Q_T} a(t, x, u_\varepsilon) \int_{\omega_1} \lambda u_\varepsilon dX_1 dx dt.$$

Et on a grâce à (3.3), (3.31), (3.32) et Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}
 (3.56) \quad \left| \int_{\Omega} \varepsilon^2 \lambda u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} \lambda dx \right| &\leq \varepsilon |\nabla_{X_1} \lambda|_\infty \int_{\Omega} u_\varepsilon \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx \\
 &\leq \varepsilon |\nabla_{X_1} \lambda|_\infty |u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}^2 \varepsilon |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Passons maintenant à la limite en  $\varepsilon$  en utilisant (3.38) (3.41) et (3.47), on aura

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\varepsilon &= \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u^0 - \xi_k|_{2,\Omega}^2 - \int_0^T \langle \tilde{u}', \xi_k \rangle dt + \int_{Q_T} \int_{\omega_1} \chi dX_1 \lambda u_0 dx dt \\
 &\quad + \int_{Q_T} f \lambda u_0 dx dt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} \tilde{u} \cdot \nabla_{X_2} \tilde{u} dx dt \\
 &= \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u^0 - \xi_k|_{2,\Omega}^2 - \int_0^T \langle \tilde{u}', \xi_k \rangle dt + \int_0^T \langle \tilde{u}', \tilde{u} \rangle dt \\
 &= \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u^0 - \xi_k|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \langle (\tilde{u} - \xi_k)', \tilde{u} - \xi_k \rangle dt \\
 &= \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u^0 - \xi_k|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} |\tilde{u} - \xi_k|_{2,\Omega}^2(T) - \frac{1}{2} |\lambda^{1/2} u^0 - \xi_k|_{2,\Omega}^2 \\
 &= \frac{1}{2} |\tilde{u} - \xi_k|_{2,\Omega}^2(T).
 \end{aligned}$$

On choisit  $\xi_k$  telle que

$$\xi_k \rightarrow \tilde{u}(T) \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

On déduit que

$$0 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\varepsilon \leq 0.$$

Par conséquent

$$\mathcal{J}_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, par (3.2) on a

$$\int_{Q_T} |\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dxdt + \int_{Q_T} |\varepsilon \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dxdt + \int_{Q_T} \nabla_{X_2}(\lambda u_\varepsilon - \tilde{u}) \cdot \nabla_{X_2}(\lambda u_\varepsilon - \tilde{u}) dxdt \leq \mathcal{J}_\varepsilon.$$

Il s'en suit que

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow \tilde{u}, \quad \varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \tilde{u}, \quad \lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} \tilde{u} \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

Utilisons l'inégalité de Poincaré pour la dernière convergence ci-dessus, on aura

$$\lambda u_\varepsilon \rightarrow \lambda^{1/2} \tilde{u} = \lambda u_0 \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

Par conséquent on a à une sous suite près

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{p.p. } t, x \in Q_T.$$

Grâce à la continuité de  $a$  et (3.51) on a

$$a(t, x, u_\varepsilon) \rightarrow a(t, x, u_0) \quad \text{p.p.}$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.2.5.

**Proposition 3.2.1.** *Sous l'hypothèse (3.5), on a*

$$(3.57) \quad u_\varepsilon \in L^\infty(Q_T).$$

et

$$(3.58) \quad |u_\varepsilon|_{L^\infty(Q_T)} \leq C(|u^0|_{L^\infty(\Omega)}, |f|_{L^\infty(\Omega)}).$$

indépendamment de  $\varepsilon$

**Preuve.** Soit  $p, q$  deux nombres réels positifs tels que  $p > 1$  et  $1/p + 1/q = 1$ . On pose  $v =$

$|u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon$  dans (3.10) et on note que  $\frac{1}{p} \frac{d}{dt} (|u_\varepsilon|^p) = |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon u'_\varepsilon$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_0^t \int_\Omega \frac{d}{dt} (|u_\varepsilon|^p) dxds + \varepsilon^2 \int_{Q_T} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} (|u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon) dxdt + \int_{Q_T} (A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} (|u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon) dxdt \\ & = \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon dxdt + \int_{Q_T} f |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon dxdt. \end{aligned}$$

Tenons compte de (3.2) et (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^p(t) dx + \varepsilon^2(p-1) \int_{Q_T} |\nabla_{X_1} u_{\varepsilon}|^2 |u_{\varepsilon}|^{(p-2)} dx dt + (p-1) \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^{(p-2)} (A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} dx dt \\ & \leq C_1 |\omega_1| \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^{p-1} dx dt + C_2 \int_0^t \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} |u_{\varepsilon}| dX_1 \right) \left( \int_{\omega_1} |u_{\varepsilon}|^{p-1} dX_1 \right) dX_2 ds + \int_{Q_T} f |u_{\varepsilon}|^{p-1} dx dt + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u^0|^p dx. \end{aligned}$$

On utilise les inégalités de Holder et Young pour la partie droite de l'inégalité il vient que

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_1} |u_{\varepsilon}| dX_1 \leq |\omega_1|^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\omega_1} |u_{\varepsilon}|^p dX_1 \right)^{\frac{1}{p}}. \\ & \int_{\omega_1} |u_{\varepsilon}|^{p-1} dX_1 \leq |\omega_1|^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\omega_1} |u_{\varepsilon}|^p dX_1 \right)^{\frac{1}{q}}. \\ & \int_{Q_T} f |u_{\varepsilon}|^{p-1} dx dt \leq \frac{1}{p} \int_{Q_T} |f|^p dx dt + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^p dx dt. \text{ Noter que } \frac{p}{p-1} = q \\ & \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^{p-1} dx dt \leq \frac{1}{p} \int_{Q_T} dx dt + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^p dx dt \leq \frac{1}{p} |Q_T| + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^p dx dt. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^p(t) dx + \varepsilon^2(p-1) \int_{Q_T} |\nabla_{X_1} u_{\varepsilon}|^2 |u_{\varepsilon}|^{(p-2)} dx dt + (p-1) \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^{(p-2)} (A + \varepsilon^2 I) \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{X_2} u_{\varepsilon} dx dt \\ & \leq \left( |\omega_1|(C_1 + C_2) + 1 - \frac{1}{p} |\omega_1|(C_1 + C_2) \right) \int_{Q_T} |u_{\varepsilon}|^p dx dt + \frac{1}{p} \left( C_1 |\omega_1| |Q_T| + T \int_{\Omega} |f|^p dx + \int_{\Omega} |u^0|^p dx \right) \end{aligned}$$

On déduit donc que

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^p(t) dx \leq \alpha(p) \int_0^t \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^p dx ds + \beta(p),$$

où

$$\alpha(p) = p(|\omega_1|(C_1 + C_2) + 1) - |\omega_1|(C_1 + C_2) \quad \text{and} \quad \beta(p) = C_1 |\omega_1| |Q_T| + T \int_{\Omega} |f|^p dx + \int_{\Omega} |u^0|^p dx.$$

Utilisons l'inégalité de Gronwall il vient que

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^p dx ds \leq e^{pT|\omega_1|(C_1 + C_2) - T|\omega_1|(C_1 + C_2)} \left\{ TC_1 |\omega_1| |Q_T| + T^2 \int_{\Omega} |f|^p dx + (T + 1) \int_{\Omega} |u^0|^p dx \right\}.$$

On a alors

$$|u_\varepsilon|_{L^p(Q_T)} \leq e^{T|\omega_1|(C_1+C_2) - \frac{1}{p}T|\omega_1|(C_1+C_2)} \left\{ TC_1|\omega_1||Q_T| + T^2|f|_{L^p(\Omega)}^p + (T+1)|u^0|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}.$$

On calcule la limite quand  $p \rightarrow +\infty$  dans le côté de droite de la dernière inégalité et tenant compte de (3.5) on obtient

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(Q_T)} \leq C(|f|_{L^\infty(\Omega)}, |u^0|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 3.2.1

A cette étape on est capable d'identifier la limite faible  $\chi$  en fonction de  $u_0$  ceci fera l'objet du lemme suivant

**Lemme 3.2.6.** *Sous l'hypothèse (3.6) on a*

$$(3.59) \quad a(t, x, u_\varepsilon) \rightarrow a(t, x, u_0) \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

$$(3.60) \quad \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1, \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

$$(3.61) \quad \chi = a(t, x, u_0).$$

**Preuve.** Grâce à (3.6), (3.52), (3.57), (3.58) et en utilisant le théorème de Lebesgue on obtient

$$a(t, x, u_\varepsilon) \rightarrow a(t, x, u_0) \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de la réciproque de la convergence dominée de Lebesgue, on a à une sous suite près,

$$\int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1, \quad p.p. t, x_2 \in (0, T \times \omega_2)$$

D'autre part on a grâce à (3.58)

$$\left| \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \right| \leq C(|f|_{L^\infty(\Omega)}, |u^0|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Utilisons à nouveau le théorème de Lebesgue on aura

$$\int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 \rightarrow \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1, \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

De (3.59) on a

$$a(t, x, u_\varepsilon) \rightarrow a(t, x, u_0) \quad \text{dans } L^2(Q_T).$$

Donc de (3.38) on déduit que

$$\chi = a(t, x, u_0).$$

Ce qui achève la preuve du lemme 3.2.6.

A ce stade là nous avons montré que la fonction  $u_0$  est telle que

$$(3.62) \quad u_0 \in L^2(Q_T), \quad \lambda u_0 \in L^2(0, T; H^1(\omega_2)).$$

Et elle satisfait l'équation faible suivante :

$$(3.63) \quad \int_0^t \langle u'_0, v \rangle ds + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} v dx dt = \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(tx, u_0) dX_1 v dx dt + \int_{Q_T} f v dx dt,$$

pour tout  $v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ .

### Condition au bord

On précise maintenant la condition au bord satisfaite par  $u_0$

**Proposition 3.2.2.** *La fonction limite dans (3.36) satisfait*

$$(3.64) \quad u_0 \in L^2(0, T; H_0^1(\omega_2)) \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

**Preuve.** On sait d'un coté grâce au théorème 3.2.1 que  $u_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , on déduit grâce au théorème de Fubini que

$$(3.65) \quad u_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\omega_2)) \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

D'un autre coté, réécrivant la dernière convergence dans (3.50) comme suit

$$\int_0^t \int_{\omega_1} \int_{\omega_2} \lambda |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 dX_1 ds = \int_{\omega_1} \int_0^t \int_{\omega_2} \lambda |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 ds dX_1 \rightarrow 0.$$

On en déduit donc grâce à la réciproque de la convergence dominée de Lebesgue que

$$(3.66) \quad \lambda(X_1) \int_0^t \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 ds \rightarrow 0. \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

Comme  $\int_0^t \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2} v|^2 dX_2 ds$  est une norme sur  $L^2(0, T; H_0^1(\omega_2))$  et  $\lambda > 0$  sur  $\omega_1$  on en déduit de (3.65) et (3.66) que

$$(3.67) \quad u_0 \in L^2(0, T; H_0^1(\omega_2)) \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 3.2.2 .

On précise maintenant l'espace de  $u'_0$ , ceci fera l'objet de la proposition suivante

**Proposition 3.2.3.** *On a*

$$(3.68) \quad u'_0 \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)).$$

**Preuve.** Réécrivons l'équation (3.63) avec  $v = \theta(t)\psi(x_2)$  tels que  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ ,  $\psi \in H_0^1(\omega_2)$  on obtient

$$-\int_0^t (u_0, \psi)_{L^2(\omega_2)} \theta' ds + \int_0^t \int_{\omega_2} A \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} \psi \theta dX_2 ds = \int_0^t \int_{\omega_2} \psi \theta \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 dX_2 ds + \int_0^t \int_{\omega_2} f \psi \theta dX_2 ds.$$

Qu'on peut réécrire comme suit

$$\int_0^t \langle u'_0, \psi \rangle \theta ds = \int_0^t \int_{\omega_2} \left( \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 + f \right) \psi \theta dX_2 ds - \int_0^t \int_{\omega_2} A \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} \psi \theta dX_2 ds \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

On peut donc déduire que

$$u'_0 = f + \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 + \nabla_{X_2} (A \nabla_{X_2} u_0) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T \times \omega_2).$$

Comme  $u_0 \in L^2(0, T; H_0^1(\omega_2))$ , on a donc

$$u'_0 \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)) \quad p.p. X_1 \in \omega_1.$$

### Condition initiale

Maintenant, dans le but de montrer la convergence de la condition initiale  $u_\varepsilon(0)$  vers  $u^0$ , on a besoin du lemme suivant

**Lemme 3.2.7.** *Pour  $v \in H_0^1(\Omega)$ , les fonctions*

$$(3.69) \quad t \mapsto \int_{\Omega} u_\varepsilon v dx, \quad t \mapsto \int_{\Omega} u_0 v dx,$$

sont dans  $H^1(0, T)$  et à une sous suite près on a

$$(i) \quad \int_{\Omega} u_\varepsilon v dx \rightarrow \int_{\Omega} u_0 v dx \quad \text{dans } L^2(0, T), C(0, T),$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} u_\varepsilon v dx \rightharpoonup \int_{\Omega} u_0 v dx \quad \text{dans } H^1(0, T).$$

**Preuve.** Dans ce lemme  $(., .)$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ . Réécrivons l'équation (3.10) comme suit

$$(3.70) \quad \frac{d}{dt} (u_\varepsilon, v) + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} v dx + \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v dx + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} v dx \\ = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 v dx + \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tenons compte de (3.2) et (3.6)

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d}{dt}(u_\varepsilon, v) \right| &\leq (C_1|\omega_1| + C_2|\omega_1||u|_{L^2(\Omega)} + |f|_{L^2(\Omega)})|v|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{x_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} |\nabla_{x_1} v|_{L^2(\Omega)} \\
 &\quad + (|\varepsilon \nabla_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\lambda^{1/2} \nabla_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}) |\nabla_{x_2} v|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq (C_1|\omega_1| + C_2|\omega_1||u|_{L^2(\Omega)}^2 + |f|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{x_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \\
 &\quad + |\lambda^{1/2} \nabla_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}) |v|_{H_0^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

En prenant le carré des deux cotés et en intégrant sur  $(0, T)$  il vient que

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \left| \frac{d}{dt}(u_\varepsilon, v) \right|^2 ds &\leq C |v|_{L^2(\Omega)}^2 \{K_1^2 + K_2^2 |u|_{L^2(Q_T)} + |f|_{L^2(Q_T)} + |\varepsilon \nabla_{x_1} u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)} \\
 &\quad + |\varepsilon \nabla_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)} + |\lambda^{1/2} \nabla_{x_2} u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)}\}.
 \end{aligned}$$

En utilisant (3.4), (3.31) et (3.32) on en déduit que

$$(3.71) \quad \frac{d}{dt}(u_\varepsilon, v) \in L^2(0, T).$$

D'un autre coté on a grâce à Cauchy Schwarz

$$(3.72) \quad |(u_\varepsilon, v)| \leq |u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)}.$$

En prenant le carré des deux cotés et en intégrant sur  $(0, T)$  on obtient

$$(3.73) \quad \int_0^t (u_\varepsilon, v)^2 ds \leq |v|_{L^2(\Omega)} |u_\varepsilon|_{H_0^1(Q_T)}.$$

En tenant compte de (3.31) on obtient

$$(3.74) \quad (u_\varepsilon, v) \in L^2(0, T).$$

Il existe donc une constante  $D$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que

$$(3.75) \quad |(u_\varepsilon, v)|_{H^1(0, T)} \leq D.$$

Par conséquent il existe une sous suite de  $(u_\varepsilon)$  telle que

$$(3.76) \quad (u_\varepsilon, v) \rightharpoonup L_v \text{ dans } H^1(0, T).$$

et

$$(3.77) \quad (u_\varepsilon, v) \rightarrow L_v \text{ dans } L^2(0, T) \text{ et } C(0, T).$$

On a d'un coté de (3.77) pour  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$

$$(3.78) \quad \int_0^t (u_\varepsilon, v) \varphi \, ds \rightarrow \int_0^t L_v \varphi \, ds.$$

D'un autre coté on a grâce à (3.36)

$$(3.79) \quad \int_0^t (u_\varepsilon, v) \, ds = \int_0^t \int_\Omega u_\varepsilon v \varphi \, dx \, ds \rightarrow \int_0^t \int_\Omega u_0 v \varphi \, dx \, ds = \int_0^t (u_0, v) \varphi \, ds.$$

De (3.78) et (3.79) on déduit que

$$(3.80) \quad L_v = (u_0, v)$$

Et par unicité de la limite les convergences (3.76) et (3.77) ont lieu pour toute la suite  $u_\varepsilon$ .

Ce qui achève la preuve du lemme 3.2.7.

**Lemme 3.2.8.** *La fonction limite dans (3.36) satisfait la condition initiale suivante*

$$(3.81) \quad u_0(0, \cdot) = u^0.$$

**Preuve.** Pour  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_\Omega u^0 v \, dx = \int_\Omega u_\varepsilon(0, x) v \, dx \rightarrow \int_\Omega u_0(0, x) v \, dx.$$

En utilisant le lemme (3.2.7)

$$(3.82) \quad \int_\Omega u^0 v \, dx = \int_\Omega u_0(0, x) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Par densité de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  l'égalité est satisfaite pour tout  $v \in L^2(\Omega)$ , finalement on a

$$(3.83) \quad u_0(0, \cdot) = u^0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.2.8

### 3.3 Amélioration des poids

De la section précédente on sait que le problème (3.7) admet une solution faible dans l'espace  $L_\lambda^2(\omega_1; L^2(0, T; H_0^1(\omega_2)))$ . Les convergences (3.50) du lemme 3.2.5 suggèrent une amélioration des poids et par conséquent l'amélioration de l'espace d'existence. Ceci fera l'objet du théorème suivant

**Théorème 3.3.1.** Soit  $u_0$  solution du problème (3.7) et  $u_\varepsilon$  solution du problème (3.9). Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, on a les convergences fortes suivantes :

(3.84)

$$\lambda^{1/2}u_\varepsilon \rightarrow \lambda^{1/2}u_0, \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_0, \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

(3.85)

$$u'_\varepsilon \rightarrow u'_0 \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

De plus,  $u_0$  satisfait

$$(3.86) \quad \begin{cases} u_0 \in L^2(Q_T) \cap L^2_{\lambda^{1/2}}(\omega_1; L^2(0, T; H_0^1(\omega_2))) \cap C([0, T[; L^2(\omega_2)), \\ u'_0(\cdot, X_1, \cdot) \in L^2(0, T; H^{-1}(\omega_2)), \\ u_0(0, X_1, \cdot) = u^0(X_1, \cdot) \text{ dans } \omega_2, \\ \langle u'_0, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} A \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} v \, dx = \int_{\Omega} \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) v \, dX_1 \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), p.p. \, t \in [0, T[. \end{cases}$$

*Démonstration.* Dans toute la preuve  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité entre  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ .

On pose

$$(3.87) \quad \mathcal{I}_\varepsilon := \int_{Q_T} |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 \, dxdt + \int_{Q_T} |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 \, dxdt + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \, dxdt.$$

Nous montrons dans la suite que  $\mathcal{I}_\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour cela développons  $\mathcal{I}_\varepsilon$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon = & \int_{Q_T} |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 \, dxdt + \int_{Q_T} |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 \, dxdt + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dxdt + \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dxdt \\ & - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dxdt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dxdt. \end{aligned}$$

Par ailleurs, utilisons l'équation (3.63) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varepsilon = & - \int_0^t \langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle \, ds + \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) \, dX_1 u_\varepsilon \, dxdt + \int_{Q_T} f u_\varepsilon \, dxdt - \int_0^t \langle u'_0, u_0 \rangle \, ds + \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) \, dX_1 u_0 \, dxdt \\ & + \int_{Q_T} f u_0 \, dxdt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dxdt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dxdt. \end{aligned}$$

Maintenant soit  $(\phi_k) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  une suite de fonctions régulières indépendante de  $t$  qu'on

précisera ultérieurement, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle u'_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle ds &= \int_0^t \langle (u_\varepsilon - \phi_k)', (u_\varepsilon - \phi_k) \rangle ds + \int_0^t \langle \phi'_k, u_\varepsilon - \phi_k \rangle ds + \int_0^t \langle u'_\varepsilon, \phi_k \rangle ds \\ &= \frac{1}{2} |u_\varepsilon - \phi_k|_{2,\Omega}^2(T) - \frac{1}{2} |u^0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \langle u'_\varepsilon, \phi_k \rangle ds \end{aligned}$$

Revenant à ( 3.87) et posons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\varepsilon &:= \mathcal{I}_\varepsilon + \frac{1}{2} |u_\varepsilon - \phi_k|_{2,\Omega}^2(T) \\ &= \frac{1}{2} |u^0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2 + \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 u_\varepsilon dx dt + \int_{Q_T} f u_\varepsilon dx dt - \int_0^t \langle u'_\varepsilon, \phi_k \rangle ds \\ &\quad - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx dt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx dt. \end{aligned}$$

Noter qu'on a

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx dt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx dt \\ = - \int_{Q_T} \frac{A}{\lambda^{1/2}} \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx dt - \int_{Q_T} \frac{A}{\lambda^{1/2}} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant (3.36) on a quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T} \frac{A}{\lambda^{1/2}} \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx dt - \int_{Q_T} \frac{A}{\lambda^{1/2}} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx dt \\ \rightarrow - \int_{Q_T} \frac{A}{\lambda^{1/2}} \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx dt - \int_{Q_T} \frac{A}{\lambda^{1/2}} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_0 dx dt \\ = - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx dt - \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx dt. \end{aligned}$$

Grâce à (3.36) et (3.60) on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_\varepsilon &= \frac{1}{2} |u^0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2 - \int_0^t \langle u'_0, \phi_k \rangle ds + \int_{Q_T} \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 u_0 dx dt + \int_{Q_T} f u_0 dx dt \\
 &\quad - 2 \int_{Q_T} A \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx dt. \\
 &= \frac{1}{2} |u^0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2 - \int_0^t \langle u'_0, \phi_k \rangle ds + \int_0^t \langle u'_0, u_0 \rangle ds \\
 &= \frac{1}{2} |u^0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \langle (u_0 - \phi_k)', u_0 - \phi_k \rangle ds \\
 &= \frac{1}{2} |u^0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} |u_0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2(T) - \frac{1}{2} |u^0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2 \\
 &= \frac{1}{2} |u_0 - \phi_k|_{2,\Omega}^2(T).
 \end{aligned}$$

On choisit  $\phi_k$  tel que

$$\phi_k \rightarrow \tilde{u}(T) \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

on déduit que

$$0 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}_\varepsilon \leq 0.$$

Donc

$$\mathcal{R}_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

et par coercivité on a

$$\int_{Q_T} |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx dt + \int_{Q_T} |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx dt + \int_{Q_T} \nabla_{X_2} (\lambda^{1/2} u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla_{X_2} (\lambda^{1/2} u_\varepsilon - u_0) dx dt \leq \mathcal{R}_\varepsilon,$$

il s'en suit que

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \lambda^{1/2} \nabla_{X_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(Q_T),$$

Il est question maintenant de montrer que  $u'_\varepsilon \rightarrow u'_0$  dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , pour cela on a

$$\begin{aligned}
 \langle u'_\varepsilon - u'_0, v \rangle &= \int_{\Omega} \left[ \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 - \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 \right] v dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v dx - \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} v dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} (A \nabla_{X_2} u_\varepsilon - A \nabla_{X_2} u_0) \cdot \nabla_{X_1} v dx
 \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}
 \langle u'_\varepsilon - u'_0, v \rangle &\leq \left| \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 - \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 \right|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} \\
 &+ |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} |\nabla_{X_1} v|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} |\nabla_{X_2} v|_{L^2(\Omega)} \\
 &+ |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon - \lambda \nabla_{X_2} u_0|_{L^2(\Omega)} |\nabla_{X_1} v|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \left( \left| \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 - \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 \right|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon - \lambda \nabla_{X_2} u_0|_{L^2(\Omega)} \right) |v|_{H^1(\Omega)},
 \end{aligned}$$

pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
 |u'_\varepsilon - u'_0|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \left| \int_{\omega_1} a(t, x, u_\varepsilon) dX_1 - \int_{\omega_1} a(t, x, u_0) dX_1 \right|_{L^2(\Omega)} \\
 &+ |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\lambda \nabla_{X_2} u_\varepsilon - \lambda \nabla_{X_2} u_0|_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

On intègre sur  $(0, T)$ , on fait tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  et tenant compte de (3.50), (3.60) et (3.84) on déduit que

$$|u'_\varepsilon - u'_0|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \rightarrow 0.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 3.3.1 □

**Remarque 3.3.1.** *On peut avoir les mêmes résultats des théorèmes (3.1.1) et (3.3.1) si on suppose que le terme non linéaire  $a$  est borné, c'est à dire  $C_2 = 0$  dans (3.6). On suppose dans ce cas que les données initiales  $f$  et  $u^0$  sont seulement dans  $L^2(\Omega)$  au lieu de  $L^\infty(\Omega)$ .*

## Conclusion générale et Perspectives

---

Ce travail de recherche m'a permis de découvrir le domaine des perturbations singulières et en particulier les perturbations singulières anisotropes. de maîtriser certaines techniques. Il m'a permis aussi d'approfondir dans les subtilités des convergences et de renforcer mes connaissances dans les outils de l'analyse fonctionnelle liés au sujet.

Dans cette thèse nous avons étudié des modèles mathématiques issus de l'équation de Boltzmann modélisant la diffusion des neutrons dans un réacteur nucléaire.

Les problèmes dont nous avons traité sont des EDP intégro-différentielles non linéaires anisotropes de type dégénéré.

Nous avons traité le cas stationnaire et le cas d'évolution et pour chacun des cas nous avons utilisé la méthode des perturbations singulières pour montrer l'existence de solutions dans un espace de Sobolev à poids.

Les perspectives de ce travail sont multiples, citons à titre d'exemple :

- Traiter différentes formes de non-linéarités. En effet dans cette thèse nous avons traité deux formes du termes non linéaire qui sont

$$\int_{\omega_1} a(t, x, u) dX_1.$$

Et

$$\int_{\omega_1} a(x, u, \nabla_{X_2} u) dX_1 - \nabla_{X_2} \cdot \int_{\omega_1} \mathbf{a}(x, X'_1, \lambda^k u(X'_1, X_2)) dX'_1.$$

Il sera intéressant de voir par exemple des termes non linéaires de la forme

$$a(t, x \int_{\omega_1} u dX_1).$$

$$\int_{\omega_1} a(X'_1, X_1, X_2, u(X'_1, X_2)) dX'_1, \quad \text{où} \quad a(X'_1, X_1, X_2, u(X'_1, X_2)) = b(X'_1, X_2, r)c(X_1).$$

- Voir le cas où la dégénérescence est à l'intérieur du domaine au lieu à la frontière. Dans les problèmes que nous avons traité dans cette thèse  $\lambda$  s'annule près de la frontière  $\partial\Omega$ , il sera envisageable de voir le cas où  $\lambda$  s'annule sur  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .
- Traiter le cas où les hypothèses sur les conditions initiales et au bord sont plus faibles.

---

## Bibliographie

---

- [1] B. Brighi and S. Guesmia, *Asymptotic behavior of solutions of hyperbolic problems on a cylindrical domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **suppl**, 160–169, (2007).
- [2] M. Chipot, *Elliptic Equations : An Introductory Course*," Birkhäuser, (2009).
- [3] M. Chipot, *On some anisotropic singular perturbation problems*, Asymptotic Anal., **55**, 125–144 (2007)
- [4] M. Chipot and S. Guesmia, *On the asymptotic behavior of elliptic, anisotropic singular perturbations problems*, Commun. Pure Appl. Anal., **8**, 179–193 (2009)
- [5] M. Chipot and S. Guesmia, *Correctors for some asymptotic problems*, Proc. Steklov Inst. Math. **270** (2010).
- [6] M. Chipot and S. Guesmia, *On a class of integro-differential problems*, Commun. Pure Appl. Anal. **9**(5), 1249–1262 (2010).
- [7] M. Chipot and S. Guesmia, *On some anisotropic, nonlocal, parabolic singular perturbations problems*, Applicable analysis. **90**(12), 1775-1789 (2010).
- [8] M.Chipot, S.Guesmia. A.Sengouga, *Singular perturbation of some nonlinear problems*. J. Math. Sci. **176**(6), 828-843 (2011).
- [9] S. Guesmia, R. Kechkar and M.S. Moulay, *Existence results for some partial integro-differential equations*. Mediterr. J. Math. **13**, 4063-4079 (2016).
- [10] S.Guesmia, *On the asymptotic behavior of elliptic boundary value problems with small coefficients*. Electron. J. Differ. Equ. **59**, 1-13 (2009).
- [11] S.Guesmia, A.Sengouga, *Anisotropic singular perturbations for hyperbolic problems*. Appl.Math. Comput. **217**(22), 8983-8996 (2011).

- 
- [12] E. Lewis and W. Miller Jr., "Computational Methods of Neutron Transport," John Wiley & Sons, London, (1984).
- [13] J. L. Lions, "Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal," Lecture Notes in Mathematics, vol 323, Springer-Verlag, (1973).
- [14] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod-Gaithier-Villars, Paris, 1969.
- [15] Stevens. A., Velazquez, J.J.L., Partial differential equations and non-diffusive structures. *Non-linearity* **21**, 283-289 (2008).
- [16] V. S. Vladimirov, *Mathematical problems in one-speed particle transport theory*, Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 61 (1961).
- [17] S. Guesmia, Etude du comportement asymptotique de certaines équations aux dérivées partielles dans des domaines cylindriques, Thèse Université de Haute Alsace, December (2006).
- [18] R. Dautray and J. L. Lions, "Analyse mathématique et calcul numérique," volume 3, Masson, (1987).
- [19] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order," Springer Verlag, (1983).
- [20] O.A. Ladyženskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Uralcéva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translated from the Russian by S. Smith Transl. Math. Monogr., vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.